ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS

EXISTENCIA DE SOLUCIONES DÉBILES PARA PROBLEMAS ELÍPTICOS SEMILINEALES

TRABAJO DE TITULACIÓN PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE MATEMÁTICA

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

SHIRLEY MONSERRATH QUISINGO NÚÑEZ
shirley.quisingo@epn.edu.ec

Director: MARCO VINICIO CALAHORRANO RECALDE PHD.
marco.calahorrano@epn.edu.ec

QUITO, SEPTIEMBRE 2022

DECLARACIÓN

Yo SHIRLEY MONSERRATH QUISINGO NÚÑEZ, declaro bajo juramento que el trabajo aquí escrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

A través de la presente declaración cedo mis derechos de propiedad intelectual, correspondientes a este trabajo, a la Escuela Politécnica Nacional, según lo establecido por la Ley de Propiedad Intelectual, por su reglamento y por la normatividad institucional vigente.

Shirley Monserrath Quisingo Núñez

CERTIFICACIÓN

Certifico que el presente trabajo fue desarrollado por SHIRLEY MONSERRATH QUISINGO NÚÑEZ, bajo mi supervisión.

Marco Vinicio Calahorrano Recalde PhD.
Director del Proyecto

AGRADECIMIENTOS

A Dios por haberme rodeado de familiares y amigos que me apoyaron y estuvieron para mí cuando más los necesité.

De igual manera, agradezco a la Escuela Politécnica Nacional, por confiar en mí, abrirme las puertas y permitirme realizar todo el proceso educativo dentro de su establecimiento.

Finalmente, mi profundo agradecimiento al Dr. Marco Calahorrano, por brindarme su tiempo y guiarme de la mejor manera en la culminación de este proyecto.

DEDICATORIA

Este proyecto de investigación está dedicado a:

Mis padres William y Sandra quienes, con su esfuerzo me han permitido llegar a cumplir un sueño más, gracias por inculcarme el valor del estudio, el cual me dio fortaleza para culminar mi carrera y este trabajo.

Mis hermanos Jonathan, por ser mi ejemplo a seguir, y Ronald por su incondicional apoyo duranto todo este proceso. Y a toda mi familia por sus oraciones.

Finalmente a todos mis amigos, por extender su mano en momentos difíciles, en especial a Belén, por estar siempre para mí, ayudarme en todas las dudas que tenía y guíarme como si fuera mi hermana mayor.

Índice general

Resumen

En el presente trabajo se analiza la multiplicidad de las soluciones débiles no triviales de problemas elípticos semilineales con peso indefinido, en un dominio acotado de $\mathbb{R}^N$, con $N \geq 3$, y con condiciones de frontera Neumann homogéneas. En concreto se estudia la ecuación -div$(h(x)\nabla u) + q(x) = \lambda w(x) f(u)$, donde h satisface las condiciones de elipticidad, q es una función no negativa en casi todo punto del dominio y w una función que cambia de signo y, cuyo dato no lineal, presenta un crecimiento superlineal y subcrítico.

Mediante técnicas variacionales, como los métodos directos del cálculo de variaciones y los teoremas de minimax, en particular; el teorema del paso de la montaña y un teorema de Linking, se obtendrá dependiendo del crecimiento de f y el parámetro λ, resultados de existencia y se hallará al menos dos soluciones no triviales diferentes.

Palabras clave: Problemas elípticos con peso indefinido, multiplicidad de soluciones, condiciones de Neumann, crecimiento subcrítico, problemas no lineales, puntos críticos, métodos de minimax.

Abstract

In this paper we analyze the multiplicity of the weak, non-trivial solutions of elliptic semilinear problems with indefinite weight, in a bounded domain of $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, with homogeneous Neumann boundary conditions.
Specifically, we study the equation -div$(h(x)\nabla u) + q(x) = \lambda w(x) f(u)$, where h satisfies the ellipticity conditions, q is a nonnegative function at almost every point in the domain and w a function that changes sign and, whose data is nonlinear, presents a superlinear and subcritical growth.

By means of variational techniques, such as the direct methods of variational calculus and the minimax theorems, in particular; the mountain pass theorem and a Linking theorem, will be obtained depending on the growth of f and the parameter λ, results of existence and at least two different solutions will be found.

Keywords: Elliptic problems with indefinite weight, multiplicity of solutions, Neumann's conditions, the minimax methods, subcritical growth, nonlinear problems, critical points.

Notaciones

Notaciones generales

E	Espacio de Banach.
E^*	Dual topológico de E.
U	abierto de E.
H	Espacio de Hilbert.
I'	Derivada de Fréchet del funcional $I : E \to \mathbb{R}$.
I''	Derivada de orden 2 del funcional $I : E \to \mathbb{R}$.
I'_G	Derivada de Gâteaux del funcional $I : E \to \mathbb{R}$.
I^c	Subnivel del funcional $I : E \to \mathbb{R}$.
Ω	Conjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^N$.
supp	Soporte de una función.
sgn	Signo de una función.
(PS)	Condición de Palais-Smale.
$(PS)_c$	Condición de Palais-Smale al nivel c.
$\mathbb{R}$	Conjunto de números reales.
$\mathbb{N}$	Conjunto de números naturales.
2^*	Exponente crítico de Sobolev igual a $\frac{2N}{N-2}$ para $N \geq 3$.
c.t.p.	Casi todo punto.
$\to$	Convergencia fuerte.
$\rightharpoonup$	Convergencia débil.
$\hookrightarrow$	Inyección entre espacios de Banach.
γ	Medida de Lebesgue.
χ_A	Función característica del conjunto A.

Espacios funcionales

$C(\Omega)$	Espacio de funciones continuamuas de Ω en $\mathbb{R}$.
$C^1(\Omega)$	Espacio de funciones continuamente diferenciables de Ω en $\mathbb{R}$.
$C_c^1(\Omega)$	Subespacio de $C^1(\Omega)$ con funciones que tiene soporte compacto.
$C^\infty(\Omega)$	Espacio de funciones infinitamente diferenciables de Ω en $\mathbb{R}$.
$C_c^\infty(\Omega)$	Subespacio de $C^\infty(\Omega)$ con funciones que tiene soporte compacto.
$L^p(\Omega)$	Espacio de Lebesgue.
$W^{1,p}(\Omega)$	Espacio de Sobolev.
$W_0^{1,p}(\Omega)$	Clausura de $C_c^1(\Omega)$ en $W^{1,p}(\Omega)$.
$H^1(\Omega)$	Espacio $W^{1,2}(\Omega)$.
$H_0^1(\Omega)$	Espacio $W_0^{1,2}(\Omega)$.
$C^1(E)$	Espacio de funciones continuamente diferenciables de E en $\mathbb{R}$.

Normas y productos escalares

$\cdot$	Producto puto.
$\vert\ \ \vert$	Norma euclideana definida sobre $\mathbb{R}^N$.
$\vert\vert\ \ \vert\vert_p$	Norma del espacio $L^p(\Omega)$.
$\vert\vert\ \ \vert\vert_{H^1(\Omega)}$	Norma del espacio $H^1(\Omega)$.
$\vert\vert\ \ \vert\vert_{H_0^1(\Omega)}$	Norma del espacio $H_0^1(\Omega)$.
$\vert\vert\ \ \vert\vert_a$	Norma inducida por la forma bilineal a.
$<\ ,\ >_{L^2(\Omega)}$	Producto escalar del espacio $L^2(\Omega)$.
$<\ ,\ >_{H^1(\Omega)}$	Producto escalar del espacio $H^1(\Omega)$.
$<\ ,\ >_{H_0^1(\Omega)}$	Producto escalar del espacio $H_0^1(\Omega)$.

Introducción

En este trabajo se propone estudiar la existencia y la multiplicidad de las soluciones débiles no triviales del siguiente problema:

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(h(x)\nabla u) + q(x)u = \lambda w(x) f(u) & \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \partial\Omega. \end{cases}$$

Donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 3$) es un conjunto abierto y acotado, con frontera $\partial\Omega$ de clase C^1. Y los datos; $h \in L^\infty(\Omega)$ que satisface las condiciones de elipticidad, $q \geq 0$ c.t.p. en Ω y $f \in C^1(\mathbb{R})$ una función que presenta un crecimiento superlineal y subcrítico[1].
La característica principal de este problema, es que el dato $w \in L^\infty(\Omega)$ puede cambiar de signo, de ahí, que a este tipo de problemas se les denomina problemas con peso indefinido.
El cambio de signo del dato $w \in L^\infty(\Omega)$, causa que el estudio de la existencia de soluciones no sea un trabajo sencillo y que se requiera definir nuevas hipótesis en el dato f w, para abordar el problema.

En las últimas décadas, los problemas elípticos no lineales con condiciones de frontera Dirichlet homogéneas han sido los más estudiados, [4], [1], [2] y [6], y dependiendo de las condiciones dadas sobre los datos, se determina, primero la existencia y luego la unicidad o multiplicidad de soluciones. Debido a que, los problemas elípticos no lineales con condiciones de frontera de tipo Neumann homogénea son poco estudiados, es de interés analizar este caso.

Para tratar el problema se estudiarán los puntos críticos del funcional de energía, I, asociado al problema. Para ello, se usará las técnicas variacionales, como los métodos directos del cálculo de variaciones que permiten hallar mínimos absolutos

[1]Ver capítulo 2, definición 2.1

y los teoremas de minimax que establecen la existencia de puntos críticos más generles. Analizando la estructura topológica de los subniveles de I, se pueden hallar diferentes puntos críticos [19], en específico gracias a la teoría asociada al teorema del paso de la montaña es posible hallar infinitas soluciones, cuando el funcional tiene cierta estructutra [26].
En los últimos años algunos autores han hallado hasta tres puntos críticos diferentes [21], [7], y [28]. De manera general, la multiplicidad de los puntos críticos, no es un tarea sencilla y para determinar el número exacto de soluciones se requiere de conocimeintos avanzados como la teoría de grado, la teoría de Morse, entre otros.

El objetivo de este trabajo es determinar la existencia de soluciones y por las hipótesis que se darán a los datos, las técnicas señaladas anteriormente en algunos casos no son aplicables.

De este modo, se procederá con el estudio del problema de la siguiente manera:
En el capítulo 1, se detalla la teoría que se aplicará en la búsqueda de los puntos críticos de I. Se verá de manera resumida, definiciones y resultados más relevantes sobre la teoría de diferenciablidad de funcionales en espacios de Banach, teoremas de mínimo, teorema del paso de la montaña, teoremas de linking y un repaso de los espacios de Lebesgue y Sobolev.

En el capítulo 2 se exhibe el problema a tratar y las hipótesis del dato f con las cuales se trabajará, en consecuencia se expondrán todas las propiedades que satisface el funcional I, que estará escrito como la suma de un forma cuadrática y un funcional no lineal. En este mismo capítulo se notará que, como $q \geq 0$ c.t.p. en Ω, la forma bilineal a la cual está asociada la forma cuadrática puede ser coerciva o no, por lo tanto el estudio de puntos críticos de I, se analizará en dos partes; el caso coercivo y el caso no coercivo.

Posteriormente en el capítulo 3, se realizarán las demostraciones de los resultados obtenidos: para el caso coercivo, se mostrará la existencia de soluciones débiles no triviales. Cuando f presente un crecimiento subcuadrático se hallará al menos dos distintas soluciones y cuando f presente un crecimiento supercuadrático y subcrítico, se mostrará la existencia de al menos una solución débil no trivial, aplicando el teorema del paso de la montaña y un teorema de linking.

Para el caso no coercivo, se mostrará un resultado de existencia.

Y en el capítulo 4 se realizarán comparaciones con el caso Dirichlet, las conclusiones y recomendaciones.

Capítulo 1

Definiciones y resultados básicos del análisis no lineal

En este capítulo se presenta información específica y práctica, para el estudio del trabajo. Los resultados y definiciones que se enunciarán fueron escogidos minuciosamente de [4], [5], [9], [11], [15], [17], [19], [20], [27], [24] y [26].

1.1. Cálculo diferencial para funcionales reales

Sea E un espacio de Banach y E^* su dual topológico, es decir, el espacio de funciones lineales y continuas de E en $\mathbb{R}$, con norma

$$||T||_{E^*} = \sup_{||u||_E = 1} |T(u)|.$$

1.1.1. Funcionales Fréchet diferenciables

Definición 1.1. [9] Sea E un espacio de Banach, U un conjunto abierto de E y sea $I : E \to \mathbb{R}$ un funcional. Se dice que I es Fréchet diferenciable (o simplemente diferenciable) en $u \in U$, si existe $T_u \in E^*$ tal que

$$\lim_{||v||_E \to 0} \frac{I(u+v) - I(u) - T_u(v)}{||v||_E} = 0. \tag{1.1}$$

Si $I : E \to \mathbb{R}$ es diferenciable en todo $u \in U$, se dice que I es diferenciable en U.

Observación 1. Si $I : E \to \mathbb{R}$ es diferenciable en $u \in U$, entonces existe un único $T_u \in E^*$. Ya que si existiera $\overline{T}_u \in E^*$ tal que cumple 1.1, por la linealidad de límite se

sigue que éstos son iguales.
En consecuencia la aplicación

$$\begin{aligned} T : U \to & \ E^* \\ u \ \mapsto & \ T_u \end{aligned}$$

está bien definida, pero no es necesariamente lineal ni continua.

Hecha esta observación se define la derivada de Fréchet

Definición 1.2. [9] Sea E un espacio de Banach, $U \subset E$ un abierto y sea $I : E \to \mathbb{R}$ un funcional diferenciable en $u \in U$. El único elemento de E^*, T_u, tal que satisface 1.1, se dice diferencial de Fréchet (o simplemente diferencial) de I en $u \in U$ y es notada por $T_u := DI(u)$. Además la aplicación DI se dice derivada de Fréchet (o simplemente derivada) de I. Y se tiene

$$I(u+v) = I(u) + DI(u)v + o(||v||_E)$$

cuando $||v||_E \to 0$.

A continuación se enunciará un resultado sobre las propiedades de los funcionales diferenciables.

Teorema 1.1 ([9])**.** Sea E un espacio de Banach, $U \subset E$ un abierto. Si los funcionales I e I_1 son diferenciables en $u \in U \subset E$, entonces se tienen las siguientes propiedades:

1. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $aI + bI_1$ es diferenciable en u y

$$D[aI + bI_1](u) = aDI(u) + bDI_1(u).$$

2. Si $g : \mathbb{R} \to U$ es diferenciable en $t \in \mathbb{R}$, entonces la composición $I \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es diferenciable en t y

$$DI \circ g(t) = DI(g(t))Dg(t).$$

3. Si $B \in \mathbb{R}$ es un conjunto abierto, $g_1 : B \to \mathbb{R}$ es diferenciable en $I(u) \in B$, entonces la composición $g_1 \circ I$ definida en una vecindad abierta, V, de u es diferenciable en u y

$$Dg_1 \circ I(u) = Dg_1(I(u))DI(u).$$

Demostración. (Ver [[9], pág.13] proposición 1.3.6.) □

Como resultado del teorema anterior, se definirá el espacio vectorial de los funcionales de clase C^1.

Definición 1.3 ([9])**.** Sea $U \subset E$ un conjunto abierto y sea $I : E \to \mathbb{R}$ diferenciable en U. Si la derivada $DI : U \to E^*$ es continua en U, se dice que I es de clase C^1.
El espacio de las funciones diferenciables con derivada continua es notado por $C^1(U)$.

Para ilustrar esto, se exhibirán dos ejemplos de funcionales diferenciables, los cuales se usarán para mostrar la difereciabilidad del funcional asociado al problema a tratar.

Ejemplo 1. Si $T : E \to \mathbb{R}$ es un funcional lineal y continuo, entonces es diferenciable y $DT(u) = T$ para todo $u \in E$, pues

$$\lim_{||v||_E \to 0} \frac{T(u+v) - T(v) - T(u)}{||v||_E} = \lim_{||v||_E \to 0} \frac{[T(u) - T(u)] + [T(v) - T(v)]}{||v||_E} = 0$$

para todo $u \in E$.
Además es claro $DT(u) = T$, es continuo en $u \in E$, en consecuencia T es de clase C^1.

Ejemplo 2. Sea E un espacio de Banach, $\boldsymbol{a} : E \times E \to \mathbb{R}$ una forma bilineal y continua. El funcional

$$\begin{aligned} I : E \to \ & \mathbb{R} \\ u \ \mapsto \ & I(u) = \boldsymbol{a}(u,u) \end{aligned}$$

es diferenciable en E, con

$$DI(u)v = \boldsymbol{a}(u,v) + \boldsymbol{a}(v,u) \quad \forall u, v \in E.$$

En efecto, sean $u, v \in E$, de la linealidad de a

$$I(u+v) - I(u) = \boldsymbol{a}(u+v, u+v) - \boldsymbol{a}(u,u) = \boldsymbol{a}(u,v) + \boldsymbol{a}(v,u) + \boldsymbol{a}(v,v),$$

por la continuidad de $\boldsymbol{a}$, se puede verificar que $\lim_{||v||_e \to 0} \frac{\boldsymbol{a}(v,v)}{||v||} = 0$ y $DI(u) \in E^*$, es decir, I es diferenciable en E.
Como $\boldsymbol{a}$ es continua en cada componente, entonces $DI(u)$ es continua en $u \in E$ y así I es de clase C^1.

Precisando de una vez, si $(H, < \cdot, \cdot >)$ es un espacio de Hilbert, se sabe que gracias al teorema de representación de Riesz, se puede identificar H y H^* a través del isomorfismo de Riesz $R : H \to H^*$. Entonces para funcionales definidos sobre espacios de Hilbert, se define el gradiente de éstos.

Definición 1.4. [9] Sea H un espacio de Hilbert, $U \subset H$ un abierto y sea $R : H \to H^*$ el isomorfismo de Riesz. Sea también $I : U \to \mathbb{R}$ un funcional diferenciable en $u \in U$. El elemento $R(DI(U)) \in H$ se dice gradiente de I en u y es notado por $\nabla I(u)$. Además se cumple que

$$DI(u)v = < \nabla I(u), v >_H \quad \forall v \in H.$$

1.1.2. Funcionales Gâteaux diferenciables

Debido a que en espacios más concretos, el diferencial de Fréchet no es tan sencillo de hallar, en esta parte se presenta una segunda noción de diferenciablidad más débil que la noción de Fréchet.

Definición 1.5 **([9]).** Sea E un espacio de Banach, $U \subset E$ un conjunto abierto y sea $I : U \to \mathbb{R}$ un funcional. Se dice que I es Gâteaux diferenciable en $u \in U$, si existe $T \in E^*$ tal que para todo $v \in E$.

$$\lim_{t \to 0} \frac{I(u + tv) - I(u)}{t} = T(u). \tag{1.2}$$

Si I es Gâteaux diferenciable en todo $u \in U$, se dice que I es Gâteaux diferenciable en U.

De la misma manera que en la parte anterior, se puede observar que el operador que satisface la ecuación 1.2, es único. Así se define la derivada de Gâteaux.

Definición 1.6 **([9]).** Sea E un espacio de Banach, $U \subset E$ un abierto y sea $I : E \to \mathbb{R}$ un funcional Gâteaux diferenciable en $u \in U$.
El único elemento de E^*, T, tal que satisface 1.2, se dice diferencial de Gâteaux de I en $u \in U$ y es notada por $T := D_G I(u)$. Además la aplicación $D_G I$ se dice derivada de Gâteaux de I.

De la definición de Fréchet diferenciabilidad, no es difícil mostrar que si I es Fréchet diferenciable, entonces I es Gâteaux diferenciable, sin embargo, el recíproco no siempre es verdadero[1].
Por esta razón se enuncia un resultado que permita afirmar el recíproco.

Teorema 1.2 ([5]). Sea E un espacio de Banach, $U \subset E$ un abierto e $I : U \to \mathbb{R}$ un funcional Gâteaux diferenciable en $u \in U$. Si $D_g I$ es continua en $u \in U$, entonces I es Fréchet diferenciable en u y además,

$$DI(u) = D_G I(u).$$

Demostración. (Ver [[5], pág. 14] teorema 1.9). $\square$

1.1.3. Diferenciales de segundo orden

Definición 1.7 ([15]). Sea E un espacio de Banach, $U \subset E$ un conjunto abierto y sea $I : U \to \mathbb{R}$ un funcional diferenciable en U. Si DI es diferenciable en $u \in E$, entonces se dice que I es dos veces diferenciable en u. La diferencial de la aplicación DI en u, se denotará por $D^2I(u) := D(DI)(u)$ y se llamará la diferencial de orden 2 de I en u.
Se dirá además que I es diferenciable en U, si I es diferenciable en todo $u \in U$.

Observación 2. Si $I : U \to \mathbb{R}$ es dos veces diferenciable en U, entonces la aplicación $D^2I(u) : E \to E^*$ es lineal y continua, es decir, $D^2I(u) \in \mathcal{L}(E, E^*)$[2].
Como $\mathcal{L}(E, E^*)$ es isomorfo isométricamente a $\mathcal{ML}(E \times E, \mathbb{R})$[3] [15], entonces $D^2I(u) : E \times E \to \mathbb{R}$ es una forma bilineal y continua.

[1] La función

$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & g(x,y) = \begin{cases} x + y + \frac{x^3 y}{x^4+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$$

es Gâteaux diferenciable pero no es Fréchet diferenciable.

[2] $\mathcal{L}(E, E^*)$ es el espacio de funciones lineales y continuas de E en E^*

[3] $\mathcal{ML}(E \times E, \mathbb{R})$ es el espacio de formas bilineales y continuas de $E \times E$ en $\mathbb{R}$.

Ejemplo 3. Sea E un espacio de Banach, $\boldsymbol{a} : E \times E \to \mathbb{R}$ una forma bilineal y continua. El funcional

$$\begin{aligned} I : E \to & \quad \mathbb{R} \\ u \quad \mapsto & \quad I(u) = \boldsymbol{a}(u,u) \end{aligned}$$

es dos veces diferenciable en E y

$$D^2 I(u)(v_1, v) = \boldsymbol{a}(v_1, v) + \boldsymbol{a}(v, v_1) \quad \forall u, v, v_1 \in E.$$

Sean u, v, v_1. Del ejemplo 2 se sabe que I es diferenciable con

$$DI(u)v = \boldsymbol{a}(u, v) + \boldsymbol{a}(v, u),$$

entonces por la linealidad de cada componente de a

$$\begin{aligned} [DI(u + v_1) - DI(u)]v &= \boldsymbol{a}(u + v_1, v) + \boldsymbol{a}(v, u + v_1) - (\boldsymbol{a}(u, v) + \boldsymbol{a}(v, u)) \\ &= \boldsymbol{a}(v_1, v) + \boldsymbol{a}(v, v_1) = \boldsymbol{a}(v_1, v) + \boldsymbol{a}(v, v_1) + 0 \cdot ||(v_1, v)||_{E \times E} \\ &= D^2 I(u)(v_1, v) + 0 \cdot ||(v_1, v)||_{E \times E} . \end{aligned}$$

1.2. Teoremas de mínimo

En esta sección se desarrolla la teoría que permite determinar la existencia de extremos de funcionales diferenciables.
Sea E un espacio de Banach e $I : E \to \mathbb{R}$ un funcional. En lo que sigue del documento, si I es diferenciable en E, su derivada se denotará por I' y si además I dos veces diferenciable en E, se notará I'' a su derivada de orden 2.

1.2.1. Puntos críticos de funcionales

Para iniciar esta sección, se enuncian las siguientes definiciones, las cuales se emplearán también en secciones siguientes de este capítulo.

Definición 1.8 ([4]).

- Un punto crítico o estacionario de I, es un punto $z \in E$ tal que I es diferenciable en z y $I'(z) = 0$.
- Un nivel crítico es un número $c \in \mathbb{R}$, tal que existe $z \in K_c$, con

$$K_c = \{u \in E; I(u) = c, I'(u) = 0\}.$$

A los elementos del conjunto K_c se los dice puntos críticos al nivel c.

- Al siguiente conjunto
$$I^c = \{u \in E; I(u) \leq c, \}$$
se le conoce como los subniveles de I.

Definición 1.9 ([4] Punto de ensilladura)**.** Un punto $z \in E$, se dice punto de ensilladura de I, si existen $x, y \in E$ tales que
$$I(x) < I(z) < I(y).$$

Definición 1.10 ([4] Extremos globales)**.** Un punto $z \in E$ se dice mínimo (máximo) global de I, si $I(u) \leq I(z)$ respectivamente $I(u) \geq I(z)$ para todo $u \in E$.
Si las desigualdades anteriores son estrictas, se dice que z es un mínimo (máximo) global estricto de I.

Definición 1.11 ([4] Extremos locales)**.** Un punto $z \in E$, se dice mínimo (máximo) local de I, si existe una vecindad U de z, tal que $I(u) \leq I(z)$ respectivamente $I(u) \geq I(z)$ para todo $u \in U$.
Si las desigualdades anteriores son estrictas, se dice que z es un mínimo (máximo) local estricto de I.

Puesto que el principal interés es la búsqueda de puntos críticos, a continuación se muestra un teorema, el cual establece que un extremo global es un punto crítico.

Teorema 1.3 ([9] Condición necesaria de Euler-Lagrange)**.** Un extremo global de I es un punto crítico de I.

Demostración. Suponiendo que $I : E \to \mathbb{R}$ alcanza su mínimo global, es decir, existe $z \in E$ tal que
$$I(z) = \min_{u \in E} I(u).$$
Sea $u \in E$, se define
$$\begin{array}{rcl} \phi : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \phi(t) = I(z + tu). \end{array}$$
Dado que I y la recta son diferenciables entonces ϕ también lo es;
$$\phi'(t) = I'(z + tu)u \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$
Además, de la definición de ϕ se obtiene
$$\phi(0) = I(z) \leq I(z + tu) = \phi(t)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.
Entonces 0 es mínimo global y en consecuencia punto crítico de ϕ. De esta afirmación, se puede concluir que z es punto crítico de I.

$$I'(z)u = I'(z + 0u)u = \phi'(0) = 0$$

para todo $u \in E$.
El procedimiento es similar, cuando I alcanza su máximo global. □

El siguiente resultado muestra una condición suficiente para que un punto sea mínimo local de I.

Teorema 1.4 ([15]). Sea $I : E \to \mathbb{R}$ un funcional dos veces diferenciable en $u \in E$. Si se satisfacen las siguientes hipótesis

- $I'(u) = 0$
- $I''(u)(v, v) \geq 0$ para todo $v \in E$
- Si $I''(u)(\cdot, \cdot)$ es coercivo.

Entonces u es un mínimo local estricto de I.

Demostración. (Ver [[15], pág. 91] teorema 8.3.3) □

1.2.2. Existencia de mínimos

Aquí se presentan definiciones sobre las propiedades que se aplicarán al funcional de energía asociado al problema de este trabajo, para mostar la existencia de mínimos absolutos de dicho funcional.

