ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS

EL TEOREMA DE AMEMIYA Y ANDO PARA UN PRODUCTO ALEATORIO DE OPERADORES CONTRACTIVOS

TRABAJO DE TITULACIÓN PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE MATEMÁTICO

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

GERARDO DANIEL ARIAS MORALES
ariasdaniel1596@hotmail.com

Directora: M. SC. ZULY LEONELA SALINAS PILLAJO
zuly.salinas@epn.edu.ec

Codirector: DR. MARCO VINICIO CALAHORRANO RECALDE
marco.calahorrano@epn.edu.ec

QUITO, JUNIO 2022

DECLARACIÓN

Yo, GERARDO DANIEL ARIAS MORALES, declaro bajo juramento que el trabajo aquí escrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

A través de la presente declaración cedo mis derechos de propiedad intelectual, correspondientes a este trabajo, a la Escuela Politécnica Nacional, según lo establecido por la Ley de Propiedad Intelectual, por su reglamento y por la normatividad institucional vigente.

Gerardo Daniel Arias Morales

CERTIFICACIÓN

Certificamos que el presente trabajo fue desarrollado por GERARDO DANIEL ARIAS MORALES, bajo nuestra supervisión.

M. Sc. Zuly Leonela Salinas Pillajo
Directora del Proyecto

Dr. Marco Vinicio Calahorrano Recalde
Codirector del Proyecto

AGRADECIMIENTOS

A mi madre, Anita, quien me ha apoyado desde siempre y me ha enseñado a levantarme de cualquier caída y seguir adelante. A mi hermano, Jimmy, quien ha sido una compañía y ayuda constante en mi vida. A mis abuelitos, Mamita y Papi Jaime, por los bellos momentos que me hicieron vivir.

A mi directora, M. Sc. Zuly Salinas, por apoyarme y guiarme a lo largo de este proyecto. Sin ella esto no sería posible.

A mi codirector, Dr. Marco Calahorrano, por la ayuda brindada para la realización de este proyecto y sobre todo por las enseñanzas y experiencias compartidas en las aulas.

A mis amigos, Belén, Marco, Paula, Toby y Andrés, con quienes he compartido momentos inolvidables, me han apoyado y motivado a mejorar. En especial a Sebas, por su amistad, su ayuda, sus consejos y por escucharme cuando lo he necesitado.

DEDICATORIA

A mi madre, mi chica. Se lo merece todo.

Índice general

Resumen

Sean H un espacio de Hilbert y $T : H \to H$ una contracción, es decir, un operador lineal y continuo tal que $||T|| \leq 1$. Decimos que T posee la propiedad (W) cuando para cada sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de H tal que

$$||f_n|| \leq 1 \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} ||Tf_n|| = 1,$$

se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} (I - T) f_n = 0 \quad \text{débilmente.}$$

Consideremos contracciones $T_1, T_2, \ldots, T_N : H \to H$ que tienen la propiedad (W), una función $r : \mathbb{N} \to \{1, 2, \ldots, N\}$ cuasi$-$periódica con cuasi$-$periodo q, y sucesiones de operadores $\left(A_n^{(1)}\right)_{n\in\mathbb{N}}, \left(A_n^{(2)}\right)_{n\in\mathbb{N}}, \ldots, \left(A_n^{(N)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de H en H tales que

$$\left|\left|A_n^{(k)} x - T_k x\right|\right| \leq \gamma_n ||x|| \quad \forall x \in H, \forall k = 1, \ldots, N,$$

donde $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de números reales positivos que genera una serie convergente. En el resultado principal de este trabajo demostramos que para cada $x \in H$ existe $x^* \in H$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\prod_{j=1}^{n} A_j^{(r((j-1)q+q))} A_j^{(r((j-1)q+q-1))} \cdots A_j^{(r((j-1)q+1))} x \right) = x^*,$$

débilmente.

Abstract

Let H be a Hilbert space and $T : H \to H$ a contraction, i.e., a linear and bounded operator such that $||T|| \leq 1$. We say that T has the property (W) when for any sequence $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in H such that

$$||f_n|| \leq 1 \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \text{and} \quad \lim_{n\to\infty} ||Tf_n|| = 1,$$

we have that

$$\lim_{n\to\infty} (I-T)f_n = 0 \quad \text{weakly}.$$

We consider contractions $T_1, T_2, \ldots, T_N : H \to H$, which have the property (W), and a quasi-periodic function $r : \mathbb{N} \to \{1, 2, \ldots, N\}$ with quasi-period q, and sequences of operators $\left(A_n^{(1)}\right)_{n\in\mathbb{N}}, \left(A_n^{(2)}\right)_{n\in\mathbb{N}}, \ldots, \left(A_n^{(N)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ from H to H such that

$$\left|\left|A_n^{(k)}x - T_k x\right|\right| \leq \gamma_n ||x|| \quad \forall\, x \in H, \forall\, k = 1, \ldots, N,$$

where $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is a sequence of positive real numbers generating a convergent series. In the main result of this work we prove that for each $x \in H$ there exists a point $x^* \in H$ such that

$$\lim_{n\to\infty} \left(\prod_{j=1}^{n} A_j^{(r((j-1)q+q))} A_j^{(r((j-1)q+q-1))} \cdots A_j^{(r((j-1)q+1))} x \right) = x^*,$$

weakly.

Introducción

Consideremos un espacio de Hilbert $(H, ||\cdot||)$ y $S_1, S_2, \ldots, S_m$, subespacios vectoriales cerrados de H. Denotemos por P_{S_i} al operador de proyección ortogonal de H sobre S_i, con $i = 1, 2, \ldots, m$. En [9] Israel Halperin demuestra que

$$\lim_{n\to\infty} \left|\left| \left(P_{S_m} P_{S_{m-1}} \cdots P_{S_1}\right)^n x - P_S x \right|\right| = 0 \quad \forall x \in H,$$

donde P_S es el operador de proyección ortogonal de H sobre

$$S := \bigcap_{i=1}^{m} S_i.$$

Ahora, consideremos las sucesiones de operadores $\left(A_n^{(1)}\right)_{n\in\mathbb{N}}, \ldots, \left(A_n^{(N)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de H en H tales que

$$\left|\left| A_n^{(k)} x - P_{S_k} x \right|\right| \leq r_n ||x|| \quad \forall\, x \in H,\ \forall\, k = 1, \ldots, m, \tag{1}$$

donde $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de números reales positivos tal que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} r_n < \infty.$$

A la sucesión de operadores $\left(A_n^{(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ le llamamos sucesión de aproximaciones del operador P_{S_k}.

En [12], Eugene Pustilnik y Simeon Reich, reemplazan los operadores de proyección por operadores, posiblemente no lineales y discontinuos, que satisfacen (1) y obtienen la misma conclusión que en el Teorema de Halperin, es decir, demuestran que para cada $x \in H$ existe $x^* \in S$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \left|\left| \left(\prod_{j=1}^{n} A_j^{(m)} A_j^{(m-1)} \cdots A_j^{(1)} \right) x - x^* \right|\right| = 0.$$

Para ello hacen uso del Teorema 4.1 demostrado en [4], en el que se establece una relación entre la órbita exacta y órbita inexacta con errores sumables de un operador.

Ahora, consideremos $T_1, T_2, \ldots, T_m : H \to H$, operadores contractivos, y $r : \mathbb{N} \to \{1, \ldots, m\}$ una función, Amemiya y Ando en [1] demuestran que, bajo ciertas condiciones, la sucesión de operadores $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge débilmente, en donde

$$S_n := T_{r(n)} T_{r(n-1)} \cdots T_{r(1)} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Una pregunta natural que surge es si, aprovechando este resultado, podemos generalizar el demostrado por Pustylnik y Reich en [12]. En nuestro resultado principal, damos respuesta a esta interrogante. Definimos conceptos análogos a la órbita exacta y órbita inexacta con errores sumables de un operador, y con ello demostramos una generalización del Teorema 4.1 de [4], siguiendo la metodología desarrollada por Pustylnik y Reich y aprovechando el resultado obtenido por Amemiya y Ando, demostramos que para cada $x \in H$ existe $x^* \in H$ tal que

$$\lim_{n \to \infty} \left(\prod_{j=1}^{n} A_j^{(r((j-1)q+q))} A_j^{(r((j-1)q+q-1))} \cdots A_j^{(r((j-1)q+1))} x \right) = x^*,$$

débilmente, donde $(A_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de aproximaciones de T_k para cada $k = 1, \ldots, m$.

Descripción del Capítulo 1

En este capítulo estudiamos el espacio de operadores multilineales y continuos, así como los espacios de Hilbert.

En la Sección 1.1 hacemos un repaso del espacio normado de las aplicaciones multilineales y continuas, y en la Sección 1.2 estudiamos las propiedades más importantes de los espacios de Hilbert, introducimos al operador proyección de punto más cercano y analizamos sus propiedades. La Proposición 1.15 nos muestra la descomposición en suma directa de un espacio de Hilbert.

En la Sección 1.4 estudiamos los operadores adjuntos, autoadjuntos y unitarios, en particular se presentan 2 resultados de especial relevancia. La Proposición 1.18 nos proporciona una descomposición en suma directa de un espacio de Hilbert en función del núcleo de un operador y la imagen de su adjunto, mientras que la Proposición 1.21 exhibe la desigualdad generalizada de Schwarz para un operador definido no negativo.

Descripción del Capítulo 2

Este capítulo lo dedicamos al estudio de las convergencias, fuerte y débil, de las órbitas exactas de un operador contractivo $T \in \mathcal{L}(H)$.

En la Proposición 2.4 se presentan las condiciones suficientes, (S) y (W), para que la sucesión $(T^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converja fuerte o débilmente, respectivamente. Además, se realiza un análisis de la condición (W), y se exhiben mejoras para esta en la Proposición 2.8 y la Proposición 2.12.

Descripción del Capítulo 3

Aquí se desarrollan los dos resultados principales de [1]. La Proposición 3.2 establece la convergencia fuerte de la sucesión de operadores $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, cuando la función de selección r es periódica. El Teorema 3.3 muestra la convergencia débil de la sucesión de operadores $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ para cualquier función de selección r.

Descripción del Capítulo 4

En este capítulo presentamos el resultado principal de este trabajo. Siguiendo las ideas dadas por [12] y [4], se definen las sucesiones tipo órbita exacta y tipo órbita inexacta con errores sumables, asociadas a un conjunto finito de operadores $\{T_1, T_2, \ldots, T_N\}$. En la Proposición 4.3, bajo hipótesis adecuadas, se demuestra que toda sucesión tipo órbita exacta converge débilmente, si y sólo si toda sucesión tipo órbita inexacta con errores sumables converge débilmente. En el Teorema 4.4 se construye una sucesión tipo órbita inexacta con errores sumables usando las sucesiones de operadores aproximantes $\left(A_n^{(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, y se demuestra la convergencia débil del producto aleatorio de esta sucesión, haciendo uso del Teorema 3.3 y la Proposición 4.3.

Descripción del Capítulo 5

Este capítulo contiene las conclusiones obtenidas en este trabajo y algunas recomendaciones que surgieron del mismo.

Capítulo 1

Preliminares

Uno de las conceptos más importantes en el Análisis Funcional son los espacios de Hilbert, es decir, espacio métricos completos, cuyas métricas son inducidas por normas, las cuales a su vez son inducidas por productos internos. En el presente capítulo, hacemos un breve repaso de algunos de los resultados más destacados en el contexto de los espacios de Hilbert, mismos que serán de utilidad a lo largo de este trabajo. En caso de que el lector esté familiarizado con las propiedades de los mapas multilineales y acotados, y los espacios de Hilbert, le recomendamos omitir esta capítulo. Los resultados y demostraciones presentadas en este capítulo pueden encontrarse en [3], [10] y [13].

A lo largo de este trabajo, escribimos

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &:= \{1,2,1,\cdots\}, \\ \mathbb{N}_0 &:= \mathbb{N}\cup\{0\}, \\ \mathbb{Z}^* &:= \mathbb{Z}\setminus\{0\}. \end{aligned}$$

Además, tomamos

$$\mathbb{K}\in\{\mathbb{R},\mathbb{C}\}.$$

1.1. Espacio normado de las aplicaciones multilineales y continuas

Sean $(E_1,\|\cdot\|_{E_1})$, $(E_2,\|\cdot\|_{E_2}),\ldots,(E_n,\|\cdot\|_{E_n})$ y $(F,\|\cdot\|_F)$ espacios normados y $T:\prod_{i=1}^{n}E_i\to F$ una función. Decimos que T es una aplicación multilineal cuando para cada $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \prod_{i=1}^{n} E_i$, arbitrario pero fijo, se tiene que

$$T(x_1, \dots, a_j + \lambda b_j, \dots, x_n) = T(x_1, \dots, a_j, \dots, x_n) + \lambda T(x_1, \dots, b_j, \dots, x_n),$$

para cada $a_j, b_j \in E_j$, cada $\lambda \in \mathbb{K}$ y cada $j = 1, \dots, n$. En particular, decimos que T es lineal cuando $n = 1$, y bilineal cuando $n = 2$.

Por otro lado, decimos que T es acotada cuando existe $C > 0$ tal que

$$||T(x_1, \dots, x_n)||_F \leq C||x_1||_{E_1} \cdots ||x_n||_{E_n} \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \prod_{i=1}^{n} E_i. \tag{1.1}$$

A lo largo de esta sección, escribimos $I := \{1, \dots, n\}$.

Proposición 1.1. *Sean $(E_1, \|\cdot\|_{E_1}), \dots, (E_n, \|\cdot\|_{E_n})$, $(F, \|\cdot\|_F)$ espacios normados, y $T : \prod_{i=1}^{n} E_i \to F$ un operador multilineal. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *T es acotado.*
2. *T es continuo.*

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que T es acotado. Consideremos

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in \prod_{i=1}^{n} E_i,$$

arbitrario. Sea $\epsilon > 0$, cualquiera. Como T es acotado, existe $C > 0$ tal que se satisface (1.1). Tomemos $\delta = \left(\frac{\epsilon}{C}\right)^{\frac{1}{n}}$. Gracias a la multilinealidad de T, para todo

$$y = (y_1, \dots, y_n) \in \prod_{i=1}^{n} E_i,$$

tal que

$$||x_i - y_i||_{E_i} \leq \delta \quad \forall\, i \in I, \tag{1.2}$$

se tiene que

$$\begin{aligned} ||Tx - Ty||_F &= ||T(x - y)||_F \\ &\leq C||x_1 - y_1||_{E_1} \cdots ||x_n - y_n||_{E_n} \\ &\leq C\left(\frac{\epsilon}{C}\right)^{\frac{1}{n}} \cdots \left(\frac{\epsilon}{C}\right)^{\frac{1}{n}} \\ &= C\frac{\epsilon}{C} \end{aligned}$$

$$= \epsilon.$$

Como ϵ es arbitrario, la anterior desigualdad nos indica que T es continua en x. Puesto que x es arbitrario, concluimos que T es continua en $\prod_{i=1}^{n} E_i$.

$\Leftarrow$) Supongamos que T es continuo. Sea $x = (x_1, \dots, x_n) \in \prod_{i=1}^{n} E_i$, arbitrario. En particular, notemos que T es continuo en x, es decir, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si

$$||x_i - y_i||_{E_i} \leq \delta \quad \forall i \in I,$$

se tiene que

$$||Tx - Ty||_F \leq \epsilon. \tag{1.3}$$

Ahora, sea $z = (z_1, \dots, z_n) \in \prod_{i=1}^{n} E_i$, arbitrario. Si $z_i = 0$ para algún $i \in I$, tenemos que

$$||Tz||_F = 0 = ||z_1||_{E_1} \cdots ||z_n||_{E_n}.$$

Supongamos que $z_i \neq 0$ para todo $i \in I$. Consideremos

$$y_i := x_i - \frac{\delta z_i}{||z_i||_{E_i}} \quad \forall i \in I.$$

Así, tenemos que

$$x_i - y_i = \frac{\delta z_i}{||z_i||_{E_i}} \quad \forall i \in I.$$

Además

$$||x_i - y_i||_{E_i} \leq \delta \quad \forall i \in I,$$

de donde, gracias a (1.3) y la multilinealidad de T, se sigue que

$$\begin{aligned} ||Tx - Ty||_F &= ||T(x - y)||_F \\ &= \left|\left| T\left(\frac{\delta z_1}{||z_1||_{E_1}}, \dots, \frac{\delta z_n}{||z_n||_{E_n}} \right) \right|\right|_F \\ &= \frac{\delta^n}{||z_1||_{E_1} \cdots ||z_n||_{E_n}} ||Tz||_F \\ &\leq \epsilon. \end{aligned}$$

En resumen, tenemos que

$$||Tz||_F \leq C||z_1||_{E_1} \cdots ||z_n||_{E_n} \quad \text{donde} \quad C := \frac{\epsilon}{\delta^n},$$

lo que muestra que T es acotado. $\square$

Definición 1.1 (Espacio vectorial de las aplicaciones multilineales y continuas). *Sean $(E_1, \|\cdot\|_{E_1}), \ldots, (E_n, \|\cdot\|_{E_n})$ y $(F, \|\cdot\|_F)$ espacios normados. Se denota por $\mathcal{L}\left(\prod_{i=1}^{n} E_i, F\right)$ al conjunto de las aplicaciones multilineales y continuas de $\prod_{i=1}^{n} E_i$ en F. Este conjunto es un espacio vectorial con las operaciones de suma y producto por escalar usuales de las funciones.*

Observación 1.1. *En caso de que $n = 1$ y $F = E_1$, escribimos $\mathcal{L}(F)$ en lugar de $\mathcal{L}(F; F)$. Además, en caso de que $n = 1$ y $F = \mathbb{K}$, escribimos E_1^* en lugar de $\mathcal{L}(E_1; \mathbb{K})$.*

Proposición 1.2. *Sean $(E_1, \|\cdot\|_{E_1}), \ldots, (E_n, \|\cdot\|_{E_n})$, $(F, \|\cdot\|_F)$ espacios normados reales. Sobre el espacio vectorial $\mathcal{L}\left(\prod_{i=1}^{n} E_i, F\right)$, la función*

$$\begin{array}{rccl} ||\cdot|| : & \mathcal{L}\left(\prod_{i=1}^{n} E_i, F\right) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & T & \longmapsto & ||T|| = \sup\limits_{\substack{||x_i||_{E_i} \leq 1 \\ \forall i \in I}} ||T(x_1, \ldots, x_n)||_F, \end{array}$$

define una norma, a la cual llamamos norma uniforme.

Para facilitar la notación, definamos el siguiente conjunto

$$\mathcal{N} := \left\{ x = (x_1, \ldots, x_n) \in \prod_{i=1}^{n} E_i : ||x_i||_{E_i} \leq 1, \forall i \in I \right\}.$$

En adelante, para cualquier espacio vectorial normado $(X, \|\cdot\|_X)$, escribimos simplemente $\|\cdot\|$ para denotar su norma, siempre y cuando no haya lugar a confusión.

Demostración. Proposición 1.2

- Sea $T \in \mathcal{L}\left(\prod_{i=1}^{n} E_i, F\right)$, arbitrario. Notemos que si $Tx = 0$ para todo $x \in \mathcal{N}$, tenemos que $Tx = 0$ para todo $x \in \prod_{i=1}^{n} E_i$. En efecto, consideremos $x \in \prod_{i=1}^{n} E_i$, arbitrario. Si $x_i = 0$ para algún $i \in I$, dado que T multilineal, se sigue que $Tx = 0$.

  Supongamos que $x_i \neq 0$ para todo $i \in I$, consideramos

  $$y_i := \frac{x_i}{||x_i||} \quad \forall i \in I,$$

de donde $||y_i|| = 1$ para cada $i \in I$. Por tanto $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathcal{N}$. Luego, gracias a la multilinealidad de T, se sigue que

$$\frac{Tx}{||x_1||||x_2|| \cdots ||x_n||} = Ty = 0,$$

por lo cual, $Tx = 0$.

Ahora, gracias a esta observación, se tienen las siguientes equivalencias:

$$\begin{aligned} ||T|| = 0 &\iff ||Tx|| = 0 \quad \forall x \in \mathcal{N} \\ &\iff Tx = 0 \quad \forall x \in \mathcal{N} \\ &\iff Tx = 0 \quad \forall x \in \prod_{i=1}^{n} E_i \\ &\iff T = 0. \end{aligned}$$

- Sean $\lambda \in \mathbb{R}$ y $T \in \mathcal{L}\left(\prod_{i=1}^{n} E_i, F\right)$, arbitrarios. Se sigue que

$$\begin{aligned} ||\lambda T|| &= \sup_{x \in \mathcal{N}} ||(\lambda T)x|| \\ &= \sup_{x \in \mathcal{N}} |\lambda|||Tx|| \\ &= |\lambda| \sup_{x \in \mathcal{N}} ||Tx|| \\ &= |\lambda|||T||. \end{aligned}$$

- Sean $T_1, T_2 \in \mathcal{L}\left(\prod_{i=1}^{n} E_i, F\right)$, arbitrarios. Luego, gracias a la desigualdad triangular de la norma en el espacio F, tenemos que

$$\begin{aligned} ||T_1 + T_2|| &= \sup_{x \in \mathcal{N}} ||(T_1 + T_2)x|| \\ &= \sup_{x \in \mathcal{N}} ||T_1 x + T_2 x|| \\ &\leq \sup_{x \in \mathcal{N}} (||T_1 x|| + ||T_2 x||) \\ &\leq \sup_{x \in \mathcal{N}} ||T_1 x|| + \sup_{x \in \mathcal{N}} ||T_2 x|| \\ &= ||T_1|| + ||T_2||. \end{aligned}$$

Así, la función definida en (1.2) es una norma. □

Ejemplo 1.1. Sean $1 < p < \infty$ y q tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Consideremos la aplicación

$$\begin{array}{rccl} T: & \ell_p \times \ell_q & \longrightarrow & \ell_1 \\ & (x,y) & \longmapsto & T(x,y) = (x_1y_1, x_2y_2, \dots), \end{array}$$

donde $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_p$ y $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_q$.

