ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS

FORMULACIÓN DE UN PLAN DE SEGUROS DE VIDA PARA FAMILIAS MEDIANTE MODELOS DE DEPENDENCIA: UNA APLICACIÓN AL CASO ECUATORIANO

TRABAJO DE INTEGRACIÓN CURRICULAR PRESENTADO COMO REQUISITO PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE INGENIERO MATEMÁTICO

JORGE ARTURO PROAÑO TORRES

jorge.proano01@epn.edu.ec

DIRECTOR: MSC.DIEGO PAÚL HUARACA SAGÑAY

diego.huaracas@epn.edu.ec

CODIRECTOR: MSC.MENTHOR OSWALDO URVINA MAYORGA

menthor.urvina@epn.edu.ec

DMQ, FEBRERO 2022

CERTIFICACIONES

Yo, JORGE ARTURO PROAÑO TORRES, declaro que el trabajo de integración curricular aquí descrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y, que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

Jorge Arturo Proaño Torres

Certifico que el presente trabajo de integración curricular fue desarrollado por Jorge Arturo Proaño Torres, bajo mi supervisión.

MSc.Diego Paúl Huaraca Sagñay
DIRECTOR

MSc.Menthor Oswaldo Urvina Mayorga
COIRECTOR

DECLARACIÓN DE AUTORÍA

A través de la presente declaración, afirmamos que el trabajo de integración curricular aquí descrito, así como el(los) producto(s) resultante(s) del mismo, es(son) público(s) y estará(n) a disposición de la comunidad a través del repositorio institucional de la Escuela Politécnica Nacional; sin embargo, la titularidad de los derechos patrimoniales nos corresponde a los autores que hemos contribuido en el desarrollo del presente trabajo; observando para el efecto las disposiciones establecidas por el órgano competente en propiedad intelectual, la normativa interna y demás normas.

Jorge Arturo Proaño Torres

MSc.Diego Paúl Huaraca Sagñay

MSc.Menthor Oswaldo Urvina Mayorga

DEDICATORIA

A mi madre por darme la vida, haberme enseñado valores y principios los cuales son ahora mi esencia, y ser mi máxima inspiración para luchar por el sueño de ser profesional.

A mi padre quien me heredó su templanza y fuerza de carácter para afrontar nuevos retos.

A mis hermanas quienes me inspiraron profesionalmente y me regalaron muchos momentos felices.

A mis sobrinos quienes me alegraron la vida en los momentos más duros de mi vida.

A Enma Torres y José Garrido quienes me abrieron las puertas de su hogar y me regalaron valiosos consejos de vida.

Al amor de mi vida por regalarme tantos momentos felices y ser mi inspiración para escribir este documento.

AGRADECIMIENTO

Al Ecuador, a mi familia, a la Escuela Politécnica Nacional quienes me dieron la oportunidad de un ser profesional al servicio de la sociedad, además agradecer al MSc. Diego Huaraca por su oportuna orientación, paciencia y apoyo en el presente trabajo, igualmente doy las gracias a compañeros, a quienes valoro, les guardo mucho cariño y respeto por brindarme su ayuda durante estos años de carrera; de la misma forma agradecer a los profesores que me instruyeron y acompañaron en toda la carrera, también a mis abuelos, demás familiares y amigos que me apoyaron durante todo este tiempo y finalmente a todos los matemáticos de la historia sin su investigación todo esto no sería posible, en especial a Georg Cantor y Sophie Germain, mis referentes.

RESUMEN

En el presente trabajo de integración curricular se desarrolló un seguro de vida múltiple usando la teoría de modelos de dependencia, se ha partido definiendo el estatus de extinción del tipo último superviviente, en el cual, un grupo deja de existir solo si todos los miembros del mismo han muerto, posteriormente se calculó las expresiones para las probabilidades para el estatus de último superviviente y las probabilidades de transición general por medio de propiedades de cadenas de Markov y Teoría de Probabilidades.

Posteriormente, se introdujo la propiedad de dependencia de cuadrante positivo el cual permite establecer que las vidas restantes de los miembros de una familia dependen del estado de vida de los demás miembros de la familia. Luego, hemos calculado las expresiones de la prima y la anualidad del seguro de vida de último superviviente en función de las probabilidades de transición y propiedades de las cadenas de Markov. Se estimó los parámetros de la ley de mortalidad de Gompertz y Makeham y las estimaciones de las fuerzas de mortalidad derivadas de la dependencia del cuadrante positivo.

Finalmente, se implementó todo lo anterior mediante librerías del software estadístico R, se calculó la prima pura, y se aplicó recargos de gestión interna y externa, cualquier otro recargo adicional será muy sencillo de implementar; se ha comparado los resultados obtenidos con seguros de vida individuales respecto a su reserva y primas, y se determinó que el seguro de vida desarrollado es la mejor opción para asegurar a los miembros de una familia ecuatoriana.

Palabras clave: cadenas de Markov, último superviviente, probabilidades de transición, fuerza de mortalidad, dependencia de cuadrante positivo, reserva matemática, prima nivelada.

ABSTRACT

In this curricular integration work, a multiple life insurance policy was developed using the theory of dependency models, starting by defining the last survivor extinction status, in which a group ceases to exist only if all its members have died. Afterwards, the expressions for the probabilities for the last survivor status and general transition using properties of Markov chains and Probability theory.

Subsequently, we introduced the positive quadrant dependence property which allows us to establish that the remaining lives of the members of a family depend on the life status of the other members of the family. Then, we calculated the expressions of the premium and annuity of the last survivor life insurance as a function of the transition probabilities and properties of Markov chains. We estimated the Gompertz and Makeham mortality law parameters and estimates of mortality forces derived from positive quadrant dependence.

Finally, all the above was implemented using libraries of the statistical software R, the pure premium was calculated, and internal and external management surcharges were applied, any other additional surcharge will be very easy to implement; the results obtained have been compared with individual life insurance with respect to its reserve and premiums, and it was determined that the life insurance developed is the best option to insure the members of an Ecuadorian family.

Keywords: Markov chains, last survivor, transition probabilities, mortality force, positive quadrant dependence, mathematical reserve, level premium..

Índice general

Índice de figuras

Capítulo 1

Descripción del componente desarrollado

En el presente trabajo de integración curricular se ha desarrollado un nuevo producto actuarial para el mercado asegurador, correspondiente a un plan de seguro de vida múltiple denominado de **último superviviente** para familias ecuatorianas, cuya prima y cuantía son competitivas respecto a las alternativas que se puedan elegir para asegurar a cada miembro de la familia, brindando facilidades de pago al nivelar la prima para que esta sea pagada durante los años que el cliente se comprometa a pagar; el tipo de seguro de vida que se formuló es ofertado actualmente en países como: Estados Unidos, Reino Unido, India, España, entre otros.[12]

En la actualidad, el mercado asegurador ecuatoriano está compuesto de 30 empresas aseguradoras, las cuales ofrecen seguros de vida y seguros generales como: de autos, incendio, hurto, transportes, accidentes personales, caución y crédito, salud, responsabilidad civil, etc; entre los planes de seguro de vida se encuentran los seguros de vida individual y colectivo, estos últimos contratados en su mayoría por empresas privadas para sus trabajadores y por bancos para sus clientes, al término del 2020 el segmento de seguros de vida en el Ecuador, representó el 24,6 % del total, evidenciando un crecimiento a una tasa anual de 8.7 % en los últimos 5 años, adicionalmente, para los próximos años se estima que esta tendencia se mantenga creciente.[11]

En la teoría actuarial convencional el cálculo de las primas se basa en el supuesto de independencia de las vidas restantes del cónyuge e hijos, este enfoque no es realista, estudios empíricos sugieren que existe dependencia en la vida restante de los miembros de una familia [3], debido a que todos comparten una forma de vida en común, además están más o menos expuestos a los mismos riesgos. La teoría de seguros de vida múltiple en conjunto a la de modelos de dependencia nos proporciona las herramientas necesarias para plantear el producto actuarial que hemos desarrollado, en el cual la cuantía se paga según el orden de fallecimiento y el número de asegurados es dos o más, considerando el supuesto de dependencia a largo plazo de las vidas restantes de los miembros de la familia, el impacto a corto plazo de la muerte de un individuo y la dependencia instantánea debido a un evento catastrófico.[16]

Escogimos a la ley de Gompertz y Makeham como la fuerza de mortalidad, con ella hemos calculado las fuerzas de mortalidad marginales para cada miembro de la familia, con ello hallamos las probabilidades de supervivencia y fallecimiento de transición y las fuerzas de mortalidad de transición, lo cual fue útil para obtener la prima y cuantía del plan de seguro de último superviviente, el cual es pagado cuando todos los miembros de la familia mueren, esto permitirá a las familias ecuatorianas poder tener un fondo patrimonial y a las empresas aseguradoras ofrecer primas más bajas y obtener más rentabilidad en sus inversiones.

Todo este planteamiento resulta conveniente para las empresas aseguradoras para ofertar este producto debido a que el cálculo de la reserva matemática para asegurar a todos los miembros de la familia es más preciso, esto permite gestionar de mejor forma el riesgo de los recursos de las empresas aseguradoras, se ha contemplado en este producto actuarial los gastos de gestión interna, externa y recargos, se ha comparado con planes individuales obteniéndose primas competitivas para el mercado asegurador ecuatoriano.

1.1. Objetivo general

Formular un seguro de vida para las familias ecuatorianas mediante modelos de dependencia.

1.2. Objetivos específicos

1. Identificar la ley de supervivencia que permitirá ajustar la mortalidad de la población ecuatoriana.
2. Formular planes de seguro de vida que permitan obtener primas atractivas para el mercado asegurador ecuatoriano considerando los gastos de gestión interna, gastos de gestión externa y recargos.
3. Implementar las fórmulas para el cálculo de las primas, probabilidades de supervivencia, fuerza de mortalidad del seguro de último superviviente en el software R.
4. Modelar la dependencia de las vidas restantes de los miembros de la familia por medio de las fuerzas de mortalidad de transición y analizar el impacto instantáneo, a corto plazo y a largo plazo de la dependencia de las vidas de cada miembro.
5. Calcular la reserva matemática del seguro propuesto.

1.3. Alcance

La pandemia de COVID-19 ha evidenciado la necesidad de que el mercado asegurador ecuatoriano ofrezca seguros de vida múltiples para que las familias ecuatorianas puedan asegurar a todos los miembros de la familia y con ello brindar una vida digna a todos los beneficiarios. Se espera que el seguro de vida propuesto permita a las familias ecuatorianas poder tener un fondo patrimonial en caso de que todos los asegurados fallezcan.

Se pretende que el seguro de vida desarrollado, sea competitivo en el mercado asegurador ecuatoriano, para ello se ofrecerá facilidades de pago por medio del fraccionamiento de la prima, además las empresas aseguradoras podrán integrar al producto los gastos de gestión interna y externa de manera sencilla, el cálculo de la reserva matemática de este producto actuarial permitirá que las empresas puedan gestionar los riesgos de manera eficiente y mantener en solvencia un sistema de pagos de seguros.

Una de las dificultades que presenta el proyecto es el cálculo de la prima del seguro de vida múltiple, hemos comparado cuánto costaría adquirir en nuestro país seguros de vida individual para cada miembro de la familia, no podemos comparar los precios de seguros similares en países como Estados Unidos o Canadá, pues las condiciones sociodemográficas, económicas y políticas son distintas a nuestro país, además hay pocos datos demográficos y los pocos que hay se encuentran desactualizados y sin ser desagregados por edad. Por otro lado, los resultados de la aplicación del seguro de vida no podrán ser analizados en el presente trabajo de integración curricular ya que estos requieren de mucho tiempo y estudios de mercado y capital económico para el lanzamiento en una empresa aseguradora, nos bastará con ser competitivos en precios, beneficios y una buena gestión del riesgo por medio de la reserva matemática.

1.4. Marco teórico

1.4.1. Antecedentes:

Uno de los supuestos que se usa al momento de asegurar a una familia es no considerar que los integrantes están expuestos a los mismos riesgos[15], esto genera inconvenientes en el cálculo de las probabilidades de muerte y supervivencia, por ende, en el cálculo de las primas y anualidades. Diversos estudios apuntan a que la dependencia de las vidas restantes de los miembros de una familia es un proceso estocástico modelado por cadenas de Markov o semi-Markov con un número finito de estados, se usa uno u otro dependiendo de las propiedades de la tasa instantánea de mortalidad [6]. Se analiza también la dependencia de cuadrante positivo la cual describe una característica de que los valores grandes de una variable aleatoria están relacionados con los valores grandes de otra variable.

Para elaborar un seguro de vida mediante la teoría de los modelos de dependencia se debe fijar una ley de mortalidad, las cuales pueden ser Gompertz(1825) o Gompertz-Makeham (1866), además un estatus de extinción de los grupos: de vida conjunta o último superviviente, por medio de la dependencia de las vidas restantes, los impactos de las muertes en cada miembro de la familia y el estatus de extinción se pueden generar dos tipos de seguros de vida múltiples: los seguros de vida conjunta y seguro de último superviviente, los cuales realizan el pago de la cuantía dependiendo el orden de fallecimiento de los asegurados [3].