Definición 1.12 ([4]). Sea E un espacio de Banach e $I : E \to \mathbb{R}$ un funcional, I es coercivo si

$$\lim_{||u|| \to +\infty} I(u) = +\infty.$$

Observación 3. Si $I : E \to \mathbb{R}$ es un funcional coercivo y existe una sucesión $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, en E tal que $I(u_n) \to L < +\infty$. Entonces se sigue inmediatamente que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada.
Ya que si no estuviese acotada, se tendría que $||u_n||_E \to +\infty$ y como I es coercivo, entonces $I(u_n) \to +\infty$, sin embago se tiene que $I(u_n) \to L$ y de la unicidad de límite $L = +\infty$, lo cual es absurdo.

Definición 1.13 ([4]). Sea E un espacio de Banach e $I : E \to \mathbb{R}$ un funcional, I es débilmente semicontinuo inferior, si para toda sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en E tal que $u_n \rightharpoonup u$, entonces

$$I(u) \leq \liminf_{n\to\infty} I(u_n).$$

Definición 1.14 ([4]). Sea E un espacio de Banach e $I : E \to \mathbb{R}$ un funcional, I es débilmente continuo, si para toda sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en E tal que $u_n \rightharpoonup u$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} I(u_n) = I(u).$$

Lema 1.5 ([4]). Sea E un espacio de Banach reflexivo y sea $I : E \to \mathbb{R}$ un funcional coercivo y débilmente semicontinuo inferior. Entonces I está acotado por abajo en E.

Demostración. (Ver [[4], pág. 81] lema 5.3) □

Teorema 1.6 ([4] Teorema de Weierstrass). Sea E un espacio de Banach reflexivo y sea $I : E \to \mathbb{R}$ un funcional diferenciable en E, coercivo y débilmente semicontinuo inferior. Entonces I alcanza su mínimo global.

Demostración. Sea $m = \inf_{v\in E} I(v)$. De la caracterización de ínfimo, existe una sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en E, tal que $I(u_n) \to m$.
Como I es coercivo, de la observación 3, se tiene que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada y del hecho de que E es reflexivo, entonces $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que converge débilmente a $u \in E$, así, dado que I es débilmente semicontinuo inferior se tiene;

$$I(u) \leq \liminf_{k\to\infty} I(u_{n_k}) = m.$$

De la definición de m;

$$I(u) \geq m,$$

así I alcanza su mínimo $I(u) = m$. □

Las propiedades anteriores establecen la existencia de mínimos absolutos[4], por su parte la siguiente propiedad además establece la unicidad de estos puntos.

[4]Para la existencia de máximos absolutos del funcional I, el funcional $-I$ debe satisfacer las propiedades de coercividad y débilmente semicontinuidad inferior, y para la unicidad la propiedad de convexidad.

Convexidad de funcionales

Definición 1.15 ([4]). Sea E un espacio de Banach e $I : E \to \mathbb{R}$ un funcional, I es convexo, si para todo $u, v \in E$ y todo $t \in [0,1]$

$$I(tu + (1-t)v) \leq tI(u) + (1-t)I(v).$$

Si la desigualdad anterior es estricta para todo $u \neq v$ y todo $t \in (0,1)$, se dice que I es estrictamente convexo.

El siguiente resultado permite dar condiciones suficientes para mostrar la convexidad de funcionales diferenciables.

Proposición 1.7 ([9]). Sea E un espacio de Banach y sea $I : E \to \mathbb{R}$ un funcional diferenciable. Si que para todo $u, v \in E$

$$(I'(u) - I'(v))(u - v) \geq 0.$$

Entonces I es convexo. Si la desigualdad es estricta para todo $u \neq v$, entonces I es estrictamente convexo.

Demostración. (Ver [[9], pág. 28] proposición 1.5.10.) □

Ahora se verá la importancia de los funcionales estrictamente convexos en la unicidad de los mínimos absolutos

Teorema 1.8 ([9]). Sea $I : E \to \mathbb{R}$ estrictamente convexo. Entonces I tiene un único punto mínimo en E

Demostración. Si por absurdo se supone que I posee dos mínimos globales, $u_1, u_2 \in E$, de I tales que $u_1 \neq u_2$

$$\min_{u \in E} I(u) = I(u_1) = I(u_2).$$

Como I es extrictamente convexo se sigue;

$$\min_{u \in E} I(u) \leq I\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right) < \frac{1}{2}I(u_1) + \frac{1}{2}I(u_2) = \min_{u \in E} I(u)$$

Lo cual es absurdo, por lo tanto $u_1 = u_2$. □

Otra ventaja de los funcionales convexos es que, si además éstos son continuos, entonces son débilmente semicontinuos inferiores, como lo afirma el siguiente resultado.

Proposición 1.9 ([11]). Sea E un espacio de Banach e $I : E \to \mathbb{R}$ un funcional continuo y convexo. Entonces I es débilmente semicontinuo inferior.

Demostración. (Ver [[11], pág. 61] corolario 3.9 y observación 6). $\square$

Para ejemplificar tales propiedades, se expone un funcional que satisface las hipótesis de estas dos últimas proposiciones y, que servirá para mostrar las propiedades del funcional de energía asociado al problema a tratar.

Ejemplo 4. Sea E un espacio de Banach y $\boldsymbol{a} : E \times E \to \mathbb{R}$ una forma bilineal, simétrica, positiva y continua. Entonces el funcional

$$\begin{aligned} I : E &\to \mathbb{R} \\ u &\mapsto I(u) = \boldsymbol{a}(u,u), \end{aligned}$$

es de clase C^1, convexo y por lo tanto débilmente semicontinuo inferior.

Esto, debido a que $\boldsymbol{a}$ es una forma bilineal, simétrica y continua, entonces del ejemplo 2, I es de clase C^1 con diferencial

$$I'(u)v = 2\boldsymbol{a}(u,v) \quad \forall u,v \in E.$$

De esto se sigue que I es convexo. En efecto, sean $u,v \in E$

$$\begin{aligned} (I'(u) - I'(v))(u-v) &= I'(u)(u-v) - I'(v)(u-v) = 2\boldsymbol{a}(u,u-v) - 2\boldsymbol{a}(v,u-v) \\ &= 2\boldsymbol{a}(u-v,u-v) \geq 0, \end{aligned}$$

dado que $u,v \in E$ fueron arbitrarios y $(I'(u) - I'(v))(u-v) \geq 0$, se sigue la convexidad de I.
Y como $\boldsymbol{a}$ es continua en E, entonces I también lo es, así I es débilmente semicontinuo inferior.

1.3. Teoremas de minimax

En esta sección se expondrán métodos que permiten encontrar no sólo mínimos absolutos, sino cualquier punto crítico, los cuales pueden ser tanto extremos locales o absolutos como puntos de ensilladura.

1.3.1. Condición de Palais-Smale

La noción de compacidad es fundamental, a fin de mostrar la existencia de niveles críticos de los funcionales. Esta noción es proporcionada por la condición de Palais-Smale.

Definición 1.16 ([9]). Sean E un espacio de Banach, $I : E \to \mathbb{R}$ un funcional diferenciable y $c \in \mathbb{R}$.

- Una sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en E, se dice sucesión de Palais-Smale al nivel c para I, si

  i) $I(u_n) \to c$ en $\mathbb{R}$.

  ii) $I'(u_n) \to 0$ en E^*.

  Abreviando, a la sucesión que satisface i) y ii) se dice sucesión de $(PS)_c$ para I. Si en lugar de i) la sucesión $(I(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada, entonces se dice sucesión de Palais-Smale, abreviando (PS).

- Un funcional $I \in C^1(E)$ se dice que satisface la condición de $(PS)_c$ si toda sucesión de $(PS)_c$ posee una subsucesión convergente en E.
  De igual manera, se dice que un funcional $I \in C^1(E)$ satisface la condición de (PS) si toda sucesión de (PS) posee una subsucesión convergente.

Observación 4. Si $I \in C^1(E)$ satisface la condición de $(PS)_c$, para algún $c \in \mathbb{R}$, entonces el conjunto K_c es compacto.
En efecto, se puede notar que cualquier sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de K_c,

$$I'(u_n) = 0 \quad I(u_n) = c \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

es una sucesión $(PS)_c$.
Dado que I satisface la condición de $(PS)_c$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ posee una sucesión convergente a $u \in E$, entonces de la continuidad de I y I' se tiene

$$I'(u) = 0 \quad I(u) = c,$$

es decir, $u \in K_c$ y así se sigue lo afirmado.

1.3.2. Deformaciones

En lo que sigue, es de interés el estudio de las propiedades topológicas de los conjuntos de subniveles del funcional y, sobre todo, las relaciones entre las propiedades topológicas de los subniveles en presencia de puntos críticos.

Definición 1.17 ([9])**.** Sea E un espacio de Banach y $B \subset E$ un subconjunto. Una deformación de B es una función continua
$\eta : [0,1] \times B \to B$ tal que:

$$\forall u \in B \quad \eta(0,u) = u.$$

Definición 1.18 ([9])**.** Sea E un espacio de Banach y $\eta : [0,1] \times E \to E$ una deformación de E. Una familia Γ de subconjuntos de E se dice invariante para η, si para todo $A \in \Gamma$ y todo $t \in [0,1]$ se tiene $\eta(t,A) \in \Gamma$.

En espacios de Hilbert se puede encontrar deformaciones a través de las soluciones del siguiente problema de Cauchy.

$$\begin{cases} \eta' = -G(\eta) \\ \eta(0) = u. \end{cases}$$

Definición 1.19 ([9])**.** Sea H un espacio de Hilbert e $I : H \to \mathbb{R}$ un funcional. Se dice que $I \in C^{1,1}(H)$, si $I \in C^1(H)$ y su gradiente $\nabla I : H \to H$ es localmente Lipschitz continuo en H[5].
Si $I \in C^{1,1}(H)$, del teorema de inversión local, se tiene que el siguiente problema

$$\begin{cases} \eta'(t,u) = -\nabla I(\eta(t,u)) \\ \eta(0,u) = u \end{cases}$$

tiene una única solución, definida en un intervalo de $\mathbb{R}$, que depende continuamente de t y de u.
La solución η es llamada el flujo del gradiente o el flujo de decenso más profundo, porque para cualquier tiempo la velocidad $\eta(t,u)$ va en dirección $-\nabla I(\eta(t,u))$, dirección en la cual I decrece más rápido.

Observación 5. Si $\eta(t,u)$ es un flujo del gradiente, entonces la función

$$\phi(t) := I(\eta(t,u)),$$

es estrictamente decreciente, excepto en los puntos críticos de I.

$$\phi'(t) =< \nabla I(\eta(t,u)), \eta'(t,u) >_H = -||\nabla I(\eta(t,u))||_H^2 < 0.$$

[5]Sean E y F dos espacios normados. Una apllicación $T : E \to F$, se dice localmente Lipschitz continua en E, si para todo $u \in E$, existe una vecidad de u, $U \subset E$, y una constante $L > 0$, tal que

$$||T(v_1) - T(v_2)||_F \leq ||v_1 - v_2||_E \quad \forall v_1, v_2 \in U.$$

Lema 1.10 ([9])**.** Sean H un espacio de Hilbert, $J \in C^{1,1}(H)$ y $c \in \mathbb{R}$. Si no existe una sucesión de $(PS)_c$, entonces para todo $\epsilon > 0$, suficientemente pequeño existe una deformación $\eta : [0,1] \times H \to H$ tal que;

- $\eta(1, I^{c+\epsilon}) \subset I^{c-\epsilon}$
- $\eta(u) = u$ para todo $u \in I^{c-\epsilon}$.

Demostración. (Ver [[9], pág. 152] lema 4.1.18) □

Observación 6. La suposición, $J \in C^{1,1}(H)$, garantiza la unicidad de la solución del problema de Cauchy, sin embargo esta suposición puede ser debilitada por $J \in C^1(H)$. La justificación de esto, requiere de conocimientos más avanzados y el lector interesado puede revisar la observación 7.5 de [4].

1.3.3. Principio Minimax

El principio minimax caracteriza el valor crítico de un funcional, como un valor minimax sobre una clase adecuada de conjuntos, los cuales se definen a continuación.

Definición 1.20 ([9])**.** Sean E un espacio de Banach, $I : E \to \mathbb{R}$ un funcional y sea Γ una clase de subconjuntos de E. El valor

$$c = \inf_{A \in \Gamma} \sup_{u \in A} I(u),$$

es llamado el nivel minimax asociado a Γ.

Note que puede ocurrir que $c = -\infty$ o $c = +\infty$.

Definición 1.21 ([9])**.** Sean E un espacio de Banach, $I : E \to \mathbb{R}$ un funcional, Γ una una clase de subconjuntos de E y c su nivel minimax. Se dice que Γ es admisible respecto a I si

1. $c \in \mathbb{R}$
2. Para todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, Γ es invariante para toda deformación de $J^{c-2\epsilon}$.

Teorema 1.11 ([9])**.** Sean E un espacio de Banach e $I \in C^1(E)$. Si Γ es una clase minimax admisible al nivel c, entonces existe una sucesión Palais-Smale para I al nivel c. Si además I satisface las condiciones $(PS)_c$, entonces existe un punto crítico para I al nivel c.

Demostración. (Ver [[9], pág. 154] teorema 4.2.4). □

1.3.4. Teorema del paso de la montaña

El teorema del paso de la montaña, es un resultado original de Antonio Ambrosetti y Paul Rabinowitz [6], este resultado se puede ver como una aplicación del principio de minimax.
Donde $\Gamma = \{g \in C([0,1], E); g(0) = 0, g(1) = e\}$ es la clase minimax y su nivel minimax $c_p = \text{ínf}_{g\in\Gamma} \text{máx}_{t\in[0,1]} I(g(t))$.

Adquiere este nombre, ya que la motivación geométrica es ver a 0 y a e, como dos pueblos separados por una cordillera de montañas, entonces para ir de 0 a e se debería escalar, al menos, una altura más grande que $\text{máx}\{I(0), I(e)\}$.

Teorema 1.12 ([4])**.** Sea $I \in C^1(E)$ tal que

I_1) $(I(0) = 0)\ (\exists\rho, \alpha > 0)(I(u) \geq \alpha, \forall u \in E, ||u|| = \rho)$

I_2) $(\exists e \in E, ||e|| > \rho)(I(e) < \alpha)$.

Si I satisface la condición de $(PS)_{c_p}$, entonces $c_p \geq \alpha$ es un valor crítico de I, en otras palabras, existe $z \in E$, $z \neq 0$ y $z \in K_{c_p}$.

Demostración. (Ver [[4], pág 119] teorema 8.2). □

Un funcional I, que satisface las propiedades I_1 e I_2, se dice que posee una geometría del paso de la montaña.

Puntos críticos del tipo paso de la montaña

Para obtener resultados de multiplicidad de los puntos críticos obtenidos mediante el teorema del paso de la montaña, es importante conocer la estructura de éstos, es decir, si son de ensilladura o son extremos relativos, además de las propiedades topológicas del conjunto K_{c_p}.
Helmut Hofer demostró que existe dos clases de puntos críticos al nivel c_p [20].

Definición 1.22 ([20])**.** Un punto $z \in K_{c_p}$ se dice del tipo paso de la montaña, si para toda vecindad U de z, se tiene que:

- $I^{c_p} \cap U \neq \emptyset$

- $I^{c_p} \cup U$ no es conexo por caminos.

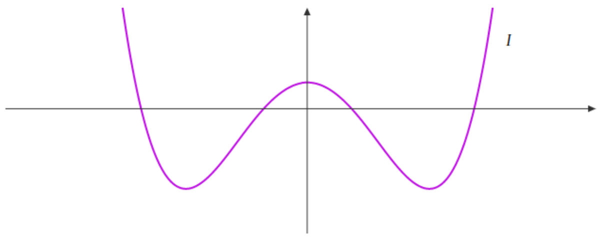

Figura 1.1: Funcional que posee únicamente puntos críticos del tipo paso de la montaña.

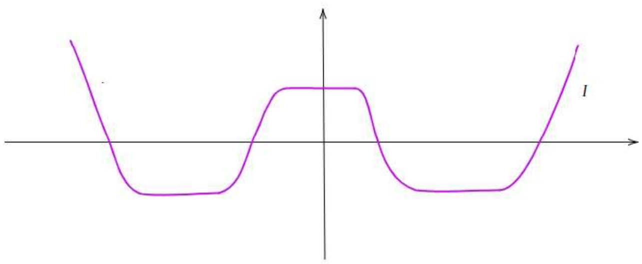

Figura 1.2: Funcional que no posee puntos críticos del tipo paso de la montaña.

Acontinuación se enuncia un resultado demostrado por Hofer, el cual indica que los puntos críticos obtenidos por el teorema del paso de la montaña o son mínimos locales o del tipo paso de la montaña.

Teorema 1.13 ([26])**.** Bajo las hipótesis del teorema de la montaña, se tiene

1. O I admite un mínimo local $z \neq 0$, $I(z) = c_p$.

2. O I admite un punto crítico del tipo paso de la montaña.

Demostración. (Ver [[26], pág. 130] teorema 9.2). □

Del siguiente teorema se puede deducir; o que existen infinitos puntos críticos o que existen almenos dos puntos críticos diferentes.

Teorema 1.14 ([26])**.** Sea $I \in C^1(E)$, si I satisface las condiciones $(PS)_{c_p}$y además 0 es un mínimo local de I, con $I(0) = 0$. Entonces si I admite un segundo mínimo local $u_1 \neq 0$ de I. Se tiene que

1. O existe un punto crítico u de I, que no es mínimo local.

2. O y u_1 pueden estar conectados en cualquier vecindad de I con $I(u) = 0$. Entonces necesariamente $I(u_1) = 0$.

Demostración. (Ver [[26], pág. 130] Teorema 9.3). □

1.3.5. Teoremas de Linking

Ahora se exhibirá una nueva clase de conjuntos minimax. Para ello se considera los siguientes conjuntos

- N una variedad con frontera ∂N
- $C \subset E$
- $\mathcal{K} = \{\kappa \in C(N, E); \kappa(u) = u, \forall u \in \partial N\}$

Definición 1.23 ([4]). Se dice que ∂N y C se enlazan si

$$C \cap \kappa(N) \neq \emptyset, \quad \forall \kappa \in \mathcal{K}.$$

En otras palabras, ∂N y C se enlazan, si C se encuentra con cada superficie continua atravesada por ∂N.

Ejemplo 5. Sea $E = V \oplus W$, donde V, W son subespacios ortogonales y $\dim(V) = k < +\infty$. Dada $e_1 \in W$ y $R > 0$ se considera

$$N = \{v + te_1; v \in V, ||v|| \leq R, t \in [0, 1]\},$$

una $k + 1-$variedad diferenciable con frontera

$$\partial N = \{v + te_1 \in N; ||v|| = R\} \cup \{v + te_1 \in N; t = 0, 1\}.$$

Sea $C = \{w \in W : ||w|| = r\}$. Entonces ∂N y C se enlazan siempre que $||e_1|| > r$.

Los detalles del ejemplo anterior requieren de otras técnicas, como la teoría de grado y el lector ineresado puede revisar [4].

Definición 1.24 ([4]). Sea $I \in C^1(E)$ y sean $N, C \subset E$ tales que ∂N y C se enlazan. El siguiente valor

$$c_l = \inf_{\kappa \in \mathcal{K}} \sup_{u \in N} I(\kappa(u)),$$

es llamado el enlace de nivel de I correspondiente a N y C.

Teorema 1.15 ([4]). Sean $N, C \subset E$ tales que ∂N y C se enlazan. Si $I \in C^1(E)$ es tal que;

- I está acotado por abajo en C, es decir, $\inf_{u \in C} I(u) > -\infty$
- $\inf_{u \in C} I(u) > -\infty > \sup_{u \in \partial N} I(u)$

- Satisface la condición de $(PS)_{c_l}$, con c_l el enlace de nivel de I.

Entonces c_l es un nivel crítico de I.

Demostración. (Ver [[4], pág. 133] Teorema 8.22) □

Del ejemplo y teorema anteriores se sigue el siguiente resultado.

Teorema 1.16 **([24]).** Sea E un espacio de Banach, tal que $E = V \oplus W$, donde y $\dim(V) = k < +\infty$. Si $I \in C^1(E)$ satisface la condición de (PS) y

I_3) $(\exists r, \rho_1 > 0)(I(u) \geq \rho_1, \forall u \in W, ||w|| = r)$

I_4) Existe $R > \rho_1$ y $e_1 \in W$, tal que $||e_1|| = 1$ y $I(u) \leq 0$ para todo $u \in \partial N$, donde

$$N = \{v + te_1; v \in V, ||v|| \leq R, t \in (0, R)\}.$$

Entonces existe $c_l \geq \rho_1$ es un valor crítico.

Observación 7. Si se cumple:

a) $I(v) \leq 0$ para todo $v \in V$.

b) Existen $\bar{R} > \rho_1$ y $e_1 \in W$, $||e_1|| = 1$ tal que $I(u) \leq 0$, para todo $u \in V \oplus span(e_1)$ y $||u|| \geq \bar{R}$.

Entonces para R suficientemente grande se tiene $I(u) \leq 0$, para todo $u \in N$.[24]

Observación 8. En la teoría de Linking se puede encontrar resultados de multiplicidad para funcionales que satisfacen la propieda de enlace local en 0 [19].
Sin embargo en estos resultados es necesario que el funcional esté acotado por abajo en todo el espacio, no obstante esta propiedad no siempre se cumple para el funcional que se estudiará mas adelane. Por este motivo no se ha exhibido esta teoría.

1.4. Espacios de funciones

En esta sección se describirá de manera resumida los espacios de funciones, que se usarán a menudo en el desarrollo del trabajo.

1.4.1. Espacios de Lebesgue

Para esta parte se considerará el espacio medido $(\mathbb{R}^N, Bor(\mathbb{R}^N), \gamma)$, donde Bor$(\mathbb{R}^N)$ es la $\sigma-$álgebra de los Borelianos de $\mathbb{R}^N$ y γ es la medida de Lebesgue.
Sea $\Omega \neq \emptyset$ un conjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^N$, entonces

$$0 < \gamma(\Omega) < +\infty,$$

Observación 9. Sea $g : \Omega \to \mathbb{R}$ una función medible no negativa en Ω y sea $A \subset \Omega$. Entonces

$$\int_A g(x)dx \leq \int_\Omega g(x)dx.$$

Esto gracias a que $\chi_A \leq 1$ entonces como g es no negativa, $\chi_A g \leq g$ y así por monotonía de la integral se obtiene el resultado:

$$\int_A g(x)dx = \int_\Omega g(x)\chi_A dx \leq \int_\Omega g(x)dx.$$

En lo que sigue se definen los espacios de Lebesgue.

Definición 1.25 ([11]). Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto. El espacio $L^p(\Omega)$ con $p \in [1, \infty]$ es el espacio de Lebesgue de funciones medibles (medida de Lebesgue), definidos como se sigue

- $p \in [1, \infty)$

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R}; u \quad \text{es} \quad \text{medible}, \int_\Omega |u(x)|^p dx < +\infty \right\}$$

  con $||u||_p = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$

- $p = \infty$

$$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}; u \quad \text{es} \quad \text{medible}, \exists C > 0, |u(x)| \leq C \quad \text{c.t.p.} \quad x \in \Omega\}$$

  con $||u||_\infty = \text{ínf}_{C>0}\{|u(x)| \leq C \quad \text{c.t.p.} \quad x \in \Omega\}$.

A continuación se enuncia un teorema que reune todas propiedades topológicas de los espacios de Lebesgue.

Teorema 1.17 ([11]). Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto y acotado. $(L^p(\Omega), ||\cdot||_p)$ es un espacio de Banach normado para todo $p \in [1, \infty]$, reflexivo para todo $p \in (1, \infty)$ y separable para todo $p \in [1, \infty)$.

Demostración. (Ver [[11], pág. 93-98] teoremas 4.7, 4.8 y 4.13) □

Observación 10. En particular el espacio $L^2(\Omega)$, es un espacio de Hilbert separable con producto escalar

$$< u, v >_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega uv dx \quad \forall u, v \in L^2(\Omega).$$

Se usará de manera frecuente el siguiente resultado.

Teorema 1.18 ([11]). Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $L^p(\Omega)$ con $p \in [1, +\infty]$ y sea $u \in L^p(\Omega)$ tal que $||u_n - u||_p \to 0$. Entonces existe una subsucesión $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ y una función $z \in L^p(\Omega)$, tal que

- $u_{n_k}(x) \to u(x)$ c.t.p en Ω
- $|u_{n_k}(x)| \leq z(x)$ c.t.p en Ω para todo $k \in \mathbb{N}$

Demostración. (Ver [[11], pág. 94] teorema 4.9) □

Para continuar, se definen los espacios $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$, los cuales se emplearán en la definición de los espacios de Sobolev.

Definición 1.26 ([11]). Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ y sea $u : \Omega \to \mathbb{R}^N$ una función. El soporte de u es el conjunto

$$\text{supp}(u) = \overline{\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}}.$$

Definición 1.27 ([11]). Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto y sea $p \in [1, \infty]$. Se define

$$L^p_{\text{loc}}(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}^N; u\chi_K \in L^p(\Omega), \forall K \quad \text{compacto}\}.$$

Observación 11. De la definición anterior se puede afirmar que $L^p(\Omega) \subset L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Ya que, si $u \in L^p(\Omega)$ entonces de la monotonía de la integral se obtiene

$$\int_\Omega |u\chi_K|^p dx = \int_\Omega \chi_K |u|^p dx = \int_K |u|^p dx \leq \int_\Omega |u|^p dx < \infty$$

para todo K compacto, es decir, $u \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$.
Por otro lado de la desigualdad Hölder, se sigue que si $u \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ entonces

$$\int_\Omega |u\chi_K| dx \leq \left(\int_\Omega |u\chi_K|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega dx\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_\Omega |u\chi_K|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \gamma(\Omega)^{\frac{1}{q}} < \infty$$

para todo K compacto, es decir, $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$.
Por lo tanto se tiene $L^p(\Omega) \subset L^p_{\text{loc}}(\Omega) \subset L^1_{\text{loc}}(\Omega)$.

Lema 1.19 ([11])**.** Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto y sea $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega u\varphi = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Entonces $u = 0$ c.t.p. en Ω.

Demostración. (Ver [[11], pág. 110] corolario 4.24]) □

1.4.2. Espacios de Sobolev

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto. Se definen los siguientes espacios:

- $C(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}; u$ es continua en $\Omega\}$
- $C^1(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}; u$ es diferenciable en Ω y su derivada es continua en $\Omega\}$
- $C^1_c(\Omega) = \{u \in C^1(\Omega);$ supp(u) es compacto$\}$
- $C^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}; u$ es infinitamente diferenciable en $\Omega\}$
- $C^\infty_c(\Omega) = \{u \in C^\infty(\Omega);$ supp(u) es compacto$\}$.

Definición 1.28 ([17])**.** Sean $u, v \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Se dice que v es la $i-$ésima derivada parcial débil de u, si se cumple

$$\int_\Omega u\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = -\int_\Omega v\varphi dx,$$

para todo $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ y todo $i = 1, \ldots, N$.
Se notará $\frac{\partial u}{\partial x_i} = v$ y el gradiente débil de u por

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_N}\right).$$

Para ilustrar esto, se expone un ejemplo que determina las derivadas parciales débiles del valor absoluto.