Probemos que T es bilineal. Sean $x, x' \in \ell_p$, $y, y' \in \ell_q$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, arbitrarios. De la definición de suma y producto por escalar en el espacio vectorial ℓ_1, se sigue que

$$\begin{aligned} T(x+\lambda x', y) &= ((x_1+\lambda x_1')y_1, (x_2+\lambda x_2')y_2, \dots) \\ &= (x_1y_1 + \lambda x_1'y_1, x_2y_2 + \lambda x_2'y_2, \dots) \\ &= (x_1y_1, x_2y_2, \dots) + \lambda(x_1'y_1, x_2'y_2, \dots) \\ &= T(x,y) + \lambda T(x',y). \end{aligned}$$

Así, T es lineal respecto a la primera variable. De manera similar, se tiene que

$$\begin{aligned} T(x, y+\lambda y') &= (x_1(y_1+\lambda y_1'), x_2(y_2+\lambda y_2'), \dots) \\ &= (x_1y_1 + \lambda x_1y_1', x_2y_2 + \lambda x_2y_2', \dots) \\ &= (x_1y_1, x_2y_2, \dots) + \lambda(x_1y_1', x_2y_2', \dots) \\ &= T(x,y) + \lambda T(x,y'). \end{aligned}$$

Por lo tanto, T es lineal respecto a la segunda variable, es decir, T es bilineal.

Mostremos ahora que T es acotado. Sean $x \in \ell_p$ y $y \in \ell_q$ tales que $||x||_p \leq 1$ y $||y||_q \leq 1$, de la desigualdad de Hölder tenemos que

$$\begin{aligned} ||T(x,y)||_1 &= \sum_{i=1}^{\infty} |x_iy_i| \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^q\right)^{1/q} \\ &\leq ||x||_p||y||_q \\ &\leq 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto $||T|| \leq 1$, así T es una aplicación continua. Además, tomando las sucesiones $x = (1,0,0,\dots) \in \ell_p$ y $y = (1,0,0,\dots) \in \ell_q$, se sigue que $||T(x,y)|| = 1$, es decir, $||T|| = 1$.

Proposición 1.3. *Sean $E_1, \dots, E_n, F$ espacios normados y $T \in \mathcal{L}\left(\prod_{i=1}^{n} E_i, F\right)$. Para* *todo* $(x_1, \ldots, x_n) \in \prod_{i=1}^{n} E_i$*, se tiene que*

$$||T(x_1, \ldots, x_n)|| \leq ||T|| ||x_1|| \cdots ||x_n||.$$

Demostración. Sea $(x_1, \ldots, x_n) \in \prod_{i=1}^{n} E_i$, arbitrario. En caso de que exista $i \in I$ tal que $x_i = 0$, se tiene que

$$||T(x_1, \ldots, x_n)|| = 0 \leq ||T|| ||x_1|| \cdots ||x_n||.$$

Supongamos que $x_i \neq 0$ para todo $i \in I$. De la multilinealidad de T, se sigue que

$$\begin{aligned}
||T(x_1, \ldots, x_n)|| &= \left|\left| ||x_1|| \cdots ||x_n|| T\left(\frac{x_1}{||x_1||}, \ldots, \frac{x_n}{||x_n||}\right) \right|\right| \\
&= ||x_1|| \cdots ||x_n|| \left|\left| T\left(\frac{x_1}{||x_1||}, \ldots, \frac{x_n}{||x_n||}\right) \right|\right| \\
&\leq ||x_1|| \cdots ||x_n|| \sup_{x \in \mathcal{N}} ||Tx|| \\
&= ||x_1|| \cdots ||x_n|| ||T|| \\
&= ||T|| ||x_1|| \cdots ||x_n||.
\end{aligned}$$

$\square$

PROPOSICIÓN 1.4. *Sean* $E_1, \ldots, E_n, F$ *espacios normados. Si* F *es un espacio de Banach, entonces* $\mathcal{L}\left(\prod_{i=1}^{n} E_i, F\right)$*, también es de Banach con la norma uniforme.*

Demostración. Sea $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}\left(\prod_{i=1}^{n} E_i, F\right)$, cualquiera. Así, dado un $\epsilon > 0$ arbitrario, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$||T_n - T_m|| \leq \epsilon \quad \forall\, n, m \geq N. \tag{1.4}$$

Consideremos $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \prod_{i=1}^{n} E_i$, arbitrario. De la Proposición 1.3 y (1.4), tenemos que

$$\begin{aligned}
||T_n x - T_m x|| &\leq ||T_n - T_m|| ||x_1|| \cdots ||x_n|| \\
&\leq \epsilon ||x_1|| \cdots ||x_n|| \quad \forall\, n, m \geq N.
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Así, como ϵ es arbitrario, la sucesión $(T_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en el espacio completo F. Por lo tanto, existe $y_x \in F$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} T_n(x) = y_x.$$

Como x es arbitrario, la aplicación

$$\begin{array}{rccc} S: & \prod_{i=1}^{n} E_i & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & S(x) = y_x \end{array}$$

está bien definida.

Mostremos que S es una aplicación multilineal y continua.

Sean $i \in I$, $j \in I \setminus \{i\}$, $a_i, b_i \in E_i$, $x_j \in E_j$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, arbitrarios. Por un lado, para cada $n \in \mathbb{N}$, de la multilinealidad de T_n tenemos que

$$T_n(x_1, \ldots, a_i + \lambda b_i, \ldots, x_n) = T_n(x_1, \ldots, a_i, \ldots, x_n) + \lambda T_n(x_1, \ldots, b_i, \ldots, x_n).$$

Tomando el límite cuando n tiende a infinito, se tiene que

$$S(x_1, \ldots, a_i + \lambda b_i, \ldots, x_n) = S(x_1, \ldots, a_i, \ldots, x_n) + \lambda S(x_1, \ldots, b_i, \ldots, x_n),$$

lo cual nos indica que S es un operador multilineal. Ahora, tomando el límite cuando m tiene a infinito en (1.5) y gracias a la continuidad de la norma, para cada $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$||T_n x - Sx|| \leq \epsilon ||x_1|| \cdots ||x_n|| \leq \epsilon, \quad \forall n \geq N, \forall x \in \mathcal{N}. \tag{1.6}$$

En particular, para $n = N$ tenemos que para todo $x \in \mathcal{N}$

$$\begin{aligned} ||Sx|| &= ||Sx - T_n x + T_n x|| \\ &\leq ||Sx - T_n x|| + ||T_n x|| \\ &\leq \epsilon + ||T_n x||. \end{aligned}$$

Dado que T_n es acotado, se sigue que S también lo es, y de la Proposición 1.1 se concluye que S es continuo.

Finalmente, de (1.6), se tiene que ϵ es una cota superior del conjunto

$$\{\|T_n x - Sx\| \, : \, x \in \mathcal{N}\}.$$

En consecuencia, se sigue que para cada $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$||T_n - S|| \leq \epsilon \quad \forall n \geq N.$$

Puesto que ϵ es arbitrario se deriva que

$$\lim_{n\to\infty} T_n = S.$$

Así, dado que la sucesión de Cauchy $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es arbitraria, se concluye que el espacio $\mathcal{L}\left(\prod_{i=1}^{n} E_i, F\right)$ es completo. □

1.2. Espacios de Hilbert

Los espacios de Hilbert son generalizaciones de los espacios de Banach, cuya norma es inducida por un producto interno. Dado H un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, un producto interno sobre H es una función $(\cdot,\cdot) : H \times H \to \mathbb{K}$ que satisface las siguientes propiedades:

- (Linealidad) $(ax + by, z) = a(x,z) + b(y,z)$ para todo $a, b \in \mathbb{K}$ y cada $x, y, z \in H$.
- (Simetría conjugada) $(x,y) = \overline{(y,x)}$ para todo $x, y \in H$.
- (Positividad estricta) $(x,x) > 0$ para todo elemento $x \in H$ no nulo.

A un espacio vectorial H sobre $\mathbb{K}$ dotado de producto interno, lo denominamos espacio pre$-$hilbertiano.

DEFINICIÓN 1.2 (Norma inducida)**.** *Sean H un espacio pre$-$hilbertiano y $x \in H$, definimos la norma inducida por el producto interno de H por*

$$||x|| = \sqrt{(x,x)}. \tag{1.7}$$

Para mostrar que en efecto $||\cdot||$ es una norma, haremos uso de la siguiente desigualdad.

PROPOSICIÓN 1.5 (Cauchy$-$Schwarz)**.** *Sea H un espacio pre$-$hilbertiano. Se tiene la desigualdad de Cauchy$-$Schwarz*

$$|(x,y)| \leq ||x||||y|| \quad \forall x, y \in H. \tag{1.8}$$

La igualdad se da cuando x y y son linealmente dependientes.

Demostración. Sean $x, y \in H$, arbitrarios. Notemos que si $y = 0$, entonces (1.8) se satisface. Supongamos que $\|y\| \neq 0$. Sea $t \in \mathbb{K}$, arbitrario. Por definición de la norma y las propiedades del producto interno se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &\leq ||x + ty||^2 \\ &= (x + ty, x + ty) \\ &= (x, x) + \bar{t}(x, y) + t(y, x) + t\bar{t}(y, y) \\ &= ||x||^2 + \overline{t(y, x)} + t(y, x) + |t|^2||y||^2 \\ &= ||x||^2 + 2\text{Re}(t(y, x)) + |t|^2||y||^2 \\ &= ||x||^2 + 2\text{Re}(t\overline{(x, y)}) + |t|^2||y||^2. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Ahora, tomando

$$t = -\frac{(x, y)}{||y||^2},$$

y reemplazando en (1.9) se sigue que

$$\begin{aligned} 0 &\leq ||x||^2 + 2\text{Re}\left(-\frac{(x, y)\overline{(y, x)}}{||y||^2}\right) + \frac{|(x, y)|^2||y||^2}{||y||^4} \\ &= ||x||^2 - 2\frac{|(x, y)|^2}{||y||^2} + \frac{|(x, y)|^2}{||y||^2}. \end{aligned}$$

Operando esta última expresión, tenemos que

$$0 \leq ||x||^2||y||^2 - |(x, y)|^2.$$

Puesto que x, y son arbitrarios se concluye la demostración. □

Ahora, estamos listos para mostrar que la expresión definida en (1.7) es, en efecto, una norma.

PROPOSICIÓN 1.6. *Sea H un espacio pre−hilbertiano. La función*

$$\begin{aligned} ||\cdot|| : \quad H &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto ||x||, \end{aligned}$$

es una norma sobre H.

Demostración.
- Sea $x \in H$, arbitrario. Notemos que gracias a la positividad es-

tricta del producto interno se tiene que

$$\begin{aligned} ||x|| = 0 &\iff (x,x) = 0 \\ &\iff x = 0. \end{aligned}$$

- Sean $\lambda \in \mathbb{K}$ y $x \in H$, arbitrarios. Nuevamente, aprovechando las propiedades del producto interno, se sigue que

$$\begin{aligned} ||\lambda x||^2 &= (\lambda x, \lambda x) \\ &= \lambda \overline{\lambda}(x,x) \\ &= |\lambda|^2 ||x||^2. \end{aligned}$$

  Así, $||\lambda x|| = |\lambda| ||x||$.

- Sean $x, y \in H$, cualesquiera. Para mostrar la desigualdad triangular, haremos uso de la desigualdad de Cauchy-Schwarz, pues

$$\begin{aligned} ||x+y||^2 &= (x+y, x+y) \\ &= (x,x) + (x,y) + (y,x) + (y,y) \\ &= ||x||^2 + 2\mathrm{Re}(x,y) + ||y||^2 \\ &\leq ||x||^2 + 2||x|| ||y|| + ||y||^2 \\ &= (||x|| + ||y||)^2, \end{aligned}$$

  de donde se sigue que $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$.

□

DEFINICIÓN 1.3 (Espacio de Hilbert)**.** *Decimos que un espacio pre−hilbertiano H, es de Hilbert cuando es completo con respecto a la norma inducida por su producto interno.*

Un ejemplo clásico de espacio de Hilbert es el espacio de sucesiones $\ell^2(\mathbb{K})$ equipado con el producto interno

$$(x,y) := \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n y_n,$$

donde $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Notemos que este producto interno induce una norma a la cual denotamos por $|| \cdot ||_2$.

De aquí en adelante, a menos que se mencione lo contrario, asumimos que H es un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{K}$ con producto interno $(\cdot,\cdot)$ y norma $|| \cdot ||$.

Otro resultado importante que obtenemos gracias a la desigualdad de Cauchy-Schwarz es la continuidad del producto interno.

PROPOSICIÓN 1.7. *Sean H un espacio de Hilbert, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones en H tales que*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x, \tag{1.10}$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = y. \tag{1.11}$$

Se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (x, y)$.

Demostración. De (1.10) y (1.11), tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} ||x_n - x|| = 0, \tag{1.12}$$

y

$$\lim_{n\to\infty} ||y_n - y|| = 0. \tag{1.13}$$

Además, gracias a la desigualdad triangular inversa, obtenemos

$$|||y_n|| - ||y||| \leq ||y_n - y|| \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Tomando límite cuando n tiende a infinito en esta última desigualdad, y gracias a (1.13) y el Teorema de Estricción, se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} ||y_n|| = ||y||. \tag{1.14}$$

Luego, aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, obtenemos

$$\begin{aligned}
|(x_n, y_n) - (x, y)| &= |(x_n, y_n) - (x, y_n) + (x, y_n) - (x, y)| \\
&= |(x_n - x, y_n) - (x, y_n - y)| \\
&\leq |(x_n - x, y_n)| + |(x, y_n - y)| \\
&\leq ||x_n - x||||y_n|| + ||x||||y_n - y||.
\end{aligned}$$

Así, tomando el límite cuando n tiende a infinito en la última desigualdad, y gracias a (1.12), (1.13), (1.14) se obtiene el resultado buscado. □

PROPOSICIÓN 1.8 (Identidad del Paralelogramo)**.** *Sea H un espacio de Hilbert, se tiene la identidad*

$$||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2) \quad \forall x, y \in H. \tag{1.15}$$

Demostración. Sean $x, y \in H$, arbitrarios. Notemos que por un lado

$$\begin{aligned}||x+y||^2 &= (x+y, x+y) \\ &= (x,x) + (x,y) + (y,x) + (y,y) \\ &= ||x||^2 + 2\mathrm{Re}(x,y) + ||y||^2.\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}||x-y||^2 &= (x-y, x-y) \\ &= (x,x) - (x,y) - (y,x) + (y,y) \\ &= ||x||^2 - 2\mathrm{Re}(x,y) + ||y||^2.\end{aligned}$$

Sumando estas expresiones se obtiene lo deseado, es decir,

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2.$$

□

DEFINICIÓN 1.4 (Complemento ortogonal)**.** *Sean H un espacio de Hilbert y $A \subseteq H$ un subconjunto no vacío. Entonces definimos el complemento ortogonal de A por*

$$A^{\perp} := \{h \in H | (h,a) = 0 \ \textit{para todo} \ a \in A\}. \tag{1.16}$$

TEOREMA 1.9 (Proyección de punto más cercano)**.** *Sean H un espacio de Hilbert, $K \subseteq H$ no vacío, cerrado y convexo. Para cada $x \in H$, existe un único $y \in K$ tal que*

$$||x-y|| = dist(x,K) := \inf_{z \in K} ||x-z||. \tag{1.17}$$

Demostración. Primero estudiemos la existencia. Notemos que si $x \in K$, el resultado es trivial, pues basta considerar $y = x$ para obtener lo deseado. Supongamos que $u \in H \setminus K$. Como K es no vacío y cerrado, entonces $dist(x,K) > 0$. Ahora, gracias a que el ínfimo de un conjunto es un punto de adherencia del mismo, existe una sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en K tal que

$$\lim_{n\to\infty} ||x-y_n|| = dist(x,K). \tag{1.18}$$

Mostremos que la sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq K$ es de Cauchy. Sean $n, m \in \mathbb{N}$, arbitrarios. Gracias a la Identidad Del Paralelogramo 1.8, se tiene que

$$2\left(||x-y_n||^2 + ||x-y_m||^2\right) = ||y_m - y_n||^2 + ||2x - (y_n + y_m)||^2$$

$$= ||y_m - y_n||^2 + \left|\left|2\left(x - \frac{y_n + y_m}{2}\right)\right|\right|^2$$
$$= ||y_m - y_n||^2 + 4\left|\left|x - \frac{y_n + y_m}{2}\right|\right|^2.$$

Luego, despejando se tiene que

$$||y_m - y_n||^2 = 2\left(||x - y_n||^2 + ||x - y_m||^2\right) - 4\left|\left|x - \frac{y_n + y_m}{2}\right|\right|^2.$$

Como K es convexo y $y_n, y_m \in K$, vemos que

$$\frac{y_n + y_m}{2} \in K,$$

por tanto

$$\left|\left|x - \frac{y_n + y_m}{2}\right|\right| \geq dist(x, K),$$

de donde se sigue que

$$||y_m - y_n||^2 \leq 2\left(||x - y_n||^2 + ||x - y_m||^2\right) - 4dist(x, K)^2.$$

Tomando el límite cuando n, m tienden a infinito, y gracias a (1.18), obtenemos que

$$\lim_{n,m\to\infty} ||y_n - y_m||^2 = 0,$$

es decir, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en K. Puesto que K es un subconjunto cerrado del espacio completo H, se sigue que K es completo, por tanto existe $y \in K$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} y_n = y.$$

Luego, gracias a la continuidad de la norma, se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} ||x - y_n|| = ||x - y||,$$

por unicidad de límite y (1.18) se concluye que

$$||x - y|| = dist(x, K).$$

Para finalizar, estudiemos la unicidad. Supongamos que existe $z \in K$ tal que $z \neq y$ y

$$||x - z|| = dist(x, K).$$

Nuevamente, gracias a la Identidad del Paralelogramo, se tiene que

$$\begin{aligned}
||y-z||^2 &= ||y-x+x-z||^2 \\
&= 2\left(||y-x||^2+||x-z||^2\right)-4\left|\left|x-\frac{y+z}{2}\right|\right|^2 \\
&\le 2(dist(x,K)^2+dist(x,K)^2)-4dist(x,K)^2 \\
&= 0,
\end{aligned}$$

con lo cual se sigue que $y=z$. □

DEFINICIÓN 1.5. *Sean H un espacio de Hilbert y $K \subseteq H$ no vacío, cerrado y convexo. Al operador*

$$\begin{array}{rccc} P_K: & H & \longrightarrow & K \\ & x & \longmapsto & P_K x, \end{array}$$

tal que $||x-P_k x|| = dist(x,K)$, le llamamos operador de proyección de punto más cercano sobre K.

A la proyección de x sobre el conjunto K la notaremos por $P_K(x)$. Notemos que este operador está bien definido gracias al Teorema 1.9.

PROPOSICIÓN 1.10. *Sean H un espacio de Hilbert y $K \subseteq H$ no vacío, cerrado y convexo. Si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, la proyección de un elemento $x \in H$ sobre K se caracteriza por*

$$(x-P_K(x), z-P_K(x)) \le 0 \quad \forall z \in K.$$

En cambio, si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, la proyección de un elemento $x \in H$ se caracteriza por

$$\mathrm{Re}(x-P_K(x), z-P_K(x)) \le 0 \quad \forall z \in K.$$

Demostración. Supongamos que $\mathbb{K}=\mathbb{R}$.

$\Rightarrow$) Sea $x \in H$, cualquiera. Gracias al Teorema 1.9, existe un único $y=P_K(x) \in K$ tal que

$$||x-P_K(x)|| = dist(x,K).$$

Sean $z \in K$ y $\lambda \in (0,1)$, arbitrarios. Dado que K es convexo, se tiene que

$$w = \lambda z + (1-\lambda)P_K(x) \in K.$$

Notemos que gracias a la definición de proyección sobre K, tenemos que

$$||x-P_K(x)||^2$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \; ||x - w||^2 \\
&= \; ||x - \lambda z - (1-\lambda) P_K(x)||^2 \\
&= \; ||x - P_K(x) - \lambda(z - P_K(x))||^2 \\
&= \; ||x - P_K(x)||^2 - 2\lambda(x - P_K(x), z - P_K(x)) + \lambda^2 ||z - P_K(x)||^2,
\end{aligned}
$$

de donde, al simplificar obtenemos que

$$2(x - P_K(x), z - P_K(x)) - \lambda ||z - P_K(x)||^2 \leq 0.$$

Como λ es arbitrario, esta última desigualdad es valida para cada término de la sucesión $\left(\dfrac{1}{k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$, la cual converge a 0. Así, al pasar al límite cuando k tiende a infinito, tenemos que

$$(x - P_K(x), z - P_K(x)) \leq 0 \quad \forall z \in K.$$

$\Leftarrow$) Supongamos que

$$(x - P_K(x), z - P_K(x)) \leq 0 \quad \forall z \in K. \tag{1.19}$$

Como $P_K(x) \in K$, se tiene que

$$||x - P_K(x)|| \geq dist(x, K), \tag{1.20}$$

por tanto, basta con probar que

$$||x - P_K(x)|| \leq dist(x, K).$$

Notemos que para obtener esta última desigualdad, basta con demostrar que

$$||x - P_K(x)|| \leq ||x - z|| \quad \forall z \in K.$$

Sea $z \in K$, arbitrario. Gracias a (1.19) se sigue que

$$
\begin{aligned}
||x - z||^2 &= ||x - P_K(x) + P_K(x) - z||^2 \\
&= ||x - P_K(x)||^2 - 2(x - P_K(x), z - P_K(x)) + ||P_K(x) - z||^2 \\
&\geq ||x - P_K(x)||^2.
\end{aligned}
$$

Como $z \in K$ es arbitrario, tenemos que

$$||x - P_K(x)|| \leq ||x - z|| \quad \forall z \in K. \tag{1.21}$$

Así, de (1.20) y (1.21) concluimos que $||x - P_K(x)|| = dist(x, K)$.