1.4.2. Definiciones

Es importante que en el contexto del mercado asegurador ecuatoriano se conozca la normativa y definiciones que configuran un seguro de vida. Las entidades aseguradoras y los productos actuariales que ofrecen están regulados por la Superintendencia de compañía, seguros y valores y normados por la Ley General de Seguros. Los conceptos presentados a continuación han sido extraídos de la Ley General de Seguros y del glosario de términos de la Superintendencia de compañía, seguros y valores.

DEFINICIÓN 1.1. ***Seguro de vida individual:*** *El artículo 2 de la Ley General de Seguros [1]menciona que un seguro de vida son coberturas contratadas a nombre de una sola persona, mediante las cuales se garantiza que el pago por la empresa de seguros de la cantidad estipulada en el contrato dependa del fallecimiento o supervivencia del asegurado en una época determinada,incluye vida entera, renta vitalicia o temporal, renta de jubilación, educación, desgravamen, entre otras...*

DEFINICIÓN 1.2. ***Empresa aseguradora:*** *De acuerdo con la Ley General de Seguros [1] art. 3 en Ecuador son compañías anónimas constituidas en el territorio nacional y las sucursales de empresas extranjeras, establecidas en el país cuyo objeto exclusivo es el negocio de asumir directa o indirectamente o aceptar y ceder riesgos en base a primas...*

Las empresas de seguros son: de seguros generales, de seguros de vida y *las que operaban al 3 de abril de 1998 en conjunto en las dos actividades...*

Las de seguros generales.- Son aquellas que aseguren los riesgos causados por afecciones, pérdidas o daños de la salud, de los bienes o del patrimonio y los riesgos de fianza o garantías.

Las de seguros de vida.- Son aquellas que cubren los riesgos de las personas o que garanticen a éstas dentro o al término de un plazo, un capital o una renta periódica para el asegurado y sus beneficiarios...

DEFINICIÓN 1.3. ***Asegurado:*** *El asegurado es la persona que es titular del interés asegurable, o sea aquella cuyo patrimonio o persona puedan resultar afectados, directa o indirectamente, por la realización de un siniestro.*

DEFINICIÓN 1.4. ***Beneficiario:*** *El beneficiario es quien percibe la indemnización en caso de siniestro.*

DEFINICIÓN 1.5. ***Póliza:*** *La póliza es el instrumento privado, que permite probar que el contrato de seguro se ha suscrito y permite así mismo que, en caso de controversia entre las partes, este instrumento sea exhibido ante los tribunales como prueba de la relación existente entre el asegurado y el asegurador.*

DEFINICIÓN 1.6. ***Capital asegurado:*** *Capital asegurado equivale a decir límite máximo de responsabilidad de la aseguradora en caso de indemnización.*

DEFINICIÓN 1.7. ***Cobertura:*** *Dentro del contrato de seguro son todos y cada uno de los riesgos que el asegurador se compromete a cubrir y los cuales se encuentran señalados en la póliza...*

DEFINICIÓN 1.8. ***Prima Neta:*** *Prima emitidas por la aseguradora en la que no están incluidos los impuestos.*

DEFINICIÓN 1.9. ***Prima Comercial:*** *Es el costo neto de una póliza, las variables que intervienen para su cálculo son:*

- *Prima Neta* P
- *Recargo por gastos de gestión interna.*

- *Recargo por gastos de gestión externa.*

Así la prima comercial es:

$$P_c = P(1+\alpha)(1+\beta) \tag{1.1}$$

DEFINICIÓN 1.10. ***Prima devengada:*** *Parte de la prima que corresponde al periodo de la póliza que ha transcurrido.*

DEFINICIÓN 1.11. ***Riesgo:*** *Es un evento que en caso de producirse obliga al asegurador a pagar la indemnización convenida.*

DEFINICIÓN 1.12. ***Tasa(De prima)*** *Es el porcentaje que se aplicará sobre la suma asegurada para obtener el precio del seguro.*

DEFINICIÓN 1.13. ***Tablas de mortalidad*** *Son el elemento fundamental en los seguros de vida para el cálculo de los diferentes tipos de tarifa. Indican las probabilidades teóricas de mortalidad y sobrevivencia que se dan en las personas según su edad respectiva, permitiendo conocer por tanto la duración media de su vida.*

DEFINICIÓN 1.14. ***Reservas matemáticas*** *El artículo 21 de la Ley General de Seguros menciona que las reservas reservas matemáticas se constituirán sobre la base de cálculos actuariales para los seguros de vida individual y renta vitalicia, de conformidad con las normas establecidas por la Superintendencia de Compañías, Valores y Seguros...*

Además es necesario incluir otros conceptos técnicos y de matemáticas financieras que no se encuentran en el glosario de términos [2] o que son propios de los modelos de dependencia, estos han sido consultados en [16] y [13].

DEFINICIÓN 1.15. ***Fuerza de Mortalidad (ley de mortalidad)*** *Denotada por μ_x, representa la probabilidad de que en un instante x un individuo que se encuentra vivo, fallezca en el siguiente intervalo de tiempo Δt.*

$$\mu_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta_t q_x}{\Delta_t} \tag{1.2}$$

Donde la probabilidad de que un individuo de edad x sobreviva al instante

t, se define como:

$$ {}_tp_x = exp\left(-\int_0^t \mu_{x+s} ds\right) \tag{1.3} $$

DEFINICIÓN 1.16. ***Ley de mortalidad de Gompertz*** *Este modelo de mortalidad asume que la mortalidad crece exponencialmente con la edad.*

$$ \mu_x = Bc^x, \quad x \geq 0, B > 0, c > 1 \tag{1.4} $$

DEFINICIÓN 1.17. ***Ley de mortalidad de Gompertz-Makeham*** *Este modelo de mortalidad asume que la mortalidad crece exponencialmente con la edad y de una componente de mortalidad que no depende de la edad.*

$$ \mu_x = A + Bc^x, \quad x \geq 0, B > 0, c > 1, A \geq -B \tag{1.5} $$

DEFINICIÓN 1.18. ***Anualidad:*** *Son una pagos realizados de manera regular durante un determinado tiempo mientras el beneficiario siga vivo.*

DEFINICIÓN 1.19. ***Anualidad prepagables temporales:*** *Consiste en el pago de una cuantía de una unidad monetaria al inicio de cada periodo. Se la denota como $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ y se expresa:*

$$ \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k {}_kp_x \tag{1.6} $$

DEFINICIÓN 1.20. ***Estatus extinción del tipo conjunta*** *El grupo de individuos de edades $x_1, x_2, \ldots x_n$ se extingue si k miembros del grupo han sobrevivido.*

De esta forma la probabilidad de supervivencia del grupo de individuos al instante $x_1 + t, \ldots, x_n + t$ para $t > 0$ viene dada por:

$$ {}_tp_{x_1,\ldots,x_n} = \prod_{i=1}^{n} {}_tp_{x_i} \tag{1.7} $$

Además la probabilidad de fallecimiento se expresa de la siguiente mane-

ra:

$$ {}_tq_{x_1,\ldots,x_n} = \sum_{i=1}^{n} {}_tq_{x_i} - \prod_{i=1}^{n} {}_tq_{x_i} \tag{1.8} $$

En caso de que se extienda un seguro de vida completo para el estado de vida conjunta de dos personas, el cual proporciona un pago al final del año de la primera muerte y su prima única pura se define por:

$$ A_{x_1,\ldots,x_n} = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} {}_kp_{x_1,\ldots,x_n} q_{x_1+k:\cdots:x_n+k} \tag{1.9} $$

Además la anualidad se calcula como:

$$ \ddot{a}_{x_1,\ldots,x_n} = \sum_{k=0}^{\infty} v^k {}_kp_{x_1,\ldots,x_n} \tag{1.10} $$

Definición 1.21. ***Estatus de extinción del tipo último superviviente***
El grupo de individuos de edades $\overline{x_1, x_2, \ldots x_n}$ sobrevive si al menos uno de los individuos sobrevive al tiempo t.

De esta forma la probabilidad de supervivencia del grupo de individuos al instante $x_1 + t, \ldots, x_n + t$ para $t > 0$ viene dada por:

$$ {}_tp_{\overline{x_1,x_2,\ldots x_n}} = \sum_{i=1}^{n} {}_tp_{x_i} - \prod_{i=1}^{n} {}_tp_{x_i} \tag{1.11} $$

Además la probabilidad de fallecimiento se expresa de la siguiente manera:

$$ {}_tq_{\overline{x_1,x_2,\ldots x_n}} = \prod_{i=1}^{n} {}_tq_{x_i} \tag{1.12} $$

En caso de que se extienda un seguro de vida completo para el estado de vida conjunta de dos personas, proporciona un pago al final del año de la *primera muerte y su prima única pura se define por:*

$$\begin{aligned}
A_{\overline{x_1,\ldots,x_n}} &= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} P[K(\overline{x_1,\ldots,x_n}) = k] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \left(\sum_{i=1}^{n} {}_kp_{x_i} q_{x_i+k} - {}_kp_{x_1,\ldots,x_n} * q_{x_1,\ldots,x_n+k} \right) \qquad (1.13)
\end{aligned}$$

Además la anualidad se calcula como:

$$A_{\overline{x_1,\ldots,x_n}} = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k} \left(\sum_{i=1}^{n} {}_kp_{x_i} q_{x_i+k} - {}_kp_{x_1,\ldots,x_n} \right) \qquad (1.14)$$

Definición 1.22. ***Prima fraccionada:*** *Cuando por acuerdo con la empresa aseguradora el pago de la prima no se realiza en un solo desembolso y se consideran como frecuencia de pagos inferiores a un año (mes, trimestre, semestre), se representa como $P_n^{(m)}$, donde m es el número de periodos en los cuales se ha fraccionado la prima. De esta forma se tiene que:*

$$P_n^{(m)} = \frac{P_c}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \qquad (1.15)$$

Donde P es la prima comercial del seguro de vida.

Definición 1.23. ***Prima fraccionada no liberatoria:*** *En este caso el beneficiario del seguro es quien hará frente a las primas no pagadas tras el fallecimiento del asegurado:*

$$P_n^{(m)} = \frac{E[\text{VA Prima Pura}]}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)}} \qquad (1.16)$$

Donde $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)}$ es la anualidad fraccionada es decir la periodicidad de los pagos es inferior a un año de amplitud $1/m$.

Definición 1.24. ***Prima fraccionada liberatoria:*** *En este caso el beneficiario del seguro no hará frente a ninguna de las primas no pagadas tras el fallecimiento del asegurado:*

$$P_n^{(m)} = \frac{E[\text{VA Prima Pura}]}{{}_n\ddot{a}_{x}^{(m)}} \qquad (1.17)$$

Donde $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)}$ *es la anualidad de* $n * m$ *pagos con frecuencia de* $1/m$ *años.*

Capítulo 2

Metodología

2.1. Método

La metodología empleada para la formulación de un seguro de vida múltiple para familias ecuatorianas mediante la teoría de modelos de dependencia fue el método sintético, es decir partimos de los fundamentos de la teoría actuarial convencional y las matemáticas financieras, además definimos a la dependencia de las vidas restantes como la hipótesis de nuestra investigación, luego se definen los estados de extinción del tipo conjunta y de último superviviente, lo cual nos permitirá entender a los seguros de vida múltiple mediante la teoría de los modelos de dependencia como una generalización de los seguros de vida individuales.

La forma en la que los seguros de vida se construyen ya sea individuales o múltiples siguen el mismo patrón, es necesario partir definiendo un modelo biométrico es decir, determinar las probabilidades de supervivencia y muerte inmediata o diferida, posteriormente elegir un modelo de mortalidad que ayude a calcular las probabilidades de supervivencia y por ende, de mortalidad de una determinada población. De manera similar para los modelos de dependencia se puede definir la variable aleatoria del valor actual de las prestaciones y la prima del seguro de vida múltiple, el fraccionamiento de la misma y el cálculo de la reserva matemática para gestionar la solvencia de una compañía de seguros.

El estatus de extinción de grupos escogido para el desarrollo del presente Trabajo de Integración Curricular es del tipo último superviviente, esto permite definir las expresiones de las probabilidades de supervivencia y las primas del seguro de vida múltiple del tipo último superviviente, el cual será la opción más barata, pues se paga cuando el grupo se extingue y no en la primera o segunda muerte como es el caso de los seguros de vida del tipo "vida conjunta", esto permite a la empresa aseguradora mantener el dinero por más tiempo para realizar inversiones; según la teoría actuarial convencional es necesario definir un modelo de mortalidad, en nuestro caso hemos tomado el modelo de Gompertz y Makehan (1866) con el cual obtendremos la fuerza de mortalidad μ_x para una población determinada que en nuestro caso es la ecuatoriana, [3] determina que las fuerzas de mortalidad de los miembros de la familia dependen a largo plazo de si los otros miembros siguen vivos, es decir, si un miembro de la familia está vivo, la fuerza de la mortalidad depende de su edad exacta y de la edad de los demás miembros, el impacto a corto plazo se da cuando un miembro de la familia muere y con ello es más probable que los otros mueran y el impacto instantáneo se da cuando existe un evento catastrófico en la que todos mueren, con ello se definen las fuerzas de mortalidad de transición: $\mu_s^{i,j}$, con $i \neq j$, $i, j \in \{0, 1, \dots\}$, que dependen del estado de vida o muerte de cada miembro de la familia.

