ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS

PROBLEMAS NO LINEALES DE TIPO AMBROSETTI-PRODI

UN PROBLEMA DE TIPO AMBROSETTI-PRODI CON CONDICIONES DE FRONTERA DIRICHLET NO HOMOGÉNEAS

TRABAJO DE INTEGRACIÓN CURRICULAR PRESENTADO COMO REQUISITO PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE MATEMÁTICA

GABRIELA ESTEFANÍA REVELO SILVERIO

gabriela.revelo02@epn.edu.ec

DIRECTOR: PH.D. MARCO VINICIO CALAHORRANO RECALDE

marco.calahorrano@epn.edu.ec

DMQ, FEBRERO 2022

CERTIFICACIONES

Yo, GABRIELA ESTEFANÍA REVELO SILVERIO, declaro que el trabajo de integración curricular aquí descrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y, que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

Gabriela Estefanía Revelo Silverio

Certifico que el presente trabajo de integración curricular fue desarrollado por Gabriela Estefanía Revelo Silverio, bajo mi supervisión.

Ph.D. Marco Vinicio Calahorrano Recalde
DIRECTOR

DECLARACIÓN DE AUTORÍA

A través de la presente declaración, afirmamos que el trabajo de integración curricular aquí descrito, así como el producto resultante del mismo, es público y estará a disposición de la comunidad a través del repositorio institucional de la Escuela Politécnica Nacional; sin embargo, la titularidad de los derechos patrimoniales nos corresponde a los autores que hemos contribuido en el desarrollo del presente trabajo; observando para el efecto las disposiciones establecidas por el órgano competente en propiedad intelectual, la normativa interna y demás normas.

Gabriela Estefanía Revelo Silverio

Ph.D. Marco Vinicio Calahorrano Recalde

AGRADECIMIENTO

A mis padres, Emilia y Nicolás, por motivarme a buscar incansablemente mi camino, por enseñarme que solo el amor nos muestra el rostro más desinteresado del servicio a los demás. A mi hermana Karla, por ayudarme a buscar mi lugar en el mundo, por ser la certeza más importante de mi vida. Gracias familia, la Gaby de siete años hoy se siente honrada porque a costa de todo, apostaron por ella sin reticencias.

Además, quiero expresar mi eterna gratitud a mi director, Dr. Marco Calahorrano, por confiar sus ideas y consejos que quedaron plasmados en cada una de las líneas de esta investigación. A la M.Sc. Zuly Salinas por mostrarme que el trabajo incansable es capaz de vencer barreras y desigualdades. Sus pasos me inspiran.

A mi familia, a mi tío Napoleón, sus enseñanzas vivirán conmigo en cada letra. A mis amigos de "La banda de los Gatos", Yomi y Andre por enseñarme que siempre nos encontraremos con personas valiosas en el camino con las cuales podemos avanzar juntos, incluso en los caminos más sinuosos.

Finalmente, un agradecimiento profundo a quienes tuve la dicha de conocer en estos años, porque en este mundo de indiferencia, ustedes escucharon y albergaron mis ideas.

DEDICATORIA

A las niñas y mujeres que emprendieron el camino de la Matemática, aun cuando la balanza no esté equilibrada.

Que esta hermosa ciencia las cuestione siempre y a la vez les ratifique que «ser culto es el único modo de ser libre» como afirma José Martí.

RESUMEN

La búsqueda de soluciones para problemas de tipo Ambrosetti-Prodi continúa siendo un problema abierto. Por cuanto, en este estudio se aborda la existencia de al menos dos soluciones para este tipo de problemas con condiciones de frontera Dirichlet no homogéneas. En este caso es necesario iniciar con una manipulación del problema no homogéneo para transformarlo en uno homogéneo. Se consideran métodos de resolución diferentes para cada una de las soluciones. Para la primera, utilizamos un método de sub-supersoluciones y un esquema de iteración monótona para hallar una solución minimal. Mientras, que a través de un enfoque variacional con la ayuda de las condiciones de Palais-Smale y el Teorema de Paso de Montaña se encuentra la segunda solución. Finalmente, es importante mencionar que se presenta un corrimiento debido a la no homogeneidad de las condiciones de borde, lo que conlleva a dotar de algunas hipótesis a la no linealidad y a observar que la solución trivial deja de ser una solución para este problema.

Palabras clave: Problema de tipo Ambrosetti-Prodi, sub-supersoluciones, iteración monótona, Teorema de Paso de Montaña, existencia de soluciones.

ABSTRACT

Finding solutions to Ambrosetti-Prodi type problems remains an open problem. This study addresses the existence of at least two solutions to this type of problem with non-homogeneous Dirichlet boundary conditions. In this case, it is necessary to manipulate the non-homogeneous problem in order to turn it into a homogeneous one. Different resolution methods are taken into account for each solution. For the first one, we use the method of sub-supersolutions and the method of monotone iteration to find a minimal solution. While the second solution is found through a variational approach with the help of the Palais-Smale condition and the Mountain Pass Theorem. Finally, it is important to note that there is a shift due to the nonhomogeneity of the boundary conditions, which leads to provide some hypothesis to nonlinearity and observe that the trivial solution is not a solution to this problem.

Keywords: Ambrosetti-Prodi type Problem, sub-supersolutions, monotone iteration, Mountain Pass Theorem, existence of solutions.

Índice general

Capítulo 1

Descripción del componente desarrollado

El estudio de este componente se centra en el problema de Ambrosetti-Prodi que, a pesar de ser analizado desde algunas aristas, todavía supone un reto cuando se lo desarrolla con condiciones de borde Dirichlet no homogéneas para el operador laplaciano. En este contexto, se pretende determinar el comportamiento que subyace a las soluciones para este tipo de problemas a través de algunas de las técnicas más conocidas.

A continuación, se presentan los objetivos sobre los que se sustenta el trabajo, su alcance y finalmente el marco teórico que brinda la rigurosidad teórica necesaria.

1.1. Objetivo general

Especificar hipótesis sobre los datos del problema de tipo Ambrosetti-Prodi con condiciones de frontera Dirichlet no homogéneas para el operador de Laplace, que aseguren la existencia de al menos dos soluciones de este.

1.2. Objetivos específicos

1. Analizar la base bibliográfica de forma detallada sobre problemas de tipo Ambrosetti-Prodi para diferentes operadores y diferentes hipótesis.

2. Encontrar e implementar las técnicas apropiadas para determinar la existencia de soluciones para problemas de tipo Ambrosetti-Prodi.

1.3. Alcance

Mediante este trabajo se busca proponer y demostrar un resultado de existencia de soluciones para un problema semilineal de tipo Ambrosetti-Prodi con condiciones de borde no homogéneas para el operador laplaciano.

Para alcanzar este objetivo se estudiará la técnica de sub-supersoluciones y el método de iteración monótona para hallar una solución minimal. También, se hará uso de un enfoque variacional y gracias a la geometría del problema se aplicará el Teorema de Paso de Montaña para establecer la existencia de una segunda solución.

1.4. Marco teórico

A lo largo de esta sección se exponen definiciones y resultados importantes que constituyen las herramientas indispensables para su aplicación en el capítulo siguiente tanto de manera directa como es el caso de los teoremas clásicos pero también como base para la acotación de algunas desigualdades. Se anticipa al lector que para profundizar en estos tópicos y las demostraciones de los resultados puede referirse a [4] y [6].

1.4.1. Notaciones importantes

Se denota por Ω a un dominio abierto y acotado de $\mathbb{R}^N$, además, $\partial\Omega$ es la frontera de Ω. Además, $\mathbb{R}^N$ está dotado de la medida de Lebesgue dx, y asimismo, todas las integrales se consideran en este sentido.

Si $D \subset \mathbb{R}^N$, entonces la medida de D se nota por $|D|$. Se dice que una propiedad se cumple en casi todo punto (c.t.p.) en Ω si existe un subconjunto $D \subset \Omega$ de medida nula tal que la propiedad se cumple en cada punto de $\Omega \setminus D$.

El gradiente de u en $x = (x_1, \ldots, x_N)$, si $u : \Omega \to \mathbb{R}$ es diferenciable, es el vector $\nabla u(x) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_N}(x)\right)$.

Si $u : \Omega \to \mathbb{R}$, el operador en forma de divergencia cuando la matriz $A(x)$ es la matriz identidad I, se expresa como

$$Lu = -\textbf{div}(I\nabla u) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{dx_i^2} = -\Delta u.$$

A través de Δ se denota al operador laplaciano.

1.4.2. Espacio de Funciones

Se definen brevemente algunos espacios de funciones que son ampliamente utilizados bajo la notación que aquí se presenta.

- $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, es el espacio de Lebesgue de funciones $u : \Omega \to \mathbb{R}$ medibles tales que $\int_\Omega |u(x)|^p \ dx < +\infty$. Es un espacio de Banach dotado de la norma

$$\|u\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |u|^p \ dx \right)^{1/p}.$$

- $C^k(\Omega)$, con $k \geq 1$ es el espacio de funciones que son k veces diferenciables y cuyas k-ésimas derivadas son continuas en Ω.

- $C^\infty(\Omega)$, es el espacio de funciones $u : \Omega \to \mathbb{R}$ que son infinitamente diferenciables en Ω. Además,

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k \geq 1} C^k(\Omega).$$

- $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, con $0 < \alpha < 1$ es el espacio definido por

$$C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) = \left\{ u \in C(\overline{\Omega}); \sup_{\substack{x,y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} < \infty \right\}.$$

- $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ es el espacio de Hölder que viene dado por,

$$C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) = \left\{ u \in C^k(\Omega) : D^j u \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}) \quad \forall j, |j| \leq k \right\},$$

  es decir, es el espacio de funciones k veces continuamente diferenciables y donde las k-ésimas derivadas satisfacen la condición de

Hölder de orden $\alpha \in (0, 1]$.

- $W^{1,p}(\Omega)$, con $p \in [1, +\infty)$, es el espacio de Sobolev definido por

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \;\middle|\; \begin{array}{c} \exists\, g_1, g_2, \ldots, g_n \in L^p(\Omega) \quad \text{tal que} \\ \displaystyle\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \quad \forall\, i = 1, 2, \ldots, n \end{array} \right\}.$$

- $W_0^{1,p}(\Omega)$ es la clausura de $C_c^\infty(\Omega)$ en la norma de $W^{1,p}(\Omega)$.

Con estos espacios se presentan resultados importantes que nos permiten realizar las acotaciones a lo largo de los cálculos en la búsqueda de las soluciones.

Teorema 1.1 (Inmersiones de Sobolev). *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado con frontera lo suficientemente regular. Sea $p \geq 1$, entonces las siguientes inyecciones son compactas,*

- *Si $p < n$, entonces $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ cuando $q \in [1, p^\star)$.*
- *Si $p = n$, se tiene que $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ para cada $q \in [1, +\infty)$.*
- *Si $p > n$, se sigue que $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.*

La demostración de este teorema puede ser revisada por el lector en [6, pp. 285-286].

Observación. El exponente crítico es denotado por $p^\star$ de forma que $\frac{1}{p^\star} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$.

Teorema 1.2. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $\{u_k\}$ una sucesión en $L^p(\Omega)$, con $p \in [0, +\infty]$, tal que $u_k \to u$ en $L^p(\Omega)$ cuando $k \to \infty$. Entonces existe una subsucesión $\{u_{k_j}\}$ y una función $v \in L^p(\Omega)$ tales que*

- *$u_{k_j}(x) \to u(x)$ c.t.p. en Ω cuando $j \to \infty$;*
- *para todo j, $|u_{k_j}(x)| \leq v(x)$ c.t.p en Ω.*

Teorema 1.3 (Desigualdad de Poincaré). *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado. Entonces existe una constante $C > 0$, que depende únicamente de Ω, tal que*

$$\int_\Omega u^2 \, dx \leq C \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx, \qquad \forall\, u \in H_0^1(\Omega).$$

OBSERVACIÓN. Como consecuencia de esta desigualdad, la cantidad

$$\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

es una norma en $H_0^1(\Omega)$, equivalente a la norma usual.

TEOREMA 1.4 (Teorema de Banach-Alaoglu). *Sea X un espacio de Banach reflexivo. Si $B \subset X$ es acotado, entonces B es relativamente compacto en la topología débil de X.*

OBSERVACIÓN. El dual de un espacio de Banach X, se notará por X'. Además, decimos que u_n converge débilmente a u, es decir, en la topología débil de X, denotado por $u_n \rightharpoonup u$, cuando

$$f(u_n) \to f(u),$$

cuando $n \to +\infty$ y para todo $f \in X'$.