Ejemplo 6. Sea $u : \Omega \to \mathbb{R}^N$ una función que posee una $i-$ésima derivada parcial débil. Entonces $|u|$ también posee una $i-$ésima derivada parcial débil, dada por

$$\frac{\partial |u|}{\partial x_i} = \begin{cases} \text{sgn}(u)\frac{\partial u}{\partial x_i} & u \neq 0 \\ 0 & u = 0. \end{cases}$$

De esto se sigue que si u posee toda sus dérivadas débiles parciales, entonces

$$|\nabla u|^2 dx = |\nabla |u||^2, \tag{1.3}$$

en efecto, si $u = 0$ se sigue lo afirmado y si $u \neq 0$, entonces

$$\begin{aligned} |\nabla |u||^2 = \nabla |u| \cdot \nabla |u| dx &= \sum_{i=1}^{N} \left| \frac{\partial |u|}{\partial x_i} \right|^2 = \sum_{i=1}^{N} \left| \operatorname{sgn}(u) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 = \nabla u \cdot \nabla u = |\nabla u|^2. \end{aligned}$$

Después de lo expuesto anteriormente, se enuncia un teorema que junta todas las propiedades de la derivada parcial débil.

Teorema 1.20 ([17]). Sea $i = 1, \dots, N$ y sean $u, v \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Entonces, se siguen las siguientes propiedades

- Si u posee una $i-$ésima derivada parcial débil, entonces ésta es única.
- Sea $\theta \in \mathbb{R}$. Si u y v poseen una $i-$ésima derivada parcial débil, entonces

$$\frac{\partial (u + \theta v)}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i} + \theta \frac{\partial v}{\partial x_i}.$$

Demostración. (Ver [[17], pág. 261] teorema 1.) □

Observación 12. Del teorema anterior se puede notar que el operador ∇ es lineal.

Después de las consideraciones anteriores, se definen los espacios de Sobolev.

Definición 1.29 ([11]). Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto. El espacio de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ está definido por

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega), \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega), \forall i = 1, \dots, N \right\}$$

y dotado de la norma

$$||u||_{W^{1,p}(\Omega)} = ||u||_p + \sum_{i=1}^{N} \left|\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|\right|_p.$$

El siguiente teorema reune todas propiedades topológicas de los espacios de Sobolev.

Teorema 1.21 ([11]). Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto. El espacio $W^{1,p}(\Omega)$ es de Banach para todo $p \in [1, \infty]$, reflexivo para todo $p \in (1, \infty)$ y separable para todo $p \in [1, \infty)$.

Demostración. (Ver [[11], pág. 264] proposición 9.1) $\square$

El siguiente teorema permite afirmar que el espacio $C^\infty(\overline{\Omega})$ es denso en $W^{1,p}(\Omega)$

Teorema 1.22 ([17])**.** Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto y acotado con frontera $\partial\Omega$ de clase C^1. Si $u \in W^{1,p}(\Omega)$ para todo $p \in [1, \infty)$, entonces existe una sucesión de funciones $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $C^\infty(\overline{\Omega})$ tal que

$$u_m \to u \quad \text{en} \quad W^{1,p}(\Omega).$$

Demostración. (Ver [[17], pág. 266] teorema 3.) $\square$

Proposición 1.23. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto y conexo. Si satisface que

$$\nabla u = 0 \quad \text{c.t.p.} \quad \text{en}\Omega,$$

entonces u es una constante c.t.p. en Ω.

Demostración. (Ver [[17], pág. 307] ejercicio 11) $\square$

Observación 13. En particular el espacio $H^1(\Omega) := W^{1,2}(\Omega)$ es un espacio de Hilbert separable con producto escalar

$$< u, v >_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega uv dx + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx \quad \forall u, v \in H^1(\Omega)$$

con $\nabla u \cdot \nabla v = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i}$.

La siguiente desigualdad permitirá obtener una descomposición en suma directa del espacio $H^1(\Omega)$.

Teorema 1.24 ([17] Desigualdad de Poncairé-Wirtinger)**.** Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto, acotado y conexo, con frontera $\partial\Omega$ de clase C^1. Si $p \in [1, \infty]$, entonces existe una constante C, que depende de N, p y de Ω, tal que

$$||u - u_\Omega||_p \leq C \, ||\nabla u||_p \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega)$$

con $u_\Omega = \frac{1}{\gamma(\Omega)} \int_\Omega u dx$.

Demostración. (Ver [[17], pág. 290] teorema 1.) $\square$

Una descomposición en suma directa de $H^1(\Omega)$

Tomando las ideas de [10], se define el siguiente conjunto

$$\mathcal{V} = \left\{ u \in H^1(\Omega); \int_\Omega u dx = 0 \right\}.$$

Gracias a la linealidad de la integral, $\mathcal{V}$ es un subespacio vectorial de $H^1(\Omega)$. Además $\mathcal{V}$ es cerrado, en efecto, si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathcal{V}$ tal que $v_n \to v$ en $H^1(\Omega)$, entonces

$$\left| \int_\Omega v dx \right| = \left| \int_\Omega v dx - 0 \right| = \left| \int_\Omega v dx - \int_\Omega v_n dx \right| \leq \int_\Omega |v - v_n| dx = ||v - v_n||_1$$

así del teorema 1.27 existe $C > 0$, tal que

$$\left| \int_\Omega v dx \right| \leq C \, ||v - v_n||_{H^1(\Omega)}$$

Por lo tanto cuando $n \to \infty$, se sigue que $\int_\Omega v dx = 0$, es decir, $v \in \mathcal{V}$.

De la desigualdad de Poncairé- Wirtinger, se obtiene la siguiente relación

$$||v||_2 \leq ||\nabla v||_2 \quad \forall v \in \mathcal{V}. \tag{1.4}$$

De esto se puede considerar $\mathcal{V}$ un espacio de Hilbert, con producto escalar

$$< v_1, v_2 >_{\mathcal{V}} = < \nabla v, \nabla v >_{L^2(\Omega)} \quad \forall u, v \in H^1(\Omega).$$

Seguidamente se denotará por $\mathcal{C}$ al espacio de funciones constantes múltiplos de uno.

Una vez expuesto estos espacios, se puede ver que $H^1(\Omega) = \mathcal{V} \oplus \mathcal{C}$.
Ya que la inclusión $\mathcal{V} \oplus \mathcal{C} \subset H^1(\Omega)$, se sigue directamente del hecho de que las constantes también pertenecen al espacio $H^1(\Omega)$, pues Ω es acotado.
Para la inclusión $H^1(\Omega) \subset \mathcal{V} \oplus \mathcal{C}$. Sea $u \in H^1(\Omega)$, notar que $u - u_\Omega \in \mathcal{V}$, en efecto

$$\int_\Omega u - u_\Omega dx = \int_\Omega u dx - u_\Omega \int_\Omega dx = \int_\Omega u dx - \frac{\gamma(\Omega)}{\gamma(\Omega)} \int_\Omega u dx = 0.$$

Así, dado que $u_\Omega \in \mathcal{C}$, se sigue el resultado $u = (u - u_\Omega) + u_\Omega$.

Ahora, dado que $\mathcal{V}$ es un subespacio cerrado de $H^1(\Omega)$, se tiene que

$H^1(\Omega) = \mathcal{V} \oplus \mathcal{V}^\perp$ y como $H^1(\Omega) = \mathcal{V} \oplus \mathcal{C}$, entonces $\mathcal{V}^\perp = \mathcal{C}$.

De esto se tiene que para todo $u \in H^1(\Omega)$ existen únicos $v \in \mathcal{V}$ y $t \in \mathcal{C}$, tales que

$$||u||_{H^1(\Omega)} \cong \sqrt{||\nabla v||_2^2 + |t|^2} \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

Espacio $W_0^{1,p}(\Omega)$

Definición 1.30 ([11]). Sea $p \in [1, \infty)$. $W_0^{1,p}(\Omega)$ denota la clausura de $C_c^1(\Omega)$ en $W^{1,p}(\Omega)$, es decir, $W_0^{1,p}(\Omega) := \overline{C_c^1(\Omega)}^{W^{1,p}(\Omega)}$.

El espacio $W_0^{1,p}(\Omega)$ es el espacio de las funciones de $W^{1,p}(\Omega)$ que se anulan en la frontera en el sentido de la traza. Por precisión se enuncia el siguiente teorema.

Teorema 1.25 ([11]). Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto de clase C^1 y sea $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ con $p \in [1, \infty)$. Entonces $u = 0$ en la frontera de Ω si y solo si $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Demostración. (Ver [[11] pág. 288] teorema 9.17). □

Ahora se verán algunas propiedades de este espacio.

Teorema 1.26 ([11] Desigualdad de Poncairé). Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto y acotado. Si $p \in [1, \infty)$, entonces existe una constante C, que depende de p y de Ω, tal que

$$||u||_p \leq C\,||\nabla u||_p \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Demostración. (Ver [11], pág. 290 corolario 9.19) □

Con esto, se puede dotar al espacio $W_0^{1,p}(\Omega)$ con la norma $||\nabla \cdot||_p$, la cual es equivalente a la norma $||\cdot||_{W^{1,p}(\Omega)}$.
Así se sigue que el espacio $(W_0^{1,p}(\Omega), ||\nabla \cdot||_p)$ es de Banach para todo $p \in [1, \infty]$, reflexivo para todo $p \in (1, \infty)$ y separable para todo $p \in [1, \infty)$.

Observación 14. En particular el espacio $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$ es de Hilbert, reflexivo y separable. Con producto escalar

$$< u, v >_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega).$$

1.4.3. Un resultado de inmersión

Definición 1.31 ([9]). Sea E y F espacios de Banach. Se dice que F se inyecta continuamente en E y se nota por $F \hookrightarrow E$ si;

- $F \subset E$
- La inyección canónica $j : F \to E$ es un operador lineal y continuo, es decir, existe una constante $C > 0$ tal que

  $$||u||_F \leq C\,||u||_E \quad \forall u \in F.$$

  Además si la inyección, i, es compacta, se dice que F se inyecta compactamente en E.

Antes de enunciar uno de los resultados más usados en el estudio del trabajo, se define el siguiente valor.

Definición 1.32 ([17] Exponente crítico de Sobolev caso $p = 2$). Al siguiente valor se lo dice exponente crítico de Sobolev

$$2^* = \begin{cases} \frac{2N}{N-2} & N > 2 \\ +\infty & N = 2 \end{cases}$$

$\frac{1}{2^*} = \frac{1}{2} - \frac{1}{N}$.

Teorema 1.27 ([11] Rellich-Kondrachov). Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, abierto y acotado de clase C^1, y $N \geq 3$. Entonces

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \quad \forall p \in [1, 2^*].$$

La inyección es compacta si $q \in [1, 2^*)$.

Demostración. (Ver [[11], pág. 285] teorema 9.16). □

Observación 15. En el teorema anterior, se puede reemplazar el espacio $H_0^1(\Omega)$ en lugar de $H^1(\Omega)$, ya que uno puede usar una extensión canónica nula fuera de Ω, la cual es válida para cualquier dominio, por lo tanto el teorema anterior también se satisface si en lugar de $H^1(\Omega)$ se usa el espacio $H_0^1(\Omega)$, para más detalles de la justificación ver la observación 20 de [11].

Capítulo 2

Problemas elípticos semilineales con peso indefinido

En este capítulo se definirá el problema a estudiar y en consecuencia el funcional de energía asociado, en el cual se aplicará la teoría del capítulo 1, es decir, aquí se mostrará que el funcional de energía asociado al problema es diferenciable, débilmente semicontinuo inferior y que satisface la condición de $(PS)_c$, para todo $c \in \mathbb{R}$, entre otras propiedades útiles en la búsqueda de sus puntos críticos.

2.1. Definición del problema

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto y acotado con frontera $\partial\Omega$ de clase C^1.
Se estudiará el siguiente problema

$$\begin{cases} -\text{div}(h(x)\nabla u) + q(x)u = \lambda w(x) f(u) & x \in \Omega \\ Bu = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{2.1}$$

con $Bu = \frac{\partial u}{\partial n}$, donde $\frac{\partial u}{\partial n}$ denota la derivada normal exterior de u, es decir, $\nabla u \cdot n = \frac{\partial u}{\partial n}$, con n el vector unitario normal a $\partial\Omega$, apuntando hacia afuera.
Los datos $q \in L^\infty(\Omega)$, $q \geq 0$ c.t.p. en Ω, $h \in L^\infty(\Omega)$ con condiciones de elipticidad, es decir, existe $\theta > 0$ tal que

$$h(x) \geq \theta \quad \text{c.t.p} \quad x \in \Omega, \tag{2.2}$$

$w \in L^\infty(\Omega)$ una función que puede cambiar de signo y $f \in C^1(\mathbb{R})$ tal que

$f_1)$ $f(s) = 0, \forall s \leq 0$

$f_2)$ $f(s) \geq 0, \forall s > 0, f \neq 0$

$f_3)$ $|f(s)| \leq \bar{a} + b|s|^{\sigma}, 0 < \sigma < 2^* - 1, \bar{a}, b > 0$

$f_4)$ $\lim_{t \to 0} \frac{f(t)}{t} = 0$

$f_5)$ $\lim_{t \to +\infty} \left(\frac{f(t)}{t} - |t|^{p-2} \right) = 0$ para todo $2 < p < 2^*$

$f_6)$ Existe $\beta > 0$, $0 \leq \frac{f(t)-f(s)}{t-s} < \beta$ para todo $s, t \in \mathbb{R}$.

Definición 2.1. Se dice que f presenta un crecimiento:

- Subcuadrático, si $0 < \sigma + 1 < 2$
- Cuadrático, si $\sigma + 1 = 2$
- Supercuadrático, si $\sigma + 1 > 2$
- Subcrítico, si $0 < \sigma + 1 < 2^*$
- Crítico, si $\sigma + 1 = 2^*$
- Supercrítico, si $\sigma + 1 > 2^*$.

Observación 16. Se dice que el problema 2.1 es semilineal con peso indefinido, ya que el dato f no es necesariamente lineal y el dato w cambia de signo.

2.1.1. Solución débil del problema

Formulación Variacional

Suponiendo que el problema 2.1 tiene una solución u, multiplicando por $\varphi \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$ en la primera igualdad e integrando sobre Ω,

$$-\int_{\Omega} \operatorname{div}(h(x)\nabla u)\varphi dx + \int_{\Omega} q(x)u\varphi dx = \lambda \int_{\Omega} w(x)f(u)\varphi dx.$$

Luego de las propiedades de divergencia,

$$\operatorname{div}(h(x)\nabla u\varphi) = \operatorname{div}(h(x)\nabla u)\varphi + h(x)\nabla u \cdot \nabla\varphi,$$

reemplazando esto en la igualdad anterior y usando el teorema de la divergencia de Gauss-Green,

$$-\int_{\Omega} \operatorname{div}(h(x)\nabla u\varphi)dx + \int_{\Omega} h(x)\nabla u \cdot \nabla\varphi dx + \int_{\Omega} q(x)u\varphi dx = \lambda \int_{\Omega} w(x)f(u)\varphi dx$$

$$-\int_{\partial\Omega} h(x)\nabla u \cdot n\varphi ds + \int_{\Omega} h(x)\nabla u \cdot \nabla\varphi dx + \int_{\Omega} q(x)u\varphi dx = \lambda \int_{\Omega} w(x)f(u)\varphi dx.$$

Como u es una solución del problema 2.1, entonces $\nabla u \cdot n = 0$, por lo tanto se tiene

$$\int_{\Omega} h(x)\nabla u \cdot \nabla\varphi dx + \int_{\Omega} q(x)u\varphi dx = \lambda \int_{\Omega} w(x)f(u)\varphi dx.$$

Dado que φ fue arbitrario, la última desigualdad se satisface para todo $\varphi \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$ y, puesto que este espacio es denso en $H^1(\Omega)$, entonces también se satisface para todo $\varphi \in H^1(\Omega)$.

De todo esto se define la solución débil del problema 2.1

Definición 2.2. Se dice que u es una solución débil del problema 2.1, si $u \in H^1(\Omega)$ satisface la siguiente igualdad

$$\int_{\Omega} h(x)\nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} q(x)uv dx = \lambda \int_{\Omega} w(x)f(u)v dx \quad \forall v \in H^1(\Omega). \tag{2.3}$$

Observación 17. Si en el problema 2.1 se tuvieran condiciones de Dirichlet homogéneas[1], entonces en la formulación variacional se debería tomar una función $\varphi \in C_c^1(\Omega)$, así por la densidad de $C_c^1(\Omega)$ en $H_0^1(\Omega)$, se sigue que la definición de solución débil, para este caso, sería una función $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que satisface la ecuación 2.3.

El objetivo del trabajo es estudiar las soluciones débiles de 2.1, que son los puntos críticos del funcional de energía asociado a este problema, el cual se define a continuación.

2.2. Funcional de energía asociado

Se analizará los puntos críticos del siguiente funcional

$$\begin{array}{rcl} I : H^1(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & I(u) = \frac{1}{2}J(u) - \lambda\Phi(u), \end{array}$$

donde

$$\begin{array}{ll} J : H^1(\Omega) \to \mathbb{R} & \qquad \Phi(u) : H^1(\Omega) \to \mathbb{R} \\ \qquad u \to J(u) = \boldsymbol{a}(u,u) & \qquad\qquad u \to \Phi(u) = \int_{\Omega} w(x)F(u)dx, \end{array}$$

[1] $Bu = u = 0$ sobre la frontera de Ω.

con

$$\begin{array}{rcl} \boldsymbol{a} : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ (u,v) & \mapsto & \boldsymbol{a}(u,v) = \int_\Omega h(x)\nabla u \cdot \nabla v dx + \int_\Omega q(x)uv dx \end{array} \tag{2.4}$$

y F, la primitiva de f

$$\begin{array}{rcl} F : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & F(t) = \int_0^t f(s)ds. \end{array} \tag{2.5}$$

2.2.1. Propiedades del funcional de energía

En esta parte se estudiará primero las propiedades del funcional J, seguido de las propiedades de Φ, para concluir con las propiedades de I.
Por lo tanto se considerará el espacio de Hilbert $H^1(\Omega)$ con la siguiente norma

$$||u||_{H^1(\Omega)}^2 = ||\nabla u||_2^2 + ||u||_2^2 \quad u \in H^1(\Omega),$$

inducida por el producto escalar

$$< u,v >_{H^1(\Omega)} = < \nabla u, \nabla v >_{L^2(\Omega)} + < u,v >_{L^2(\Omega)} \quad u,v \in H^1(\Omega).$$

De la definición de norma en $H^1(\Omega)$, se tienen las siguientes relaciones

$$||\nabla u||_2 \leq ||u||_{H^1(\Omega)} \quad \text{y} \quad ||u||_2 \leq ||u||_{H^1(\Omega)} \tag{2.6}$$

para todo $u \in H^1(\Omega)$.

Además de las condiciones de elipticidad de $h \in L^\infty(\Omega)$, se sigue la siguiente desigualdad.

$$\theta\, ||\nabla u||_2^2 \leq \int_\Omega h(x)|\nabla u|^2 dx \leq ||h||_\infty\, ||\nabla u||_2^2 \quad \forall u \in H^1(\Omega). \tag{2.7}$$

Así cuando sea conveniente también se considerará el espacio $H^1(\Omega)$ con la norma

$$||u||_h^2 = \int_\Omega h(x)|\nabla u|^2 dx + ||u||_2^2 \quad u \in H^1(\Omega),$$

inducida por el producto escalar

$$< u,v >_h = \int_\Omega h(x)\nabla u \cdot \nabla v dx + < u,v >_{L^2(\Omega)} \quad u,v \in H^1(\Omega).$$

Propiedades del funcional J

Se empieza esta parte exhibiendo un resultado que compila todas las propiedades y desigualdades del funcional J, que surgen directamente de la definición.

Lema 2.1. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto y acotado, y sean $h, q \in L^\infty(\Omega)$ como en el problema 2.1, entonces

1. $J(u) \geq 0$ para todo $u \in H^1(\Omega)$, es decir, $\boldsymbol{a}$ es positiva.

2. J es homogéneo de grado 2.

3. $J(u) = J(|u|)$ para todo $u \in H^1(\Omega)$.

y además se satisface la siguiente desigualdad

$$\theta \, ||\nabla u||_2^2 \leq J(u) \quad \forall u \in H^1(\Omega) \tag{2.8}$$

Demostración. Sea $u \in H^1(\Omega)$.
Parte 1. De las condiciones de elipticidad de h y como $q \geq 0$ c.t.p. en Ω.

$$J(u) = \boldsymbol{a}(u,u) = \int_\Omega h(x)|\nabla u|^2 dx + \int_\Omega q(x)u^2 dx \geq \theta \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \geq 0$$

De esta desigualdad se sigue directamente la desigualdad 2.8

Parte 2. De la linealidad de la integral y del operador ∇, se tiene

$$\begin{aligned} J(cu) &= \int_\Omega h(x)|\nabla cu|^2 dx + \int_\Omega q(x)(uc)^2 dx \\ &= c^2 \int_\Omega h(x)|\nabla u|^2 dx + c^2 \int_\Omega q(x)(c)^2 dx = c^2 J(u) \end{aligned}$$

para todo $c \in \mathbb{R}$, es decir, J es homogéneo de grado dos.

Parte 3. de la igualdad 1.3, se tiene

$$J(u) = \int_\Omega h(x)|\nabla u|^2 dx + \int_\Omega q(x)u^2 dx = \int_\Omega h(x)|\nabla |u||^2 dx + \int_\Omega q(x)|u|^2 dx = J(|u|).$$

□

Proposición 2.2. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto y acotado, y sean $h, q \in L^\infty(\Omega)$ como en el problema 2.1. Entonces el funcional J es de clase C^1 convexo y débilmente semicontinuo inferior.

Demostración. Para mostrar que J es de clase C^1, convexo y débilmente semicontinuo inferior, por el ejemplo 4, basta mostrar que $\boldsymbol{a}$ es una forma bilineal simétrica, positiva y continua.

Del lema anterior se sabe que $\boldsymbol{a}$ es positiva, la bilinealidad y la simetría de $\boldsymbol{a}$, se siguen directamente de la bilinealidad y simetría del producto de funciones junto con el producto escalar en $\mathbb{R}^N$, y de la linealidad del operador ∇ y la integral.

Sean $u, v \in H^1(\Omega)$. Como $h, q \in L^\infty(\Omega)$ por la desigualdad 2.6 y la desigualdad de Cauchy, se obtiene

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{a}(u,v)| &\leq \int_\Omega |h(x)||\nabla u \cdot \nabla v| dx + \int_\Omega |q(x)||uv| dx \\
&\leq ||h||_\infty \int_\Omega |\nabla u \cdot \nabla v| dx + ||q||_\infty \int_\Omega |uv| dx \\
&\leq ||h||_\infty \, ||\nabla u||_2 \, ||\nabla v||_2 + ||q||_\infty \, ||u||_2 \, ||v||_2 \, dx \\
&\leq (||h||_\infty + ||q||_\infty) \, ||u||_{H^1(\Omega)} \, ||v||_{H^1(\Omega)}
\end{aligned}$$

tomando $C_{h,q} := ||h||_\infty + ||q||_\infty > 0$ y como u, v fueron arbitrarios, se tiene la continuidad de $\boldsymbol{a}$.

Así $\boldsymbol{a}$ es una forma bilineal, simétrica, continua y positiva, por tanto se obtiene el resultado. □

Otra propiedad interesante es la coercividad de $\boldsymbol{a}$, ya que si ésta fuese coerciva, por la observación 31, $\boldsymbol{a}$ definiría un nuevo producto escalar para $H^1(\Omega)$ y J sería su norma inducida.
Sin embargo, esta propiedad no es tan evidente en todo el espacio $H^1(\Omega)$[2].
Dado que $q \geq 0$ c.t.p. en Ω, entones de la monotonía de la integral, se tiene que $\int_\Omega q(x)dx \geq 0$, es decir,

$$\int_\Omega q(x)dx > 0 \quad \text{o} \quad \int_\Omega q(x)dx = 0.$$

Note que cuando $\int_\Omega q(x)dx = 0$, entonces $q = 0$ c.t.p[3], mientras que si

[2] $\boldsymbol{a}$ es coercivo en $\mathcal{V}$, gracias a la desigualdad 1.4.

[3] Puesto que $q \in L^\infty(\Omega)$, entonces $q \in L^1(\Omega)$. Además, dado que $q \geq 0$ c.t.p. en Ω, se sigue lo afirmado

$$||q||_1 = \int_\Omega |q(x)|dx = \int_\Omega q(x)dx = 0 \text{ si y solo si } q = 0 \text{ c.t.p.}$$

$\int_\Omega q(x)dx > 0$, los dos siguientes resultados establecen que $\boldsymbol{a}$ es coerciva. Para la demostración de estos resultados se siguen las ideas de [8].

Teorema 2.3. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto y acotado, sean $h, q \in L^\infty(\Omega)$ como en el problema 2.1. Si $\int_\Omega q(x)dx > 0$, entonces existe una constante $C > 0$, tal que

$$J(u) \geq C \int_\Omega u^2 dx \quad u \in H^1(\Omega).$$

Demostración. Se hallará la constante $C > 0$ que satisface la desigualdad, mediante el siguiente problema de minimización.

$$\begin{cases} \min_{v \in H^1(\Omega)} J(v) \\ s.a \\ ||u||_2 = 1 \end{cases} \tag{2.9}$$

El problema 2.9 está bien definido, pues de la parte 1 del lema 2.1, el funcional J está acotado por abajo, por 0.

Ahora se mostrará que el problema 2.9 tiene solución, para ello se define el siguiente valor

$$C := \inf_{v \in S} J(v), \quad S = \{u \in H^1(\Omega) : ||u||_2 = 1\}.$$

De la definicón de ínfimo se sabe que existe una sucesión minimizante $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en S, tal que $J(u_n) \to C$, por lo tanto

$$\exists M > 0, |J(u_n)| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}.$$

De esto y las hipótesis que satisfacen h y q, se sigue que la sucesión $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada en $H^1(\Omega)$, en efecto

$$\begin{aligned} ||u_n||^2_{H^1(\Omega)} &= \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx + ||u_n||_2^2 \leq \frac{1}{\theta} \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx + 1 \\ &\leq \frac{1}{\theta} \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx + \frac{1}{\theta} \int_\Omega q(x) u_n^2 dx + 1 = \frac{1}{\theta} J(u_n) + 1 \\ &\leq \frac{1}{\theta} M + 1 := \bar{M} \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Dado que $H^1(\Omega)$ es reflexivo, existe $\bar{u} \in H^1(\Omega)$, tal que $u_n \rightharpoonup \bar{u}$ en $H^1(\Omega)$, del teorema 1.27 se sigue $u \to \bar{u}$ en $L^2(\Omega)$, en consecuencia $||u_n||_2 \to ||\bar{u}||$ en $\mathbb{R}$ y como $||u_n||_2 = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $||\bar{u}||_2 = 1$, así $\bar{u} \in S$.