Ahora, suponemos que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

$\Rightarrow$) Sea $x \in H$, arbitrario. Gracias al Teorema 1.9, existe un único $y = P_K(x)$ en K tal que

$$||x - P_K(x)|| = dist(x, K).$$

Dados $z \in K$ y $\lambda \in (0,1)$, cualesquiera. Como K es convexo, se sigue que

$$w = \lambda z + (1-\lambda)P_K(x) \in K.$$

Notemos que gracias a la definición de proyección tenemos que

$$\begin{aligned}
||x - P_K(x)||^2 &\leq ||x - w||^2 \\
&= ||x - \lambda z - (1-\lambda)P_K(x)||^2 \\
&= ||x - P_K(x) - \lambda(z - P_K(x))||^2 \\
&= ||x - P_K(x)||^2 - 2\lambda \mathrm{Re}(x - P_K(x), z - P_K(x)) + \lambda^2 ||z - P_K(x)||^2.
\end{aligned}$$

Al simplificar esta expresión, se tiene que

$$2\mathrm{Re}(x - P_K(x), z - P_K(x)) - \lambda ||z - P_K(x)||^2 \leq 0$$

Como λ es arbitrario, al igual que se hizo en el caso real, podemos considerar la sucesión $\left(\frac{1}{k}\right)_{k \in \mathbb{N}}$. Así, al tomar el límite cuando k tiende a infinito, se tiene que

$$\mathrm{Re}(x - P_K(x), z - P_K(x)) \leq 0 \quad \forall z \in K.$$

$\Leftarrow$) Supongamos que

$$\mathrm{Re}(x - P_K(x), z - P_K(x)) \leq 0 \quad \forall z \in K. \tag{1.22}$$

Como $P_K(x) \in K$, se tiene que

$$||x - P_K(x)|| \geq dist(x, K). \tag{1.23}$$

Entonces demostremos que

$$||x - P_K(x)|| \leq dist(x, K).$$

Como se mencionó en el caso real, basta con demostrar que

$$||x - P_K(x)|| \leq ||x - z|| \quad \forall z \in K.$$

Sea $z \in K$, arbitrario. Notemos que, gracias a (1.22) se sigue que

$$\begin{aligned} ||x-z||^2 &= ||x-P_K(x)+P_K(x)-z||^2 \\ &= ||x-P_K(x)||^2 - 2\mathrm{Re}(x-P_K(x), z-P_K(x)) + ||P_K(x)-z||^2 \\ &\geq ||x-P_K(x)||^2. \end{aligned}$$

Como $z \in K$ es arbitrario, se sigue que

$$||x-P_K(x)|| \leq ||x-z|| \quad \forall z \in K. \tag{1.24}$$

Así, de (1.23) y (1.24) concluimos que $||x-P_K(x)|| = dist(x,K)$. □

PROPOSICIÓN 1.11. *Sean H espacio de Hilbert y $K \subseteq H$ no vacío, cerrado y convexo. El operador proyección $P_K : H \to K$ es Lipchitz continuo con constante de Lipchitz $L = 1$.*

Demostración. Supongamos que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Sean $x, y \in H$, arbitrarios. De la Proposición 1.10 (caso real), se sigue que

$$(x-P_K(x), z-P_K(x)) \leq 0 \quad \forall z \in K, \tag{1.25}$$

y

$$(y-P_K(y), z-P_K(y)) \leq 0 \quad \forall z \in K. \tag{1.26}$$

Considerando $z = P_K(y)$ en (1.25), obtenemos

$$(x-P_K(x), P_K(y)-P_K(x)) \leq 0. \tag{1.27}$$

Igualmente, tomando $z = P_K(x)$ en (1.26), tenemos

$$(y-P_K(y), P_K(x)-P_K(y)) \leq 0. \tag{1.28}$$

Restando (1.27) y (1.28), se sigue que

$$(x-P_K(x)-y+P_K(y), P_K(x)-P_K(y)) \geq 0,$$

de donde

$$(x-y, P_K(x)-P_K(y)) - ||P_K(x)-P_K(y)||^2 \geq 0.$$

Ahora, gracias a la desigualdad de Cauchy-Schwarz, obtenemos

$$\begin{aligned} ||P_K(x)-P_K(y)||^2 &\leq (x-y, P_K(x)-P_K(y)) \\ &\leq ||x-y|| ||P_K(x)-P_K(y)||. \end{aligned}$$

Finalmente, si $x = y$, el resultado se verifica. Si $x \neq y$, se sigue que

$$||P_K(x) - P_K(y)|| \leq ||x - y||.$$

Es decir, P_K es Lipchitz continuo con constante $L = 1$.

Ahora, supongamos que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Sean $x, y \in H$, cualesquiera. De la Proposición 1.10 caso complejo, se tiene que

$$\operatorname{Re}(x - P_K(x), z - P_K(x)) \leq 0 \quad \forall z \in K, \tag{1.29}$$

y

$$\operatorname{Re}(y - P_K(y), z - P_K(y)) \leq 0 \quad \forall z \in K. \tag{1.30}$$

Considerando $z = P_K(y)$ en (1.29) obtenemos

$$\operatorname{Re}(x - P_K(x), P_K(y) - P_K(x)) \leq 0. \tag{1.31}$$

Mientras que tomando $z = P_K(x)$ en (1.30) tenemos

$$\operatorname{Re}(y - P_K(y), P_K(x) - P_K(y)) \leq 0. \tag{1.32}$$

Restando (1.31) y (1.32) se obtiene que

$$\operatorname{Re}(x - P_K(x) - y + P_K(y), P_K(x) - P_K(y)) \geq 0,$$

de donde

$$\operatorname{Re}(x - y, P_K(x) - P_K(y)) - ||P_K(x) - P_K(y)||^2 \geq 0.$$

Ahora, gracias a la desigualdad de Cauchy-Schwarz, y considerando la desigualdad

$$\operatorname{Re}(z) \leq |z| \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

obtenemos

$$\begin{aligned}
||P_K(x) - P_K(y)||^2 &\leq \operatorname{Re}(x - y, P_K(x) - P_K(y)) \\
&\leq |(x - y, P_K(x) - P_K(y)) \\
&\leq ||x - y|| ||P_K(x) - P_K(y)||.
\end{aligned}$$

Finalmente, si $x = y$, se verifica lo deseado. Si $x \neq y$, se sigue que

$$||P_K(x) - P_K(y)|| \leq ||x - y||,$$

es decir, P_K es Lipchitz continuo con constante $L = 1$. □

PROPOSICIÓN 1.12. *Sean H un espacio de Hilbert y K un subespacio vectorial cerrado de H. Para todo $x \in H$ se tiene que*

$$(x - P_K(x), z) = 0 \quad \forall z \in K. \tag{1.33}$$

De manera recíproca, si $y \in K$ es tal que

$$(x - y, z) = 0 \quad \forall z \in K, \tag{1.34}$$

entonces $y = P_K(x)$.

Demostración. Supongamos que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

$\Rightarrow$) Si $x \in K$, entonces $P_K(x) = x$, y por tanto para todo $z \in K$ se tiene que

$$(x - P_K(x), z) = (x - x, z) = 0.$$

Sean $x \in H \setminus K$ y $z \in K$ elementos arbitrarios. Como K es un subespacio vectorial tenemos que

$$P_K(x) + \lambda z \in K \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Además, K es convexo. Por lo que gracias a la Proposición 1.10 caso real, obtenemos que

$$(x - P_K(x), P_K(x) + \lambda z - P_K(x)) \leq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

de donde se sigue que

$$\lambda(x - P_K(x), z) \leq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Tomando $\lambda = (x - P_K(x), z)$, tenemos que

$$(x - P_K(x), z)^2 \leq 0,$$

y por lo tanto,

$$(x - P_K(x), z) = 0.$$

$\Leftarrow$) Sea $y \in K$ tal que satisface (1.34). En particular, tomando $z = y$ se tiene que

$$(x - y, y) = 0, \tag{1.35}$$

de donde obtenemos que

$$(x - y, z - y) = 0 \quad \forall z \in K.$$

Nuevamente por el caso real de la Proposición 1.10, concluimos que

$$y = P_K(x).$$

Ahora, supongamos que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

$\Rightarrow$ Cuando $x \in K$, el resultado es inmediato como vimos en el caso real. Sean $x \in H \setminus K$ y $z \in K$, arbitrarios. Siguiendo un procedimiento completamente análogo al hecho previamente, y gracias al caso complejo de la Proposición 1.10 concluimos que

$$\mathrm{Re}(x - P_K(x), z) = 0.$$

Mostremos entonces que $\mathrm{Im(x - P_K(x), z) = 0}$. Como K es un subespacio vectorial complejo, tenemos que

$$P_K(x) + i\lambda z \in K \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Luego, por el caso complejo de la Proposición 1.10, se sigue que

$$\mathrm{Re}(x - P_K(x), P_K(x) + i\lambda z - P_K(x)) \leq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

lo cual implica que

$$\mathrm{Re}(-i\lambda(x - P_K(x), z)) \leq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}. \tag{1.36}$$

Además, recordemos que para todo $w \in \mathbb{C}$ tenemos la siguiente igualdad

$$\mathrm{Im}(w) = -\mathrm{Re}(iw).$$

Usando esto en (1.36) concluimos que

$$\mathrm{Im}(\lambda(x - P_K(x), z)) \leq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Dado que la última desigualdad es válida para todo λ real, podemos considerar la sucesión $\left(\dfrac{1}{k}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ que converge a 0. Así, tomando límite cuando k tiende a infinito se tiene que

$$\mathrm{Im}((x - P_k(x), z)) = 0.$$

$\Leftarrow$) Siguiendo el mismo proceso realizado para el caso real, obtenemos que

$$(x - y, z - y) = 0 \quad \forall z \in K,$$

lo que implica que

$$\mathrm{Re}(x-y, z-y) = 0 \quad \forall z \in K.$$

Así, por el caso complejo de la Proposición 1.10 concluimos lo deseado. $\square$

PROPOSICIÓN 1.13. *Sean H un espacio de Hilbert y $K \subseteq H$ no vacío y cerrado. El operador de proyección $P_K : H \to K$ es lineal si, y sólo si, K es un subespacio vectorial de H. Además, si el subespacio $K \neq \{0\}$, entonces $||P_K||_{\mathcal{L}(H,K)} = 1$.*

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que el operador de proyección P_K es lineal. Notemos que gracias al Teorema de la Proyección, el operador P_K es sobreyectivo, por tanto $P_K(H) = K$, así K es un subespacio vectorial, pues es la imagen directa de un espacio vectorial a través de un operador lineal.

$\Leftarrow$) Supongamos que K es un subespacio vectorial de H. Sean $x, y \in H$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, arbitrarios. Gracias a la Proposición 1.12, se sigue que

$$(\lambda x - \lambda P_K(x), z) = 0 \quad \forall z \in K, \tag{1.37}$$

y

$$(y - P_K(y), z) = 0 \quad \forall z \in K. \tag{1.38}$$

Ahora, sumando (1.37) y (1.38) obtenemos

$$(\lambda x + y - (\lambda P_K(x) + P_K(y)), z) = 0 \quad \forall z \in K,$$

de donde, gracias a la Proposición 1.12, se concluye que

$$\lambda P_K(x) + P_K(y) = P_K(\lambda x + y),$$

lo cual nos indica el operador P_K es lineal.

Por último, consideremos $K \neq \{0\}$. Como P_K es Lipchitz continuo, se sigue que

$$||P_K(x)|| \leq ||x|| \quad \forall\, x \in H,$$

lo que implica que

$$||P_K||_{\mathcal{L}(H,K)} \leq 1.$$

Puesto que $K \neq \{0\}$, existe $y \in K$ no nulo, por tanto, considerando $z = \dfrac{y}{||y||}$ se tiene que $||z|| = 1$. Como z es un elemento de K, $z = P_K(z)$, por lo cual

$$||P_K(z)|| = ||z|| = 1.$$

Esto nos muestra que $||P_K||_{\mathcal{L}(H,K)} = 1$.

En caso de que K sea el subespacio trivial, es decir $K = \{0\}$, entonces $P_K = 0$ y por ende $||P_K||_{\mathcal{L}(H,K)} = 0$. $\square$

PROPOSICIÓN 1.14. *Sean H un espacio de Hilbert y K un subespacio vectorial de H. Se tiene que K es denso en H si, y sólo si, el subespacio ortogonal de K se reduce a cero, es decir, $K^{\perp} = \{0\}$.*

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que K es denso en H, es decir, $\overline{K} = H$. Sea $x \in H$ tal que

$$(x, y) = 0 \quad \forall y \in K.$$

Puesto que $x \in \overline{K}$, existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión en K tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ en H. Gracias a la continuidad del producto interno (ver Proposición 1.7) se sigue que

$$0 = \lim_{n\to\infty} (x_n, x) = (x, x),$$

de donde se obtiene que $(x, x) = 0$, y por tanto $x = 0$. Así $K^{\perp} = \{0\}$.

$\Leftarrow$) Supongamos que $K^{\perp} = \{0\}$. Razonemos por contradicción y supongamos que $\overline{K} \neq H$. Así, existe $y \in H \setminus \overline{K}$. Definamos

$$x := y - P_{\overline{K}} y.$$

Como $y \notin \overline{K}$, $y \neq P_{\overline{K}} y$, y en consecuencia $x \neq 0$. Por otro lado, de la Proposición 1.12 se tiene que

$$(x, z) = (y - P_{\overline{K}}(y), z) = 0 \quad \forall z \in \overline{K}.$$

Así, $x \in (\overline{K})^{\perp}$ y dado que $(\overline{K})^{\perp} = K^{\perp}$, concluimos que $x = 0$, lo que es una contradicción. En resumen, K es denso en H. $\square$

PROPOSICIÓN 1.15 (Suma directa en espacios de Hilbert). *Sean H un espacio de Hilbert y K un subespacio vectorial cerrado de H. Se tiene que*

$$H = K \oplus K^{\perp}.$$

Demostración. Gracias a la positividad estricta del producto interno, tenemos que $K \cap K^{\perp} = \{0\}$. Además, puesto que K y $K^{\perp}$ son subespacios de H, se sigue que $(K + K^{\perp}) \subseteq H$.

Probemos que

$$H \subseteq (K + K^{\perp}).$$

Sea $x \in H$, arbitrario. Notemos que

$$x = P_K(x) + (x - P_K(x)).$$

Por un lado tenemos que $P_K(x) \in K$, y por otro lado, gracias a la Proposición 1.12, se tiene que

$$(x - P_K(x), z) = 0 \quad \forall z \in K.$$

En consecuencia, $x - P_K(x) \in K^{\perp}$. Por lo tanto, dado que x es arbitrario, hemos demostrado que $H \subseteq K + K^{\perp}$. □

Cabe recalcar que gracias a la unicidad dada por el Teorema de la Proyección, la descomposición dada en el resultado previo es única.

DEFINICIÓN 1.6 (Proyección ortogonal)**.** *Sean H un espacio de Hilbert y K un subespacio verctorial cerrado de H, definimos el operador*

$$\begin{array}{rccl} P_K^{\perp}: & H & \longrightarrow & K^{\perp} \\ & x & \longmapsto & P_K^{\perp}(x) = (I - P_K)(x), \end{array}$$

el cual está bien definido y es un operador proyección gracias a la Proposición 1.12.

1.3. Espacio dual de un espacio de Hilbert

Recordemos que $E^* := \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ se denomina el espacio dual de un espacio normado E. En el contexto de los espacios de Hilbert tenemos un resultado de suma importancia que identifica el producto en dualidad con el producto interno.

TEOREMA 1.16 (Representación de Riesz−Fréchet)**.** *Sea H un espacio de Hilbert. Para cada $\varphi \in H^*$ existe un único $v \in H$ tal que*

$$\langle \varphi, u \rangle = (u, v) \qquad \forall u \in H,$$

en donde $\langle \varphi, u \rangle := \varphi(u)$. Más aún,

$$||v||_H = ||\varphi||_{H^*}.$$

Demostración. Sea $\varphi \in H^*$, arbitrario. Consideremos $K = \varphi^{-1}(\{0\})$. Notemos que K es un subespacio vectorial H, pues φ es lineal. Además, K es cerrado por ser la imagen inversa del conjunto cerrado $\{0\}$ a través del funcional continuo φ.

Notemos que si $K = H$, entonces $\varphi = 0$ y el resultado se sigue, tomando $f = 0$. Supongamos que $K \neq H$. Así, existe $x \in H \setminus K$. Escribimos $y = P_K x$. Consideremos $g := x - y$. Gracias a la Proposición 1.12, se sigue que

$$(g, z) = 0 \quad \forall z \in K. \tag{1.39}$$

Sea $u \in H$, arbitrario. Consideremos

$$w := \langle \varphi, u \rangle g - \langle \varphi, g \rangle u.$$

Así

$$\langle \varphi, w \rangle = \langle \varphi, u \rangle \langle \varphi, g \rangle - \langle \varphi, g \rangle \langle \varphi, u \rangle = 0,$$

lo cual nos indica que $w \in K$. Luego, gracias a (1.39) tenemos que $(g, w) = 0$, de donde se sigue que

$$\begin{aligned}(w, g) &= \langle \varphi, u \rangle (g, g) - \langle \varphi, g \rangle (u, g) \\ &= \langle \varphi, u \rangle ||g||^2 - \langle \varphi, g \rangle (u, g) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Así, como $g \neq 0$, se tiene que

$$\langle \varphi, u \rangle = \frac{\langle \varphi, g \rangle}{||g||^2} (u, g).$$

Luego, tomando $v = \dfrac{\overline{\langle \varphi, g \rangle}}{||g||^2} g$, vemos que

$$\begin{aligned}(u, v) &= \left(u, \frac{\overline{\langle \varphi, g \rangle}}{||g||^2} g \right) \\ &= \frac{\langle \varphi, g \rangle}{||g||^2} (u, g) \\ &= \langle \varphi, u \rangle,\end{aligned}$$

lo cual garantiza que para cada $\varphi \in H^*$ existe $v \in H$ tal que $\langle \varphi, u \rangle = (u, v) \quad \forall u \in H$.

Mostremos ahora la unicidad de v. Supongamos que existe $v' \in H$ tal que para todo $u \in H$

$$\langle \varphi, u \rangle = (u, v) = (u, v').$$

Entonces $(u, v - v') = 0$ para todo $u \in H$. En particular, tomando $u = v - v'$, tenemos que

$$\begin{aligned}(u, v - v') &= (v - v', v - v') \\ &= ||v - v'||^2 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Así, $v - v' = 0$, es decir, $v = v'$. En conclusión, v es único.

Finalmente mostremos que $||v|| = ||\varphi||$. Si $\varphi = 0$, tenemos que $v = 0$ y por tanto la igualdad se cumple. Supongamos que $\varphi \neq 0$, entonces $v \neq 0$. Considerando $u = v$, se sigue que

$$\begin{aligned}||v||^2 &= (v, v) \\ &= \langle \varphi, v \rangle \\ &\leq ||\varphi|| ||v||,\end{aligned}$$

lo cual implica que $||v|| \leq ||\varphi||$. Por otro lado, aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos que

$$|\langle \varphi, u \rangle| = |(u, v)| \leq ||u|| ||v||,$$

de donde se sigue que

$$||\varphi|| = \sup_{||u|| \leq 1} |(u, v)| \leq ||v||.$$

Así, hemos mostrado que $||\varphi|| = ||v||$, como queríamos. □

1.4. Operadores adjuntos, autoadjuntos y unitarios

Sean H un espacio de Hilbert y $T \in \mathcal{L}(H)$. Definimos el operador adjunto de T, por $T^* \in \mathcal{L}(H)$ tal que

$$(Tu, v) = (u, T^* v) \quad \forall u, v \in H. \tag{1.40}$$

A continuación, presentamos una serie de propiedades del operador adjunto, que nos serán de utilidad.

PROPOSICIÓN 1.17. *Sean H un espacio de Hilbert y $S, T \in \mathcal{L}(H)$. Tenemos que:*

1. $(S + T)^* = S^* + T^*$.

2. *Para todo* $\alpha \in \mathbb{K}$, $(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*$.