Las probabilidades de supervivencia son calculadas una vez que se remplace las fuerzas de mortalidad en la definición de probabilidad de transición de una cadena de Markov continua:

$$ {}_tp_s^{ij} = exp\left\{-\int_0^t \sum_{i,j\in\{0,1,\dots,n\}} \mu_{s+\tau}^{ij} d\tau\right\}, \quad k \in \{0, \dots n+1\} \tag{2.1} $$

De esta forma se puede calcular la fórmula de la prima fraccionada del seguro de vida múltiple considerando el estatus de extinción de último superviviente:

$$P_{x_1,\ldots,x_k:\overline{n}|} = \frac{A_{\overline{x_1,\ldots,x_k}:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{\overline{x_1,\ldots,x_k}:\overline{n}|}} \tag{2.2}$$

La reserva matemática ayuda a mantener la solvencia de una compañía de seguros, además a gestionar el riesgo de inversiones. La reserva matemática es el monto de dinero que la compañía de seguros debe tener durante el periodo de cobertura de un seguro. Para las teoría actuarial convencional el cálculo de la reserva matemática ${}_tV_{x_1,\ldots,x_n}$ se realiza de la siguiente manera:

$${}_tV_{x_1,\ldots,x_n} = VAA_{Prestaciones} - VAA_{Primas} \tag{2.3}$$

Donde $VAA_{Prestaciones}$: Valor actuarial de las prestaciones y VAA_{Primas} : Valor actuarial de las primas.

Para el cálculo de la reserva matemática en los seguros de vida múltiple de último superviviente se debe considerar: si todos los miembros de la familia están vivos durante el fin de año de la cobertura, si están vivos algunos miembros de la familia o si está al menos un miembro de la familia vivo.

$${}_tV_{\overline{x_1,\ldots,x_n}:n\overline{n}|} = A_{\overline{x_1,\ldots,x_k}:\overline{n}|} - P_{x_1,\ldots,x_k:\overline{n}|} * \ddot{a}_{\overline{x_1,\ldots,x_k}:\overline{n}|} \tag{2.4}$$

2.2. Enfoque

Para esta investigación se empleará un enfoque cuantitativo pues buscaremos describir, explicar, poner a prueba los modelos de dependencia para formular seguros de vida múltiples. Analizaremos el impacto que genera la hipótesis de dependencia de las vidas restantes de los miembros de una familia[17].

Para hallar las probabilidades de supervivencia del estatus de extinción del tipo último superviviente debemos definir el estado de vida:

$$u = \overline{x_1, \ldots, x_n} \tag{2.5}$$

Donde x_i son las edades de los n individuos, el estatus de último superviviente nos dice que el grupo u "sobrevive", si al menos uno de los miembros de la familia sobrevive y deja de existir cuando fallece el último superviviente [16][4].

Por tanto el tiempo de fallecimiento del último superviviente puede ser escrito como:

$$T(u) = max(T_{x_1}, \ldots, T_{x_n}) \tag{2.6}$$

Para el cálculo de probabilidades de supervivencia y fallecimiento es necesario recordar el siguiente principio de inclusión y exclusión de probabilidades:

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \left\{ \sum_{J \in \{1,\ldots,n; Card(J)=k\}} P\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right) \right\} \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) - \cdots + (-1)^{\ell+1} \sum_{i_1,<\ldots<i_\ell} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \end{aligned} \tag{2.7}$$

Así por (2.7) la probabilidad de que el estatus u exista hasta la edad $u + t$ denotada por ${}_tp_{\overline{x_1,\ldots,x_n}}$, para $t \geq 0$ está dada por:

$$
\begin{aligned}
{}_tp_{\overline{x_1,\dots,x_n}} &= P\left[T(\overline{x_1,\dots,x_n}) > t\right] \\
&= P\left[max(T_{x_1},\dots,T_{x_n}) > t\right] \\
&= P\left(\bigcup_{i=1}^{n} T_{x_i} > t\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} P(T_{x_i} > t) - \sum_{i<j} P(T_{x_i} > t \cap T_{x_j} > t) - \dots + \\
&(-1)^{\ell+1} \sum_{i_1,<\dots<i_\ell} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} T_{x_i} > t\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} {}_tp_{x_i} - \sum_{i<j} {}_tp_{x_i} * {}_tp_{x_j} - \dots + (-1)^{\ell+1} \sum_{i_1,<\dots<i_\ell} P\left(\prod_{i=1}^{n} {}_tp_{x_i}\right) \qquad (2.8)
\end{aligned}
$$

Por otro lado la probabilidad de fallecimiento, se la puede calcular como:

$$
\begin{aligned}
{}_tq_{\overline{x_1,\dots,x_n}} &= P\left[T(\overline{x_1,\dots,x_n}) < t\right] \\
&= P(T_{x_1} < t,\dots,T_{x_n} < t) \\
&= \prod_{i=1}^{n} P(T_{x_i} < t) \qquad \text{(suponiendo independencia)} \\
&= \prod_{i=1}^{n} {}_tq_{x_i} \qquad (2.9)
\end{aligned}
$$

Notar que en el caso discreto la probabilidad de una variable $K(\overline{x_1,\dots,x_n})$, que representa el número de años futuros completados sobrevividos por el estado de último sobreviviente, se calcula como:

$$
\begin{aligned}
P[K(\overline{x_1,\dots,x_n}) = k] &= P\left[k < T(\overline{x_1,\dots,x_n}) < k+1\right] \\
&= {}_{k|}p_{\overline{x_1,\dots,x_n})} \qquad \text{(donde } {}_{k|}q_x = {}_kp_x q_{x+k}\text{)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} {}_kp_{x_i} q_{x_i+t} - \sum_{i<j} {}_kp_{x_i,x_j} q_{x_i+k:x_j+k} - \dots + \\
&(-1)^{\ell+1} \sum_{i_1,<\dots<i_\ell} {}_kp_{x_1,\dots,x_n} q_{x_1+k:\dots:x_n+k} \qquad (2.10)
\end{aligned}
$$

Ahora por (2.10) podemos calcular las primas de un seguro de vida múltiple que paga una unidad al final del año de la última muerte:

$$\begin{aligned} A_{\overline{x_1,\ldots,x_n}} &= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} P[K(\overline{x_1,\ldots,x_n}) = k] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \left(\sum_{i=1}^{n} {}_tp_{x_i} q_{x_i+t} + \cdots + (-1)^{\ell+1} \sum_{i_1,<\ldots<i_\ell} {}_tp_{x_1,\ldots,x_n} q_{x_1+t:\cdots:x_n+t} \right) \end{aligned} \tag{2.11}$$

Es posible determinar la anualidad para una familia por medio de (2.8), de la siguiente manera:

$$\ddot{a}_{\overline{x_1,\ldots,x_n}} = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k} \left(\sum_{i=1}^{n} {}_tp_{x_i} + \cdots + (-1)^{\ell+1} \sum_{i_1,<\ldots<i_\ell} {}_tp_{x_1,\ldots,x_n} \right) \tag{2.12}$$

El modelo de extinción del tipo último superviviente captura la interdependencia entre las vidas restantes de los miembros de una familia, teniendo en cuenta las fuerzas de mortalidad que dependen si los otros miembros de la familia siguen vivos y de la edad exacta de cada uno de ellos, por ejemplo, en el caso de un matrimonio, si la cónyuge de edad $y+t$ está viva, la fuerza de mortalidad dependerá de su edad exacta y de la edad $x+t$ del cónyuge(dependencia a largo plazo), la fuerza de mortalidad asociado a este estado se denota $\mu^{00}_{x+t:y+t}$. Sin embargo si la cónyuge murió, entonces la fuerza de mortalidad del cónyuge, denotada μ^{13}_{x+t}, depende solamente de su edad actual y el hecho de que su cónyuge murió (dependencia a corto plazo), de manera análoga denotamos $\mu^{02}_{x+t:y+t}$ a la fuerza de mortalidad del cónyuge de edad $x+t$ cuya cónyuge está viva y μ^{23}_{y+t} la fuerza de mortalidad de la cónyuge de edad $y+t$ en el que su cónyuge ha fallecido y finalmente el estado μ^{03} corresponde al caso catastrófico (dependencia instantánea) de que ambos cónyuges fallezcan a la vez [16][3]. De esta forma, podemos determinar que el estado futuro de los miembros de una familia se puede considerar un proceso de Markov continuo [1] en el tiempo $\{X_t : t \geq t\}$, con el espacio de estados que cons-

[1]**Proceso de Markov continuo:** Es un proceso estocástico en tiempo continuo, $x(t)$, $t \geq 0$, espacio de estados S, que cumple que: $P[x(t) = j|x(s) = i, x(t_{n-1}) = i_{n-1}, \ldots, x(t_1) =$

ta de los 4 estados mencionados, esto es más sencillo visualizarlo en un diagrama:

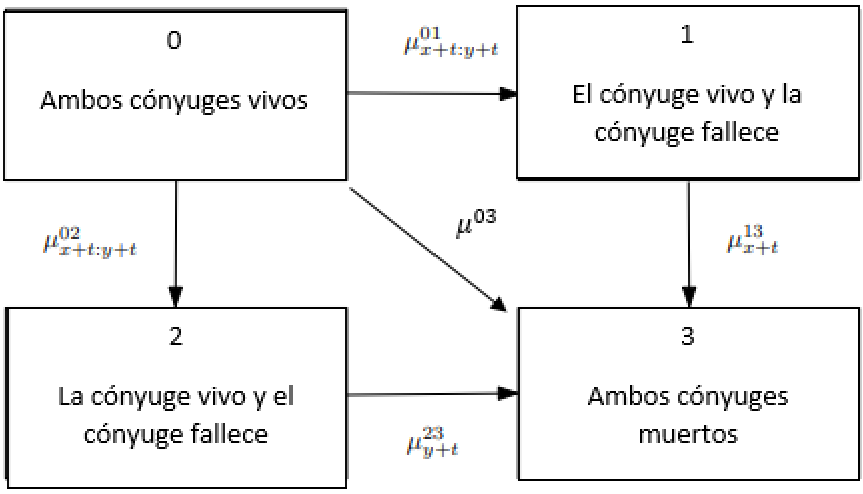

Figura 2.1: Modelo de último superviviente con las fuerzas de mortalidad que dependen del estado de vida del cónyuge

Si se considera una familia de 3 miembros, notar que la dependencia a corto largo plazo será representada por la fuerza de mortalidad μ^{00}, las dependencias a corto plazo por μ^{ij}, con $i \neq j$ y finalmente la dependencia instantánea será representada por μ^{77}, aquello se puede ver en la figura 2.2.

Ahora bien si se considera una familia de n miembros, se obtiene que el espacio de estados va a ser de cardinalidad 2^n, pues hay que considerar los casos en que fallece un miembro, por pares, tríos y todas las combinaciones posibles sin repetición.

Si este esquema se repite para familias de mayor tamaño vamos a obtener que para $n > 2$, el número de fuerzas de mortalidad de transición (μ^{ij}) que se van a generar es:

$$\# = n! + 2^{n+1} - 3 \tag{2.13}$$

.

Definimos la probabilidad de transición ${}_tp_s^{ij}$, como la probabilidad condi-

$i_1] = P[x(t) = j|x(s) = i]$, donde $(i_1, \ldots, i_{n-1}, i, j) \in S$ es una secuencia no decreciente de (n+1) tiempos

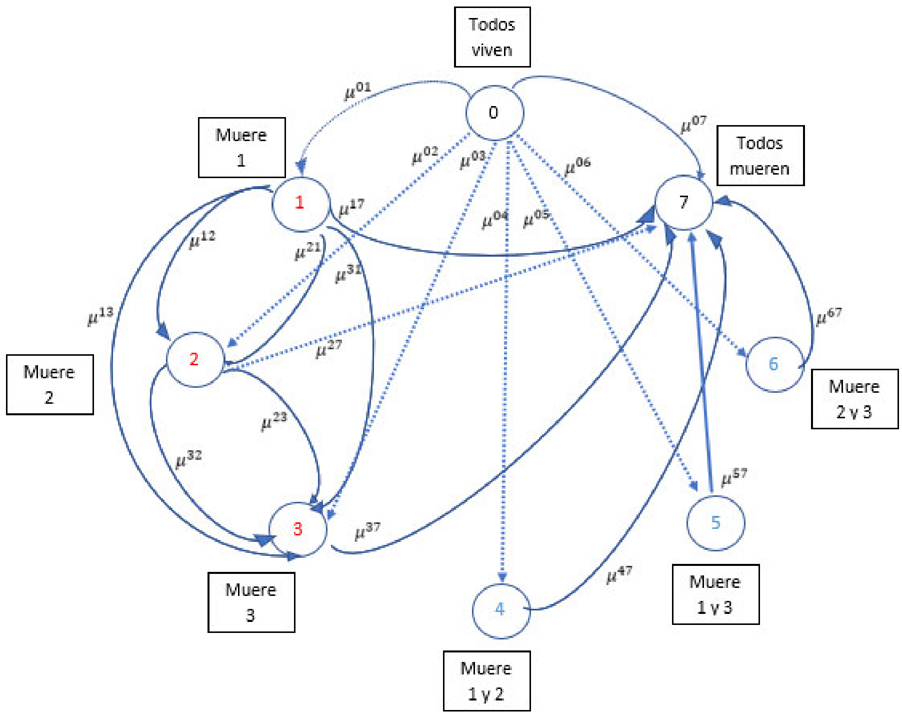

Figura 2.2: Modelo de último superviviente con las fuerzas de mortalidad que dependen del estado de vida de cada miembro de la familia de n=3 personas

cional [6] [16] de que el miembro de la familia que estaba en el estado j en el tiempo $s+t$ cambie al estado i en el tiempo s:

$$_tp_s^{ij} = P[X_{s+t} = j | X_s = i] \quad \text{para } i,j \in \{0,1,\ldots,2^n\} \text{ y } s,t > 0 \tag{2.14}$$

Por otro lado, la probabilidad de que el proceso de Markov no cambie del estado i entre los tiempos s y $s+t$ en el modelo de dependencia de último superviviente es:

$$_tp_s^{ii} = exp\left\{-\int_0^t \sum_{j\in\{0,1,\ldots,2^n\}, j\neq i} \mu_{s+\tau}^{ij} d\tau\right\}, \quad i \in \{0,\ldots 2^n\} \tag{2.15}$$

Lo anterior ayudará a encontrar una fórmula explícita para el cálculo de la prima (2.11) del seguro de vida múltiple.