Luego, como J es débilmente semicontinuo inferior, se sigue que $\bar{u}$ es solución del problema 2.9, pues

$$C = \liminf_{n\to\infty} J(u_n) \leq J(\bar{u}) \Rightarrow C = J(\bar{u}).$$

Acontinuación se mostrará que C es positivo, de la parte 1 del lema 2.1, se sabe que $C \geq 0$, entonces basta mostrar que $C \neq 0$.
Por absurdo se suponde que $C = 0$

$$C = J(\bar{u}) = \int_\Omega h(x)|\nabla \bar{u}|^2 dx + \int_\Omega q(x)\bar{u}^2 dx = 0$$

entonces

$$\int_\Omega h(x)|\nabla \bar{u}|^2 dx = 0 \quad \text{y} \quad \int_\Omega q(x)\bar{u}^2 dx = 0$$

Si $\int_\Omega h(x)|\nabla \bar{u}|^2 dx = 0$, entonces de la desigualdad 2.7 $\nabla \bar{u} = 0$ c.t.p. en Ω, es decir, $\bar{u}$ es una constante c.t.p. en Ω.
Así y como $0 = \int_\Omega q(x)\bar{u}^2 dx = \bar{u}^2 \int_\Omega q(x)dx$, entonces $0 = \int_\Omega q(x)dx$, lo que contradice la hipótesis, por lo tanto $C \neq 0$.

De todo esto se obtiene

$$J(u) \geq C \int_\Omega u^2 dx \quad \forall u \in S.$$

Ahora se mostrará que la desigualdad anterior se satisface para todo $u \in H^1(\Omega)$.
Sea $u \in H^1(\Omega)$, si $u = 0$ se sigue directamente el resultado. Si $u \neq 0$ de la desigualdad anterior y la homogeneidad de J se obtiene

$$J\left(\frac{u}{||u||_{H^1(\Omega)}}\right) \geq C \int_\Omega \left(\frac{u}{||u||_{H^1(\Omega)}}\right)^2 dx$$
$$\frac{1}{||u||^2_{H^1(\Omega)}} J(u) \geq C \frac{1}{||u||^2_{H^1(\Omega)}} \int_\Omega u^2 dx$$
$$J(u) \geq C \int_\Omega u^2 dx$$

Por lo tanto se obtiene el resultado. □

Corolario 2.4. Con las hipótesis del teorema anterior, el funcional J es coercivo, o lo que es lo mismo, $\boldsymbol{a}$ es coerciva.

Demostración. Suponiendo que se satisfacen las hipótesis del teorema anterior, se tiene que existe una constante $C > 0$ tal que

$$\int_\Omega u^2 dx \leq \frac{1}{C} J(u) \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

Con esto y las condiciones de elipticidad de h, 2.2, se obtiene la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned}
||u||^2_{H^1(\Omega)} &= \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega u^2 dx \leq \frac{1}{\theta} \int_\Omega h(x)|\nabla u|^2 dx + \frac{1}{C} J(u) \\
&= \frac{1}{\theta} \int_\Omega h(x)|\nabla u|^2 dx + \frac{1}{C} \left(\int_\Omega h(x)|\nabla u|^2 dx + \int_\Omega q(x) u^2 dx \right) \\
&\leq \left(\frac{1}{\theta} + \frac{1}{C} \right) \int_\Omega h(x)|\nabla u|^2 dx + \frac{1}{C} \int_\Omega q(x) u^2 dx + \frac{1}{\theta} \int_\Omega q(x) u^2 dx \\
&= \left(\frac{1}{\theta} + \frac{1}{C} \right) J(u)
\end{aligned}$$

para todo $u \in H^1(\Omega)$.

De la igualdad anterior se sigue que J es coercivo

$$\lim_{||u||_{H^1(\Omega)} \to +\infty} J(u) \geq \lim_{||u||_{H^1(\Omega)} \to +\infty} \frac{\theta C}{\theta + C} ||u||^2_{H^1(\Omega)} = +\infty.$$

Y equivalentemente tomando $C_\theta := \frac{\theta C}{\theta + C} > 0$, se tiene que $\boldsymbol{a}$ es coerciva. $\square$

Observación 18. Si $\int_\Omega q(x) dx = 0$, J no es coercivo, pues para $n \in H^1(\Omega)$ constante, se tiene

$$\begin{aligned}
\lim_{||n||_{H^1(\Omega)} \to +\infty} J(n) &= \lim_{||n||_{H^1(\Omega)} \to +\infty} \left(\int_\Omega h(x)|\nabla n|^2 dx + \int_\Omega q(x) n^2 dx \right) \\
&= \lim_{||n||_{H^1(\Omega)} \to +\infty} \left(n^2 \int_\Omega q(x) dx \right) = 0.
\end{aligned}$$

Observación 19. De la observación 17, se puede notar que el funcional de energía asociado al problema 2.1, con condiciones de Dirichlet homogéneas es el mismo funcional que se ha definido en esta sección, pero sobre el espacio $H^1_0(\Omega)$ ($I : H^1_0(\Omega) \to \mathbb{R}$). Debido a que en este espacio se satisface la desigualdad de Poncairé, se puede mostrar que el funcional, J, siempre es coercivo independientemente del dato q.

Propiedades del funcional Φ

Proposición 2.5. Sea $f \in C^1(\mathbb{R})$, se tiene

F_1) $F(0) = 0$

F_2) Si f satisface f_1, entonces $F(t) = 0$ para todo $t \leq 0$

F_3) Si f satisface f_1 y f_2, entonces $F(t) \geq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$

F_4) Si f satisface f_1 y f_2, entonces F es creciente

F_5) Si f satisface f_3, entonces existe $b_1 > 0$, $|F(t)| \leq \bar{a}t + b_1|t|^{\sigma+1}$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Demostración. F_1 se sigue directamente del hecho de que la integral en un punto es 0.

$$F(0) = \int_0^0 f(s)ds = 0.$$

Sea $t \leq 0$, como f_1 se satisface entonces $f(t) = 0$ y dado que F es la primitiva de f, se sigue que $F'(t) = f(t) = 0$. En consecuensia F es constante para todo $t \leq 0$ y como $F(0) = 0$ obtenemos F_2.

Ahora, supongamos que f_1 y f_2 se cumplen, entonces tenemos

$$f(s) \geq 0 \quad \forall s \in \mathbb{R},$$

así gracias a la monotonía de la integral se sigue F_3

$$F(t) = \int_0^t f(s)ds \geq \int_0^t 0ds = 0.$$

Y como $F' = f \geq 0$, es decir, F es creciente se sigue F_4.

Finalmente, supongamos que f_3 se cumple, entonces

$$|F(t)| \leq \int_0^t |f(s)|ds \leq \int_0^t a ds + \int_0^t b|s|^{\sigma} ds = \bar{a}t + b\frac{1}{\sigma+1}|s|^{\sigma+1}$$

tomando $b_1 := b\frac{1}{\sigma+1} > 0$ así se sigue F_5. □

A continuación se mostrará propiedades de diferenciabilidad y de compacidad del funcional Φ.

Lema 2.6 ([9])**.** Sea $f \in C^1(\mathbb{R})$. Si f satisface f_3, entonces $\Phi \in C^1(H^1(\Omega))$.

Demostración. Primero se mostrará que Φ es Gâteux diferenciable.

Sean $u, v \in H^1(\Omega)$, se probará que la aplicación $D_G(\Phi(u))$, dada por:

$$D_G(\Phi(u))v = \lim_{t\to 0} \frac{\Phi(u+tv) - \Phi(u)}{t}$$

es lineal y continua en $H^1(\Omega)$.
De la linealidad de la integral y la definición de Φ se puede escribir

$$D_G(\Phi(u))v = \lim_{t\to 0} \int_\Omega \frac{w(x)[F(u+tv) - F(u)]}{t} dx.$$

Por el primer teorema fundamental del cálculo, se sabe que F es diferencible en $\mathbb{R}$, pues $f \in C^1(\mathbb{R})$, por tanto se satisface la siguiente igualdad

$$\lim_{t\to 0} \frac{w(x)[F(u+tv) - F(u)]}{t} = w(x)f(u)v \tag{2.10}$$

Por otro lado, se define la función:

$$\tau(t) = F(u+tv), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

como F es diferenciable y la recta también lo es, se sigue que τ es diferenciable con $\tau'(t) = f(u+tv)v$.
Así aplicando el teorema de valor medio para τ, existe ϕ, $|\phi| \leq |t|$ tal que

$$\left| \frac{F(u+tv) - F(u)}{t} \right| = |f(u+\phi v)v|.$$

Con esto, gracias a que f satisface f_3 y como $\sigma > 0$ del lema C.1 existe $C_\sigma > 0$ tal que;

$$\begin{aligned}\left| \frac{w(x)[F(u+tv) - F(u)]}{t} \right| &= |w(x)| \left| \frac{F(u+tv) - F(u)}{t} \right| \\ &= |w(x)||f(u+\phi v)v| \leq |w(x)|(\bar{a} + b|u+\phi v|^\sigma)|v| \\ &\leq \bar{a}|w(x)||v| + bC_\sigma |w(x)||u|^\sigma |v| + bC_\sigma \phi^\sigma |w(x)||v|^{\sigma+1}.\end{aligned}$$

Para continuar se verá que

$$z := \bar{a}|w||v| + bC_\sigma |w||u|^\sigma |v| + bC_\sigma \phi^\sigma |w(x)||v|^{\sigma+1} \in L^1(\Omega),$$

en efecto, por el teorema 1.27 existe $C > 0$ tal que

$$\int_\Omega \bar{a}|w(x)||v|dx = \bar{a} \int_\Omega |w(x)||v|dx \leq \bar{a}||w||_{L^\infty(\Omega)}||v||_{L^1(\Omega)} \leq \bar{a}C||w||_{L^\infty(\Omega)}||v||_{H^1(\Omega)}.$$

De la desigualdad de Hölder para $\frac{1}{\sigma+1} + \frac{\sigma}{\sigma+1} = 1$ y como $\sigma + 1 < 2^*$, entonces del teorema 1.27 existe $C_1 > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega bC_\sigma |w(x)||u|^\sigma |v| dx &\leq bC_\sigma ||w||_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega |u|^\sigma |v| \\
&\leq bC_\sigma ||w||_{L^\infty(\Omega)} \left(\int_\Omega |u|^{\sigma+1} dx \right)^{\frac{\sigma}{\sigma+1}} ||v||_{L^{\sigma+1}(\Omega)} \\
&= bC_\sigma ||w||_{L^\infty(\Omega)} ||u||^\sigma_{L^{\sigma+1}(\Omega)} ||v||_{L^{\sigma+1}(\Omega)} \\
&\leq C_\sigma b c_1^\sigma C_1 ||w||_{L^\infty(\Omega)} ||u||^\sigma_{H^1(\Omega)} ||v||_{H^1(\Omega)} < +\infty.
\end{aligned}$$

Por lo tanto se tiene

$$\left| \frac{w[F(u+tv) - F(u)]}{t} \right| \leq z \quad z \in L^1(\Omega) \tag{2.11}$$

Así de 2.10 y 2.11 aplicando el teorema de convergencia dominada se obtiene

$$D_G(\Phi(u))v = \int_\Omega w(x) f(u) v dx.$$

Seguidamente se mostrará que $D_G(\Phi(u)) \in (H^1(\Omega))^*$, la linealidad se sigue de la linealidad de producto de funciones y la linealidad de la integral.
Además por lo realizado anteriormente sabemos que existen constantes $C, C_1 > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
|D_G(\Phi(u))v| &\leq \int_\Omega |w(x) f(u) v| dx \leq \int_\Omega |w(x)| (\bar{a} + b|u|^\sigma) |v| dx \\
&\leq \bar{a} C ||w||_{L^\infty(\Omega)} ||v||_{H^1(\Omega)} + C_1^\sigma C_1 b ||w||_{L^\infty(\Omega)} ||u||^\sigma_{H^1(\Omega)} ||v||_{H^1(\Omega)} \\
&= (\bar{a} C ||w||_{L^\infty(\Omega)} + C_1^\sigma C_1 b ||w||_{L^\infty(\Omega)} ||u||^\sigma_{H^1(\Omega)}) ||v||_{H^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Ahora se verá que Φ es Fréchet-diferenciable, para ello basta probar que
$D_G(\Phi(\cdot)) : H^1(\Omega) \to (H^1(\Omega))^*$ es continua.

Sea $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión que converge a u en $H^1(\Omega)$. Del teorema 1.27 con $q = \sigma + 1 < 2^*$, se tiene $u_k \to u$ en $L^{\sigma+1}(\Omega)$ y en consecuencia existe una subsucesion tal que

i) $u_{k_j} \to u$ c.t.p. en $\in \Omega$

ii) $\exists z \in L^{\sigma+1}(\Omega)$, tal que $|u_{k_j}| \leq z$ c.t.p. en $\in \Omega$ para todo $j \in \mathbb{N}$

de la continuidad de f,

$$w(x) f(u_{k_j}) \to w(x) f(u) \quad \text{c.t.p.} \quad \text{en} \quad \Omega$$

entonces

$$\lim_{j\to\infty}\left|w(x)f(u_{k_j})-w(x)f(u)\right|^{\frac{\sigma+1}{\sigma}}\to 0 \quad \text{c.t.p.} \quad \text{en} \quad \Omega \tag{2.12}$$

De la propiedad f_3 de f y como $\frac{\sigma+1}{\sigma}>0$ gracias al lema C.1 existe $C_{\frac{\sigma+1}{\sigma}}>0$ tal que

$$\begin{aligned}
\left|w(x)f(u_{k_j}))-w(x)f(u)\right|^{\frac{\sigma+1}{\sigma}} &\leq |w(x)|^{\frac{\sigma+1}{\sigma}}\left(|f(u_{k_j})|+|f(u)|\right)^{\frac{\sigma+1}{\sigma}}\\
&\leq |w(x)|^{\frac{\sigma+1}{\sigma}}C_{\frac{\sigma+1}{\sigma}}\left(|f(u_{k_j})|^{\frac{\sigma+1}{\sigma}}+|f(u)|^{\frac{\sigma+1}{\sigma}}\right)\\
&\leq |w(x)|^{\frac{\sigma+1}{\sigma}}C_{\frac{\sigma+1}{\sigma}}\left(|\bar{a}+b|u_{k_j}||^{\frac{\sigma+1}{\sigma}}+|\bar{a}+b|u||^{\frac{\sigma+1}{\sigma}}\right)\\
&\leq |w(x)|^{\frac{\sigma+1}{\sigma}}C^2_{\frac{\sigma+1}{\sigma}}\left(2\bar{a}^{\frac{\sigma+1}{\sigma}}+b^{\frac{\sigma+1}{\sigma}}\left[|u_{k_j}|^{\sigma+1}+|u|^{\sigma+1}\right]\right).
\end{aligned}$$

Dado que $\sigma+1>0$ entonces la función $\tau(t)=t^{\sigma+1}$ es creciente para todo $t\geq 0$, pues $\tau''(t)=(\sigma+1)t^{\sigma}\geq 0$. Así de ii) existe $z\in L^{\sigma 1}(\Omega)$, tal que

$$|u_{k_j}(x)|^{\sigma+1}\leq z(x)^{\sigma+1} \quad \text{c.t.p.} \quad x\in\Omega \quad \forall j\in\mathbb{N}$$

entonces

$$\left|w(x)f(u_{k_j}(x))-w(x)f(u(x))\right|^{\frac{\sigma+1}{\sigma}}\leq y(x) \tag{2.13}$$

con

$$y(x)=|w(x)|^{\frac{\sigma+1}{\sigma}}C^2_{\frac{\sigma+1}{\sigma}}\left(2a^{\frac{\sigma+1}{\sigma}}+b^{\frac{\sigma+1}{\sigma}}\left[|z(x)|^{\sigma+1}+|u(x)|^{\sigma+1}\right]\right).$$

Se verá que $y\in L^1(\Omega)$, en efecto, como $w\in L^\infty(\Omega)$ y la función $\tau(t)=t^{\frac{\sigma+1}{\sigma}}$ es creciente, se sigue

$$C^2_{\frac{\sigma+1}{\sigma}}b^{\frac{\sigma+1}{\sigma}}\int_\Omega |w(x)|^{\frac{\sigma+1}{\sigma}}|z(x)|^{\sigma+1}dx\leq C^2_{\frac{\sigma+1}{\sigma}}b^{\frac{\sigma+1}{\sigma}}\,||w||_\infty^{\frac{\sigma+1}{\sigma}}\,||z||_{\sigma+1}^{\sigma+1}<+\infty.$$

Se obtiene el mismo resultado para el término

$$C^2_{\frac{\sigma+1}{\sigma}}b^{\frac{\sigma+1}{\sigma}}|w(x)|^{\frac{\sigma+1}{\sigma}}|u|^{\sigma+1}$$

De 2.12 y 2.13, por el teorema de convergencia dominada, de la desigualdad de Hölder y por el teorema 1.27, se tiene

$$\begin{aligned}
||D_G(\Phi(u_{k_j}))-D_G(\Phi(u))||_{(H^1(\Omega))^*} &= \sup_{||u||_{H^1(\Omega)}=1}\int_\Omega |w(f(u_{k_j})-f(u))||v|dx\\
&\leq \sup_{||u||_{H^1(\Omega)}=1}\left(\int_\Omega |w(f(u_{k_j})-f(u))|^{\frac{\sigma+1}{\sigma}}dx\right)^{\frac{\sigma}{\sigma+1}}||v||_\sigma\\
&\leq C\left(\int_\Omega |w(x)(f(u_{k_j})-f(u))|^{\frac{\sigma+1}{\sigma}}dx\right)^{\frac{\sigma}{\sigma+1}}
\end{aligned}$$

Se ha probado que para cualquier sucesión convergente en $H^1(\Omega)$, ésta posee una subsucesión tal que $D_G(\Phi(u_{k_j})) \to D_G(\Phi(u))$ en $(H^1(\Omega))^*$.
Por lo tanto $D_g(\Phi(\cdot))$ es continua y en consecuencia Φ es Fréchet-diferenciable, con

$$D_F(\Phi(u))v = D_G(\Phi(u))v = \int_\Omega w(x)f(u)v dx.$$

Dado que $D_F(\Phi(\cdot)) = D_G(\Phi(\cdot))$ y como $D_G(\Phi(\cdot))$ es continua en $H^1(\Omega)$, se sigue que $D_F(\Phi(\cdot))$ también es continua en $H^1(\Omega)$ y así Φ es de clase C^1 □

Lema 2.7 ([4]). Supongamos que f satisface f_3. Entonces el operador $\Phi' : H^1(\Omega) \to (H^1(\Omega))^*$ es compacto.

Demostración. Gracias a que $H^1(\Omega)$ es reflexivo, entonces para probar que Φ' es compacto, basta comprobar que

$$(\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{en} \quad H^1(\Omega))(u_n \rightharpoonup u \Rightarrow \Phi'(u_n) \to \Phi'(u) \quad \text{en} \quad (H^1(\Omega))^*).$$

Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $H^1(\Omega)$ tal que $u_n \rightharpoonup u$, del teorema 1.27 se sigue que $u_n \to u$ en $L^{\sigma+1}(\Omega)$.
Apartir de aquí la demostración es idéntica a la demostración realizada en el lema 2.6, de donde se obtuvo que

$$\Phi'(u_n) \to \Phi'(u) \quad \text{en} \quad (H^1(\Omega))^*.$$

Así se sigue el resultado. □

Lema 2.8. Si f satisface f_3, entonces Φ es débilmente continuo.

Demostración. Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $H^1(\Omega)$, que converge débilmente a $u \in H^1(\Omega)$. Del teorema 1.27 se sigue que $u_n \to u$ en $L^{\sigma+1}(\Omega)$, en consecuencia, existe una subsecesión $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

i) $u_{n_k}(x) \to u(x) \quad \text{ctp} \quad x \in \Omega$

ii) $\exists z \in L^{\sigma+1}(\Omega)$, tal que $|u_{n_k}(x)| \leq z(x)$ ctp $x \in \Omega\ \forall k \in \mathbb{N}$

Del primer teorema fundamental del cálculo, se sabe que la función F es diferenciable, por tanto continua y así por i)

$$w(x)F(u_{n_k}(x)) \to w(x)F(u(x)) \quad \text{ctp} \quad x \in \Omega \tag{2.14}$$

de F_5, por ii) y realizando un procedimiento similar a lo realizado en 2.13, se puede mostrar que

$$|w(x)F(u_{n_k}(x))| \leq y(x) \quad x \in \Omega \tag{2.15}$$

con $y = |w|(az + b_1 z^{\sigma+1}) \in L^1(\Omega)$.

De 2.14 y 2.15 gracias al teorema de convergencia dominada, se obtiene

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega w(x)F(u_{n_k}(x))dx = \int_\Omega w(x)F(u(x))dx.$$

Se ha probado que cualquier sucesión $u_n \rightharpoonup u$ en $H^1(\Omega)$ entonces

$$\lim_{n\to\infty} \Phi(u_n) = \Phi(u) \tag{2.16}$$

así Φ es débilmente continuo.

□

Proposición 2.9. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto y acotado, sean $h, q \in L^\infty(\Omega)$ como en el problema 2.1. Si $f \in C^1(\mathbb{R})$ satisface f_3, entonces I es de clase C^1 y débilmente semicontinuo inferior.

Demostración. Si se supone que $h, q \in L^\infty(\Omega)$ como en el problema 2.1, entonces de la proposición 2.2 se obtiene que J es de clase C^1 y como $f \in C^1(\mathbb{R})$ satisface f_3, entonces por el lema 2.6, se sigue que Φ también es de clase C^1. Por lo tanto, dado que I es la suma de $\frac{1}{2}J$ y $\lambda\Phi$, se sigue que I es de clase C^1.

Ahora se mostrará que I es débilmente semicontinuo inferior.
Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $H^1(\Omega)$, que converge débilmente a $u \in H^1(\Omega)$, de la proposición 2.2 se sabe que J es débilmente semicontinua inferior, entonces

$$J(u) \leq \liminf_{n\to\infty} J(u_n). \tag{2.17}$$

Además del lema 2.8 se tiene que Φ es débilmente continuo, es decir, se cumple 2.16. Por lo tanto de las propiedades de $\liminf$ y las ecuaciones 2.16, 2.17, se obtiene el resultado

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{2}J(u_n) - \lambda\Phi(u) \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{2}J(u_n) - \lim_{n\to\infty} \lambda\Phi(u_n) \\ &= \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{2}J(u_n) - \liminf_{n\to\infty} \lambda\Phi(u_n) \leq \liminf_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}J(u_n) - \lambda\Phi(u_n)\right) \\ &= \liminf_{n\to\infty} I(u_n) \end{aligned}$$

$\square$

Observación 20. De la misma forma todas las propiedades de diferenciabilidad, compacidad y débilmente semicontinuidad inferior se satisfacen cuando I está definido sobre el espacio $H_0^1(\Omega)$, ya que este espacio es reflexivo y se satisface el teorema 1.27.

2.2.2. Condición de Palais-Smale

El propósito de esta parte es mostrar que el funcional I satisface la condición de $(PS)_c$.
Se procederá a mostrar que cualquier sucesión de $(PS)_c$ para I está acotada y en consecuencia que posee una subsecesión convergente.

Demostrar que una sucesión de $(PS)_c$ para I está acotada, no es una tarea sencilla y se necesita separar los casos cuando f presente un crecimiento subcuadrático y subcrítico. No obstante mostrar que una sucesión de $(PS)_c$ para I acotada posee una subsucesión convergente, es más sencillo y no es necesario separar estos casos. Por este motivo se empieza exhibiendo el siguiente resultado.

Proposición 2.10. Si f satisface f_3, entonces cualquier sucesión de $(PS)_c$ para I acotada posee una subsucesión convergente.

Demostración. Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $H^1(\Omega)$, de $(PS)_c$ para I acotada. Como $H^1(\Omega)$ es un espacio reflexivo, existe una subsucesión, notada de la misma manera que la sucesión, y $u \in H^1(\Omega)$, tal que $u_n \rightharpoonup u$, entonces del teorema 1.27, $||u_n - u||_2 \to 0$.
Por lo tanto para mostrar que u_n es convergente, basta mostrar que

$$||\nabla u_n - \nabla u||_2 \to 0.$$

Recordando que una sucesión de $(PS)_c$ para I satisface;

i) $I(u_n) \to c$

i) $I'(u_n) \to 0$ en $(H^1(\Omega))^*$.

Luego, dado que $u_n \rightharpoonup u$ y como $I'(u) \in (H^1(\Omega))^*$, entonces de la definición de convergencia débil, $I'(u)u_n \to I'(u)u$. Con esto y por el ítem ii), se sigue

$$(I'(u) - I'(u_n))(u_n - u) \to 0. \tag{2.18}$$

Además, de la compacidad del operador Φ', se tiene que $\Phi'(u_n) \to \Phi'(u)$ en $(H^1(\Omega))^*$ y como $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada en $H^1(\Omega)$, existe $M > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\left|(\Phi'(u_n) - \Phi'(u))(u_n - u)\right| &\leq \left|\left|\Phi'(u_n) - \Phi'(u)\right|\right|_{(H^1(\Omega))^*} ||u_n - u||_{H^1(\Omega)} \\
&\leq \left|\left|\Phi'(u_n) - \Phi'(u)\right|\right|_{(H^1(\Omega))^*} \left(||u_n||_{H^1(\Omega)} + ||u||_{H^1(\Omega)}\right) \\
&\leq \left|\left|\Phi'(u_n) - \Phi'(u)\right|\right|_{(H^1(\Omega))^*} \left(M + ||u||_{H^1(\Omega)}\right),
\end{aligned}$$

así cuando $n \to +\infty$ se obtiene $(\Phi'(u_n) - \Phi(u))(u_n - u) \to 0$.
De esto y por 2.18, se obtiene que $J(u_n - u) \to 0$, en efecto

$$\begin{aligned}
(I'(u) - I'(u_n))(u - u_n) &= I'(u)(u_n - u) - I'(u_n)(u_n - u) \\
&= a(u, u_n - u) - \lambda\Phi'(u)(u_n - u) \\
&- a(u_n, u_n - u) + \lambda\Phi'(u_n)(u_n - u) \\
&= J(u_n - u) + \lambda(\Phi'(u_n) - \Phi'(u))(u_n - u)
\end{aligned}$$

tomando el límite cuando $n \to +\infty$, se sigue que $J(u_n - u) \to 0$. Y por la desigualdad 2.8 se tiene que $||\nabla u_n - \nabla u||_2 \to 0$. □

Ahora se mostrará que una sucesión de $(PS)_c$ para I, está acotada. La prueba para el caso en que f presente un creciemiento subcrítico y supercuadrático es muy compleja y es necesarios mostrar primero 2 resultados, a diferencia del caso en que f presente un crecimiento subcuadrático. Por esta razón se ha omitido la demostración del caso subcuadrático en esta parte.

Lema 2.11. Sea $f \in C^1(\mathbb{R})$, entonces para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta_\epsilon > 0$ tal que;
Si f cumple f_4

f_{4_1}) $|F(t)| \leq \epsilon t^2$ para todo $|t| < \delta_\epsilon$.