TEOREMA 1.5 (Principio del Máximo para el problema de Dirichlet). *Sean $f \in L^2(\Omega)$ y $u \in H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ la solución del problema de Dirichlet,*

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Entonces, para cada $x \in \Omega$,

$$\min\left\{\inf_{\partial\Omega} u, \inf_{\Omega} f\right\} \leq u(x) \leq \max\left\{\sup_{\partial\Omega} u, \sup_{\Omega} f\right\}.$$

1.4.3. Introducción a la teoría de Puntos Críticos

DEFINICIÓN 1.1. *Sean X un espacio de Banach y $J : X \to \mathbb{R}$ un funcional diferenciable. Una sucesión $\{u_n\}$, donde $u_n \in X$ tal que verifica*

$$\{J(u_n)\} \text{ es acotada (en } \mathbb{R}) \text{ y,}$$
$$J'(u_n) \to 0 \text{ en } X' \text{ cuando } k \to \infty,$$

es llamada una sucesión de Palais-Smale para J.

Además, dado $c \in \mathbb{R}$, si

$$J(u_k) \to c \text{ en } \mathbb{R} \text{ y },$$
$$J'(u_k) \to 0 \text{ en } X' \text{ cuando } k \to \infty,$$

entonces $\{u_k\}$ es una sucesión de Palais-Smale para J al nivel c. Decimos que c es un nivel de Palais-Smale para J.

Observación. Si trabajamos sobre un espacio de Hilbert H, se puede identificar la diferencial con el gradiente a través del producto escalar. Es decir, en la segunda propiedad de estas sucesiones se puede escribir como

$$\nabla J(u_k) \to 0 \text{ en } H.$$

La convergencia de la línea anterior es en la topología fuerte de H.

Definición 1.2. *Sean X un espacio de Banach y $J : X \to \mathbb{R}$ un funcional diferenciable. Decimos que J verifica la condición de Palais-Smale (J verifica (PS)) si toda sucesión de Palais-Smale para J posee una subsucesión convergente en X.*
Además, decimos que J satisface la condición de Palais-Smale al nivel $c \in \mathbb{R}$ (J verifica $(PS)_c$), si toda sucesión de Palais-Smale al nivel c tiene una subsucesión convergente en X.

Proposición 1.6. *Sea $J : X \to \mathbb{R}$ un funcional $C^1(\Omega)$, con X un espacio de Banach. Suponga que*

$$J'(u) = Lu + K(u),$$

donde L es un operador lineal e invertible y K es compacto. En adición, suponga que toda sucesión de Palais-Smale de J es acotada en X. Entonces, J verifica la condición de Palais-Smale.

Proposición 1.7. *Sean X un espacio de Banach y $J : X \to \mathbb{R}$ un funcional $C^1(\Omega)$. Si existe una sucesión de Palais-Smale para J y J verifica (PS), entonces J es un punto crítico.*
Si existe una sucesión de Palais-Smale para J al nivel c y J verifica $(PS)_c$, entonces J posee un punto crítico al nivel c.

Definición 1.3. *Sea H un espacio de Hilbert y $J : H \to \mathbb{R}$ un funcional.*

Diremos que $J \in C^{1,1}(H)$ si J es $C^1(H)$ y su gradiente $\nabla J : H \to H$ es localmente Lipschitz continuo en H.

Ahora, se presenta un teorema clásico de gran utilidad que nos permite establecer la existencia de puntos críticos de funcionales no lineales en espacios de dimensión infinita.

TEOREMA 1.8 (Teorema de Paso de Montaña)**.** *Sea H un espacio de Hilbert y $J \in C^{1,1}(H)$ tal que $J(0) = 0$. Supongamos que existen números positivos ρ y α tales que*

- $J(u) \geq \alpha$ *si* $\|u\| = \rho$*;*
- *Existe* $v \in H$ *tal que* $\|v\| > \rho$ *y* $J(v) < \alpha$*.*

Entonces existe una sucesión de Palais-Smale para J al nivel $c \leq \alpha$. Si J verifica $(PS)_c$, entonces existe un punto crítico al nivel c.

OBSERVACIÓN. Para la interpretación geométrica de este teorema se puede pensar que el gráfico de J es un paisaje donde existen dos valles rodeados por una montaña que los separa; entonces, lo que se busca es un camino que una a estos dos valles y que además atraviese por un paso de montaña, i.e., un punto de silla de J.

De manera simplificada, el teorema nos indica que entre dos montañas (valles) existe un paso de montaña.

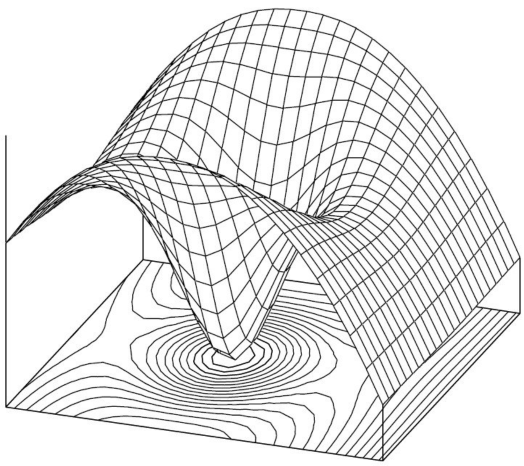

Figura 1.1: Interpretación geométrica del TPM
Fuente: Tomado de [11, pp. 66]

1.4.4. Problemas de tipo Ambrosetti-Prodi

En 1972, Ambrosetti y Prodi en [1] introducen un nuevo campo de trabajo con el uso de argumentos topológicos. Los autores consideran el siguiente problema de valores en la frontera,

$$(P_{AP}) \begin{cases} -\Delta u = f(x,u) + g(x) & \text{en } \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde Ω es un conjunto abierto, acotado y con frontera lo suficientemente suave, $g \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ y $f \in C^2(\mathbb{R})$ que satisface:

i. $f(x,0) = 0$.

ii. $f''(x,s) > 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$,

iii. $0 < \lim\limits_{s\to-\infty} \frac{f(x,s)}{s} < \lambda_1 < \lim\limits_{s\to+\infty} \frac{f(x,s)}{s} < \lambda_2$,

con λ_1 el primer valor propio asociado al operador $-\Delta$. Observemos que la condición iii implica que la no linealidad de f realiza un salto o cruza el primer valor propio λ_1.
Haciendo uso de los teoremas de inversión para aplicaciones diferenciables con sigularidades en espacios de Banach, se prueba la existencia de una variedad conexa y cerrada Λ que divide al espacio en dos componentes conexas, Λ_1 y Λ_2 de forma que el problema (P_{AP}) tiene exactamente una solución, dos soluciones o ninguna solución si se toma g en Λ, Λ_2 ó Λ_1, respectivamente.

Berger y Podolak en [5] dotan a f de crecimiento lineal y consideran una descomposición de g como

$$g(x) = t\phi(x) + h(x),$$

donde $\phi(x)$ es la función propia asociada al valor propio λ_1 y $h(x) \in \{\text{span } \phi\}^{\perp}$. Luego, el problema (P_{AP}) queda reescrito como

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u) + t\phi(x) + h(x) & \text{en } \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Para este artículo académico se hace uso del método de reducción de

Liapunov-Schmidt donde se expone un resultado análogo que en [1] y las soluciones se presentan como sigue: Existe $t^* \in \mathbb{R}$ tal que

- (P_{AP}) tiene exactamente una solución si $t = t^*$.
- (P_{AP}) tiene exactamente dos soluciones si $t < t^*$.
- (P_{AP}) no tiene solución si $t > t^*$.

Luego, Kazdan y Warner en [12] relajan la condición iii sobre f, planteando en su lugar

$$\limsup_{s\to-\infty} \frac{f(x,s)}{s} < \lambda_1 < \liminf_{s\to+\infty} \frac{f(x,s)}{s}. \tag{1.1}$$

Sin embargo, bajo esta hipótesis, luego de construir una supersolución adecuada, se obtiene una única solución.

Por su parte, Dancer (ver [8]) obtiene estimas a priori para las soluciones del problema, y encuentra la segunda solución con la condición (1.1). El autor menciona que cuando $t < t^*$ el problema tiene al menos dos soluciones y cuando $t = t^*$ posee al menos una solución.

Para 1983, De Figueiredo [9] denomina por primera vez al problema (P_{AP}) con la hipótesis (1.1) como un *problema de tipo Ambrosetti-Prodi* y lo analiza para el caso superlineal y posteriormente trabaja con sistemas de ecuaciones diferenciales del tipo Ambrosetti-Prodi.

En los últimos años, Arcoya y Ruiz [3] extienden el problema de estudio al p-laplaciano suponiendo una condición alterna para (1.1)

$$\lambda_1 <= \liminf_{s\to+\infty} \frac{f(x,s)}{|s|^{p-2}s} \leq \limsup_{s\to+\infty} \frac{f(x,s)}{|s|^{p-2}s} = \lambda' < +\infty,$$

luego, se muestra la existencia de al menos dos soluciones a través de argumentos topológicos y del método de sub-supersoluciones.

Capítulo 2

Metodología

Es esta sección se va a exponer de forma detallada los métodos y las ideas más importantes que se consideraron a lo largo de la investigación. Cabe mencionar que el lector deberá discernir y abstraer la información que le resulte de utilidad para su propio caso, sin embargo, al ser utilizadas técnicas bastante conocidas es posible adecuarse bajo algunas consideraciones. Como guía se toma el esquema que sugiere Jabri en [11, pp. 72-75].

Debido a que el trabajo, de forma general, se centra en resolver un problema de valores en la frontera con condiciones de borde Dirichlet no homogéneas, el primer paso constituye en transformar este problema en uno homogéneo que sea más amigable al momento de realizar los cálculos. Para ello se utilizó las ideas que Calahorrano y Dobarro exponen en [7] donde consideran el problema equivalente.

Para abordar el nuevo problema homogéneo fue necesario revisar las técnicas utilizadas por varios autores ante problemas de tipo Ambrosetti-Prodi, dado que las condiciones que determinan a este problema influyen en el método de resolución. Así, Ambrosetti y Prodi en [2] y [1] utilizan argumentos topológicos y teoremas de inversión, al igual que Dancer en [8]. No obstante, Kazdan y Warner en [12] utilizan el método de sub-supersoluciones y De Figueiredo [9] utiliza este mismo método junto con un enfoque variacional para cada una de las soluciones que propone.

Es así que luego de estudiar la viabilidad de estas técnicas se decidió utilizar dos métodos principales: método de sub-supersoluciones y el variacional. Para este primer enfoque se adecúan las ideas de De Figueiredo [9], siendo necesario hacer uso de un método auxiliar que nos brinde una solución minimal que se consigue a través del método de iteración monótona. Para este argumento se consideran las ideas de Pao (referirise a [11]). A continuación, se realiza una breve revisión de estos esquemas.

2.1. Método de sub-supersoluciones

Consideremos el siguiente problema de valores en la frontera

$$(P_L) \begin{cases} -Lu = f(x,u) & \text{en } \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

con Ω es de clase $C^{2,\alpha}(\Omega)$ y f es una función Hölder continua en (x,u). A continuación, se define una subsolución y una supersolución para (P_L).

DEFINICIÓN 2.1. *Una función $\overline{u} \in C^{\alpha}(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ es es llamada supersolución de (P_L) si*

$$\begin{aligned} -L\overline{u} &\geq f(x,\overline{u}) & \textit{en } \Omega, \\ \overline{u} &\geq 0 & \textit{sobre } \partial\Omega, \end{aligned}$$

De forma análoga, $\underline{u} \in C^{\alpha}(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ es una subsolución de (P_L) si satisface con

$$\begin{aligned} -L\underline{u} &\leq f(x,\underline{u}) & \textit{en } \Omega, \\ \underline{u} &\leq 0 & \textit{sobre } \partial\Omega, \end{aligned}$$

PROPOSICIÓN 2.1. *Supongamos que existe una supersolución $\overline{u}$ y una subsolución $\underline{u}$ de (P_L), que satisfacen que*

$$\underline{u} \leq 0, \overline{u} \geq 0 \textit{ sobre } \partial\Omega \textit{ en el sentido de las trazas, y, } \underline{u} \leq \overline{u} \textit{ c.t.p. en } \Omega.$$

Entonces existe una solución de (P_L) tal que

$$\underline{u} \leq u \leq \overline{u} \textit{ c.t.p. en } \Omega.$$

OBSERVACIÓN. Se dice que un par de sub-supersoluciones es ordenado si $\underline{u} \leq \overline{u}$ en $\overline{\Omega}$.