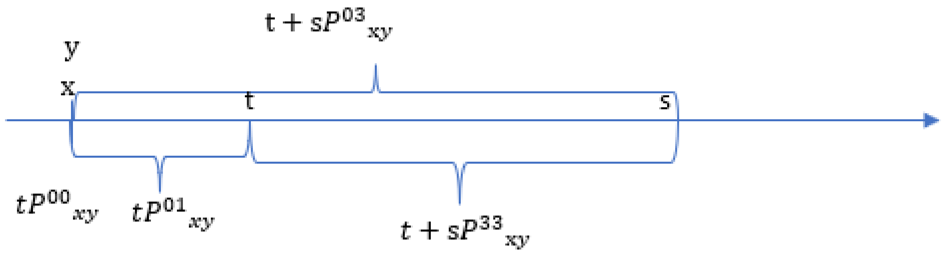

Figura 2.3: Comportamiento de la probabilidad de supervivencia de la pareja para distintas etapas de la vida de x

Definición 2.1. ***Dependencia de cuadrante positivo*** *Sea X e Y dos variables aleatorias definidas sobre algún espacio de probabilidad. X e Y son dependientes de cuadrante positivo si:*

$$P[X > s, Y > t] \geq P[X > s]P[Y > t], \quad \forall s, t \in \mathbb{R} \tag{2.16}$$

La definición 2.1 describe la propiedad de que los grandes valores de una variable aleatoria está asociados a grandes valores de una segunda variable.

Teorema 2.1. *Si T_x y T_y son dependientes de cuadrante positivo entonces:*

$$E[T_y|T_x > s] \geq E[T_y], \qquad \textit{para todo } s > 0 \tag{2.17}$$

$$E[T_x|T_y > t] \geq E[T_x], \qquad \textit{para todo } t > 0 \tag{2.18}$$

El teorema anterior servirá para entender el propósito de la dependencia de cuadrante positivo [9][2] si tomamos dos miembros de la familia la esperanza de vida de uno de ellos aumenta si el otro miembro de la familia sigue vivo, de esto podemos notar que la prima de un seguro de vida de último superviviente usando la dependencia de cuadrante positivo será menor que el caso de considerar las vidas restantes como independientes.

[2]Erich Leo Lehmann (20 de noviembre de 1917 - 12 de septiembre de 2009) fue un estadístico estadounidense, que hizo una importante contribución a las pruebas de hipótesis no paramétricas.

Por otro lado se presenta un resultado propuesto por [14] que caracteriza las relaciones entre las intensidades de transición y las vidas restantes.

TEOREMA 2.2. *En el modelo de dependencia de vidas de dos individuos se tiene que:*

i) $\mu^{02}_{x+\tau:y+\tau} \leq \mu^{13}_{x+\tau}$ *y* $\mu^{01}_{x+\tau:y+\tau} \leq \mu^{23}_{x+\tau}$ *para todo* $\tau > 0 \implies T_x$ *y* T_y *son dependientes cuadrantes positivas.*

ii) $\mu^{02}_{x+\tau:y+\tau} \geq \mu^{13}_{x+\tau}$ *y* $\mu^{01}_{x+\tau:y+\tau} \geq \mu^{23}_{x+\tau}$ *para todo* $\tau > 0 \implies -T_x$ *y* T_y *son dependientes cuadrantes positivas.*

iii) $\mu^{02}_{x+\tau:y+\tau} = \mu^{13}_{x+\tau}$ *y* $\mu^{01}_{x+\tau:y+\tau} = \mu^{23}_{x+\tau}$ *para todo* $\tau > 0 \implies T_x$ *y* T_y *son independientes*

Tomando en cuenta el teorema anterior, [3] ha propuesto que para $t > 0$:

$$\mu^{01}_{x+t:y+t} = (1-\alpha_{01})\mu_{y+t} \tag{2.19}$$

$$\mu^{23}_{y+t} = (1+\alpha_{23})\mu_{y+t} \tag{2.20}$$

$$\mu^{02}_{x+t:y+t} = (1-\alpha_{02})\mu_{y+t} \tag{2.21}$$

$$\mu^{13}_{y+t} = (1+\alpha_{13})\mu_{y+t} \tag{2.22}$$

Donde, $\alpha_{ij} \in [0,1)$ son valores no negativos, por tanto, si se generaliza el teorema 2.2 y (2.19)(2.20)(2.21)(2.22), vamos a tener las expresiones para calcular las fuerzas de mortalidad para todos los estados de supervivencia de la familia.

Para hallar las expresiones de las probabilidades de transición (2.14), vamos a partir considerando que las fuerzas de mortalidad de los miembros de una familia de edades $x_i + t$ con $i \in \{1, \ldots, n\}$ siguen una ley de mortalidad de Gompertz y Makeham[3], es decir, la fuerza de mortalidad del individuo k es:

$$\mu_{x_i+t} = A_k + B_k c_k^{x_i+t} \tag{2.23}$$

con $x_i, t, A_k \geq 0$, $B_k > 0$, $c_k > 1$ y $k \in \{1, \ldots, n\}$

Denotamos:

$$A_k = -lns_i, \quad , B_k = -\ln c_i * \ln g_i, \quad s_i, g_i \in [0, 1], k \in \{1, \dots, n\}$$

Obtenemos las expresiones para la estimación de parámetros de las probabilidades de supervivencia para un individuo de una familia:

$$p_x = exp\{-A_k\}exp\left\{\frac{-B_1}{\ln c_1} c_k^{x_i}(c_k - 1)\right\} \tag{2.24}$$

donde aplicando el logaritmo natural a ambos lados obtenemos:

$$\ln p_{x_i} = A_k + \frac{-B_k}{\ln c_k} c_k^{x_i}(c_k - 1) \tag{2.25}$$

Denotamos α_{x_i} al estimador de la probabilidad de supervivencia de un individuo de edad x_i:

$$\alpha_{x_i} = -\ln \hat{p}_{x_i} \tag{2.26}$$

Donde:

$$\beta_k = -(c_k - 1) \ln g_k \tag{2.27}$$

Para estimar los parámetros anteriormente definidos se debe aplicar mínimos cuadrados[3][8], se descompone el rango de edades en dos partes (η_1, η_2) y (γ_1, γ_2) y las estimaciones obtenidas para β_k, c_k, A_k son [16]:

$$\ln \hat{\beta}_k = \frac{\displaystyle\sum_{x_i=\eta_1}^{\eta_2} \ln \alpha_y - \ln \hat{c}_k \sum_{x_i=\eta_1}^{\eta_2} x_i}{(\eta_2 - \gamma_2)} \tag{2.28}$$

$$\ln \hat{c}_k = \frac{\displaystyle\sum_{x_i=\eta_1}^{\eta_2} x_i \sum_{x_i=\eta_1}^{\eta_2} \ln \alpha_{x_i} - (\eta_2 - \gamma_2) \ln \hat{c}_k \sum_{x_i=\eta_1}^{\eta_2} x_i \ln \alpha_{x_i}}{\left(\sum_{x_i=\eta_1}^{\eta_2} x_i\right)^2 - (\eta_2 - \gamma_2) \sum_{x_i=\eta_1}^{\eta_2} x_i^2} \tag{2.29}$$

$$\hat{A}_k = \frac{\sum_{x_i=\gamma_1}^{\gamma_2} (\alpha_{x_i} - \hat{\beta}_k \hat{c}_k^{x_i})}{(\eta_1 - \gamma_1)} \tag{2.30}$$

Por otro lado, [8] determinó los estimadores $\hat{\alpha}_{ij}$ de α_{ij} por medio de mínimos cuadrados entre los incrementos $\Delta\Omega_{ij}$ y las funciones de transición definidas como:

$$\Omega_{s+t}^{ij} = \int_0^t \mu_{s+t}^{ij}(\tau)d\tau, \qquad t \geq 0 \tag{2.31}$$

$$\Delta\Omega_k^{ij} = \int_0^1 \mu_{k\tau}^{ij} d\tau \tag{2.32}$$

Por tanto, por mínimos cuadrados tenemos:

$$\hat{\alpha}_{ij} = arg\,\text{mín} \sum_k \left(\Delta\hat{\Omega}_{ij} - \int_{t=0}^1 \mu_{k+t}^{ij} dt\right)^2 \tag{2.33}$$

Donde, $\Delta\hat{\Omega}_{ij}$ es el estimador de $\Delta\Omega_{ij}$ y $\Delta\hat{\Omega}_{ij}$ se estima por medio de el número de familias en el estado i a la edad t denotado por L_t^t y el número de transiciones del estado i a j durante $[o, t]$ por L_t^{ij}:

$$\Delta\hat{\Omega}_{k+t}^{ij} = \frac{L_k^{ij}}{L_{k+1}^i - L_k^i}(\ln L_{k+1}^i - \ln L_k^i) \tag{2.34}$$

Por tanto, una vez estimados los coeficientes $(\hat{\beta}_k, \hat{c}_k, \hat{A}_k)$ de la ley de Gompertz y Makeham por (2.34), tenemos que los estimadores de α_{ij} [8][3] son:

$$\hat{\alpha}_{0j} = \frac{\sum_i \Delta\hat{\Omega}_i^{ij}\left(\hat{A}_k + \hat{B}_k\hat{c}_k^i\frac{\hat{c}_k - 1}{\ln \hat{c}_k}\right)}{\sum_i \left(\hat{A}_k + \hat{B}_k\hat{c}_k^i\frac{\hat{c}_k - 1}{\ln \hat{c}_k}\right)} \tag{2.35}$$

$$\hat{\alpha}_{ij} = \frac{\sum_i \Delta\hat{\Omega}_i^{ij}\left(\hat{A}_k + \hat{B}_k\hat{c}_k^i\frac{\hat{c}_k - 1}{\ln \hat{c}_k}\right)}{\sum_i \left(\hat{A}_k + \hat{B}_k\hat{c}_k^i\frac{\hat{c}_k - 1}{\ln \hat{c}_k}\right)} - 1 \tag{2.36}$$

Recordar que la prima del seguro de vida múltiple con modelo de dependencia de las vidas restantes de los miembros de una familia del tipo de último superviviente, es:

$$A_{\overline{x_1,\ldots,x_n}} = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\left(\sum_{i=1}^n {}_tp_{x_i}\, q_{x_i+t} + \cdots + (-1)^{\ell+1} \sum_{i_1,<\ldots<i_\ell} {}_tp_{x_1,\ldots,x_n}\, q_{x_1+t:\cdots:x_n+t}\right) \tag{2.37}$$

Esto puede ser expresado en función de las probabilidades de transición, dado que de manera general ${}_kp_{x_i}$ es igual a ${}_kp^{00}_{x_1,\ldots,x_n} + {}_kp^{02}_{x_1,\ldots,x_n} + \cdots + {}_kp^{0,2^n}_{x_1,\ldots,x_n}$ y ${}_kp_{x_1,\ldots,x_n} = {}_kp^{00}_{x_1,\ldots,x_n}$. De esta forma, ${}_kp^{00}_{x_1,\ldots,x_n}$ se puede expresar mediante

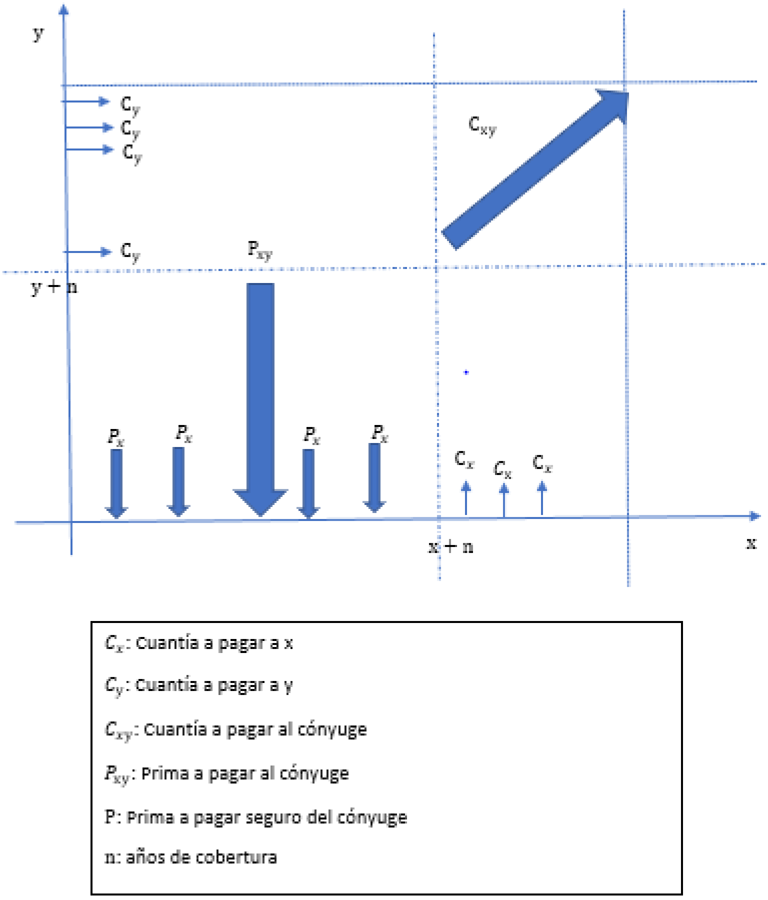

Figura 2.4: Comparación de la prima pura y cuantía entre dos seguros individuales y un seguro de último superviviente