Si f cumple f_5

f_{5_1}) $|pF(t) - f(t)t| \leq \epsilon\left(1 + \frac{p}{2}\right)|t|^2$ para todo $t \geq \delta_\epsilon$

f_{5_2}) $-F(t) \leq \frac{\epsilon}{2}|t|^2 - \frac{1}{p}|t|^p$ para todo $t \geq \delta_\epsilon$

f_{5_3}) $-f(t) \leq \epsilon|t| - |t|^{p-1}$ para todo $t \geq \delta_\epsilon$.

Demostración. Sea $f \in C^1(\mathbb{R})$.
Si f_4 se cumple, dado que F y t^2 son derivables y, $\lim_{t\to 0} F(t) = \lim_{t\to 0} t^2 = 0$, entonces por la regla del Hôpital, se tiene f_{4_1}

$$\lim_{t\to 0} \frac{F(t)}{t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{f(t)}{2t} = 2 \lim_{t\to 0} \frac{f(t)}{t} = 0. \tag{2.19}$$

Así de la definición de límite se sigue f_{4_1}.

Ahora, si se supone que f satisface f_5, entonces para cualquier $\epsilon > 0$ existe $\delta_\epsilon > 0$, tal que

$$-\epsilon|s| \leq f(s) - |s|^{p-2}s \leq \epsilon|s| \tag{2.20}$$

para todo $s \geq \delta_\epsilon$, de esta desiguadad se obtiene directamente f_{5_3}.
Sea $s, t \geq \delta_\epsilon > 0$.
Integrando sobre $[0, t]$ en la desigualdad 2.20

$$-\frac{\epsilon}{2}|t|^2 \leq F(t) - \frac{1}{p}|t|^p \leq \frac{\epsilon}{2}|t|^2 \Leftrightarrow |pF(t) - |t|^p| \leq p\frac{\epsilon}{2}|t|^2. \tag{2.21}$$

De esto se sigue inmediatamente que f satisface f_{5_2}

$$-F(t) \leq \frac{\epsilon}{2}|t|^2 - \frac{\epsilon}{p}|t|^p.$$

Multiplicando t en 2.20

$$-\epsilon|t|^2 \leq f(t)t - |t|^p \leq \epsilon|t|^2 \Leftrightarrow |f(t)t - |t|^p| \leq \epsilon|t|^2. \tag{2.22}$$

Combinando las desigualdades 2.21 y 2.22

$$|pF(t) - f(t)t| \leq |pF(t) - |t|^p| + |f(t)t - |t|^p| \leq p\frac{\epsilon}{2}|t|^2 + \epsilon|t|^2 = \left(1 + \frac{p}{2}\right)\epsilon|t|^2.$$

Dado que la desigualdad anterior se satisface para todo $t \geq \delta_\epsilon$, entonces se obtiene f_{5_1}. $\square$

Observación 21. Sea $u \in H^1(\Omega)$ y sea $\delta > 0$, se define el siguiente conjunto

$$A_\delta := \{x \in \Omega; u(x) \geq \delta\}.$$

Si f satisface f_1 y f_2, entonces $F \circ u$ está acotada en $(A_\delta)^c$.
En efecto, sea $x \in (A_\delta)^c$, entonces $u(x) < \delta_\epsilon$ de las hipótesis f_1 y f_2 se sigue la

propiedad F_4, es decir, F es creciente, así

$$F(u(x)) \leq F(\delta_\epsilon) \quad \forall x \in (A_\delta)^c,$$

dado que $f \neq 0$, $\delta_\epsilon > 0$ y $F \geq 0$, se sigue que $F(\delta_\epsilon) > 0$. Por lo tanto, tomando $M := F(\delta_\epsilon) > 0$ se sigue el resultado.

Lema 2.12. Sean $\lambda > 0$ y $2 < \sigma + 1 < 2^*$, sean $h, w \in L^\infty(\Omega)$ como en el problema 2.1 y f tal que satisface $f_1 - f_3$ y f_5. Si existe una sucesión de $(PS)_c$ para I, $c \in \mathbb{R}$, entonces existen constantes, $C, \bar{C} > 0$ tales que

$$J(u_n) \leq \epsilon C \, ||u_n||^2_{H^1(\Omega)} + \bar{C} \tag{2.23}$$

para todo $\epsilon > 0$.

Demostración. Si se supone que existe una sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(PS)_c$, entonces se tiene

i $I(u_n) \to c$ en $\mathbb{R}$

ii $I'(u_n) \to 0$ en $(H^1(\Omega))^*$

Del ítem *ii* se tiene $I'(u_n)u_n \to 0$ en $\mathbb{R}$, por lo tanto de *i*, existen constantes $M_1, M_2 > 0$, tales que

$$\left| \frac{1}{2} J(u_n) - \lambda \int_\Omega w(x) F(u_n) dx \right| \leq M_1 \quad \text{y} \quad \left| J(u_n) - \lambda \int_\Omega w(x) f(u_n) u_n dx \right| \leq M_2$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sea $n \in \mathbb{N}$, multiplicando por $\frac{1}{p}$, con $2 < p < 2^*$, en la segunda desigualdad y sumando con la primera, se tiene

$$\frac{1}{2} J(u_n) \leq M_1 + \lambda \int_\Omega w(x) F(u_n) dx \quad \text{y} \quad -\frac{1}{p} J(u_n) \leq \frac{M_2}{p} - \lambda \int_\Omega w(x) \frac{1}{p} f(u_n) u_n dx.$$

Sumando las últimas desigualdades y tomando $C_1 := \max \left\{ M_1, \frac{M_2}{p} \right\}$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) J(u_n) &\leq C_1 + \frac{\lambda}{p} \int_\Omega w(x)(pF(u_n) - f(u_n)u_n) dx \\ &\leq C_1 + \frac{\lambda}{p} \, ||w||_\infty \int_\Omega |pF(u_n) - f(u_n)u_n| dx \\ &:= C_1 + C_2 \int_\Omega |pF(u_n) - f(u_n)u_n| dx. \end{aligned}$$

Por otro lado gracias a que f satisface f_5, entonces para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta_\epsilon > 0$ tal que se cumple f_{5_1}.
Considerando el conjunto A_{δ_ϵ}, como en la observación 21 y como f satisface f_1 y f_3, entonces el término $f(u_n)u_n$ está acotado en $(A_{\delta_\epsilon})^c$.
En efecto, si $x \in (A_{\delta_\epsilon})^c$, entonces $u_n(x) \leq 0$ o $0 < u_n(x) < \delta_\epsilon$.
Cuando , $0 < u_n(x) < \delta_\epsilon$ de f_3 se tiene que

$$|f(u_n)u_n| \leq a|u_n| + b|u_n|^{\sigma+1} \leq a\delta_{\bar{\epsilon}_p} + b\delta_{\bar{\epsilon}_p}^{\sigma+1} := M_1 \quad \text{en} \quad (A_{\delta_{\bar{\epsilon}_p}})^c$$

y cuando $u_n(x) \leq 0$, de f_1 tenemos $|f(u_n)u_n| = 0 < M_1$.
Con esto junto con la desigualdad 2.6, la observación 9 y el hecho[4] que $1 + \frac{2^*}{2} < 2^*$ se obtiene

$$\begin{aligned}
\int_\Omega [pF(u_n) - f(u_n)u_n]\, dx &= \int_{A_{\delta_\epsilon}} |pF(u_n) - f(u_n)u_n| dx \\
&+ \int_{(A_{\delta_\epsilon})^c} |pF(u_n) - f(u_n)u_n| dx \\
&\leq \epsilon \left(1 + \frac{p}{2}\right) \int_{A_{\delta_\epsilon}} |u_n|^2 dx \\
&+ \int_{(A_{\delta_\epsilon})^c} (|pF(u_n)| + |f(u_n)u_n|) dx \\
&\leq \epsilon \left(1 + \frac{2^*}{2}\right) \int_\Omega |u_n|^2 dx + \int_{(A_{\delta_\epsilon})^c} (pM + M_1) dx \\
&\leq \epsilon 2^* \, ||u_n||^2_{H^1(\Omega)} + \gamma((A_{\delta_{\bar{\epsilon}}})^c)(pM + M_1) \\
&\leq \epsilon 2^* \, ||u_n||^2_{H^1(\Omega)} + \gamma(\Omega)(pM + M_1) := \epsilon 2^* \, ||u_n||^2_{H^1(\Omega)} + C_3.
\end{aligned}$$

Combinando estas dos últimas desigualdades obtenidas se sigue

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) J(u_n) &\leq C_1 + C_2 \left(\epsilon 2^* \, ||u_n||^2_{H^1(\Omega)} + C_3\right) \\
&= \epsilon 2^* C_2 \, ||u_n||^2_{H^1(\Omega)} + C_1 + C_2 C_3 := \epsilon C_4 \, ||u_n||^2_{H^1(\Omega)} + C_5.
\end{aligned}$$

Dado que $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) > 0$, pues $2 < p < 2^*$, tomando $C = \frac{C_4}{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}}$ y $\bar{C} = \frac{C_5}{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}}$, se obtiene el resultado. □

[4] Dado que $N > 2$, entonces $\frac{2}{N-2} > 0$, y así

$$1 + \frac{2^*}{2} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{2N}{N-2}\right) = \frac{2N-2}{N-2} = \frac{2N}{N-2} - \frac{2}{N-2} < \frac{2N}{N-2} = 2^*$$

Para mostrar el siguiente lema se considera el conjunto:

$$\Omega_+ = \{x \in \Omega; w(x) > 0\},$$

el cual también será de utilidad en el capítulo siguiente.

Lema 2.13. Sea $\lambda > 0$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto y conexo, sean $h, w \in L^\infty(\Omega)$ como en el problema 2.1, tal que
$\text{int}(\Omega_+) \neq \emptyset$. Si f cumple $f_1 - f_3$ con $2 < \sigma + 1 < 2^*$ y f_5, entonces toda sucesión de $(PS)_c$, $c \in \mathbb{R}$, para I está acotada.

Demostración. Sea $c \in \mathbb{R}$. Por absurdo se supone que existe una sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(PS)_c$ que no está acotada, es decir, $||u_n||_{H^1(\Omega)} \to +\infty$, así por la igualdad 1.3 se tiene

$$|||u_n|||_{H^1(\Omega)} \to +\infty. \tag{2.24}$$

Considerando la sucesión $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{|u_n|}{|||u_n|||_{H^1(\Omega)}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ y dado que se satisfacen las hipótesis del lema anterior, entonces multiplicando por $\frac{1}{|||u_n|||^2_{H^1(\Omega)}}$ en la desigualdad 2.23, existen constantes $C, \bar{C} > 0$ tales

$$\frac{1}{|||u_n|||^2_{H^1(\Omega)}} J(u_n) \leq \epsilon C + \frac{1}{|||u_n|||^2_{H^1(\Omega)}} \bar{C} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall \epsilon > 0.$$

Por el lema 2.1 y tomando $\epsilon = \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

$$0 < J(|v_n|) \leq \frac{1}{n} C + \frac{1}{|||u_n|||^2_{H^1(\Omega)}} \bar{C} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Así de la ecuación 2.24, cuando $n \to \infty$, se sigue que $J(v_n) \to 0$, en consecuencia por la desigualdad 2.8

$$||\nabla v_n||_2 \to 0, \tag{2.25}$$

Por otro lado, de la definición de sucesión $(v_n)_{n\in N}$, es claro que,
$||v_n||_{H^1(\Omega)} = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir, la sucesión $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada, entonces de la reflexividad de $H^1(\Omega)$, existe una subsucesión, notada de la misma manera que la sucesión, y $v \in H^1(\Omega)$, tal que $v_n \rightharpoonup v$, así de los teoremas 1.27 y 1.18 se tiene,

a) $v_n \to v$ en $L^2(\Omega)$.

b) Existe una subsucesión $(v_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, tal que $v_{n_k}(x) \to v(x)$ c.t.p. en Ω.

Con esto y recordando que el funcional J es débilmente semicontinuo inferior, se sigue que v es constante positiva, en efecto, gracias a 2.8

$$J(v) \leq \liminf J(v_n), \text{ es decir, } ||\nabla v||_2^2 \leq 0,$$

entonces $||\nabla v||_2 = 0$, en consecuencia, $\nabla v = 0$ c.t.p en Ω, es decir, v es una constante. Además, dado que $v_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $v_n(x) \to v$, así del ítem $b)$, $v_{n_k} \to v$ c.t.p. en Ω, es decir $v \geq 0$ c.t.p. en Ω.
Ahora se verá que $v \neq 0$. Si se supone que $v = 0$, entonces de ítem $i)$ $||v_n||_2 \to 0$ y de 2.25 $||\nabla v_n||_2 \to 0$, es decir, $||v_n||_{H^1(\Omega)} = 1 \to 0$, lo cual es absurdo.

A continuación se mostrará que existe una subsucesión de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tal que

$$\lim_{k\to+\infty} |u_{n_k}(x)| = +\infty \quad \text{c.t.p} \quad x \in \Omega \tag{2.26}$$

Sea $\epsilon_1 \in (0, v)$, del ítem $ii)$ existe $K_1(\epsilon_1) \in \mathbb{N}$ tal que

$$v - \epsilon_1 \leq \frac{|u_{n_k}(x)|}{||u_{n_k}||_{H^1(\Omega)}} \leq \epsilon_1 + v \Rightarrow \frac{|u_{n_k}(x)|}{||u_{n_k}||_{H^1(\Omega)}} \geq v - \epsilon_1 \tag{2.27}$$

c.t.p $x \in \Omega$ y para $n_k \geq K_1(\epsilon_1)$.
Sea $\epsilon > 0$, dado que $|||u_{n_k}|||_{H^1(\Omega)} \to +\infty$, entonces existe $K_2\left(\frac{\epsilon}{v-\epsilon_1}\right) \in \mathbb{N}$ tal que

$$|||u_{n_k}|||_{H^1(\Omega)} \geq \frac{\epsilon}{v - \epsilon_1}, \quad \forall n_k \geq K_2\left(\frac{\epsilon}{v - \epsilon_1}\right).$$

Tomando $K(\epsilon) := \max\left\{K_1(\epsilon_1), K_2\left(\frac{\epsilon}{v-\epsilon_1}\right)\right\}$ se tiene para todo $n_k \geq K(\epsilon)$

$$|u_{n_k}(x)| = |||u_{n_k}|||_{H^1(\Omega)} \frac{|u_{n_k}(x)|}{|||u_{n_k}||_{H^1(\Omega)}|} \geq \frac{\epsilon}{v - \epsilon_1}(v - \epsilon_1) = \epsilon$$

c.t.p $x \in \Omega$, es decir, se obtiene 2.26.
A partir de ahora se notará las subusucesiones extraidas de la misma manera que la sucesión.
Continuando con la demostración, dado que $I'(u_n) \to 0$ en $(H^1(\Omega))^*$ y como $\frac{1}{|||u_n|||_{H^1(\Omega)}} \to 0$, se tiene

$$\int_\Omega h(x)\nabla v_n \cdot \nabla\varphi dx - \lambda \int_\Omega w(x)\frac{f(u_n)}{|||u_n|||_{H^1(\Omega)}}\varphi dx \to 0 \quad \forall\varphi \in H^1(\Omega).$$

Además de la desigualdad de Cauchy Schwarz

$$0 \leq \left| \int_\Omega h(x) \nabla v_n \cdot \nabla \varphi dx \right| \leq ||h||_\infty \, ||\nabla v_n||_2 \, ||\nabla \varphi||_2 \, ,$$

por lo tanto, cuando $n \to \infty$ por 2.25, $\int_\Omega h(x) \nabla v_n \cdot \nabla \varphi dx \to 0$ y en consecuencia

$$\lambda \int_\Omega w(x) \frac{f(u_n)}{|||u_n|||_{H^1(\Omega)}} \varphi dx \to 0 \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega), \tag{2.28}$$

Sea $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\text{supp}(\varphi) \subset \text{int}(\Omega_+)$.
Se define la sucesión

$$b_n := -\lambda \int_\Omega w(x) \frac{f(u_n)}{|||u_n|||_{H^1(\Omega)}} \varphi dx \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Del lema 2.11 parte f_{5_3}, se siguen las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned}
b_n &= -\lambda \int_{supp(\varphi)} \frac{w(x) f(u_n)}{|||u_n|||_{H^1(\Omega)}} |\varphi| dx \\
&= -\lambda \int_{supp(\varphi) \cap A_{\delta_\epsilon}} \frac{w(x) f(u_n)}{|||u_n|||_{H^1(\Omega)}} |\varphi| dx - \lambda \int_{supp(\varphi) \cap A^c_{\delta_\epsilon}} \frac{w(x) f(u_n)}{|||u_n|||_{H^1(\Omega)}} |\varphi| dx \\
&\leq \lambda \int_{supp(\varphi) \cap A_{\delta_\epsilon}} \frac{w(x)(\epsilon u_n - |u_n|^{p-1}) |\varphi|}{|||u_n|||_{H^1(\Omega)}} dx + \frac{\lambda \, ||w||_\infty \, ||\varphi||_\infty \, M_1 \gamma(\Omega)}{|||u_n|||_{H^1(\Omega)}} \\
&\leq \lambda \epsilon \int_\Omega w(x) v_n |\varphi| dx - \lambda \int_{supp(\varphi) \cap A_{\delta_\epsilon}} w(x) |u_n|^{p-2} v_n |\varphi| dx + \frac{C}{|||u_n|||_{H^1(\Omega)}} \\
&\leq \lambda \epsilon \, ||w||_\infty \, ||v_n||_2 \, ||\varphi||_2 - \lambda \int_{supp(\varphi) \cap A_{\delta_\epsilon}} w(x) |u_n|^{p-2} v_n |\varphi| dx + \frac{C}{|||u_n|||_{H^1(\Omega)}} \\
&\leq -\lambda \int_{supp(\varphi) \cap A_{\delta_\epsilon}} w(x) |u_n|^{p-2} v_n |\varphi| dx + \lambda \epsilon \, ||w||_\infty \, c_4 \, ||\varphi||_2 + \frac{C}{|||u_n|||_{H^1(\Omega)}}
\end{aligned}$$

con $C = \lambda \, ||w||_\infty \, ||\varphi||_\infty \, M_1 \gamma(\Omega)$.
Luego, gracias 2.27 y a que $w > 0$ en $\text{supp}(\varphi)$, entonces

$$\lim_{n \to +\infty} w(x) |u_n|^{p-2} |v_n| |\varphi| = w(x) |\varphi| \lim_{n \to +\infty} |u_n|^{p-2} \lim_{n \to +\infty} |v_n| = +\infty$$

Así para todo $\epsilon > 0$, existe N_ϵ,

$$\int_{supp(\varphi) \cap A_{\delta_\epsilon}} w(x) |u_n(x)|^{p-2} |v_n(x)| |\varphi(x)| dx \geq \epsilon \gamma(supp(\varphi) \cap A_{\delta_\epsilon})$$

Dado que $\epsilon > 0$ es arbitrario se sigue que

$$\lim_{n \to +\infty} \lambda \int_{supp(\varphi) \cap A_{\delta_\epsilon}} w(x) |u_n|^{p-2} v_n |\varphi| dx = +\infty$$

De esto y tendiendo $n \to +\infty$ se sigue que $b_n \to -\infty$, sin embargo de 2.28 $b_n \to 0$, lo cual es absurdo. Así se sigue el resultado. $\square$

Observación 22. El lema anterior establece que cualquier sucesión de $(PS)_c$ para I está acotada, cuando Ω es conexo, entonces de la proposición 2.10 se sigue que posee una subsucesión convergente, así se ha mostrado que I satisface la condición de $(PS)_c$.

Debido a que no es necesaria la coercividad del funcional, J, para mostrar que I satisface la condición de $(PS)_c$, es claro que $I : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ también satisface la condición de $(PS)_c$, cuando f presente un crecimiento supercuadrático y subcrítico. Sin embargo, si se realiza una demostración para este caso particular, basta mostrar que cualquier sucesión de $(PS)_c$ está acotada, esto ya que se puede obtener el gradiente de I y escribir

$$u = \nabla I(u) - \lambda \nabla \Phi(u) \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$ [5]

Entonces se puede deducir fácilmente que esta sucesión posee una subsucesión convergente, gracias a las propiedades de sucesión $(PS)_c$

[5] Ver Anexos sección C.3

Capítulo 3

Existencia de soluciones débiles para problemas elípticos semilineales con peso indefinido

En este capítulo se analizará la existencia de soluciones débiles del problema 2.1. Del capítulo anterior, se sabe que cuando $\int_\Omega q(x)dx > 0$, $\boldsymbol{a}$ es coerciva, por el contrario si $\int_\Omega q(x)dx = 0$, entonces $\boldsymbol{a}$ no lo es[1].
De esta diferencia surgen dos problemas diferentes; el primer caso, será conocido como el caso coercivo, mientras que el segundo, como el caso no coercivo.

3.1. Caso coercivo

En esta sección se trabajará con el funcional I, cuando $\int_\Omega q(x)dx > 0$, es decir, cuando la forma bilineal, $\boldsymbol{a}$, es coerciva. Como ésta además es simétrica, positiva y continua[2], se puede escribir

$$I(u) = \frac{1}{2}\,||u||_{\boldsymbol{a}}^2 - \lambda\Phi(u) \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

Observación 23. A menudo se usará el siguiente hecho

$$I(0) = 0,$$

el cual se obtiene directamente de la definicón de norma y $F(0) = 0$.

[1]Ver corolario 2.4 y observación 18.
[2]Ver la demostración de la proposición 2.2

Se puede notar que si $\lambda = 0$, el único punto crítico de I es $u = 0$[3]. De esta manera, se analizará los puntos críticos del funcional I, cuando $\lambda > 0$.

Adicionalmente, de la propiedad f_1 se sabe que $f(0) = 0$, por lo tanto es claro que 0 es un punto crítico de I. El siguiente resultado afirma que 0 es un mínimo local de I.

Proposición 3.1. Si $\int_\Omega q(x)dx > 0$ y $f \in C^1(\mathbb{R})$ satisface f_1 y f_4. Entonces 0 es un mínimo local estricto de I.

Demostración. Para mostrar que 0 es un mínimo local de I, se mostrará que I satisface las hipótesis del teorema 1.4.
Se empieza mostrando que I es dos veces diferenciable en 0. Recordando que

$$I(u) = \frac{1}{2}J(u) + \lambda\Phi(u) \quad u \in H^1(\Omega).$$

Del ejemplo 3 se sabe que J es dos veces diferenciable en $H^1(\Omega)$, con;

$$J''(u)(v, v_1) = 2\boldsymbol{a}(v_1, v) \quad \forall u, v, v_1 \in H^1(\Omega).$$

Ahora, se verá que Φ es dos veces diferenciable en 0. Para ello se mostrará primero que Φ' es Gâteaux diferenciable en 0.
Sean $v, v_1 \in H^1(\Omega)$. Como f satisface f_4, entonces $\Phi'(0) = 0$[4], así se tiene:

$$D_G(\Phi'(0)v)v_1 = \lim_{t\to 0} \frac{\Phi'(0 + tv_1)v - \Phi'(0)v}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\Phi'(tv_1)v}{t}.$$

Luego, de la propiedad f_4 se sigue:

$$\lim_{t\to 0} \frac{w(x)f(tv_1)v}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{w(x)f(tv_1)v_1 v}{tv_1} = w(x)v_1 v \lim_{t\to 0} \frac{f(tv_1)}{tv_1} = 0 \tag{3.1}$$

y que existe una contante $M > 0$, tal que $\left|\frac{f(tv_1)}{tv_1}\right| \leq M$ para t suficientemente pequeño, así se obtiene

$$\left|\frac{w(x)f(tv_1)v}{t}\right| = w(x)v_1 v \left|\frac{f(tv_1)}{tv_1}\right| \leq w(x)v_1 vM. \tag{3.2}$$

[3] Si $\lambda = 0$, para todo $u \in H^1(\Omega)$ se tiene $I(u) = \frac{1}{2}||u||_{\boldsymbol{a}}^2$, por tanto si $I'(u) = \boldsymbol{a}(u, v) = 0$ para todo $v \in H^1(\Omega)$, entoces $u = 0$. La unicidad se sigue del hecho de que la norma es extrictamente convexa.

[4] Si se satisface f_1, $\Phi'(0)v = \int_\Omega w(x)f(0)vdx = 0$ para todo $v \in H^1(\Omega)$.

De la desigualdad de Cauchy y la desigualdad 2.6, $Mw(x)v_1v \in L^1(\Omega)$, pues

$$\begin{aligned}\int_\Omega M|w(x)v_1v|dx &\leq M\,||w||_\infty \int_\Omega |v_1v|dx \leq M\,||w||_\infty\,||v_1||_2\,||v||_2 \\ &\leq M\,||w||_\infty\,||v_1||_{H^1(\Omega)}\,||v||_{H^1(\Omega)}\,.\end{aligned}$$

Entonces de las ecuaciones 3.1 y 3.2, por el teorema de convergencia dominada se sigue

$$D_G(\Phi'(0)v)v_1 = \lim_{t\to 0}\int_\Omega \frac{w(x)f(tv_1)v}{t}dx = \int_\Omega \lim_{t\to 0}\frac{w(x)f(tv_1)v}{t}dx = 0.$$

Dado que v, v_1 fueron arbitrarios, se sigue que $D_G(\Phi'(0)) = 0$, con lo cual es claro que es continua en 0, por lo tanto $\Phi''(0) = 0$.
En consecuencia I es dos veces dierenciable en 0 con:

$$I''(0)(v, v_1) = \boldsymbol{a}(v, v_1) \quad \forall v, v_1 \in H^1(\Omega).$$

Así se sigue directamente que $I''(0)(v, v)$ es coercivo, pues $\boldsymbol{a}$ lo es.
Además como $\Phi'(0) = 0$, entonces

$$I'(0)v = \boldsymbol{a}(0, v) + \lambda\Phi'(0)v = 0 \quad \forall v \in H^1(\Omega),$$

es decir, $I'(0) = 0$. Por tanto se sigue el resultado. □

Precisando de una vez, se trabajará con los valores propios $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ del operador $-\mathrm{div}(h(x)\nabla) + q(x)$, con condiciones de Neumann homogéneas, y sus vectores propios asociados $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, los cuales forman una base hilbertiana para $L^2(\Omega)$ y ortogonal para $H^1(\Omega)$ y cuyo vector propio asociado al primer valor propio es simple y positivo[5].

3.1.1. Crecimiento subcuadrático

Aquí se estudiará I cuando f tiene un crecimiento subcuadrático, es decir, cuando $0 < \sigma + 1 < 2$. Se obtendrá al menos dos soluciones no triviales de 2.3 distintas. Esto, debido a que 0 es mínimo local de I, entonces el teorema 1.14 nos dice que si se encuentra un mínimo de I diferente de 0, entonces se puede hallar un punto crítico del tipo paso de la montaña.
Por lo tanto se empieza mostrando que I es coercivo.

[5] Ver Anexos sección B.1.

Lema 3.2. Si f satisface f_3 con $0 < \sigma + 1 < 2$, entonces I es coercivo.

