

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS

ESTUDIO DE FUNCIONES TIPO EXPONENCIAL Y TRIGONOMÉTRICAS FRACCIONARIAS, Y SUS PROPIEDADES ASOCIADOS AL OPERADOR DE CAUCHY-RIEMANN FRACCIONARIO EN EL SENTIDO DE RIEMANN-LIOUVILLE, SOBRE ESTRUCTURAS HIPERCOMPLEJAS

TRABAJO PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE MATEMÁTICO

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

ESTEBAN JOSUÉ MORILLO MADRID

esteban.morillo.xy8z@gmail.com

DIRECTOR: PhD. ANTONIO NICOLA DI TEODORO COTUA

nditeodoro@usfq.edu.ec

CODIRECTOR: PhD. MIGUEL ÁNGEL YANGARI SOSA

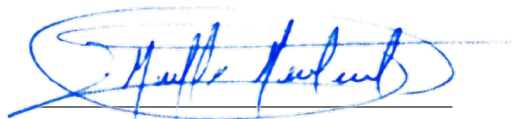
miguel.yangari@epn.edu.ec

QUITO, JUNIO, 2022

DECLARACIÓN

Yo ESTEBAN JOSUÉ MORILLO MADRID, declaro bajo juramento que el trabajo aquí escrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

A través de la presente declaración cedo mis derechos de propiedad intelectual, correspondientes a este trabajo, a la Escuela Politécnica Nacional, según lo establecido por la Ley de Propiedad Intelectual, por su reglamento y por la normatividad institucional vigente.



Esteban Josué Morillo Madrid

CERTIFICACIÓN

Certificamos que el presente trabajo fue desarrollado por ESTEBAN JOSUÉ MORILLO MADRID, bajo nuestra supervisión.

Antonio Di Teodoro

Dr. Antonio Nicola Di Teodoro Cotua
Director del Proyecto

MIGUEL ANGEL
YANGARI SOSA

Firmado digitalmente por MIGUEL ANGEL
YANGARI SOSA
Nombre de reconocimiento (DN): c=EC, o=BANCO
CENTRAL DEL ECUADOR, ou=ENTIDAD DE
CERTIFICACION DE INFORMACION ESCRITA,
l=QUITO, serialNumber=0000586057, cn=MIGUEL
ANGEL YANGARI SOSA
Fecha: 2022.06.02 15:53:12 -05'00'

Dr. Miguel Ángel Yangari Sosa
Codirector del Proyecto

AGRADECIMIENTOS

A mi madre y hermana, quienes a pesar de las circunstancias, me han llenado de apoyo y cariño incondicional. Quienes me han dado la disciplina y convicción para seguir mis sueños.

A mis amigos más entrañables, Daniela, Ángel, Andrés, Esteban y Josué, que gracias a su apoyo, cariño y presencia, me han dado ánimos en los momentos más difíciles de este camino.

Al Dr. Nicola Di Teodoro por habernos dado la oportunidad de trabajar en la investigación. Con su experiencia, siempre ha tenido palabras para guiarnos tanto en la matemática como en la vida.

A todas las personas que me han impulsado en el camino de la matemática, presentes y ausentes.

DEDICATORIA

*A todas las personas que me han apoyado incondicionalmente,
este es un logro tanto para ustedes, como para mi.*

Índice general

Resumen	VIII
Abstract	IX
1. Introducción	1
2. Preliminares	4
2.1. Fundamentos algebraicos	4
2.1.1. Teoría de grupos y anillos	4
2.1.2. Álgebras sobre un campo	8
2.2. Análisis complejo	9
2.2.1. Números complejos	9
2.2.2. Funciones analíticas	11
2.3. Cálculo fraccionario	13
2.3.1. Integral fraccionaria en el sentido de Riemann-Liouville . . .	14
2.3.2. Derivada fraccionaria en el sentido de Riemann-Liouville . .	16
2.3.3. Función de Mittag-Leffler	19
3. Análisis sobre números complejos generalizados	22
3.1. Números complejos generalizados	22
3.2. Clasificación	24
3.2.1. Números elípticos	25
3.2.2. Números hiperbólicos	29
3.2.3. Números parabólicos	30

3.3. Trigonometría	32
3.4. Funciones analíticas sobre $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$	37
4. Funciones tipo elementales fraccionarias sobre números complejos generalizados	45
4.1. Funciones fraccionarias analíticas en $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$	46
4.1.1. Polinomios analíticos fraccionarios	48
4.2. Función exponencial fraccionaria sobre $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$	50
4.3. Funciones trigonométricas fraccionarias sobre $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$	54
5. Conclusiones y trabajo futuro	59
5.1. Conclusiones	59
5.2. Trabajo futuro	60
Bibliografía	62

Resumen

En el presente trabajo se busca caracterizar funciones tipo elementales, es decir, funciones análogas a la exponencial, seno y coseno, sobre estructuras de números complejos generalizados en cálculo fraccionario. Con este objetivo, se repasa primero los fundamentos algebraicos necesarios para presentar los números complejos y la teoría de funciones analíticas. Luego, se introduce el cálculo fraccionario en una dimensión en el sentido de Riemann-Liouville, con sus definiciones de la integral y derivada fraccionaria, junto con sus propiedades relevantes para el desarrollo de este trabajo. Posteriormente, se presenta al álgebra de números complejos generalizados, sus propiedades algebraicas, trigonométricas y teoría de funciones analíticas, comparando los resultados con el caso complejo. Los números complejos generalizados se unen con el cálculo fraccionario siguiendo las ideas propuestas en [6] y [14] para extender el cálculo fraccionario a dos dimensiones y definir el análisis fraccionario sobre complejos generalizados. Esto conlleva a definir una teoría de funciones analíticas fraccionarias generalizadas que hace posible caracterizar la función exponencial fraccionaria y las funciones trigonométricas fraccionarias sobre esta álgebra.

Palabras claves: números complejos generalizados, cálculo fraccionario, operador de Cauchy-Riemann, análisis fraccionario generalizado.

Abstract

In this thesis, elementary type functions are characterized, specifically the exponential, sine and cosine functions. This characterization is done over a generalization of complex analysis, using fractional calculus and generalized complex numbers. With this goal in mind, fundamental algebra, complex numbers and a theory of analytic functions is revised. Then, fractional calculus in the Riemann-Liouville sense is presented, along with definitions of the fractional integral and derivative, and relevant results for the scope of this work. After this, generalized complex numbers are introduced, with its algebraic properties, trigonometry and theory of analytic functions, comparing with known results of complex analysis. Generalized complex numbers and fractional calculus are merged following ideas presented in [6] and [14] that extend fractional calculus in two dimensions, and define fractional generalized complex analysis from where a theory of fractional generalized analytic functions follows. This allows a characterization of the fractional exponential type function and fractional trigonometric type functions over generalized complex numbers.

Key words: generalized complex numbers, fractional calculus, Cauchy-Riemann operator, fractional generalized analysis.

Capítulo 1

Introducción

Desde que los números complejos han sido definidos como una estructura algebraica sobre \mathbb{R}^2 por J. Warren, se han buscado formas relevantes de generalizarlos. La primera generalización la hizo W.L. Hamilton, describiendo una estructura algebraica sobre \mathbb{R}^4 la cual llamó *cuaterniones*, denotados por \mathbb{H} [24]. Esta clase de números obtuvo relevancia en la física pues permite describir con facilidad la traslación y rotación de objetos en tres dimensiones, véase [1]. El campo de estudio más amplio que contiene a todas las ramas de generalizaciones de los números complejos se llama álgebras hipercomplejas o números hipercomplejos [2]. Las estructuras conocidas como \mathbb{R} , \mathbb{C} y el ya mencionado \mathbb{H} son casos particulares de este campo. Las *álgebras de Clifford* $\mathcal{C}\ell_n$ [6] y los *números bicomplejos* \mathbb{BC} [18] son otros ejemplos de álgebras hipercomplejas, la primera siendo una estructura sobre \mathbb{R}^n relevante en la mecánica cuántica, ver [6]. Los números bicomplejos son un álgebra sobre \mathbb{R}^4 similar a los cuaterniones, con el añadido de ser conmutativa. Es por esto que los bicomplejos se conocen como la versión conmutativa de los cuaterniones.

Un caso particular de un álgebra hipercompleja sobre \mathbb{R}^2 que se presenta en este trabajo, es el álgebra de los *números complejos generalizados* $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$. De manera breve, los números complejos generalizados son de la forma $z = x + iy$, similar a los números complejos, pero definiendo de manera distinta el producto de modo que $i^2 = -\alpha - \beta i$, siendo α y β dos constantes reales. Para valores particulares, como $\alpha = 1$ y $\beta = 0$, se recupera el caso complejo \mathbb{C} ; lo cual explica el por qué se les conoce como complejos generalizados. De la misma manera, otras álgebras conmutativas sobre \mathbb{R}^2 son casos particulares de esta, como los números duales y dobles, cuya relevancia también está en la física relativista [2, 9, 30]. Álgebras hipercomplejas sobre \mathbb{R}^n , para dimensiones mayores a 4, son un campo activo de investigación, incluyendo análisis

sobre estas estructuras.

Por otro lado, una generalización del cálculo diferencial e integral se hace presente. La idea de generalizar el cálculo de esta manera nació en conversaciones entre G. Leibniz y L'Hôpital, al plantearse cómo se vería la derivada de orden $\frac{1}{2}$ de x , ver [3, 19]. Como consecuencia de esta conversación, se desarrolló el cálculo fraccionario, en donde se tienen diversas definiciones de derivadas e integrales de órdenes reales y hasta complejos, junto con propiedades análogas al caso entero como regla de la cadena, regla de Leibniz, teoremas de valor medio, entre otros [7, 21, 23]. Para mencionar algunos de los caminos que se pueden tomar para definir operadores fraccionarios, están los de Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville y Caputo, el último siendo el que tiene mayor acogida en las aplicaciones [15, 19].

Una manera de unir estas dos ramas, es mediante el método desarrollado por F. Sommen, y sus colaboradores, reemplazando las derivadas parciales en cada dirección ortogonal y reemplazarlas por derivadas fraccionarias, ver [6, 14]. Este método ha dado paso al análisis fraccionario hipercomplejo, en donde ya se han hecho estudios sobre \mathbb{BC} en [5] y sobre $\mathcal{C}\ell_n$ en [4, 8, 14]. En $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ ya se ha empezado el trabajo, describiendo primero la noción de funciones analíticas fraccionarias y la caracterización de una familia de polinomios que emulen las fórmulas de derivadas de polinomios pero en el contexto fraccionario, véase [27]. El siguiente paso es buscar caracterizar funciones tipo elementales en el contexto fraccionario, es decir, funciones que mantengan las propiedades de una exponencial o del seno y coseno sobre $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ pero en el contexto fraccionario de Riemann-Liouville, el cual es el objetivo principal de este trabajo.

Este trabajo se divide en 5 capítulos, siendo esta introducción el primero de ellos. En el segundo capítulo se presentan las preliminares necesarias para el desarrollo de los capítulos 3 y 4, iniciando con el fundamento algebraico que ayudará a comprender la construcción tanto de \mathbb{C} como de $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$. Luego, se presenta la teoría del análisis complejo necesario para compararlo con el análisis sobre $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ que se presenta en el siguiente capítulo. Se sigue definiendo la integral y la derivada fraccionaria en el sentido de Riemann-Liouville, junto con sus propiedades relevantes para el Capítulo 4. También se define una función que tiene suma importancia en el contexto del cálculo fraccionario, la función de Mittag-Leffler. Se verá que esta interviene en las funciones propias o auto-funciones de la derivada fraccionaria y por tanto será de utilidad para caracterizar funciones tipo exponenciales.

En el Capítulo 3 se presenta de manera más detallada el álgebra de números

complejos generalizados $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ y se estudian sus propiedades algebraicas y trigonométricas, viendo que esta álgebra tiene funciones seno, coseno y exponencial que cumplen identidades trigonométricas análogas a las reales o complejas, además de preservar propiedades analíticas similares a las de \mathbb{C} . Se termina introduciendo resultados principales y necesarios de análisis sobre $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ y su respectiva teoría de funciones analíticas junto con resultados de la función exponencial sobre $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$, esto con el fin de adaptarlo al análisis fraccionario generalizado.

El Capítulo 4 presenta definiciones y resultados principales del análisis fraccionario sobre números complejos generalizados, en específico sobre el operador de Cauchy-Riemann que caracteriza funciones analíticas en el caso ordinario y funciones fraccionario analíticas en el caso fraccionario. Luego, de las propiedades de la función de Mittag-Leffler, se caracteriza una función del tipo exponencial para el operador de Cauchy-Riemann fraccionario generalizado. Esto se lo hace con el fin de caracterizar funciones tipo trigonométricas a partir de esta, y de igual manera proceder a estudiar sus propiedades analíticas relacionadas al operador de Cauchy-Riemann e identidades trigonométricas que resulten en las conocidas del caso ordinario.

El trabajo termina en el Capítulo 5 con conclusiones de la investigación y el trabajo futuro que ha surgido de esta.

Capítulo 2

Preliminares

2.1. Fundamentos algebraicos

Se revisarán conceptos y resultados básicos de estructuras algebraicas que han sido estudiados y demostrados con mayor profundidad en [13, 16, 17].

2.1.1. Teoría de grupos y anillos

DEFINICIÓN 2.1. *Sea G un conjunto no vacío. Se define una operación binaria sobre G*

$$\begin{aligned} + : G \times G &\longrightarrow G \\ (x, y) &\longmapsto x + y. \end{aligned}$$

1. *Se dice que $(G, +)$ es un grupo si se cumplen las siguientes propiedades:*

- a) *Clausura: $x + y \in G$ para todo $x, y \in G$.*
- b) *Asociatividad: $x + (y + z) = (x + y) + z$, para todo $x, y, z \in G$.*
- c) *Existencia del elemento neutro: Existe $e \in G$ tal que para todo $x \in G$, se tiene que $x + e = e + x = x$.*
- d) *Existencia del inverso: Para todo $x \in G$, existe $-x \in G$ tal que $x + (-x) = (-x) + x = e$.*

2. *Si $(G, +)$ cumple únicamente las propiedades de clausura y asociatividad, se dirá que es un semigrupo.*

3. Si $(G, +)$ es un grupo y $H \subset G$ no vacío, entonces se dirá que $(H, +)$ es un subgrupo de $(G, +)$, si es un grupo.

Si no existe necesidad de especificar respecto a qué operación $(G, +)$ es un grupo, entonces simplemente se dirá que G es un grupo. Se dice que G es un grupo abeliano o conmutativo si es un grupo y , para todo $x, y \in G$, $x + y = y + x$.

DEFINICIÓN 2.2. Sea R un conjunto no vacío. Se definen las siguientes operaciones binarias sobre R :

$$+ : R \times R \longrightarrow R \\ (x, y) \longmapsto x + y,$$

$$\cdot : R \times R \longrightarrow R \\ (x, y) \longmapsto x \cdot y.$$

Se dice que $(R, +, \cdot)$ es un anillo si $(R, +)$ es un grupo abeliano y se cumplen las siguientes propiedades respecto a la operación \cdot :

1. Clausura: $x \cdot y \in R$ para todo $x, y \in R$.
2. Asociatividad: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ para todo $x, y, z \in R$.
3. Distributividad: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$, $y \cdot (x + z) = y \cdot x + y \cdot z$ para todo $x, y, z \in R$.

A la operación $+$ se la conoce como suma o adición, y a la operación \cdot se la conoce como multiplicación o producto. Por simplicidad, se dirá que R es un anillo si no hay necesidad de especificar qué operaciones de adición y producto se están usando. Se dice que un anillo R es conmutativo si para todo $x, y \in R$ se tiene $x \cdot y = y \cdot x$. Además, se dice que un anillo R es unitario si existe un elemento $1 \in R$ tal que para todo $x \in R$, $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$.

DEFINICIÓN 2.3. Sea $(R, +, \cdot)$ un anillo conmutativo. Se dice que $x \in R \setminus \{e\}$ es un divisor de cero si existe $y \in R \setminus \{e\}$ tal que $x \cdot y = e$. El conjunto de divisores de cero, incluido el neutro de la suma, se denota por

$$\text{Sing}_R.$$

DEFINICIÓN 2.4.

1. Se dice que un anillo conmutativo es un dominio integral si no tiene divisores de cero.
2. Se dice que $(R, +, \cdot)$ es un cuerpo si es un dominio integral tal que $(R \setminus \{e\}, \cdot)$ es un grupo abeliano.

Presentemos algunos ejemplos importantes de anillos.

EJEMPLO 1.

- Considere \mathbb{R}^4 dotado de su suma usual. Escribiendo la base canónica como $1 = (1, 0, 0, 0)$, $i = (0, 1, 0, 0)$, $j = (0, 0, 1, 0)$ y $k = (0, 0, 0, 1)$, se puede escribir cualquier cuádrupla $(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4$ como

$$x_0 + ix_1 + jx_2 + kx_3.$$

Al conjunto de estos números, junto con un producto definido de manera que 1 sea la unidad y los elementos de la base cumplan

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1,$$

se lo conoce como cuaterniones \mathbb{H} . Esta estructura forma un anillo no conmutativo sin divisores de cero.

- Sobre \mathbb{R}^4 , se puede construir otra estructura como los cuaterniones. Definiendo el producto tal que

$$i^2 = j^2 = -1, \quad k^2 = 1$$

y

$$ij = k = ji.$$

se construyen los números bicomplejos \mathbb{BC} . Este conjunto es un anillo conmutativo, pero tiene divisores de ceros.

- Dado un cuerpo K , se define el conjunto de polinomios con coeficientes en K , de variable x de la siguiente manera

$$K[x] = \left\{ \sum_{k=0}^n a_k x^k : n \in \mathbb{N}, a_k \in K \text{ para } k = 0, \dots, n \right\}.$$

Sobre este conjunto se definen la suma y multiplicación de dos polinomios

$$p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k \quad \text{y} \quad q(x) = \sum_{j=0}^m b_j x^j,$$

de la siguiente manera

$$p(x) + q(x) = \sum_{k=0}^{\max\{n,m\}} (a_k + b_k)x^k,$$

$$p(x) \cdot q(x) = \sum_{k=0}^{nm} c_k x^k,$$

donde $c_k = \sum_{j=0}^k a_j b_{k-j}$, para cada $k = 0, \dots, nm$. $(K[x], +, \cdot)$ es un anillo conmutativo con unidad, donde el elemento neutro multiplicativo es la unidad de K visto como polinomio de grado cero.

DEFINICIÓN 2.5. Se dice que $U \subset R$ es un ideal del anillo unitario R si cumple lo siguiente:

1. U es un subgrupo de R respecto a la suma.
2. Para todo $u \in U$ y $x \in R$, $ux \in U$ y $xu \in U$.

Se dirá que un ideal U de R es maximal si cualquier otro ideal $W \subset R$ tal que $U \subset W \subset R$ implica que $W = U$ ó $W = R$.

DEFINICIÓN 2.6. Sean $(R, +, \cdot)$ un anillo unitario y U un ideal de R . Para todo $x, y \in R$, se define la relación de equivalencia $x \sim_U y$ si y solo si $x - y \in U$. El espacio cociente R partido por esta relación de equivalencia está dado por

$$R/U = \{x + U : x \in R\}.$$

Sobre este conjunto, la suma y multiplicación se definen de la siguiente manera:

$$(x + U) \oplus (y + U) = (x + y) + U,$$

$$(x + U) \odot (y + U) = (x \cdot y) + U.$$

PROPOSICIÓN 2.1. Sean R un anillo unitario conmutativo y U un ideal de R . Entonces, U es un ideal maximal si y solo si R/U es un cuerpo.

Demostración. Véase en [13, Teo. 3.B] o [17, Teo. 9.20]. □

EJEMPLO 2. Considerando el anillo de polinomios de un cuerpo K visto en el Ejemplo 1, dado cualquier $p(x) \in K[x]$, el conjunto generado por este polinomio definido como

$$\langle p(x) \rangle = \{kp(x) : k \in K\},$$

es un ideal. Más aún, este será maximal si y solo si $p(x)$ es irreducible en K , es decir, que no exista $a \in K$ tal que $p(a) = 0$.