Para cualquier par de sub-supersoluciones ordenado, al sector de todas las funciones $u \in C(\overline{\Omega})$ tal que $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$ en $\overline{\Omega}$, se denotará por $\langle \underline{u}, \overline{u} \rangle$

2.2. Método de iteración monótona

Continuando en el mismo sentido de la sección previa y encaminándonos a clarificar la manera en la que el método trabaja, supongamos que f verifica la condición de Lipschitz continuidad unilateralmente, es decir, que para $\underline{u} \leq u_2 \leq u_1 \leq \overline{u}$,

$$f(x, u_1) - f(x, u_2) \geq -\tilde{c}(x)(u_1 - u_2,) \tag{2.1}$$

donde $\tilde{c}$ es una función acotada no negativa en Ω. Si sumamos a los dos lados de la ecuación de (P_L) la función $\tilde{c}u$, el problema se reescribe como

$$\begin{cases} -Lu + \tilde{c}u = F(x, u) & \text{en } \Omega, \\ \qquad u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde $F(x, u) = \tilde{c}u + f(x, u)$. Además, $F(x, u)$ es monótona no decreciente en $u \in \langle \underline{u}, \overline{u} \rangle$ debido a la condición (2.1).
Sin pérdida de generalidad, asumamos $\tilde{c} \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$, así que $F(x, u)$ es Hölder continua en $\overline{\Omega} \times \langle \underline{u}, \overline{u} \rangle$. Por esta razón, para cualquier $u_0 \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ podemos construir una sucesión $\{u_k\}$ a través de un proceso iterativo como sigue

$$\begin{aligned} -Lu_k + \tilde{c}u_k &= F(x, u_{k-1}) && \text{en } \Omega, \\ u_k &= 0 && \text{sobre } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Con respecto a la primera iteración, establecemos que $u_0 = \overline{u}$ y $u_0 = \underline{u}$ y denotamos por $\{\underline{u}_k\}$, $\{\overline{u}_k\}$ a las sucesiones de sub y supersoluciones, respectivamente.
En la siguiente proposición establemos que estas dos sucesiones están bien definidas.

Proposición 2.2. *Dadas f una función que satisface* (2.1) *y $\tilde{c} \geq 0$ no identicamente cero cuando $\beta_0 \equiv 0$. Entonces las sucesiones $\{\underline{u}_k\}$, $\{\overline{u}_k\}$ están bien definidas.*

Observación. La hipótesis de que $\tilde{c}$ no sea idénticamente cero es necesaria para asegurar que para cada k, el problema (2.2) tenga una única solución.

PROPOSICIÓN 2.3. *Si se cumplen hipótesis de la proposición 2.2. Entonces las sucesiones de sub-supersoluciones poseen una propiedad de monotonía, es decir,*

$$\underline{u} \leq \underline{u}_k \leq \underline{u}_{k+1} \leq \overline{u}_{k+1} \leq \overline{u} \quad \text{ en } \Omega,$$

para cada k. En adición, $\underline{u}_k$ y $\overline{u}_k$ son sub y supersoluciones ordenadas.

OBSERVACIÓN. El resultado de este teorema nos indica que los siguientes límites puntuales existen

$$\lim_{k\to+\infty} \overline{u}_k(x) = \tilde{u}(x) \quad \text{y} \quad \lim_{k\to+\infty} \underline{u}_k(x) = \underset{\sim}{u}(x),$$

y satisfacen la relación $\underline{u} \leq \underset{\sim}{u} \leq \overline{u} \leq \tilde{u}$ en $\overline{\Omega}$.

La proposición que se va a enunciar nos muestra que estos límites son soluciones para (P_L).

TEOREMA 2.4. *Sean $\underline{u}$ y $\overline{u}$ un par de sub-supersoluciones ordenadas que satisfacen (P_L) y f que verifica la condición (2.1). Entonces $\{\overline{u}_k\}$ converge monótonamente por arriba a la solución $\tilde{u}$, y $\{\underline{u}_k\}$ converge monótonamente desde abajo a la solución $\underset{\sim}{u}$, y $\tilde{u}, \underset{\sim}{u} \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$. Además, $\underline{u} \leq \underset{\sim}{u} \leq \tilde{u} \leq \overline{u}$ en Ω, y si u^* es otra solucion en $\langle \underline{u}, \overline{u} \rangle$, entonces $\underset{\sim}{u} \leq u^* \leq \tilde{u}$.*

OBSERVACIÓN. Debido a que se tiene que $\underset{\sim}{u} \leq u^* \leq \tilde{u}$, las funciones $\underset{\sim}{u}$ y $\tilde{u}$ corresponden a las soluciones minimal y maximal para el problema (P_L).

A continuación, para la primera solución se presentan dos proposiciones en las que se prueba la existencia de una subsolución y una supersolución, respectivamente. Luego, basados en el teorema 2.4 se propone un teorema de existencia para la primera solución minimal utilizando los resultados anteriores y el esquema expuesto por [13] y [14] que ha sido detallado en la Sección 2.2.

Finalmente, para obtener la segunda solución es empleado el método variacional para lo cual primero se realiza la formulación variacional del problema. Luego, se plantea el funcional de energía sobre el que se comprobará que cumple con la condición de Palais-Smale. En este punto, no se ha demostrado directamente sino a través de un razonamiento de acotación (ver [11]). Para concluir se enuncia el Teorema de Paso de Montaña y se presenta la prueba de sus hipótesis con lo que se ha tiene la existencia de la segunda solución y con ello del teorema principal.

Capítulo 3

Resultados obtenidos

3.1. Existencia de la Primera Solución

En este capítulo se iniciará con un estudio previo del problema de tipo Ambrosetti-Prodi con condiciones de borde Dirichlet no homogéneas. Luego, se va a proceder a la búsqueda de la primera solución utilizando los métodos de sub-supersoluciones y el de iteración monótona, juntos constituyen una herramienta muy útil para hablar de la existencia de soluciones en ecuaciones diferenciales parciales no lineales.

3.1.1. Estudio preliminar del problema no homogéneo

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio acotado y lo suficientemente regular. Consideramos el problema de valores en la frontera,

$$(P_1) \begin{cases} -\Delta u = g(x,u) + f(x) & \text{en } \Omega, \\ \quad u = \eta & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

donde $\eta \geq 0$ no idénticamente cero, f es una función $C^\alpha(\Omega)$ y g es el término no lineal que satisface ser una función de tipo $C^1(\Omega)$ y Lipschitz continua.

Ahora, tomemos w la solución del siguiente problema de Dirichlet no homogéneo,

$$\begin{cases} -\Delta w = 0 & \text{en } \Omega, \\ w = \eta & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

así, por el Principio del Máximo, $0 < \inf \eta \leq w \leq \sup \eta$, y $w \not\equiv 0$.
Si consideramos $v = u - w$, entonces $u = v + w$. Del hecho que w es solución del problema no homogéneo y por la linealidad del operador laplaciano, se sigue que

$$\begin{cases} -\Delta v - \Delta w = g(x, v + w) + f(x) & \text{en } \Omega, \\ v + \eta = \eta & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Finalmente, se concluye que el problema a estudiarse va a ser de la forma siguiente:

$$(P) \begin{cases} -\Delta v = g(x, v + w) + f(x) & \text{en } \Omega, \\ v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Se dice que (P) es un problema de tipo Ambrosetti-Prodi si g satisface las dos condiciones siguientes:

$$\limsup_{s \to -\infty} \frac{g(x,s)}{s} < \lambda_1, \tag{3.1}$$

y

$$\lambda_1 < \liminf_{s \to +\infty} \frac{g(x,s)}{s}. \tag{3.2}$$

Se denota λ_1 al primer valor propio correspondiente al problema de valores propios,

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Además, sea ϕ la función propia correspondiente al primer valor propio λ_1 la cual es positiva y normalizada, es decir, $\int \phi^2 = 1$. Consideremos N el subespacio de $C^\alpha(\overline{\Omega})$ generado por ϕ, entonces su ortogonal viene dado por

$$N^\perp = \Big\{ v \in C^\alpha(\overline{\Omega}) : \int v\phi = 0 \Big\}.$$

Luego, es posible observar que cualquier $f \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ puede ser escrita de forma única como

$$f = t\phi + h,$$

con $t \in \mathbb{R}$ y $h \in N^\perp$. En este sentido, utilizando esta descomposición el problema (P) se ve como el siguiente problema parametrizado:

$$(P_t)\begin{cases} -\Delta v = g(x, v+w) + t\phi + h & \text{en } \Omega, \\ \quad v = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Además se consideran dos condiciones más restrictivas que (3.1) y (3.2),

$$\limsup_{s\to-\infty} g'_s(x,s) < \lambda_1, \tag{3.3}$$

y

$$\lambda_1 < \liminf_{s\to+\infty} g'_s(x,s), \tag{3.4}$$

donde g'_s es la derivada parcial de g con respecto a s.
Analizando su uso *a posteriori* en el enfoque variacional, suponemos dos hipótesis sobre g; la primera será la siguiente hipótesis de crecimiento,

$$|g(x,s)| \leq a(x)|s| \tag{3.5}$$

con $a(x) \geq 0$ y $a(x) \in L^\infty$. Mientras que la segunda menciona que para cualesquier $x \in \Omega$, $s \in \mathbb{R}$ y $\nu > 2$,

$$0 < \nu G(x,s) \leq s g(x,s). \tag{3.6}$$

En este sentido, enunciamos el teorema principal de este trabajo que se centra en un resultado de existencia de soluciones para el problema (P_t).

Teorema 3.1. *Suponga* (3.1), (3.2), (3.5) *y* (3.6). *Entonces existe* $t_0 \in \mathbb{R}$ *tal que existen al menos dos soluciones para el problema* (P_t) *cuando* $t \leq t_0$.

Para la demostración de este resultado se procederá en dos fases, cada una correspondiente a la búsqueda de una solución bajo las condiciones expuestas anteriormente.

3.1.2. Búsqueda de la solución

A continuación, se proponen tres proposiciones que nos permiten encaminarnos hacia la primera solución, las cuales fueron adaptadas de lo planteado en [9].

Proposición 3.2. *Considerando (3a) y (3b). Entonces existe un número τ, independiente de $h \in N^{\perp}$, tal que (P_t) no posee solución para $t > \tau$.*

Demostración. Notemos que de la caracterización de límite superior e inferior aplicada en las hipótesis (3.1) y (3.2), existen $C > 0$ y $\underline{\mu} < \lambda_1 < \overline{\mu}$ de forma que

$$g(x,s) \geq \overline{\mu}s - C, \quad \text{y} \quad g(x,s) \geq \underline{\mu}s - C, \tag{3.7}$$

para $x \in \overline{\Omega}$ y $s \in \mathbb{R}$. Ahora, consideremos v como solución del problema (P_t) y si multiplicamos por ϕ,

$$-\Delta v\phi = g(x, v + w)\phi + t\phi^2 + h\phi.$$

Integrando y del hecho que $h \in N^{\perp}$,

$$\int_\Omega -\Delta v\phi = \int_\Omega g(x, v + w)\phi + \int_\Omega f\phi^2 + \int_\Omega \cancelto{0}{h\phi}.$$

Operando se tiene que,

$$\begin{aligned} \int_\Omega v(-\Delta\phi) &= \int_\Omega g(x, v + w)\phi + t\int_\Omega \cancelto{1}{\phi^2} \\ \lambda_1 \int_\Omega v\phi &= \int_\Omega g(x, v + w)\phi + t, \end{aligned}$$

debido a las acotaciones de (3.7)

$$\lambda_1 \int_\Omega v\phi \geq \int_\Omega (\underline{\mu}(v + w) - C)\phi + t$$

Despejando de la desigualdad anterior,

$$\begin{aligned} t &\leq (\lambda_1 - \underline{\mu}) \int_\Omega v\phi - \underline{\mu}\int_\Omega w\phi + C\int_\Omega \phi \\ &\leq (\lambda_1 - \underline{\mu})\|v\|_{L^2}\cancelto{1}{\|\phi\|_{L_2}} + \underline{\mu}\|w\|\cancelto{1}{\|\phi\|} + C\|\phi\|_{L^2} \\ &= (\lambda_1 - \underline{\mu})\|v\|_{L^2} + \underline{\mu}\|w\| + C \end{aligned}$$

$$= (\lambda_1 - \underline{\mu})\|v\|_{L^2} + C.$$

Tomando $\tau := (\lambda_1 - \underline{\mu})\|v\|_{L^2} + C$ tenemos que cuando se satisface que $t \leq \tau$ el problema (P_t) tiene solución, caso contrario el problema no tiene solución. $\square$

Ahora decimos que $\underline{v} \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ es una subsolución de (P_t) si

$$\begin{aligned} -\Delta \underline{v} &\leq g(x, \underline{v} + w) + t\phi + h \quad \text{en } \Omega, \\ \underline{v} &\leq 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{3.8}$$

De forma análoga, definimos una supersolución de P_t como $\overline{v} \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ que verifica que

$$\begin{aligned} -\Delta \overline{v} &\geq g(x, \overline{v} + w) + t\phi + h \quad \text{en } \Omega, \\ \overline{v} &\geq 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Entonces si el problema (P_t) tiene una subsolución $\underline{v}$ y una supersolución $\overline{v}$ que cumplen que $\underline{v} \leq \overline{v}$, entonces se dirá que el problema tiene una solución v_t tal que $\underline{v} \leq v_t \leq \overline{v}$.