3. $(T^*)^* = T$.

4. $(ST)^* = T^*S^*$.

Demostración. 1. Sean $u, v \in H$, arbitrarios. De la igualdad (1.40), se tiene que

$$\begin{aligned}((S+T)^*u, v) &= (u, (S+T)v) \\ &= (u, Sv + Tv) \\ &= (u, Sv) + (u, Tv) \\ &= (S^*u, v) + (T^*u, v) \\ &= (S^*u + T^*u, v) \\ &= ((S^* + T^*)u, v).\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(S+T)^* = S^* + T^*$.

2. Sean $u, v \in H$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, arbitrarios. De la igualdad (1.40), tenemos que

$$\begin{aligned}((\alpha T)^*u, v) &= (u, (\alpha T)v) \\ &= (u, \alpha Tv) \\ &= \overline{\alpha}(u, Tv) \\ &= \overline{\alpha}(T^*u, v) \\ &= ((\overline{\alpha}T^*)u, v).\end{aligned}$$

de donde se sigue que $(\alpha T)^* = \overline{\alpha}T^*$.

3. Sean $u, v \in H$, arbitrarios. De (1.40) y gracias a la simetría conjugada del producto interno se sigue que

$$\begin{aligned}((T^*)^*u, v) &= (u, T^*v) \\ &= \overline{(T^*v, u)} \\ &= \overline{(v, Tu)} \\ &= (Tu, v).\end{aligned}$$

Dado que u, v son arbitrarios, concluimos que $(T^*)^* = T$.

4. Sean $u, v \in H$, arbitrarios. Nuevamente de la igualdad (1.40), tenemos que

$$\begin{aligned}((ST)^*u, v) &= (u, (ST)v) \\ &= (u, S(Tv))\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (S^*u, Tv) \\
&= (T^*S^*u, v).
\end{aligned}
$$

Dado que u, v son arbitrarios se concluye que $(ST)^* = T^*S^*$.

□

Recordando la Proposición 1.15, se tiene el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 1.18. *Sean H un espacio de Hilbert y $T \in \mathcal{L}(H)$. Se tiene que*

$$H = \mathrm{Ker}(T) \oplus \overline{\mathrm{Im}(T^*)}.$$

Demostración. Tenemos las siguientes equivalencias:

$$
\begin{aligned}
y \in \mathrm{Ker}(T) &\iff (Ty, x) = 0 \quad \forall x \in H \\
&\iff (y, T^*x) = 0 \quad \forall x \in H \\
&\iff y \in (\mathrm{Im}(T^*))^{\perp}.
\end{aligned}
$$

Ahora, gracias a la continuidad del producto interno, se sigue que

$$y \in (\mathrm{Im}(T^*))^{\perp} \iff y \in (\overline{\mathrm{Im}(T^*)})^{\perp}.$$

Así $(\mathrm{Ker}T)^{\perp} = \overline{\mathrm{Im}(T^*)}$. Puesto que $\mathrm{Ker}(T)$ es un subespacio vectorial cerrado de H, se concluye lo deseado. □

DEFINICIÓN 1.7. *Sean H un espacio de Hilbert y $T \in \mathcal{L}(H)$. Decimos que T es autoadjunto cuando $T^* = T$. Mientras que cuando T es tal que $(Tx, Ty) = (x, y)$ para todo $x, y \in H$, decimos que T es unitario.*

PROPOSICIÓN 1.19. *Sean H un espacio de Hilbert y $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{L}(H)$ de operadores autoadjuntos tales que*

$$\lim_{n\to\infty} T_n = T.$$

Se tiene que $T \in \mathcal{L}(H)$ es un operador autoadjunto.

Demostración. Gracias a la desigualdad triangular, dado $n \in \mathbb{N}$ arbitrario, tenemos que

$$
\begin{aligned}
||T^* - T|| &\leq ||T^* - T_n|| + ||T_n - T|| \\
&= ||T^* - T_n^*|| + ||T_n - T||
\end{aligned}
$$

$$= ||(T - T_n)^*|| + ||T_n - T||$$
$$= ||T - T_n|| + ||T_n - T||$$
$$= 2||T - T_n||.$$

Así, tomando límite cuando n tiende a infinito, y dado que la norma es continua, se sigue que $||T^* - T|| = 0$, por lo cual $T^* = T$. □

PROPOSICIÓN 1.20. *Sean H un espacio de Hilbert y $T \in \mathcal{L}(H)$ un operador autoadjunto. Se tiene que*

$$||T|| = \sup_{||u||=1} |(Tu, u)|.$$

Demostración. Escribimos $M := \sup_{||u||=1} |(Tu, u)|$. Gracias a la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos que para todo $u \in H$

$$\begin{aligned} |(Tu, u)| &\leq ||Tu|| \, ||u|| \\ &\leq ||T|| \, ||u||^2 . \end{aligned}$$

En particular, para cualquier $u \in H$ tal que $||u|| = 1$, se tiene que

$$|(Tu, u)| \leq ||T||,$$

de donde se sigue que $||T||$ es una cota superior del conjunto $\{|(Tu, u)| \, : \, ||u|| = 1\}$, por tanto, concluimos que

$$M \leq ||T||.$$

Por otro lado, dado $u \in H$ no nulo, se tiene que $v = \dfrac{u}{||u||}$ es tal que $||v|| = 1$. Luego, por definición de supremo se sigue que

$$(Tv, v) = \left(T\frac{u}{||u||}, \frac{u}{||u||} \right) \leq M.$$

Así, gracias a la sesquilinealidad del producto interno, y puesto que $u \in H$ es arbitrario, obtenemos que

$$(Tu, u) \leq M||u||^2 \quad \forall u \in H. \tag{1.41}$$

Ahora, consideremos $u, v \in H$ tales que $||u|| = ||v|| = 1$. Notemos que por un lado se tiene que

$$\begin{aligned} (T(u + v), u + v) &= (Tu + Tv, u + v) \\ &= (Tu, u) + (Tu, v) + (Tv, u) + (Tv, v) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (Tu, u) + (Tu, v) + (v, Tu) + (Tv, v) \\
&= (Tu, u) + (Tu, v) + \overline{(Tu, v)} + (Tv, v) \\
&= (Tu, u) + 2\mathrm{Re}(Tu, v) + (Tv, v). \qquad (1.42)
\end{aligned}
$$

Por otro lado, notemos que

$$
\begin{aligned}
(T(u-v), u-v) &= (Tu - Tv, u - v) \\
&= (Tu, u) - (Tu, v) - (Tv, u) + (Tv, v) \\
&= (Tu, u) - (Tu, v) - (v, Tu) + (Tv, v) \\
&= (Tu, u) - (Tu, v) - \overline{(Tu, v)} + (Tv, v) \\
&= (Tu, u) - 2\mathrm{Re}(Tu, v) + (Tv, v). \qquad (1.43)
\end{aligned}
$$

Restando (1.42) y (1.43), obtenemos

$$
(T(u+v), u+v) - (T(u-v), u-v) = 4\mathrm{Re}(Tu, v).
$$

Luego, aplicando (1.41) y la Ley del Paralelogramo, se sigue que

$$
\begin{aligned}
4\mathrm{Re}(Tu, v) &\leq |(T(u+v), u+v)| + |(T(u-v), u-v)| \\
&\leq M(||u+v||^2 + ||u-v||^2) \\
&= 2M(||u||^2 + ||v||^2) \\
&\leq 4M.
\end{aligned}
$$

Por tanto, $\mathrm{Re}(Tu, v) \leq M$ para todo $u, v \in H$ tales que $||u|| = ||v|| = 1$. Recordemos que para cualquier $u, v \in H$ se tiene que

$$
(Tu, v) = |(Tu, v)|e^{i\theta},
$$

con $\theta \in \arg\{(Tu, v)\}$. Como $e^{i\theta}v$ tiene norma 1, se sigue que

$$
\begin{aligned}
|(Tu, v)| &= e^{-i\theta}(Tu, v) \\
&= (Tu, e^{i\theta}v) \\
&= \mathrm{Re}(Tu, e^{i\theta}v) \\
&\leq M.
\end{aligned}
$$

Ahora, por el Teorema de Hahn-Banach, Corolario 1.4 en [3], se tiene que

$$
||Tu|| = \sup_{||\varphi||=1} |\langle \varphi, Tu \rangle|.
$$

Finalmente, gracias al Teorema de Representación de Riesz$-$Fréchet se sigue que

$$||Tu|| = \sup_{||v||=1} |(Tu,v)|.$$

En consecuencia, se sigue que $||Tu|| \leq M$, y puesto que $u \in H$ es arbitrario de norma igual a 1, concluimos que $||T|| \leq M$. Así, se sigue que

$$||T|| = \sup_{||u||=1} |(Tu,u)|.$$

$\square$

DEFINICIÓN 1.8. *Sean H un espacio de Hilbert y $T \in \mathcal{L}(H)$. Decimos que T es definido no negativo si T es autoadjunto y $(Tu,u) \geq 0$ para todo $u \in H$. En este caso, escribimos $T \geq 0$.*

PROPOSICIÓN 1.21. *Sean H un espacio de Hilbert y $T \in \mathcal{L}(H)$ un operador definido no negativo. Se tiene la desigualdad generalizada de Schwarz*

$$|(Tu,v)|^2 \leq (Tu,u)(Tv,v) \quad \forall u,v \in H, \tag{1.44}$$

y además

$$||Tu||^2 \leq ||T||(Tu,u) \quad \forall u \in H. \tag{1.45}$$

Demostración. Sean $u,v \in H$, arbitrarios. Notemos que si $v = 0$, (1.44) se satisface. Supongamos que $||v|| \neq 0$. Sea $t \in \mathbb{K}$, arbitrario. Por las propiedades del producto interno, y como T es definido no negativo, se tiene que

$$\begin{aligned}
0 &\leq (T(u+tv), u+tv) \\
&= (Tu,u) + \bar{t}(u,Tv) + t(Tv,u) + |t|^2(Tv,v) \\
&= (Tu,u) + \overline{t(Tv,u)} + t(Tv,u) + |t|^2(Tv,v) \\
&= (Tu,u) + 2\mathrm{Re}(t(Tv,u)) + |t|^2(Tv,v) \\
&= (Tu,u) + 2\mathrm{Re}\left(t\overline{(Tu,v)}\right) + |t|^2(Tv,v).
\end{aligned} \tag{1.46}$$

En particular, tomando

$$t = -\frac{(Tu,v)}{(Tv,v)}$$

en (1.46), obtenemos que

$$0 \leq (Tu,u) + 2\mathrm{Re}\left(-\frac{(Tu,v)\overline{(Tu,v)}}{(Tv,v)}\right) + \frac{T(u,v)^2T(v,v)}{T(v,v)^2}$$

$$
\begin{aligned}
&= (Tu,u) - 2\frac{|(Tu,v)|^2}{(Tv,v)} + \frac{(Tu,v)^2}{(Tv,v)} \\
&= (Tu,u) - \frac{|(Tu,v)|^2}{(Tv,v)}.
\end{aligned}
$$

Operando esta última expresión, tenemos que

$$0 \leq (Tu,u)(Tv,v) - |(Tu,v)|^2.$$

Puesto que $u, v \in H$ son arbitrarios, se demuestra (1.44).

Finalmente, usando (1.44) y la desigualdad de Cauchy-Schwarz, obtenemos que

$$
\begin{aligned}
||Tu||^4 &= (Tu,Tu)^2 \\
&\leq (Tu,u)(T^2u,Tu) \\
&\leq (Tu,u)||T^2u||||Tu|| \\
&\leq (Tu,u)||T||||Tu||^2.
\end{aligned}
$$

Así, simplificando la última desigualdad se sigue que

$$||Tu||^2 \leq ||T||(Tu,u).$$

Como $u \in H$ es arbitrario se obtiene (1.45). □

PROPOSICIÓN 1.22. *Sean H un espacio de Hilbert y K un subespacio cerrado de H. Se tiene que el operador proyección $P_K \in \mathcal{L}(H,K)$ satisface las siguientes propiedades:*

- *P_K es idempotente, es decir, $P_K^2 = P_K$.*
- *P_K es autoadjunto.*

Demostración. Sean $u, v \in H$, arbitrarios. Como $P_K u \in K$, se sigue que

$$P_K(P_K u) = P_K^2 u = P_K u.$$

Como u es arbitrario, se tiene que P es idempotente. Ahora, recordemos que

$$u = P_K u + (u - P_K u) \quad \text{y} \quad v = P_K v + (v - P_K v).$$

Luego, de la Proposición 1.12, se tiene que

$$
\begin{aligned}
(P_K u, v) &= (P_K u, P_K v + (v - P_K v)) \\
&= (P_K u, P_K v) + (P_K u, v - P_K v)
\end{aligned}
$$

$$= (P_K u, P_K v).$$

Por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned}(u, P_K v) &= (P_K u + (u - P_K u), P_K v) \\ &= (P_K u, P_K v) + (u - P_K u, P_K v) \\ &= (P_K u, P_K v).\end{aligned}$$

Así, se concluye que

$$(P_K u, v) = (u, P_K v) \quad \forall\, u, v \in H,$$

lo que significa que P_K es autoadjunto. $\square$

Capítulo 2

Órbitas exactas

Alrededor del año 1965 Amemiya y Ando publican su artículo *Convergence of random products of contractions in Hilbert Space*. En aquel entonces, era difícil publicar artículos, tanto por el contexto histórico como cultural de la época. En [8], Frenkel menciona que habían 2 tipos de artículos que se publicaban: los artículos de investigación, de unas 15 o 20 páginas, con pruebas detalladas, y anuncios cortos, en los que solo se indicaban los resultados, sin pruebas o pruebas breves si era posible; en teoría, a un artículo tan corto se le debía suceder un artículo más detallado con todas las pruebas, pero esto, a menudo, no ocurría porque publicar un artículo más largo era extraordinariamente difícil.

El artículo de Amemiya y Ando [1] tiene un formato de anuncio, por ello, en este capítulo y en el que sigue, hacemos un estudio detallado de los resultados presentados en este trabajo. En este capítulo presentamos el concepto de órbita exacta de un operador, y estudiamos las condiciones bajo las cuales esta converge, fuerte o débilmente, en un espacio de Hilbert.

Consideremos un conjunto no vacío X. Un punto fijo de una función $T : X \to X$ es un elemento $x \in X$ para el cual se cumple que $Tx = x$. Al conjunto de todos los puntos fijos de T lo denotamos por $\mathrm{Fix}(T)$. La existencia de dichos puntos, depende de las características de la función y del conjunto con los cuales estemos trabajando.

Recordemos, por ejemplo, el Teorema de Punto Fijo de Banach, el cual nos asegura la existencia y unicidad de un punto fijo cuando X es un espacio métrico completo y T admite $k \in [0, 1)$ tal que

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y) \qquad \text{para todo } x, y \in X.$$

Un aspecto interesante acerca del Teorema de Punto Fijo de Banach, es que nos brinda un procedimiento constructivista para hallar este punto fijo, haciendo uso de lo que llamamos órbita exacta de un operador.

DEFINICIÓN 2.1 (Órbita exacta)**.** *Dados un espacio métrico* (X, d)*, un punto* $x \in X$ *y* $T : X \to X$ *un operador, llamamos a la sucesión* $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *tal que*

$$\begin{aligned} y_1 &:= x \\ y_{n+1} &:= T^n x \quad = Ty_n \quad \forall n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

una órbita exacta de T *con punto inicial* $x \in X$*, donde* T^n *representa la composición del operador* T *consigo mismo* n *veces.*

DEFINICIÓN 2.2 (Convergencia fuerte de una sucesión de operadores)**.** *Sean* H *un espacio de Hilbert,* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión en* $\mathcal{L}(H)$ *y* $T \in \mathcal{L}(H)$*. Decimos que la sucesión* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a* T *fuertemente cuando para todo* $f \in H$*, se tiene que*

$$\lim_{n\to\infty} T_n f = Tf.$$

En este caso, escribimos

$$\lim_{n\to\infty} T_n = T \quad \text{fuertemente.}$$

DEFINICIÓN 2.3 (Sucesión de Cauchy en el sentido fuerte)**.** *Sean* H *un espacio de Hilbert,* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión en* $\mathcal{L}(H)$*. Decimos que la sucesión* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es de Cauchy en el sentido fuerte cuando para todo* $f \in H$*, se tiene que la sucesión* $(T_n f)_{n\in\mathbb{N}}$ *es de Cauchy en* H*.*

Con respecto a la convergencia fuerte de una sucesión de operadores, se tiene el siguiente resultado, que nos será de utilidad más adelante.

LEMA 2.1. *Sean* H *un espacio de Hilbert y* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión en* $\mathcal{L}(H)$*. Si* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es de Cauchy en el sentido fuerte, entonces existe* $T \in \mathcal{L}(H)$ *tal que*

$$\lim_{n\to\infty} T_n = T \quad \textit{fuertemente.}$$

Demostración. Supongamos que la sucesión $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en el sentido fuerte. Consideremos $f \in H$, arbitrario. Por hipótesis sabemos que la sucesión $(T_n f)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en H, por lo tanto existe su límite. Puesto que $f \in H$ es arbitrario, el operador

$$\begin{aligned} T : \ & H \longrightarrow H \\ & f \longmapsto Tf = \lim_{n\to\infty} T_n f, \end{aligned}$$

está bien definido.

No es difícil ver que T es lineal. Además, puesto que la sucesión $(T_n f)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, es una sucesión acotada, es decir, para cada $f \in H$ existe $C_f > 0$ tal que

$$||T_n f|| \leq C_f \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Luego, gracias al Teorema de Banach–Steinhaus, se sigue que la sucesión $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada uniformemente. Así, existe $C > 0$ tal que

$$||T_n|| \leq C \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Esto nos permite concluir que $||Tf|| \leq Cf$ para cada $f \in H$, así $T \in \mathcal{L}(H)$. Además, por como definimos el operador T, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} T_n = T \quad \text{fuertemente.}$$

□

DEFINICIÓN 2.4 (Convergencia débil de una sucesión de operadores)**.** *Sean H un espacio de Hilbert, $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{L}(H)$ y $T \in \mathcal{L}(H)$. Decimos que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a T débilmente cuando para todo $f, g \in H$ se tiene que*

$$\lim_{n\to\infty} (T_n f, g) = (Tf, g).$$

En este caso, escribimos

$$\lim_{n\to\infty} T_n = T \quad \text{débilmente.}$$

En este contexto, es importante también recordar qué significa convergencia fuerte y débil en un espacio de Hilbert.

DEFINICIÓN 2.5. *Sean H un espacio de Hilbert, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en H y $f \in H$. Decimos que la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f fuertemente cuando para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que*

$$||f_n - f|| \leq \epsilon \quad \forall n \geq N.$$

En este caso, escribimos

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f \quad \textit{fuertemente.}$$

DEFINICIÓN 2.6. *Sean H un espacio de Hilbert, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en H y $f \in H$.*

Decimos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f débilmente cuando para todo $g \in H$ se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} (f_n, g) = (f, g).$$

En este caso, escribimos

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f \quad \textit{débilmente.}$$

OBSERVACIÓN 2.1. *No es difícil demostrar que una sucesión que converge fuertemente, también converge débilmente, en cualquiera de los contextos.*

Sean H un espacio de Hilbert y $T \in \mathcal{L}(H)$. Decimos que T es una contracción cuando $||T||_{\mathcal{L}(H)} \leq 1$. Gracias al Teorema Ergódico Medio sobre espacios de Hilbert (ver [7]), se conoce que el promedio

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} T^j f \right)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}},$$

converge fuertemente a la proyección ortogonal sobre $\mathrm{Fix}(T)$. Más aún,

$$H = \mathrm{Fix}(T) \oplus \overline{\mathrm{Im}(I-T)}, \tag{2.1}$$

es una descomposición ortogonal de H. Gracias a esta descomposición obtenemos el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 2.2. *Sean H un espacio de Hilbert y $T \in \mathcal{L}(H)$ una contracción. La sucesión $(T^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fuertemente si y solo si*

$$\lim_{n\to\infty} T^n f = 0 \quad \textit{para todo} \quad f \in \mathrm{Im}(I-T).$$

Demostración. $\Leftarrow$) Supongamos que

$$\lim_{n\to\infty} T^n f = 0 \quad \text{para todo} \;\; f \in Im(I-T). \tag{2.2}$$

Gracias al Lema 2.1, basta mostrar que $(T^n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en el sentido fuerte. Sea $f \in H$, arbitrario. Sean $n, m \in \mathbb{N}$ arbitrarios, tales que $n < m$. Notemos que si $g \in \mathrm{Fix}(T)$ entonces $T^n g = T^m g$. Luego, de la definición de norma uniforme y gracias a la descomposición ortogonal de H dada en (2.1), tenemos que

$$\begin{aligned} ||(T^n - T^m)f|| &\leq \sup_{g\in H} ||(T^n - T^m)g|| \\ &= \sup_{g\in\overline{Im(I-T)}} ||(T^n - T^m)g|| \end{aligned}$$

$$= \sup_{g \in Im(I-T)} ||(T^n - T^m)g||. \tag{2.3}$$

Por otro lado, debido a (2.2), sabemos que para cada $g \in Im(I-T)$, $(T^n g)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy. Sean $\epsilon > 0$ y $g \in Im(I-T)$, arbitrarios. Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$||(T^n - T^m)g|| \leq \epsilon \quad \forall\, n, m \geq N. \tag{2.4}$$

Como g es arbitrario, de (2.3) y (2.4) se sigue que

$$||(T^n - T^m)f|| \leq \epsilon \quad \forall n, m \geq N.$$

Puesto que $f \in H$ y $\epsilon > 0$ son arbitrarios, hemos demostrado que la sucesión $(T^n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en el sentido fuerte y por tanto converge fuertemente.