(2.15), de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
{}_kp^{00}_{x_1,\ldots,x_n} &= \exp\left\{-\int_0^k \left(\mu^{01}_{x_1+\tau,\ldots,x_n+\tau} + \cdots + \mu^{0,2^n}_{x_1+\tau,\ldots,x_n+\tau}\right) d\tau\right\} \\
&= \exp\left\{-(1-\alpha_{01})\int_0^k \mu_{x_1+\tau}d\tau - \cdots - (1-\alpha_{0,2^n})\int_0^k \mu_{x_n+\tau}d\tau\right\} \\
&= \exp\left\{-\sum_{i=1}^{n}(1-\alpha_{0i})\int_0^k (A_i + B_i c_i^{x_i+\tau})d\tau\right\} \\
&= \exp\left\{-\sum_{i=1}^{n}(1-\alpha_{0i})\int_0^k A_i k + B_i\frac{c_i^{x_i}(c_i^k-1)}{lnc_i}d\tau\right\} \\
&= \prod_{i=1}^{n}\exp\left\{-(1-\alpha_{0i})\int_0^k A_i k + B_i\frac{c_i^{x_i}(c_i^k-1)}{lnc_i}d\tau\right\} \qquad (2.38)
\end{aligned}
$$

Para calcular la probabilidad de supervivencia de un miembro de la familia de edad x_i dado que ya falleció alguien es:

$$
{}_up^{0k}_{x_1,\ldots,x_n} = \int_0^u {}_tp^{00}_{x_1,\ldots,x_k,\ldots,x_n}\mu^{0k}_{x_1+t:\cdots:x_n+t}\,{}_{u-t}p^{kk}_{x_k+t}dt \qquad (2.39)
$$

De esta forma, de las expresiones (2.39) y (2.15) podemos calcular

$$
\begin{aligned}
{}_{u-t}p^{11}_{x_k+t} &= \exp\left\{-\int_t^k \mu^{1,2^n}_{x_k+s}ds\right\} \\
&= \exp\left\{-(1+\alpha_{1,2^n})\int_t^k \mu_{x_k+s}ds\right\} \quad \text{por las expresiones de (2.19)} \\
&= \exp\left\{-(1-\alpha_{0,2^n})\int_0^k (A_i + B_i c_i^{x_i+\tau})d\tau\right\} \\
&= \exp\left\{-(1-\alpha_{0i})\left[(A_i(k-t) + \frac{B_i}{\ln c_i}c_i^{x_i}(c_i^t-1)\right]\right\} \qquad (2.40)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto:

$$
\begin{aligned}
{}_kp^{0k}_{x_1,\ldots,x_n} = \int_0^k \prod_{i=1}^{n}\exp&\left\{-(1-\alpha_{0i})\int_0^k A_i k + B_i\frac{c_i^{x_i}(c_i^k-1)}{lnc_i}d\tau\right\} \qquad (2.41) \\
* \exp&\left\{-(1-\alpha_{0i})\left[(A_i(k-t) + \frac{B_i}{\ln c_i}c_i^{x_i}(c_i^t-1)\right]\right\} dt \qquad (2.42)
\end{aligned}
$$

Por otro lado, [5] expresa una fórmula para calcular la prima del seguro de vida múltiple mediante el estatus de extinción del tipo último superviviente:

$$P_{x_1,\dots,x_k:\overline{n}|} = \frac{A_{\overline{x_1,\dots,x_k}:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{\overline{x_1,\dots,x_k}:\overline{n}|}} \tag{2.43}$$

También, para el cálculo de la reserva matemática en los seguros de vida múltiple de último superviviente se debe considerar: si todos los miembros de la familia están vivos durante el fin de año de la cobertura, si están vivos algunos miembros de la familia o si está al menos un miembro de la familia vivo, se deben considerar todos los casos.

$${}_tV_{\overline{x_1,\dots,x_n}:n\overline{n}|} = A_{\overline{x_1,\dots,x_k}:\overline{n}|} - P_{x_1,\dots,x_k:\overline{n}|} * \ddot{a}_{\overline{x_1,\dots,x_k}:\overline{n}|} \tag{2.44}$$

2.3. Tipo de Trabajo:

El tipo de trabajo que se está realizando es de tipo exploratorio, pues existe relativamente poca investigación en documentos científicos, la creación de seguros de vida múltiple mediante la teoría de los modelos de dependencia, este enfoque ha ido tomando de a poco importancia en el mercado asegurador mundial, países como: Estados Unidos, Gran Bretaña, España, India, entre otros han ofertado planes de seguro para parejas del tipo vida conjunta o de último superviviente, se han desarrollado aplicaciones, para calcular la prima de un seguro de vida que por lo general es para parejas.[12] [3]

El desarrollo de la teoría de los modelos de dependencia ha se centrado principalmente en generar seguros de vida para parejas, esto es poco convenientes pues las parejas prefieren los seguros de vida individuales para asegurar a un solo cónyuge, resulta más barato, respecto al seguro de vida del tipo conjunto y por lo general funciona bien para las empresas y el asegurado, pero al tratarse de asegurar a una familia entera en el contexto de la actual pandemia, la cual ha dejado en la ruina a fami-

[3] Calculadora de seguro de vida para parejas:[4] https://fidelitylife.com/learn-and-plan/learning-center/who-needs-life-insurance/life-insurance-for-couples/#get-quote

lias enteras luego del fallecimiento de algunos de sus miembros, resulta muy conveniente, y evidencia la necesidad de más desarrollo teórico y computacional de los modelos de dependencia para lograr una mayor familiarización con el concepto, obtener información más completa sobre la mortalidad de grupos de individuos que comparten diariamente los mismos riesgos.

2.4. Técnica de análisis de la información:

Los datos demográficos de la población ecuatoriana han sido extraídos del repositorio de datos públicos del Instituto Nacional de Estadística y Censos del Ecuador (INEC) [5], ahí constan las series históricas del número de defunciones y la población expuesta por edades desde 1990 hasta el 2020.

Esta información será de utilidad para el cálculo de tablas de mortalidad, se empieza calculando la población promedio expuesta E^c_{xt} [7], la cual se puede determinar mediante el supuesto de uniformidad como:

$$E^c_{xt} = E^o_{xt} - \frac{1}{2}D_{xt} \tag{2.45}$$

Se puede realizar el cálculo de las probabilidades de supervivencia de transición (2.14) y la anualidad para el caso de una pareja mediante las fórmulas calculadas anteriormente por medio **Wolfram Mathematica** usando este código[16]:

```
p00 [x_, y_, k_] := Exp[-(1 - alpha01) (A1*k + B1/Log[c1]*c1^y (c1^k -
   1)) - (1 - alpha02) (A2*k + B2/Log[c2]*c2^x (c2^k - 1))]
h11[x_, y_, k_] := Exp[-(1 + alpha13) A2*k + (B2*c2^x)/ Log[c2] (-c2^k
   (1 + alpha13) + 1 - alpha02)]* Exp[(B1*c1^y)/Log[c1] (1 - alpha01)]
h12[x_, y_, k_] := A1*(alpha01 - 1) + A2*(alpha02 + alpha13)
h13[x_, y_, k_] := (B1*c1^y)/Log[c1] (alpha01 - 1)
h14[x_, y_, k_] := (B2*c2^x)/Log[c2] (alpha02 + alpha13)
p01 [x_, y_, k_] := (1 - alpha01)*A1*h11[x, y, k]* N[Integrate[Exp[t*
   h12[x, y, k] + c1^t*h13[x, y, k] + c2^t*h14[x, y, k]], {t,0, k}] ]
```

[5] https://www.ecuadorencifras.gob.ec/documentos/web-inec/Poblacion_y_Demografia/Defunciones_Generales_2020/Tabulados_y_series_EDG_2020_v1.xlsx

```
    + (1 - alpha01)*B1*c1^y*h11[x, y, k]* N[Integrate[c1^t*Exp[t*h12[x,
     y, k] + c1^t*h13[x, y, k] + c2^t*h14[x, y, k]], {t, 0, k}] ]
h21[x_, y_, k_] :=Exp[-(1 + alpha23) A1*k + (B1*c1^y)/ Log[c1] (-c1^k
    (1 + alpha23) + 1 - alpha01)]* Exp[(B2*c2^x)/Log[c2] (1 - alpha02)]
h22[x_, y_, k_] := A2*(alpha02 - 1) + A1*(alpha01 + alpha23)
h23[x_, y_, k_] := (B1*c1^y)/Log[c1] (alpha01 + alpha23)
h24[x_, y_, k_] := (B2*c2^x)/Log[c2] (alpha02 - 1)
p02 [x_, y_,k_] := (1 - alpha02)*A2*h21[x, y, k]* N[Integrate[Exp[t*h22
    [x, y, k] + c1^t*h23[x, y, k] + c2^t*h24[x, y, k]], {t,0, k}] ] +
    (1 - alpha02)*B2*c2^x*h21[x, y, k]* N[Integrate[ c2^t*Exp[ t*h22[x,
     y, k] + c1^t*h23[x, y, k] + c2^t*h24[x, y, k]], {t,0, k}] ]
py[x_, y_, k_] := Exp[-(A1*k + B1/Log[c1]*c1^y (c1^k - 1))]
px[x_, y_, k_] := Exp[-(A2*k + B2/Log[c2]*c2^x (c2^k - 1))]
```

Además la anualidad del seguro de vida del tipo último superviviente será:

```
LastSurvivor[x_, y_, n_] :=Sum[v^k*(p00[x, y, k] + p01[x, y, k] + p02[x
    , y, k]), {k , 0, n - 1}]
```

Todo lo anterior, se puede calcular mediante el software R por medio de librerías. Una vez se ha preparado la información demográfica en una hoja de datos de Excel, se procede a analizarla y depurarla, para la elaboración de las tablas de mortalidad, cálculo de anualidades, primas del seguro emplearemos las siguientes librerías:

```
library(MortalityLaws)
library(readxl)
library(lifecontingencies)
library(forecast)
#Importamos la informacion sobre la mortalidad en Ecuador
Dxt_Mujeres<- as.data.frame(read_excel("Registros_Ecuador.xlsx",sheet =
     "Dxt_Mujeres")[,-1])
Ext_Mujeres<- as.data.frame(read_excel("Registros_Ecuador.xlsx",sheet =
     "Exo_tm")[,-1])
Dxt_Hombres<- as.data.frame(read_excel("Registros_Ecuador.xlsx",sheet =
     "Dxt_Hombres")[,-1])
Ext_Hombres<- as.data.frame(read_excel("Registros_Ecuador.xlsx",sheet =
     "Exo_th")[,-c(1,2)])
```

La librería **MortalityLaws**[6], permite el cálculo de la fuerza de mortalidad por medio de la función **MortalityLaw()**, escogiendo una ley de mortali-

[6] Mortality Laws Manual de usuario: https://cran.r-project.org/web/packages/MortalityLaws/MortalityLaws.pdf

dad específica para la población ecuatoriana, si no se especifica los parámetros de la ley de mortalidad, la función los estima automáticamente, en nuestro caso, la ley de mortalidad fue Gompertz y Makeham, a partir de este cálculo se puede obtener las probabilidades de defunción mediante la función **convertFx()**.

```
#Calculamos las probabilidades de mortalidad
qxM <- Ext_Mujeres
for (j in 1:26){
  qxM[j] <- convertFx(x=c(0:100),data = MortalityLaw(x=c(0:100), Dx=Dxt
    _Mujeres[,j], Ex=Ext_Mujeres[,j],law="makeham")$fitted.values,from
    = "mx", to="qx")
}
names(qxM) <- c(1991:2016)
View(qxM)
qxH <- Dxt_Hombres

for (j in 1:26){
  qxH[j] <- convertFx(x=c(0:100),data = MortalityLaw(x=c(0:100), Dx=Dxt
    _Hombres[j], Ex=Ext_Hombres[j],law="makeham")$fitted.values,from =
    "mx", to="qx")
}
names(qxH) <- c(1991:2016)
View(qxH)
```