Además, si se tiene otra solución v que también $\underline{v} \leq v \leq \overline{v}$ entonces existe una relación de orden entre las dos soluciones, $v_t \leq v$ y se puede decir que esta solución se obtuvo por un método iterativo.

PROPOSICIÓN 3.3. *Supongamos* (3.1) *y* (3.2). *Dado $h \in N^{\perp}$, entonces para cualquier $t \leq \tau$ existe una función $z_t \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ con $z_t = 0$ sobre $\partial\Omega$ tal que*

i) z_t *es subsolución de* (P_t).

ii) $z_t \leq Z_t$ *para cualquier* Z_t *supersolución de* (P_t).

Demostración. Sea $t \leq \tau$, cualquiera. Debido a la Alternativa de Fredholm (ver [10, p. 321]) , consideremos z_t la única solución del problema

$$(P_1) \begin{cases} -\Delta z = \underline{\mu}(z + w) - C + t\phi + h & \text{en } \Omega, \\ z = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

con $\underline{\mu}$ y C como en (3.7). En primer lugar, observemos que z_t es subsolución de (P_t). En efecto, como z_t es solución del problema anterior, satisface

$$\begin{aligned} -\Delta z_t &= \underline{\mu}(z_t + w) - C + t\phi + h \\ &\leq g(x, z_t + w) + t\phi + h, \end{aligned}$$

en Ω, además

$$z_t = 0,$$

sobre $\partial\Omega$. Entonces, por (3.8) se puede concluir el literal i) que menciona que z_t es una subsolución de (P_t) con $t \leq \tau$.
Para el siguiente literal, sea Z_t la supersolución de (P_t), es decir,

$$\begin{aligned} -\Delta Z_t &\geq g(x, Z_t + w) + t\phi + h \\ &\geq \underline{\mu}(Z_t + w) - C + t\phi + h. \end{aligned}$$

Como z_t es solución de (P_1), entonces

$$\begin{aligned} &= \underline{\mu}(Z_t + w) - \cancel{C} - \Delta z_t - \mu(z_t + w) + \cancel{C} \\ &= \underline{\mu}(Z_t - z_t) - \Delta z_t. \end{aligned}$$

Se sigue que,

$$-\Delta(Z_t - z_t) \geq \underline{\mu}(Z_t - z_t).$$

Multplicando por ϕ a ambos lados de la desigualdad previa. Luego, integrando y del hecho que ϕ es la primera función propia, observamos lo siguiente

$$\begin{aligned} \int_\Omega \underline{\mu}(Z_t - z_t)\phi &\leq \int_\Omega -\Delta(Z_t - z_t)\phi \\ &= \int_\Omega \lambda_1(Z_t - z_t)\phi, \end{aligned}$$

entonces,

$$\underline{\mu} \int_\Omega (Z_t - z_t)\phi \leq \lambda_1 \int_\Omega (Z_t - z_t)\phi.$$

Debido al factor común de las expresiones,

$$(\lambda_1 - \underline{\mu}) \int_\Omega (Z_t - z_t)\phi \geq 0.$$

Analicemos el signo de los términos: $\lambda_1 - \underline{\mu} > 0$ y $\phi > 0$, entonces resta que

$$Z_t - z_t \geq 0,$$

por lo tanto,

$$z_t \leq Z_t,$$

como se quería. $\square$

En la siguiente proposición se enuncia la existencia de una supersolución para el problema (P_t).

PROPOSICIÓN 3.4. *Si suponemos* (3.1) *y* (3.2) *y dado* $h \in N^{\perp}$*, entonces existen* $t_0 \in \mathbb{R}$ *y* $Z \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ *que es cero en el borde, la cual es supersolución para* (P_t) *con* $t \leq t_0$*.*

Demostración. Sean $\varepsilon > 0$ y $p > N$ dados. Por el Teorema de Morrey, se sigue que

$$W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}),$$

y el Principio del Máximo existen $K, \alpha > 0$ tales que verifican

$$-K < y - \alpha\phi < 0,$$

en Ω, para $y \in W^{2,p}(\Omega)$ con $y = 0$ sobre $\partial\Omega$, y $\|y\|_{W^{2,p}} \leq \varepsilon$.
Notemos que el operador $-\Delta$ con condiciones de Dirichlet homogéneas tiene un inverso acotado, es decir, existe una constante $C > 0$, tal que,

$$\|y\|_{W^{2,p}} \leq C\|\zeta\|_{L^p}, \tag{3.10}$$

para el problema,

$$(P_2) \begin{cases} -\Delta y = \zeta & \text{en } \Omega, \\ y = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Consideremos,

$$m = \text{máx}\{|g(x,s) + h(x)| : x \in \Omega, \kappa_1 \leq s \leq \kappa_2\},$$

donde

$$-K + \inf_{\partial\Omega} \eta \leq s \leq \varepsilon + \sup_{\partial\Omega} \eta,$$

con $\kappa_1 := \varepsilon + \sup_{\partial\Omega} \eta$ y $\kappa_2 := -K + \inf_{\partial\Omega} \eta$.
Ahora, tomemos dos subdominios, Ω_1 y Ω_2, de Ω de forma que

$$\Omega_1 \subset \overline{\Omega}_1 \subset \Omega_2 \subset \overline{\Omega}_2 \subset \Omega,$$

y la medida de Lebesgue

$$|\Omega \setminus \Omega_1| \leq \left[\frac{\kappa_2}{Cm}\right]^p, \tag{3.11}$$

con C y m definidos en las líneas precedentes. Entonces, definamos $\zeta \in C^\infty$ tal que

$$\zeta(x) = \begin{cases} 0 & \textbf{si } x \in \Omega_1, \\ m & \textbf{si } x \in \Omega \setminus \Omega_2, \\ 0 \leq \zeta(x) \leq m & \textbf{si } x \in \Omega_2 \setminus \Omega_1. \end{cases}$$

Sea y la única solución de (P_2), entonces utilizando (3.10),(3.11) y la definición de $\zeta(x)$,

$$\begin{aligned} \|y\|_{W^{2,p}} &\leq C\|\zeta\|_{L^p} \\ &= C\left(\int_\Omega |\zeta|^p\right)^{1/p} \\ &= C\left(\int_{\Omega\setminus\Omega_1} |\zeta|^p\right)^{1/p} \\ &\leq \left(\int_{\Omega\setminus\Omega_1} m^p\right)^{1/p} \\ &\leq C(m^p)^{1/p}\left(\int_{\Omega\setminus\Omega_1} 1\right)^{1/p} \\ &= Cm|\Omega \setminus \Omega_1|^{1/p} \\ &\leq Cm \cdot \frac{\kappa_2}{Cm} \\ &= \kappa_2. \end{aligned}$$

En este sentido, si definimos $Z = y - \alpha\phi$, tenemos que Z es supersolución de (P_t) para un t suficientemente negativo. Consideremos el caso cuando $x \in \Omega \setminus \Omega_2$, entonces

$$\begin{aligned} -\Delta Z &= -\Delta(y - \alpha\phi + w) \\ &= -\Delta y - \alpha(-\Delta\phi) - \cancelto{0}{\Delta w} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \zeta - \alpha\lambda_1\phi \\
&= m - \alpha\lambda_1\phi \\
&\geq g(x, y - \alpha\phi + w) + h(x) - \alpha\lambda_1\phi. \qquad (3.12)
\end{aligned}
$$

Notemos que es posible concluir (3.12) debido a que en el dominio Ω

$$
\kappa_1 \leq y - \alpha\phi + w \leq \kappa_2. \qquad (3.13)
$$

En efecto, se tiene que

$$
\begin{aligned}
-K < y - \alpha\phi < 0, \\
-K + w < y - \alpha\phi + w < w,
\end{aligned}
$$

además puesto que,

$$
\kappa_1 =: -K + \inf_{\partial\Omega} \eta \leq -K + w,
$$

y,

$$
w \leq \sup_{\partial\Omega} \eta \leq \sup_{\partial\Omega} \eta + \varepsilon := \kappa_2,
$$

se concluye (3.13).
Ahora analicemos cuando $x \in \Omega_2$. Recordemos que como ϕ está acotada lejos del cero, existe $\tilde{t}$ tal que

$$
\zeta \geq g(x, y - \alpha\phi + w) + h(x) + \tilde{t}\phi. \qquad (3.14)
$$

Así,

$$
-\Delta Z = \zeta - \alpha\lambda_1\phi.
$$

Utilizando (3.14) en la expresión anterior,

$$
\begin{aligned}
-\Delta Z &\geq g(x, y - \alpha\phi + w) + h(x) + \tilde{t}\phi - \alpha\lambda_1\phi \\
&= g(x, y - \alpha\phi + w) + h(x) + (\tilde{t} - \alpha\lambda_1)\phi,
\end{aligned}
$$

entonces, si tomamos $t_0 = \text{mín}\{\tilde{t} - \alpha\lambda_1, 0\alpha\lambda_1\}$ se observa que

$$
-\Delta Z \geq g(x, y - \alpha\phi + w) + h(x)_t\phi,
$$

para $t \leq t_0$. Nos resta verificar para las condiciones de borde. Luego, se tiene que

$$\begin{aligned} Z &= \cancelto{0}{y} - \cancelto{0}{\alpha\phi} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, concluimos que $Z = 0$ y con ello Z es supersolución para (P_t) con $t \leq t_0$. $\square$

A continuación, se presenta un primer resultado donde se enuncia la existencia de una solución minimal para el problema en estudio.

TEOREMA 3.5. *Asuma* (3.1) *y* (3.2). *Dado $h \in N^{\perp}$, existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que para cada $t \leq t_0$, el problema (P_t) tiene una solución minimal v_t, es decir, para cualquier $\widetilde{v}_t$ solución de (P_t), entonces $v_t \leq \widetilde{v}_t$.*

Demostración. En primer lugar, notemos que por la Proposición 3.4 existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que para $t \leq t_0$, (P_t) tiene una supersolución Z.
Entonces, tomemos $t \leq t_0$, cualquiera, y sea Z la supersolución de (P_t). Por la Proposición 3.3, (P_t) tiene una subsolución z_t y, en particular,

$$z_t \leq Z.$$

Siguiendo el esquema de Pao establecido en la Sección 2.2, notemos que g verifica la condición de Lipschitz continuidad unilateralmente pues, por hipótesis, es Lipschitz continua. Entonces nuestro problema es

$$(\widetilde{P}_t) \begin{cases} -\Delta v = \gamma_t(x, v) & \text{en } \Omega, \\ v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

donde $\gamma_t(x, v) = g(x, v + w) + t\phi + h$.
Ahora, sea $\Gamma_t = C(x)v + \gamma_t(x, v)$ y sumando $C(x)v$ a cada lado de $(\widetilde{P}_t)$,

$$(\widehat{P}_t) \begin{cases} -\Delta v + Cv = \Gamma_t(x, v) & \text{en } \Omega, \\ v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Construimos $\{v_k\}$ de la siguiente manera,

$$v_0 = z_t,$$

y v_k es la solución del problema

$$(\check{P}_t)\begin{cases} -\Delta v + Cv = \Gamma_t(x, v_{k-1}) & \text{en } \Omega, \\ \qquad v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

con $k = 1, 2, \ldots$
Nótese que Γ_t no depende de v, por tanto $(\check{P}_t)$ es un problema lineal. Gracias a la Alternativa de Fredholm, el problema posee una única solución para cada k. Luego, $\{v_k\}$ está bien definida.
Por la Proposición (2.3) se tiene la siguiente propiedad de monotonía,

$$z_t \leq v_1 \leq v_2 \leq \cdots \leq Z, \quad \text{en } \overline{\Omega}.$$

En adición, gracias al Teorema (2.4), $\{v_k\}$ converge monótonamente a v_t que verifica que $v_t \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ es solución de (P_t) y además es minimal. Nótese que $v_t \leq Z$, lo cual nos brinda la solución minimal buscada. □

TEOREMA 3.6. *Asumamos* (3.1) *y* (3.2). *Sea v_t una solución minimal de (P_t), entonces el primer valor propio, notado como μ_1, del problema de valores propios*

$$(P_\mu)\begin{cases} -\Delta y - g'_s(x, v_t + w)y = \mu y & \textit{en } \Omega, \\ \qquad y = 0 & \textit{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

es no negativo.