De este ejemplo y por la Proposición 2.1, se obtiene el siguiente resultado:

PROPOSICIÓN 2.2. *Dados un cuerpo K y $p(x) \in K[x]$, el anillo cociente $K[x]/\langle p(x) \rangle$ es un cuerpo si y solo si $p(x)$ es irreducible en K .*

2.1.2. Álgebras sobre un campo

DEFINICIÓN 2.7.

1. Sean V un anillo y K un cuerpo. Se dice que V es un álgebra sobre K si V es un K -espacio vectorial tal que para todo $\lambda \in K$ y $x, y \in V$, se cumple

$$(\lambda x) \cdot y = \lambda(x \cdot y) = x \cdot (\lambda y).$$

2. Diremos que W es una subálgebra de V si W es un subespacio vectorial de V tal que $x \cdot y \in W$, para todo $x, y \in W$.

Se dirá que un álgebra es conmutativa si el producto definido es conmutativo. Si V tiene unidad (viéndolo como anillo), entonces se dirá que V es un álgebra unitaria o con unidad.

Un elemento $x \in V$ se dice que tiene inverso por la derecha si existe $y \in V$ tal que $x \cdot y = 1$. De manera similar, se dirá que x tiene inverso por la izquierda si existe $z \in V$ tal que $z \cdot x = 1$. Si x tiene inverso por derecha e izquierda que coincidan, entonces se dirá que es invertible y a su inverso se lo denota como x^{-1} .

OBSERVACIÓN. Todos los resultados vistos en la subsección anterior para anillos conmutativos se cumplen también para álgebras conmutativas pues, estas también son anillos conmutativos.

Si la dimensión del espacio vectorial V es finita, se puede fijar una base de esta, de la forma:

$$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\},$$

donde $\dim V = n$ y cualquier elemento $x \in V$ se puede escribir como

$$x = \sum_{k=1}^n a_k v_k,$$

con $a_k \in K$, para $k = 1, \dots, n$.

Para fijar ideas, se presenta a continuación ejemplos conocidos de álgebras:

EJEMPLO 3.

- Los cuaterniones \mathbb{H} forman un álgebra conmutativa sobre \mathbb{R} de dimensión 4.
- Los números bicomplejos \mathbb{BC} forman un álgebra no conmutativa sobre \mathbb{R} de dimensión 4, ver [18].
- El anillo de polinomios $K[x]$ presentado en el Ejemplo 1 es un álgebra unitaria y conmutativa sobre K . Su dimensión es infinita.

Similar a grupos, anillos y espacios vectoriales, se puede definir homomorfismos entre álgebras.

DEFINICIÓN 2.8. Sean V y W dos álgebras sobre K , con \odot_V y \odot_W sus productos respectivos. Un homomorfismo de álgebra es una aplicación lineal $T : V \rightarrow W$ tal que

$$T(x \odot_V y) = T(x) \odot_W T(y).$$

Se dirá que V y W son isomorfos si existe un homomorfismo de álgebras que sea biyectivo.

2.2. Análisis complejo

Un ejemplo clásico de grupos, anillos y álgebras sobre \mathbb{R} es el de los números complejos, que se introducen formalmente en esta sección. Se presentan también resultados principales del análisis complejo y funciones analíticas que serán de utilidad para discusiones posteriores. Las demostraciones de los resultados principales se pueden encontrar detalladas en [20, 26, 28, 29, 31].

2.2.1. Números complejos

Sobre \mathbb{R}^2 , dotado de su suma usual, se define un producto entre sus vectores de la siguiente manera:

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) := (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2).$$

Denotando a los vectores de la base como $1 = (1, 0)$ e $i = (0, 1)$, podemos escribir $z = (x, y) = x + iy$. En consecuencia, se tiene que $i^2 = -(0, 1) = -1$. Así, el conjunto de números complejos se define de la siguiente manera:

$$\mathbb{C} := \{z = x + iy : x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}.$$

Los números complejos \mathbb{C} bajo su suma y el producto usuales definidos es un álgebra sobre \mathbb{R} .

El conjugado de un número complejo $z = x + iy$ viene dado por la expresión

$$\bar{z} = x - iy$$

y el módulo o magnitud de z por

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

El módulo define una norma sobre \mathbb{C} y no es difícil ver que $z \cdot \bar{z} = |z|^2$. El inverso multiplicativo de un número complejo se calcula fácilmente con la expresión

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

A los números complejos se les puede expresar en su forma polar

$$z = |z|e^{i\theta},$$

donde $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$ y $\theta \in [0, 2\pi)$ es el ángulo que forma con el eje real. Esta representación facilita la multiplicación de números complejos pues para $z = |z|e^{i\theta_1}$ y $w = |w|e^{i\theta_2}$, se tiene que

$$zw = |z||w|e^{i(\theta_1+\theta_2)}.$$

Por inducción, se obtiene la fórmula de De Moivre:

$$z^n = |z|^n e^{in\theta},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

2.2.2. Funciones analíticas

Para discutir sobre funciones analíticas es necesario definir discos abiertos. Estos conjuntos son de la forma

$$D(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\},$$

donde $z_0 \in \mathbb{C}$ y $R > 0$.

DEFINICIÓN 2.9. Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función compleja. Se dice que f es diferenciable en $z \in \Omega$ si el siguiente límite existe

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h},$$

donde $h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $h+z \in \Omega$. A $f'(z)$ se le conocerá como la derivada de f en z .

Si una función es diferenciable sobre todo $z \in \Omega$, se dirá que es diferenciable en Ω .

DEFINICIÓN 2.10. Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función compleja. Se dice que f es analítica en $z \in \Omega$ si existe $R > 0$ tal que f es diferenciable sobre el disco abierto $D(z, R)$.

Si una función es analítica en todo punto $z \in \Omega$ entonces se dirá que es analítica sobre Ω .

Un ejemplo de funciones analíticas son las series de potencias. Una serie de potencias es una función f que tiene la forma

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k (z - z_0)^k,$$

donde $z_0, c_k \in \mathbb{C}$ son constantes complejas, para todo $k \in \mathbb{N}_0$. Convergencia de esta serie involucra discos abiertos, cuyo radio R pasará a ser llamado radio de convergencia y está ligado a las constantes c_k . Formalmente, se tiene el siguiente teorema.

TEOREMA 2.3 (Cauchy-Hadamard). Dada una serie de potencias $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k (z - z_0)^k$, existe $0 \leq R \leq +\infty$, dada por

$$\frac{1}{R} = \limsup_{k \rightarrow +\infty} |c_k|^{\frac{1}{k}},$$

tal que

1. Si $z \in D(z_0, R)$, la serie converge absolutamente.

2. Si $z \notin D(z_0, R)$, la serie diverge.

Cuando $R = +\infty$, la serie converge sobre todo \mathbb{C} .

Demostración. Véase en [28, Teo. 3.2.1]. □

TEOREMA 2.4. Si $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es una función que se puede representar como una serie de potencias sobre Ω , entonces f es analítica sobre Ω .

Demostración. Véase en [26, Teo. 2.6]. □

Los siguientes resultados presentan una caracterización para funciones analíticas.

TEOREMA 2.5. Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función tal que $f(x, y) = f_0(x, y) + if_1(x, y)$, donde f_0 y f_1 son funciones real valuadas. Entonces, f es analítica sobre Ω si y solo si se cumplen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\partial_x f_0 &= \partial_y f_1, \\ \partial_y f_0 &= -\partial_x f_1,\end{aligned}\tag{2.1}$$

en Ω . A este sistema de ecuaciones se lo conoce como ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Demostración. Véase en [26, pg. 11]. □

Este sistema de ecuaciones motiva la definición del operador de Cauchy-Riemann

$$\frac{d}{d\bar{z}} = \frac{1}{2} (\partial_x + i\partial_y)\tag{2.2}$$

y su conjugado

$$\frac{d}{dz} = \frac{\bar{d}}{d\bar{z}} = \frac{1}{2} (\partial_x - i\partial_y),\tag{2.3}$$

de manera que caracterizan si una función es analítica o no.

PROPOSICIÓN 2.6. Una función $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es analítica en $z \in \Omega$ si y solo si

$$\frac{d}{d\bar{z}}f(z) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{d}{dz}f(z) = f'(z).$$

Demostración. Véase en [26, Prop. 2.3]. □

EJEMPLO 4.

- Los polinomios $f(z) = z^n$ son analíticos sobre \mathbb{C} , para todo $n \in \mathbb{N}$. En efecto, para cualquier $z \in \mathbb{C}$, del Teorema Binomial se tiene que

$$\begin{aligned}
 f'(z) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(z+h)^n - z^n}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^{n-k} h^k - z^n}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} z^{n-k} h^k}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} z^{n-k} h^{k-1} \\
 &= \binom{n}{1} z^{n-1} \\
 &= n z^{n-1}.
 \end{aligned}$$

- La función exponencial compleja cuya expresión viene dada por

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x \cos(y) + i e^x \sin(y),$$

para todo $z \in \mathbb{C}$, es analítica sobre \mathbb{C} . Además, su derivada es $f'(z) = e^z$, como se esperaría de una función exponencial. En efecto, se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\begin{aligned}
 \partial_x f_0 &= e^x \cos(y) = \partial_y f_1, \\
 \partial_y f_0 &= -e^x \sin(y) = -\partial_x f_1
 \end{aligned}$$

y además,

$$f'(z) = \frac{d}{dz} e^z = \frac{1}{2} (\partial_x - i\partial_y) e^x e^{iy} = \frac{e^x e^{iy} + e^x e^{iy}}{2} = e^z.$$

2.3. Cálculo fraccionario

Durante esta sección se hará mención a nociones del análisis funcional y teoría de la medida como Riemann integrabilidad, Lebesgue integrabilidad, los espacios de Lebesgue y el espacio de funciones n veces continuamente diferenciables. Al no ser el enfoque principal de este trabajo, no se profundiza en estos temas y se refiere al lector a [10] para hacerlo. A los espacios de Lebesgue se les denotará por $L^p(a, b)$

y al espacio de funciones n veces continuamente diferenciables como $C^n(a, b)$.

2.3.1. Integral fraccionaria en el sentido de Riemann-Liouville

Considere f una función Riemann-integrable sobre el intervalo finito $[a, b] \subset \mathbb{R}$. El operador integral está definido como

$$I_a f(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad (2.4)$$

para cada $x \in [a, b]$. Gracias a la fórmula integral de Cauchy para integrales iteradas (ver [21]), se tiene la siguiente fórmula para $n \in \mathbb{N}$

$$I_a^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt, \quad (2.5)$$

para cada $x \in [a, b]$. En particular, cuando $n = 1$, $I_a^1 f(x)$ coincide con la expresión (2.4). Recordando que para cualquier $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n) = (n-1)!$, donde Γ es la función Gamma definida como

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt,$$

para todo $z \in \mathbb{C}$, podemos reescribir (2.5) como

$$I_a^n f(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt.$$

En esta ecuación, no hay problema reemplazar n por un número real positivo ν . Esto motiva la siguiente definición.

DEFINICIÓN 2.11. Sean $a, b, \nu \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$ y $\nu \geq 0$, y $f \in L^1(a, b)$. Se define la integral fraccionaria en el sentido de Riemann-Liouville de orden ν de f como

$$I_{a+}^\nu f(x) := \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_a^x (x-t)^{\nu-1} f(t) dt, \quad (2.6)$$

para cada $x \in [a, b]$.

Para $\nu = 0$ se fija I_{a+}^0 como el operador identidad, es decir, $I_{a+}^0 f = f$.

Naturalmente, se muestra que el operador está bien definido sobre $L^1(a, b)$ y en qué espacio reside su imagen.

TEOREMA 2.7. Sea $f \in L^1(a, b)$ y $\nu > 0$ un número real. Entonces $I_{a+}^\nu f$ existe c.t.p. $x \in [a, b]$. Además, $I_{a+}^\nu f \in L^1(a, b)$.

Demostración. Véase en [7, Teo. 2.1]. □

Se presentan algunas propiedades que serán de importancia para el desarrollo del trabajo. La linealidad del operador se obtiene directamente de la linealidad de la integral.

TEOREMA 2.8. *Sea $f \in L^1(a, b)$ y $\nu, \mu > 0$ dos números reales. Entonces*

$$I_{a^+}^\nu (I_{a^+}^\mu f) = I_{a^+}^\mu (I_{a^+}^\nu f) = I_{a^+}^{\nu+\mu} f, \quad (2.7)$$

c.t.p. sobre $[a, b]$. Más aún, si $f \in C([a, b])$ ó $\mu + \nu \geq 1$, el resultado se cumple sobre todo $[a, b]$.

Demostración. Véase en [7, Teo. 2.4]. □

OBSERVACIÓN. Gracias a este resultado, el conjunto $\{I_{a^+}^\nu : \nu \geq 0\}$ forma un semi-grupo conmutativo respecto a la composición de operadores.

TEOREMA 2.9. *Sean $\nu > 0$ un número real y $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones continuas sobre $[a, b]$ que converge uniformemente. Entonces*

$$\left(\lim_{k \rightarrow +\infty} I_{a^+}^\nu f_k \right) (x) = \left(I_{a^+}^\nu \left(\lim_{k \rightarrow +\infty} f_k \right) \right) (x), \quad (2.8)$$

para cada $x \in [a, b]$. En particular, $(I_{a^+}^\nu f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es uniformemente convergente.

Demostración. Véase en [7, Teo. 2.7]. □

TEOREMA 2.10. *Sean $1 \leq p < +\infty$ y $(\nu_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión convergente de números reales no negativos tal que $\nu_k \rightarrow \nu$. Entonces, para todo $f \in L^p(a, b)$*

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} I_{a^+}^{\nu_k} f = I_{a^+}^\nu f,$$

donde la convergencia es en L^p .

Demostración. Véase en [7, Teo. 2.9]. □

Para propiedades análogas al caso no fraccionario se refiere a [7, 21, 23]. Puesto que en posteriores secciones se hará uso de polinomios, es conveniente introducir el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 5. Sea $\nu > 0$ un número real y consideremos la función $f(x) = (x - a)^\mu$, con $x \in [a, b]$ y $\mu > -1$. De la Definición 2.11 se tiene que

$$I_{a^+}^\nu f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_a^x (x - t)^{\nu-1} (t - a)^\mu dt.$$

Tomando el cambio de variable $t = a + \xi(x - a)$ en la expresión anterior permite escribir

$$\begin{aligned} I_{a^+}^\nu f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} (x - a)^{\mu+\nu} \int_0^1 \xi^\mu (1 - \xi)^{\nu-1} d\xi \\ &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} (x - a)^{\mu+\nu} B(\nu, \mu + 1), \end{aligned} \quad (2.9)$$

donde $B(\cdot, \cdot)$ es la función beta usual definida como

$$B(z, w) = \int_0^1 t^{z-1} (1 - t)^{w-1} dt,$$

para $z, w \in \mathbb{C}$ tales que $\operatorname{Re}(z), \operatorname{Re}(w) > 0$. Por propiedades de esta función (véase [21]), se tiene que

$$B(\nu, \mu + 1) = \frac{\Gamma(\nu)\Gamma(\mu + 1)}{\Gamma(\mu + \nu + 1)}.$$

Reemplazando en (2.9) se obtiene la expresión

$$I_{a^+}^\nu f(x) = \frac{\Gamma(\mu + 1)}{\Gamma(\mu + \nu + 1)} (x - a)^{\mu+\nu}.$$

2.3.2. Derivada fraccionaria en el sentido de Riemann-Liouville

Para definir de manera completa a la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville se debe introducir el espacio de funciones absolutamente continuas.

DEFINICIÓN 2.12. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Se dice que f es absolutamente continua si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que, si para toda familia de subintervalos de $[a, b]$, dos a dos disjuntos, $\{(a_k, b_k) : k = 1, \dots, n\}$, que cumple

$$\sum_{k=1}^n |a_k - b_k| < \delta,$$

entonces

$$\sum_{k=1}^n |f(a_k) - f(b_k)| < \varepsilon.$$

Al espacio de funciones absolutamente continuas sobre $[a, b]$ se lo denota por $AC([a, b])$. Se dirá que $f \in AC^n([a, b])$, con $n \in \mathbb{N}$, si $f^{(k)} \in AC([a, b])$ para $k = 0, \dots, n - 1$.

Nótese que bajo esta definición, $AC^1([a, b]) = AC([a, b])$. Además, de manera general se tiene que $C^n([a, b]) \subset AC^n([a, b]) \subset C^{n-1}([a, b])$.

Retornando al enfoque de la derivada fraccionaria, se denotará a la derivada de orden $n \in \mathbb{N}$ por D^n . Se recuerda que, para una función $f \in C^n([a, b])$, se cumple la siguiente igualdad

$$D^n f = D^m (I_a^{m-n} f),$$

donde $m \in \mathbb{N}$ es tal que $m > n$. Habiendo ya introducido la integral fraccionaria, no existe problema cambiar n por $\nu > 0$ un número real, en la anterior igualdad. Esto motiva la definición de derivada fraccionaria.

DEFINICIÓN 2.13. Sean $a, b, \nu \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$ y $\nu > 0$, $s = \lceil \nu \rceil$ y $f \in AC^1([a, b])$. Se define a la derivada fraccionaria en el sentido de Riemann-Liouville de orden ν de f como

$$D_{a+}^\nu f(x) := D^s I_{a+}^{s-\nu} f(x). \quad (2.10)$$

En esta definición, la función $\lceil \cdot \rceil$ es la función techo de un número definido como el entero más pequeño que es mayor o igual a su argumento. Nuevamente, se fija D_{a+}^0 como el operador identidad.

La expresión (2.10) es equivalente a

$$D_{a+}^\nu f(x) = \frac{1}{\Gamma(s-\nu)} \frac{d^s}{dx^s} \int_a^x (x-t)^{s-\nu-1} f(t) dt. \quad (2.11)$$

OBSERVACIÓN. Nótese que si $\nu \in \mathbb{N}$, entonces $s = \nu$ y por tanto, en (2.10) se tiene que la derivada fraccionaria coincide con la derivada entera de orden ν .

El siguiente resultado muestra que el operador está bien definido:

LEMA 2.11. Si $\nu > 0$, $s = \lceil \nu \rceil$ y $f \in AC^s([a, b])$, entonces $D_{a+}^\nu f$ existe c.t.p. en $[a, b]$. Más aún, $D_{a+}^\nu f \in L^p(a, b)$ para $1 < p < \frac{1}{\nu}$ y

$$D_{a+}^\nu f(x) = \sum_{k=0}^{s-1} \frac{(x-a)^{k-\nu}}{\Gamma(1+k-\nu)} \frac{d^k f}{dx^k}(a) + \frac{1}{\Gamma(s-\nu)} \int_a^x (x-t)^{s-\nu-1} \frac{d^s f}{dx^s}(t) dt.$$

Demostración. Véase en [15, Lem. 2.2]. □

La linealidad del operador se sigue de la linealidad de la integral fraccionaria y de la derivada de orden entero.

Contrario a las integrales fraccionarias, la composición de derivadas fraccionarias no siempre conmuta ni resultan en otra derivada fraccionaria, es decir, no siempre

se tiene

$$D_{a^+}^{\nu} D_{a^+}^{\mu} = D_{a^+}^{\mu} D_{a^+}^{\nu},$$

ó

$$D_{a^+}^{\nu} D_{a^+}^{\mu} = D_{a^+}^{\nu+\mu}.$$

Para lograr que el operador conmute hay que imponer ciertas condiciones sobre las funciones que se consideran.

TEOREMA 2.12. Sean $\nu, \mu > 0$ dos números reales, $s = \lceil \nu \rceil, r = \lceil \mu \rceil$ y $f \in AC^m([a, b])$, donde $m = \max\{s, r\}$, tal que cumple

$$\frac{d^k f}{dx^k}(a) = 0,$$

para $k = 0, \dots, m - 1$. Entonces $D_{a^+}^{\mu+\nu} f$ existe y además:

$$D_{a^+}^{\nu} D_{a^+}^{\mu} f = D_{a^+}^{\mu} D_{a^+}^{\nu} f = D_{a^+}^{\nu+\mu} f.$$

Demostración. Véase en [21, Sec. 2.3.6]. □

TEOREMA 2.13. Sean $\nu > 0$ un número real y $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones continuas sobre $[a, b]$ que converge uniformemente. Suponga además que $D_{a^+}^{\nu} f_k$ existe para cada $k \in \mathbb{N}$ y que $(D_{a^+}^{\nu} f_k)$ converge uniformemente sobre $[a + \varepsilon, b]$, para todo $\varepsilon > 0$. Entonces

$$\left(\lim_{k \rightarrow +\infty} D_{a^+}^{\nu} f_k \right) (x) = \left(D_{a^+}^{\nu} \left(\lim_{k \rightarrow +\infty} f_k \right) \right) (x), \quad (2.12)$$

para cada $x \in (a, b]$.