Posteriormente, se debe realizar predicciones por medio de la librería **forecast**[10], sobre los años que no tenemos datos, convertimos las probabilidades de fallecimiento a una serie de tiempo mediante la función **ts()**, luego, se ajusta los datos un modelo ARIMA mediante la función **auto.arima()**, después, se obtiene las predicciones de los datos mediante la función **forecast()**.

```
## calculamos las tablas de mortalidad con las probabilidades de
    mortalidad pronosticadas
#Mujeres
ProbsM <- data.frame(matrix(NA,nrow = 101,ncol=35))
names(ProbsM) <- c(2017:2051)
for(j in 1:101){
  ProbsM[j,] <- t(forecast(auto.arima(ts(as.vector(qxM[j,]),start=c
    (1996,1),frequency=1)[1,]),35,level=95)$mean)
}
View(ProbsM)
#Hombres
```

```
ProbsH <- data.frame(matrix(NA,nrow = 101,ncol=35))
names(ProbsH) <- c(2017:2051)
for(j in 1:101){
  ProbsH[j,] <- t(forecast(auto.arima(ts(as.vector(qxM[j,]),start=c
    (1996,1),frequency=1)[1,]),35,level=95)$mean)
}
View(ProbsH)
```

Estas predicciones servirán para elaborar una tabla de mortalidad con la librería **lifecontigences**[7], por medio de la función **probs2lifetable()**, posteriormente, se podrá calcular las primas y anualidades de los seguros de vida múltiples para n personas con las funciones **Axyzn()** y **axyzn()**, especificando el tipo de dependencia de las vidas restantes, si requerimos del tipo vida conjunta o de último superviviente:

```
TH <- probs2lifetable(ProbsH$`2022`, radix = 100000, type = "qx", name
   = "Ecuador")
TH
TM <- probs2lifetable(ProbsM$`2022`, radix = 100000, type = "qx", name
   = "Ecuador")
TM
10000*Axyzn(list(TH,TM,TH),x = c(12,30,29),status = "last",i = 0.01)
10000*axyzn(list(TH,TM,TH),x = c(12,30,29),status = "last",i = 0.01)
```

Posteriormente, para el cálculo de la prima fraccionada y la reserva matemática se procede de la siguiente manera:

```
#Valor actual actuarial
VAA <- k*10000*Axyzn(list(TH,TM,TH),x = c(12,30,29),status = "last",i =
    0.01)
#Prima Fraccionada
Pniv <-VAA/axyzn(list(TH,TM,TH),x = c(12,30,29),status = "last",i =
   0.01,payment="due")
#Reserva Matematica Metodo prospectivo
k*10000*Axyzn(list(TH,TM,TH),x = c(12,30,29),status = "last",i = 0.01)-
   Pniv*axyzn(list(TH,TM,TH),x = c(12,30,29),status = "last",i = 0.01,
   payment="due")
#Reserva Matematica para cada periodo
VAAprestaciones<-numeric(l)
VAPrimas<-numeric(l)
for(i in 1:l){
```

[7]Manual de usuario lifecontingences: https://cran.r-project.org/web/packages/lifecontingencies/lifecontingencies.pdf

```
VAAprestaciones[i]<-k*10000*Axyzn(list(TH,TM,TH),x = c(12+i,30+i,29+i),
    n=m-i,status = "last",i = 0.01)
VAPrimas[i]<-Pniv*axyzn(list(TH,TM,TH),x = c(12+i,30+i,29+i),n=m-i,
    status = "last",i = 0.01,payment="due")
}
Reservas <-VAAPrestaciones-VAPrimas
```

Note que, el código de la función **Axyzn()** del paquete **lifecontingences** es el siguiente:

```
function (tablesList, x, n, i, m, k = 1, status = "joint", type = "EV",
  power = 1)
{
  out = numeric(1)
  numTables = length(tablesList)
  if (length(x) != numTables)
    stop("Error! Initial ages vector length does not match with number
   of lives")
  for (j in 1:numTables) {
    if (!(class(tablesList[[j]]) %in% c("lifetable", "actuarialtable"))
   )
      stop("Error! A list of lifetable objects is required")
  }
  type <- testtyperesarg(type)
  status <- teststatusarg(status)
  if (k < 1)
    stop("Error! Periods in a year shall be no less than 1")
  if (missing(m))
    m = 0
  if (missing(n)) {
    n = 0
    for (j in 1:numTables) n = (max(n, (getOmega(tablesList[[j]]) -
      x[j])))
    n = n - m - 1
  }
  if (!missing(i))
    interest = i
  else {
    temp = 0
    for (j in 1:numTables) temp = temp + tablesList[[j]]@interest
    interest = temp/numTables
  }
  if (n == 0)
    return(0)
```

```
  if (any(x < 0, m < 0, n < 0))
    stop("Error! Negative parameters")
  payments = rep(1, n * k)
  probs = numeric(n * k)
  times = m + seq(from = 0, to = (n - 1/k), by = 1/k)
  for (j in 1:length(times)) probs[j] = .qxyznt(tablesList = tablesList
    ,
    x = x, n = times[j], t = 1/k, status = status)
  discounts = (1 + interest)^-(times + 1/k)
  if (type == "EV") {
    out <- sum(((payments * discounts)^power) * probs)
  }
  else if (type == "ST") {
    out = 0
    out = rLifeContingenciesXyz(n = 1, lifecontingency = "Axyz",
      tablesList = tablesList, x = x, t = n, i = i, m = m,
      k = k, status = status)
  }
  return(out)
}
```

Con ello se asegura que los cálculos que se necesita son los correctos.

Capítulo 3

Resultados, conclusiones y recomendaciones

3.1. Resultados

El seguro de vida con estatus de extinción del tipo último superviviente permitió obtener primas accesibles para el contexto del país, además por su naturaleza permitirá a las empresas aseguradoras disponer del dinero por más tiempo e inclusive puede darse el caso de que pocas pólizas de seguro sean cobradas.

Para la aplicación del presente modelo de seguro de vida se ha considerado la importancia de los gastos de gestión interna y externa, recargos que pueden elevar un poco el costo de la prima pura y la prima nivelada, pero que ayudan a que a la economía de una empresa aseguradora.

Para mostrar los resultados del modelo planteado se enunciará el siguiente ejemplo:

Enunciado: Un matrimonio conformado por un hombre y mujer de edades 33 y 35 años desean contratar un seguro de vida, que en el caso de que ambos fallezcan, sus hijos puedan poseer de un fondo patrimonial de $\$100{,}000$ para ello analizan dos opciones, contratar un seguro de vida de último superviviente o contratar seguros individuales que les permita

pagar las primas anualmente durante 12 años y les cubra ante cualquier eventualidad durante 20 años, se sabe que la tasa de interés anual ofertada por las empresas aseguradoras en el Ecuador es del $8{,}68\,\%$ [1]y los gastos de gestión interna y externa son $2\,\%$ y $3\,\%$, respectivamente.
Solución: Primero, depurar la información demográfica extraída, del INEC, se debe preparar la información para que pueda ser usado en las funciones de las librarías **lifecontingences**, **mortalitylaws** y **forecast**.

Luego, definir los recargos por gastos de gestión interna y externa $\alpha = 2\,\%$ y $\alpha = 3\,\%$, definir las primas comercial y de inventario[7], de la siguiente manera:

$$P_{inv} = P(1+\alpha)$$
$$P_c = P(1+\alpha)(1+\beta)$$

Posteriormente, calcular la prima pura del seguro de vida, usando la función **Axyzn()**del paquete **lifecontingences**:

```
> P <- 100000*Axyzn(tablesList = list(TM,TH),n=20,x = c(33,35), status
  ="last", i = 0.0868)
> P
[1] 27.62366
```

La prima pura obtenida es $\$27,62$, la cual no es muy alta para ser pagada de forma anual durante 12 años, es decir, no es necesario fraccionar la prima mensualmente, por tanto, se halla la prima nivelada:

```
> #Prima de inventario, gestion interna
> Pi <- P*(1+alpha)
> Pi
[1] 28.17614
>  #Prima comercial, gestion externa
> Pc <- Pi*(1+beta)
> Pc
[1] 29.02142
> #Prima nivelada, con 12 pagos anuales
> PP <- Pc/(axyzn(tablesList = list(TM,TH),x = c(33,35),n=12,i=0.0868,
  status="last",payment="due"))
> PP
[1] 3.669391
```

[1]Tasas de interés del Banco Central del Ecuador: https://www.bce.fin.ec/index.php/component/k2/item/148-tasas-de-inter%C3%A9s

Se obtuvo una prima nivelada de $\$3{,}67$ la cual es accesible para ser pagada al inicio de cada año, de esta forma, se procede a calcular la Reserva Matemática para el seguro propuesto por el método prospectivo, se compara el comportamiento de la reserva matemática para distintas tasas de interés efectivas anuales:

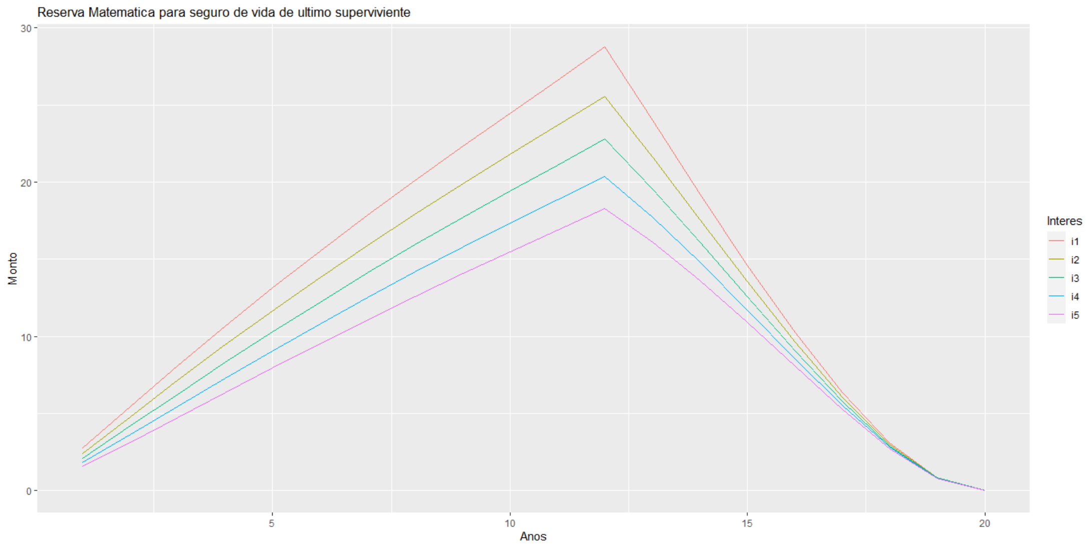

Figura 3.1: Gráfico de la reserva matemática para diferentes tasas de interés efectiva anual

Luego comparar estos resultados con seguros de vida individuales contratados a cada cónyuge cuya cuantía es de $\$50000$ cada uno:

```
> #Prima seguro individual
> P1 <- (1+alpha)*(1+beta)*50000*Axn(TH,x=33,n=20,i=0.0868)
> P2 <- (1+alpha)*(1+beta)*50000*Axn(TM,x=35,n=20,i=0.0868)
> #total a pagar
> P1+P2
[1] 1286.59
```

Como se puede ver la prima total es mucho mayor a la calculada para el seguro de vida de último superviviente, luego se debe proceder a calcular las correspondientes reservas matemáticas para cada seguro de vida individual y los compararemos con la reserva matemática del seguro de vida de último superviviente: Se evidencia que las reservas matemáticas para el seguro de vida de último superviviente son menores siempre, además se ha determinado que las primas también serán menores, por ende, dado que se paga lo mismo de cuantía determinamos que el seguro de vida de último superviviente es una mejor opción que contratar