Demostración. La demostración se va a proceder por contradicción, para ello suponemos que $\mu_1 < 0$. Consideremos $y_1 > 0$ la primera función propia de (P_μ)tal que $y_1 > 0$ y está normalizada por $\int_\Omega y_1^2 = 1$. Tomemos $v_t + \delta y$ y del hecho que v_t es solución minimal del problema,

$$-\Delta(v_t + \delta y_1) = g(x, v_t + w) + t\phi + h + \delta\left(g'_s(x, v_t + w)y_1 + \mu_1 y_1\right). \tag{3.15}$$

Además, notemos que

$$g(x, v_t + \delta y_1 + w) - g(x, v_t + w) = \int_0^1 g'_s(x, v_t + r\delta y_1 + w)\delta y_1 dr.$$

Reemplazando esta ecuación en (3.15),

$$\begin{aligned}
-\Delta(v_t+\delta y_1) = g(x, v_t+\delta y_1+w) - \int_0^1 g_s'(x, v_t+r\delta y_1+w)\delta y_1 dr + \delta\Bigg(\int_0^1 g_s'(x, v_t+w)y_1 dr \\
+\mu_1 y_1\Bigg) + t\phi + h \\
= g(x, v_t+\delta y_1+w) + t\phi + h + \delta y_1\left[\int_0^1 g_s'(x, v_t+w)dr - g_s'(x, v_t+r\delta y_1+w)dr\right. \\
\left.+\mu_1\right]
\end{aligned}$$

Observemos que el término dentro de los corchetes es menor que cero. En efecto, $\mu_1 < 0$ por hipótesis; nos resta probar que la otra parte de la expresión también lo es.
Suponiendo por el absurdo y luego de desarrollar la integral

$$g_s'(x, v_t+w)\delta y_1 - g(x, v_t+\delta y_1+w) + g(x, v_t+w) \geq 0,$$

si reorganizamos los términos,

$$g(x, v_t+\delta y_1+w) \leq g(x, v_t+w) + g_s'(x, v_t+w)\delta y_1. \tag{3.16}$$

Utilizando el desarrollo en series de Taylor,

$$g(x, v_t+\delta y_1+w) = g(x, v_t+w) + g_s'(x, v_t+w)\delta y_1 + o(|\delta y_1|),$$

reemplazando esta expresión en (3.16)

$$g(x, v_t+w) + g_s'(x, v_t+w)\delta y_1 + o(|\delta y_1|) \leq g(x, v_t+w) + g_s'(x, v_t+w)\delta y_1,$$

lo cual es absurdo pues $o(|\delta y_1|)$ es siempre positivo y dado que los otros dos términos son iguales, el lado izquierdo es mayor.
Entonces, tomando $\delta < 0$ suficientemente pequeño, se sigue que

$$\delta y_1\left[\int_0^1 g_s'(x, v_t+w)dr - g_s'(x, v_t+r\delta y_1+w)dr + \mu_1\right] > 0,$$

debido al análisis anterior y al hecho que $\delta < 0$ y $y_1 > 0$.
Luego, se sigue que

$$-\Delta(v_t+\delta y_1) \geq g(x, v_t+\delta y_1+w) + t\phi + h,$$

con lo que se concluye que $v_t + \delta y_1$ es una supersolución de (P_t).
Gracias a la Proposición 3.3 y utilizando nuevamente el método de iteración monótona se obtiene una solución v de (P_t) de forma que $v \leq v_t + \delta y < v_t$ en Ω, lo que contradice el Teoreoma 3.5, pues se ha encontrado otra solución minimal. Con ello, se prueba que μ_1 es no negativo. $\square$

PROPOSICIÓN 3.7. *Asumiendo* (3.3) *y* (3.2)*. Dado* $h \in N^{\perp}$*, existe* $t_1 \in \mathbb{R}$ *tal que el primer valor propio del problema* (P_μ) *para* $t \leq t_1$ *es positivo.*

Demostración. Procedamos por contradicción, es decir, asumamos que existe una sucesión $\{t_n\}$ tal que $t_n \to -\infty$ de forma que $\mu_1 = 0$ con $t_n = t$. El problema (P_μ) queda reescrito como

$$(\tilde{P}_\mu) \begin{cases} -\Delta y - g_s'(x, v_t + w)y = 0 & \text{en } \Omega, \\ y = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Luego, para cada n, existe y_{t_n} tal que es solución de $(\tilde{P}_\mu)$ que es la función propia que verifica que $y_{t_n} > 0$ en Ω y está normalizada por $\int_\Omega y_{t_n}^2 = 1$ tal que

$$-\Delta y_{t_n} - g_s'(x, v_t + w)y_{t_n} = 0. \tag{3.17}$$

A partir de ahora, para simplicar la notación se va a escribir $v_{t_n} = v_n$ y $y_{t_n} = y_n$. Entonces, multiplicamos y_n por (3.17) e integramos,

$$\begin{gathered} \int_\Omega -\Delta y_n \cdot y_n - \int_\Omega g_s'(x, v_n + w)y_n^2 = 0 \\ \int_\Omega |\nabla y_n|^2 = \int_\Omega g_s'(x, v_n + w)y_n^2. \end{gathered}$$

Ahora, si definimos

$$C := \sup\left\{ g_s'(x, s) : x \in \overline{\Omega}, s \leq -\inf_{\partial\Omega} \eta \right\} < +\infty,$$

que es finito por la ecuación (3.3). Así, se puede deducir que

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla y_n|^2 &\leq \int_\Omega C y_n^2 \\ &\leq C \cancelto{1}{\int_\Omega y_n^2} \\ &= C. \end{aligned}$$

Por (1.3) se tiene que $\{y_n\}$ está acotada en H_0^1, es decir,

$$\|y_n\|_{H_0^1} \leq C.$$

Recordemos que H_0^1 es un espacio de Hilbert, por tanto, es reflexivo, lo cual nos permite utilizar el Teorema de Banach-Alaouglu, Teorema 1.4, donde se tiene que $\{y_n\}$ es relativamente compacta en H_0^1 dotada de la topología débil.
Lo cual significa que existen $y_0 \in H_0^1(\Omega)$ y $\{y_{n_k}\}_k$, subsucesión de $\{y_n\}$, que la notaremos como la sucesión original, tal que

$$y_n \rightharpoonup y_0 \qquad \text{en } H_0^1(\Omega).$$

Gracias a los teoremas de inmersión, $H_0^1 \hookrightarrow L^2$ es compacta. Entonces decimos que

$$y_n \to y_0 \qquad \text{en } L^2(\Omega).$$

Por el Teorema 1.2 existe otra subsucesión que seguiremos notando como $\{y_n\}$ tal que

$$y_n \to y_0 \qquad \text{c.t.p. en } (\Omega).$$

Además, por este mismo teorema, existe $h \in L^2(\Omega)$ tal que

$$|y_n(x)| \leq h(x)$$

c.t.p. $x \in \Omega$ y para todo n.
No es difícil observar que $\|y_0\|_{L^2} = 1$. Ahora, si multiplicamos a (3.17) por ϕ

$$\begin{aligned}\int_\Omega -\Delta y_n \phi &= \int_\Omega g_s'(x, v_n + w) y_n \phi \\ &= \int_{v_n < s_0} g_s'(x, v_n + w) y_n \phi + \int_{v_n > s_0} g_s'(x, v_n + w) y_n \phi,\end{aligned} \tag{3.18}$$

para algún $s_0 < -\inf_{\partial\Omega} \eta$. De la hipótesis (3.3), existe $\rho > 0$ tal que $\rho < \lambda_1$ y

$$g_s'(x, s) \leq \rho \qquad s \leq s_0, \forall x \in \overline{\Omega}. \tag{3.19}$$

De la ecuación (3.18) y junto con (3.19) se sigue que

$$\lambda_1 \int_\Omega y_n \phi = \int_{v_n < s_0} g_s'(x, v_n + w) y_n \phi + \int_{v_n > s_0} g_s'(x, v_n + w) y_n \phi$$

$$
\begin{aligned}
&\le \rho \int_{v_n < s_0} y_n \phi + \int_\Omega g_s'(x, v_n + w) y_n \phi \chi_{[v_n \ge s_0]} \\
&\le \rho \int_\Omega y_n \phi + \int_\Omega g_s'(x, v_n + w) y_n \phi \chi_{[v_n \ge s_0]} \qquad (3.20)
\end{aligned}
$$

Luego, siguiendo el argumento de De Figueiredo (revisar [9]), $\chi_{[v_n \ge s_0]}$ tiende a cero c.t.p.
En adición, notemos que $y_n\phi \in L^1$ pues $y_n\phi \in L^2$. Además, $y_n\phi > 0$. También, $\sup \int_\Omega y_n\phi < +\infty$, pues,

$$
\int_\Omega y_n \phi \le \underbrace{\left(\int_\Omega y_n^2\right)^{1/2}}_{1} \underbrace{\left(\int_\Omega \phi^2\right)^{1/2}}_{1}
$$

por tanto,

$$
\sup \int_\Omega y_n \phi \le 1 < +\infty.
$$

Así, por el Lema de Fatou se deduce que

$$
\int_\Omega y_0 \phi \le \liminf \int_\Omega y_n \phi. \qquad (3.21)
$$

Multiplicando por λ_1 a (3.21) se sigue que

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 \int_\Omega y_0 \phi &\le \lambda_1 \liminf \int_\Omega y_n \phi \\
&\le \liminf \int_\Omega \lambda_1 y_n \phi \\
&\le \liminf \rho \int_\Omega y_n \phi + \liminf \int_\Omega g_s'(x, v_n + w) y_n \phi \chi_{[v_n \ge s_0]} \\
&\le \rho \liminf \int_\Omega y_n \phi \\
&\le \rho \int_\Omega y_n \phi,
\end{aligned}
$$

donde esta última desigualdad se ha obtenido de la aplicación del Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue, lo cual es absurdo pues $\rho < \lambda_1$. □

Observación. Como una consecuencia del 3.6 se tiene la siguiente desigualdad

$$
\int_\Omega |\nabla y|^2 - \int_\Omega g_s'(x, v_t) y^2 \ge \mu_1 \int_\Omega y^2, \qquad (3.22)
$$

con $\mu_1 > 0$.

3.2. Existencia de la Segunda Solución

En esta sección se va a presentar en detalle el planteamiento del problema de tipo Ambrosetti-Prodi manteniendo las propiedades planteadas sobre Ω, f y la condición de no homogeneidad. Sin embargo, sobre la función $g(x, v + w)$ se establecerán otras hipótesis que nos permitan desarrollar la teoría necesaria a través de un método variacional.

Recordemos que el problema a resolverse viene presentado como:

$$(P) \begin{cases} -\Delta v = g(x, v + w) + f & \text{en } \Omega, \\ \quad v = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Consideremos las propiedades que debe satisfacer g:

i) $g(x, s)$ es una función $C^1(\Omega)$ Lipschitz continua.

ii) $\limsup\limits_{s\to-\infty} \frac{g(x,s)}{s} < \lambda_1 < \liminf\limits_{s\to+\infty} \frac{g(x,s)}{s}$.

iii) Para cualesquier $x \in \Omega$, $s \in \mathbb{R}$ y $\nu > 2$, $0 < \nu G(x, s) \leq sg(x, s)$.

iv) $|g(x, s)| \leq a(x)|s|$ con $a(x) \geq 0$ y $a(x) \in L^\infty$.