Demostración. Véase en [7, Teo. 2.15]. □

TEOREMA 2.14. Sea $f \in C^m([a, b])$, con $m \in \mathbb{N}$. Se tiene que

$$\lim_{\nu \rightarrow m^-} D_{a^+}^{\nu} f(x) = \frac{d^m f}{dx^m}(x),$$

para todo $x \in (a, b]$.

Demostración. Véase en [7, Sec. 2.2]. □

EJEMPLO 6. Aprovechando la expresión (2.9) y (2.10), se puede calcular directamente la derivada fraccionaria de la función $f(x) = (x - a)^{\mu}$, con $\mu > -1$:

$$D_{a^+}^{\nu} f(x) = \frac{d^s}{dx^s} \left(\frac{\Gamma(\mu + 1)}{\Gamma(s - \nu + \mu + 1)} (x - a)^{\mu+s-\nu} \right)$$

$$= \frac{\Gamma(\mu + 1)}{\Gamma(\mu - \nu + 1)} (x - a)^{\mu - \nu}.$$

Esta expresión de aquí facilita ver que las constantes no se anulan cuando se les aplica la derivada fraccionaria en el sentido de Riemann-Liouville. En efecto, si se toma $\mu = 0$ en la expresión anterior, obtenemos que $f(x) = 1$ y su derivada fraccionaria vendría dada por la expresión

$$D_{a^+}^{\nu}(1) = \frac{1}{\Gamma(1 - \nu)} (x - a)^{-\nu},$$

la cual es no nula. Por linealidad del operador, se sigue que la derivada no se anula para constantes distintas de cero, contrario al caso entero.

El siguiente resultado caracteriza el núcleo del operador derivada fraccionaria.

LEMA 2.15. *Sean $\nu > 0$ un número real y $s = \lceil \nu \rceil$. Se tiene que $D_{a^+}^{\nu} f = 0$ si y solo si existen constantes reales c_k , con $k = 1, \dots, s$, tales que para todo $x \in [a, b]$ se puede escribir*

$$f(x) = \sum_{k=1}^s c_k (x - a)^{s-k}.$$

Demostración. Véase en [15, Cor. 2.1]. □

2.3.3. Función de Mittag-Leffler

Teniendo en cuenta el enfoque de este trabajo, se debe introducir una función *especial* relacionada con la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville.

Para dos parámetros $u > 0$ real y $\nu \in \mathbb{C}$, se define la función de Mittag-Leffler como

$$E_{u,\nu}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(uk + \nu)}, \quad (2.13)$$

para todo $z \in \mathbb{C}$. En particular, $E_{u,1} = E_u$ se conoce como la función de Mittag-Leffler de un parámetro y es considerada como la generalización de la función exponencial.

Gracias a las representaciones en series de Taylor, ver [26], para valores específicos de u y ν , se obtienen funciones conocidas como la exponencial compleja

$$E_{1,1}(z) = e^z,$$

el coseno complejo

$$E_{2,1}(-z^2) = \cos(z)$$

y relacionadas a las funciones trigonométricas hiperbólicas

$$E_{2,1}(z) = \cosh(\sqrt{z}), \quad E_{2,2}(z) = \frac{\sinh(\sqrt{z})}{\sqrt{z}}.$$

Propiedades e importancia de esta función se hacen con profundo detalle en el libro [11].

Ahora, al ser esta función una serie, es natural preguntarse sobre su convergencia. El siguiente resultado muestra que esta serie converge sobre todo \mathbb{C} y, por lo tanto, $E_{u,v}$ es finita para cualquier valor de $z \in \mathbb{C}$.

TEOREMA 2.16. *Para todo $u > 0$ real y $v \in \mathbb{C}$, la función de Mittag-Leffler de dos parámetros $E_{u,v}(z)$ converge para cualquier $z \in \mathbb{C}$.*

Demostración. Dado que la función $E_{u,v}$ es una serie de potencias, se va a verificar las hipótesis del Teorema de Cauchy-Hadamard para probar la convergencia de esta serie, por lo cual, hay que estudiar los coeficientes

$$c_k = \frac{1}{\Gamma(uk + v)}.$$

Por la fórmula de Stirling (ver [11]), se tiene que

$$\Gamma(uk + v) = \sqrt{2\pi}(uk)^{uk+v-\frac{1}{2}}e^{-uk}[1 + o(1)],$$

cuando $k \rightarrow +\infty$, en donde $o(\cdot)$ se refiere a la notación orden pequeño. Con esto, se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +\infty} |c_k|^{\frac{1}{k}} &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{|\sqrt{2\pi}(uk)^{uk+v-\frac{1}{2}}e^{-uk}[1 + o(1)]|^{\frac{1}{k}}} \\ &= \frac{1}{e^{-u} \lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt{2\pi}^{\frac{1}{k}} |uk|^{u+\frac{v}{k}-\frac{1}{2k}} [1 + o(1)]^{\frac{1}{k}}} \\ &= \frac{1}{+\infty} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Así, $R = +\infty$, lo que demuestra que $E_{u,v}$ es finita sobre \mathbb{C} . □

Para finalizar esta sección, se presenta la relación que tiene esta función con la derivada fraccionaria.

EJEMPLO 7. Consideremos $\nu, a \in \mathbb{R}$, con $\nu > 0$, y $\lambda \in \mathbb{C}$. Veamos que se tiene la

siguiente expresión

$$D_{a^+}^\nu (x-a)^{\nu-j-1} E_{\nu, \nu-j}(\lambda(x-a)^\nu) = \lambda(x-a)^{\nu-j-1} E_{\nu, \nu-j}(\lambda(x-a)^\nu),$$

para $j = 0, \dots, \lceil \nu \rceil - 1$. En efecto, gracias al Teorema 2.16, se tiene que

$$(x-a)^{\nu-j-1} E_{\nu, \nu-j}(\lambda(x-a)^\nu) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{\Gamma((k+1)\nu-j)} (x-a)^{(k+1)\nu-j-1}.$$

Se aplica la derivada fraccionaria a esta expresión, aprovechando que puede ingresar en la serie por el Teorema 2.13. Por esto y del resultado obtenido en el Ejemplo 6 junto con el Lema 2.15, se obtiene

$$\begin{aligned} D_{a^+}^\nu (x-a)^{\nu-j-1} E_{\nu, \nu-j}(\lambda(x-a)^\nu) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{\Gamma((k+1)\nu-j)} D_{a^+}^\nu (x-a)^{(k+1)\nu-j-1} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k \Gamma((k+1)\nu-j)}{\Gamma((k+1)\nu-j) \Gamma(k\nu-j)} (x-a)^{k\nu-j-1} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{\Gamma(k\nu-j)} (x-a)^{k\nu-j-1}, \end{aligned}$$

tomando el cambio de índice $r = k - 1$, se concluye

$$\begin{aligned} D_{a^+}^\nu (x-a)^{\nu-j-1} E_{\nu, \nu-j}(\lambda(x-a)^\nu) &= \lambda \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{\lambda^r}{\Gamma((r+1)\nu-j)} (x-a)^{(r+1)\nu-j-1} \\ &= \lambda(x-a)^{\nu-j-1} E_{\nu, \nu-j}(\lambda(x-a)^\nu). \end{aligned}$$

OBSERVACIÓN. Del ejemplo anterior tenemos que las funciones de la forma

$$(x-a)^{\nu-j-1} E_{\nu, \nu-j}(\lambda(x-a)^\nu),$$

con $j = 1, \dots, \lceil \nu \rceil$, son funciones propias o autofunciones del operador $D_{a^+}^\nu$. Esto es análogo al caso de la derivada entera, donde funciones exponenciales son funciones propias del operador derivada. Por esta razón, también se conoce a la función de Mittag-Leffler como la exponencial generalizada o exponencial fraccionaria.

Capítulo 3

Análisis sobre números complejos generalizados

En este capítulo se presentará una generalización de los números complejos que ya han sido estudiados en [12, 22, 30]. La mayoría de los resultados presentados en este capítulo sobre los números complejos generalizados fueron extraídos de [12, 30] y los resultados de funciones analíticas sobre esta misma álgebra de [2, 22, 27]. Sin embargo, al ser un tema no abarcado en la carrera, se repasarán las demostraciones por motivos pedagógicos sobre este tema.

3.1. Números complejos generalizados

Similar a lo visto en la Sección 2.2, sobre \mathbb{R}^2 con su suma usual, se define el producto

$$(x_0, y_0) \cdot (x_1, y_1) := (x_0x_1 - \alpha y_0y_1, x_0y_1 + y_0x_1 - \beta y_0y_1),$$

donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ son escalares arbitrarios. Tomando $1 = (1, 0)$ e $i = (0, 1)$, se puede escribir $z = (x, y) = x + iy$, donde $i^2 = -\alpha - \beta i$. Así, se define a los números complejos generalizados como

$$\mathbb{C}_{\alpha, \beta} := \left\{ z = x + iy : x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -\alpha - \beta i \right\}.$$

Por la conmutatividad de \mathbb{R} , se concluye que el producto de este conjunto es conmutativo. A partir de aquí se escribirá zw en vez de $z \cdot w$, para simplificar la escritura.

El conjugado de un número $z = x + iy \in \mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ viene dado por la expresión

$$\bar{z} = x - \beta y - iy$$

y el módulo o magnitud por

$$|z|_{\alpha,\beta} = \sqrt{|x^2 - \beta xy + \alpha y^2|}.$$

No es complicado ver que $|z|_{\alpha,\beta}^2 = |z\bar{z}|$ y $|zw|_{\alpha,\beta} = |z|_{\alpha,\beta}|w|_{\alpha,\beta}$. Además, el inverso multiplicativo de $z \in \mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ se puede calcular mediante

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|_{\alpha,\beta}^2}.$$

EJEMPLO 8. Es interesante analizar la unidad imaginaria i sobre $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$. Por ejemplo, su módulo no es 1

$$|i|_{\alpha,\beta} = \sqrt{|\alpha|}.$$

En particular, cuando $\alpha = 0$, el módulo de i es cero y por tanto no es invertible. Si $\alpha \neq 0$, se tiene que su inverso viene dado por

$$i^{-1} = -\frac{\beta + i}{\alpha}.$$

PROPOSICIÓN 3.1. $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ es un álgebra sobre \mathbb{R} .

Demostración. Puesto que $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ tiene la misma estructura algebraica que \mathbb{C} respecto a la suma, basta con verificar las propiedades del producto para mostrar que $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ es un anillo. Tomando $z = z_0 + iz_1, w = w_0 + iw_1, v = v_0 + iv_1 \in \mathbb{C}_{\alpha,\beta}$, cualesquiera, se tiene que:

- Cumple la propiedad de clausura, pues

$$zw = z_0w_0 - \alpha z_1w_1 + i(z_0w_1 + z_1w_0 - \beta z_1w_1) \in \mathbb{C}_{\alpha,\beta},$$

ya que $z_0w_0 - \alpha z_1w_1, z_0w_1 + z_1w_0 - \beta z_1w_1 \in \mathbb{R}$.

- La asociatividad también se cumple, pues

$$\begin{aligned} z(wv) &= z_0w_0v_0 - \alpha z_0w_1v_1 - \alpha w_0z_1v_1 - \alpha z_1w_1v_0 + \alpha \beta z_1w_1v_1 \\ &\quad + i(z_0w_0v_1 + z_0w_1v_0 - \beta z_0w_1v_1 \\ &\quad + w_0v_0z_1 - \alpha z_1w_1v_1 - \beta w_0z_1v_1 - \beta z_1w_1v_0 + \beta^2 z_1w_1v_1) \\ &= (z_0w_0 - \alpha z_1w_1 + i(z_0w_1 + z_1w_0 - \beta z_1w_1))v \end{aligned}$$

$$= (zw)v.$$

- Las propiedades distributivas se cumplen. La primera al calcular

$$\begin{aligned} z(w + v) &= (z_0w_0 + -\alpha z_1w_1 + i(z_0w_1 + z_1w_0 - \beta z_1w_1)) \\ &\quad + (z_0v_0 + -\alpha z_1v_1 + i(z_0v_1 + z_1v_0 - \beta z_1v_1)) \\ &= zw + zv, \end{aligned}$$

y la segunda se sigue directo de la conmutatividad del producto.

En resumen, tenemos que $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ es un anillo conmutativo. Es un \mathbb{R} -espacio vectorial por las propiedades distributivas notando que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}_{\alpha,\beta}$. \square

3.2. Clasificación

I. Yaglom clasifica el álgebra $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ en clases isomorfas dependiendo de los valores de α y β en [30]. Esto se detalla a continuación.

TEOREMA 3.2. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Se tiene que

$$\mathbb{C}_{\alpha,\beta} \cong \mathbb{R}[x] / \langle X^2 + \beta X + \alpha \rangle.$$

Demostración. Se define la siguiente función:

$$\begin{aligned} T : \mathbb{C}_{\alpha,\beta} &\longrightarrow \mathbb{R}[x] / \langle X^2 + \beta X + \alpha \rangle \\ z_0 + iz_1 &\longmapsto z_1 X + z_0 + \langle X^2 + \beta X + \alpha \rangle. \end{aligned}$$

Se debe probar que es un homomorfismo biyectivo. Considere $z, w \in \mathbb{C}_{\alpha,\beta}$, cualesquiera, tales que $z = z_0 + iz_1$ y $w = w_0 + iw_1$. Para la suma, se tiene que

$$\begin{aligned} T(z + w) &= (z_1 + w_1)X + (z_0 + w_0) + \langle X^2 + \beta X + \alpha \rangle \\ &= \left(z_1 X + z_0 + \langle X^2 + \beta X + \alpha \rangle \right) + \left(w_1 X + w_0 + \langle X^2 + \beta X + \alpha \rangle \right) \\ &= T(z) + T(w). \end{aligned}$$

Para el producto, se procede de manera similar

$$\begin{aligned} T(zw) &= (z_0w_1 + z_1w_0 - \beta z_1w_1)X + (z_0w_0 - \alpha z_1w_1) + \langle X^2 + \beta X + \alpha \rangle \\ &= (z_0w_1 + z_1w_0)X + z_0w_0 - z_1w_1(\beta X + \alpha) + \langle X^2 + \beta X + \alpha \rangle \\ &= (z_0w_1 + z_1w_0)X + z_0w_0 + \langle X^2 + \beta X + \alpha \rangle \end{aligned}$$

$$= T(z)T(w).$$

Estos hechos muestran que T es un homomorfismo. Luego, T es inyectiva pues $\text{Ker}(T) = \{0\}$. En efecto, si tomamos $z \in \text{Ker}(T)$, entonces

$$T(z) = z_1X + z_0 + \langle X^2 + \beta X + \alpha \rangle \in \langle X^2 + \beta X + \alpha \rangle,$$

en consecuencia, $z_1X + z_0 \in \langle X^2 + \beta X + \alpha \rangle$, es decir, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$z_1X + z_0 = k(X^2 + \beta X + \alpha).$$

Puesto que el coeficiente de X^2 del lado izquierdo es 0, entonces $k = 0$. Así, al igualar los coeficientes de los demás términos se sigue que $z_0 = z_1 = 0$, y por tanto $z = 0$.

Para mostrar que T es sobreyectiva, primero se debe notar que cualquier elemento de $\mathbb{R}[x]/\langle X^2 + \beta X + \alpha \rangle$ es de la forma $p(X) + \langle X^2 + \beta X + \alpha \rangle$, donde $p(X)$ es de grado menor que 2. La razón de esto es ya que si $p(X) = aX^2 + bX + c$, se puede escribir

$$\begin{aligned} p(X) + \langle X^2 + \beta X + \alpha \rangle &= a(X^2 + \beta X + \alpha) + (b - \alpha a - a\beta)X + c + \langle X^2 + \beta X + \alpha \rangle \\ &= (b - \alpha a - a\beta)X + c + \langle X^2 + \beta X + \alpha \rangle, \end{aligned}$$

Se puede razonar de manera similar para grados mayores a 2. De esta forma, para cualquier $z_1X + z_0 + \langle X^2 + \beta X + \alpha \rangle \in \mathbb{R}[x]/\langle X^2 + \beta X + \alpha \rangle$, tiene como preimagen el número $z = z_0 + iz_1$, probando la sobreyectividad. De este modo, se concluye que T es un homomorfismo biyectivo. \square

COROLARIO 3.3. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. $\mathbb{C}_{\alpha, \beta}$ es un cuerpo si y solo si $\Delta = \beta^2 - 4\alpha < 0$.

Demostración. Por la Proposición 2.2, se tiene que $\mathbb{R}[x]/\langle X^2 + \beta X + \alpha \rangle$ es un cuerpo si y solo si $X^2 + \beta X + \alpha$ es irreducible sobre \mathbb{R} . Esto sucede cuando su discriminante $\Delta < 0$, por lo tanto, $\mathbb{R}[x]/\langle X^2 + \beta X + \alpha \rangle$ es un cuerpo si y solo si $\Delta < 0$. Se sigue que $\mathbb{C}_{\alpha, \beta}$ es un cuerpo si y solo si $\Delta < 0$ gracias al isomorfismo del teorema anterior. \square

3.2.1. Números elípticos

Para los valores de α y β tales que $\Delta < 0$, se llama a $\mathbb{C}_{\alpha, \beta}$ como el álgebra de números elípticos. El nombre de esta álgebra viene dado por la forma de las curvas

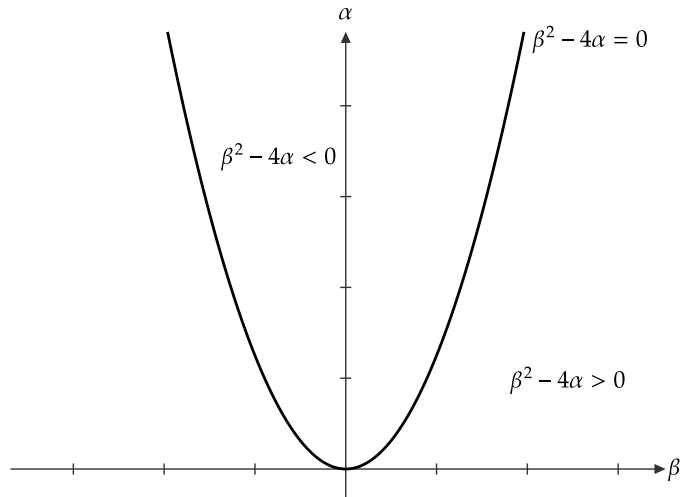


Figura 3.1: Regiones en las cuales el signo del discriminante Δ cambia.

unitarias. Si se grafica en \mathbb{R}^2 el conjunto

$$S_{\alpha,\beta} := \{z \in \mathbb{C}_{\alpha,\beta} : |z|_{\alpha,\beta} = 1\},$$

se obtienen elipses en el plano como se puede ver en la siguiente figura:

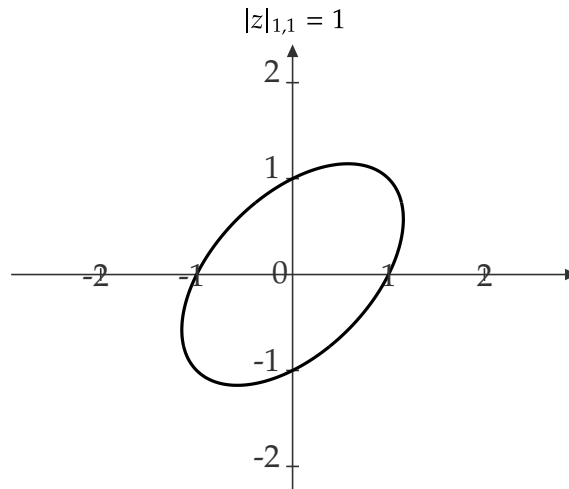


Figura 3.2: Elipse rotada correspondiente a la curva unitaria considerando $\alpha = 1$ y $\beta = 1$.