$\Rightarrow$) Supongamos que la sucesión $(T^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fuertemente. Sean $\epsilon > 0$ y $f \in \mathrm{Im}(I-T)$, arbitrarios. Notemos que existe $x \in H$ tal que

$$(I-T)x = f.$$

En caso de que $x = 0$, se tiene que $f = 0$ y por tanto $T^n f = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, así

$$\lim_{n\to\infty} T^n f = 0.$$

Supongamos que $x \neq 0$. Como $(T^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fuertemente, la sucesión $(T^n x)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en H, por tanto existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$||(T^{n+1} - T^n)x|| \leq \epsilon \quad \forall n \geq N. \tag{2.5}$$

Por otro lado, se tiene que

$$\begin{aligned} ||T^n f|| &= ||T^n(I-T)x|| \\ &= ||(T^{n+1}n - T^n)x||. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Como f es arbitrario, de (2.5) y (2.6) se sigue que

$$||T^n f||_H \leq \epsilon \qquad \forall f \in \mathrm{Im}(I-T), \forall\, n \geq N,$$

y por tanto $(T^n f)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0 para cada $f \in \mathrm{Im}(I-T)$. □

De la Proposición 2.2, se deriva el siguiente resultado concerniente a la convergencia débil o fuerte de la sucesión $(T^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

PROPOSICIÓN 2.3. *Sean H un espacio de Hilbert y $T \in \mathcal{L}(H)$ una contracción. Si*

$$\lim_{n\to\infty} T^n(I-T) = 0 \quad \textit{fuertemente,}$$

entonces $(T^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fuertemente. En cambio, si

$$\lim_{n\to\infty} T^n(I-T) = 0 \quad \textit{débilmente,}$$

entonces $(T^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge débilmente.

Demostración. Supongamos que

$$\lim_{n\to\infty} T^n(I-T) = 0 \quad \text{fuertemente.} \tag{2.7}$$

Mostremos que $(T^n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en el sentido fuerte. Sean $f \in H$ y $\epsilon > 0$, arbitrarios. De (2.7), sabemos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$||T^n(I-T)f|| \leq \epsilon \quad \forall n \geq N. \tag{2.8}$$

Por otro lado, tenemos que

$$||(T^{n+1} - T^n)f|| = ||T^n(I-T)f|| \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.9}$$

Así, gracias a (2.8) y (2.9), y puesto que f es arbitrario, concluimos que $(T^n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en el sentido fuerte, y gracias al Lema 2.1, se sigue que $(T^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fuertemente.

Ahora, supongamos que

$$\lim_{n\to\infty} T^n(I-T) = 0 \quad \text{débilmente.} \tag{2.10}$$

Sean $f, g \in H$ arbitrarios. Mostremos que $((T^n f, g))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{K}$. De (2.10) sabemos que, dado cualquier $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|(T^n(I-T)f, g)| \leq \epsilon \quad \forall n \geq N. \tag{2.11}$$

Por otro lado, tenemos que

$$|((T^{n+1} - T^n)f, g)| = |(T^n(I-T)f, g)|.$$

Esta última igualdad y (2.11) nos permiten concluir que $((T^n f, g))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en el espacio completo $\mathbb{K}$, y por lo tanto converge. Dado que $f, g \in H$ son arbitrarios se sigue que $(T^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge débilmente. □

Gracias a la Proposición 2.3, para tener la convergencia de la sucesión $(T^n)_{n\in\mathbb{N}}$, nos basta con dar condiciones bajo las cuales la sucesión $(T^n(I-T))_{n\in\mathbb{N}}$ converja a 0, fuerte o débilmente, según se desee. El siguiente resultado nos indica cuáles son estas condiciones.

PROPOSICIÓN 2.4. *Sean H un espacio de Hilbert y $T \in \mathcal{L}(H)$ una contracción. Se tiene que $(T^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fuertemente cuando se cumple la condición*

$$(S) \qquad ||f_n|| \leq 1 \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \lim_{n\to\infty} ||Tf_n|| = 1 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} (I-T)f_n = 0 \quad \textit{fuertemente.}$$

Así mismo, $(T^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge débilmente cuando se satisface

$$(W) \qquad ||f_n|| \leq 1 \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \lim_{n\to\infty} ||Tf_n|| = 1 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} (I-T)f_n = 0 \quad \textit{débilmente.}$$

Demostración. Supongamos que T satisface (S). Gracias a la Proposición 2.3 basta con mostrar que

$$\lim_{n\to\infty} T^n(I-T) = 0 \quad \text{fuertemente.}$$

Sea $f \in H$, arbitrario. Como T es una contracción, para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$\begin{aligned} ||T^{n+1}f||_H &= ||T(T^n)f)||_H \\ &\leq ||T||_{\mathcal{L}(H)}||T^n f||_H \\ &\leq ||T^n f||_H. \end{aligned}$$

Así, $(||T^n f||)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión monótona decreciente, y acotada inferiormente por 0. Puesto que toda sucesión de números reales acotada y monótona es convergente, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} ||T^n f|| = \alpha.$$

Notemos que, por la no negatividad de la norma, se tiene que

$$||T^n f|| \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

por lo cual α es o cero o positivo.

En caso de que $\alpha = 0$, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} ||T^n f|| = 0. \tag{2.12}$$

Luego, dado que la sucesión $(\|T^n f\|)_{n\in N}$ es decreciente, se sigue que

$$||T^n(I-T)f|| = ||(T^{n+1} - T^n)f||$$

$$\begin{aligned}
&\leq ||T^{n+1}f|| + ||T^n f|| \\
&\leq ||T^n f|| + ||T^n f|| \\
&= 2||T^n f|| \quad \forall n \in \mathbb{N}. \qquad (2.13)
\end{aligned}$$

Tomando límite cuando n tiende a infinito en (2.13), y gracias a (2.12), tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} ||T^n(I-T)f|| = 0.$$

Así, como f es arbitrario, se sigue que la sucesión $(T^n(I-T))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0 fuertemente.

En cambio, cuando $\alpha > 0$, puesto que $(||T^n f||)_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona decreciente, tenemos que $||T^n f|| \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Consideremos

$$g_n := \frac{T^n f}{||T^n f||} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{2.14}$$

Notemos que

$$||g_n|| = 1 \quad \text{y además} \quad ||Tg_n|| = \frac{||T^{n+1}f||}{||T^n f||}. \tag{2.15}$$

Mostremos ahora que la sucesión $(||Tg_n||)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 1. Sea $\epsilon > 0$, arbitrario. Por un lado, dado que $(||T^n f||)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión monótona decreciente con límite α, se tiene que

$$||T^n f|| \geq \alpha \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

de donde se sigue que

$$\frac{1}{||T^n f||} \leq \frac{1}{\alpha} = c \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.16}$$

Por otro lado, por ser convergente, $(||T^n f||)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy. Así, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\Big|\, ||T^{n+1}f|| - ||T^n f|| \,\Big| \leq \frac{\epsilon}{c} \quad \forall\, n \geq N. \tag{2.17}$$

Luego, gracias a (2.16) y (2.17) se sigue que

$$|\,||Tg_n|| - 1| = \frac{|\,||T^{n+1}f|| - ||T^n f||\,|}{||T^n f||} \leq \frac{\epsilon}{c}c = \epsilon \quad \forall n \geq N,$$

por lo tanto, como ϵ es arbitrario, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} ||Tg_n|| = 1. \tag{2.18}$$

Finalmente, dado que T satisface (S), de (2.15) y (2.18) concluimos que

$$\lim_{n\to\infty} (I-T)g_n = 0 \quad \text{fuertemente.} \tag{2.19}$$

Además, notemos que

$$\begin{aligned} T^n(I-T)f &= ||T^n f||(I-T)\frac{T^n f}{||T^n f||} \\ &= ||T^n f||(I-T)g_n, \end{aligned} \tag{2.20}$$

en donde, al tomar el límite, gracias a (2.19) y el hecho de que $f \in H$ es arbitrario, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} T^n(I-T) = 0 \quad \text{fuertemente.}$$

Ahora, supongamos que T satisface (W). Nuevamente, gracias a la Proposición 2.3, basta mostrar que

$$\lim_{n\to\infty} T^n(I-T) = 0 \quad \text{débilmente.}$$

Sea $f \in H$, arbitrario. Recordemos que $(||T^n f||)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión monótona decreciente y, además, existe $\alpha \geq 0$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} ||T^n f|| = \alpha.$$

En caso de que $\alpha = 0$, demostramos que la sucesión $(T^n(I-T))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0 fuertemente, y por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} T^n(I-T) = 0 \quad \text{débilmente.}$$

Ahora, supongamos que $\alpha > 0$. Considerando g_n como en (2.14), sabemos que

$$||g_n|| = 1 \ \ \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{y además } \lim_{n\to\infty} ||Tg_n|| = 1.$$

Luego, dado que T satisface (W), se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} (I-T)g_n = 0 \quad \text{débilmente.}$$

Así, tomando el límite cuando n tiende a infinito en (2.20), concluimos que

$$\lim_{n\to\infty} T^n(I-T) = 0 \quad \text{débilmente.}$$

□

Proposición 2.5. *Sean H un espacio de Hilbert y T una contracción que satisface la condición (S). Se tiene que $(T^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fuertemente al operador proyección*

P_K*, donde* $K := \text{Ker}(I - T)$.

Demostración. De la Proposición 2.4 sabemos que $(T^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fuertemente, es decir, existe $P \in \mathcal{L}(H)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} T^n = P \quad \text{fuertemente.} \tag{2.21}$$

Resta probar que P es el operador proyección sobre K. Para ello, gracias a la Proposición 1.12 basta con probar que para cada $f \in H$ se tiene que

$$(f - Pf, g) = 0 \quad \forall g \in K.$$

Sean $f \in H$ y $g \in K$, arbitrarios. De la descomposición dada en (2.1), se tiene que existen $u \in \text{Ker}(I - T)$ y $v \in \overline{\text{Im}(I - T)}$ tales que $f = u + v$. Además, existe $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sucesión de puntos en $\text{Im}(I - T)$, tal que

$$\lim_{n\to\infty} v_n = v.$$

Por un lado, tenemos que $Pu = u$. En efecto, dado que $u \in \text{Ker}(I - T)$ se tiene que $u = Tu$, luego de (2.21) se sigue que

$$\begin{aligned} Pu &= \lim_{n\to\infty} T^n u \\ &= \lim_{n\to\infty} u \\ &= u. \end{aligned}$$

Por otro lado, la Proposición 2.2 nos dice que

$$\lim_{n\to\infty} T^n f = 0 \quad \forall f \in \text{Im}(I - T),$$

de donde, gracias a (2.21) y a la unicidad del límite, concluimos que $Pf = 0$ para todo $f \in \text{Im}(I - T)$, en particular se tiene que $Pv_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Luego, de la continuidad del producto interno tenemos que

$$\begin{aligned} (f - Pf, g) &= (u + v - Pu - Pv, g) \\ &= (u + \lim_{n\to\infty} v_n - u - \lim_{n\to\infty} Pv_n, g) \\ &= (\lim_{n\to\infty} v_n, g) \\ &= \lim_{n\to\infty} (v_n, g) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Puesto que f y g son arbitrarios, se sigue que $P = P_K$. $\square$

Podemos preguntarnos en este punto, ¿existen operadores que satisfagan las condiciones (S) o (W)? La respuesta es sí, y un ejemplo sencillo lo da el operador identidad. Existen más operadores que satisfacen (S), veamos un ejemplo a continuación.

Ejemplo 2.1. Sean H un espacio de Hilbert y $T \in \mathcal{L}(H)$ una contracción definida no negativa. Mostremos que T satisface (S). Para tal efecto consideremos $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en H tal que

$$||f_n|| \leq 1 \;\; \forall n \in \mathbb{N} \;\; \text{y} \;\; \lim_{n\to\infty} ||Tf_n|| = 1. \tag{2.22}$$

Puesto que T es una contracción definida no negativa, gracias a la desigualdad generalizada de Schwarz (ver Proposición 1.21), tenemos que

$$\begin{aligned} ||Tf_n||^2 &\leq ||T||(Tf_n, f_n) \\ &\leq (Tf_n, f_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Tomando en cuenta esta última desigualdad, obtenemos

$$\begin{aligned} ||(I-T)f_n||^2 &= ((I-T)f_n, (I-T)f_n) \\ &= ||f_n||^2 - 2(Tf_n, f_n) + ||Tf_n||^2 \\ &\leq ||f_n||^2 - 2||Tf_n||^2 + ||Tf_n||^2 \\ &= ||f_n||^2 - ||Tf_n||^2 \\ &\leq 1 - ||Tf_n||^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Tomando límite cuando n tiende a infinito en la última desigualdad, de (2.22) y el Teorema de Estricción se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} (I-T)f_n = 0 \quad \text{fuertemente.}$$

Por tanto, T satisface (S).

Ahora surge una nueva pregunta, ¿si dos operadores satisfacen (S) o (W), su composición también lo hará? La respuesta es afirmativa, como se demuestra en el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 2.6. *Sean H un espacio de Hilbert, $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(H)$ dos contracciones, cada una de las cuales satisface (S) o (W). Se tiene que su composición T_2T_1 también satisface (S) o (W), respectivamente.*

Demostración. Supongamos que T_1 y T_2 son contracciones que satisfacen (S). Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en H tal que

$$||f_n|| \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{2.23}$$

y además

$$\lim_{n\to\infty} ||T_2T_1f_n|| = 1. \tag{2.24}$$

Puesto que T_1 es una contracción y gracias a (2.23), tenemos que

$$||T_1f_n|| \leq ||T_1||||f_n|| \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.25}$$

Luego, como T_2 es una contracción se sigue que

$$||T_2T_1f_n|| \leq ||T_1f_n|| \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por el Teorema de Estricción aplicado a esta última desigualdad y (2.24), se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} ||T_1f_n|| = 1. \tag{2.26}$$

Ahora, puesto que T_1 satisface (S) y gracias a (2.23) y (2.26), se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} (I - T_1)f_n = 0 \quad \text{fuertemente.} \tag{2.27}$$

De igual manera, como T_2 satisface (S) y gracias a (2.25) y (2.24), tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} (I - T_2)T_1f_n = 0 \quad \text{fuertemente.} \tag{2.28}$$

Además, notemos que

$$\begin{aligned}(I - T_2T_1)f_n &= (I - T_1 + T_1 - T_2T_1)f_n \\ &= (I - T_1)f_n + (I - T_2)T_1f_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.\end{aligned} \tag{2.29}$$

Tomando el límite cuando n tiende a infinito en esta última igualdad, de (2.27) y (2.28) concluimos que

$$\lim_{n\to\infty} (I - T_2T_1)f_n = 0 \quad \text{fuertemente.}$$

Así, T_2T_1 satisface (S).

Ahora, supongamos que T_1 y T_2 satisfacen (W). Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en H tal que satisface (2.23) y (2.24).

Por lo hecho previamente, sabemos que

$$||T_1 f_n|| \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{y} \lim_{n\to\infty} ||T_1 f_n|| = 1.$$

Con lo cual, dado que T_1 y T_2 satisfacen (W) tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} (I - T_1) f_n = 0 \quad \text{débilmente,} \tag{2.30}$$

y además

$$\lim_{n\to\infty} (I - T_2) T_1 f_n = 0 \quad \text{débilmente.} \tag{2.31}$$

Finalmente, tomando el límite cuando n tiende a infinito en (2.29) y gracias a (2.30) y (2.31) concluimos que

$$\lim_{n\to\infty} (I - T_2 T_1) f_n = 0 \quad \text{débilmente.}$$

Por lo tanto, $T_2 T_1$ satisface (W).

$\square$

LEMA 2.7. *Sean H un espacio de Hilbert y $T : H \to H$ una contracción. Si T es definido no negativo, y además*

$$(Tf, f) = 0,$$

entonces se tiene que $Tf = 0$.

Demostración. Sea $f \in H$ tal que $(Tf, f) = 0$. Como T es definido no negativo, tenemos la desigualdad

$$||Tf||^2 \leq ||T||(Tf, f).$$

Por lo tanto, $||Tf|| = 0$ de donde se sigue que $Tf = 0$. $\square$

Ahora, vemos una forma más simple de la condición (W).

PROPOSICIÓN 2.8. *Sean H un espacio de Hilbert y $T \in \mathcal{L}(H)$ una contracción. Se tiene que T satisface (W) si y sólo si T satisface la condición*

$$(W') \qquad ||Tf|| = ||f|| \Longrightarrow Tf = f.$$

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que T satisface (W). Sea $f \in H$ tal que

$$||Tf|| = ||f||. \tag{2.32}$$

Si $f = 0$, el resultado se cumple trivialmente. Supongamos que $f \neq 0$. Consideremos

$$g_n := \frac{f}{||f||} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Así, se tiene que

$$||g_n|| \leq 1 \;\; \text{y} \;\; ||Tg_n|| = \frac{||Tf||}{||f||} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como T satisface (W), tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} (I - T)g_n = 0 \quad \text{débilmente,}$$

de donde, dado que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión constante, se sigue que

$$(I - T)g_n = 0 \quad \forall n \;\in \mathbb{N},$$

es decir,

$$\frac{f}{||f||} - \frac{Tf}{||f||} = 0,$$

con lo cual concluimos que $Tf = f$, y por lo tanto T satisface (W').

$\Leftarrow$) Supongamos que T satisface (W'). Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en H tal que

$$||f_n|| \leq 1 \;\; \forall n \in \mathbb{N} \;\; \text{y} \;\; \lim_{n\to\infty} ||Tf_n|| = 1. \tag{2.33}$$

Notemos que por un lado, para cada $f \in H$ se tiene que

$$\begin{aligned} ||f||^2 - ||Tf||^2 &= (f, f) - (Tf, Tf) \\ &= (f, f) - (T^*Tf, f) \\ &= ((I - T^*T)f, f). \end{aligned} \tag{2.34}$$

Por otro lado $I - T^*T$ es un operador definido no negativo. En efecto, vemos que

- $I - T^*T$ es autoadjunto, pues

$$(I - T^*T)^* = I^* - T^*(T^*)^* = I - T^*T.$$

- Como T es una contracción,

$$||Tf|| \leq ||T||||f|| \leq ||f||,$$

de donde se tiene que

$$||f||^2 - ||Tf||^2 = ((I - T^*T)f, f) \geq 0.$$

Con estas dos observaciones, notemos que:

- Si $(I - T^*T)f = 0$, de (2.34) se sigue que $||Tf|| = ||f||$.
- Si $||Tf|| = ||f||$, de (2.34) se sigue que

$$((I - T^*T)f, f) = 0. \tag{2.35}$$

  Ahora, como $(I - T^*T)$ es un operador no negativo, del Lema 2.7 se concluye que $(I - T^*T)f = 0$.

Así, hemos demostrado la equivalencia

$$||Tf|| = ||f|| \Longleftrightarrow (I - T^*T)f = 0. \tag{2.36}$$

Por lo tanto, si T satisface (W') se tiene que

$$\mathrm{Ker}(I - T^*T) \subseteq \mathrm{Ker}(I - T). \tag{2.37}$$

En efecto, sea $g \in \mathrm{Ker}(I - T^*T)$, arbitrario. Entonces

$$(I - T^*T)g = 0.$$

Luego, gracias a (2.36), se sigue que $||Tg|| = ||g||$ y como T satisface (W'), tenemos que $Tg = g$. Así,

$$g \in ker(I - T).$$

Ahora, de la Proposición 1.18 tenemos que

$$H = \mathrm{Ker}(I - T^*T) \oplus \overline{\mathrm{Im}(I - T^*T)},$$

y también,

$$H = \mathrm{Ker}(I - T) \oplus \overline{\mathrm{Im}(I - T^*)}.$$

Tomando complementos ortogonales, y gracias a (2.37) se sigue que

$$\overline{\mathrm{Im}(I - T^*)} \subseteq \overline{\mathrm{Im}(I - T^*T)}. \tag{2.38}$$

Además, por definición de clausura de un conjunto, de (2.38) se tiene que

$$\mathrm{Im}(I - T^*) \subseteq \overline{\mathrm{Im}(I - T^*T)}. \tag{2.39}$$

Ahora, por un lado tenemos que

$$\begin{aligned} ||Tf_n||^2 &= (Tf_n, Tf_n) \\ &= (T^*Tf_n, f_n) \\ &\leq ||T^*Tf_n||||f_n|| \\ &\leq ||T^*Tf_n|| \\ &\leq 1 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

En resumen, tenemos la desigualdad

$$||Tf_n||^2 \leq ||T^*Tf_n|| \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Del Teorema de Estricción, junto a (2.33), nos permite concluir que

$$\lim_{n\to\infty} ||T^*Tf_n|| = 1.$$

Como T^*T es definido no negativo, sabemos del Ejemplo 2.1 que T^*T satisface (S) y por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} (I - T^*T)f_n = 0. \tag{2.40}$$

Mostremos que

$$\lim_{n\to\infty} (f_n, h) = 0 \quad \forall h \in \overline{\mathrm{Im}(I - T^*T)}.$$

Sea $h \in \overline{Im(I - T^*T)}$, arbitrario. Existe $(h_m)_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathrm{Im}(I - T^*T)$ tal que

$$\lim_{m\to\infty} h_m = h. \tag{2.41}$$

Luego, gracias a la continuidad del producto interno tenemos que

$$\begin{aligned} (f_n, h) &= (f_n, \lim_{m\to\infty} (I - T^*T)h_m) \\ &= \lim_{m\to\infty} (f_n, (I - T^*T)h_m) \\ &= \lim_{m\to\infty} ((I - T^*T)f_n, h_m) \\ &= ((I - T^*T)f_n, h) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

de donde, tomando límite cuando n tiende a infinito, y considerando (2.40), se sigue que

$$\lim_{n\to\infty}(f_n, h) = 0.$$

Finalmente, como h es arbitrario, concluimos que

$$\lim_{n\to\infty}(f_n, h) = 0 \quad \forall h \in \overline{\mathrm{Im}(I - T^*T)}. \tag{2.42}$$

Sea $g \in H$, arbitrario. Se tiene que

$$((I - T)f_n, g) = (f_n, (I - T^*)g) \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.43}$$

Como

$$(I - T^*)g \in \mathrm{Im}(I - T^*),$$

de (2.39) y (2.42), se sigue que

$$\lim_{n\to\infty}(f_n, (I - T^*)g) = 0,$$

con lo cual, gracias a (2.43), y dado que g es arbitrario, tenemos

$$\lim_{n\to\infty}(I - T)f_n = 0 \quad \text{débilmente}.$$

Así, T satisface (W). □

Referimos al lector a [11] , para la demostración del siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 2.9. *Sean H un espacio de Hilbert y $T : H \to H$ una contracción. Existen un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ tal que contiene a H como subespacio y un operador unitario U de $\mathcal{H}$, tales que*

$$T^n = PU^n, \quad (T^*)^n = PU^{-n} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0,$$

donde $P : \mathcal{H} \to H$ denota el operador de proyección ortogonal sobre el subespacio H.