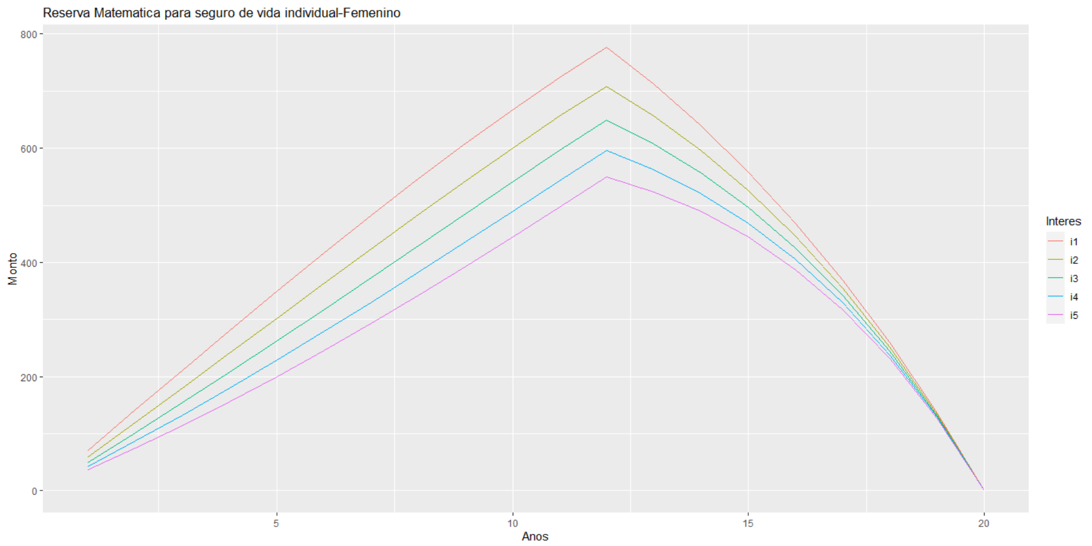

Figura 3.2: Reserva matemática para seguro individual para individuo femenino

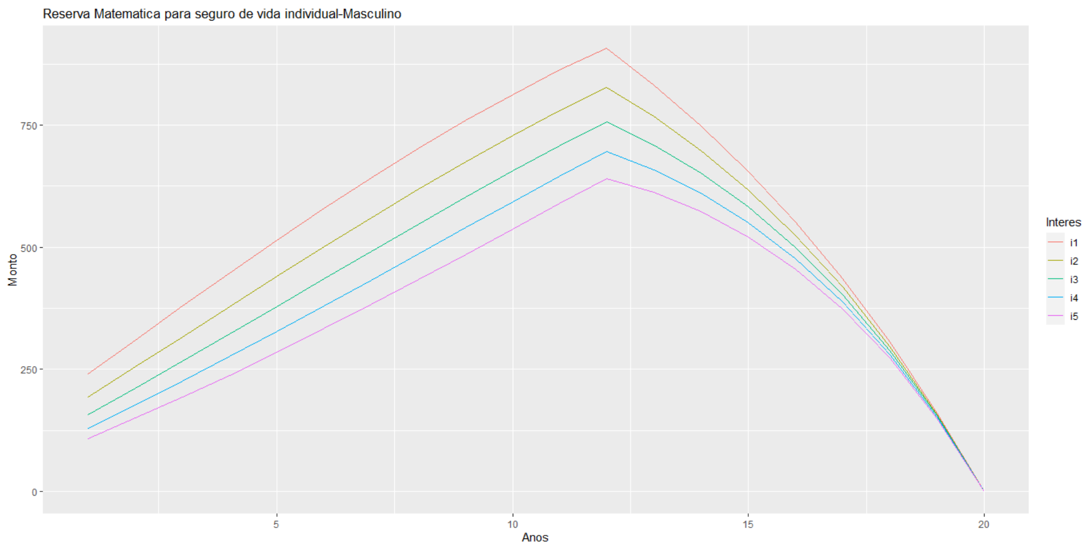

Figura 3.3: Reserva matemática para seguro individual para individuo masculino

seguros de vida individuales para asegurar a una familia. Por otro lado, se evidencia que en cada gráfico a partir del año 12 la tendencia de las reservas matemáticas tienden a caer, esto es posible ya que para ese año el cliente ya habrá cancelado la totalidad de la prima del seguro de vida.

Ahora, se debe determinar el comportamiento de la prima pura y nivelada, respecto al número de años de cobertura del seguro. De (3.4) se evidencia que, mientras más corto sea el tiempo de cobertura contrata-

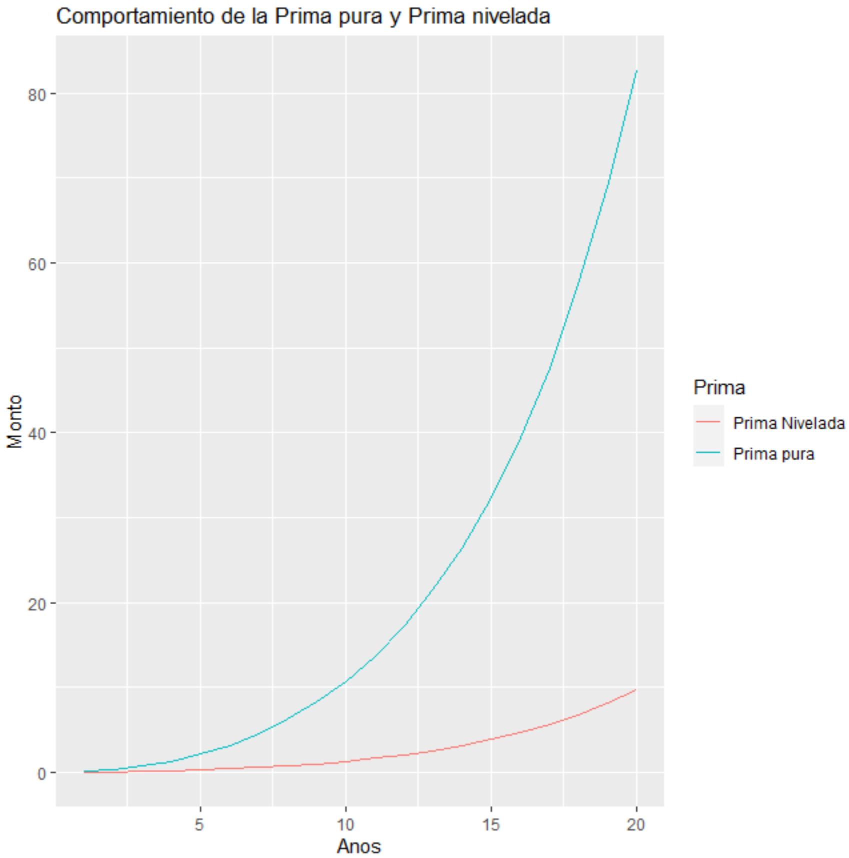

Figura 3.4: Comportamiento de las primas pura y nivelada si se varía los años de cobertura del seguro

do las primas serán más bajas y esto es posible ya que en periodos más cortos es probable que el grupo no se extinga y por ende no se cobre la cuantía del seguro, resultando beneficioso para la empresa aseguradora.

Por otro lado, se debe analizar el comportamiento de las anualidades del seguro de vida de último superviviente comparando si existe alguna diferencia si las edades de los asegurados son iguales o diferentes: Se puede notar que casi no hay mucha diferencia, pero lo más destacado de esta imagen es que el comportamiento de la anualidad es creciente, esto es posible debido a que la empresa puede mantener el dinero de los seguros por más tiempo para invertir.

Finalmente, se debe analizar si el número de miembros afecta a la prima pura y fraccionada del seguro de vida del último superviviente; considerar 3 miembros de una familia una mujer de 33 años, dos hombres de 35 y

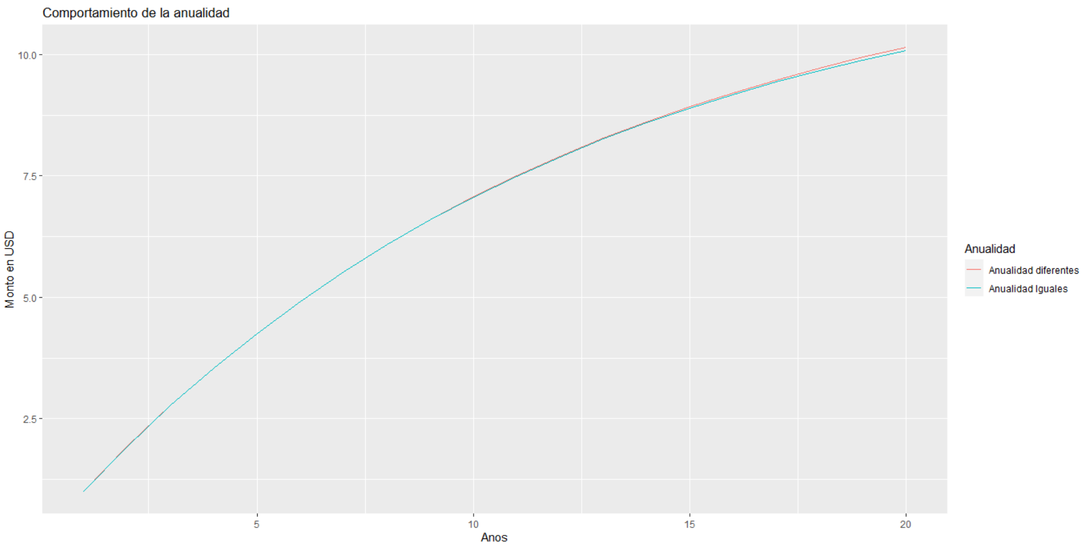

Figura 3.5: Comportamiento de las anualidades del seguro de vida de último superviviente en dólares

60 años:

```
> P1 <- 100000*Axyzn(tablesList = list(TM,TH,TH),n=20,x = c(33,35,60),
   status="last", i = 0.0868)
> P1
[1] 6.349354
> #Prima de inventario, gestion interna
> Pi1 <- P1*(1+alpha)
> Pi1
[1] 6.476341
> # Prima comercial, gestion externa
> Pc1 <- Pi1*(1+beta)
> Pc1
[1] 6.670632
> #Prima nivelada, con 12 pagos anuales
> PP1 <- Pc1/(axyzn(tablesList = list(TM,TH,TH),x = c(33,35,60),n=12,i
   =0.0868,status="last",payment="due"))
> PP1
[1] 0.8433906
```

Se determina que mientras mayor sea el número de miembros asegurados menor será la prima, esto debe ser tomado con mucho cuidado por parte de las empresas aseguradoras, se deberá definir un máximo de miembros asegurados o las primas recibidas serán muy pequeñas y contraproducentes económicamente.

3.2. Conclusiones y recomendaciones

3.2.1. Recomendaciones

1. Se recomienda a la entidad aseguradora establecer un periodo de aportaciones obligatorio de tal forma que si se pretende cobrar la póliza o pedir un rescate del contrato de seguro de vida opte por otra opción como una reducción o ampliación o transformación de contrato. Se debe considerar que el pago de la cuantía se va a realizar al finalizar el año.

2. Se recomienda que: para hallar las probabilidades de transición para una familia de n miembros se trate primero de realizar el gráfico de todos los estados de vida y los estados de transición, para hallar la cardinalidad del conjunto de estados es necesario recordar que la suma de combinaciones es igual a 2^n, además para calcular el número de estados de transición se debe recordar propiedades de combinatoria.

3. Se debe proceder con cuidado al momento de deducir las probabilidades de supervivencia pues no todas las propiedades se pueden generalizar de manera directa hay algunas que requieren de más hipótesis y cálculos, una forma de entender las fuerzas de mortalidad de transición es recordar las funciones Hazard y para la derivación de las probabilidades de transición de las vidas restantes recordar las probabilidades de transición de un proceso de Markov.

4. Se debe prestar especial atención al cálculo de la reserva matemática, recordar un poco de matemáticas financieras para poder calcular bien el valor actual actuarial de las primas y de las prestaciones, una forma de darse cuenta de un mal cálculo en la reserva es hallar valores negativos. Además se debe hacer un correcto cálculo de la prima nivelada, que esta es parte fundamental de la reserva matemática.

5. Recordar que hay paquetes estadísticos que estiman los coeficientes de la ley de Gompertz y Makeham. Siempre que encontremos datos sobre la mortalidad faltantes se pueden extrapolar o pronosticar.

6. Finalmente, se recomienda mantener al día los datos demográficos del país, aumentar estudios sobre familias, matrimonios, mortalidad y divorcios por edades para poder mejorar el ajuste de la mortalidad del país.

3.2.2. Conclusiones

Para el desarrollo del seguro de vida propuesto se ha considerado la dependencia de las vidas restantes de los miembros de una familia, se ha analizado el impacto instantáneo, corto y largo plazo de la muerte de los miembros de cada familia y se ha representado aquello mediante la fuerza de mortalidad, esto y el concepto de dependencia de cuadrante positivo, han sido de utilidad para calcular las probabilidades de supervivencia transición (2.19) para el seguro de vida propuesto, ya que esta probabilidad depende del estatus de vida de los miembros de la familia, y va a ir disminuyendo en función del número de miembros que han fallecido y será más alta en los primeros años del seguro.

La dependencia de las vidas restantes afectan de manera instantánea en los primeros años a la prima y las reservas matemáticas del seguro de vida, luego las dependencias a corto y largo plazo toman relevancia mientras más pasa el tiempo[16]; en los gráficos de la reserva matemática es creciente durante los años que el cliente paga la prima, una vez que la prima se ha cancelado en su totalidad la reserva matemática empieza a descender. Las fuerzas de mortalidad fueron calculadas mediante la ley de Gompertz y Makeham con los datos demográficos del Ecuador, estas nos sugieren que la mortalidad en el país ha ido disminuyendo.

Las primas obtenidas en el presente trabajo son teóricas, los resultados han mostrado que la prima neta, nivelada y las reservas matemáticas son menores para los seguros de vida de último superviviente en comparación a los seguros individuales, se debe considerar que los seguros de vida individuales ofertados en el mercado asegurador ecuatoriano en promedio son mucho más costosos, por ende, para una aplicación del seguro la prima y las reservas actuariales deberán ser recalculadas considerando los recargos y políticas de las empresas aseguradoras, pero aún así, la prima será más baja que los seguros individuales esto se puedo evidenciar cuando se presentó el concepto de cuadrante positivo.

El aumento de miembros a asegurar y el tiempo de aseguramiento de los mismos afectan al costo de la prima del seguro propuesto y a la anualidades, sin embargo, se debe establecer políticas en las empresas aseguradoras para fijar un máximo de miembros a asegurar por familia y establecer duraciones de contrato que sean atractivas para el cliente, el segmento de clientes a ofrecer, pues hay que recordar que las probabilidades de supervivencia de una familia de edades avanzadas son más propensas a que se les pague la cuantía del seguro mientras que, a una familia joven es más probable que no se termine pagando la cuantía.

Se puede encontrar más precisión en seguros de vida múltiples, incluyendo información de datos demográficos a las estimaciones de las fuerzas de mortalidad, el seguro de vida que se ha planteado se puede mejorar si se incluye datos sobre la mortalidad de las familias por rangos de edades, número de matrimonios por edades, número de hijos por edades, etc.