Nótese que \mathbb{C} es un caso particular de esta álgebra pues si $\alpha = 1$ y $\beta = 0$, entonces $\mathbb{C}_{1,0} = \mathbb{C}$. Más aún, se tiene un isomorfismo entre $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ y \mathbb{C} .

PROPOSICIÓN 3.4. Para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $\Delta < 0$, se tiene

$$\mathbb{C}_{\alpha,\beta} \cong \mathbb{C}.$$

Demostración. Se denota por ϵ a la unidad imaginaria de \mathbb{C} , es decir $\epsilon^2 = -1$. Se

define la función

$$\begin{aligned}\varphi_{\alpha,\beta}^- : \mathbb{C}_{\alpha,\beta} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ a + ib &\longmapsto \left(a - \frac{\beta}{2}b\right) + \epsilon \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}b\right).\end{aligned}$$

Consideremos $z = z_0 + iz_1$ y $w = w_0 + iw_1$. Se tiene que

$$\begin{aligned}\varphi_{\alpha,\beta}^-(z+w) &= \left(z_0 + w_0 - \frac{\beta}{2}z_1 - \frac{\beta}{2}w_1\right) + \epsilon \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}z_1 + \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}w_1\right) \\ &= \left(z_0 - \frac{\beta}{2}z_1\right) + \epsilon \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}z_1 + \left(w_0 - \frac{\beta}{2}w_1\right) + \epsilon \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}w_1 \\ &= \varphi_{\alpha,\beta}^-(z) + \varphi_{\alpha,\beta}^-(w)\end{aligned}$$

y para el producto

$$\begin{aligned}\varphi_{\alpha,\beta}^-(zw) &= \left(z_0w_0 - \alpha z_1w_1 - \frac{\beta}{2}(z_0w_1 + z_1w_0 - \beta z_1w_1)\right) + \epsilon \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}(z_0w_1 + z_1w_0 - \beta z_1w_1)\right) \\ &= \left(z_0 - \frac{\beta}{2}z_1\right) \left(w_0 - \frac{\beta}{2}w_1\right) - \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\right)^2 z_1w_1 \\ &\quad + \epsilon \left[\left(z_0 - \frac{\beta}{2}z_1\right) \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}w_1\right) + \left(w_0 - \frac{\beta}{2}w_1\right) \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}z_1\right)\right] \\ &= \varphi_{\alpha,\beta}^-(z) \varphi_{\alpha,\beta}^-(w).\end{aligned}$$

Así, la función $\varphi_{\alpha,\beta}$ es un homomorfismo. Para probar la inyectividad tomemos $z \in \text{Ker}(\varphi_{\alpha,\beta}^-)$ y notemos que

$$\left(z_0 - \frac{\beta}{2}z_1\right) + \epsilon \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}z_1\right) = 0$$

implica $z_1 = 0$ y, en consecuencia, $z_0 = 0$. Por lo tanto, $z = 0$. Al haber tomado z de manera arbitraria entonces $\text{Ker}(\varphi_{\alpha,\beta}^-) = \{0\}$, lo que muestra la inyectividad.

Para mostrar la sobreyectividad, tomemos $w = w_0 + \epsilon w_1 \in \mathbb{C}$ y definamos

$$z = \left(w_0 + \frac{\beta}{\sqrt{-\Delta}}w_1\right) + i \left(\frac{2}{\sqrt{-\Delta}}w_1\right).$$

Es claro que $z \in \mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ y además

$$\varphi_{\alpha,\beta}^-(z) = w.$$

Por lo tanto, $\varphi_{\alpha,\beta}$ es sobreyectiva. Al ser un homomorfismo biyectivo, se tiene el isomorfismo. \square

Se llamará $\text{Sing}_{\alpha,\beta}$ a $\text{Sing}_{\mathbb{C}_{\alpha,\beta}}$ por simplicidad.

COROLARIO 3.5. Para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $\Delta < 0$, $\text{Sing}_{\alpha,\beta} = \{0\}$.

Demostración. Puesto que $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ es un cuerpo cuando $\Delta < 0$, entonces no tiene divisores de cero. En consecuencia, $\text{Sing}_{\alpha,\beta} = \{0\}$. \square

LEMA 3.6. El módulo $|\cdot|_{\alpha,\beta}$ describe una seminorma sobre $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ cuando $\Delta < 0$.

Demostración. Consideremos la función bilineal $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\alpha,\beta} : \mathbb{C}_{\alpha,\beta} \times \mathbb{C}_{\alpha,\beta} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\langle z, w \rangle_{\alpha,\beta} = z_0 w_0 - \frac{\beta}{2}(z_0 w_1 + w_0 z_1) + \alpha z_1 w_1, \quad (3.1)$$

donde $z = z_0 + iz_1$ y $w = w_0 + iw_1$.

Por su forma, es claro que $\langle z, w \rangle_{\alpha,\beta} \in \mathbb{R}$. Además, tiene simetría, es decir,

$$\langle z, w \rangle_{\alpha,\beta} = \langle w, z \rangle_{\alpha,\beta},$$

gracias a la conmutatividad de la multiplicación en \mathbb{R} . Es bilineal, ya que si tomamos $\lambda \in \mathbb{R}$ y $z, w, v \in \mathbb{C}_{\alpha,\beta}$

$$\langle \lambda z + w, v \rangle_{\alpha,\beta} = \lambda \langle z, v \rangle_{\alpha,\beta} + \langle w, v \rangle_{\alpha,\beta},$$

y por la simetría se sigue la linealidad de la segunda componente. Dado que $\Delta < 0$, se tiene que para todo $z \in \mathbb{C}_{\alpha,\beta}$, $\langle z, z \rangle_{\alpha,\beta} \geq 0$. Por estas propiedades, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\alpha,\beta}$ define un producto interno sobre $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$, y dado que

$$|z|_{\alpha,\beta} = \sqrt{\langle z, z \rangle_{\alpha,\beta}},$$

entonces $|\cdot|_{\alpha,\beta}$ define una seminorma en $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$. Más aún, al no existir divisores de cero entonces, es una norma. \square

OBSERVACIÓN. La hipótesis de $\Delta < 0$ es necesaria ya que en este caso se asegura que $\langle z, z \rangle_{\alpha,\beta} \geq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}_{\alpha,\beta}$. Si $\Delta \geq 0$, esta propiedad no se puede asegurar para todo $z \in \mathbb{C}_{\alpha,\beta}$. Esto es importante pues se tiene desigualdad triangular directamente cuando la forma bilineal es definida positiva.

3.2.2. Números hiperbólicos

Para los valores de α y β tales que $\Delta > 0$, se llama a $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ como el álgebra de *números hiperbólicos*. El nombre viene dado por la forma de las curvas unitarias ya que al graficar $S_{\alpha,\beta}$ en el plano se obtienen hipérbolas, como se lo puede ver a continuación:

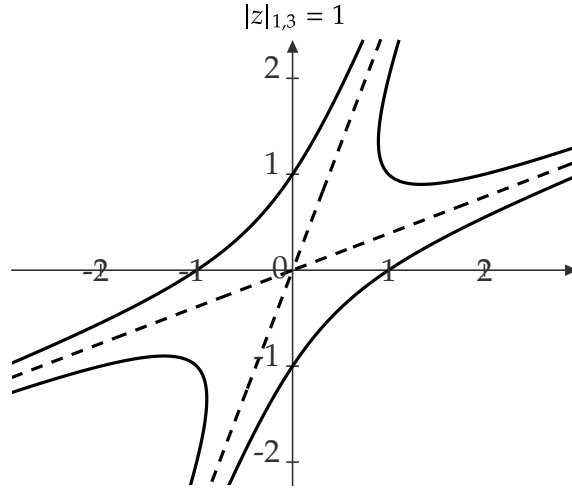


Figura 3.3: Hipérbolas rotadas correspondientes a la curva unitaria considerando $\alpha = 1$ y $\beta = 3$. Las rectas entrecortadas representan el conjunto $\text{Sing}_{1,3}$.

El caso particular cuando $\alpha = -1$ y $\beta = 0$, $\mathbb{C}_{-1,0}$ se conoce como *números dobles* o *split-complex*. Su importancia yace en la física relativista y se lo puede encontrar en [30]. Similar a los números elípticos, $\mathbb{C}_{-1,0}$ se relaciona con cualquier $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ en este caso.

PROPOSICIÓN 3.7. Para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $\Delta > 0$, se tiene

$$\mathbb{C}_{\alpha,\beta} \cong \mathbb{C}_{-1,0}.$$

Demostración. Se denota ahora como ϵ a la unidad imaginaria de $\mathbb{C}_{-1,0}$, es decir, $\epsilon^2 = 1$. En este caso, se define la función

$$\begin{aligned} \varphi_{\alpha,\beta}^+ : \mathbb{C}_{\alpha,\beta} &\longrightarrow \mathbb{C}_{-1,0} \\ a + ib &\longmapsto \left(a - \frac{\beta}{2}b \right) + \epsilon \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}b \right). \end{aligned}$$

Mostrar que esta función es un isomorfismo es análoga a la demostración de la Proposición 3.4. □

Contrario a números elípticos, existen divisores de cero, donde se expone su forma en la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 3.8. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $\Delta > 0$.

1. Si $\alpha \neq 0$, entonces $\text{Sing}_{\mathfrak{G}_{\alpha,\beta}} = \left\{ z = x + iy : y = \frac{\beta x \pm \sqrt{\Delta}|x|}{2\alpha} \right\}$.
2. Si $\alpha = 0$, entonces $\text{Sing}_{\mathfrak{G}_{\alpha,\beta}} = \left\{ z = x + iy : x = 0 \text{ ó } y = \frac{x}{\beta} \right\}$.

Demostración. Sea $z = x + iy \in \text{Sing}_{\mathfrak{G}_{\alpha,\beta}}$. Así,

$$|z|_{\alpha,\beta}^2 = |x^2 - \beta xy + \alpha y^2| = 0. \quad (3.2)$$

Si $\alpha \neq 0$, entonces se tiene la ecuación

$$\alpha y^2 - \beta xy + x^2 = 0.$$

Despejando y en función de x se tiene

$$y = \frac{\beta x \pm \sqrt{\beta^2 x^2 - 4\alpha x^2}}{2\alpha} = \frac{\beta x \pm \sqrt{\Delta}|x|}{2\alpha},$$

obteniendo 1.

Si $\alpha = 0$, entonces la ecuación (3.2) se convierte en

$$\begin{aligned} x^2 - \beta xy &= 0 \\ x(x - \beta y) &= 0. \end{aligned}$$

Esta ecuación se cumple siempre que $x = 0$ ó $y = \frac{x}{\beta}$, obteniendo 2. □

COROLARIO 3.9. Para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $\Delta > 0$, $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ no es un cuerpo.

Demostración. Dada la existencia de divisores de cero, $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ no puede ser un campo cuando $\Delta > 0$. □

3.2.3. Números parabólicos

Para los valores de α y β tales que $\Delta = 0$, se llama a $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ como el álgebra de *números parabólicos*. El nombre de esta álgebra viene dado por la forma de las curvas unitarias. Si se grafica en el plano el conjunto $S_{\alpha,\beta}$ se obtienen dos parábolas degeneradas como en la siguiente figura:

El caso particular cuando $\alpha = \beta = 0$, $\mathbb{C}_{0,0}$ se conoce como *números duales*. Similar a los anteriores casos, $\mathbb{C}_{0,0}$ se relaciona con cualquier $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ de esta categoría.

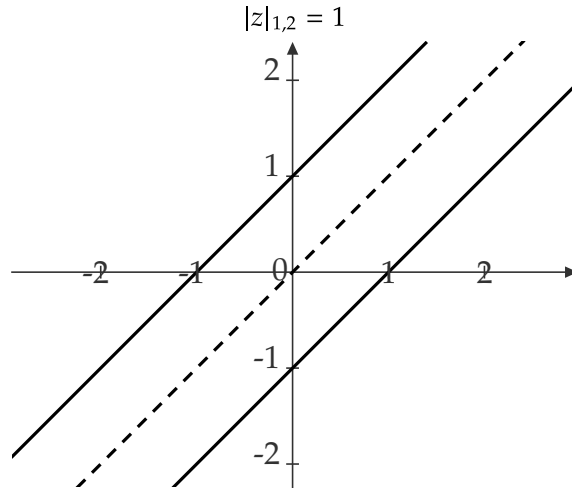


Figura 3.4: Parábolas degeneradas rotadas correspondientes a la curva unitaria considerando $\alpha = 1$ y $\beta = 2$. La recta entrecortadas representan el conjunto $\text{Sing}_{1,2}$.

PROPOSICIÓN 3.10. Para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $\Delta = 0$, se tiene

$$\mathbb{C}_{\alpha,\beta} \cong \mathbb{C}_{0,0}.$$

Demostración. Se denota por ϵ a la unidad imaginaria en $\mathbb{C}_{0,0}$, es decir, $\epsilon^2 = 0$. Se define la función

$$\begin{aligned} \varphi_{\alpha,\beta}^0 : \mathbb{C}_{\alpha,\beta} &\longrightarrow \mathbb{C}_{0,0} \\ a + ib &\longmapsto \left(a - \frac{\beta}{2}b \right) + \epsilon b. \end{aligned}$$

Mostrar que esta función es un isomorfismo es análogo a la demostración de la Proposición 3.4. □

Nuevamente, existen divisores de cero, cuya forma se expone en la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 3.11. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $\Delta = 0$. Entonces

$$\text{Sing}_{\alpha,\beta} = \left\{ z = x + iy : x = \frac{\beta}{2}y \right\}.$$

Demostración. Razonando de manera análoga a la demostración de la Proposición 3.8 y ya que $\beta^2 = 4\alpha$, se tiene que $z = x + iy \in \text{Sing}_{\alpha,\beta}$ es equivalente a tener la ecuación

$$x^2 - \beta xy + \frac{\beta^2}{4}y^2 = \left(x - \frac{\beta}{2}y \right)^2 = 0.$$

Se sigue directamente que $x = \frac{\beta}{2}y$, lo que muestra la proposición. □

COROLARIO 3.12. Para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $\Delta = 0$, $\mathbb{C}_{\alpha, \beta}$ no es un cuerpo.

Demostración. Consecuencia directa de tener divisores de cero. □

EJEMPLO 9. Un número que destaca en este caso es $\beta + 2i$, pues

$$(\beta + 2i)^2 = \beta^2 - 4\alpha = \Delta.$$

Por esto, en el caso parabólico, $\beta + 2i$ es un divisor de cero. Caso contrario, es invertible y su inverso es $\frac{\beta+2i}{\Delta}$. La invertibilidad de este número resulta importante para poder caracterizar las funciones buscadas en el Capítulo 4.

3.3. Trigonometría

Como en números complejos, una herramienta útil es poder expresar los números en su forma polar. Esto se generalizó en trabajos como [9], el cual es usado para escribir esta sección. Por simplicidad en los cálculos se va a escribir $D_{\alpha, \beta} = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2}$ si $\Delta \neq 0$.

Se define una función análoga a la exponencial compleja, para $\theta \in \mathbb{R}$, dada por la siguiente expresión

$$e^{i\theta} = \cos_{\alpha, \beta}(\theta) + i \operatorname{sen}_{\alpha, \beta}(\theta), \quad (3.3)$$

donde las funciones $\operatorname{sen}_{\alpha, \beta}$ y $\cos_{\alpha, \beta}$ están definidas a partir del seno y coseno reales:

$$\operatorname{sen}_{\alpha, \beta}(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{D_{\alpha, \beta}} \operatorname{sen}(D_{\alpha, \beta}\theta) & \text{si } \Delta < 0, \\ \frac{1}{D_{\alpha, \beta}} \operatorname{senh}(D_{\alpha, \beta}\theta) & \text{si } \Delta > 0, \\ \theta & \text{si } \Delta = 0, \end{cases} \quad (3.4)$$

y

$$\cos_{\alpha, \beta}(\theta) = \begin{cases} \cos(D_{\alpha, \beta}\theta) + \frac{\beta}{2D_{\alpha, \beta}} \operatorname{sen}(D_{\alpha, \beta}\theta) & \text{si } \Delta < 0, \\ \cosh(D_{\alpha, \beta}\theta) + \frac{\beta}{2D_{\alpha, \beta}} \operatorname{senh}(D_{\alpha, \beta}\theta) & \text{si } \Delta > 0, \\ 1 + \frac{\beta}{2}\theta & \text{si } \Delta = 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

Las funciones $\operatorname{sen}_{\alpha, \beta}$ y $\cos_{\alpha, \beta}$ se conocen como las funciones seno y coseno de $\mathbb{C}_{\alpha, \beta}$, respectivamente. Se tienen propiedades similares con estas funciones.

OBSERVACIÓN. Las funciones $\operatorname{sen}_{\alpha, \beta}$ y $\cos_{\alpha, \beta}$ son periódicas, de periodo $\frac{2\pi}{D_{\alpha, \beta}}$ cuando

$\Delta < 0$. Es decir, que para cualquier $\theta \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{sen}_{\alpha,\beta} \left(\theta + \frac{2\pi}{D_{\alpha,\beta}} \right) = \operatorname{sen}_{\alpha,\beta}(\theta) \quad \text{y} \quad \operatorname{cos}_{\alpha,\beta} \left(\theta + \frac{2\pi}{D_{\alpha,\beta}} \right) = \operatorname{cos}_{\alpha,\beta}(\theta).$$

Además, $\operatorname{sen}_{1,0}$ es la función seno real y $\operatorname{cos}_{1,0}$ es la función coseno real.

PROPOSICIÓN 3.13. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Se tiene que

$$S_{\alpha,\beta} = \left\{ ke^{i\theta} : \theta \in \mathbb{R}, k \in K_{\alpha,\beta} \right\},$$

donde $K_{\alpha,\beta} \subset \mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ es tal que

- $K_{\alpha,\beta} = \{1\}$, si $\Delta < 0$.
- $K_{\alpha,\beta} = \left\{ 1, -1, \frac{\beta+2i}{2D_{\alpha,\beta}}, -\frac{\beta+2i}{2D_{\alpha,\beta}} \right\}$, si $\Delta > 0$.
- $K_{\alpha,\beta} = \{1, -1\}$, si $\Delta = 0$.

Demostración. Véase en [9]. □

A la dupla $\theta_k = (\theta, k)$ se lo conoce como el ángulo de un número z y además la representación polar de este número viene dado por la expresión

$$z = |z|_{\alpha,\beta} e^{i\theta_k} = |z|_{\alpha,\beta} k e^{i\theta}.$$

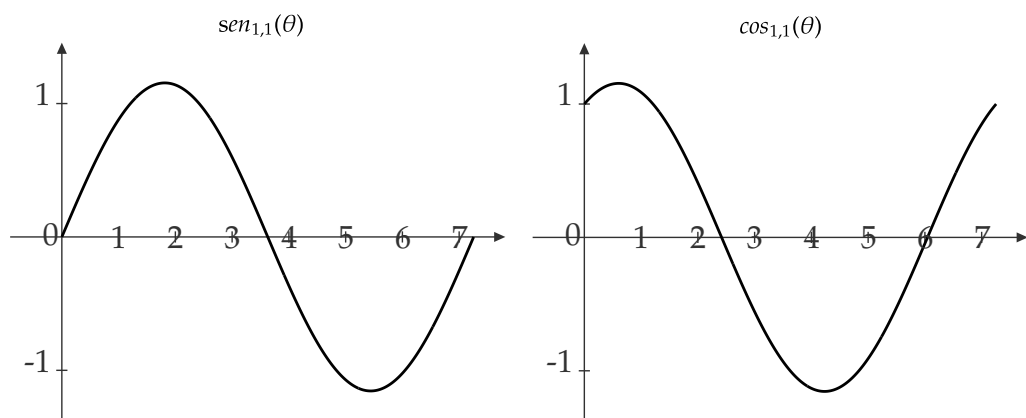
Ahora se presentan propiedades trigonométricas que generalizan a las conocidas sobre \mathbb{R} .