En el contexto de la Proposición 2.9, al operador unitario $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ le llamamos *dilatación unitaria* de la contracción T.

DEFINICIÓN 2.7. *Sean H un espacio de Hilbert y $T \in \mathcal{L}(H)$ una contracción. Decimos que T es completamente no unitario cuando*

$$||T^n f|| = ||T^{*n} f|| = ||f|| \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_0 \quad \Rightarrow \quad f = 0.$$

DEFINICIÓN 2.8. *Sean H un espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H)$ una contracción y $A \subseteq H$*

un subespacio vectorial cerrado de H. Decimos que T es unitario sobre A, cuando existe $U \in \mathcal{L}(H)$ un operador unitario tal que

$$Tf = Uf \quad y \quad T^*f = U^*f \quad \forall f \in A.$$

Diremos que U es la parte unitaria de T.

PROPOSICIÓN 2.10. *Sean H un espacio de Hilbert y $T : H \to H$ una contracción. Se tiene que $H = H^u \oplus H^0$, donde*

$$H^u := \{h \in H : ||T^n h|| = ||T^{*n} h|| = ||h|| \quad \forall n \in \mathbb{N}\},$$

y

$$H^0 := (H^u)^\perp.$$

Además, T es unitario sobre H^u y es completamente no unitario sobre H^0. Esta descomposición es única.

Demostración. Sea U la dilatación unitaria de T, la cual existe gracias a la Proposición 2.9. Sea $h \in H^u$, arbitrario. Como U es la dilatación unitaria de T, tenemos que

$$T^n h = PU^n h \quad \text{y} \quad T^{*n} h = PU^{-n} h \quad \forall n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.44}$$

donde $U^{-n} = (U^n)^{-1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, $U^0 = I$ y P es el operador de proyección definido en la Proposición 2.9. Además, dado que U es un operador unitario, se tiene que

$$||U^n h|| = ||U^{-n} h|| = ||h|| \quad \forall n \in \mathbb{N}_0. \tag{2.45}$$

Ahora, puesto que $h \in H^u$, de (2.44) y dado que P es un operador proyección, para cada $n \in \mathbb{N}_0$, tenemos que

$$\begin{aligned} 0 \; = ||h||^2 - ||T^n h||^2 \; &= ||h||^2 - (T^n h, T^n h) \\ &= ||h||^2 - (PU^n h, PU^n h) \\ &= ||h||^2 - (P^2 U^n h, U^n h) \\ &= ||h||^2 - (PU^n h, U^n h). \end{aligned}$$

Así, de (2.45) se sigue que

$$||h||^2 = (PU^n h, U^n h) = (U^n h, U^n h),$$

de donde

$$((I - P)U^n h, U^n h) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0. \tag{2.46}$$

Notemos que el operador $(I - P)$ es definido no negativo. En efecto,

$$(I - P)^* = I^* - P^* = I - P,$$

es decir, $(I - P)$ es autoadjunto. Además, dado $f \in \mathcal{H}$ cualquiera, tenemos que

$$\begin{aligned} ||f||^2 - ||Pf||^2 &= (f, f) - (Pf, Pf) \\ &= (f, f) - (Pf, f) \\ &= ((I - P)f, f). \end{aligned}$$

Luego, como P es una proyección, se tiene que $||Pf|| \leq ||f||$ y por tanto

$$||f||^2 - ||Pf||^2 \geq 0.$$

Así, $((I - P)f, f) \geq 0$.

Gracias al Lema 2.7 y (2.46), se sigue que $(I - P)U^n h = 0$, es decir, $PU^n h = U^n h$. Dado que $h \in H^u$ es arbitrario, concluimos que

$$U^n h \in H \quad \forall\, h \in H^u \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}_0. \tag{2.47}$$

De manera análoga, cambiando el rol de T por T^*, obtenemos que

$$U^{-n} h \in H \quad \forall\, h \in H^u \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}_0. \tag{2.48}$$

Unificando (2.47) y (2.48) se tiene la igualdad

$$H^u = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} U^{-n} H.$$

Puesto que en H^u, U coincide con T y U^{-1} coincide con T^*, se tiene que T es unitario sobre H^u. Por otro lado en el subespacio complementario H^0, por como está definido el conjunto H^u, T es completamente no unitario.

Finalmente, probemos la unicidad de la descomposición. Supongamos que existe H' subespacio de H tal que $H = H' \oplus (H')^\perp$, y que además T es unitario sobre H' y completamente no unitario sobre su complemento ortogonal.

Como T es unitario sobre H' se tiene que $||T^n h|| = ||T^{*n} h|| = ||h||$ para cualquier $h \in H'$ y $n \in \mathbb{N}_0$. Por tanto, $H' \subseteq H^u$. Si existiera $h \in H^u$ no nulo, ortogonal a H', h deberá pertenecer a H^u y a $(H')^\perp$ a la vez, esto es imposible puesto que en $(H')^\perp$, T es completamente no unitario. Así $H' = H^u$ y $(H')^\perp = H^0$, es decir, la descomposición es única. $\square$

Recordemos que $\mathbb{Z}^*$ denota al conjunto de los números enteros no nulos.

LEMA 2.11. *Sean H un espacio de Hilbert y $T \in \mathcal{L}(H)$. Se tiene que*

$$H = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}^*} \mathrm{Ker} A_n \bigoplus \overline{\mathrm{span} \bigcup_{n \in \mathbb{Z}^*} \mathrm{Im} A_n},$$

donde

$$A_n := I - T^{*n} T^n \quad y \quad A_{-n} := I - T^n T^{*n} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.49}$$

Demostración. Escribimos

$$E = \overline{\mathrm{span} \bigcup_{n \in \mathbb{Z}^*} \mathrm{Im} A_n}.$$

Se tiene que $E^\perp = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}^*} \mathrm{Im} A_n \right)^\perp$. En efecto, gracias a la sesquilinealidad del producto interno, y a la continuidad del mismo, tenemos las siguientes equivalencias:

$$\begin{aligned} x \in \left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}^*} \mathrm{Im} A_n \right)^\perp & \iff (x, y) = 0 \quad \forall y \in \mathrm{span} \bigcup_{n \in \mathbb{Z}^*} \mathrm{Im} A_n \\ & \iff (x, y) = 0 \quad \forall y \in E. \end{aligned}$$

Por otro lado, sabemos que $E = \left(E^\perp\right)^\perp$, de donde se sigue que

$$E = \left(\left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}^*} \mathrm{Im} A_n \right)^\perp \right)^\perp. \tag{2.50}$$

Ahora, probemos que

$$\left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}^*} \mathrm{Im} A_n \right)^\perp = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}^*} (\mathrm{Im} A_n)^\perp. \tag{2.51}$$

$\subseteq$) Sean $x \in \left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}^*} \mathrm{Im} A_n \right)^\perp$, $n \in \mathbb{Z}^*$ e $y \in \mathrm{Im} A_n$, arbitrarios. Por definición se tiene que

$$(x, z) = 0 \quad \forall z \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}^*} \mathrm{Im} A_n.$$

En particular, se cumple para y, es decir,

$$(x, y) = 0.$$

Como $n \in \mathbb{Z}^*$ e $y \in \text{Im}A_n$ son arbitrarios, tenemos que

$$(x, y) = 0 \quad \forall y \in \text{Im}A_n \ , \forall n \in \mathbb{Z}^*,$$

en otras palabras

$$(x, y) = 0 \quad \forall y \in \bigcap_{n \in \mathbb{Z}^*} \text{Im}A_n,$$

de donde concluimos que

$$x \in \bigcap_{n \in \mathbb{Z}^*} (\text{Im}A_n)^{\perp}.$$

Como x es arbitrario, hemos demostrado que

$$\left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}^*} \text{Im}A_n \right)^{\perp} \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{Z}^*} (\text{Im}A_n)^{\perp}. \tag{2.52}$$

$\supseteq$) Sean $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{Z}^*} (\text{Im}A_n)^{\perp}$ e $y \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}^*} \text{Im}A_n$, arbitrarios. Por definición, tenemos que

$$(x, z) = 0 \quad \forall z \in \text{Im}A_n \ , \forall n \in \mathbb{Z}^*.$$

Por otro lado, sabemos que existe $N \in \mathbb{Z}^*$ tal que $y \in \text{Im}A_N$, por lo cual $(x, y) = 0$. Como y es arbitrario, se concluye que

$$x \in \left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}^*} (\text{Im}A_n) \right)^{\perp}.$$

Puesto que x es arbitrario, hemos probado que

$$\bigcap_{n \in \mathbb{Z}^*} (\text{Im}A_n)^{\perp} \subseteq \left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}^*} \text{Im}A_n \right)^{\perp}. \tag{2.53}$$

Al combinar (2.52) y (2.53), se ha demostrado que la igualdad (2.51) es cierta.

Ahora, de la Proposición 1.18 y la igualdad (2.51), se tiene que

$$\begin{aligned} \left(\left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}^*} \text{Im}A_n \right)^{\perp} \right)^{\perp} &= \left(\bigcap_{n \in \mathbb{Z}^*} (\text{Im}A_n)^{\perp} \right)^{\perp} \\ &= \left(\bigcap_{n \in \mathbb{Z}^*} KerA_n^* \right)^{\perp}. \end{aligned} \tag{2.54}$$

Además, los operadores A_n y A_{-n} son autoadjuntos. En efecto, $I - T^{*n}T^n$ es autoadjunto pues

$$(I - T^{*n}T^n)^* = I^* - (T^n)^*(T^{*n})^* = I - T^{*n}T^n.$$

Así mismo, $I - T^nT^{*n}$ es autoadjunto pues

$$(I - T^nT^{*n})^* = I^* - (T^{*n})^*(T^n)^* = I - T^nT^{*n}.$$

Por tanto $A_n^* = A_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}^*$, con lo cual, de (2.50) y (2.54), concluimos que

$$\overline{\operatorname{span} \bigcup_{n\in\mathbb{Z}^*} \operatorname{Im} A_n} = \left(\bigcap_{n\in\mathbb{Z}^*} \operatorname{Ker} A_n \right)^{\perp}.$$

Finalmente, dado que $\overline{\operatorname{span} \bigcup_{n\in\mathbb{Z}^*} \operatorname{Im} A_n}$ es un subespacio vectorial cerrado, gracias a la Proposición 1.15, concluimos lo deseado. □

Tomando en consideración estos resultados, se tiene otro enfoque, similar a la condición (W'), para la convergencia débil de las órbitas exactas de una sucesión.

PROPOSICIÓN 2.12. *Sean H un espacio de Hilbert y $T : H \to H$ una contracción. Supongamos que $||T^jf|| = ||T^{*j}f|| = ||f||$ para todo $j \in \mathbb{N}$, implica que $Tf = f$. Se tiene que la sucesión $(T^j)_{j\in\mathbb{N}}$ converge débilmente.*

Demostración. Notemos que la parte unitaria de T, en la descomposición mencionada en la Proposición 2.10, actúa como el operador identidad, por lo tanto sobre H^u la sucesión $(T^j)_{j\in\mathbb{N}}$ converge débilmente. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que T es completamente no unitario. Sean $f \in H$ y $j \in \mathbb{N}$, arbitrarios. Por un lado, se tiene que

$$\begin{aligned} ||f||^2 - ||T^jf||^2 &= (f,f) - (T^jf, T^jf) \\ &= (f,f) - (T^{*j}T^jf, f) \\ &= ((I - T^{*j}T^j)f, f). \end{aligned} \tag{2.55}$$

De manera similar, observemos que

$$\begin{aligned} ||f||^2 - ||T^{*j}f||^2 &= (f,f) - (T^{*j}f, T^{*j}f) \\ &= (f,f) - (T^jT^{*j}f, f) \\ &= ((I - T^jT^{*j})f, f). \end{aligned} \tag{2.56}$$

Por otro lado $I - T^{*j}T^j$ y $I - T^jT^{*j}$ son operadores definidos no negativos, en efecto:

- $I - T^{*j}T^j$ y $I - T^jT^{*j}$ son autoadjunto como se vio en la demostración del Lema

(2.11).

- Como T es una contracción,

$$||T^j f|| \leq ||T^j||||f|| \leq ||f||, \quad \text{y} \quad ||T^{*j} f|| \leq ||T^{*j}||||f|| \leq ||f||,$$

de donde se tiene que

$$||f||^2 - ||T^j f||^2 = ((I - T^{*j}T^j)f, f) \geq 0,$$

y además

$$||f||^2 - ||T^{*j} f||^2 = ((I - T^j T^{*j})f, f) \geq 0.$$

Con estas observaciones, notemos que

- Cuando $(I - T^{*j}T^j)f = 0$, de (2.55) se sigue que $||T^j f|| = ||f||$.
- Cuando $(I - T^j T^{*j})f = 0$, de (2.56) se sigue que $||T^{*j} f|| = ||f||$.
- Cuando $||T^j f|| = ||f||$, de (2.55) se sigue que

$$((I - T^{*j}T^j)f, f) = 0. \tag{2.57}$$

Dado que $I - T^{*j}T^j$ es un operador definido no negativo, del Lema 2.7 tenemos que $(I - T^{*j}T^j)f = 0$.

- Cuando $||T^{*n} f|| = ||f||$, de (2.56) se sigue que

$$((I - T^n T^{*n})f, f) = 0. \tag{2.58}$$

De manera análoga al caso anterior, $I - T^j T^{*j}$ es un operador definido no negativo, por lo cual, gracias al Lema 2.7, tenemos que $(I - T^j T^{*j})f = 0$.

Así, puesto que $j \in \mathbb{N}$ es arbitrario, hemos demostrado las siguientes equivalencias

$$||T^j f|| = ||f|| \iff (I - T^{*j}T^j)f = 0 \quad \forall j \in \mathbb{N}, \tag{2.59}$$

y

$$||T^{*j} f|| = ||f|| \iff (I - T^j T^{*j})f = 0 \quad \forall j \in \mathbb{N}. \tag{2.60}$$

Ahora, consideremos los operadores

$$A_j := I - T^{*j}T^j \ \text{ y } \ A_{-j} := I - T^j T^{*j} \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Sea $f \in \bigcap_{n\in\mathbb{Z}^*} \operatorname{Ker} A_n$, arbitrario. Así, tenemos que

$$(I - T^{*j}T^j)f = 0 \quad \text{y} \quad (I - T^jT^{*j})f = 0 \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Luego, gracias a (2.59) y (2.60), se sigue que

$$||T^j f|| = ||T^{*j} f|| = ||f|| \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Como T es completamente no unitario se tiene que $f = 0$. Y dado que f es arbitrario, concluimos que

$$\bigcap_{n\in\mathbb{Z}^*} \operatorname{Ker} A_n = \{0\}.$$

Ahora, gracias al Lema 2.11, sabemos que

$$H = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}^*} \operatorname{Ker} A_n \bigoplus \overline{\operatorname{span} \bigcup_{n\in\mathbb{Z}^*} \operatorname{Im} A_n},$$

de donde se sigue que

$$H = \overline{\operatorname{span} \bigcup_{n\in\mathbb{Z}^*} \operatorname{Im} A_n}.$$

Gracias a esto, para demostrar que $(T_j)_{j\in\mathbb{N}}$ converge débilmente, basta con probar que

$$\lim_{j\to\infty} (T^j f, A_n g) = 0 \quad \forall f, g \in H,\ \forall n \in \mathbb{Z}^*.$$

Sean $f, g \in H$ y $j \in \mathbb{N}$, arbitrarios. Cuando $n \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
(T^j f, A_n T^j f) &= (T^j f, (I - T^{*n}T^n)T^j f) \\
&= (T^j f, T^j f) - (T^j f, T^{*n}T^n T^j f) \\
&= (T^j f, T^j f) - (T^n T^j f, T^n T^j f) \\
&= ||T^j f||^2 - ||T^{n+j} f||^2.
\end{aligned} \tag{2.61}$$

Recordemos que $(||T^j f||)_{j\in\mathbb{N}}$ es una sucesión monótona decreciente, y por lo tanto es convergente y de Cauchy. Así, para cada $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $j \geq N$ entonces

$$||T^j f||^2 - ||T^{n+j} f||^2 \leq \epsilon.$$

Así, tomando límite en (2.61), gracias a esta última desigualdad tenemos que

$$\lim_{j\to\infty} (T^j f, A_n T^j f) = 0. \tag{2.62}$$

Luego, de la desigualdad de Schwarz generalizada obtenemos

$$\begin{aligned}
|(T^j f, A_n g)|^2 &\leq (A_n g, g)(A_n T^j f, T^j f) \\
&= (T^j f, A_n T^j f)(g, A_n g) \\
&= (T^j f, A_n T^j f)(g, g - T^{*n} T^n g) \\
&= (T^j f, A_n T^j f)((g, g) - (g, T^{*n} T^n g)) \\
&= (T^j f, A_n T^j f)(||g||^2 - (T^n g, T^n g)) \\
&= (T^j f, A_n T^j f)(||g||^2 - ||T^n g||^2) \\
&\leq (T^j f, A_n T^j f)||g||^2.
\end{aligned}$$

Tomando el límite en esta última desigualdad, y gracias a (2.62) se tiene que

$$\lim_{j \to \infty} (T^j f, A_n g) = 0. \tag{2.63}$$

Ahora, notemos que por la definición de A_n, para cualquier $j \geq n \geq 1$, tenemos

$$\begin{aligned}
A_{-n} T^j &= (I - T^n T^{*n}) T^j \\
&= T^j - T^n T^{*n} T^j \\
&= T^n (T^{j-n} - T^{*n} T^j) \\
&= T^n (I - T^{*n} T^n) T^{j-n} \\
&= T^n A_n T^{j-n}.
\end{aligned}$$

Así,

$$A_{-n} T^j = T^n A_n T^{j-n} \quad \forall\, j \geq n \geq 1.$$

Luego, de esta última identidad y gracias a la desigualdad de Schwarz generalizada se sigue que

$$\begin{aligned}
|(T^j f, A_{-n} g)|^4 &\leq (A_{-n} g, g)^2 (A_{-n} T^j f, T^j f)^2 \\
&= (T^j f, A_{-n} T^j f)^2 (g, A_{-n} g)^2 \\
&= (T^j f, T^n A_n T^{j-n} f)^2 (g, A_{-n} g)^2 \\
&= (T^j f, T^n A_n T^{j-n} f)^2 (g, (I - T^n T^{*n}) g)^2 \\
&= (T^j f, T^n A_n T^{j-n} f)^2 (||g||^2 - ||T^n g||^2)^2 \\
&\leq (T^j f, T^n A_n T^{j-n} f)^2 ||g||^4 \\
&= (T^{*n} T^j f, A_n T^{j-n} f)^2 ||g||^4 \\
&\leq (T^{j-n} f, A_n T^{j-n} f)(T^{*n} T^j f, A_n T^{*n} T^j f)||g||^4
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq (T^{j-n}f, A_n T^{j-n}f)||T^{*n}T^j f||^2||g||^4 \\
&\leq (T^{j-n}f, A_n T^{j-n}f)||f||^2||g||^4 \\
&\leq (T^{j-n}f, A_n T^{j-n}f)||f||^2||g||^4.
\end{aligned}
$$

Tomando límite en la última desigualdad, y gracias a (2.62), tenemos que

$$\lim_{j\to\infty}(T^j f, A_{-n}g) = 0. \tag{2.64}$$

Así, de (2.63) y (2.64) se concluye que

$$\lim_{j\to\infty}(T^j f, A_n g) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}^*.$$

Como $f, g \in H$ son arbitrarios, se tiene que $(T^j)_{j\in\mathbb{N}}$ converge débilmente. $\square$

Capítulo 3

Producto aleatorio de contracciones

En este capítulo, demostramos el resultado principal del artículo [1] de Amemiya y Ando. Para ello, formalizamos el concepto de producto aleatorio de operadores, haciendo uso de una función de selección, y veremos que, bajo ciertas condiciones sobre esta función de selección, el producto aleatorio converge fuertemente, mientras que, sin ninguna condición sobre la función de selección, el producto aleatorio converge débilmente.