Ahora bien, dado que se va a proceder a través de un esquema variacional es indispensable obtener la formulación variacional de (P). Multipliquemos el ecuación del problema por la función test $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$,

$$-\Delta v\varphi - g(x, v + w)\varphi - f\varphi = 0,$$

tomando la integral sobre todo el dominio Ω,

$$\int_\Omega -\Delta v\varphi - \int_\Omega g(x, v + w)\varphi - \int_\Omega f\varphi = 0.$$

Integrando por partes y debido a la condición de borde,

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n} v\varphi - \int_\Omega g(x, v + w)\varphi - \int_\Omega f\varphi = 0.$$

Luego se sigue que

$$\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla \varphi - \int_\Omega g(x, v+w)\varphi - \int_\Omega f\varphi = 0.$$

El funcional de energía viene dado por

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 - \int_\Omega G(x, v+w) - \int_\Omega fv$$

donde $G(x,s) = \int_0^s g(x, \xi + w)d\xi$. Entonces su derivada en la dirección $\hat{v}$,

$$J'(v)\hat{v} = \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla \hat{v} - \int_\Omega g(x, v+w)\hat{v} - \int_\Omega f\hat{v}. \tag{3.23}$$

3.2.1. Análisis de puntos críticos

Con ayuda del funcional J vamos a proceder a comprobar si este satisface las condiciones de Palais-Smale con el objetivo de luego satisfacer las hipótesis del Teorema de Paso de Montaña.

OBSERVACIÓN. De la hipótesis iv) se tiene que la aplicación $u(x) \mapsto g(x, u(x))$ envía conjuntos acotados de $L^1(\Omega)$ a $L^\infty(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$. Ahora, por el Teorema de Rellich-Kondrachov, $H_0^1(\Omega)$ se inyecta compactamente en $L^1(\Omega)$. Así, el funcional

$$\begin{aligned} K : H_0^1(\Omega) &\to L^1(\Omega) \to L^\infty(\Omega) \to H^{-1}(\Omega) \\ u(x) &\mapsto u(x) \mapsto f(., u(.)) \mapsto f(., u(.)), \end{aligned}$$

es compacto (ver [11]).
Ahora, considerando J' como en (3.23), se observa que este es de la forma $L + K$, con $L = -\Delta - f$. No es díficil observar que L es un operador lineal e invertible. Por consiguiente, en virtud de la Proposición 1.6, es suficiente mostrar que toda sucesión de Palais-Smale de J es acotada en $H_0^1(\Omega)$ para verificar que el funcional J cumple la condición de Palais-Smale.

PROPOSICIÓN 3.8. *Si se asumen i)-iv), entonces el funcional de energía*

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 - \int_\Omega G(x, v+w) - \int_\Omega fv,$$

satisface las condiciones de Palais-Smale.

Demostración. Gracias a la observación anterior vamos a mostrar que toda sucesión de Palais-Smale es acotada en $H_0^1(\Omega)$. Sea $\{v_n\}$ una sucesión de Palais-Smale para J en H_0^1, es decir, existe $C > 0$ tal que

$$|J(v_n)| \leq C, \tag{3.24}$$

y

$$J'(v_n) \to 0. \tag{3.25}$$

Por (3.24) y por la forma del funcional se tiene que

$$\left| \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla v_n|^2 - \int_\Omega G(x, v_n + w) - \int_\Omega f v_n \right| \leq C$$

Además, de la hipótesis (3.25) se sigue que

$$\|J'(v_n)\|_{H^{-1}} \to 0,$$

de la definición de $\|J'(v_n)\|_{H^{-1}}$ y la línea precedente,

$$\sup_{\substack{\hat{v} \in H_0^1 \\ \|\hat{v}\| \neq 0}} \frac{|J'(v_n)\hat{v}|}{\|\hat{v}\|_{H_0^1}} \to 0,$$

gracias a la caracterización de convergencia se sigue que existe una sucesión $\{\varepsilon_n\}$ tal que

$$|J'(v_n)\hat{v}| \leq \varepsilon_n \|\hat{v}\|_{H_0^1}, \tag{3.26}$$

con $\varepsilon_n \to 0$ para todo $\hat{v} \in H_1^0(\Omega)$.

Notemos que si $u \in H^1(\Omega)$, entonces sus partes negativa y positiva, u^- y u^+, también están en $H^1(\Omega)$.

Así, mostremos que $\|v_n^+\|_{H_0^1}$ y $\|v_n^-\|_{H_0^1}$ son acotadas y con ello podremos concluir que $\|v_n\|_{H_0^1}$ lo es. Este razonamiento es válido debido a que v_n puede ser escrita como

$$v_n = v_n^+ - v_n^- \tag{3.27}$$

donde $v_n^+ = \text{máx}\{v_n, 0\}$ y $v_n^- = \text{máx}\{-v_n, 0\}$. De forma que,

$$\begin{aligned} \|v_n\|_{H_0^1} &= \|v_n^+ - v_n^-\|_{H_0^1} \\ &\leq \|v_n^+\|_{H_0^1} + \|v_n^-\|_{H_0^1}, \end{aligned}$$

con lo que si cada una de las expresiones del lado derecho son acotadas,

se concluirá que también lo será $\|v_n\|_{H_0^1}$.
Si reemplazamos v_n^- en el lugar de $\hat{v}$ en (3.26) se tiene que

$$\left| \int_\Omega \nabla v_n \cdot \nabla v_n^- - \int_\Omega g(x, v_n + w) v_n^- - \int_\Omega f v_n^- \right| \leq \varepsilon_n \|v_n^-\|_{H_0^1}. \tag{3.28}$$

Notemos que de (3.27),

$$-\nabla v_n = \nabla v_n^+ - \nabla v_n^-,$$

entonces si analizamos el término de la primera integral de (3.28),

$$\nabla v_n \cdot \nabla v_n^- = \nabla v_n^+ \cdot \nabla v_n^- - |\nabla v_n^-|^2 = -|\nabla v_n^-|^2.$$

Observemos que, en efecto, $\nabla v_n^+ \cdot \nabla v_n^- = 0$. De hecho,

- Si $v_n \geq 0$, entonces se sigue que

$$\begin{aligned} \text{máx}\{v_n, 0\} &= v_n, \\ \text{máx}\{-v_n, 0\} &= 0. \end{aligned}$$

- Para $v_n \leq 0$,

$$\begin{aligned} \text{máx}\{v_n, 0\} &= 0, \\ \text{máx}\{-v_n, 0\} &= -v_n. \end{aligned}$$

Con lo que en ambos casos se obtiene lo deseado.

Regresando a nuestro análisis, entonces se tiene lo siguiente,

$$\begin{aligned} \left| -\int_\Omega |\nabla v_n^-|^2 - \int_\Omega g(x, v_n + w) v_n^- - \int_\Omega f v_n^- \right| &\leq \varepsilon_n \|v_n^-\|_{H_0^1}, \\ \left| \int_\Omega |\nabla v_n^-|^2 + \int_\Omega g(x, v_n + w) v_n^- + \int_\Omega f v_n^- \right| &\leq \varepsilon_n \|v_n^-\|_{H_0^1}. \end{aligned}$$

Despejando los términos,

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla v_n^-|^2 &\leq -\int_\Omega g(x, v_n + w) v_n^- - \int_\Omega f v_n^- + \varepsilon_n \|v_n^-\|_{H_0^1}, \\ &\leq -\int_\Omega g(x, v_n + w) v_n^- - \|f\|_{L^2} \|v_n^-\|_{L^2} + \varepsilon_n \|v_n^-\|_{H_0^1}, \\ &\leq -\int_\Omega g(x, v_n + w) v_n^- + (C + \varepsilon_n) \|v_n^-\|_{H_0^1}. \end{aligned}$$

De la ecuación (3.7),

$$\begin{aligned}
&\leq -\int_\Omega \mu(v_n+w)v_n^- + C\int_\Omega v_n^- + (C+\varepsilon_n)\|v_n^-\|_{H_0^1},\\
&\leq -\mu\int_\Omega v_n\cdot v_n^- \underbrace{-\mu\int_\Omega wv_n^-}_{\leq 0} + C\int_\Omega v_n^- + (C+\varepsilon_n)\|v_n^-\|_{H_0^1},
\end{aligned}$$

observe que el segundo término es menor o igual que cero debido a que μ, w y v_n^- son positivas, debido a las hipótesis sobre ellas y del hecho que la parte negativa es una función positiva. Continuando,

$$\int_\Omega |\nabla v_n^-|^2 \leq \mu\int_\Omega |v_n^-|^2 + C\int_\Omega v_n^- + (C+\varepsilon_n)\|v_n^-\|_{H_0^1},$$

puesto que $v_n\cdot v_n^- = -(v_n^-)^2$. Luego, debido a las inyecciones de los espacios L^p y la desigualdad de Poincaré se sigue que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla v_n^-|^2 &\leq \mu\|v_n^-\|_{L^2}^2 + C\|v_n^-\|_{L^1} + (C+\varepsilon_n)\|v_n^-\|_{H_0^1}\\
&\leq \mu C_p\|v_n^-\|_{H_0^1}^2 + C\|v_n^-\|_{L^2} + (C+\varepsilon_n)\|v_n^-\|_{H_0^1},
\end{aligned}$$

entonces, además se tiene que $0<\mu<\frac{1}{C_p}$ donde C_p es la constante de Poincaré, esto dado a que esta es el inverso del primer valor propio, y reescribiendo estas constantes como una nueva pero notada de la misma manera,

$$\begin{aligned}
(1-\mu C_p)\|v_n^-\|_{H_0^1}^2 &\leq (C\cdot C_p + C + \varepsilon_n)\|v_n^-\|_{H_0^1}\|\\
\|v_n^-\|_{H_0^1} &\leq C,
\end{aligned}$$

de esta forma se concluye que $\|v_n^-\|_{H_0^1}$ es acotada.
Para la siguiente parte de la demostración, probemos que $\|v_n^+\|$ es acotada. Para abordarla analicemos el funcional visto desde (3.27),

$$\begin{aligned}
J(v_n) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v_n^+ - \nabla v_n^-|^2 - \int_\Omega G(x, v_n^+ - v_n^- + w) - \int_\Omega f(v_n^+ - v_n^-)\\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v_n^+|^2 - \cancelto{0}{2\nabla v_n^+\cdot\nabla v_n^-} + |\nabla v_n^-|^2 - \int_\Omega G(x, v_n^+ - v_n^- + w) - \int_\Omega f(v_n^+ - v_n^-)\\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v_n^+|^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v_n^-|^2 - \int_\Omega G(x, v_n^+ - v_n^- + w) - \int_\Omega f(v_n^+ - v_n^-).
\end{aligned}$$

Ahora bien, estudiemos el término $G(x, v_n^+ - v_n^- + w)$. De la definición de G,

$$\begin{aligned} G(x, v_n^+ - v_n^- + w) &= \int_0^{v_n^+ - v_n^- + w} g(x,\xi)\, d\xi \\ &= \int_0^{v_n^+ + w} g(x,\xi)\, d\xi + \int_{v_n^+ + w}^{v_n^+ - v_n^- + w} g(x,\xi)\, d\xi \\ &= G(v_n^+ + w) - \int_{v_n^+ - v_n^- + w}^{v_n^+ + w} g(x,\xi)\, d\xi. \end{aligned}$$