LEMA 3.14. Para todo $\alpha, \beta, \theta_0, \theta_1 \in \mathbb{R}$, se tienen las siguientes identidades:

1. $\operatorname{sen}_{\alpha,\beta}(\theta_0 + \theta_1) = \operatorname{sen}_{\alpha,\beta}(\theta_0) \operatorname{cos}_{\alpha,\beta}(\theta_1) + \operatorname{cos}_{\alpha,\beta}(\theta_0) \operatorname{sen}_{\alpha,\beta}(\theta_1) - \beta \operatorname{sen}_{\alpha,\beta}(\theta_0) \operatorname{sen}_{\alpha,\beta}(\theta_1)$.
2. $\operatorname{cos}_{\alpha,\beta}(\theta_0 + \theta_1) = \operatorname{cos}_{\alpha,\beta}(\theta_0) \operatorname{cos}_{\alpha,\beta}(\theta_1) - \alpha \operatorname{sen}_{\alpha,\beta}(\theta_0) \operatorname{sen}_{\alpha,\beta}(\theta_1)$.
3. $e^{i(\theta_0 + \theta_1)} = e^{i\theta_0} e^{i\theta_1}$.

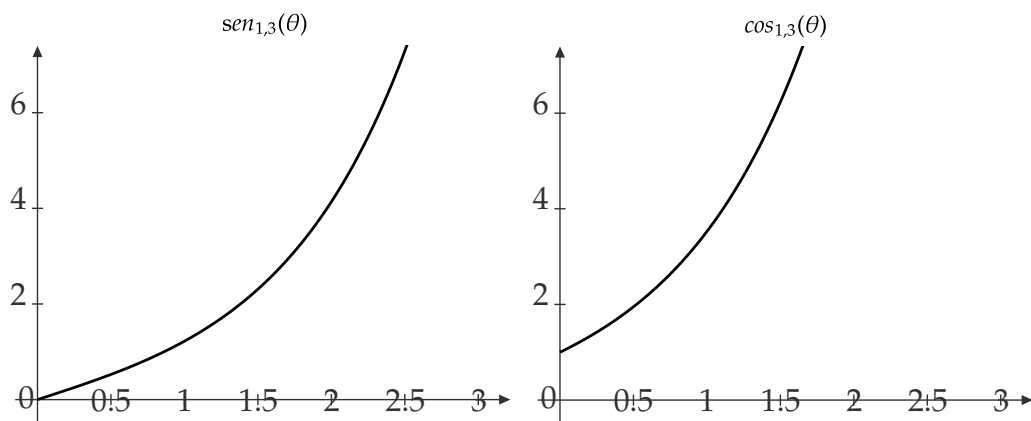
Demostración. Las primeras dos identidades se derivan de las definiciones (3.4) y (3.5), y las identidades trigonométricas reales para la suma de ángulos. En efecto, para $\Delta < 0$,

$$\operatorname{sen}_{\alpha,\beta}(\theta_0 + \theta_1) = \frac{1}{D_{\alpha,\beta}} (\operatorname{sen}(D_{\alpha,\beta}\theta_0) \operatorname{cos}(D_{\alpha,\beta}\theta_1) + \operatorname{cos}(D_{\alpha,\beta}\theta_0) \operatorname{sen}(D_{\alpha,\beta}\theta_1))$$



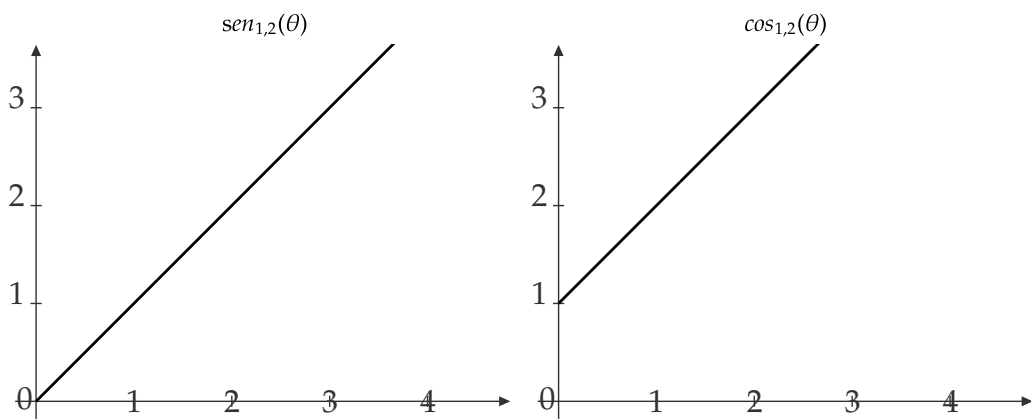
(a) $\alpha = 1$ y $\beta = 1$.

(b) $\alpha = 1$ y $\beta = 1$.



(c) $\alpha = 1$ y $\beta = 3$.

(d) $\alpha = 1$ y $\beta = 3$.



(e) $\alpha = 1$ y $\beta = 2$.

(f) $\alpha = 1$ y $\beta = 2$.

Figura 3.5: Gráfico de $sen_{\alpha,\beta}$ y $cos_{\alpha,\beta}$ sobre $\left[0, \frac{2\pi}{D_{\alpha,\beta}}\right]$ para valores de α y β que resultan en los distintos casos del signo de Δ .

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{D_{\alpha,\beta}} \operatorname{sen}(D_{\alpha,\beta}\theta_0) \left(\cos(D_{\alpha,\beta}\theta_1) + \frac{\beta}{2D_{\alpha,\beta}} \operatorname{sen}(D_{\alpha,\beta}\theta_1) \right) \\
&+ \frac{1}{D_{\alpha,\beta}} \left(\cos(D_{\alpha,\beta}\theta_0) + \frac{\beta}{2D_{\alpha,\beta}} \operatorname{sen}(D_{\alpha,\beta}\theta_0) \right) - \frac{\beta}{D_{\alpha,\beta}^2} \operatorname{sen}(D_{\alpha,\beta}\theta_0) \operatorname{sen}(D_{\alpha,\beta}\theta_1) \\
&= \operatorname{sen}_{\alpha,\beta}(\theta_0) \cos_{\alpha,\beta}(\theta_1) + \cos_{\alpha,\beta}(\theta_0) \operatorname{sen}_{\alpha,\beta}(\theta_1) - \beta \operatorname{sen}_{\alpha,\beta}(\theta_0) \operatorname{sen}_{\alpha,\beta}(\theta_1).
\end{aligned}$$

El caso $\Delta > 0$ se sigue razonando de la misma manera con el seno y coseno hiperbólicos. Para $\Delta = 0$,

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}_{\alpha,\beta}(\theta_0 + \theta_1) &= \theta_0 + \theta_1 \\
&= \theta_0 + \frac{\beta}{2}\theta_0\theta_1 + \theta_1 + \frac{\beta}{2}\theta_0\theta_1 - \beta\theta_0\theta_1 \\
&= \theta_0 \left(1 + \frac{\beta}{2}\theta_1 \right) + \left(1 + \frac{\beta}{2}\theta_0 \right) \theta_1 - \beta\theta_0\theta_1 \\
&= \operatorname{sen}_{\alpha,\beta}(\theta_0) \cos_{\alpha,\beta}(\theta_1) + \cos_{\alpha,\beta}(\theta_0) \operatorname{sen}_{\alpha,\beta}(\theta_1) - \beta \operatorname{sen}_{\alpha,\beta}(\theta_0) \operatorname{sen}_{\alpha,\beta}(\theta_1).
\end{aligned}$$

Las segunda identidad se consigue razonando de manera similar. Por último, de esta dos identidades se deduce la tercera

$$\begin{aligned}
e^{i(\theta_0+\theta_1)} &= \cos_{\alpha,\beta}(\theta_0 + \theta_1) + i \operatorname{sen}_{\alpha,\beta}(\theta_0 + \theta_1) \\
&= \cos_{\alpha,\beta}(\theta_0) \cos_{\alpha,\beta}(\theta_1) - \alpha \operatorname{sen}_{\alpha,\beta}(\theta_0) \operatorname{sen}_{\alpha,\beta}(\theta_1) \\
&+ i (\operatorname{sen}_{\alpha,\beta}(\theta_0) \cos_{\alpha,\beta}(\theta_1) + \cos_{\alpha,\beta}(\theta_0) \operatorname{sen}_{\alpha,\beta}(\theta_1) - \beta \operatorname{sen}_{\alpha,\beta}(\theta_0) \operatorname{sen}_{\alpha,\beta}(\theta_1)) \\
&= (\cos_{\alpha,\beta}(\theta_0) + i \operatorname{sen}_{\alpha,\beta}(\theta_0)) (\cos_{\alpha,\beta}(\theta_1) + i \operatorname{sen}_{\alpha,\beta}(\theta_1)) \\
&= e^{i\theta_0} e^{i\theta_1}.
\end{aligned}$$

□

PROPOSICIÓN 3.15. Para todo $\alpha, \beta, \theta \in \mathbb{R}$, se cumple la identidad

$$(\cos_{\alpha,\beta}(\theta))^2 - \beta \operatorname{sen}_{\alpha,\beta}(\theta) \cos_{\alpha,\beta}(\theta) + \alpha (\operatorname{sen}_{\alpha,\beta}(\theta))^2 = 1. \quad (3.6)$$

Demostración. El resultado se obtiene al desarrollar la parte izquierda de (3.6) reemplazando las definiciones (3.4) y (3.5). Para el caso $\Delta < 0$, se obtiene

$$\begin{aligned}
(\cos_{\alpha,\beta}(\theta))^2 - \beta \operatorname{sen}_{\alpha,\beta}(\theta) \cos_{\alpha,\beta}(\theta) + \alpha (\operatorname{sen}_{\alpha,\beta}(\theta))^2 &= \cos^2(D_{\alpha,\beta}\theta) + \frac{4\alpha - \beta^2}{4D_{\alpha,\beta}^2} \operatorname{sen}^2(D_{\alpha,\beta}\theta) \\
&= \cos^2(D_{\alpha,\beta}\theta) + \frac{-\Delta}{|\Delta|} \operatorname{sen}^2(D_{\alpha,\beta}\theta) \\
&= \cos^2(D_{\alpha,\beta}\theta) + \operatorname{sen}^2(D_{\alpha,\beta}\theta) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Similarmente para el caso $\Delta > 0$, se obtiene

$$\begin{aligned} (\cos_{\alpha,\beta}(\theta))^2 - \beta \operatorname{sen}_{\alpha,\beta}(\theta) \cos_{\alpha,\beta}(\theta) + \alpha (\operatorname{sen}_{\alpha,\beta}(\theta))^2 &= \cosh^2(D_{\alpha,\beta}\theta) - \sinh^2(D_{\alpha,\beta}\theta) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Si $\Delta = 0$,

$$\begin{aligned} (\cos_{\alpha,\beta}(\theta))^2 - \beta \operatorname{sen}_{\alpha,\beta}(\theta) \cos_{\alpha,\beta}(\theta) + \alpha (\operatorname{sen}_{\alpha,\beta}(\theta))^2 &= 1 + \frac{\Delta}{4}\theta^2 \\ &= 1. \end{aligned}$$

□

LEMA 3.16. Para todo $\alpha, \beta, \theta, \lambda \in \mathbb{R}$, se tienen las siguientes fórmulas de derivación:

$$\frac{d}{d\theta} \operatorname{sen}_{\alpha,\beta}(\lambda\theta) = \lambda \left[\cos_{\alpha,\beta}(\lambda\theta) - \frac{\beta}{2} \operatorname{sen}_{\alpha,\beta}(\lambda\theta) \right], \quad (3.7)$$

$$\frac{d}{d\theta} \cos_{\alpha,\beta}(\lambda\theta) = \lambda \left[\frac{\beta}{2} \cos_{\alpha,\beta}(\lambda\theta) - \alpha \operatorname{sen}_{\alpha,\beta}(\lambda\theta) \right], \quad (3.8)$$

$$\frac{d}{d\theta} e^{i\lambda\theta} = \lambda \frac{\beta + 2i}{2} e^{i\lambda\theta}. \quad (3.9)$$

Demostración. Las expresiones de (3.7) y (3.8) se obtienen gracias a las expresiones de las derivadas de las funciones trigonométricas ordinarias e hiperbólicas. La expresión (3.9) se obtiene aplicando (3.7) y (3.8)

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} e^{i\lambda\theta} &= \frac{d}{d\theta} \operatorname{sen}_{\alpha,\beta}(\lambda\theta) + i \frac{d}{d\theta} \cos_{\alpha,\beta}(\lambda\theta) \\ &= \lambda \left[\frac{\beta}{2} \cos_{\alpha,\beta}(\lambda\theta) - \alpha \operatorname{sen}_{\alpha,\beta}(\lambda\theta) + i \left(\cos_{\alpha,\beta}(\lambda\theta) - \frac{\beta}{2} \operatorname{sen}_{\alpha,\beta}(\lambda\theta) \right) \right] \\ &= \left(\frac{\beta}{2} + i \right) (\cos_{\alpha,\beta}(\lambda\theta) + i \operatorname{sen}_{\alpha,\beta}(\lambda\theta)) \\ &= \lambda \frac{\beta + 2i}{2} e^{i\lambda\theta}. \end{aligned}$$

□

Cuando $\alpha = 1$ y $\beta = 0$, es decir el caso complejo, todas las definiciones, identidades y propiedades presentadas en esta sección coinciden con las ya conocidas de las funciones trigonométricas reales.

3.4. Funciones analíticas sobre $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$

Conociendo la estructura algebraica de los números complejos generalizados, se puede introducir nociones de análisis y funciones analíticas sobre esta álgebra que son generalizaciones a lo presentado en la Sección 2.2. Para ello es necesario mencionar que vamos a dotar $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ por la topología de \mathbb{R}^2 , es decir, la topología inducida por la norma euclídeana en el plano. Esto se lo hace tradicionalmente para álgebras hipercomplejas como se lo puede ver en [27]. En consecuencia, se tiene una definición de convergencia similar a la de \mathbb{C} .

DEFINICIÓN 3.1. Sean $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ y $z^* \in \mathbb{C}_{\alpha,\beta}$. De modo que $z_n = x_n + iy_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, y $z^* = x^* + iy^*$. Se dice que $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a z^* si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a x^* y $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a y^* , cuando $n \rightarrow +\infty$, sobre \mathbb{R} .

OBSERVACIÓN. Cuando $\Delta < 0$, esta definición es equivalente a que $|z_n - z^*|_{\alpha,\beta} \rightarrow 0$ a medida que $n \rightarrow +\infty$. Para los distintos casos de $\Delta \geq 0$, se puede hacer un análisis similar considerando una topología inducida por $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\alpha,\beta}$ (ver [9]).

DEFINICIÓN 3.2. Sean $\Omega \subset \mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ un conjunto abierto, $f : \Omega \subset \mathbb{C}_{\alpha,\beta} \rightarrow \mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ una función y $z \in \mathbb{C}_{\alpha,\beta}$. Se dice que f es diferenciable en z si el límite

$$f'(z) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \notin \text{Sing}_{\alpha,\beta}}} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}, \quad (3.10)$$

existe y es independiente de cómo h tiende a 0. Si f es diferenciable en una vecindad de z , se dirá que f es analítica en z .

De manera análoga al de números complejos, se dirá que f es analítica sobre Ω si es analítica en todo $z \in \Omega$.

OBSERVACIÓN. El dominio Ω no tiene por qué ser abierto para definir la derivada. Basta tener que para todo $z \in \Omega$, exista $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ tal que $z + h_n \in \Omega$, para todo $n \in \mathbb{N}$, y $h_n \rightarrow 0$. Esto nos permite considerar conjuntos de la forma

$$\Omega = [a_0, b_0] \times [a_1, b_1],$$

que se usará en el siguiente capítulo.

Se presentan ahora resultados que se obtienen de la definición.

PROPOSICIÓN 3.17. Sean $f, g : \Omega \subset \mathbb{C}_{\alpha,\beta} \rightarrow \mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ dos funciones y $\lambda, z \in \mathbb{C}_{\alpha,\beta}$, tales

que f y g son analíticas en z . Se cumplen las siguientes propiedades:

1. $(f + g)'(z) = f'(z) + g'(z)$,
2. $(\lambda f)'(z) = \lambda f'(z)$,
3. $(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$.

Demostración. Por definición, se tiene que

$$\begin{aligned} (f + g)'(z) &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \notin \text{Sing}_{\alpha, \beta}}} \frac{(f + g)(z + h) - (f + g)(z)}{h} \\ &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \notin \text{Sing}_{\alpha, \beta}}} \frac{f(z + h) - f(z)}{h} + \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \notin \text{Sing}_{\alpha, \beta}}} \frac{g(z + h) - g(z)}{h} \\ &= f'(z) + g'(z), \end{aligned}$$

mostrando así 1. Para mostrar 2. se procede de manera similar

$$\begin{aligned} (\lambda f)'(z) &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \notin \text{Sing}_{\alpha, \beta}}} \frac{(\lambda f)(z + h) - (\lambda f)(z)}{h} \\ &= \lambda \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \notin \text{Sing}_{\alpha, \beta}}} \frac{f(z + h) - f(z)}{h} \\ &= \lambda f'(z). \end{aligned}$$

Por último, la regla de Leibniz se sigue de la misma manera

$$\begin{aligned} (fg)'(z) &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \notin \text{Sing}_{\alpha, \beta}}} \frac{(fg)(z + h) - (fg)(z)}{h} \\ &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \notin \text{Sing}_{\alpha, \beta}}} \frac{f(z + h)g(z + h) - f(z + h)g(z) + f(z + h)g(z) - f(z)g(z)}{h} \\ &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \notin \text{Sing}_{\alpha, \beta}}} f(z + h) \frac{g(z + h) - g(z)}{h} + \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \notin \text{Sing}_{\alpha, \beta}}} g(z) \frac{f(z + h) - f(z)}{h} \\ &= f(z)g'(z) + f'(z)g(z). \end{aligned}$$

Aquí se utilizó que $f(z + h) \rightarrow f(z)$ cuando $h \rightarrow 0$ (ver [27, Cor. 3.6]). □

Análogo al caso complejo, se puede caracterizar una función analítica con un sistema de ecuaciones. Este sistema se genera de las condiciones de Scheffers que están

en el contexto más general del análisis hipercomplejo (véase [25, 27]). En particular, se deduce la caracterización para números complejos generalizados.

TEOREMA 3.18. *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{C}_{\alpha,\beta} \longrightarrow \mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ una función tal que se puede escribir como $f = f_0 + if_1$, donde f_0 y f_1 son funciones real valuadas con derivadas parciales continuas. Se dirá que f es analítica si y solo si se cumplen las siguientes ecuaciones*

$$\begin{aligned}\partial_y f_0 &= -\alpha \partial_x f_1, \\ \partial_x f_0 &= \beta \partial_x f_1 + \partial_y f_1.\end{aligned}\tag{3.11}$$

Estas se conocen como las ecuaciones de Cauchy-Riemann generalizadas.

Estas ecuaciones inducen un nuevo operador que se llamará el operador de Cauchy-Riemann generalizado, definido de la siguiente manera:

$$\partial_{\bar{z}} = \partial_y - i\partial_x.\tag{3.12}$$

Así una función es analítica si y solo si $\partial_{\bar{z}}f = 0$. El operador conjugado se escribe como

$$\overline{\partial_{\bar{z}}} = \partial_y + \beta \partial_x + i\partial_x.$$

EJEMPLO 10. Consideremos el polinomio $f(z) = z$, o equivalentemente $f(x, y) = x + iy$. Se verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann generalizadas, en efecto,

$$\begin{aligned}\partial_y f_0 &= 0 = -\alpha \partial_x f_1, \\ \partial_x f_0 &= 1 = \beta \partial_x f_1 + \partial_y f_1.\end{aligned}$$

Así, esta función es analítica en $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$, para cualquier α y β .

OBSERVACIÓN. La razón de tomar el operador de Cauchy-Riemann generalizado de esta manera y no como en (2.2) se da por la caracterización de funciones analíticas. Para valores específicos de α y β , funciones analíticas no siempre se anulan con el operador $\frac{d}{d\bar{z}}$. Por ejemplo, cuando $\alpha = 1$ y $\beta = 0$ y $f(z) = z$ se tiene que

$$\frac{1}{2} (\partial_x + i\partial_y) f = \frac{1 - \alpha - \beta i}{2},$$

cuya expresión claramente no siempre se anula, pero por el Ejemplo 10 sabemos que es analítica. En el caso complejo, se tiene que

$$\partial_{\bar{z}} = -i \frac{d}{d\bar{z}},$$

es decir, es una rotación de $\frac{d}{dz}$, lo cual va a preservar la propiedad de que una función sea analítica.