Sea $\{T_1, \dots, T_N\}$ un conjunto finito de contracciones de un espacio de Hilbert H en si mismo, y $r(\cdot)$ una función del conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ en $\{1, 2, \dots, N\}$, a la que llamamos *selección*. Dada una selección $r(\cdot)$, podemos construir la sucesión de contracciones $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donde

$$S_n := T_{r(n)} \cdots T_{r(2)} T_{r(1)}.$$

Gracias al teorema Ergódico aleatorio (ver [2]), se tiene que $\dfrac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} S_j$ converge fuertemente para casi todas las selecciones. Veamos que bajo las condiciones (S) o (W), se obtienen mejoras en el resultado.

Lema 3.1. *Sean H un espacio de Hilbert y $T \in \mathcal{L}(H)$ una contracción. Se tiene que* $\mathrm{Fix}(T) = \mathrm{Fix}(T^*)$.

Demostración. Sea $f \in \mathrm{Fix}(T)$, arbitrario. Así, se tiene que $Tf = f$, dado que T es una contracción y $||T|| = ||T^*||$, se sigue que

$$\begin{aligned} ||f||^2 &= (f, f) \\ &= (Tf, f) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (f, T^* f) \\
&\leq ||f|| ||T^* f|| \\
&\leq ||f||^2,
\end{aligned}
$$

de donde se tiene que

$$||f|| = ||T^* f|| \quad \text{y} \quad (f, T^* f) = ||f|| ||T^* f||. \tag{3.1}$$

Por otro lado, gracias a (3.1), tenemos que

$$
\begin{aligned}
||f - T^* f||^2 &= ||f||^2 - (f, T^* f) - (T^* f, f) + ||T^* f||^2 \\
&= ||f||^2 - ||f||^2 - ||f||^2 + ||f||^2 \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $f = T^* f$, es decir, $f \in \mathrm{Fix}(T^*)$. Como f es arbitrario, se sigue que

$$\mathrm{Fix}(T) \subseteq \mathrm{Fix}(T^*). \tag{3.2}$$

La contenencia

$$\mathrm{Fix}(T^*) \subseteq \mathrm{Fix}(T), \tag{3.3}$$

se consigue por un razonamiento análogo, cambiando el rol de T por T^* en la demostración previa. Gracias a (3.2) y (3.3) se concluye que $\mathrm{Fix}(T) = \mathrm{Fix}(T^*)$. □

Proposición 3.2. *Sean H un espacio de Hilbert, $\{T_1, \ldots, T_N\}$ un conjunto finito de contracciones que satisfacen (S) y $r(\cdot)$ una selección periódica. Se tiene que la sucesión $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fuertemente.*

Demostración. Supongamos que el periodo de la selección r es m, es decir,

$$r(k+m) = r(k) \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{3.4}$$

Usando inducción matemática, probemos que

$$S_{mk} = (S_m)^k \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{3.5}$$

Base de la inducción: Cuando $k = 1$, se tiene que

$$S_{m1} = S_m = (S_m)^1,$$

lo cual nos indica que (3.5) es cierto para $k = 1$.

Paso inductivo: Sea $n \in \mathbb{N}$, arbitrario pero fijo. Supongamos que (3.5) es cierto para n, es decir,

$$S_{mn} = (S_m)^n. \tag{3.6}$$

Gracias a (3.6) y dado que r es $m-$periódica, se sigue que

$$\begin{aligned} S_{m(n+1)} &= T_{r(mn+m)} T_{r(mn+m-1)} \cdot \cdot T_{r(mn+m-(m+1))} T_{r(mn+m-m)} T_{r(mn+m-(m-1))} \cdot \cdot T_{r(1)} \\ &= T_{r(m+mn)} T_{r((m-1)+mn)} \cdots T_{r(1+mn)} T_{r(mn)} T_{r(mn-1)} \cdots T_{r(2)} T_{r(1)} \\ &= T_{r(m)} T_{r(m-1)} \cdots T_{r(1)} S_{mn} \\ &= S_m (S_m)^n \\ &= (S_m)^{n+1}, \end{aligned}$$

lo cual demuestra que la igualdad (3.5) es cierta para $n+1$, cuando es cierta para n. Gracias a la base de inducción y el paso inductivo, hemos demostrado (3.5).

Dado que T_j satisface (S) para cada $j \in \{1, \ldots, N\}$, de la Proposición 2.6 se sigue que S_m satisface (S) y, gracias a la Proposición 2.5, tenemos que $(S_{mk})_{k \in \mathbb{N}}$ converge fuertemente, cuando k tiende a infinito, a la proyección de H sobre $\operatorname{Ker}(I - S_m)$.

Sea $n \in \mathbb{N}$, arbitrario. Consideremos $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$m(k-1) < n \leq mk. \tag{3.7}$$

Por la $m-$periodicidad de r tenemos que

$$\begin{aligned} S_{n-m(k-1)} &= T_{r(n-m(k-1))} T_{r(n-m(k-1)-1)} \cdots T_{r(2)} T_{r(1)} \\ &= T_{r(n-m(k-1)+m(k-1))} T_{r(n-m(k-1)-1+m(k-1))} \cdots T_{r(2+m(k-1))} T_{r(1+m(k-1))} \\ &= T_{r(n)} T_{r(n-1)} \cdots T_{r(2+m(k-1))} T_{r(1+m(k-1))}, \end{aligned}$$

con lo cual se sigue que

$$S_n = S_{n-m(k-1)} S_{m(k-1)},$$

donde asumimos que $S_0 := I$.

Además, de la desigualdad (3.7) y dado que T_j es una contracción para cada $j \in \{1, 2, \ldots, N\}$, tenemos que

$$||S_{m(k-1)} f|| \geq ||S_n f|| \geq ||S_{mk} f||. \tag{3.8}$$

Sea $f \in \operatorname{Fix}(S_m)$, arbitrario. Puesto que

$$f = S_m f,$$

obtenemos

$$f = S_m f = (S_m)^2 f.$$

Al aplicar el operador S_m, obtenemos que $f = (S_m)^3 f$. Procediendo iterativamente con este razonamiento, se sigue que

$$f = (S_m)^l f \quad \forall l \in \mathbb{N}.$$

Gracias a (3.5) y a las desigualdades (3.8) tenemos que

$$||f|| = ||S_{m(k-1)} f|| \geq ||S_n f|| \geq ||S_{mk} f|| = ||f||.$$

Por lo tanto $||S_n f|| = ||f||$. Como S_n satisface (S), también satisface (W) y por la Proposición 2.8, satisface (W'), es decir, $S_n f = f$.

Dado que f y n son arbitrarios, se tiene que

$$S_n f = f \quad \forall f \in \operatorname{Ker}(I - S_m), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.9}$$

Por otro lado, sea $f \in \overline{\operatorname{Im}(I - S_m)}$, arbitrario. De (3.8), sabemos que

$$||S_n f|| \leq ||S_{m(k-1)} f||. \tag{3.10}$$

Tomando el límite cuando n tiende a infinito, de la desigualdad (3.7) se sigue que k tiende a infinito y como la sucesión $(S_{mk})_{k\in\mathbb{N}}$ converge fuertemente, de la Proposición 2.2 concluimos que

$$\lim_{n\to\infty} ||S_n f|| = 0 \quad \forall f \in \overline{\operatorname{Im}(I - S_m)}. \tag{3.11}$$

Esto nos permite decir que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fuertemente. En efecto, mostremos que la sucesión $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en el sentido fuerte. Sean $f \in H$ y $\epsilon > 0$, arbitrarios. Sean $n, n' \in \mathbb{N}$ tales que $n < n'$. Gracias a la descomposición (2.1), de (3.9), se tiene que

$$\begin{aligned} ||(S_{n'} - S_n) f|| &\leq \sup_{g\in H} ||(S_{n'} - S_n) g|| \\ &= \sup_{g\in\overline{\operatorname{Im}(I - S_m)}} ||(S_{n'} - S_n) g||. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Por otro lado, debido a (3.11), sabemos que para cada $g \in \overline{\mathrm{Im(I - S_n)}}$, $(S_n g)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy. Sea $g \in \overline{\operatorname{Im}(I - T)}$, arbitrario. Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, n' \geq N$ entonces

$$||(S_{n'} - S_n) g|| \leq \epsilon. \tag{3.13}$$

Como g es arbitrario, de (3.12) y (3.13) se sigue que

$$||(S_{n'} - S_n)f|| \leq \epsilon \quad \forall n, n' \geq N.$$

Puesto que f y $\epsilon > 0$ son arbitrarios, hemos demostrado que la sucesión $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en el sentido fuerte y por tanto converge fuertemente. $\square$

En el siguiente resultado, usaremos el concepto de semigrupo. Recordemos que un semigrupo es un conjunto no vacío A dotado de una operación binaria asociativa, es decir, es una estructura algebraica $(A, \cdot)$ tal que

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \quad \forall\, a, b, c \in A.$$

Por ejemplo, el conjunto de los número reales dotado de la multiplicación usual, es un semigrupo.

Decimos que un semigrupo $(A, \cdot)$ es finitamente generado por el conjunto finito $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ si todo elemento de A se expresa como el producto finito de elementos de G. Para más detalles acerca de la teoría de semigrupos, se refiere al lector a [5].

TEOREMA 3.3. *Sean H un espacio de Hilbert y $\{T_1, \ldots, T_N\}$ un conjunto finito de contracciones que satisfacen (W). Para cualquier selección $r(\cdot)$ se tiene que la sucesión $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge débilmente.*

Demostración. La demostración de este resultado se divide en varias etapas. En lo que sigue, por una vecindad débil nos referimos a una vecindad simétrica y convexa de 0 con respecto a la topología débil.

Etapa 1: La condición (W) es equivalente a la siguiente condición:

(W'') para toda vecindad débil $\mathcal{B}$ existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\forall f \in H, \quad ||f|| \leq 1, \quad ||T_j f|| \geq 1 - \epsilon \Longrightarrow (I - T_j)f \in \mathcal{B}.$$

$\Leftarrow$) Supongamos que se satisface (W''). Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en H tal que

$$||f_n|| \leq 1 \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} ||Tf_n|| = 1. \tag{3.14}$$

Sea $\mathcal{B}$ una vecindad débil cualquiera. Debemos hallar $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$(I - T)f_n \in \mathcal{B} \quad \forall\, n \geq N.$$

Como (W'') se satisface, para $\mathcal{B}$, existe $\epsilon > 0$ tal que

$$||f|| \leq 1, \quad ||Tf|| \geq 1 - \epsilon \Longrightarrow (I - T)f \in \mathcal{B}.$$

Por otro lado, por (3.14), para este ϵ, existe $\overline{N} \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq \overline{N}$, entonces $|||Tf_n|| - 1| < \epsilon$. En particular, se tiene que

$$||Tf_n|| \geq 1 - \epsilon \quad \forall n \geq \overline{N}.$$

Así, considerando $N = \overline{N}$, se sigue que si $n \geq N$, entonces

$$||f_n|| \leq 1, \quad ||Tf_n|| \geq 1 - \epsilon,$$

lo cual implica que $(I - T)f_n \in \mathcal{B}$, es decir, (W) se satisface.

$\Rightarrow$) Supongamos que se satisface (W) y razonemos por reducción al absurdo. Supongamos que existe una vecindad débil $\mathcal{B}$, tal que para todo $\epsilon > 0$, existe $f \in H$ tal que

$$||f|| \leq 1, \quad ||Tf|| \geq 1 - \epsilon \quad \text{y} \quad (I - T)f \notin \mathcal{B}. \tag{3.15}$$

Consideremos la sucesión

$$f_n := f \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por un lado tenemos que

$$||f_n|| \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.16}$$

Por otro lado

$$||Tf_n|| = ||Tf|| \geq 1 - \epsilon \quad \forall \epsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N},$$

de donde, puesto que T es una contracción, se sigue que

$$0 \geq ||Tf_n|| - 1 \geq -\epsilon \quad \forall \epsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N},$$

lo cual es equivalente a

$$0 \leq 1 - ||Tf_n|| \leq \epsilon \quad \forall \epsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Esto nos permite concluir que

$$||Tf_n|| = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.17}$$

Dado que T satisface (W), de (3.16) y (3.17) se sigue que $(I - T)f \in \mathcal{B}$, lo cual es una contradicción a (3.15) y por lo tanto (W'') es cierto.

Etapa 2: Sea $j = 1, 2, \ldots, N$, arbitrario pero fijo. Sea $\mathcal{M}_j$ el subgrupo multiplicativo finitamente generado por las contracciones $\{I, T_1, T_2, \ldots, T_j\}$. Sea $S \in \mathcal{M}_j$, arbitrario. Puesto que T_k satisface (W) para cada $k \in \{1, 2, \ldots, N\}$, gracias a la Proposición 2.6 se sigue que S satisface (W) y gracias a la Etapa 1, satisface (W''). En otras palabras, para toda vecindad débil $\mathcal{B}$ existe $\epsilon > 0$ tal que si $||f|| \leq 1$, $||Sf|| \geq 1 - \epsilon$, entonces $(I - S)f \in \mathcal{B}$.

Etapa 3: Sea $f \in H$, arbitrario. De manera similar a lo realizado en la demostración de la Proposición 2.4, notemos que la sucesión $(||S_n f||)_{n \in \mathbb{N}}$ es decreciente. En efecto, como T_k es una contracción para cada $k \in \{1, 2, \ldots, j\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$\begin{aligned} 0 \ \leq ||S_{n+1} f|| \ & \leq ||T_{r(n+1)} S_n f|| \\ & \leq ||T_{r(n+1)}|| \, ||S_n f|| \\ & \leq ||S_n f||. \end{aligned}$$

Así, $(||S_n f||)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión monótona decreciente, y acotada inferiormente por 0. Por lo tanto existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{n \to \infty} ||S_n f|| = \alpha.$$

Gracias a la no negatividad de la norma, se tiene que

$$||S^n f|| \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

de donde se sigue que α es o cero o positivo.

Supongamos que $\alpha = 0$, es decir,

$$\lim_{n \to \infty} ||S_n f|| = 0. \tag{3.18}$$

Sea $g \in H$, arbitrario. Gracias a la desigualdad de Cauchy-Schwarz, tenemos que

$$(S_n f, g) \leq ||S_n f|| \, ||g|| \quad \forall \, n \in \mathbb{N}.$$

Tomando el límite cuando n tiende a infinito en la última desigualdad, y gracias a (3.18), obtenemos

$$\lim_{n \to \infty} (S_n f, g) = 0,$$

lo cual significa que la sucesión $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge débilmente.

En caso de que $\alpha > 0$, consideremos una vecindad débil $\mathcal{B}$, arbitraria. De la Etapa

2, sabemos que existe $\epsilon > 0$ tal que para cualquier $S \in \mathcal{M}_j$ se tiene la implicación

$$||f|| \leq, \quad ||Sf|| \geq 1 - \epsilon \Longrightarrow (I - S)f \in \mathcal{B}. \tag{3.19}$$

Por un lado, como $(||S_n f||)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión monótona decreciente con límite α, se tiene que

$$||S_n f|| \geq \alpha > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

de donde se sigue que

$$\frac{1}{||S_n f||} \leq \frac{1}{\alpha} =: c \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por otro lado, puesto que la sucesión $(||S_n f||)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, es de Cauchy y por tanto existe $M \in \mathbb{N}$ tal que

$$|||S_m f|| - ||S_n f||| \leq \frac{\epsilon}{c} \quad \forall n, m \geq M.$$

Sin pérdida de generalidad supongamos que $m < n$, por tanto existe $S \in \mathcal{M}_N$ tal que $S_n = SS_m$. Consideremos

$$g := \frac{S_m f}{||S_m f||},$$

para el cual se tiene que

$$||g|| = 1, \tag{3.20}$$

y además

$$\begin{aligned} |1 - ||Sg||| &= \left|1 - \frac{||SS_m f||}{||S_m f||}\right| \\ &= \left|1 - \frac{||S_n f||}{||S_m f||}\right| \\ &= \left|\frac{||S_m f|| - ||S_n f||}{||S_m f||}\right| \\ &\leq \frac{\epsilon}{c}\frac{1}{||S_m f||} \\ &\leq \frac{\epsilon}{c} c \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Usando la desigualdad triangular inversa en la última desigualdad, obtenemos

$$||Sg|| \geq 1 - \epsilon. \tag{3.21}$$

Así, de (3.19), (3.20) y (3.21) se concluye que

$$(I - S)g \in \mathcal{B}. \tag{3.22}$$

Luego

$$\begin{aligned} S_m f - S_n f &= ||S_m f|| \frac{S_m f}{||S_m f||} - S S_m f \\ &= ||S_m f|| g - ||S_m f|| S \frac{S_m f}{||S_m f||} \\ &= ||S_m f|| (I - S) g. \end{aligned}$$

De esta última igualdad, (3.22) y el hecho de que $||S_m f|| \leq ||f||$, tenemos que

$$S_m f - S_n f \in ||f|| \mathcal{B} \quad \forall\, n, m \geq M.$$

Como $\mathcal{B}$ es una vecindad débil arbitraria, y $f \in H$ es arbitrario, se sigue que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en la topología débil para H, y por tanto convergente. $\square$

Capítulo 4

Convergencia de sucesiones aproximantes

En este capítulo presentamos el resultado principal del presente trabajo (ver Teorema 4.4), inspirados en los resultados obtenidos por Pustylnik y Reich en [12].

Sean H un espacio de Hilbert y $\{T_1, T_2, \ldots, T_N\}$ un conjunto finito de contracciones de H en H. Sea $r : \mathbb{N} \to \{1, 2, \ldots, N\}$ una *selección*. Decimos que la selección r es *cuasi−periódica* cuando existe $m \in \mathbb{N}$ tal que, cada m términos consecutivos, $r(k)$, $r(k+1), \ldots, r(k+m-1)$ toman el valor de cada $j \in \{1, 2, \ldots, N\}$ al menos una vez. En este contexto decimos que m es el cuasi−periodo de r.

Dada una selección r cuasi−periódica, de cuasi−periodo q, una sucesión *tipo órbita exacta con punto inicial $x \in H$* asociada al conjunto de operadores $\{T_1, T_2, \ldots, T_N\}$ es una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donde

$$\begin{aligned}
x_1 &:= x, \\
x_{n+1} &:= Q_n x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}, \\
Q_n &:= T_{r((n-1)q+q)} T_{r((n-1)q+q-1)} \cdots T_{r((n-1)q+2)} T_{r((n-1)q+1)} \quad \forall n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Decimos, en cambio, que una sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en H tal que

$$||y_{n+1} - Q_n y_n|| < r_n \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

donde $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión que genera una serie convergente, es una sucesión *tipo órbita inexacta con errores sumables* asociada al conjunto de operadores

$$\{T_1, T_2, \ldots, T_N\}.$$

Es importante recalcar que, tanto una sucesión tipo órbita exacta, como una tipo órbita inexacta, dependen de la función de selección r.

Notemos que toda sucesión tipo órbita exacta $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión tipo órbita inexacta con errores sumables puesto que

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||x_{n+1} - Q_n x_n|| = \sum_{n=1}^{\infty} ||Q_n x_n - Q_n x_n|| = 0.$$

Veamos a continuación la relación existente entre la convergencia de las sucesiones tipo órbita exacta y tipo órbita inexacta con errores sumables. Para esto mostraremos previamente dos resultados que nos serán de utilidad.

LEMA 4.1. *Sean H un espacio de Hilbert, $\{T_1, T_2, \dots, T_N\}$ un conjunto finito de contracciones de H en H. Se tiene que el producto finito de los operadores T_j con $j \in \{1, 2, \dots, N\}$, es también una contracción.*

Demostración. Primero, mostremos que el producto de dos contracciones, es también una contracción. Sea $f \in H$, arbitrario. Dado que T_1 y T_2 son contracciones, se tiene que

$$||T_2 T_1 x|| \leq ||T_1 x|| \leq ||x|| \quad \forall\, x \in H.$$

Por lo tanto $T_2 T_1$ es una contracción. Supongamos que el producto de $N-1$ contracciones, es una contracción, es decir,

$$||T_{N-1} T_{N-2} \cdots T_1 x|| \leq ||x|| \quad \forall\, x \in H. \tag{4.1}$$

Gracias a (4.1) y el hecho de que T_N es una contracción, se sigue que

$$||T_N T_{N-1} \cdots T_1 x|| \leq ||T_{N-1} T_{N-2} \cdots T_1 x|| \leq ||x|| \quad \forall\, x \in H,$$

lo cual concluye la demostración. □

LEMA 4.2. *Sea $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales no negativos. Se tiene que el producto $\prod_{n\in\mathbb{N}} (1+\gamma_n)$ converge si y solo si la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} \gamma_n$ converge.*

Demostración. Denotemos a las sumas parciales y productos parciales generados por $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ por

$$s_n = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \quad \text{y} \quad p_n = \prod_{j=1}^{n} (1+\gamma_j) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por un lado, dado que $\gamma_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que la sucesión $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona creciente. Por otro lado, tenemos que $(1+\gamma_n) > 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por lo tanto la sucesión $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es también una sucesión monótona creciente. Gracias a estas observaciones, basta con demostrar que la sucesión $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada superiormente si y solo si la sucesión $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ también es acotada superiormente.