Demostración. Si f satisface f_3 con $0 < \sigma + 1 < 2$, entonces por F_5 y del teorema 1.27, se tiene

$$\begin{aligned}
I(u) &= \frac{1}{2}\,||u||_a^2 - \lambda \int_\Omega w(x)F(u)dx \geq \frac{1}{2}\,||u||_a^2 - |\lambda|\,||w||_\infty \int_\Omega (\bar{a}|u| + b_1|u|^{\sigma+1})dx \\
&= \frac{1}{2}\,||u||_a^2 - |\lambda|\,||w||_\infty \left(\bar{a}\,||u||_1 + b_1\,||u||_{\sigma+1}^{\sigma+1}\right) \\
&\geq \frac{1}{2}\,||u||_a^2 - |\lambda|\,||w||_\infty \left(\bar{a}C_1\,||u||_a + b_1 C_{\sigma+1}\,||u||_a^{\sigma+1}\right) \\
&\geq \frac{1}{2}\,||u||_a^2 - |\lambda|\,||w||_\infty \max\{\bar{a}C_1, b_1 C_{\sigma+1}\} \left(||u||_a + ||u||_a^{\sigma+1}\right)
\end{aligned}$$

para todo $u \in H^1(\Omega)$.

Como $0 < \sigma + 1 < 2$, entonces el primer término crece más rápido que los términos negativos.
Así, de la desigualdad anterior, se puede concluir que I es coercivo

$$\lim_{||u||_{H^1(\Omega)} \to +\infty} I(u) = +\infty.$$

□

Lema 3.3. Suponiendo que $f \in C^1(\mathbb{R})$ satisface f_3 con $0 < \sigma + 1 < 2$, entonces I posee un mínimo global.

Demostración. Si f satisface f_3, entonces por la proposición 2.9 y el lema 3.2, se tiene que I es diferenciable, débilmente semicontinuo inferior y coercivo. Dado que $H^1(\Omega)$ es reflexivo, entonces del teorema 1.6, se sigue que I posee un mínimo global.
Así existe $u_1 \in H^1(\Omega)$ tal que $I(u_1) = \min_{v \in H^1(\Omega)} I(v)$. □

Como se mencionó anteriormente 0 es mínimo local de I, por lo tanto 0 podría ser mínimo global de I.
Por ello siguiendo las ideas de [25], se mostrará que para $\lambda > 0$ suficientemente pequeño, el único mínimo global de I es 0 y para $\lambda > 0$ suficientemente grande, el mínimo global de I es diferente de 0.

Teorema 3.4. Si $f \in C^1(\mathbb{R})$ satisface $f_1 - f_3$ con $0 < \sigma + 1 < 2$, f_4 y f_6, entonces existe $\lambda^* > 0$, tal que para todo $0 < \lambda < \lambda^*$, el único mínimo global de I es 0.

Demostración. Para empezar, se mostrará que existe $\lambda^* > 0$ tal que, I es estrictamente convexo para todo $0 < \lambda < \lambda^*$.
Sean $u, v \in H^1(\Omega)$ tales que $u \neq v$, como f satisface f_6 y de la desigualdad B.9, se tiene

$$\begin{aligned}
\left(I'(u) - I'(v)\right)(u - v) &= I'(u)(u - v) - I'(v)(u - v) \\
&= \boldsymbol{a}(u, u - v) - \lambda\Phi'(u)(u - v) - \boldsymbol{a}(v, u - v) + \lambda\Phi'(v)(u - v) \\
&= \boldsymbol{a}(u - v, u - v) - \lambda \int_\Omega w(x)\left(f(u) - f(v)\right)(u - v)dx \\
&= ||u - v||_{\boldsymbol{a}}^2 - \lambda \int_\Omega w(x)\frac{f(u) - f(v)}{u - v}(u - v)^2 dx \\
&\geq \lambda_1 ||u - v||_2^2 - \lambda ||w||_\infty \int_\Omega \frac{f(u) - f(v)}{u - v}(u - v)^2 dx \\
&\geq \lambda_1 ||u - v||_2^2 - \lambda ||w||_\infty \beta \int_\Omega (u - v)^2 dx \\
&= (\lambda_1 - \lambda ||w||_\infty \beta) ||u - v||_2^2 .
\end{aligned}$$

Tomando $\lambda^* := \frac{\lambda_1}{\beta ||w||_\infty}$, se tiene que si $0 < \lambda < \lambda^*$, entonces $(\lambda_1 - \lambda ||w||_\infty \beta) > 0$ y como $u \neq v$, se tiene

$$\left(I'(u) - I'(v)\right)(u - v) > 0,$$

así I es estrictamente convexo.

Por lo tanto, el mínimo global de I es único y, como 0 es un punto crítico de I, se sigue 0 es el mínimo global de I, siempre que $0 < \lambda < \lambda^*$. □

Lema 3.5. Sea $0 < \sigma + 1 < 2$. Si $\int_\Omega w(x)dx > 0$ y f satisface f_2 y f_6, entonces existe $\underline{\lambda} > 0$ tal que $\lambda > \underline{\lambda}$, el mínimo global de I es diferente de 0.

Demostración. De la hipótesis f_2, se sabe que $f \geq 0$ en $\mathbb{R}^+$ y $f \neq 0$, así existe $s_0 > 0$ tal que $f(s_0) > 0$, por lo tanto se sigue que $F(s) > 0$, para todo $s > s_0$.

Sea $s > s_0$, como las funciones constantes pertenecen al espacio $H^1(\Omega)$, entonces de la definición de I se tiene

$$\begin{aligned}
I(s) &= \frac{1}{2} ||s||_{\boldsymbol{a}}^2 - \lambda \int_\Omega w(x)F(s)dx \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_\Omega h(x)|\nabla s|^2 dx + \int_\Omega q(x)s^2 dx\right) - \lambda F(s) \int_\Omega w(x)dx. \\
&= \frac{1}{2}s^2 \int_\Omega q(x)dx - \lambda F(s) \int_\Omega w(x)dx.
\end{aligned}$$

Dado que $\int_\Omega w(x)dx > 0$, entonces $F(s)\int_\Omega w(x)dx > 0$.
Así para todo $s > s_0$

$$\lambda > \frac{s^2}{2F(s)} \frac{\int_\Omega q(x)dx}{\int_\Omega w(x)dx} > 0,$$

se tiene que $I(s) < 0$ y en consecuencia

$$\min_{v \in H^1(\Omega)} I(v) \leq I(s) < 0.$$

Fijando $s_1 > s_0$ y tomando

$$\bar{\lambda} := \frac{s_1^2}{2F(s_1)} \frac{\int_\Omega q(x)dx}{\int_\Omega w(x)dx} > 0,$$

entonces para todo $\lambda > \bar{\lambda}$, $I(u_1) < 0 = I(0)$.
Así 0 no puede ser el mínimo global y en consecuencia $u_1 \neq 0$. □

Observación 24. Si f satisface f_6 y $q, w \in L^\infty(\Omega)$ satisfacen $\int_\Omega q(x)dx$, $\int_\Omega w(x)dx > 0$, entonces

$$\lambda^* < \underline{\lambda}.$$

Esto, ya que si f satisface f_6, entonces se tiene que

$$\frac{f(t)}{t} = \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} \leq \beta, \quad \forall t > 0,$$

de esto se obtiene

$$\frac{F(t)}{t^2} \leq \frac{1}{2}\beta, \quad \forall t > 0. \tag{3.3}$$

Además como $w \in L^\infty(\Omega)$, entonces se tiene la siguiente desiguadad

$$\int_\Omega w(x)dx \leq ||w||_\infty \gamma(\Omega). \tag{3.4}$$

Luego por el teorema B.2, se sabe que $\lambda_1 \geq \frac{||u||_a^2}{||u||_2^2}$ para todo $u \in H^1(\Omega)$. En particular para una constante $c \neq 0$, se obtiene

$$\lambda_1 \leq \frac{||c||_a^2}{||c||_2^2} = \frac{\int_\Omega h(x)|\nabla c|^2 dx + \int_\Omega q(x)c^2 dx}{\int_\Omega c^2 dx} = \frac{c^2 \int_\Omega q(x)dx}{c^2 \gamma(\Omega)}$$

y que $\lambda_1 = \frac{||\xi_1||_a^2}{||\xi_1||_2^2}$ si y solo si ξ_1 es el primer vector propio asociado a λ_1, entonces

$$\lambda_1 < \frac{\int_\Omega q(x)dx}{\gamma(\Omega)} \tag{3.5}$$

Así de las ecuaciones 3.3, 3.4 y 3.5, se tiene el resultado

$$\lambda^* = \frac{\lambda_1}{||w||_\infty \beta} < \frac{\int_\Omega q(x)dx}{||w||_\infty \beta\gamma(\Omega)} \leq \frac{\int_\Omega q(x)dx}{\int_\Omega w(x)\beta} \leq \frac{s_1^2}{2F(s_1)} \frac{\int_\Omega q(x)dx}{\int_\Omega w(x)} = \underline{\lambda}.$$

A continuación, se mostrará que existe $\bar{\lambda} > 0$, tal que para todo $\underline{\lambda} < \lambda < \bar{\lambda}$, el funcional I posee al menos dos soluciones diferentes. Sin embargo este resultado no es posible demostrar de manera general y, se requiere definir hipótesis técnicas en los datos q y w. Para ello se usará lo siguiente.

Observación 25. Como 0 es mínimo local estricto, existe $\bar{\rho} > 0$, tal que

$$I(u) > 0 \quad \forall u \in H^1(\Omega), ||u||_{H^1(\Omega)} < \bar{\rho}.$$

Por otro lado, de la demostración del lema 3.2 se obtiene la siguiente desigualdad

$$I(u) \geq \frac{1}{2}\,||u||_a^2 - \lambda\,||w||_\infty\,\kappa\left(||u||_a + ||u||_a^{\sigma+1}\right) \quad \forall u \in H^1(\Omega),$$

con $\kappa := \text{máx}\{\bar{a}C_1, b_1C_{\sigma+1}\}$ y $\lambda > 0$.

Teorema 3.6. Sea $0 < \rho < \bar{\rho}$ y sean $w, q \in L^\infty(\Omega)$ como en el problema 2.1, tales que:

- $\int_\Omega w(x)dx > 0$
- $\int_\Omega q(x)dx < \frac{F(s_1)}{s_1^2}\rho^2 \int_\Omega w(x)dx$
- $||w||_\infty \leq \frac{\kappa}{\rho+\rho^{\sigma+1}}$.

Si además que $f \in C^1(\Omega)$ satisface $f_1 - f_4$ con $0 < \sigma + 1 < 2$, entonces existen $\underline{\lambda}$, $\bar{\lambda} > 0$, tal que para todo $\underline{\lambda} < \lambda < \bar{\lambda}$, el problema 2.1 posee al menos dos distintas soluciones débiles no nulas.

Demostración. Una de las soluciones se hallará mediante el teorema del paso de la montaña, para ello se empieza viendo que I satisface la condición de $(PS)_c$, para cualquier $c \in \mathbb{R}$.
Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de $(PS)_c$, es decir, una sucesión tal que

i $I(u_n) \to c$ en $\mathbb{R}$

ii $I'(u_n) \to 0$ en $(H^1(\Omega))^*$

Del ítem *ii* se tiene $I'(u_n)u_n \to 0$ en $\mathbb{R}$, por lo tanto de *i*, existen constantes
$M_1, M_2 > 0$, tales que

$$\left|\frac{1}{2}\,||u_n||_a^2 - \lambda \int_\Omega w(x)F(u_n)dx\right| \leq M_1 \quad \text{y} \quad \left|||u_n||_a^2 - \lambda \int_\Omega w(x)f(u_n)u_ndx\right| \leq M_2$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sea $n \in \mathbb{N}$, sumando ambas desigualdades y tomando $C = \text{máx}\{M_1, M_2\}$, se tiene

$$\frac{3}{2}\,||u_n||_{a}^{2} - \lambda \int_{\Omega} w(x)\,(F(u_n) + f(u_n)u_n)\,dx \leq C.$$

De las propiedades f_3 y el teorema 1.27 se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{3}{2}\,||u_n||_{a}^{2} &\leq C + \lambda \int_{\Omega} w(x)\,(F(u_n) + f(u_n)u_n)\,dx \\
&\leq C + \lambda \int_{\Omega} |w(x)F(u_n) + f(u_n)u_n|dx \\
&\leq C + \lambda\,||w||_{\infty} \left(\int_{\Omega} |F(u_n)|dx + \int_{\Omega} |f(u_n)u_n|dx \right) \\
&\leq C + \lambda\,||w||_{\infty} \left(\bar{a} \int_{\Omega} |u_n|dx + b_1 \int_{\Omega} |u_n|^{\sigma+1}dx + \bar{a} \int_{\Omega} |u_n|dx + b \int_{\Omega} |u_n|^{\sigma+1}dx \right) \\
&\leq C + \lambda\,||w||_{\infty} \left(2\bar{a} \int_{\Omega} |u_n|dx + (b_1 + b) \int_{\Omega} |u_n|^{\sigma+1}dx \right) \\
&\leq C + \lambda\,||w||_{\infty} \left(2\bar{a}C_1\,||u_n||_{a} + (b_1 + b)C_{\sigma+1}\,||u_n||_{a}^{\sigma+1} \right),
\end{aligned}$$

es decir se obtiene la siguiente desigualdad.

$$\frac{3}{2}\,||u_n||_{a}^{2} - (\kappa_1\,||u_n||_{a} + \kappa_2\,||u_n||_{a}^{\sigma+1}) \leq C, \tag{3.6}$$

con $\kappa_1 := \lambda\,||w||_{\infty}\,2\bar{a}C_1$ y $\kappa_2 := \lambda\,||w||_{\infty}\,(b_1 + b)C_{\sigma+1}$.

De esto se puede concluir que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada, en efecto, si no estuviese acotada, se tendría;

$$||u_n||_{a} \to +\infty.$$

Como $0 < \sigma + 1 < 2$ y, dado que el crecimiento cuadrádico es más rápido que el lineal, se sigue

$$\frac{3}{2}\,||u_n||_{a}^{2} - (\kappa_1\,||u_n||_{a} + \kappa_2\,||u_n||_{a}^{\sigma+1}) \to +\infty,$$

lo que contradice la equiación 3.6. Así la sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada, en consecuencia por la proposición 2.10, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ posee una subsucesión convergente, es decir, I satisface la condición de $(PS)_c$.

Ahora se verá que I posee una estructura del teorema del paso de la montaña.

Sea $0 < \rho < \bar{\rho}$, de la observación 25, se tiene

$$I(u) \geq 0 \quad \forall u \in H^1(\Omega), ||u||_{H^1(\Omega)} = \rho$$

y

$$I(u) \geq \frac{1}{2} ||u||_a^2 - \lambda ||w||_\infty \kappa \left(||u||_a + ||u||_a^{\sigma+1} \right) \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

En particular para $||u||_{H^1(\Omega)} = \rho$ y como $||w||_\infty \leq \frac{\kappa}{\rho+\rho^{\sigma+1}}$

$$I(u) \geq \frac{1}{2}\rho^2 - \lambda ||w||_\infty \kappa \left(\rho + \rho^{\sigma+1} \right) \geq \frac{1}{2}\rho^2 - \lambda,$$

entonces tomando $\bar{\lambda} := \frac{1}{2}\rho^2 > 0$, se tiene que para todo $\lambda < \bar{\lambda}$

$$\alpha := \frac{1}{2}\rho^2 - \lambda ||w||_\infty \kappa \left(\rho + \rho^{\sigma+1} \right) > 0,$$

es decir, cuando $\lambda < \bar{\lambda}$, I satisface I_1.

Luego, del lema anterior, existe $\underline{\lambda} > 0$ tal que para todo $\lambda > \underline{\lambda}$, la solución débil de 2.1, $u_1 \in H^1(\Omega)$, satisface que $I(u_1) < 0$, entonces $||u_1||_{H^1(\Omega)} > \bar{\rho} > \rho$, así tomando $e = u_1$ se tiene que I satisface I_2.

Hasta aquí se tiene que I posee una geometría del paso de la montaña, para todo $\underline{\lambda} < \lambda < \bar{\lambda}$. Por lo tanto, para completar la demostración, se verificará que, en efecto, $\underline{\lambda} < \bar{\lambda}$.

Como $\int_\Omega q(x)dx < \frac{F(s_1)}{s_1}\rho^2 \int_\Omega w(x)dx$, se tiene

$$\underline{\lambda} = \frac{s_1^2}{2F(s_1)} \frac{\int_\Omega q(x)dx}{\int_\Omega w(x)dx} < \frac{1}{2}\rho^2 = \bar{\lambda}.$$

Finalmente se sigue que c_p es un nivel crítico, $c_p \geq \alpha > 0$, es decir, existe $u_2 \in H^1(\Omega)$, $u \neq 0$ $I(u_2) = c_p$. Dado que $I(u_1) < 0$ y $I(u_2) > 0$, entonces u_1 y u_2 son diferentes entre si y diferentes de 0, así se sigue el resultado. □

Observación 26. Con respecto al caso Dirichlet, puesto que la forma bilineal, $\boldsymbol{a}$, siempre es coerciva y, dado que $H^1(\Omega)$ y $H_0^1(\Omega)$ satisfacen las mismas propiedades, entonces el teorema 3.6 se satisface para el problema 2.1 con condiciones Dirichlet.

Por otro lado, como la diferencia entre estos espacio es que las constantes pueden ser elementos de $H^1(\Omega)$, pero no de $H_0^1(\Omega)$, (excepto la constante 0). Entonces para demostrar el lema 3.5, se debe suponer que $\mathrm{int}(\Omega_+) \neq \emptyset$ y tomar $\varphi \in C_c^1(\Omega)$ tal que $\mathrm{supp}(\varphi) \subset \mathrm{int}(\Omega_+)$. Con esto se obtiene

$$I(\varphi) = \frac{1}{2} ||\varphi||_a - \lambda \int_{supp(\varphi)} w(x) F(\varphi) dx.$$

De esta igualdad y, como $\int_{supp(\varphi)} w(x)F(\varphi)dx > 0$, entonces se puede tomar

$$\underline{\lambda} := \text{ínf} \left\{ \lambda > 0, \min_{v \in H_0^1(\Omega)} I(v) < 0 \right\}$$

y así se sigue que para todo $\lambda > \underline{\lambda}$, el mínimo global de I es diferente de cero.

Además también se puede mostra que λ^* es una cota inferior del conjunto

$$B := \left\{ \lambda > 0, \min_{v \in H_0^1(\Omega)} I(v) < 0 \right\}$$

y que éste alcanza su ínfimo, por lo tanto se obtiene $\lambda^* < \underline{\lambda}$.

Sin embargo, no es posible comparar los valores $\bar{\lambda}$ y $\underline{\lambda}$. Por lo tanto solo se puede afirmar que el problema 2.1 con condiciones Dirichet, posee una solución débil no trivial, cuando $\lambda > \underline{\lambda}$.

3.1.2. Crecimiento subcrítico

Aquí se estudiará el problema cuando $2 < \sigma + 1 < 2^*$. En este caso el funcional I no está acotado por abajo, entonces no se puede afirmar la existencia de un mínimo global diferente de 0 y así con las herramientas del capítulo 1, únicamente se puede determinar al menos un punto crítico, no nulo, de I.
Para los resultados obtenidos en esta parte se supondrá que $0 < \lambda < \lambda_1$.

Lema 3.7. Sean $0 < \lambda < \lambda_1$ y $2 < \sigma < 2^*$. Si f satisface f_3 y f_4, entonces I satisface I_1.

Demostración. Se sabe que $I(0) = 0$.

Sea $\epsilon > 0$, por f_{4_1} existe $\delta_\epsilon > 0$, tal que

$$F(t) \leq \epsilon t^2 \quad \text{para} \quad \text{todo} \quad |t| < \delta_\epsilon.$$

Luego de F_5 se sabe que existen constantes $\bar{a}, b_1 > 0$, tales que

$$|F(t)| \leq \bar{a}t + b_1|t|^{\sigma+1} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

De estas dos desigualdades se puede mostrar que para todo $\epsilon > 0$ existe una constante $C_\epsilon > 0$, tal que

$$|F(t)| \leq \epsilon t^2 + C_\epsilon |t|^{\sigma+1} \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{3.7}$$

Sea $u \in H^1(\Omega)$.
Por las desigualdes 3.7 y B.9 junto con teorema 1.27, se obtiene

$$\begin{aligned}
\Phi(u) \leq |\Phi(u)| &\leq \int_\Omega |w(x)||F(u)|dx \leq ||w||_\infty \int_\Omega (\epsilon u^2 + C_\epsilon |u|^{\sigma+1})dx \\
&= ||w||_\infty \left(\epsilon \, ||u||_2^2 + C_\epsilon \, ||u||_{\sigma+1}^{\sigma+1}\right) \\
&\leq ||w||_\infty \left(\epsilon \frac{1}{\lambda_1} \, ||u||_a^2 + C_\epsilon C \, ||u||_a^{\sigma+1}\right).
\end{aligned}$$

Sea $0 < \bar{\epsilon} < \frac{1}{4}$, como $\lambda < \lambda_1$ entoces

$$\frac{1}{2} - \bar{\epsilon}\frac{\lambda}{\lambda_1} > \frac{1}{2} - \bar{\epsilon} > \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4},$$

tomando $\epsilon = \frac{\bar{\epsilon}}{||w||_\infty} > 0$, se tiene

$$\begin{aligned}
I(u) &\geq \left(\frac{1}{2} - \bar{\epsilon}\frac{\lambda}{\lambda_1}\right) ||u||_a^2 - ||w||_\infty \, \lambda C_\epsilon C \, ||u||_a^{\sigma+1} \\
&> \frac{1}{4} \, ||u||_a^2 - ||w||_\infty \, \lambda_1 C_\epsilon C \, ||u||_a^{\sigma+1} := \frac{1}{4} \, ||u||_a^2 - \bar{C} \, ||u||_a^{\sigma+1}
\end{aligned}$$

con $\bar{C}$ constante positiva.
Tomando $0 < \rho < \left(\frac{1}{4\bar{C}}\right)^{\frac{1}{\sigma-1}}$ se tiene que $\alpha := \frac{1}{4}\rho^2 - \bar{C}\rho^{\sigma+1} > 0$.
Así, se sigue que para todo $u \in H^1(\Omega)$, tal que $||u||_a = \rho$, entonces $I(u) \geq \alpha$. $\square$

Observación 27. De la demostración del teorema anterior, se puede notar que: si $\lambda < 0$ el funcional I no satisface las hipótesis del teorema del paso de la montaña.

Lema 3.8. Sean $\lambda > 0$. Si $\text{int}(\Omega_+) \neq \emptyset$ y f satisface f_1, f_2 y f_5, entonces I satisface I_2.

Demostración. Sea $\varphi \in C_c(\Omega)$, no nula, tal que $\text{supp}(\varphi) \subset\text{int}(\Omega_+)$, tomando $\psi := \frac{|\varphi|}{||\varphi||_a}$, es claro que $\text{supp}(\varphi) = \text{supp}(\psi)$[6].

[6] Ya que $|t| \neq 0$ si y solo si $t \neq 0$.

Sean $t > 0$ y $\epsilon > 0$ en el lema 2.11, tal que el conjunto

$$A_{\delta_\epsilon} = \{x \in supp(\psi); t\psi(x) \geq \delta_\epsilon, \}$$

sea diferente de vacío.
Como $w \in L^\infty(\Omega)$ entonces se sabe que

$$w(x) \leq |w(x)| \leq ||w||_\infty \quad \forall x \in \Omega. \tag{3.8}$$

Así gracias a la monotonía de la integral y a las observaciones 31, 9 y 21 se obtiene las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned}
I(t\psi) &= \frac{1}{2}\,||t\psi||_a^2 - \lambda \int_{supp(\psi)} w(x)F(t\psi)dx \\
&= \frac{1}{2}\,||t\psi||_a^2 - \lambda \int_{(A_{\delta_\epsilon})^c} w(x)F(t\psi)dx - \lambda \int_{A_{\delta_\epsilon}} w(x)F(t\psi)dx \\
&\leq \left|\frac{1}{2}\,||t\psi||_a^2 - \lambda \int_{(A_{\delta_\epsilon})^c} w(x)F(t\psi)dx\right| + \lambda \int_{A_{\delta_\epsilon}} w(x)\left(\frac{\epsilon}{2}|t\varphi|^2 - \frac{\epsilon}{p}|t\psi|^p\right)dx \\
&\leq \frac{1}{2}\,||t\psi||_a^2 + \lambda \int_{(A_{\delta_\epsilon})^c} |w(x)||F(t\psi)|dx + \lambda\frac{\epsilon}{2}t^2 \int_{A_{\delta_\epsilon}} w(x)|\psi|^2 dx \\
&- \lambda\frac{\epsilon}{p}t^p \int_{A_{\delta_\epsilon}} w(x)|\psi|^p dx \\
&\leq \frac{1}{2}\,||t\psi||_a^2 + \lambda\,||w||_\infty \int_{(A_{\delta_\epsilon})^c} F(t\psi)dx + \lambda\frac{\epsilon}{2}t^2\,||w||_\infty \int_\Omega |\psi|^2 dx \\
&- \lambda\frac{\epsilon}{p}t^p \int_{A_{\delta_\epsilon}} w(x)|\psi|^p dx \\
&\leq -t^p\lambda\frac{\epsilon}{p}\int_{A_{\delta_\epsilon}} w(x)|\psi|^p dx + t^2\frac{1}{2}\left(1 + \lambda\,||w||_\infty\,\epsilon\frac{1}{C_\theta}\right)||\psi||_a^2 + \lambda\,||w||_\infty\, M\gamma((A_{\delta_\epsilon})^c) \\
&\leq -t^p\lambda\frac{\epsilon}{p}\int_{A_{\delta_\epsilon}} w(x)|\psi|^p dx + t^2\frac{1}{2}\left(1 + \lambda\,||w||_\infty\,\epsilon\frac{1}{C_\theta}\right) + \lambda\,||w||_\infty\, M\gamma(\Omega) \\
&\leq -t^p\bar{C} + t^2\bar{C}_1 + \bar{C}_2.
\end{aligned}$$

De la definición de A_{δ_ϵ}, se sabe que $A_{\delta_\epsilon} \subset$supp$(\psi) \subset$int$(\Omega_+) \subset \Omega_+$. Por lo tanto

$$\int_{A_{\delta_\epsilon}} w(x)|\varphi|^p dx > 0,$$

entonces $\bar{C} > 0$.

Dado que $p > 2$, se puede tomar $\bar{t} > 0$ suficientemente grande tal que $I(\bar{t}\bar{\psi}) < 0$. Entonces tomando $e = (\bar{t} + \rho)\bar{\psi}$, es claro que

$$I(e) < 0 < \alpha \text{ y } ||e||_a = (\bar{t} + \rho)\,||\bar{\psi}||_a = (\bar{t} + \rho) > \rho,$$

es decir, I satisface I_2. $\square$

Teorema 3.9. Sean $0 < \lambda < \lambda_1$, $f \in C^(\mathbb{R})$ tal que satisface las propiedades $f_1 - f_3$, con $\sigma + 1 < 2^*$ y $f_4 - f_5$. Si $\text{int}(\Omega_+) \neq \emptyset$, entonces el problema 2.3 posee al menos una solución no nula.