En [2, Sec. C.7.1] se define un operador de Cauchy-Riemann sobre $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ como

$$\partial_{\bar{z}}^* = \frac{\sqrt{\Delta} - \beta}{2\sqrt{\Delta}}\partial_x - \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\partial_y,$$

donde $\sqrt{\Delta} = \beta + 2i$. Primero se puede notar que este operador está definido siempre que $\Delta \neq 0$, es decir solo para números elípticos e hiperbólicos, mientras que $\partial_{\bar{z}}$ se define también para números parabólicos. Más aún, es un reescalamiento de $\partial_{\bar{z}}$

$$\partial_{\bar{z}}^* = \frac{\beta + 2i}{\Delta}\partial_{\bar{z}}.$$

Una discusión más profunda de estos dos operadores se lo hace en [27].

La relación de la derivada de una función sobre $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ y el operador conjugado $\bar{\partial}_{\bar{z}}$ se muestra en el siguiente lema.

LEMA 3.19. *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{C}_{\alpha,\beta} \rightarrow \mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ una función analítica sobre Ω . Entonces*

$$\bar{\partial}_{\bar{z}}f(z) = (\beta + 2i)f'(z),$$

para todo $z \in \Omega$.

Demostración. Es un caso particular de [27, Cor. 3.9]. □

Sobre $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ se puede definir la función de Mittag-Leffler $E_{u,v}$, para dos parámetros $u, v \in \mathbb{R}$, con la misma expresión de (2.13). Esta será finita sobre $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ ya que, al tener la misma topología de \mathbb{R}^2 , el Teorema 2.16 se cumple. Sin embargo, hay que tener cuidado cuando se busca la relación con el módulo $|\cdot|_{\alpha,\beta}$.

TEOREMA 3.20. *Dada una serie de potencias $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k(z-a)^k$, donde $z, a \in \mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ y $c_k \in \mathbb{R}$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$, existe $0 < R \leq +\infty$ dada por*

$$\frac{1}{R} = \limsup_{k \rightarrow +\infty} |c_k|^{\frac{1}{k}},$$

tal que

1. Si $z \in D_+(a, R) = \{z \in \mathbf{C}_{\alpha, \beta} : |z - a|_{\alpha, \beta} < R \text{ y } \langle z - a, z - a \rangle_{\alpha, \beta} \geq 0\}$, entonces

$$\left| \sum_{k=0}^{+\infty} c_n (z - a)^n \right|_{\alpha, \beta} < +\infty.$$

2. Si $z \in D_+^c(a, R) = \{z \in \mathbf{C}_{\alpha, \beta} : |z - a|_{\alpha, \beta} \geq R \text{ y } \langle z - a, z - a \rangle_{\alpha, \beta} \geq 0\}$, entonces

$$\left| \sum_{k=0}^{+\infty} c_n (z - a)^n \right|_{\alpha, \beta} = +\infty.$$

Demostración. Suponga que $R < +\infty$ y $z \in D_+(a, R)$. Por caracterización del límite superior, se tiene que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq k$

$$|c_n|^{\frac{1}{n}} |z - a|_{\alpha, \beta} \leq \frac{1}{R} |z - a|_{\alpha, \beta} < \frac{R}{R} = 1.$$

De la convergencia de la serie geométrica, se sigue que $\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n| |z - a|_{\alpha, \beta}^n < +\infty$.

Luego, gracias a que $\langle z - a, z - a \rangle_{\alpha, \beta} \geq 0$, entonces

$$\left| \sum_{k=0}^{+\infty} c_n (z - a)^n \right|_{\alpha, \beta} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |c_n| |z - a|_{\alpha, \beta}^n < +\infty.$$

Ahora, suponga que $z \in D_+^c(a, R)$. Nuevamente, por caracterización de límite superior se tiene que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq k$,

$$|c_n|^{\frac{1}{n}} |z - a|_{\alpha, \beta} \geq \frac{1}{R} |z - a|_{\alpha, \beta} \geq \frac{R}{R} = 1.$$

Dado que el argumento es mayor que 1 cuando n es suficientemente grandes, entonces la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n| |z - a|_{\alpha, \beta}^n$ diverge en \mathbb{R} . En consecuencia,

$$\left| \sum_{k=0}^{+\infty} c_n (z - a)^n \right|_{\alpha, \beta} = +\infty.$$

Por último, suponga $R = +\infty$. Esto sucede cuando

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} |c_n|^{\frac{1}{n}} = 0.$$

Así, para todo $\varepsilon > 0$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq k$

$$|c_n|^{\frac{1}{n}} \leq \varepsilon.$$

En consecuencia, para $n \geq k$

$$|c_n|^{\frac{1}{n}} |z - a|_{\alpha, \beta} \leq \varepsilon |z - a|_{\alpha, \beta}.$$

Si $|z - a|_{\alpha, \beta} \leq 1$, basta tomar $\varepsilon < 1$ de modo que

$$|c_n|^{\frac{1}{n}} |z - a|_{\alpha, \beta} < 1.$$

Si $|z - a|_{\alpha, \beta} > 1$, basta tomar $\varepsilon = \frac{1}{|z - a|_{\alpha, \beta}}$ para obtener el mismo resultado. En ambos casos, se sigue que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n| |z - a|_{\alpha, \beta}^n < +\infty,$$

gracias a la convergencia de la serie geométrica. Por esto y suponiendo que $\langle z - a, z - a \rangle_{\alpha, \beta} \geq 0$, se concluye

$$\left| \sum_{k=0}^{+\infty} c_k (z - a)^k \right|_{\alpha, \beta} < +\infty.$$

□

Para finalizar este capítulo, se explora la función exponencial sobre $\mathbb{C}_{\alpha, \beta}$ que será relevante para la discusión en el siguiente capítulo. La demostración del siguiente resultado es original.

TEOREMA 3.21. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, cualesquiera. Para todo $z = x + iy \in \mathbb{C}_{\alpha, \beta}$, el límite

$$e^z := \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{z}{n} \right)^n$$

existe y verifica

$$e^z = e^{x - \frac{\beta}{2}y} e^{iy} = e^{x - \frac{\beta}{2}y} (\cos_{\alpha, \beta}(y) + i \operatorname{sen}_{\alpha, \beta}(y)). \quad (3.13)$$

Demostración. El caso $\Delta < 0$ se demuestra como en el caso complejo [20]. Por tanto, el enfoque será en los casos hiperbólico y parabólico. Para $\Delta > 0$, tomando $z = x + iy \in \mathbb{C}_{\alpha, \beta}$, se definen

$$z_0 = x + \frac{\sqrt{\Delta} - \beta}{2}y, \quad z_1 = x - \frac{\sqrt{\Delta} + \beta}{2}y$$

y

$$F_0 = \frac{\sqrt{\Delta} + (\beta + 2i)}{2\sqrt{\Delta}}, \quad F_1 = \frac{\sqrt{\Delta} - (\beta + 2i)}{2\sqrt{\Delta}},$$

de manera que cumplen

$$F_0 + F_1 = 1, \quad F_1 F_2 = 0 \quad \text{y} \quad F_i^2 = F_i,$$

para $i = 1, 2$. Así, se puede escribir

$$z = z_0 F_0 + z_1 F_1$$

y por lo tanto,

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \left[\left(1 + \frac{z_0}{n}\right) F_0 + \left(1 + \frac{z_1}{n}\right) F_1\right]^n,$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Luego, del Teorema binomial y de las propiedades de F_1 y F_2 , esta expresión se reduce a

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{z_0}{n}\right)^n F_0 + \left(1 + \frac{z_1}{n}\right)^n F_1.$$

Tomando $n \rightarrow +\infty$ en la igualdad anterior, y de la definición de la función exponencial real, se obtiene

$$\begin{aligned} e^z &= e^{z_0} F_0 + e^{z_1} F_1 \\ &= e^{x + \frac{\sqrt{\Delta} - \beta}{2} y} \left(\frac{\sqrt{\Delta} + (\beta + 2i)}{2\sqrt{\Delta}} \right) + e^{x - \frac{\sqrt{\Delta} + \beta}{2} y} \left(\frac{\sqrt{\Delta} - (\beta + 2i)}{2\sqrt{\Delta}} \right) \\ &= e^{x - \frac{\beta}{2} y} \left(\frac{e^{D_{\alpha, \beta} y} + e^{-D_{\alpha, \beta} y}}{2} + \frac{\beta}{2D_{\alpha, \beta}} \frac{e^{D_{\alpha, \beta} y} - e^{-D_{\alpha, \beta} y}}{2} + i \frac{1}{D} \frac{e^{D_{\alpha, \beta} y} - e^{-D_{\alpha, \beta} y}}{2} \right) \\ &= e^{x - \frac{\beta}{2} y} (\cos_{\alpha, \beta}(y) + i \operatorname{sen}_{\alpha, \beta}(y)) \\ &= e^{x - \frac{\beta}{2} y} e^{iy}. \end{aligned}$$

Para $\Delta = 0$, de manera similar se definen

$$z_2 = x - \frac{\beta}{2} y, \quad z_3 = y \quad \text{y} \quad E = \frac{\beta}{2} + i.$$

Esto se hace para poder escribir

$$z = x + iy = z_2 + E z_3.$$

Así, $E^2 = 0$ y en consecuencia, por el teorema binomial

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n &= \left(1 + \frac{z_2 + E z_3}{n}\right)^n \\ &= \left(1 + \frac{z_2}{n}\right)^n + E z_3 \left(1 + \frac{z_2}{n}\right)^{n-1}, \end{aligned}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Tomando $n \rightarrow +\infty$ en la expresión anterior

$$\begin{aligned}
 e^z &= e^{z^2} (1 + Ez_3) \\
 &= e^{x-\frac{\beta}{2}} \left(1 + \frac{\beta}{2}y + iy \right) \\
 &= e^{x-\frac{\beta}{2}y} (\cos_{\alpha,\beta}(y) + i\text{sen}_{\alpha,\beta}(y)) \\
 &= e^{x-\frac{\beta}{2}y} e^{iy},
 \end{aligned}$$

concluyendo la demostración. □

COROLARIO 3.22. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, cualesquiera. Para todo $z, w \in \mathbb{C}_{\alpha,\beta}$, se tiene

$$e^{z+w} = e^z e^w. \quad (3.14)$$

Demostración. Escribiendo $z = z_0 + iz_1$ y $w = w_0 + iw_1$, del Teorema 3.21, se tiene que

$$e^{z+w} = e^{z_0+w_0-\frac{\beta}{2}z_1-\frac{\beta}{2}w_1} e^{i(z_1+w_1)}.$$

Del Lema 3.14, se sigue el resultado

$$e^{z+w} = e^{z_0-\frac{\beta}{2}z_1} e^{iz_1} e^{w_0-\frac{\beta}{2}w_1} e^{iw_1} = e^z e^w.$$

□

LEMA 3.23. Para cualquier $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y para todo $z \in \mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ se tiene

$$\overline{\partial_z} e^z = (\beta + 2i)e^z.$$

Demostración. Aplicando $\overline{\partial_z}$ a la ecuación (3.13), de la regla de Leibniz real y de (3.9) se calcula directamente

$$\begin{aligned}
 \overline{\partial_z} e^z &= (\partial_y + \beta\partial_x + i\partial_x) e^{x-\frac{\beta}{2}y} e^{iy} \\
 &= -\frac{\beta}{2} e^{x-\frac{\beta}{2}y} e^{iy} + \frac{\beta+2i}{2} e^{x-\frac{\beta}{2}y} e^{iy} + \beta e^{x-\frac{\beta}{2}y} e^{iy} + i e^{x-\frac{\beta}{2}y} e^{iy} \\
 &= \left(\frac{\beta}{2} + \frac{\beta+2i}{2} + i \right) e^{x-\frac{\beta}{2}y} e^{iy} \\
 &= (\beta + 2i) e^z.
 \end{aligned}$$

□

Capítulo 4

Funciones tipo elementales fraccionarias sobre números complejos generalizados

En los trabajos [4, 5] se ha desarrollado teoría similar de funciones analíticas fraccionarias sobre álgebras hipercomplejas \mathbb{C} y \mathbb{BC} . En general, se basa en definir funciones que cumplan las ecuaciones de Cauchy-Riemann generalizadas definidas en (3.11), pero reemplazando las derivadas parciales por derivadas fraccionarias en su respectiva dirección, en este caso optando por las derivadas fraccionarias en el sentido de Riemann-Liouville. En [27] se introduce el operador de Cauchy-Riemann fraccionario sobre $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ y se estudian sus propiedades, hasta el punto de caracterizar una familia de polinomios fraccionario analíticos que actúa como una generalización de la familia de polinomios

$$\frac{z^m}{m!}.$$

El enfoque ahora es caracterizar funciones fraccionarias analíticas que sean análogas a funciones elementales; en específico, a la exponencial definida en el Teorema 3.21 y trigonométricas como en las ecuaciones (3.4) y (3.5). La analogía se la hace en el sentido de que cumplan propiedades similares al caso ordinario respecto el operador de Cauchy-Riemann.

4.1. Funciones fraccionarias analíticas en $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$

Consideremos $\Omega = [x_0, x_1] \times [y_0, y_1] \subset \mathbb{R}^2$, y $\nu_0, \nu_1 \in (0, 1)$ dos parámetros reales. A partir de la ecuación (3.12), se define al operador de Cauchy-Riemann generalizado fraccionario de orden $\nu = (\nu_0, \nu_1)$ como

$$D_+^\nu = D_{y_0^+}^{\nu_1} - iD_{x_0^+}^{\nu_0}. \quad (4.1)$$

En consecuencia, el operador conjugado viene dado por

$$\overline{D_+^\nu} = D_{y_0^+}^{\nu_1} + \beta D_{x_0^+}^{\nu_0} + iD_{x_0^+}^{\nu_0}. \quad (4.2)$$

DEFINICIÓN 4.1. Se dice que una función $f : \Omega \subset \mathbb{C}_{\alpha,\beta} \longrightarrow \mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ es ν -fraccionaria $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ -analítica si

$$D_+^\nu f = 0. \quad (4.3)$$

Las ecuaciones de Cauchy-Riemann generalizadas fraccionarias tienen la forma

$$\begin{aligned} D_{y_0^+}^{\nu_1} f_0 &= -\alpha D_{x_0^+}^{\nu_0} f_1, \\ D_{x_0^+}^{\nu_0} f_0 &= \beta D_{x_0^+}^{\nu_0} f_1 + D_{y_0^+}^{\nu_1} f_1. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Puesto que no habrá ambigüedad en el orden fraccionario o los parámetros α y β sobre los cuales las funciones se consideran, se omitirá el orden fraccionario y el espacio $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ de modo que simplemente se dirá que una función es fraccionaria analítica.

OBSERVACIÓN. Por simplicidad, en los cálculos concernientes a D_+^ν se considera $\nu = (\nu_0, \nu_1) \in (0, 1) \times (0, 1)$. Sin embargo, se puede razonar de manera similar para $\nu \in \mathbb{R}^2$, cualquiera.

Para poder asegurar sobre qué tipo de funciones el operador de Cauchy-Riemann generalizado fraccionario está bien definido y poder estudiar sus propiedades es necesario introducir el siguiente espacio funcional:

DEFINICIÓN 4.2. Se dirá que $f : \Omega \subset \mathbb{C}_{\alpha,\beta} \longrightarrow \mathbb{C}_{\alpha,\beta}$, tal que $f = f_0 + if_1$, pertenece a $AC^n(\Omega)$ si para cada $y \in [y_0, y_1]$

$$x \mapsto f_i(x, y) \in AC^n([x_0, x_1])$$

y para cada $x \in [x_0, x_1]$

$$y \mapsto f_i(x, y) \in AC^n([y_0, y_1]),$$

para $i = 0, 1$.

TEOREMA 4.1. *El operador D_+^v y su conjugado son lineales. Esto es, para cualquier par de funciones $f, g \in AC^1(\Omega)$ y $\lambda \in \mathbb{C}_{\alpha, \beta}$, se tiene*

$$D_+^v(f + \lambda g) = D_+^v f + \lambda D_+^v g$$

y

$$\overline{D_+^v}(f + \lambda g) = \overline{D_+^v} f + \lambda \overline{D_+^v} g.$$

Demostración. Escribiendo $f = f_0 + if_1$, $g = g_0 + ig_1$ y $\lambda = \lambda_0 + i\lambda_1$, se tiene que

$$f + \lambda g = f_0 + \lambda_0 g_0 - \alpha \lambda_1 g_1 + i(f_1 + \lambda_0 g_1 + \lambda_1 g_0 - \beta \lambda_1 g_1).$$

Aplicando el operador de Cauchy-Riemann D_+^v a esta expresión y aprovechando de la linealidad de las derivadas fraccionarias:

$$\begin{aligned} D_+^v(f + \lambda g) &= \left(D_{y_0^+}^{v_1} - i D_{x_0^+}^{v_0} \right) (f + \lambda g) \\ &= D_{y_0^+}^{v_1} (f_0 + \lambda_0 g_0 - \alpha \lambda_1 g_1) - \alpha D_{x_0^+}^{v_0} (f_1 + \lambda_0 g_1 + \lambda_1 g_0 - \beta \lambda_1 g_1) \\ &\quad + i \left[D_{y_0^+}^{v_1} (f_1 + \lambda_0 g_1 + \lambda_1 g_0 - \beta \lambda_1 g_1) - D_{x_0^+}^{v_0} (f_0 + \lambda_0 g_0 - \alpha \lambda_1 g_1) \right. \\ &\quad \left. + \beta D_{x_0^+}^{v_0} (f_1 + \lambda_0 g_1 + \lambda_1 g_0 - \beta \lambda_1 g_1) \right] \\ &= D_{y_0^+}^{v_1} f_0 - \alpha D_{x_0^+}^{v_0} f_1 + i \left(D_{y_0^+}^{v_1} f_1 - D_{x_0^+}^{v_0} f_0 + \beta D_{x_0^+}^{v_0} f_1 \right) \\ &\quad + \lambda_0 \left(D_{y_0^+}^{v_1} g_0 - \alpha D_{x_0^+}^{v_0} g_1 \right) - \alpha \lambda_1 \left(D_{y_0^+}^{v_1} g_1 - D_{x_0^+}^{v_0} g_0 + \beta D_{x_0^+}^{v_0} g_1 \right) \\ &\quad + i \left[\lambda_0 \left(D_{y_0^+}^{v_1} g_0 - D_{x_0^+}^{v_0} g_0 + \beta D_{x_0^+}^{v_0} g_1 \right) \right. \\ &\quad \left. + \lambda_1 \left(D_{y_0^+}^{v_1} g_0 - \alpha D_{x_0^+}^{v_0} g_1 \right) - \beta \lambda_1 \left(D_{y_0^+}^{v_1} g_1 - D_{x_0^+}^{v_0} g_0 + \beta D_{x_0^+}^{v_0} g_1 \right) \right] \\ &= D_+^v f + \lambda \left[D_{y_0^+}^{v_1} g_0 - \alpha D_{x_0^+}^{v_0} g_1 + i \left(D_{y_0^+}^{v_1} g_1 - D_{x_0^+}^{v_0} g_0 + \beta D_{x_0^+}^{v_0} g_1 \right) \right] \\ &= D_+^v f + \lambda D_+^v g. \end{aligned}$$

De manera similar se procede para probar que $\overline{D_+^v}$ es lineal. □

Más aún, se tienen las siguientes relaciones con la conjugación en $\mathbb{C}_{\alpha, \beta}$.

PROPOSICIÓN 4.2. *Sea $f \in AC^2(\Omega)$ tal que f_0 y f_1 cumplan las hipótesis del Teore-*

ma 2.12. Entonces:

1. $D_+^v \bar{f} = \overline{D_+^v f}$,
2. $\overline{D_+^v \bar{f}} = \overline{D_+^v f}$,
3. $\overline{D_+^v} D_+^v = D_+^v \overline{D_+^v}$.

Demostración. Se considera $f = f_0 + if_1$, de modo que $\bar{f} = f_0 - \beta f_1 - if_1$.