No es difícil notar que

$$s_n < p_n \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{4.2}$$

Esto se debe a que en el lado derecho, siempre aparecerá s_n más otros términos positivos.

Ahora, considerando el hecho de que $e^x \geq 1 + x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, tenemos en particular que

$$p_n = \prod_{j=1}^{n}(1+\gamma_j) \leq \prod_{j=1}^{n} e^{\gamma_j} = e^{s_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{4.3}$$

Así, de (4.2) y (4.3), concluimos que la sucesión $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada superiormente si y solo si la sucesión $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ también es acotada superiormente, lo cual concluye la demostración.

□

PROPOSICIÓN 4.3. *Sean H un espacio de Hilbert y $T_1, T_2, \ldots, T_N$ un número finito de contracciones de H en H. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *Toda sucesión tipo órbita exacta, con cualquier punto inicial, asociada al conjunto de operadores $\{T_1, T_2, \ldots, T_N\}$ converge débilmente;*

2. *Toda sucesión tipo órbita inexacta con errores sumables asociada al conjunto de operadores $\{T_1, T_2, \ldots, T_N\}$ converge débilmente.*

Demostración. (1) $\Leftarrow$ (2) Dado que toda sucesión tipo órbita exacta es también tipo órbita inexacta, la implicación es inmediata.

(1) $\Rightarrow$ (2) Supongamos que toda sucesión tipo órbita exacta, con cualquier punto inicial, asociada al conjunto de operadores $\{T_1, T_2, \ldots, T_N\}$ converge débilmente. Sea $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión tipo órbita inexacta con errores sumables cualquiera. Así, existe una sucesión $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de número reales positivos tales que

$$||x_{k+1} - Q_k x_k|| \leq r_k \quad \forall k \in \mathbb{N}, \tag{4.4}$$

y

$$\sum_{k=1}^{\infty} r_k < \infty.$$

Sea $k \in \mathbb{N}$, arbitrario. Definamos la sucesión

$$x_k^1 := x_k, \quad x_k^{i+1} := Q_{k+i-1} x_k^i \quad \forall i \in \mathbb{N}. \tag{4.5}$$

Notemos que la sucesión $(x_k^i)_{i \in \mathbb{N}}$ es de tipo órbita exacta con punto inicial x_k, por lo cual, gracias a nuestra hipótesis, converge débilmente a algún $y_k \in H$, es decir,

$$\lim_{i \to \infty} (x_k^i, z) = (y_k, z) \quad \forall z \in H. \tag{4.6}$$

Ahora, mostremos que

$$||x_k^{i+1} - x_{k+i}|| \leq \sum_{j=k-1}^{k+i-1} r_j - r_{k-1} \quad \forall i \in \mathbb{N}. \tag{4.7}$$

Procedemos por inducción matemática sobre i. Base de la inducción: Cuando $i = 1$, de (4.4) y (4.5), se tiene que

$$||x_k^2 - x_{k+1}|| = ||Q_k x_k - x_{k+1}|| \leq r_k = \sum_{j=k-1}^{k} r_j - r_{k-1},$$

lo cual indica que (4.7) es cierto para $i = 1$.

Paso inductivo: Sea $n \in \mathbb{N}$ arbitrario pero fijo. Supongamos que (4.7) es cierta para n, es decir,

$$||x_k^{n+1} - x_{k+n}|| \leq \sum_{j=k-1}^{k+n-1} r_j - r_{k-1}. \tag{4.8}$$

Gracias a (4.8), la desigualdad triangular, (4.4) y el Lema 4.1, se tiene que

$$\begin{aligned}
||x_k^{n+2} - x_{k+n+1}|| &= ||Q_{k+n} x_k^{n+1} - x_{k+n+1}|| \\
&= ||Q_{k+n} x_k^{n+1} - Q_{k+n} x_{k+n}|| + ||Q_{k+n} x_{k+n} - x_{k+n+1}|| \\
&\leq ||x_k^{n+1} - x_{k+n}|| + r_{k+n} \\
&\leq \sum_{j=k-1}^{k+n-1} r_j - r_{k-1} + r_{k+n} \\
&= \sum_{j=k-1}^{k+n} r_j - r_{k-1},
\end{aligned}$$

lo cual demuestra que desigualdad (4.7) es cierta para $n + 1$, cuando es cierta para n. Gracias a la base de inducción y el paso inductivo, hemos demostrado (4.7).

Sea $s \in \mathbb{N}$, arbitrario. Puesto que (4.7) se satisface para todo $i \in \mathbb{N}$, en particular se cumple para $i = s$, de donde se sigue que

$$||x_k^{s+1} - x_{k+s}|| \leq \sum_{j=k-1}^{k+s-1} r_j - r_{k-1}.$$

De esta última desigualdad tenemos que

$$||x_k^{s+i+1} - x_{k+s}^{i+1}|| \leq ||x_k^{s+1} - x_{k+s}|| \leq \sum_{j=r}^{\infty} r_j \quad \forall i \in \mathbb{N}. \tag{4.9}$$

En efecto, de la contractividad de los operadores T_j para cada $j \in \{1, 2, \ldots, N\}$, del Lema 4.1 y la definición de la sucesión $(x_k^i)_{i \in \mathbb{N}}$, se tiene que

$$\begin{aligned}
||x_k^{s+i+1} - x_{k+s}^{i+1}|| &= ||Q_{k+s+i-1}x_k^{s+i} - Q_{k+s+i-1}x_{k+s}^{i}|| \\
&= ||Q_{k+s+i-1}Q_{k+s+i-2}x_k^{s+i-1} - Q_{k+s+i-1}Q_{k+s+i-2}x_{k+s}^{i-1}|| \\
&\;\;\vdots \\
&= ||Q_{k+s+i-1} \cdots Q_{k+s}x_k^{s+1} - Q_{k+s+i-1} \cdots Q_{k+s}x_{k+s}|| \\
&= ||Q_{k+s+i-1} \cdots Q_{k+s}(x_k^{s+1} - x_{k+s})|| \\
&\leq ||x_k^{s+1} - x_{k+s}|| \\
&\leq \sum_{j=r}^{\infty} r_j,
\end{aligned}$$

lo que demuestra que la desigualdad (4.9) es cierta.

A continuación, vamos a demostrar que la sucesión $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$, cuyos términos cumplen con (4.6), es de Cauchy. De las propiedades de producto interno, la desigualdad de Cauchy-Schwarz y (4.6), se sigue que

$$\begin{aligned}
||y_k - y_{k+s}||^2 &= (y_k - y_{k+s}, y_k - y_{k+s}) \\
&= (y_k, y_k - y_{k+s}) - (y_{k+s}, y_k - y_{k+s}) \\
&= \lim_{i \to \infty}(x_k^{s+i+1}, y_k - y_{k+s}) - \lim_{i \to \infty}(x_{k+s}^{i+1}, y_k - y_{k+s}) \\
&= \lim_{i \to \infty}(x_k^{s+i+1} - x_{k+s}^{i+1}, y_k - y_{k+s}) \\
&\leq ||y_k - y_{k+s}|| \lim_{i \to \infty} ||x_k^{s+i+1} - x_{k+s}^{i+1}||.
\end{aligned}$$

De esta última desigualdad y (4.9), concluimos que

$$||y_k - y_{k+s}|| \leq \sum_{j=k}^{\infty} r_j. \tag{4.10}$$

Sea $\epsilon > 0$, arbitrario. Puesto que $(r_k)_{k \in \mathbb{N}}$ genera una serie convergente, se sigue que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq k_0$ entonces

$$\sum_{j=k}^{\infty} r_j \leq \epsilon.$$

Dado que ϵ, k y s son arbitrarios, se sigue que $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy. Puesto que H es completo, existe $y^* \in H$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} y_k = y^*.$$

Tomando el límite, cuando q tiende a infinito en (4.10), se tiene que

$$||y_k - y^*|| \leq \sum_{j=k}^{\infty} r_j \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{4.11}$$

Sea $z \in H$, arbitrario. Sin pérdida de generalidad supongamos que $||z|| \leq 1$. Gracias a la desigualdad de Cauchy-Schwarz, (4.7) y (4.11) se sigue que

$$\begin{aligned}
(y^* - x_{k+i}, z) &= (y^*, z) - (x_{k+i}, z) \\
&= (y^* - y_k, z) + (y_k - x^i_{k+i}, z) + (x^i_{k+i} - x_{k+i}, z) \\
&\leq ||y^* - y_k|| + (y_k - x^i_{k+i}, z) + ||x^i_{k+i} - x_{k+i}|| \\
&\leq \sum_{j=k}^{\infty} r_j + (y_k - x^i_{k+i}, z) + \sum_{j=k}^{\infty} r_j.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Sea $\epsilon > 0$, arbitrario. Por (4.6), sabemos que existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $i \geq i_0$, entonces

$$(y_k - x^i_{k+i}, z) \leq \frac{\epsilon}{3}. \tag{4.13}$$

Además, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq k_0$ entonces

$$\sum_{j=k}^{\infty} r_j \leq \frac{\epsilon}{3}. \tag{4.14}$$

Gracias a (4.12), (4.13) y (4.14) se sigue que

$$(y^* - x_{k+i}, z) \leq \epsilon.$$

Puesto que $z \in H$ y ϵ son arbitrarios, se concluye que la sucesión $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge débilmente a y^*. □

Finalizamos este capítulo con el resultado principal de nuestro trabajo, el cual consiste en estudiar la convergencia de tipo órbita inexacta, aprovechando la convergencia de tipo órbita exacta estudiada por Amemiya y Ando en [1].

TEOREMA 4.4. *Sean H un espacio de Hilbert, $\{T_1, T_2, \dots, T_N\}$ un conjunto finito de contracciones de H en H y $r : \mathbb{N} \to \{1, 2, \dots, N\}$ una función de selección cuasi−periódica, con cuasi−periodo q. Consideremos las sucesiones de operadores $(A_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$ para cada $k \in \{1, 2, \dots, N\}$ tales que se satisfagan la desigualdad*

$$||A_n^{(k)}x - T_k x|| \leq r_n ||x|| \quad \forall x \in H, \forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \{1, 2, \dots, N\}, \tag{4.15}$$

donde los r_n son números positivos tales que $\sum_{n=1}^{\infty} r_n < \infty$. Se tiene que para todo $x \in H$, existe $x^* = x^*(x) \in H$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\left(\prod_{j=1}^{n} A_j^{(r((j-1)q+q))} A_j^{(r((j-1)q+q-1))} \cdots A_j^{(r((j-1)q+1))} \right) x, z \right) = (x^*, z) \quad \forall z \in H.$$

Demostración. Sea $x \in H$, arbitrario. Definimos la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, en donde

$$x_1 := x, \quad x_{n+1} := A_n^{(r((n-1)q+q))} A_n^{(r((n-1)q+(q-1)))} \cdots A_n^{(r((n-1)q+1))} x_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

De (4.15), la desigualdad triangular inversa y el hecho de que T_k es una contracción para cada $k \in \{1, 2, \dots, N\}$, se sigue que

$$\begin{aligned} ||A_n^{(k)}x|| &\leq r_n ||x|| + ||T_k x|| \\ &\leq (r_n + 1)||x|| \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \{1, 2, \dots, N\}. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Luego

$$\left|\left| A_n^{(r((n-1)q+q))} A_n^{(r((n-1)q+(q-1)))} \cdots A_n^{(r((n-1)q+1))} x \right|\right| \leq (1 + r_n)^q ||x|| \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

de donde obtenemos que

$$||x_n|| = \left|\left| \left(\prod_{j=1}^{n-1} A_j^{(r(jq))} A_j^{(r(jq-1))} \cdots A_j^{(r((j-1)q+1))} \right) x \right|\right| \leq \prod_{j=1}^{n-1} (1 + r_j)^q ||x|| \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dado que $(r_k)_{k \in \mathbb{N}}$ genera una serie convergente, gracias al Lema 4.2 sabemos que existe $C > 0$ tal que

$$\prod_{j=1}^{n-1} (1 + r_j)^q < C \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{4.17}$$

Así, concluimos que $||x_n|| \leq C||x||$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ahora, debemos verificar que la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión tipo órbita inexacta con errores sumables. Sea $n \in \mathbb{N}$, cualquiera. Vamos a comparar x_{n+1} y

$Q_n x_n$. Para tal efecto, definimos la sucesión

$$\alpha_n^{(k)}(x) := A_n^{(k)}x - T_k x, \quad k \in \{1, 2 \ldots, N\}. \tag{4.18}$$

Luego, de (4.15) se tiene que

$$||\alpha_n^{(k)}(x)|| \leq r_n ||x|| \quad \forall k \in \{1, 2, \ldots, N\}. \tag{4.19}$$

Definimos

$$\begin{aligned} x_{n+1}^{r((n-1)q+1)} &:= A_n^{(r((n-1)q+1))} x_n, \\ x_{n+1}^{r((n-1)q+i+1)} &:= A_n^{(r((n-1)q+i+1))} x_{n+1}^{r((n-1)q+i)}, \quad i \in \{1, 2, \ldots, q-1\}. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Notemos que $x_{n+1}^{r(nq)} = x_{n+1}$. Tomando en consideración (4.18), obtenemos

$$\begin{aligned} x_{n+1}^{r((n-1)q+1)} &= T_{r((n-1)q+1)} x_n + \alpha_n^{(r((n-1)q+1))}(x_n), \\ x_{n+1}^{r((n-1)q+2)} &= T_{r((n-1)q+2)} x_{n+1}^{r((n-1)q+1)} + \alpha_n^{(r((n-1)q+2))}(x_{n+1}^{r((n-1)q+1)}) \\ &= T_{r((n-1)q+2)} T_{r((n-1)q+1)} x_n + T_{r((n-1)q+2)} \alpha_n^{r((n-1)q+1)}(x_n) \\ &\quad + \alpha_n^{r((n-1)q+2)}(x_{n+1}^{r((n-1)q+1)}), \\ x_{n+1}^{r((n-1)q+3)} &= T_{r((n-1)q+3)} T_{r((n-1)q+2)} T_{r((n-1)q+1)} x_n \\ &\quad + T_{r((n-1)q+3)} T_{r((n-1)q+2)} \alpha_n^{r((n-1)q+1)}(x_n) \\ &\quad + T_{r((n-1)q+3)} \alpha_n^{r((n-1)q+2)}(x_{n+1}^{r((n-1)q+1)}) + \alpha_n^{r((n-1)q+3)}(x_{n+1}^{r((n-1)q+2)}). \end{aligned}$$

De manera recursiva se tiene que

$$\begin{aligned} x_{n+1}^{r(nq)} &= T_{r(nq)} \cdots T_{r((n-1)q+1)} x_n + T_{r(nq)} \cdots T_{r((n-1)q+2)} \alpha_n^{r((n-1)q+1)}(x_n) \\ &\quad + T_{r(nq)} \cdots T_{r((n-1)q+3)} \alpha_n^{r((n-1)q+2)}(x_{n+1}^{r((n-1)q+1)}) + \cdots + \alpha_n^{r(nq)}(x_{n+1}^{r(nq-1)}). \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} & x_{n+1} - Q_n x_n \\ = \; & T_{r(nq)} \cdots T_{r((n-1)q+2)} \alpha_n^{r((n-1)q+1)}(x_n) \\ & + T_{r(nq)} \cdots T_{r((n-1)q+3)} \alpha_n^{r((n-1)q+2)}(x_{n+1}^{r((n-1)q+1)}) + \cdots + \alpha_n^{r(nq)}(x_{n+1}^{r(nq-1)}). \end{aligned}$$

Ahora, tomando en consideración (4.19) y el hecho de que $||T_j x|| \leq ||x||$ para cada $j \in \{1, 2, \ldots, N\}$, obtenemos que

$$||x_{n+1} - Q_n x_n|| \leq r_n \left(||x_n|| + ||x_{n+1}^{r((n-1)q+1)}|| + \cdots + ||x_{n+1}^{r(nq-1)}|| \right). \tag{4.21}$$

Además, de (4.20) y (4.16), se sigue que

$$||x_{n+1}^{r((n-1)q+1)}|| \leq (1+r_n)||x_n||,$$
$$||x_{n+1}^{r((n-1)q+i+1)}|| \leq (1+r_n)^{i+1}||x_n|| \quad \forall i \in \{1,2,\ldots,q-2\}.$$

Sin pérdida de generalidad, suponemos que $r_n \leq 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Luego reemplazando esta última desigualdad en (4.21), concluimos que

$$\begin{aligned} ||x_{n+1} - Q_n x_n|| &\leq r_n(1+2+\cdots+2^{q-1})||x_n|| && (4.22)\\ &= (2^q-1)r_n||x_n|| && (4.23)\\ &\leq 2^q C||x||r_n, && (4.24)\end{aligned}$$

con C como en (4.17). Puesto que $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genera una serie convergente, se tiene que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(2^q C||x||r_n)$ también es convergente, así, junto con (4.22) hemos mostrado que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión tipo órbita inexacta con errores sumables.

Gracias al Teorema 3.3, sabemos que toda sucesión tipo órbita exacta converge débilmente y por tanto, de la Proposición 4.3, concluimos que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge débilmente, lo cual concluye la demostración. □

Capítulo 5

Conclusiones y recomendaciones

En este capítulo, ofrecemos algunas conclusiones obtenidas al realizar este trabajo. Así mismo, se presentan algunas recomendaciones que surgen tras demostrar y cumplir con nuestro objetivo principal.

5.1. Conclusiones

1. En la Proposición 2.4 damos condiciones suficientes para que la sucesión de operadores $(T^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converja fuerte o débilmente, según se desee.

2. En la Proposición 2.8, ofrecemos una nueva condición (W'), que nos da una forma más simple de la condición (W). Esto facilita notablemente las demostraciones de los resultados posteriores.

3. El Teorema 3.3 es indispensable para la demostración del Teorema 4.4, pues nos asegura que toda sucesión tipo órbita exacta asociada al conjunto de operadores $\{T_1, T_2, \dots, T_N\}$ converge débilmente.

4. La condición de cuasi-periodicidad de la función de selección r, en las definiciones de las sucesiones tipo órbita exacta y tipo órbita inexacta con errores sumables asociadas al conjunto de operadores $\{T_1, T_2, \dots, T_N\}$, juega un rol importante para definir el producto aleatorio de las sucesiones de aproximación $\left(A_n^{(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ con $k = 1, \dots, N$, de manera adecuada.

5.2. Recomendaciones

Ahora, algunas recomendaciones que surgen a partir del presente trabajo son:

1. Tomando en consideración que en el Teorema 3.3 no se asume ninguna hipótesis sobre la función de selección r, se podría estudiar condiciones bajo las cuales nos podamos desprender de la condición de cuasi-periodicidad de la función r.

2. En [6], John Dye muestra que la sucesión de operadores $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente, asumiendo que los operadores T_k, con $k = 1, 2, \ldots, N$, son contracciones compactas. En futuros trabajos se podrían considerar operadores compactos contractivos, y estudiar la convergencia de las sucesiones de operadores aproximantes asociados a estos.

Bibliografía

[1] I. Amemiya and T. Ando, *Convergence of random products of contractions in Hilbert Space*, Acta Sci. Math. 26 (1965), 239–244.

[2] A. Beck and J.T. Schwartz, *A Vector Valued Random Ergodic Theorem*, Proc. Amer. Math. Soc., 8 (1957), 1049–1059.

[3] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer Science & Business Media, New York, 2011.

[4] D. Butnariu, S. Reich, and A. J. Zaslavski, *Convergence to fixed points of inexact orbits of Bregman-monotone and of nonexpansive operators in Banach spaces, Fixed point theory and its applications*, Yokohama Publ., Yokohama, 2006, 11–32.

[5] A. H. Clifford and G. B. Preston , *The algebraic theory of semigroups*, Vol. I, Math. Surveys of the American Math. Soc., Provedence, R.I., 1961.

[6] J. Dye, *Convergence of random products of compact contractions in Hilbert Space*, Integral Equations and Operator Theory, 12 (1989), 12–22.

[7] T. Eisner, B. Farkas, M. Haase and R. Nagel, *Operator theoric aspects of Ergodic theory*, Springer, New York, 2015.

[8] E. Frenkel, *Amor y matemáticas*, Editorial Planeta, Colombia, 2013.

[9] I. Halperin, *The product of projection operators*, Acta Sci. Math. (Szeged), 23 (1962), 96–99.

[10] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley & Sons, New York, 1978.

[11] B. Nagy and C. Foias, *Sur les contractions de l'espace de Hilbert. IV*, Acta Sci. Math., 21 (1960), 251–259.

[12] E. Pustylnik and S. Reich, *Infinite Products of Discontinuous Operators*, Contemporary Mathematics, 636 (2015), 199–202.

[13] M. Tsoy-Wo, *Classical Analysis On Normed Spaces*, World Scientific, Singapore, 1942.