Con este análisis, reemplazando se tiene que

$$\begin{aligned} J(v_n) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v_n^+|^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v_n^-|^2 - \int_\Omega G(x, v_n^+ + w) + \int_\Omega \int_{v_n^+ - v_n^- + w}^{v_n^+ + w} g(x,\xi)\, d\xi - \int_\Omega f(v_n^+ - v_n^-) \\ \leq C, \end{aligned}$$

esta última línea debido a (3.24). Luego, si operamos los términos,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v_n^+|^2 - G(x, v_n^+ + w) &\leq C - \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v_n^-|^2 - \int_\Omega + \int_\Omega \int_{v_n^+ - v_n^- + w}^{v_n^+ + w} g(x,\xi)\, d\xi + \int_\Omega f v_n^+ \int_\Omega f v_n^- \\ &\leq C - \int_\Omega \int_{v_n^+ - v_n^- + w}^{v_n^+ + w} g(x,\xi)\, d\xi + \int_\Omega f v_n^+ \int_\Omega f v_n^-, \end{aligned}$$

recordando la ecuación (3.7),

$$\begin{aligned} &\leq C - \int_\Omega \int_{v_n^+ - v_n^- + w}^{v_n^+ + w} \mu\xi - C\, d\xi + \|f\|_{L^2}\|v_n^+\|_{L^2} + \|f\|_{L^2}\|v_n^-\|_{L^2} \\ &\leq C + \int_\Omega -\frac{\mu}{2}\, \xi^2\Big|_{v_n^+ - v_n^- + w}^{v_n^+ + w} + C\, \xi\Big|_{v_n^+ - v_n^- + w}^{v_n^+ + w} + \|f\|_{L^2}\|v_n^+\|_{H_0^1} \\ &\quad + \|f\|_{L^2}\|v_n^-\|_{H_0^1}, \end{aligned}$$

puesto que recientemente se demostró que $\|v_n^-\|_{H_0^1}$ es acotada, entonces este último término puede ser visto como una constante,

$$\begin{aligned} &\leq C + \int_\Omega -\frac{\mu}{2}\left((v_n^+ + w)^2 - \left(v_n^+ - v_n^- + w\right)^2\right) + C\left(v_n^+ + w - v_n^+\right. \\ &\quad \left. + v_n^- - w\right) + \|f\|_{L^2}\|v_n^+\|_{H_0^1} \\ &\leq C + \int_\Omega -\frac{\mu}{2}\left((v_n^+)^2 + 2v_n^+ w + w^2 - \left[(v_n^+ - v_n^-)^2 + 2(v_n^+ - v_n^-)w\right.\right. \\ &\quad \left.\left. + w^2\right]\right) + C\int_\Omega v_n^- + \|f\|_{L^2}\|v_n^+\|_{H_0^1} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq C + \int_\Omega -\frac{\mu}{2}((v_n^+)^2 - (v_n^+ - v_n^-)^2 + 2v_n^- w) + C\int_\Omega v_n^- + \|f\|_{L^2}\|v_n^+\|_{H_0^1} \\
&\leq C + \int_\Omega -\frac{\mu}{2}\left((v_n^+)^2 - ((v_n^+)^2 - \cancelto{0}{2v_n^+v_n^-} + (v_n^+)^2) + 2v_n^- w\right) \\
&\quad + C\int_\Omega v_n^- + \|f\|_{L^2}\|v_n^+\|_{H_0^1} \\
&\leq C + \frac{\mu}{2}\int_\Omega (v_n^+)^2 \underbrace{- \frac{\mu}{2}\int_\Omega v_n^- w}_{\leq 0} + C\int_\Omega v_n^- + \|f\|_{L^2}\|v_n^+\|_{H_0^1} \\
&\leq C + \frac{\mu}{2}\int_\Omega (v_n^-)^2 + C\int_\Omega v_n^- + \|f\|_{L^2}\|v_n^+\|_{H_0^1}
\end{aligned}
$$

del hecho que la parte negativa es acotada, entonces,

$$
\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v_n^+|^2 - G(x, v_n^+ + w) \leq C + C\|v_n^+\|_{H_0^1}. \tag{3.29}
$$

Por otro lado, tomando $\hat{v} = v_n^+$ en (3.26),

$$
\left| \int_\Omega \nabla v_n \cdot \nabla v_n^+ - \int_\Omega g(x, v_n + w)v_n^+ - \int_\Omega f v_n^+ \right| \leq \varepsilon_n \|v_n^+\|_{H_0^1}. \tag{3.30}
$$

Aplicando desigualdad triangular inversa,

$$
\left| \left| \int_\Omega |\nabla v_n^+|^2 - \int_\Omega g(x, v_n + w)v_n^+ \right| - \left| \int_\Omega f v_n^+ \right| \right| \leq \left| J'(v_n)v_n^+ \right| \leq \varepsilon_n \|v_n^+\|_{H_0^1}.
$$

De la definición de valor absoluto,

$$
\left| \int_\Omega |\nabla v_n^+|^2 - \int_\Omega g(x, v_n + w)v_n^+ \right| - \left| \int_\Omega f v_n^+ \right| \leq \varepsilon_n \|v_n^+\|_{H_0^1}.
$$

Del hecho que en la segunda integral, la parte negativa se anula, entonces,

$$
\begin{aligned}
\left| \int_\Omega |\nabla v_n^+|^2 - \int_\Omega g(x, v_n^+ + w)v_n^+ \right| &\leq \left| \int_\Omega f v_n^+ \right| + \varepsilon_n \|v_n^+\|_{H_0^1} \\
&\leq (C + \varepsilon_n)\|v_n^+\|_{H_0^1} \qquad (3.31)
\end{aligned}
$$

De la línea anterior, se sigue que

$$
-(C + \varepsilon_n)\|v_n^+\|_{H_0^1} \leq -\left(\int_\Omega |\nabla v_n^+|^2 - \int_\Omega g(x, v_n^+ + w)v_n^+ \right) \leq (C + \varepsilon_n)\|v_n^+\|_{H_0^1}.
$$

Ahora bien, multiplicando (3.29) por ν y restamos de (3.31),

$$\frac{\nu}{2}\int_\Omega |\nabla v_n^+|^2 - \int_\Omega |\nabla v_n^+|^2 - \int_\Omega \nu G(x, v_n^+ + w) + \int_\Omega g(x, v_n^+ + w)v_n^+ \leq C + C\|v_n^+\|_{H_0^1} + (C+\varepsilon_n)\|v_n^+\|_{H_0^1},$$

reorganizando los términos,

$$\left(\frac{\nu}{2} - 1\right)\int_\Omega |\nabla v_n^+|^2 \leq \int_\Omega \nu G(x, v_n^+ + w) - g(x, v_n^+ + w)v_n^+ + C + (C + \varepsilon_n)\|v_n^+\|_{H_0^1}$$

luego de sumar y restar el término $\int_\Omega g(x, v_n^+ + w)w$ se agrupa convenientemente,

$$\begin{aligned}\left(\frac{\nu}{2} - 1\right)\int_\Omega |\nabla v_n^+|^2 &\leq \int_\Omega \underbrace{\nu G(x, v_n^+ + w) - g(x, v_n^+ + w)(v_n^+ + w)}_{\leq 0 \quad \text{por hip. } iii)} + \int_\Omega g(x, v_n^+ + w)w \\ &\quad + C + C\|v_n^+\|_{H_0^1} \\ &\leq \int_\Omega g(x, v_n^+ + w)w + C + C\|v_n^+\|_{H_0^1}\end{aligned}$$

Si aplicamos la hipótesis iv),

$$\begin{aligned}&\leq \int_\Omega a(x)|v_n^+ + w|w + C + C\|v_n^+\|_{H_0^1} \\ &\leq C\int_\Omega |v_n^+|w + \int_\Omega |w|^2 + C + C\|v_n^+\|_{H_0^1} \\ &\leq C\sup_{\partial\Omega}\eta\int_\Omega |v_n^+| + C + C\|v_n^+\|_{H_0^1} \\ &\leq C\|v_n^+\|_{H_0^1} + C.\end{aligned}$$

En resumen,

$$\left(\frac{\nu}{2} - 1\right)\|v_n^+\|_{H_0^1}^2 \leq C\|v_n^+\|_{H_0^1} + C.$$

Del hecho que $\left(\frac{\nu}{2} - 1\right) > 0$ se sigue que

$$\begin{aligned}\|v_n^+\|_{H_0^1}^2 &\leq C\|v_n^+\|_{H_0^1} + C \\ \|v_n^+\|_{H_0^1}^2 - C\|v_n^+\|_{H_0^1} &\leq C,\end{aligned}$$

sumando un término positivo a ambos lados de la desigualdad para utilizar la técnica de completación de cuadrados,

$$\|v_n^+\|_{H_0^1}^2 - C\|v_n^+\|_{H_0^1} + \frac{C^2}{4} \leq C + \frac{C^2}{4}$$

$$\left(\|v_n^+\|_{H_0^1} - \frac{C}{2}\right)^2 \leq C + \frac{C^2}{4}$$

$$\left|\|v_n^+\|_{H_0^1} - \frac{C}{2}\right| \leq \sqrt{C + \frac{C^2}{4}} \tag{3.32}$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned}\|v_n^+\|_{H_0^1} &= \left|\|v_n^+\|_{H_0^1} - \frac{C}{2} + \frac{C}{2}\right| \\ &\leq \left|\|v_n^+\|_{H_0^1} - \frac{C}{2}\right| + \frac{C}{2}\end{aligned}$$

Por (3.32) podemos decir que

$$\|v_n^+\|_{H_0^1} \leq \sqrt{C + \frac{C^2}{4}} + \frac{C}{2}.$$

Definiendo $M := \sqrt{C + \frac{C^2}{4}} + \frac{C}{2}$ se sigue que

$$\|v_n^+\|_{H_0^1} \leq M,$$

para todo n. Por lo tanto, se concluye que $\{v_n^+\}$ es acotada en H_0^1 y con ello que $\{v_n\}$ es acotada en H_0^1.
Por la arbitrariedad de $\{v_n\}$ se concluye que toda sucesión de Palais-Smale para J es acotada y en consecuencia este verifica (PS). $\square$

Ahora bien, con el objetivo de utilizar el Teorema de Paso de Montaña para hablar sobre la existencia de un punto crítico para el funcional J, es necesario comprobar sus hipótesis, es decir,

I) existe $y \in H_0^1$ tal que $J(y) < J(v_t)$ para $\|y - v_t\| > r$,

II) existe $r > 0$ de forma que $J(u) \geq J(v_t)$ para $\|u - v_t\| = r$.

Para I), empecemos analizando lo siguiente

$$\begin{aligned}J(v_t) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v_t|^2 - \int_\Omega G(x, v_t + w) - \int_\Omega f v_t \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega v_t(-\Delta v_t) - \int_\Omega G(x, v_t + w) - \int_\Omega f v_t \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega \left(g(x, v_t + w) + f\right) v_t - \int_\Omega G(x, v_t + w) - \int_\Omega f v_t \\ &= \int_\Omega \frac{1}{2} g(x, v_t + w) v_t - G(x, v - t + w) - \frac{1}{2}\int_\Omega f v_t\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&> \int_\Omega \frac{1}{\nu} g(x, v_t + w)v_t - G(x, v - t + w) - \frac{1}{2}\int_\Omega f v_t \\
&= \int_\Omega \frac{1}{\nu} g(x, v_t + w)(v_t + w) - G(x, v_t + w) - \int_\Omega g(x, v_t + w)w - \frac{1}{2}\int_\Omega f v_t.
\end{aligned}
$$

De la hipótesis iii) se tiene que

$$
\frac{1}{\nu} sg(x, s) - G(x, s). \tag{3.33}
$$

En este sentido,

$$
J(v_t) > \underbrace{\int_\Omega \frac{1}{\nu} g(x, v_t + w)(v_t + w) - G(x, v_t + w)}_{\geq 0 \quad \text{por (3.33)}} - \int_\Omega g(x, v_t + w)w - \frac{1}{2}\int_\Omega f v_t.
$$

Ahora, aplicando la hipótesis iv),

$$
\begin{aligned}
J(v_t) &\geq -\int_\Omega a(x)|v_t + w|w - \frac{1}{2}\|f\|_{L^2}\|v_t\|_{L^2} \\
&\geq \int_\Omega a\left(|v_t| + |w|\right) w - C\|v_t\|_{H_0^1} \\
&\geq -C\int_\Omega a\left(|v_t|w + |w|^2\right) - C\|v_t\|_{H_0^1} \\
&\geq -C\|a\|_{L^\infty}\int_\Omega \left(|v_t|w + w^2\right) - C\|v_t\|_{H_0^1} \\
&\geq -C\int_\Omega |v_t|w - C\int_\Omega w^2 - C\|v_t\|_{H_0^1} \\
&\geq \underbrace{-C\left(\int_\Omega |v_t|w + \|w\|_{L^2}^2 + \|v_t\|_{H_0^1}\right)}_{\leq 0},
\end{aligned}
$$

entonces si definimos $\psi := -C\left(\int_\Omega |v_t|w + \|w\|_{L^2}^2 + \|v_t\|_{H_0^1}\right) < 0$, se tiene que

$$
J(v_t) > \psi. \tag{3.34}
$$

Así, vamos a mostras que existe $y \in H_0^1(\Omega)$ tal que $J(y) \leq \psi$. Consideremos $y = R\phi$ con algún $R > 0$. Estudiemos el comportamiento de $J(y)$,

$$
\begin{aligned}
J(R\phi) &= \frac{1}{2}\int_\Omega R^2|\nabla\phi|^2 - G(x, R\phi + w) - \int_\Omega Rf\phi \\
&= \frac{R^2}{2}\int_\Omega \nabla\phi \cdot \nabla\phi - G(x, R\phi + w) - R\int_\Omega f\phi \\
&= \frac{R^2}{2}\int_\Omega \phi(-\Delta\phi) - G(x, R\phi + w) - R\int_\Omega f\phi
\end{aligned}
$$

como ϕ es función propia,

$$= \frac{R^2}{2}\lambda_1 \int_\Omega \phi^2 - G(x, R\phi + w) - R\int_\Omega f\phi.$$