Para mostrar 1. se calcula

$$\begin{aligned}
 \overline{D_+^v f} &= \overline{D_{y_0^+}^{\nu_1} f_0 + \beta D_{x_0^+}^{\nu_0} f_0 - \alpha D_{x_0^+}^{\nu_0} f_1 + i \left(D_{y_0^+}^{\nu_1} f_1 + D_{x_0^+}^{\nu_0} f_0 \right)} \\
 &= \overline{D_{y_0^+}^{\nu_1} f_0 - \beta D_{y_0^+}^{\nu_1} f_1 - \alpha D_{x_0^+}^{\nu_0} f_1 - i \left(D_{y_0^+}^{\nu_1} f_1 + D_{x_0^+}^{\nu_0} f_0 \right)} \\
 &= \left(D_{y_0^+}^{\nu_1} - i D_{x_0^+}^{\nu_0} \right) (f_0 - \beta f_1 - if_1) \\
 &= D_+^v \bar{f}.
 \end{aligned}$$

Se procede de manera similar para 2.

$$\begin{aligned}
 \overline{D_+^v \bar{f}} &= \overline{D_{y_0^+}^{\nu_1} f_0 + \alpha D_{x_0^+}^{\nu_0} f_1 + i \left(D_{y_0^+}^{\nu_1} f_1 + \beta D_{x_0^+}^{\nu_0} f_1 - D_{x_0^+}^{\nu_0} f_0 \right)} \\
 &= \overline{D_{y_0^+}^{\nu_1} f_0 + \alpha D_{x_0^+}^{\nu_0} f_1 - \beta D_{y_0^+}^{\nu_1} f_1 - \beta^2 D_{x_0^+}^{\nu_0} f_1 + \beta D_{x_0^+}^{\nu_0} f_0} \\
 &\quad - i \left(D_{y_0^+}^{\nu_1} f_1 + \beta D_{x_0^+}^{\nu_0} f_1 - D_{x_0^+}^{\nu_0} f_0 \right) \\
 &= \left(D_{y_0^+}^{\nu_1} + \beta D_{x_0^+}^{\nu_0} + i D_{x_0^+}^{\nu_0} \right) (f_0 - \beta f_1 - if_1) \\
 &= \overline{D_+^v \bar{f}}.
 \end{aligned}$$

Nótese que $D_{y_0^+}^{\nu_1} D_{x_0^+}^{\nu_0} f_i = D_{x_0^+}^{\nu_0} f_i$, para $i=0,1$, ya que la variable de derivación es distinta y por el espacio funcional se puede aplicar el Teorema de Fubini para cambiar el orden de integración. Por esto y gracias al Teorema 2.12, para 3.

$$\overline{D_+^v} D_+^v = D_+^v \overline{D_+^v} = \alpha D_{x_0^+}^{2\nu_0} f + \beta D_{y_0^+}^{\nu_1} D_{x_0^+}^{\nu_0} f + D_{y_0^+}^{2\nu_1} f.$$

□

4.1.1. Polinomios analíticos fraccionarios

Definamos una familia de polinomios que nos serán de utilidad para caracterizar funciones tipo elementales. Sea $\mu \in (0, 1)$, se define la siguiente función sobre el

intervalo finito $[t_0, t_1]$

$$\Phi_t^{\mu,m} = \frac{1}{\Gamma(\mu) \Gamma((m+1)\mu)} (t - t_0)^{(m+1)\mu-1}, \quad (4.5)$$

para cada $m \in \mathbb{N}_0$ (ver [5, Sec. 4.1]). Se define de esta manera a esta familia de polinomios bajo la motivación de que se cumpla el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 4.3. Para $\mu \in (0, 1)$, se cumple

$$D_{x_0^+}^\mu \Phi_t^{\mu,m} = \begin{cases} 0 & \text{si } m = 0, \\ \Phi_t^{\mu,m-1} & \text{si } m \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (4.6)$$

Demostración. Si $m = 0$, por el Lema 2.15, se sigue directamente que

$$D_{x_0^+}^\mu \Phi_t^{\mu,0} = 0.$$

Si $m \geq 1$, del Ejemplo 6

$$\begin{aligned} D_{x_0^+}^\mu \Phi_t^{\mu,m} &= \frac{\Gamma((m+1)\mu)}{\Gamma(\mu) \Gamma(m\mu) \Gamma((m+1)\mu)} (t - t_0)^{(m+1)\mu-1-\mu} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\mu) \Gamma(m\mu)} (t - t_0)^{m\mu-1} \\ &= \Phi_t^{\mu,m-1}, \end{aligned}$$

lo que se buscaba demostrar. □

Se introduce también la función sobre el mismo intervalo

$$\Psi_t^{\mu,m} = \frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma((m+1)\mu)} (t - t_0)^{(m+1)\mu}, \quad (4.7)$$

para cada $m \in \mathbb{N}_0$ (ver [5, Sec. 4.3]).

En el caso límite, estos polinomios cumplen

$$\lim_{\mu \rightarrow 1^-} \Phi_t^{\mu,m} = \frac{(t - t_0)^m}{m!} = \Phi_t^{1,m}$$

y

$$\lim_{\mu \rightarrow 1^-} \Psi_t^{\mu,m} = \frac{(t - t_0)^{m+1}}{m!} = \Psi_t^{1,m}.$$

Se escribirá $\Phi_x^{\mu,m}$ y $\Phi_y^{\mu,m}$ a las funciones definidas como en (4.6) pero sobre los intervalos $[x_0, x_1]$ y $[y_0, y_1]$, respectivamente.

4.2. Función exponencial fraccionaria sobre $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$

De lo visto en la Sección 2.3, se puede aprovechar que la función de Mittag-Leffler interviene en las funciones propias de las derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville para caracterizar una función tipo exponencial.

PROPOSICIÓN 4.4. Sean $\mu \in (0, 1)$ y $\lambda \in \mathbb{C}_{\alpha,\beta}$. Se tiene que

$$D_{x_0^+}^\mu \left(\Phi_x^{\mu,0} E_{\mu,\mu}(\lambda \Psi_x^{\mu,0}) \right) = \lambda \Phi_x^{\mu,0} E_{\mu,\mu}(\lambda \Psi_x^{\mu,0}). \quad (4.8)$$

Demostración. De la convergencia absoluta de la función de Mittag-Leffler sobre $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$, se tiene la siguiente relación

$$\begin{aligned} \Gamma(\mu) \Phi_x^{\mu,0} E_{\mu,\mu}(\lambda \Psi_x^{\mu,0}) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{\Gamma((k+1)\mu)} (x - x_0)^{(k+1)\mu-1} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k \Phi_x^{\mu,k}. \end{aligned}$$

Aplicando la derivada fraccionaria de orden μ a esta expresión, se obtiene, gracias al Teorema 2.13 y de la Proposición 4.3, que

$$\begin{aligned} D_{x_0^+}^\mu \left(\Gamma(\mu) \Phi_x^{\mu,0} E_{\mu,\mu}(\lambda \Psi_x^{\mu,0}) \right) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k D_{x_0^+}^\mu \Phi_x^{\mu,k} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda^k \Phi_x^{\mu,k-1} \\ &= \lambda \sum_{j=0}^{+\infty} \lambda^j \Phi_x^{\mu,j} \\ &= \lambda \Gamma(\mu) \Phi_x^{\mu,0} E_{\mu,\mu}(\lambda \Psi_x^{\mu,0}). \end{aligned}$$

El resultado se sigue de la linealidad de la derivada fraccionaria. \square

Esta proposición impulsa definir una función tipo exponencial real, en específico

$$e_\mu(\lambda, t) = \Phi_t^{\mu,0} E_{\mu,\mu}(\lambda \Psi_t^{\mu,0}),$$

para $\mu \in (0, 1)$. Ahora, pensando en la exponencial compleja se define la función

$$\mathcal{E}_\nu(\lambda z) := e_{\nu_0}(\lambda, x) e_{\nu_1}(i\lambda, y), \quad (4.9)$$

donde $\nu = (\nu_0, \nu_1)$ y $z = x + iy \in \mathbb{C}_{\alpha,\beta}$. A esta se la llamará *función exponencial fraccionaria* sobre $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$. El siguiente resultado justifica el nombre de esta función.

TEOREMA 4.5. Sea $\lambda \in \mathbb{C}_{\alpha,\beta}$. Se tiene que

$$D_+^v \mathcal{E}_v(\lambda z) = 0 \quad (4.10)$$

y

$$\overline{D}_+^v \mathcal{E}_v(\lambda z) = \lambda(\beta + 2i)\mathcal{E}_v(\lambda z), \quad (4.11)$$

para todo $z \in \mathbb{C}_{\alpha,\beta}$.

Demostración. Sea $\lambda \in \mathbb{C}_{\alpha,\beta}$, cualquiera. Para mostrar que \mathcal{E}_v es analítica, se aplican las definiciones (4.1) y (4.9) de manera que se obtiene

$$\begin{aligned} D_+^v \mathcal{E}_v(\lambda z) &= \left(D_{y_0^+}^{v_1} - iD_{x_0^+}^{v_0} \right) e_{v_0}(\lambda, x) e_{v_1}(i\lambda, y) \\ &= e_{v_0}(\lambda, x) D_{y_0^+}^{v_1} e_{v_1}(i\lambda, y) - iD_{x_0^+}^{v_0} e_{v_0}(\lambda, x) e_{v_1}(i\lambda, y). \end{aligned}$$

De la Proposición 4.4, se sigue

$$D_+^v \mathcal{E}_v(\lambda z) = \lambda i e_{v_0}(\lambda, x) e_{v_1}(i\lambda, y) - \lambda i e_{v_0}(\lambda, x) e_{v_1}(i\lambda, y) = 0.$$

Similarmente, aplicando \overline{D}_+^v a \mathcal{E}_v se obtiene

$$\begin{aligned} \overline{D}_+^v \mathcal{E}_v(\lambda z) &= \left(D_{y_0^+}^{v_1} + \beta D_{x_0^+}^{v_0} + iD_{x_0^+}^{v_0} \right) e_{v_0}(\lambda, x) e_{v_1}(i\lambda, y) \\ &= e_{v_0}(\lambda, x) D_{y_0^+}^{v_1} e_{v_1}(i\lambda, y) + \beta D_{x_0^+}^{v_0} e_{v_0}(\lambda, x) e_{v_1}(i\lambda, y) + iD_{x_0^+}^{v_0} e_{v_0}(\lambda, x) e_{v_1}(i\lambda, y) \\ &= (i\lambda + \beta\lambda + i\lambda) e_{v_0}(\lambda, x) e_{v_1}(i\lambda, y) \\ &= \lambda(\beta + 2i)\mathcal{E}_v(\lambda z), \end{aligned}$$

como se quería demostrar. □

OBSERVACIÓN. Para eliminar el término $\beta + 2i$ en la proposición anterior se podría considerar un reescalamiento del operador de Cauchy-Riemann generalizado fraccionario, dado de la siguiente manera

$$\overline{\mathcal{D}}_+^v := \frac{\beta + 2i}{\Delta} \overline{D}_+^v.$$

Sin embargo, este nuevo operador estaría definido siempre que $\Delta \neq 0$. Esto permite escribir de manera más familiar

$$\overline{\mathcal{D}}_+^v \mathcal{E}_v(\lambda z) = \lambda \mathcal{E}_v(\lambda z). \quad (4.12)$$

La ecuación (4.10) se cumple para $\overline{\mathcal{D}}_+^v$ pues el término $\frac{\beta+2i}{\Delta}$ es invertible.

Para valores arbitrarios de $\nu = (\nu_0, \nu_1)$, la función tipo exponencial no necesariamente se reparte en suma. Es decir

$$\mathcal{E}_\nu(\lambda(z+w)) \neq \mathcal{E}_\nu(\lambda z) \mathcal{E}_\nu(\lambda w).$$

En efecto, basta comparar las funciones e_{ν_0} , considerando $\lambda = 1$ y $x_0 = 0$. Gracias a la serie binomial se tiene

$$\begin{aligned} e_{\nu_0}(1, x_1 + x_2) &= \frac{1}{\Gamma(\nu_0)^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(x_1 + x_2)^{(k+1)\nu_0-1}}{\Gamma((k+1)\nu_0)} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\nu_0)^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{(k+1)\nu_0-1}{j} \frac{x_1^{(k+1)\nu_0-(j+1)} x_2^j}{\Gamma((k+1)\nu_0)}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Por otro lado, de la fórmula de Cauchy para el producto de dos series

$$\begin{aligned} e_{\nu_0}(1, x_1) e_{\nu_0}(1, x_2) &= \left(\frac{1}{\Gamma(\nu_0)^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x_1^{(k+1)\nu_0-1}}{\Gamma((k+1)\nu_0)} \right) \left(\frac{1}{\Gamma(\nu_0)^2} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x_2^{(j+1)\nu_0-1}}{\Gamma((j+1)\nu_0)} \right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\nu_0)^4} \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^k \frac{x_1^{(j+1)\nu_0-1}}{\Gamma((j+1)\nu_0)} \frac{x_2^{(k-j+1)\nu_0-1}}{\Gamma((k-j+1)\nu_0)}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Las ecuaciones (4.13) y (4.14) en general no coinciden ya que en la primera aparece el término $\frac{x_1^{\nu_0-1}}{\Gamma(\nu_0)^3}$, mientras que en el segundo no. Sin embargo, cuando $\nu_0 = 1$, si se tiene la igualdad.

PROPOSICIÓN 4.6. Sean $z, w, \lambda \in \mathbb{C}_{\alpha, \beta}$ y considere $x_0 = y_0 = 0$. Entonces

$$\mathcal{E}_{(1,1)}(\lambda(z+w)) = \mathcal{E}_{(1,1)}(\lambda z) \mathcal{E}_{(1,1)}(\lambda w).$$

Demostración. Suponga que $z = z_0 + iz_1$ y $w = w_0 + iw_1$. Basta mostrar que

$$e_1(\lambda, z_0 + w_0) = e_1(\lambda, z_0) e_1(\lambda, w_0). \quad (4.15)$$

Puesto que

$$e_1(\lambda, x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k x^k}{k!},$$

entonces

$$e_1(\lambda, z_0 + w_0) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k (z_0 + w_0)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{z_0^{k-j} w_0^j}{k!}.$$

Por otro lado,

$$e_1(\lambda, z_0)e_1(\lambda, w_0) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^k \frac{\lambda^j \lambda^{k-j} z_0^j w_0^{k-j}}{j!(k-j)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{z_0^j w_0^{k-j}}{k!}.$$

Estas expresiones coinciden, lo que muestra (4.15). En consecuencia, se tiene lo buscado

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{(1,1)}(\lambda(z+w)) &= e_1(\lambda, z_0+w_0)e_1(\lambda i, z_1+w_1) \\ &= e_1(\lambda, z_0)e_1(\lambda i, z_1)e_1(\lambda, w_0)e_1(\lambda i, w_1) \\ &= \mathcal{E}_{(1,1)}(\lambda z) \mathcal{E}_{(1,1)}(\lambda w). \end{aligned}$$

□

COROLARIO 4.7. Sean $z, \lambda \in \mathbb{C}_{\alpha, \beta}$ y considere $x_0 = y_0 = 0$. Entonces

$$\left(\mathcal{E}_{(1,1)}(\lambda z) \right)^n = \mathcal{E}_{(1,1)}(n\lambda z),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. El resultado se demuestra por inducción. El caso $n = 2$ se cumple por la Proposición 4.6. Suponga que se cumple para $n > 2$, es decir

$$\left(\mathcal{E}_{(1,1)}(\lambda z) \right)^n = \mathcal{E}_{(1,1)}(n\lambda z).$$

Para $n + 1$ se tiene que

$$\left(\mathcal{E}_{(1,1)}(\lambda z) \right)^{n+1} = \left(\mathcal{E}_{(1,1)}(\lambda z) \right) \left(\mathcal{E}_{(1,1)}(\lambda z) \right)^n,$$

por hipótesis de inducción y de la Proposición 4.6

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{E}_{(1,1)}(\lambda z) \right)^{n+1} &= \left(\mathcal{E}_{(1,1)}(\lambda z) \right) \left(\mathcal{E}_{(1,1)}(n\lambda z) \right) \\ &= \mathcal{E}_{(1,1)}((n+1)\lambda z). \end{aligned}$$

Así, el resultado se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$.

□

En lo que resta del trabajo se considerará $\Delta \neq 0$ y el operador $\overline{\mathcal{D}}_+^v$.

4.3. Funciones trigonométricas fraccionarias sobre $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$

Teniendo una función que emule las propiedades de la exponencial sobre $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$, aprovechamos esto para construir ahora funciones trigonométricas. Como en el caso de los números complejos generalizados, las funciones trigonométricas sobre $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ se definen a partir de las funciones trigonométricas reales. Esto motiva primero caracterizar funciones fraccionarias parecidas al seno y coseno, esto para poder caracterizar a las funciones trigonométricas. Para ello, se escribirá

$$A := \frac{\beta + 2i}{\sqrt{|\Delta|}}.$$

Se define a las funciones trigonométricas fraccionarias sobre $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ como

$$S_{\alpha,\beta}^{\nu}(z) := \frac{2}{\sqrt{|\Delta|}} \text{sen}_{\alpha,\beta}^{\nu}(z), \quad (4.16)$$

$$CS_{\alpha,\beta}^{\nu}(z) := \cos_{\alpha,\beta}^{\nu}(z) + \frac{\beta}{\sqrt{|\Delta|}} \text{sen}_{\alpha,\beta}^{\nu}(z), \quad (4.17)$$

donde

$$\text{sen}_{\alpha,\beta}^{\nu}(z) := \text{sign}(\Delta) A \frac{\mathcal{E}_{\nu}(Az) - \mathcal{E}_{\nu}(-Az)}{2}, \quad (4.18)$$

$$\cos_{\alpha,\beta}^{\nu}(z) := \frac{\mathcal{E}_{\nu}(Az) + \mathcal{E}_{\nu}(-Az)}{2}. \quad (4.19)$$

Aquí la función signo de un número real se define como

$$\text{sign}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0, \\ -1 & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

En las ecuaciones (4.18) y (4.19), el signo de Δ tiene la función de caracterizar la función $\text{sen}_{\alpha,\beta}^{\nu}$ como el seno fraccionario en el caso elíptico y como el seno hiperbólico fraccionario en el caso hiperbólico, similar al caso no fraccionario visto en el Capítulo 3. Mientras que las ecuaciones (4.16) y (4.17) se definen siguiendo el mismo razonamiento de (3.4) y (3.5), tener la siguiente fórmula:

$$\mathcal{E}_{\nu}(\lambda Az) = CS_{\alpha,\beta}^{\nu}(\lambda z) + iS_{\alpha,\beta}^{\nu}(\lambda z),$$

la cual se asemeja a (3.3). Por este motivo, se esperaría que estas funciones cumplan propiedades parecidas, lo que se estudia a continuación.

PROPOSICIÓN 4.8. *Las funciones $\text{sen}_{\alpha,\beta}^{\nu}$ y $\cos_{\alpha,\beta}^{\nu}$ son impar y par, respectivamente.*

Demostración. Se procede de manera similar al caso complejo. Se tiene directamente que

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}_{\alpha,\beta}^{\nu}(-z) &= \operatorname{sign}(\Delta) A \frac{\mathcal{E}_{\nu}(-Az) - \mathcal{E}_{\nu}(Az)}{2} \\ &= -\operatorname{sign}(\Delta) A \frac{\mathcal{E}_{\nu}(Az) - \mathcal{E}_{\nu}(-Az)}{2} \\ &= -\operatorname{sen}_{\alpha,\beta}^{\nu}(z)\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\operatorname{cos}_{\alpha,\beta}^{\nu}(-z) &= \frac{\mathcal{E}_{\nu}(-Az) + \mathcal{E}_{\nu}(Az)}{2} \\ &= \frac{\mathcal{E}_{\nu}(Az) + \mathcal{E}_{\nu}(-Az)}{2} \\ &= \operatorname{cos}_{\alpha,\beta}^{\nu}(z).\end{aligned}$$

□

Identidades trigonométricas para estas funciones no son cuestiones directas, más bien se cumplen solo para ciertos valores de $\nu = (\nu_0, \nu_1)$. Esto es reflejado en los siguientes resultados.