Capítulo A

Título anexo

A.1. Código en R de seguro de vida de ultimo superviviente

```
library(MortalityLaws)
library(readxl)
library(lifecontingencies)
library(forecast)
library(ggplot2)
library(reshape2)
#Importamos la informaci?n sobre la mortalidad en Ecuador
Dxt_Mujeres<- as.data.frame(read_excel("Registros_Ecuador.xlsx",sheet =
    "Dxt_Mujeres")[,-1])
Ext_Mujeres<- as.data.frame(read_excel("Registros_Ecuador.xlsx",sheet =
    "Exo_tm")[,-1])
Dxt_Hombres<- as.data.frame(read_excel("Registros_Ecuador.xlsx",sheet =
    "Dxt_Hombres")[,-1])
Ext_Hombres<- as.data.frame(read_excel("Registros_Ecuador.xlsx",sheet =
    "Exo_th")[,-c(1,2)])
#Calculamos las probabilidades de mortalidad
qxM <- Ext_Mujeres
for (j in 1:26){
  qxM[j] <- convertFx(x=c(0:100),data = MortalityLaw(x=c(0:100), Dx=
    Dxt_Mujeres[,j], Ex=Ext_Mujeres[,j],law="makeham")$fitted.values,
    from = "mx", to="qx")
}
```

```r
names(qxM) <- c(1991:2016)
View(qxM)
qxH <- Dxt_Hombres

for (j in 1:26){
  qxH[j] <- convertFx(x=c(0:100),data = MortalityLaw(x=c(0:100), Dx=
    Dxt_Hombres[j], Ex=Ext_Hombres[j],law="makeham")$fitted.values,from
     = "mx", to="qx")
}
names(qxH) <- c(1991:2016)
View(qxH)
## calculamos las tablas de mortalidad con las probabilidades de
    mortalidad pronosticadas
#Mujeres
ProbsM <- data.frame(matrix(NA,nrow = 101,ncol=35))
names(ProbsM) <- c(2017:2051)
for(j in 1:101){
  ProbsM[j,] <- t(forecast(auto.arima(ts(as.vector(qxM[j,]),start=c
    (1996,1),frequency=1)[1,]),35,level=95)$mean)
}
View(ProbsM)
#Hombres
ProbsH <- data.frame(matrix(NA,nrow = 101,ncol=35))
names(ProbsH) <- c(2017:2051)
for(j in 1:101){
  ProbsH[j,] <- t(forecast(auto.arima(ts(as.vector(qxM[j,]),start=c
    (1996,1),frequency=1)[1,]),35,level=95)$mean)
}
View(ProbsH)
TH <- probs2lifetable(ProbsH$`2022`, radix = 100000, type = "qx", name
    = "Ecuador")
TH
TM <- probs2lifetable(ProbsM$`2022`, radix = 100000, type = "qx", name
    = "Ecuador")
TM
# Prima pura del seguro de vida para un seguro de vida que paga una
    cuantia de 900.000
#en la ultima muerte de los familiares
alpha <- 0.02
beta <- 0.03
P <- 100000*Axyzn(tablesList = list(TM,TH),n=20,x = c(33,35), status="
    last", i = 0.0868)
P
```

```r
#Prima de inventario, gestion interna
Pi <- P*(1+alpha)
Pi
# Prima comercial, gestion externa
Pc <- Pi*(1+beta)
Pc
#Prima nivelada, con 12 pagos anuales
PP <- Pc/(axyzn(tablesList = list(TM,TH),x = c(33,35),n=12,i=0.0868,status="last",payment="due"))
PP
#Reserva Matematica
reserva <- matrix(0, ncol = 5, nrow = 20)
interes <- c(0.02, 0.04, 0.06, 0.08, 0.10)
for(j in 1:5){
  ii <- interes[j]
  Pniv <- (1+alpha)*(1+beta)*100000*Axyzn(tablesList = list(TM,TH),n=20,x = c(33,35), status="last", i = ii)/(axyzn(tablesList = list(TM,TH),x = c(33,35),n=12,i=ii,status="last",payment="due"))
  for(k in 1:20){
    if(k>11){
      reserva[k,j] <- (1+alpha)*(1+beta)*100000*Axyzn(tablesList = list(TM,TH),n=20-k,x = c(33+k,35+k), status="last", i = ii)
    }
    else{
      reserva[k,j] <- (1+alpha)*(1+beta)*100000*Axyzn(tablesList = list(TM,TH),n=20-k,x = c(33+k,35+k), status="last", i = ii)-Pniv*(axyzn(tablesList = list(TM,TH),x = c(33+k,35+k),n=12-k,status = "last",i=ii,payment="due"))
    }
  }
}
reserva <- as.data.frame(reserva)
ggplot(data = reserva,aes(x=c(1:20)))+geom_line(aes(y=reserva[,1],colour="i1"))+geom_line(aes(y=reserva[,2],colour="i2"))+geom_line(aes(y=reserva[,3],colour="i3"))+geom_line(aes(y=reserva[,4],colour="i4"))+geom_line(aes(y=reserva[,5],colour="i5"))+labs(colour = "Interes",title = "Reserva Matematica para seguro de vida de ultimo superviviente",x="Anos",y="Monto")
#Prima seguro individual
P1 <- (1+alpha)*(1+beta)*50000*Axn(TH,x=35,n=20,i=0.0868)
P2 <- (1+alpha)*(1+beta)*50000*Axn(TM,x=33,n=20,i=0.0868)
#total a pagar
P1+P2
```

```
#Reserva seguro individual masculino
reserva1 <- matrix(0, ncol = 5, nrow = 20)
interes1 <- c(0.02, 0.04, 0.06, 0.08, 0.10)
for(j in 1:5){
  ii1 <- interes1[j]
  Pniv <- (1+alpha)*(1+beta)*50000*Axn(TH,x=33,n=20,i=ii1)/(axn(TH,x =
    35,n=12,i=ii1,payment="due"))
  for(k in 1:20){
    if(k>12){
      reserva1[k,j] <- (1+alpha)*(1+beta)*50000*Axn(TH,x=35+k,n=20-k,i=
    ii1)
    }
    else{
      reserva1[k,j] <- (1+alpha)*(1+beta)*50000*Axn(TH,x=35+k,n=20-k,i=
    ii1)-Pniv*(axn(TH,x = 35+k,n=12-k,i=ii1,payment="due"))
    }
  }
}
reserva1 <- as.data.frame(reserva1)
ggplot(data = reserva1,aes(x=c(1:20)))+geom_line(aes(y=reserva1[,1],
    colour="i1"))+geom_line(aes(y=reserva1[,2],colour="i2"))+geom_line(
    aes(y=reserva1[,3],colour="i3"))+geom_line(aes(y=reserva1[,4],
    colour="i4"))+geom_line(aes(y=reserva1[,5],colour="i5"))+labs(
    colour = "Interes",title = "Reserva Matematica para seguro de vida
    individual-Masculino",x="Anos",y="Monto")

#Reserva seguro individual femenino
reserva2 <- matrix(0, ncol = 5, nrow = 20)
interes2 <- c(0.02, 0.04, 0.06, 0.08, 0.10)
for(j in 1:5){
  ii1 <- interes2[j]
  Pniv <- (1+alpha)*(1+beta)*50000*Axn(TM,x=33,n=20,i=ii1)/(axn(TM,x =
    33,n=12,i=ii1,payment="due"))
  for(k in 1:20){
    if(k>12){
      reserva2[k,j] <- (1+alpha)*(1+beta)*50000*Axn(TM,x=33+k,n=20-k,i=
    ii1)
    }
    else{
      reserva2[k,j] <- (1+alpha)*(1+beta)*50000*Axn(TM,x=33+k,n=20-k,i=
    ii1)-Pniv*(axn(TM,x = 33+k,n=12-k,i=ii1,payment="due"))
    }
  }
```

```r
}
reserva2 <- as.data.frame(reserva2)
ggplot(data = reserva2,aes(x=c(1:20)))+geom_line(aes(y=reserva2[,1],
    colour="i1"))+geom_line(aes(y=reserva2[,2],colour="i2"))+geom_line(
    aes(y=reserva2[,3],colour="i3"))+geom_line(aes(y=reserva2[,4],
    colour="i4"))+geom_line(aes(y=reserva2[,5],colour="i5"))+labs(
    colour = "Interes",title = "Reserva Matematica para seguro de vida
    individual-Femenino",x="Anos",y="Monto")

pr_n <- numeric(20)
for(k in 1:20){
  pr_n[k] <- 100000*Axyzn(tablesList = list(TM,TH),n=k,x = c(33,35),
    status="last", i = 0.01)
}
pr_niv <- numeric(20)
for(k in 1:20){
  pr_niv[k] <- (1+alpha)*(1+beta)*100000*Axyzn(tablesList = list(TM,TH)
    ,n=k,x = c(33,35), status="last", i = 0.01)/(axyzn(tablesList =
    list(TM,TH),x = c(33,35),n=12,i=0.06,status="last",payment="due"))
}
d <- data.frame(pr_n,pr_niv)
ggplot(data = d,aes(x=c(1:20)))+geom_line(aes(y=d[,1],colour="Prima
    pura"))+geom_line(aes(y=d[,2],colour="Prima Nivelada"))+labs(colour
     = "Prima",title = "Comportamiento de la Prima pura y Prima
    nivelada",x="Anos",y="Monto")
anual1 <- numeric(20)
anual2 <- numeric(20)
anual <- numeric(20)
for(i in 1:20){
  anual1[i] <- axyzn(tablesList = list(TM,TH),x = c(11,15),n=i,i
    =0.0868,status="last",payment="due")
}
for(i in 1:20){
  anual2[i] <- axyzn(tablesList = list(TM,TH),x = c(60,60),n=i,i
    =0.0868,status="last",payment="due")
}
anual <- data.frame(anual1,anual2)
ggplot(data = anual,aes(x=c(1:20)))+geom_line(aes(y=anual[,1],colour="
    Anualidad diferentes"))+geom_line(aes(y=anual[,2],colour="Anualidad
     Iguales"))+labs(colour = "Anualidad",title = "Comportamiento de la
     anualidad",x="Anos",y="Monto")
# Tres miembros
alpha <- 0.02
```

```
beta <- 0.03
P1 <- 100000*Axyzn(tablesList = list(TM,TH,TH),n=20,x = c(33,35,60),
    status="last", i = 0.0868)
P1
#Prima de inventario, gestion interna
Pi1 <- P1*(1+alpha)
Pi1
# Prima comercial, gestion externa
Pc1 <- Pi1*(1+beta)
Pc1
#Prima nivelada, con 12 pagos anuales
PP1 <- Pc1/(axyzn(tablesList = list(TM,TH,TH),x = c(33,35,60),n=12,i
    =0.0868,status="last",payment="due"))
PP1
```

Referencias bibliográficas

[1] Superintendencia de Bancos y seguros. *Ley General de Seguros.* República del Ecuador, 2020.

[2] Glosario de términos de la Superintendencia de Bancos y seguros. *Ley General de Seguros.* República del Ecuador, 2020.

[3] Michel Denuit, Jan Dhaene, Céline Le Bailly de Tilleghem, Stéphanie Teghem, et al. Measuring the impact of dependence among insured lifelengths. *Belgian Actuarial Bulletin*, 1(1):18–39, 2001.

[4] Esther Frostig and Benny Leviksonö. The impact of statistical dependence on multiple life insurance programs. *Departement of Statistics. Haifa (IL): University of Haifa*, 2003.

[5] Haposan Sirait Hasriati and Abdul Talib Bon. Life insurance premiums dwiguna joint life and last survivor with makeham law.

[6] STANISŁAW Heilpern. Dependent structure induced by markov chain in the multiple life insurance. *Proceedings of 18th AMSE, Czech Republic, Jindrichuv Hradec, http://amse2015. cz/doc/Heilpern. pdf*, 2015.

[7] Legarza J. Métodos cuantitativos. *Universitat de Valencia*, 2012.

[8] Bruce L Jones. Methods for the analysis of ccrc data. *North American Actuarial Journal*, 1(2):40–54, 1997.

[9] Erich Leo Lehmann. Some concepts of dependence. *The Annals of Mathematical Statistics*, 37(5):1137–1153, 1966.

[10] Oliver Lockwood. Time series modelling of gompertz-makeham mortality curves: historical analysis, forecasting and life insurance applications. *Availalbe at: http://www. actuaries. org. uk/research-and-resources/documents/time-seriesmodelling-gompertz-makeham-mortality-curves-historical*, 2009.

[11] Fundación Mapfre. El mercado asegurador latinoamericano en 2020. pages 229–259, 2020.

[12] Fundación Mapfre. El mercado español de seguros en 2020. pages 77–79, 2020.

[13] Andrejs Matvejevs and Aleksandrs Matvejevs. Insurance models for joint life and last survivor benefits. *Informatica*, 12(4):547–558, 2001.

[14] Ragnar Norberg. *Actuarial analysis of dependent lives*. Laboratory of Actuarial Mathematics, University of Copenhagen, 1988.

[15] C Murray Parkes, Bernard Benjamin, and Roy G Fitzgerald. Broken heart: a statistical study of increased mortality among widowers. *Br med J*, 1(5646):740–743, 1969.

[16] Eva Pavčová. Modelling dependent lives. *Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikái fakulta*, 2017.

[17] Jaap Spreeuw and Xu Wang. Modelling the short-term dependence between two remaining lifetimes. *Cass Business School Discussion Paper*, 2(3), 2008.