Por otro lado, notemos que gracias a la ecuación (3.7),

$$\begin{aligned} G(x,s) = \int_0^s g(x,\xi)d\xi &\leq \int_0^s (\mu\xi - C)d\xi \\ G(x,s) &\leq \left.\frac{\mu\xi^2}{2}\right|_0^s - C\ \xi|_0^s \\ &= \frac{\mu s^2}{2} - Cs. \end{aligned}$$

Retomando, se sigue que

$$\begin{aligned} J(R\phi) &= \frac{\lambda_1}{2}R^2 - \frac{\mu}{2}\int_\Omega (R\phi + w)^2 + C\int_\Omega R\phi + w - R\int_\Omega f\phi \\ &= \frac{\lambda_1}{2}R^2 - \frac{\mu}{2}\int_\Omega (R^2\phi^2 + 2R\phi w + w^2) + C\int_\Omega R\phi + C\int_\Omega w - R\int_\Omega f\phi \\ &= \frac{\lambda_1}{2}R^2 - \frac{\mu}{2}R^2 - \mu R\int_\Omega \phi w \underbrace{-\frac{\mu}{2}\int_\Omega w^2}_{\leq 0} - CR\int_\Omega \phi + C\int_\Omega w - R\int_\Omega f\phi \\ &= \left(\frac{\lambda_1}{2} - \frac{\mu}{2}\right)R^2 + \left(C\int_\Omega \phi - \int_\Omega f\phi - \mu\int_\Omega \phi w\right)R + C\int_\Omega w \\ &\leq \frac{1}{2}(\lambda_1 - \overline{\mu})R^2 + CR + C < 0. \end{aligned}$$

Tomando R suficientemente grande, junto con (3.34)

$$\frac{1}{2}(\lambda_1 - \overline{\mu})R^2 + CR + C \leq \psi$$

con ello, se obtiene lo deseado,

$$J(y) < J(v_t).$$

Ahora, procedamos a demostrar II). Analicemos lo que sigue

$$\begin{aligned} J(v_t + \hat{v}) - J(v_t) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v_t + \nabla\hat{v}|^2 - \int_\Omega G(x, v_t + \hat{v} + w) - \int_\Omega f(v_t + \hat{v}) - \left(\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v_t|^2\right. \\ &\quad \left. - \int_\Omega G(x, v_t + w) - \int_\Omega f v_t\right) \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v_t|^2 + 2\nabla v_t \cdot \nabla\hat{v} + |\nabla\hat{v}|^2 - \int_\Omega G(x, v_t + \hat{v} + w) - \int_\Omega f\hat{v} - \frac{1}{2}|\nabla v_t|^2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_\Omega G(x,v_t+w)\\
&=\int_\Omega \nabla v_t\cdot\nabla\hat{v}+\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla\hat{v}|^2-\int_\Omega\left[G(v,v_t+\hat{v}+w)-G(x,v_t+w)\right]-\int_\Omega f\hat{v}
\end{aligned}
$$

Del hecho que v_t es un punto crítico de J, se tiene que $J'(v_t)\hat{v}=0$. Entonces,

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \nabla v_t\cdot\nabla\hat{v}-\int_\Omega g(x,v_t+w)\hat{v}-\int_\Omega f\hat{v}=0\\
\int_\Omega \nabla v_t\cdot\nabla\hat{v}-\int_\Omega f\hat{v}=\int_\Omega g(x,v_t+w)\hat{v}
\end{aligned}
$$

Reemplazando los términos y operando,

$$
J(v_t+\hat{v})-J(v_t)=\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla\hat{v}|^2-\int_\Omega\left[G(x,v_t+\hat{v}+w)-G(x,v_t+w)-g(x,v_t+w)\hat{v}\right]. \tag{3.35}
$$

Continuando, recordemos que por el desarrollo en series de Taylor se tiene que

$$
G(x,s+t)=G(x,s)+g(x,s)(t)+\frac{1}{2}g_s'(x,s)t^2+o(|t|^2).
$$

Para nuestro caso, si tomamos $s=v_t+w$ y $t=\hat{v}$,

$$
G(x,v_t+\hat{v}+w)-G(x,v_t+w)-g(x,v_t+w)\hat{v}=\frac{1}{2}g_s'(x,v_t+w)\hat{v}^2+r(x,\hat{v}), \tag{3.36}
$$

con $r(x,\hat{v})=o(|\hat{v}|^2)$.Por la definición de $o(|\hat{v}|^2)$, existe una sucesión $\varepsilon(x,\hat{v})\to 0$ tal que

$$
|r(x,\hat{v})|\leq\varepsilon(x,\hat{v})|\hat{v}|^2, \tag{3.37}
$$

cuando $|\hat{v}|<1$. Por otro lado, para $|\hat{v}|>1$,

$$
\begin{aligned}
r(x,\hat{v})&=O\left(|\hat{v}|^{\sigma+1}\right)\\
|r(x,\hat{v})|&\leq C|\hat{v}|^{\sigma+1},
\end{aligned} \tag{3.38}
$$

con $\sigma>1$ (ver [9]). Si consideramos (3.37) y (3.38) se tiene que

$$
|r(x,\hat{v})|\leq\varepsilon(x,\hat{v})|\hat{v}|^2+C|\hat{v}|^{\sigma+1},
$$

recordando el hecho que $r\leq|r|$, la monotonía de la integral e integrando,

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega r(x,\hat{v}) \leq \int_\Omega |r(x,\hat{v})| \leq \int_\Omega \varepsilon(x,\hat{v})|\hat{v}|^2 + \int_\Omega C|\hat{v}|^{\sigma+1} \\
&\leq \varepsilon\|\hat{v}\|_{L^2}^2 + C\|\hat{v}\|_{L^{\sigma+1}}^{\sigma+1} \\
&\leq \varepsilon\|\hat{v}\|_{L^2}^2 + C\|\hat{v}\|_{L^2}^{\sigma+1} \\
&\leq \varepsilon\|\hat{v}\|_{L^2}^2 + C\|\hat{v}\|_{H_0^1}^{\sigma+1}. \qquad (3.39)
\end{aligned}
$$

Notemos que si reemplazamos la ecuación (3.36) en (3.35)

$$
\begin{aligned}
J(v_t+\hat{v}) - J(v_t) &\geq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla\hat{v}|^2 - \int_\Omega \frac{1}{2}g_s'(x,v_t+w)\hat{v}^2 + r(x,\hat{v}) \\
&\geq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla\hat{v}|^2 - \frac{1}{2}\int_\Omega g_s'(x,v_t+w)\hat{v}^2 - \int_\Omega r(x,\hat{v}),
\end{aligned}
$$

gracias a (3.39)

$$
\geq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla\hat{v}|^2 - \frac{1}{2}\int_\Omega g_s'(x,v_t+w)\hat{v}^2 - \varepsilon\|\hat{v}\|_{L^2}^2 - C\|\hat{v}\|_{H_0^1}^{\sigma+1},
$$

haciendo uso de la desigualdad (3.22),

$$
\begin{aligned}
&\geq C\int_\Omega |\nabla\hat{v}|^2 - \varepsilon\|\hat{v}\|_{L^2}^2 - C\|\hat{v}\|_{H_0^1}^{\sigma+1} \\
&\geq C\|\hat{v}\|_{H_0^1} - \varepsilon\|\hat{v}\|_{L^2}^2 - C\|\hat{v}\|_{H_0^1}^{\sigma+1}
\end{aligned}
$$

y del hecho que $\varepsilon \to 0$,

$$
J(v_t+\hat{v}) - J(v_t) \geq C\|\hat{v}\|_{H_0^1}^2 - C\|\hat{v}\|_{H_0^1}^{\sigma+1}.
$$

Si tomamos $\|\hat{v}\| = r$ en la expresión precedente

$$
J(v_t+\hat{v}) - J(v_t) \geq Cr^2 - Cr^{\sigma+1}.
$$

En general, para un $r < 1$ (pequeño), el término cuadrático domina, entonces $Cr^2 - Cr^{\sigma+1} > 0$. Por lo tanto

$$
J(v_t+\hat{v}) \geq J(v_t),
$$

definiendo $u := v_t + \hat{v}$, se sigue el resultado

$$J(u) \geq J(v_t),$$

con lo que se prueba el Teorema de Paso de Montaña y con ello el Teorema 3.1.

Conclusiones y Recomendaciones

Conclusiones

- Las hipótesis impuestas sobre la condición no homogénea y sobre el término no lineal nos permite concluir que se cumple el objetivo general del problema, debido a que estas nos posibilita enunciar un teorema de existencia de soluciones.
- Gracias al Teorema (3.1) se puede asegurar que existen al menos dos soluciones para el problema (P_t) cuando $t \leq t_0$. Es posible afirmar que debido a la condición de borde no homogénea, y por ende, al corrimiento que se produce de ella, la solución trivial no es una solución para este problema.
- Resulta indispensable un estudio a profundidad de las condiciones y características propias del problema, pues ello nos conducirá a seleccionar el método de resolución apropiado.
- Las propiedades geométricas del funcional de energía brindan información sobre el comportamiento del mismo en una determinada región lo que posibilita utilizar resultados como el Teorema de Paso de Montaña para conseguir la existencia de una solución dentro de dicha región.

Recomendaciones

- En relación con las hipótesis propuestas en este trabajo, resulta interesante que se estudien algunas condiciones menos restrictivas sobre el término no homogéneo o considerar otros comportamientos para el corrimiento y su impacto en la solución del problema.

- Se recomienda estudiar otros métodos de solución para este tipo de problemas, entre ellos, argumentos de tipo topológicos. A su vez, el planteamiento del problema bajo otras condiciones de frontera puede ser analizado.
- Posteriormente, se podría determinar la existencia de otras regiones donde el funcional presente el mismo comportamiento al planteado en este trabajo que permita la aplicación del Teorema de Paso de Montaña o diferentes regiones donde pueda se encontrar una solución adicional.

Referencias

[1] Antonio Ambrosetti and Giovanni Prodi. On the inversion of some differentiable mappings with singularities between Banach spaces. *Annali Di Matematica Pura Ed Applicata*, 93(1):231–246, 1972.

[2] Antonio Ambrosetti and Giovanni Prodi. *A primer of Nonlinear Analysis*. Cambridge University Press, 1993.

[3] David Arcoya and David Ruiz. The Ambrosetti-Prodi Problem for the p-Laplace Operator. *Communications in Partial Differential Equations*, 31(6):849–865, 2006.

[4] Marino Badiale and Enrico Serra. *Semilinear Elliptic Equations for Beginners*. Springer, 2011.

[5] Melvyn Berger and Esther Podolak. On the solutions of a Nonlinear Dirichlet Problem. *Indiana University Mathematics Journal*, 24(9):837–846, 1975.

[6] Haïm Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer Science & Business Media, 2011.

[7] Marco Calahorrano and Fernando Dobarro. Multiple solutions for inhomogeneous elliptic problems arising in astrophysics. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 3(2):217–230, 1993.

[8] Edward Dancer. On the ranges of certain damped nonlinear differential equations. *Annali Di Matematica Pura Ed Applicata*, 119(1):281–295, 1979.

[9] Djairo De Figueiredo. On the superlinear Ambrosetti-Prodi problem. *Nonlinear Analysis theory Methods & Applications*, 8(6):655–665, 1984.

[10] Lawrence Evans. *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, 2010.

[11] Youssef Jabri. *The Mountain Pass Theorem. Variants, Generalizations and Some Applications*. Cambridge University Press, 2003.

[12] Jerry Kazdan and Frank Warner. Remarks on some quasilinear elliptic equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 28(5):567–597, 1975.

[13] Chia Ven Pao. *Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations*. Plenum Press, 1992.

[14] Eberhard Zeidler. *Nonlinear Functional Anlysis and its Applications I*. Springer, 1990.