PROPOSICIÓN 4.9. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $\Delta \neq 0$. Para todo $z \in \mathbb{C}_{\alpha,\beta}$, se tiene que

$$\left(\operatorname{cos}_{\alpha,\beta}^{\nu}(z)\right)^2 - \operatorname{sign}(\Delta) \left(\operatorname{sen}_{\alpha,\beta}^{\nu}(z)\right)^2 = \mathcal{E}_{\nu}(Az) \mathcal{E}_{\nu}(-Az). \quad (4.20)$$

Demostración. El resultado se sigue de reemplazar las definiciones (4.18) y (4.19) en la parte izquierda de (4.20). En efecto, de manera individual se tiene que

$$\left(\operatorname{cos}_{\alpha,\beta}^{\nu}(z)\right)^2 = \frac{(\mathcal{E}_{\nu}(Az))^2 + 2\mathcal{E}_{\nu}(Az) \mathcal{E}_{\nu}(-Az) + (\mathcal{E}_{\nu}(-Az))^2}{4}$$

y

$$\operatorname{sign}(\Delta) \left(\operatorname{sen}_{\alpha,\beta}^{\nu}(z)\right)^2 = \operatorname{sign}(\Delta)^2 \frac{(\mathcal{E}_{\nu}(Az))^2 - 2\mathcal{E}_{\nu}(Az) \mathcal{E}_{\nu}(-Az) + (\mathcal{E}_{\nu}(-Az))^2}{4}.$$

La identidad buscada se obtiene al restar estas dos expresiones. □

COROLARIO 4.10. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $\Delta \neq 0$ y $x_0 = y_0 = 0$. Entonces

$$\left(\operatorname{cos}_{\alpha,\beta}^{(1,1)}(z)\right)^2 - \operatorname{sign}(\Delta) \left(\operatorname{sen}_{\alpha,\beta}^{(1,1)}(z)\right)^2 = 1. \quad (4.21)$$

Demostración. Evaluando $\nu = (1, 1)$ en (4.20) y de la Proposición 4.6, se tiene

$$\begin{aligned} \left(\cos_{\alpha, \beta}^{(1,1)}(z) \right)^2 - \text{sign}(\Delta) \left(\text{sen}_{\alpha, \beta}^{(1,1)}(z) \right)^2 &= \mathcal{E}_{(1,1)}(Az) \mathcal{E}_{(1,1)}(-Az) \\ &= \mathcal{E}_{(1,1)}(Az - Az) \\ &= \mathcal{E}_{(1,1)}(0). \end{aligned}$$

Puesto que $\mathcal{E}_{(1,1)}(0) = 1$, se obtiene el resultado. \square

LEMA 4.11. Para todo $z \in \mathbb{C}_{\alpha, \beta}$, se cumple

$$\left(\text{CS}_{\alpha, \beta}^{\nu}(z) \right)^2 - \beta \text{S}_{\alpha, \beta}^{\nu}(z) \text{CS}_{\alpha, \beta}^{\nu}(z) + \alpha \left(\text{S}_{\alpha, \beta}^{\nu}(z) \right)^2 = \mathcal{E}_{\nu}(Az) \mathcal{E}_{\nu}(-Az). \quad (4.22)$$

Demostración. Al reemplazar las definiciones (4.16) y (4.17) en el lado izquierdo de (4.22) de manera que se desarrolla en

$$\left(\text{CS}_{\alpha, \beta}^{\nu}(z) \right)^2 - \beta \text{S}_{\alpha, \beta}^{\nu}(z) \text{CS}_{\alpha, \beta}^{\nu}(z) + \alpha \left(\text{S}_{\alpha, \beta}^{\nu}(z) \right)^2 = \left(\cos_{\alpha, \beta}^{\nu}(z) \right)^2 - \text{sign}(\Delta) \left(\text{sen}_{\alpha, \beta}^{\nu}(z) \right)^2.$$

El resultado se concluye gracias a la Proposición 4.9. \square

COROLARIO 4.12. Sean $x_0 = y_0 = 0$. Entonces, para todo $z \in \mathbb{C}_{\alpha, \beta}$

$$\left(\text{CS}_{\alpha, \beta}^{(1,1)}(z) \right)^2 - \beta \text{S}_{\alpha, \beta}^{(1,1)}(z) \text{CS}_{\alpha, \beta}^{(1,1)}(z) + \alpha \left(\text{S}_{\alpha, \beta}^{(1,1)}(z) \right)^2 = 1. \quad (4.23)$$

Demostración. El resultado se obtiene al reemplazar $\nu = (1, 1)$ en (4.22), razonando como en la demostración del Corolario 4.10. \square

Por último, se cumplen propiedades analíticas fraccionarias respecto al operador \mathcal{D}_+^{ν} y fórmulas análogas a las de derivación respecto a $\overline{\mathcal{D}_+^{\nu}}$.

PROPOSICIÓN 4.13. Las funciones $\text{sen}_{\alpha, \beta}^{\nu}$ y $\text{cos}_{\alpha, \beta}^{\nu}$ son fraccionarias analíticas. Además,

$$\overline{\mathcal{D}_+^{\nu}} \text{sen}_{\alpha, \beta}^{\nu}(\lambda z) = \lambda \text{cos}_{\alpha, \beta}^{\nu}(\lambda z), \quad (4.24)$$

$$\overline{\mathcal{D}_+^{\nu}} \text{cos}_{\alpha, \beta}^{\nu}(\lambda z) = \text{sign}(\Delta) \lambda \text{sen}_{\alpha, \beta}^{\nu}(\lambda z). \quad (4.25)$$

Demostración. Por linealidad del operador \mathcal{D}_+^{ν} y del Teorema 4.5 se sigue que

$$\mathcal{D}_+^{\nu} \text{sen}_{\alpha, \beta}^{\nu}(z) = \text{sign}(\Delta) A \frac{\mathcal{D}_+^{\nu} \mathcal{E}_{\nu}(Az) - \mathcal{D}_+^{\nu} \mathcal{E}_{\nu}(-Az)}{2} = 0$$

y

$$\mathcal{D}_+^{\nu} \text{cos}_{\alpha, \beta}^{\nu}(z) = \frac{\mathcal{D}_+^{\nu} \mathcal{E}_{\nu}(Az) + \mathcal{D}_+^{\nu} \mathcal{E}_{\nu}(-Az)}{2} = 0.$$

Del mismo modo, para probar las ecuaciones (4.24) y (4.25) se utiliza la ecuación (4.12) de modo que

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{D}}_+^v \text{sen}_{\alpha,\beta}^v(\lambda z) &= \text{sign}(\Delta) A \frac{\overline{\mathcal{D}}_+^v \mathcal{E}_v(A\lambda z) - \overline{\mathcal{D}}_+^v \mathcal{E}_v(-A\lambda z)}{2} \\ &= \lambda \text{sign}(\Delta) A^2 \frac{\mathcal{E}_v(A\lambda z) + \mathcal{E}_v(-A\lambda z)}{2}.\end{aligned}$$

Puesto que

$$A^2 = \frac{(\beta + 2i)^2}{|\Delta|} = \frac{\Delta}{|\Delta|} = \text{sign}(\Delta),$$

entonces

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{D}}_+^v \text{sen}_{\alpha,\beta}^v(\lambda z) &= \lambda \text{sign}(\Delta)^2 \frac{\mathcal{E}_v(A\lambda z) + \mathcal{E}_v(-A\lambda z)}{2} \\ &= \lambda \frac{\mathcal{E}_v(A\lambda z) + \mathcal{E}_v(-A\lambda z)}{2} \\ &= \lambda \text{cos}_{\alpha,\beta}^v(\lambda z).\end{aligned}$$

De manera similar, aplicando $\overline{\mathcal{D}}_+^v$ a $\text{cos}_{\alpha,\beta}^v$

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{D}}_+^v \text{cos}_{\alpha,\beta}^v(\lambda z) &= \frac{\overline{\mathcal{D}}_+^v \mathcal{E}_v(A\lambda z) + \overline{\mathcal{D}}_+^v \mathcal{E}_v(-A\lambda z)}{2} \\ &= \lambda A \frac{\mathcal{E}_v(A\lambda z) - \mathcal{E}_v(-A\lambda z)}{2} \\ &= \text{sign}(\Delta) \lambda \text{sen}_{\alpha,\beta}^v(\lambda z).\end{aligned}$$

□

LEMA 4.14. *Las funciones $S_{\alpha,\beta}^v$ y $CS_{\alpha,\beta}^v$ son fraccionarias analíticas y además*

$$\overline{\mathcal{D}}_+^v S_{\alpha,\beta}^v(z) = \frac{1}{\sqrt{|\Delta|}} \left(2CS_{\alpha,\beta}^v(z) - \beta S_{\alpha,\beta}^v(z) \right), \quad (4.26)$$

$$\overline{\mathcal{D}}_+^v CS_{\alpha,\beta}^v(z) = \frac{1}{\sqrt{|\Delta|}} \left(\beta CS_{\alpha,\beta}^v(z) - 2\alpha S_{\alpha,\beta}^v(z) \right). \quad (4.27)$$

Demostración. Puesto que las funciones $S_{\alpha,\beta}^v$ y $CS_{\alpha,\beta}^v$ son combinaciones lineales de las funciones $\text{sen}_{\alpha,\beta}^v$ y $\text{cos}_{\alpha,\beta}^v$, las cuales son fraccionarias analíticas por la Proposición 4.13, se sigue

$$\mathcal{D}_+^v S_{\alpha,\beta}^v = \mathcal{D}_+^v CS_{\alpha,\beta}^v = 0.$$

Respecto a las fórmulas (4.26) y (4.27), se calcula mediante sus respectivas definicio-

nes

$$\begin{aligned}
\overline{\mathcal{D}}_+^v S_{\alpha,\beta}^v(z) &= \frac{2}{\sqrt{|\Delta|}} \overline{\mathcal{D}}_+^v \text{sen}_{\alpha,\beta}^v(z) \\
&= \frac{2}{\sqrt{|\Delta|}} \text{cos}_{\alpha,\beta}^v(z) \\
&= \frac{1}{\sqrt{|\Delta|}} \left(2\text{CS}_{\alpha,\beta}^v(z) - \frac{2\beta}{\sqrt{|\Delta|}} \text{sen}_{\alpha,\beta}^v(z) \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{|\Delta|}} \left(2\text{CS}_{\alpha,\beta}^v(z) - \beta S_{\alpha,\beta}^v(z) \right).
\end{aligned}$$

Aprovechando esta expresión, se sigue para la función $\text{CS}_{\alpha,\beta}^v$

$$\begin{aligned}
\overline{\mathcal{D}}_+^v \text{CS}_{\alpha,\beta}^v(z) &= \overline{\mathcal{D}}_+^v \text{cos}_{\alpha,\beta}^v(z) + \frac{\beta}{\sqrt{|\Delta|}} \overline{\mathcal{D}}_+^v \text{sen}_{\alpha,\beta}^v(z) \\
&= \text{sign}(\Delta) \text{sen}_{\alpha,\beta}^v(z) + \frac{\beta}{\sqrt{|\Delta|}} \text{cos}_{\alpha,\beta}^v(z) \\
&= \frac{\sqrt{|\Delta|} \text{sign}(\Delta)}{2} S_{\alpha,\beta}^v(z) + \frac{\beta}{\sqrt{|\Delta|}} \left(\text{CS}_{\alpha,\beta}^v(z) - \frac{\beta}{2} S_{\alpha,\beta}^v(z) \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{|\Delta|}} \left(\beta \text{CS}_{\alpha,\beta}^v(z) - 2\alpha S_{\alpha,\beta}^v(z) \right).
\end{aligned}$$

Esto muestra el resultado. □

Capítulo 5

Conclusiones y trabajo futuro

5.1. Conclusiones

- Se logró caracterizar una función tipo exponencial sobre $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$, en el sentido de que cumple propiedades como ser analítica respecto D_+^{ν} y una función propia de los operador $\overline{D_+^{\nu}}$, imitando así la derivada del caso ordinario definida en (3.13).
- Gracias a la función exponencial fraccionaria sobre $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$, se caracterizó funciones trigonométricas $S_{\alpha,\beta}^{\nu}$ y $CS_{\alpha,\beta}^{\nu}$ que imitan las propiedades de las funciones $\text{sen}_{\alpha,\beta}$ y $\text{cos}_{\alpha,\beta}$ presentadas en el Capítulo 3. En específico, se obtuvo una identidad trigonométrica que en particular es análoga al de la Proposición 3.15. Además, las fórmulas obtenidas en el Lema 4.14 siguen un patrón parecido a las del Lema 3.16, salvo los coeficientes que no tienen por qué ser iguales ya que A y $D_{\alpha,\beta}$ son distintos.
- Las funciones trigonométricas fraccionarias sobre $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ se definieron a partir de funciones que imitan las propiedades del seno y coseno reales cuando $\Delta < 0$, o al seno y coseno hiperbólicos en el caso $\Delta > 0$, pero en el contexto fraccionario. Esto abarca paridad, identidades trigonométricas que coinciden cuando el orden fraccionario es entero y además fórmulas de derivación respecto al operador $\overline{\mathcal{D}_+^{\nu}}$.
- La función de Mittag-Leffler de dos parámetros resultó útil para caracterizar las funciones trigonométricas fraccionarias $\text{sen}_{\alpha,\beta}^{\nu}$ y $\text{cos}_{\alpha,\beta}^{\nu}$, y la función exponencial fraccionaria \mathcal{E}_{ν} , de manera que al aplicarles el operador conjugado $\overline{\mathcal{D}_+^{\nu}}$, se obtienen fórmulas de derivación similares a las funciones trigonométricas y

exponencial sobre $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$. Esto se dio gracias a su relación con la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville, al ser considerada como una exponencial generalizada.

- El hecho de trabajar con la misma topología de \mathbb{R}^2 permite tener propiedades de convergencia similares a las de \mathbb{C} , lo que facilitó extender la función de Mittag-Leffler sobre $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ sin mayor dificultad. La topología presentada en [9] sobre $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ presenta dificultades al querer replicar resultados como el Teorema de Cauchy-Hadamard.
- El operador conjugado $\overline{D_+^v}$ no es un buen sustituto para la derivada de $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ cuando $\Delta = 0$. El hecho de tener presente el término $\beta + 2i$, cuyo cuadrado se anula en el caso parabólico, hace triviales a varios resultados, lo cual no es interesante.

5.2. Trabajo futuro

- En la construcción de la función exponencial se quiso emular la exponencial compleja tomando la forma $e^x e^{iy}$, resultando en la ecuación (4.9). Otra línea de pensamiento sería emular la forma $e^{x - \frac{\beta}{2}y} e^{iy}$, definiendo

$$\mathcal{E}_v(\lambda z) = e_{v_0} \left(\lambda, x - \frac{\beta}{2}y \right) e_{v_1}(i\lambda, y).$$

La dificultad es calcular la derivada de esta función aplicándole $\overline{D_+^v}$, en donde aparece la necesidad de la regla de Leibniz fraccionaria. Esto queda abierto para definir otro tipo de funciones tipo exponencial, trigonométricas y el estudio de sus propiedades.

- Un siguiente paso a tomar sería buscar caracterizar ahora funciones polianalíticas, es decir que se anulen cuando se les aplique el operador D_+^v de manera iterada, similar a como se hizo sobre \mathbb{BC} en [5]. En este trabajo de Coloma, N. et al. se caracterizó polinomios sobre \mathbb{BC} que cumplan dicha propiedad.
- Teniendo polinomios fraccionarios analíticos caracterizados en el trabajo de E. Vela [27], función tipo exponencial y funciones tipo trigonométricas, otro paso que se puede tomar es pensar en expansiones en series de Taylor para estas funciones

- Trabajar en generalizar un gradiente fraccionario sobre $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ y estudiar las propiedades haciendo analogía al caso ordinario. Principalmente, se debería buscar definir bien la divergencia y el rotacional de funciones con este gradiente. Además de ver qué representaría físicamente fenómenos como rotacional nulo o divergencia nula. Hacer esto en $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ facilita luego hacerlo sobre \mathbb{C} o \mathbb{BC} , puesto que \mathbb{C} es un caso particular y \mathbb{BC} es un sistema de 4 dimensiones que usa números particulares de $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$.

Bibliografía

- [1] Ablamowicz, R., Baylis, W. E., Branson, T., Lounesto, P., Porteous, I., Ryan, J., Selig, J. M., y Sobczyk, G. *Lectures on Clifford (Geometric) Algebras and Applications*. Birkhäuser Boston, 2004.
- [2] Boccaletti, D., Cannata, R., Catoni, V., Nichelatti, E., y Zampetti, P. *The Mathematics of Minkowski Space-Time*. Birkhäuser Basel, 2008.
- [3] Calderón, M., Rosales, J., Guzmán, R., Gonzales, A., y Álvarez, J. El cálculo diferencial e integral fraccionario y sus aplicaciones. *Acta Universitaria*, 25(2), 20-27, 2015.
- [4] Ceballos, J., Coloma, N., Teodoro, A. D., y Ochoa-Tocachi, D. Generalized fractional cauchy-riemann operator associated with the fractional cauchy-riemann operator. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 30(5), 2020.
- [5] Coloma, N., Teodoro, A. D., Ochoa-Tocachi, D., y Ponce, F. Fractional elementary bicomplex functions in the Riemann-Liouville sense. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 31(4), 2021.
- [6] Delanghe, R., Sommen, F., y Souček, V. *Clifford Algebra and Spinor-Valued Functions*. Springer Netherlands, 1992.
- [7] Diethelm, K. *The Analysis of Fractional Differential Equations*. Springer Berlin Heidelberg, 2010.
- [8] Ferreira, M. y Vieira, N. Eigenfunctions and fundamental solutions of the fractional laplace and dirac operators: The Riemann-Liouville case. 10(5):1081-1100, 2016.
- [9] Fjelstad, P. y Gal, S. G. Two-dimensional geometries, topologies, trigonometries and physics generated by complex-type numbers. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 11(1):81-107, 2001.

- [10] Folland, G. B. *Real analysis : modern techniques and their applications*. Wiley, New York, 1999.
- [11] Gorenflo, R., Kilbas, A.A., Mainardi, F., Rosgosin, S.V.: *Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2014.
- [12] Harkin A.A., Harkin J.B.: Geometry of generalized complex numbers. *Math. Mag.* **77**(2), 118-129, 2004.
- [13] Herstein, I. *Topics in algebra*. Xerox College Publ, Waltham, Mass, 1964.
- [14] Kähler, U. y Vieira, N. Fractional clifford analysis. págs. 191–201. Springer International Publishing, 2013.
- [15] Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., y Trujillo, J. J. *Theory and applications of fractional differential equations*. Elsevier, Amsterdam Boston, 2006.
- [16] Lang, S. *Algebraic structures*. Addison-Wesley Pub. Co., Reading, 1967.
- [17] Lee, G. *Abstract algebra: An introductory course*. Springer, Cham, 2018.
- [18] Luna-Elizarrarás, M. E., Shapiro, M., Struppa, D. C., y Vajiac, A. *Bicomplex Holomorphic Functions*. Springer International Publishing, 2015.
- [19] Morillo, E., Riera, L. y Yangari, M. Una breve introducción al cálculo fraccionario. *Rev. Div. Amarun*, (3)27-45, 2022.
- [20] Needham, T. *Visual Complex Analysis*. Clarendon Press, 1998.
- [21] Podlubny, I. *Fractional differential equations : an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*. Academic Press, San Diego, 1999.
- [22] Salimov, A. A., Cengiz, N., y Asl, M. B. On holomorphic hypercomplex connections. *23*(1):179–207, 2012.
- [23] Samko, S. G., Kilbas, A. A., y Marichev, O. I. *Fractional integrals and derivatives: Theory and Applications*. Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam, 1993.
- [24] Sánchez, J. Hamilton y el Descubrimiento de los Cuaterniones. *Pensamiento Matemático*. 2011.
- [25] Scheffers, G. *Sur la généralisation des fonctions analytiques*. *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, 116:1114–1117, 1893.

- [26] Stein, E. *Complex analysis*. Princeton University Press, Princeton, N.J, 2003.
- [27] Vela, E. Caracterización de funciones fraccionarias analíticas en el sentido de Riemann-Liouville sobre estructuras hipercomplejas. EPN, Quito, 2022.
- [28] Wegert, E. *Visual Complex Functions: An Introduction with Phase Portraits*. Birkhäuser, Basel, 2012.
- [29] Wunsch, D. *Complex variables with applications*. Pearson Addison-Wesley, 2005.
- [30] Yaglom, I. Three types of complex numbers. En *Complex Numbers in Geometry*, págs. 1–25. Elsevier, 1968.
- [31] Zill, D. y Shanahan, P. *A first course in complex analysis with applications*. Burlington, MA : Jones & Bartlett Learning, 2015.