Demostración. De los lemas 3.7 y 3.8, I posee una geometría del paso de la montaña y como I satisface la condición de $(PS)_c$, entonces del teorema 1.12, el número $c_p > 0$ es un valor crítico, es decir, existe $u \in H^1(\Omega)$, $u \neq 0$. $\square$

3.2. Caso no coercivo

Aquí se trabajará con el funcional I, cuando $\int_\Omega q(x)dx = 0$, es decir, cuando $q(x) = 0$ c.t.p. en Ω. Así el funcional a tratar es el siguiente:

$$I(u) = \frac{1}{2}J_h(u) - \lambda\Phi(u) \quad \forall u \in H^1(\Omega),$$

donde

$$J_h(u) = \boldsymbol{a}_h(u,u), \quad \boldsymbol{a}_h(u,v) = \int_\Omega h(x)\nabla u \cdot \nabla v dx \quad \forall u, v \in H^1(\Omega)$$

y su derivada

$$I'(u)v = \int_\Omega h(x)\nabla u \cdot \nabla v dx - \lambda \int_\Omega w(x)f(u)v dx \quad \forall u, v \in H^1(\Omega).$$

De esto se sigue la siguiente observación.

Observación 28.

- Si f satisface f_1, entonces cualquier constante $c \leq 0$ es un punto crítico de I.
- Si $\lambda = 0$, entonces cualquier constante $c \in \mathbb{R}$ es un punto crítico de I.
- Si $\lambda \neq 0$ y f satisface f_2, entonces las constantes positivas, $c > 0$ tales que $f(c) \neq 0$, no pueden ser puntos críticos de I.
  En efecto, si se supone por absurdo que $c > 0$ constante es punto crítico de I, entonces
  $$\lambda \int_\Omega w(x)f(c)v dx = 0 \quad \forall v \in H^1(\Omega),$$
  como $\lambda \neq 0$ y f satisface f_2, se sigue que
  $$\int_\Omega w(x)v dx = 0 \text{ para todo } v \in H^1(\Omega).$$

En particular tomando $\varphi \in C_c^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega w(x)\varphi dx = 0,$$

así por el lema 1.19 $w = 0$ c.t.p. en Ω, lo cual es absurdo pues w cambia de signo.

De esta manera, se analizará los puntos críticos del funcional I, cuando $\lambda > 0$.

Del mismo modo se trabajará con los valores propios $\lambda_0 = 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$ del operador $-\text{div}(h(x)\nabla)$, con condiciones de Neumann homogéneas, y sus vectores propios asociados $\{\xi_k\}_{k=0}^\infty$, los cuales forman una base hilbertiana para $L^2(\Omega)$, mientras que $\left\{\xi_0, \frac{\xi_k}{\sqrt{\lambda_k}}\right\}_{k=1}^\infty$, forma una base ortonormal para $H^1(\Omega)$[7].

Dado que $\lambda_0 = 0$, I no posee una geometría del paso de la montaña, pues en ese caso, se tiene $\lambda < \lambda_0 = 0$.

Realizadas estas observaciones, se procede a mostrar la existenicia de al menos un punto crítico no trivial del funcional I, cuando el dato no lineal presenta un crecimiento, $2 < \sigma + 1 < 2^*$. Ya que cuando $0 < \sigma + 1 < 2$ no se satisfacen las hipótesis de los teoremas de linking y mediante los métodos directos del cálculo de variaciones, la hipótesis de coercividad falla[8].

Se trabajará con los siguientes conjuntos

$$V = \text{span}\{\xi_0\} \quad W = \text{span}\{\xi_1, \xi_2 \ldots\}.$$

Dado que $\{\xi_i\}_{i=0}^\infty$ es una base ortogonal para $H^1(\Omega)$, entonces $W = V^\perp$, por tanto

$$H^1(\Omega) = V \oplus W.$$

[7] Ver Anexos sección B.2.

[8] Si f satisface f_2, entonces tomando $u = c \leq 0$ constante, se tiene

$$\lim_{||c||_{H^1(\Omega)} \to \infty} I(c) = - \lim_{||c||_{H^1(\Omega)} \to \infty} \lambda \int_\Omega w(x) F(c) dx = \lim_{||c||_{H^1(\Omega)} \to \infty} 0 = 0.$$

Observación 29. Notar que los elementos de V son funciones constantes, puesto que $H^1(\Omega) = \mathcal{C} \oplus \mathcal{V}$, donde $\mathcal{C}$ es el conjunto de las funciones multiplos de 1. [9] Como ξ_0 es constante, entonces $V = \mathcal{C}$. De esto también se tiene que $W = \mathcal{V}$.

Con esto se sigue la siguiente relación de normas

Proposición 3.10. Sea $\lambda_1 > 0$, valor propio del operador -div$(h(x)\nabla)$. Entonces

$$J_h(u) \geq \lambda_1 \, ||u||_2^2, \quad \forall u \in W$$

Demostración. Sean $\{\lambda_i\}_{i=0}^{\infty}$ los vales propios de -div$(h(x)\nabla)$, entonces se cumple que:

$$\boldsymbol{a}_h(\xi_i, v) = \lambda_i < \xi_i, v >_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in H^1(\Omega) \quad i = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

Dado que $\left\{ \frac{\xi_i}{\sqrt{\lambda_i}} \right\}_{i=1}^{\infty}$ es una base ortonormal para W y como $\{\xi_i\}_{i=0}^{\infty}$ es ortonormal para $L^2(\Omega)$, entonces por la identidad de Parseval se puede escribir

$$||u||_2^2 = \sum_{i=1}^{+\infty} < u, \xi_i >_{L^2(\Omega)}^2, \quad J_h(u) = \sum_{i=1}^{+\infty} \boldsymbol{a}_h \left(u, \frac{\xi_i}{\sqrt{\lambda_i}} \right)^2$$

para todo $u \in W$.

Combinando estas igualdades y como $\lambda_i \geq \lambda_1$ para todo $i \geq 1$, se obtiene

$$\begin{aligned}
\lambda_1 \, ||u||_2^2 &= \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_1 < u, \xi_i >_{L^2(\Omega)}^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i < u, \xi_i >_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i^2 < u, \xi_i >_{L^2(\Omega)}^2}{\lambda_i} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\boldsymbol{a}_h(u, \xi_i)^2}{\lambda_i} = \sum_{i=1}^{+\infty} \boldsymbol{a}_h \left(u, \frac{\xi_i}{\sqrt{\lambda_k}} \right)^2 = J_h(u)
\end{aligned}$$

para todo $u \in W$. □

Lema 3.11. Sea $0 < \lambda < \lambda_1$. Si f satisface f_3 y f_4, entonces I satisface I_3.

Demostración. Sean $u \in W$ y $0 < \lambda < \lambda_1$.
Dado que $\lambda_1 > 0$, por la proposicón 3.10, se puede escribir

$$||u||_2^2 \leq \frac{1}{\lambda_1} J_h(u), \quad \forall u \in W.$$

Gracias a que f_3 y f_4 se satisfacen y como $\lambda < \lambda_1$, entonces tomando

[9] Ver sección 1.4.2

$\epsilon = \frac{\bar{\epsilon}}{2||w||_\infty} > 0$ en la desigualdad 3.7, con $0 < \bar{\epsilon} < \frac{1}{4}$, entonces

$$\frac{1}{2} - \bar{\epsilon}\frac{\lambda}{\lambda_1} > \frac{1}{2} - \bar{\epsilon} > \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

Con estas observaciones, se sigue que

$$\begin{aligned}
I(u) &= \frac{1}{2}J_h(u) - \lambda\Phi(u) \geq \frac{1}{2}J_h(u) - \lambda|\Phi(u)| \\
&\geq \frac{1}{2}J_h(u) - \lambda\,||w||_\infty\,\epsilon\,||u||_2^2 - \lambda C_\epsilon\,||w||_\infty\,||u||_{\sigma+1}^{\sigma+1} \\
&= \frac{1}{2}J_h(u) - 2\lambda\,||w||_\infty\,\epsilon\,||u||_2^2 + \lambda\,||w||_\infty\,\epsilon\,||u||_2^2 - \lambda C_\epsilon\,||w||_\infty\,||u||_{\sigma+1}^{\sigma+1} \\
&= \frac{1}{2}J_h(u) - \lambda\bar{\epsilon}\,||u||_2^2 + \lambda\bar{\epsilon}\frac{1}{2}\,||u||_2^2 - \lambda C_\epsilon\,||w||_\infty\,||u||_{\sigma+1}^{\sigma+1} \\
&\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{\lambda_1}\bar{\epsilon}\right)J_h(u) + \lambda\frac{1}{2}\bar{\epsilon}\,||u||_2^2 - \lambda C_\epsilon\,||w||_\infty\,C\,||u||_{H^1(\Omega)}^{\sigma+1} \\
&\geq \frac{1}{4}J_h(u) + \lambda\frac{1}{2}\bar{\epsilon}\,||u||_2^2 - \lambda C_\epsilon\,||w||_\infty\,C\,||u||_h^{\sigma+1} \\
&\geq \text{mín}\left\{\frac{1}{4}, \lambda\frac{1}{2}\bar{\epsilon}\right\}(J_h(u) + ||u||_2^2) - \lambda C_\epsilon\,||w||_\infty\,C\,||u||_h^{\sigma+1} \\
&:= \bar{C}_1\,||u||_{H^1(\Omega)}^2 - \bar{C}_2\,||u||_h^{\sigma+1}
\end{aligned}$$

Tomando $0 < r < \left(\frac{\bar{C}_1}{\bar{C}_2}\right)^{\frac{1}{\sigma-1}}$, se tiene que $\rho := \bar{C}_1 r^2 - \bar{C}_2 r^{\sigma+1} > 0$. □

Lema 3.12. Sea $f \in C^1(\mathbb{R})$, tal que satisface f_3. Entonces se satiface la siguiente igualdad.

$$I(v + tu) = I(v) + \frac{1}{2}t^2 J_h(u) - \lambda t \int_\Omega w(x)f(v)udx + o(||tu||_h), \tag{3.9}$$

para todo $v \in V$, $u \in W$ y $t \in \mathbb{R}$.

Demostración. Sean $v \in V$, $u \in W$ y $t \in \mathbb{R}$.
Si $f \in C^1(\mathbb{R})$ satisface f_3, entonces se sabe que Φ es Fréchet diferenciable y así

$$\begin{aligned}
\Phi(v + tu) &= \Phi(v) + \Phi'(v)tu + o(||tu||_{H^1(\Omega)}) \\
&= \int_\Omega w(x)F(v) + t\int_\Omega w(x)f(v)u + o(||tu||_h).
\end{aligned}$$

Por otro, dado que los elementos de V son constantes, se tiene

$$\boldsymbol{a}_h(v, u) = 0,$$

con esto se obtiene

$$\begin{aligned}
I(v+tu) &= \frac{1}{2}J_h(v+tu) - \lambda\Phi(v+tu)\\
&= \frac{1}{2}(J_h(v) + t^2 J(u) + t\boldsymbol{a}_h(v,u))\\
&- \lambda\left(\int_\Omega w(x)F(v)dx + t\int_\Omega w(x)f(v)udx + o(||tu||_{H^1(\Omega)})\right)\\
&= \left(\frac{1}{2}J_h(v) - \lambda\int_\Omega w(x)F(v)dx\right) + \frac{1}{2}t^2 J_h(u) - \lambda t\int_\Omega w(x)f(v)udx\\
&+ o(||tu||_{H^1(\Omega)})\\
&= I(v) + \frac{1}{2}t^2 J_h(u) - \lambda t\int_\Omega w(x)f(v)udx + o(||tu||_{H^1(\Omega)})
\end{aligned}$$

□

Lema 3.13. Sea $f \in C^1(\mathbb{R})$ tal que satisface f_3 con $2 < \sigma + 1 < 2^*$ y f_5, sea $w \in L^\infty(\Omega)$ tal que $\int_\Omega w(x)dx > 0$ y $\int_\Omega w(x)\xi_1 dx > 0$, donde ξ_1 es el vector propio asociado a λ_1. Entonces I satisface I_4.

Demostración. Para probar que I satisface I_4, por la observación 7, basta probar

a) $I(v) \leq 0$ para todo $v \in V$.

b) Existen $\bar{R} > \rho_1$ y $e_1 \in W$, $||e_1|| = 1$ tal que $I(u) \leq 0$, para todo $u \in V \oplus span(e_1)$ y $||u|| \geq \bar{R}$.

Recordar que el espacio V es un espacio de funciones constantes, entonces como $\int_\Omega w(x)dx > 0$, se tiene

$$I(v) = \frac{1}{2}J_h(v) - \lambda\int_\Omega w(x)F(v)dx = -\lambda F(v)\int_\Omega w(x)dx \leq 0,$$

para todo $v \in V$, así se satisface a).

Por otro lado dado que f satisface f_5, entonces del lema 2.11, se tiene que para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta_\epsilon > 0$, tal que

f_{5_2}) $-F(t) \leq \frac{\epsilon}{2}|t|^2 - \frac{1}{p}|t|^p$ para todo $t \geq \delta_\epsilon$

f_{5_3}) $-f(t) \leq \epsilon|t| - |t|^{p-1}$ para todo $t \geq \delta_\epsilon$

con $2 < p < 2^*$.
Tomando $e_1 = \frac{\xi_1}{\sqrt{\lambda_1}}$, se tiene que $||e_1||_h = 1$ y $J_h(e_1) = 1$, entonces de la igualdad 3.9,

se tiene

$$\begin{aligned}
I(v+te_1) &= -\lambda F(v)\int_\Omega w(x)dx + \frac{1}{2}t^2 J_h(e_1) - \lambda t f(v)\int_\Omega w(x)e_1dx + o(|t|\,||e_1||_h)\\
&= -\lambda F(v)\int_\Omega w(x)dx + \frac{1}{2}t^2 - \lambda t f(v)\int_\Omega w(x)e_1dx + o(|t|)\\
&\leq \lambda\left(\frac{\epsilon}{2}|v|^2 - \frac{1}{p}|v|^p\right)\int_\Omega w(x)dx + \lambda t\left(\epsilon|v| - |v|^{p-1}\right)\int_\Omega w(x)e_1dx\\
&+ \frac{1}{2}t^2 + o(|t|)\\
&= -\lambda\frac{1}{p}|v|^p\int_\Omega w(x)dx - \lambda|v|^{p-1}\int_\Omega w(x)e_1dx + \frac{\epsilon}{2}|v|^2\lambda\int_\Omega w(x)dx\\
&+ o(|t|) + \frac{1}{2}t^2 + \lambda t\epsilon|v|\int_\Omega w(x)e_1dx.
\end{aligned}$$

Dado que $\int_\Omega w(x)dx > 0$, $\int_\Omega w(x)\xi_1 dx > 0$ y $p > 2$, se puede notar que para R suficientemente grande, tal que $||v||_h = R$, se sigue que $I(v+se_1) \leq 0$, puesto que $||v+te_1||_2 = \sqrt{||v||_h^2 + t^2\,||e_1||_h^2} = \sqrt{R^2+t^2} \geq R$. Por lo tanto se satisface I_4. □

Teorema 3.14. Sea $f \in C^1(\mathbb{R})$, tal que satisface f_3 con $2 < \sigma + 1 < 2^*$ y f_5, sea $w \in L^\infty(\Omega)$ tal que $\int_\Omega w(x)dx > 0$ y $\int_\Omega w(x)\xi_1 dx > 0$, donde ξ_1 es el vector propio asociado a λ_1. Si $\lambda < \lambda_1$, entonces el problema 2.1 al menos una solución débil no nula.

Demostración. Si se satisfacen las hipótesis del teorema, entonces por los lemas 3.11 y 3.13, I satisface I_3 e I_4 así por el teorema 1.16 el nivel $c_l > 0$ es un valor crítico, es decir, que exite $u \in H^1(\Omega)$, $u \neq 0$ punto crítico de I. □

Capítulo 4

Resultados, conclusiones y recomendaciones

4.1. Resultados

A continuación se muestran los resultados obtenidos:
0 es mínimo local de I.

a) Caso coercivo

  a.1) Si $\lambda = 0$, el único punto crítico de I es el 0.

  a.2) Si $\lambda > 0$:

    a.2.1) Cuando $0 < \sigma + 1 < 2$; existe $\lambda^* > 0$, tal que para todo $\lambda < \lambda^*$, el problema posee una única solución débil, la cual es nula.
    Existen $\underline{\lambda}, \bar{\lambda} > \lambda^*$, tales que para todo $\lambda \in (\underline{\lambda}, \bar{\lambda})$, el problema posee al menos dos distintas soluciones débiles no nulas.

    a.2.2) Cuando $2 < \sigma + 1 < 2^*$, el problema posee al menos una solución débil no nula, siempre que $0 < \lambda < \lambda_1$.

b) Caso no coercivo

  b.1) Toda función constante $c \leq 0$ es un punto crítico de I.

  b.2) Si $\lambda = 0$, entonces cualquier función múltiplo de uno, es un punto crítico de I.

  b.3) Si $\lambda \neq 0$ las constantes positivas, $c > 0$ tales que $f(c) > 0$, no pueden ser puntos críticos de I.

b.4) Si $\lambda > 0$, $2 < \sigma + 1 < 2^*$ y $\lambda < \lambda_1$, el problema 2.1 posee al menos una solución no trivial, (En este caso λ_1 es valor propio del operador -div$(h(x)\nabla u)$, los valores son $\lambda_0 < \lambda_1 \leq, \ldots)$.

4.1.1. Comparación entre las condiciones Dirichlet y Neumann del problema

Si se estudia el problema 2.1 con condiciones de Dirichlet homogéneas, la forma cuadrática del funcional de energía siempre es coerciva. A diferencia del caso con condiciones Neumann, donde la forma cuadrática del funcional de energía, es coerciva cuando $q > 0$ c.t.p en Ω.

Otra diferencia notoria, es que las constantes pueden ser soluciones del problema 2.1 con condiciones de Neumann, sin embargo el 0 es la única constante que es solución del problema con condiciones Dirichlet.

Para el caso coercivo y subcrítico se obtiene el mismo resultado de existencia del problema 2.1 con ambas condiciones. No obstante en el caso coercivo y subcruadrático, el problema 2.1 con condiciones Dirichlet posee al menos una solución no trivial, mientras que con condiciones Neumann posee al menos dos distintas soluciones, no nulas.

4.2. Conclusiones

Una vez finalizado el estudio, se obtienen las siguientes conclusiones:

- Para el caso coercivo, se ha mostrado la existencia de al menos 2 soluciones no nulas.
- En el caso no coercivo se obtuvo únicamente un resultado de existencia, sin información sobre su unicidad o multiplicidad. Además es conveniente resaltar que la mayoría de trabajos que estudian los problemas de Neumann, tratan el caso coercivo.
- Cuando f presenta un crecimiento subcrítico, se obtuvieron únicamente resultados de existencia, ya que para obtener resultados de multiplicidad es nece-

sario que el funcional esté acotado por abajo y, por el contrario en este caso el funcional no está acotado por abajo.

- Los resultados de existencia se han obtenido, mediante el análisis del crecimiento de la función no lineal, crecimiento establecido por el parámetro, $0 < \sigma + 1 < 2^*$. El caso $\sigma + 1 = 2^*$, no ha sido estudiado, ya que en este caso no se puede aplicar la teoría de la sección 2 del capítulo 1. Cuando $\sigma + 1 = 2$, resultados similares se pueden obtener aumentando más hipótesis.

- En particular para el caso $\sigma + 1 = 2^*$, debido a que la inyección del teorema 1.27 no es compacta, mediante las técnicas que se ha usado, no se puede mostrar la condición de (PS), no obstante existen autores que trabajan con este tipo de problemas [12], [16] etc.

4.3. Recomendaciones

- Investigar sobre los problemas de minimización con restricciones para funcionales definidos sobre espacios de Banach, muchos autores emplean minimizadores para el estudio del problema en el caso en que f tenga un crecimiento crítico .

- Estudiar la existencia de soluciones débiles no triviales, del problema para el caso coercivo y subcrítico cuando $\lambda \in [\lambda^*, \underline{\lambda}]$ y cuando $\lambda \geq \bar{\lambda}$.

- Analizar la existencia de las soluciones cuando el dato no lineal presenta un crecimiento supercrítico.

- Estudiar la multiplicidad o unicidad de las soluciones obtenidas en el caso subcrítico.

- Determinar la existencia de soluciones débiles no triviales para el caso coercivo, cuando $\lambda \geq \lambda_1$, donde $\lambda_1 > 0$ es el primer valor del operador -div$(h\nabla) + q(x)$. Y la existencia de soluciones débiles no triviales para el caso no coercivo, cuando $\lambda \geq \lambda_1$, en este caso λ_1 es el segundo valor propio del operador -div$(h\nabla)$.

- Debido a que este es un trabajo de posgrado, no se ha estudiado la positividad de las soluciones obtenidas. Pues este estudio constituye un nuevo trabajo, ya que se debe estudiar primero la regularidad de las soluciones, (con lo cual se debe exigir hipótesis de regularidad en los datos) para obtener soluciones clásicas y poder aplicar el principio del máximo.

Además cabe recalcar que el principio del máximo se satisface si y solo si el primer valor propio del operador elíptico es positivo [10], con lo cual es importarte separar los casos cuando $q = 0$ c.t.p en Ω y cuando $q > 0$ c.t.p en Ω.

Anexos

Apéndice A

Espacios de Hilbert

En este apéndice se exhiben definiciones y resultados sobre los espacios de Hilbert, que fueron usados en los capítulos principales de este trabajo.

Definición A.1. Sea H un espacio vectorial. Un producto escalar es una forma bilineal, $< \cdot, \cdot >: H \times H \to \mathbb{R}$;

- Simétrica $< u, v > = < v, u > \ \forall u, v \in H$,
- Positiva $< u, u > \geq 0 \ \forall u \in H$,
- $< u, u > \neq 0 \ \forall u \neq 0$.

Si el producto escalar satisface la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$| < u, v > | \leq \sqrt{< u, u >}\sqrt{< v, v >} \quad \forall u, v \in H.$$

Entonces H es un espacio normado, cuya norma

$$||u|| = \sqrt{< u, u >} \quad \forall u \in H,$$

es la norma inducida por el producto escalar.

Definición A.2. Un espacio de Hilbert es un espacio vectorial H equipado con el producto escalar tal que H es completo para norma $||\cdot||$.

A.1. Teorema de representación de Riesz-Fréchet

Teorema A.1 ([11] Teorema de representación de Riesz-Fréchet)**.** Para cualquier $f \in H^*$ existe un único $u_f \in H$ tal que

$$f(v) = < v, u_f > \quad \forall u \in H.$$

Más aún

$$||u_f|| = ||f||_{H^*}$$

Demostración. (Ver [[11], pág. 135] teorema 5.5). □

Observación 30. Del toerema anterior se puede definir el operador

$$\begin{aligned} R : H &\rightarrow H^* \\ U &\mapsto R(u) = f, \end{aligned}$$

el cual es un isomorfismo isométrico, conocido como el isomorfismo de Riesz.

A.2. Teorema de Lax-Milgram

Definición A.3. Una forma bilineal $\boldsymbol{a} : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ se dice;

- Continua, si existe una constante C tal que

$$|\boldsymbol{a}(u,v)| \leq C\,||u||\,||v|| \quad u, v \in H$$

- Coercivo, si existe una constante $\kappa > 0$ tal que

$$\boldsymbol{a}(u,v) \geq \kappa\,||u||^2 \quad \forall v \in H$$

Teorema A.2 ([11] Teorema de Lax-Miligram)**.** Si $\boldsymbol{a}$ es una forma bilineal, continua y coerciva en H. Entonces para cualquier $f \in H^*$, existe un único elemento $u \in H$ tal que

$$\boldsymbol{a}(u,v) = f(v) \quad \forall v \in H.$$

Demostración. (Ver [[11], pág. 140] corolario 5.8.) □

Observación 31. Sea $(H, < \cdot, \cdot >)$ un espacio de Hilbert. Si $\boldsymbol{a} : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ es una forma bilineal, simétrica, continua y coerciva, entonces $\boldsymbol{a}$ define un nuevo producto escalar sobre H, el cual induce una norma denominada, $||\cdot||_{\boldsymbol{a}} := \sqrt{\boldsymbol{a}(\cdot,\cdot)}$, equivalente a la norma del espacio H.

$$\sqrt{\kappa}\,||\cdot|| \leq ||\cdot||_{\boldsymbol{a}} \leq \sqrt{C}\,||\cdot||$$

con $C > 0$ constante de continuidad y $\kappa > 0$ constate de coercividad de $\boldsymbol{a}$.

A.3. Bases ortonormales

Definición A.4. Una sucesión $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en H es una base ortonormal de H si satisface las siguientes propiedades:

- $||e_n|| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $< e_n, e_m >= 0$ para todo $m \neq n$.
- El span$\{(e_n)_{n\in\mathbb{N}}\}$ es denso en H.

Teorema A.3 ([11])**.** Sea $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal de H. Entonces para todo $u \in H$ se tiene

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} < u, e_k > e_k \quad \text{y} \quad ||u||^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |< u, e_k >|^2 .$$

Demostración. (Ver [[11] pág. 143] corolario 5.10) □

A.4. Descomposición espectral de operadores compactos y autoadjuntos

Definición A.5. Sean H un espacio de Hilbert y $T : H \to H$ un operador lineal y continuo. El conjunto resolvente, denotado por $\rho(T)$, está definido por

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{R}; (T - \lambda I) \text{ es biyectivo de } H \text{ en } H\}$$

El espectro, notado por $\sigma(T)$, es el complemento del conjunto $\rho(T)$. Un número $\lambda \in \mathbb{R}$ se dice valor propio de T, si existe $u \in H$, $u \neq 0$ tal que $Tu = \lambda u$.
El elemento $u \in H$, $u \neq 0$ que satisface la igualdad anterior se llama vector propio asociado a λ.

Teorema A.4 ([11])**.** Sean H un espacio de Hilbert de dimensión infinita y $T : H \to H$ un operador compacto. Entonces se tiene:

- $0 \in \sigma(T)$.
- El conjunto $\sigma(T) \setminus \{0\}$ es igual al conjunto de los valores propios excepto el 0.
- Se cumple uno de los siguientes casos:
    - $\sigma(T) = \{0\}$.
    - El conjunto $\sigma(T) \setminus \{0\}$ es finito
    - El conjunto $\sigma(T) \setminus \{0\}$ es una sucesión que converge a 0.
- Si T es un operador positivo, entonces $\sigma(T) \subset \mathbb{R}^+$.

Demostración. (Ver [11], pág 164 teorema 6.8) $\square$

Teorema A.5 ([11]). Sean H un espacio de Hilbert. Si $T : H \to H$ es un operador compacto y autoadjunto. Entonces existe una base ortonormal de vectores propios de T.

Demostración. (Ver [[11], pág. 167] teorema 6.11) $\square$

Apéndice B

Problemas de valores propios con condición de frontera Neumann

En este apéndice se desarrolla la teoría de los problemas de valores propios lineales del operador $\operatorname{div}(h(x)\nabla) + q(x)$, con condiciones de Neumann homogéneas. Esta teoría se basa en las propiedades espectrales de operadores compactos y autoadjuntos en espacios de Hilbert.

Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto y acotado, con frontera $\partial\Omega$ de clase C^1 y h, $q \in L^\infty(\Omega)$ como en el problema 2.1.
Se define el siguiente problema

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(h(x)\nabla\xi) + q(x)\xi = \lambda\xi & \Omega \\ \frac{\partial\xi}{\partial n} = 0 & \partial\Omega \end{cases} \tag{B.1}$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$.
Una solución débil del problema B.1, es el par (ξ, λ), con $\xi \in H^1(\Omega)$, que satisfacen la siguiente ecuación

$$a(\xi, v) = \lambda \int_\Omega \xi v dx \quad \forall v \in H^1(\Omega) \tag{B.2}$$

donde a es la forma bilineal definida en 2.4.

Definición B.1. Se dice que $\lambda \in \mathbb{R}$, es un valor propio de -div$(h(x)\nabla) + q(x)$ bajo las condiciones de frontera de Neuman. Si existe $\xi \in H^1(\Omega) \setminus \{0\}$ tal que satisface la igualdad B.2.
El elemento $\xi \in H^1(\Omega) \setminus \{0\}$, se dice función propia asociada a λ.

Como es sabido cuando $\int_\Omega q(x)dx > 0$, a es coerciva [8], por el contrario si

$\int_\Omega q(x)dx = 0$, entonces a no lo es. Esta diferencia provoca que las propiedades espectrales del operador -div$(h(x)\nabla) + q(x)$, sean diferencites en cada caso.

B.1. Problema de valores propios caso coercivo

En esta parte se analizará el problema B.1 cuando $\int_\Omega q(x) > 0$

Teorema B.1 ([17]). Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto y acotado, sean $h, q \in L^\infty(\Omega)$ como en el problema 2.1, tal que $\int_\Omega q(x) > 0$. Entonces existe una sucesión $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}^+$ y $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión en $H^1(\Omega)$ tal que:

1. Para todo $n \in \mathbb{N}$, ξ_n es una función propia asociada al valor propio λ_n de -div$(h(x)\nabla) + q(x)$.
2. $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base ortonormal de $L^2(\Omega)$
3. $\lambda_n \to +\infty$ cuando $n \to \infty$.

Demostración. Sean $h, q \in L^\infty(\Omega)$ como en el problema 2.1, tal que $\int_\Omega q(x) > 0$ y sea $g \in L^2(\Omega)$, se define el siguiente problema

$$\begin{cases} -\text{div}(h(x)\nabla\xi) + q(x)\xi = g & \Omega \\ \frac{\partial\xi}{\partial n} = 0 & \partial\Omega \end{cases} \tag{B.3}$$

cuya solución débil es una función $\xi \in H^1(\Omega)$, tal que

$$\boldsymbol{a}(\xi, v) =< g, v >_{L^2(\Omega)}, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Gracias a que se satisfacen las hipótesis de la proposición 2.2 y del corolario 2.4, se sigue que a es continua, coerciva y positiva.
Además de la desigualdad de Cauchy y la desigualdad 2.6, se tiene que $< g, \cdot >_{L^2(\Omega)}$ es continua en $H^1(\Omega)$.

$$| < g, v >_{L^2(\Omega)} | \leq ||g||_2 \, ||v||_2 \leq ||g||_2 \, ||v||_{H^1(\Omega)} \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

y, como $< g, \cdot >_{L^2(\Omega)}$ es lineal, entonces $< g, \cdot >_{L^2(\Omega)} \in (H^1(\Omega))^*$, así por el teorema de Lax Milgram el problema B.3 posee una única solución débil $u \in H^1(\Omega)$.

En resumen se ha mostrado lo siguiente,

$$(\forall g \in L^2(\Omega))(\exists! \xi \in H^1(\Omega))(\boldsymbol{a}(\xi, v) =< g, v >_{L^2(\Omega)}, \quad \forall v \in H^1(\Omega)).$$

Así se puede definir el siguiente operador

$$\begin{array}{rcl} B : L^2(\Omega) & \rightarrow & H_0^1(\Omega) \\ g & \mapsto & B_g = u, \end{array}$$

que satisface

$$\boldsymbol{a}(B_g, v) =< g, v >_{L^2(\Omega)}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \tag{B.4}$$

de donde se sigue que B es lineal, en efecto.
Sean $g_1, g_2 \in L^2(\Omega)$, sea $v \in H_0^1(\Omega)$ y sea $\theta \in \mathbb{R}$ arbitrarios.
Por B.4, se tienen las siguientes igualdades

a) $\boldsymbol{a}(B_{g_1}, v) =< g_1, v >_{L^2(\Omega)}$

b) $\boldsymbol{a}(B_{g_2}, v) =< g_2, v >_{L^2(\Omega)}$

c) $\boldsymbol{a}(B_{\theta g_1 + g_2}, v) =< \theta g_1 + g_2, v >_{L^2(\Omega)}$

multiplicando por θ en a), sumando con b)

$$\boldsymbol{a}(\theta B_{g_1} + B_{g_2}, v) =< \theta g_1 + g_2, v >_{L^2(\Omega)}$$

e igualando con c)

$$\boldsymbol{a}(B_{\theta g_1 + g_2} - [\theta B_{g_1} + B_{g_2}], v) = 0.$$

Dado que la igualdad anterior se cumple para todo $v \in H^1(\Omega)$ y a define un producto escalar en $H^1(\Omega)$ se sigue la linealidad de B

$$B_{\theta g_1 + g_2} = \theta B_{g_1} + B_{g_2}.$$

Por otro lado del teorema 1.27, se sabe que la inyección canónica
$i : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ es compacta, entonces el operador

$$B := i \circ B : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$$

también lo es.

Además $B : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ es autadjunto, esto por B.4, la simetría del producto escalar de $L^2(\Omega)$ y de $\boldsymbol{a}$ se sigue que

$$< B_{g_1}, g_2 >_{L^2(\Omega)} =< g_2, B_{g_1} >_{L^2(\Omega)} = a(B_{g_2}, B_{g_1}) = a(B_{g_1}, B_{g_2}) =< g_1, Bg_2 >_{L^2(\Omega)}$$

para todo $g_1, g_2 \in L^2(\Omega)$, es decir,

$$< B_{g_1}, g_2 >_{L^2(\Omega)} = < g_1, Bg_2 >_{L^2(\Omega)} \quad \forall g_1, g_2 \in L^2(\Omega),$$

así B es autoadjunto.

Para finalizar con las propiedades del operador, se verá que $B : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ es positivo, esto gracias a que $\boldsymbol{a}$ es positiva y a B.4

$$< B_g, g >_{L^2(\Omega)} = \boldsymbol{a}(B_g, B_g) \geq 0 \quad \forall g \in L^2(\Omega).$$

Así, dado que $L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert separable y $B : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ es un operador compacto y autadjunto, entonces por al teorema A.5, existe una base hilbertiana formada por los vectores propios $\{\xi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ asociados a los valores propios $\{\mu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$

$$B_{\xi_k} = \mu_k \xi_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{B.5}$$

Además como B es positivo, entonces del teorema A.4, se sigue que todos sus valores propios son positivos. Luego, como el conjunto de valores propios es infinito, se tiene

$$\mu_k \to 0.$$

Ahora, se verificará que $\xi_k \in H^1(\Omega)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, en efecto, de la definición de B se sabe que $\mathrm{Im}(B) \subset H^1(\Omega)$, así por B.5 y la linealidad de B

$$\xi_k = B_{\frac{\xi_k}{\mu_k}} \in Im(B) \subset H^1(\Omega), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Finalmente se verificará que los valores propios de -div$(h(x)\nabla) + q(x)$ son, $\lambda_k = \frac{1}{\mu_k}$ y sus vectores propios asociados, ξ_k, para todo $k \in \mathbb{N}$. Esto gracias a las igualdades B.5 y B.4.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}(B_{\xi_k}, v) &= < \xi_k, v >_{L^2(\Omega)} \\
\boldsymbol{a}(\mu_k \xi_k, v) &= < \xi_k, v >_{L^2(\Omega)} \\
\boldsymbol{a}(\xi_k, v) &= \frac{1}{\mu_k} < \xi_k, v >_{L^2(\Omega)} \\
\boldsymbol{a}(\xi_k, v) &= \lambda_k < \xi_k, v >_{L^2(\Omega)} .
\end{aligned}$$

□

Debido a que $\boldsymbol{a}$ es una forma bilineal simétrica, continua y coerciva, entonces por la observación 31, se considerará el espacio de Hilbert $H^1(\Omega)$ con el producto escalar $\boldsymbol{a}(\cdot,\cdot)$, cuando sea necesario.

Observación 32. La sucesión $\left\{\frac{\xi_k}{\sqrt{\lambda_k}}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ es ortonormal para $H^1(\Omega)$. En efecto, sean $i, j \in \mathbb{N}$, de la igualdad B.5 se tiene

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\left(\frac{\xi_i}{\sqrt{\lambda_i}}, \frac{\xi_j}{\sqrt{\lambda_j}}\right) &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}\sqrt{\lambda_j}}\boldsymbol{a}\left(\xi_i, \xi_j\right) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}\sqrt{\lambda_j}}\left\langle \lambda_i\xi_i, \xi_j\right\rangle_{L^2(\Omega)} \\ &= \frac{\lambda_i}{\sqrt{\lambda_i}\sqrt{\lambda_j}}\left\langle \xi_i, \xi_j\right\rangle_{L^2(\Omega)} = \frac{\sqrt{\lambda_i}}{\sqrt{\lambda_j}}\left\langle \xi_i, \xi_j\right\rangle_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Dado que $\{\xi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es ortonormal para $L^2(\Omega)$, se sigue el resultado.
Si $i \neq j$

$$\boldsymbol{a}\left(\frac{\xi_i}{\sqrt{\lambda_i}}, \frac{\xi_j}{\sqrt{\lambda_j}}\right) = \frac{\sqrt{\lambda_i}}{\sqrt{\lambda_j}} \cdot 0 = 0$$

Si $i = j$

$$\boldsymbol{a}\left(\frac{\xi_i}{\sqrt{\lambda_i}}, \frac{\xi_j}{\sqrt{\lambda_j}}\right) = \frac{\sqrt{\lambda_i}}{\sqrt{\lambda_i}} \cdot 1 = 1$$

Teorema B.2 ([9] Caracterización variacional de los valores propios)**.** Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $h, q \in L^\infty(\Omega)$ como en el teorema anterior $\left(\int_\Omega q(x)dx > 0\right)$ y sea

$$\begin{aligned} Q : H^1(\Omega)\setminus\{0\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto Q(u) = \frac{\int_\Omega h(x)|\nabla u|^2 dx + \int_\Omega q(x)u^2 dx}{\int_\Omega u^2 dx}\end{aligned}$$

el cociente de Rayleigh.
Entonces

$$\min_{u\in H^1(\Omega)\setminus\{0\}} Q(u) = \lambda_1, \quad \lambda_1 > 0.$$

Demostración. Sea $u \in H^1(\Omega)$, del teorema B.1 se sabe que las funciones propias $\{\xi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ forman una base para $L^2(\Omega)$, entonces se cumple la identidad de Parseval

$$||u||_2^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\left|< u, \xi_k >_{L^2(\Omega)}\right|^2 \tag{B.6}$$

y como $\left\{\frac{\xi_k}{\sqrt{\lambda_k}}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ es ortonormal para $H^1(\Omega)$ también se satisface la identidad de Parseval.

$$||u||_{\boldsymbol{a}}^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\left|\boldsymbol{a}\left(u, \frac{\xi_k}{\sqrt{\lambda_k}}\right)\right|^2. \tag{B.7}$$

Por otro lado, recordando que $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de reales positivos ordenados de acuerdo a su multiplicidad

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots,$$

se tiene que

$$\lambda_k \geq \lambda_1 \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{B.8}$$

Entonces gracias a B.4, B.6, B.7 y B.8 se tiene

$$\begin{aligned}
Q(u) &= \frac{\int_\Omega h(x)|\nabla u|^2 dx + \int_\Omega q(x)u^2 dx}{\int_\Omega u^2 dx} = \frac{||u||_{\boldsymbol{a}}^2}{||u||_2^2} \\
&= \frac{\sum_{k=1}^\infty \boldsymbol{a}\left(u, \frac{\xi_k}{\sqrt{\lambda_k}}\right)^2}{\sum_{k=1}^\infty < u, \xi_k >_{L^2(\Omega)}^2} = \frac{\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\lambda_k}\boldsymbol{a}\left(u, \xi_k\right)^2}{\sum_{k=1}^\infty < u, \xi_k >_{L^2(\Omega)}^2} \\
&= \frac{\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\lambda_k} < u, \lambda_k\xi_k >^2}{\sum_{k=1}^\infty < u, \xi_k >_{L^2(\Omega)}^2} = \frac{\sum_{k=1}^\infty \lambda_k < u, \xi_k >^2}{\sum_{k=1}^\infty < u, \xi_k >_{L^2(\Omega)}^2} \\
&\geq \frac{\sum_{k=1}^\infty \lambda_1 < u, \xi_k >^2}{\sum_{k=1}^\infty < u, \xi_k >_{L^2(\Omega)}^2} = \lambda_1.
\end{aligned}$$

Así $\min_{u\in H^1(\Omega)} Q(u) \geq \lambda_1$.

Por otro lado

$$Q(\xi_1) = \frac{\boldsymbol{a}(\xi_1, \xi_1)}{||\xi_1||_2^2} = \lambda_1 < \xi_1, \xi_1 >_{L^2(\Omega)} = \lambda_1,$$

entonces

$$\min_{u\in H^1(\Omega)} Q(u) \leq Q(\xi_1) = \lambda_1,$$

en consecuencia $\min_{u\in H^1(\Omega)} Q(u) = \lambda_1$. □

Observación 33. Gracias al teorema anterior se sigue directamente la siguiente desigualdad

$$\boldsymbol{a}(u, u) \geq \lambda_1 \, ||u||_2^2 \quad \forall u \in H^1(\Omega). \tag{B.9}$$

Además, dado que el funcional Q es estrictamente convexo en la esfera unitaria de $H^1(\Omega)$ y como $||\xi_k||_2 = 1$, para todo $k \in \mathbb{N}$ se sigue que

$$Q(u) = \lambda_1 \Leftrightarrow u = \xi_1,$$

es decir, el primer valor propio es simple.

Otra propiedad interesante es que $\xi_1 > 0$ c.t.p. en Ω [17].

B.2. Problema de valores propios caso no coercivo

En esta parte se estudiará el problema B.1 cuando $\int_\Omega q(x)dx = 0$, en este caso se tiene que $q = 0$ c.t.p. en Ω. Así el nuevo problema es; hallar (λ, ξ), $\xi \in H^1(\Omega)$, tal que satisface

$$\int_\Omega h(x)\nabla\xi \cdot \nabla v dx = \lambda \int_\Omega \xi v dx \quad \forall v \in H^1(\Omega). \tag{B.10}$$

Se puede notar que en este caso, el par $(0, c_0)$, donde c_0 es una constante, es solución de B.10, lo que quiere decir que, 0 es un valor propio y cualquier $c_0 \neq 0$ es su vector propio asociado.

Teorema B.3 ([19])**.** Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto y acotado con frontera $\partial\Omega$ de clase C^1 y sea $h \in L^\infty(\Omega)$ como en el problema 2.1, entonces los valores propios del problema B.10 satisfacen;

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \ldots, \quad \lambda_k \to +\infty$$

y sus vactores propios asociados $\{\xi_k\}_{k=0}^\infty$ forman una base ortonormal para $L^2(\Omega)$. Mientras que $\left\{\xi_0, \frac{\xi_k}{\sqrt{\lambda_k}}\right\}_{k=1}^\infty$ forman una base para $H^1(\Omega)$.

Demostración. Sea $g \in L^2(\Omega)$. Considerando el siguiente problema;
hallar $u \in H^1(\Omega)$ tal que $\boldsymbol{a}_h(u, v) =< u, v >_{L^2(\Omega)}$, para todo $v \in H^1(\Omega)$,
donde

$$\boldsymbol{a}_h(u, v) = \int_\Omega h(x)\nabla u \cdot \nabla v dx \quad u, v \in H^1(\Omega).$$

Del capítulo 1, se sabe que $(\mathcal{V}, ||\nabla\cdot||_2)$ es un subespacio de Hilbert de $H^1(\Omega)$, que satisface la desigualdad de Poncairé 1.4. Por lo tanto $\boldsymbol{a}_h : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ es una forma bilineal, continua y coerciva. Además, también se sigue que $< u, \cdot >_{L^2(\Omega)}: \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ es continuo en $\mathcal{V}$, por tanto $< u, \cdot >_{L^2(\Omega)} \in (\mathcal{V})^*$.
Así por el teorema de Lax Milgram, se sigue lo siguiente;

$$(\forall g \in L^2(\Omega))(\exists! u \in \mathcal{V}, \boldsymbol{a}_h(u, v) =< g, v >_{L^2(\Omega)}, \forall v \in \mathcal{V}).$$

De donde se define el siguiente operador

$$\begin{array}{rcl} T : L^2(\Omega) & \to & \mathcal{V} \\ g & \mapsto & T_g = u, \end{array}$$

que satisface

$$\boldsymbol{a}_h(T_g, v) =< g, v >_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in \mathcal{V}. \tag{B.11}$$

Gracias la igualdad B.11, junto con la bilinealidad de $\boldsymbol{a}_h$ y del producto escalar en $L^2(\Omega)$, se tiene que T es lineal.

Por otro lado, por las desigualdades 1.4 y 2.6, se tiene que la inyección $i : \mathcal{V} \to H^1(\Omega)$ es continua y, como la inyección $i_1 : H^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ es compacta, se obtiene que el operador

$$T := i_1 \circ i \circ T : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$$

es compacto.

Además de la igualdad B.11 junto con la simetría de $\boldsymbol{a}_h$ y del producto escalar en $L^2(\Omega)$, se sigue que $T : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ es autoadjunto.

En consecuencia de los teoremas A.4 y A.5, existen valores propios positivos $\{\hat{\lambda}_k\}_{k=1}^{\infty}$ de T y sus vectores propios asociados $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ forman una base ortonormal para $L^2(\Omega)$. En consecuencia para todo $k \in \mathbb{N}$, se cumple;

$$T_{\xi_k} = \lambda_k, \text{ entonces } \boldsymbol{a}_h(\xi_k, v) = \lambda_k < \xi_k, v >_{L^2(\Omega)}, \forall v \in H^1(\Omega),$$

con

$$\lambda_k = \frac{1}{\hat{\lambda}_k}.$$

Recordar que $\lambda_0 = 0$ tambien es un valor propio y su vector propio asociado es $\xi_0 = \frac{1}{\sqrt{\gamma(\Omega)}}$. Con esto, $\{\xi_k\}_{k=0}^{\infty}$ forman una base ortonormal para $L^2(\Omega)$, en efecto,

$$||\xi_0||_2 = \int_{\Omega} \xi_0^2 dx = \xi_0^2 \int_{\Omega} dx = \frac{1}{\gamma(\Omega)} \gamma(\Omega) = 1$$

y de la igualdad B.11

$$< \xi_k, \xi_0 >_{L^2(\Omega)} = \boldsymbol{a}_h(T_{\xi_k}, \xi_0) = \int_{\Omega} h(x) \nabla T_{\xi_k} \cdot \nabla \xi_0 dx = 0.$$

Finalmente, por las observaciones de la sección B.1 se sigue que $\left\{\frac{\xi_k}{\sqrt{\lambda_k}}\right\}_{k=1}^{\infty}$ forma una base ortogonal para $\mathcal{V}$ y, como el espacio $\mathcal{C}$ es ortogonal a este espacio en $H^1(\Omega)$, se sigue $\left\{\xi_0, \frac{\xi_k}{\sqrt{\lambda_k}}\right\}_{k=1}^{\infty}$ es ortogonal para $H^1(\Omega)$, finalmente dado que

$$||\xi_0||_{H^1(\Omega)}^2 = ||\nabla \xi_0||_2^2 + ||\xi_0||_2^2 = 1$$

se tiene que $\left\{\xi_0, \frac{\xi_k}{\sqrt{\lambda_k}}\right\}_{k=1}^{\infty}$ es ortonormal para $H^1(\Omega)$. $\square$

Apéndice C

Resultados complementarios

Lema C.1. Para todo $p > 0$, existe $C_p > 0$ tal que

$$|a+b|^p \leq C_p(|a|^p + |b|^p)$$

para todo $a, b \in \mathbb{R}$.

Demostración. Sea $p > 0$, se probará el resultado en dos casos, cuando $p \geq 1$ y cuando $p \in (0,1)$.

Sea $p \geq 1$, se define la siguiente función

$$\varphi(t) = t^p \quad \forall t > 0.$$

Sea $t > 0$, como $p \geq 1$ se tiene que

$$\varphi''(t) = p(p-1)t^{p-2} \geq 0,$$

dado que t fue arbitrario, entonces $\varphi'' \geq 0$, así φ es convexa.
Sean $a, b \in \mathbb{R}$ arbitrarios fijos. Es claro que el resultado se cumple si $a = b = 0$, cuando $a, b \neq 0$ se tiene $|a|, |b| > 0$, entonces de la convexidad de φ se obtiene

$$\varphi\left(\frac{|a|}{2} + \frac{|b|}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\varphi(|a|) + \frac{1}{2}\varphi(|b|) \Leftrightarrow (|a| + |b|)^p \leq 2^{p-1}(|a|^p + |b|^p),$$

así

$$|a+b|^p \leq (|a| + |b|)^p \leq 2^{p-1}(|a|^p + |b|^p),$$

tomando $C_p = 2^{p-1} > 0$, como a, b fueron arbitrarios se obtiene el resultado para todo $p \geq 1$.

Ahora se supone que $p \in (0,1)$, sea $a \in \mathbb{R}$ y se define la siguiente función

$$\varphi_a(t) = |a|^p + t^p - (|a| + t)^p \quad t > 0.$$

con derivada

$$\varphi_a'(t) = pt^{p-1} - p(|a| + t)^{p-1} \quad t > 0.$$

Se puede notar que $\varphi_a'' \geq 0$, en efecto, dado que que la función $\tau(t) = t^{p-1}$ es decreciente para todo $t > 0$, pues $p - 1 < 0$, se tiene

$$\tau'(t) = (p-1)t^{p-2} < 0.$$

De esto y como $\tau > 0$ se sigue

$$\begin{aligned} |a| &\geq 0 \\ |a| + t &\geq t \\ (|a| + t)^{p-1} &\leq t^{p-1} \\ t^{p-1} - (|a| + t)^{p-1} &\geq 0 \\ \varphi_a'(t) &\geq 0 \end{aligned}$$

para todo $t > 0$.
Así φ_a es creciente, entonces para todo $t > 0$ se tiene

$$\varphi_a(t) \geq \varphi_a(0) = |a|^p + 0 - (|a| + 0)^p = 0.$$

Sea $b \in \mathbb{R}$, si $b = 0$ el resultado se sigue directamente, cuando $b \neq 0$ tomando $t = |b| > 0$ en la igualdad anterior se obtiene

$$|a|^p + |b|^p - (|a| + |b|)^p \geq 0 \Leftrightarrow (|a| + |b|)^p \leq |a|^p + |b|^p$$

Dado que a, b fueron arbitrarios se sigue el resultado

$$|a + b|^p \leq (|a| + |b|)^p \leq |a|^p + |b|^p,$$

tomando $C_p = 1$ se tiene el resultado. □

C.1. Teorema de Banach-Alouglu

Teorema C.2 ([9] Banach-Alouglu)**.** Sea E un espacio de Banach reflexivo. Si $B \subset E$ es acotado, entonces B es relativamente compacto en la topología débil de E.

Corolario C.3 ([11])**.** Sea E un espacio de Banach reflexivo, entonces toda sucesión acotada en E, admite una subsucesión convergente en la topologóa débil de E.

C.2. Teorema de la divergencia de Gauss-Green

Teorema C.4 ([19] Teorema de la divergencia de Gauss-Green)**.** Si $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un conjunto abierto no vacío y acotado, con frontera $\partial\Omega$ de clase C^1. Entonces

$$\int_\Omega \operatorname{div}(G)dx = \int_{\partial\Omega} G \cdot nds \quad \forall G \in C^1(\overline{\Omega};\mathbb{R}^N),$$

donde n es el vector unitario normal exterior a $\partial\Omega$.

Observación 34. Se sabe que

$$\operatorname{div}(G) = \textstyle\sum_{k=1}^N \frac{\partial G_k(z)}{\partial z_k}.$$

Si $u : \Omega \to \mathbb{R}$ es dos veces diferenciable, entonces

$$\operatorname{div}(\nabla u) = \triangle u.$$

Además, si $g : \Omega \to \mathbb{R}$ es parcialmente diferenciable en Ω y $G \in C^1(\overline{\Omega};\mathbb{R}^N)$, entonces

$$\operatorname{div}(gG) = g\operatorname{div}(G) + \nabla g \cdot G.$$

C.3. Gradiente del funcional de energía asociado al problema de Dirichlet

Se sabe que el funcional $||\cdot||_a^2$ es diferenciable en $H_0^1(\Omega)$ con

$$D(||u||_a^2)v = 2a(u,v)$$

para todo $u, v \in H_0^1(\Omega)$.
Sea $u \in H_0^1(\Omega)$, como $D(||u||_a^2) \in (H_0^1(\Omega))^*$, entonces gracias al teorema de representación de Riesz, existe un único $\nabla\, ||u||_a^2 \in H_0^1(\Omega)$, tal que

$$D(||u||_a^2)v = a(\nabla\, ||u||_a^2, v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

entonces $a(\nabla ||u||_a^2 - 2u, v) = 0$, como a define un producto escalar para $H_0^1(\Omega)$ se puede concluir

$$\nabla ||u||_a^2 = 2u.$$

De la linealidad del gradiente se obtiene

$$\nabla I(u) = \nabla \left(\frac{1}{2} ||u||_a^2 - \lambda \Phi(u) \right) = u - \lambda \nabla \Phi(u) \quad u \in H_0^1(\Omega)$$

Bibliografía

[1] Alama, S. y del Pino, M. Solutions of elliptic equations with indefinite nonlinearities via Morse theory and linking. *Annales de l'I. H. P., section C, tome 13*, 1:95–115, 1996.

[2] Alama, S. y Tarantello, G. Elliptic Problems with Nonlinearities Indefinite in Sign. *Journal of Functional Analysis*, 141:159–215, 1996.

[3] Amann, H. Maximum Principles and Principal Eigenvalues. *Ten Mathematical Essays on Approximation in Analysis and Topology*, 1:1–60, 2005.

[4] Ambrosetti, A. y Malchiodi, A. *Nonlinear Analysis and Semilinear Elliptic Problems*. Cambridge Studies in Advances Mathematics. Cambridge University Press, Estados Unidos de América, 2006.

[5] Ambrosetti, A. y Prodi, G. *A Primer of Nonlinear Analysis*. Cambridge Studies in Advances Mathematics. Cambridge University Press, Estados Unidos de América, 1993.

[6] Ambrosetti, A. y Rabinowitz, P. H. Dual variational methods in critical point theory and applications. *Journal of Functional Analysis*, 14:349–381, 1973.

[7] An, Y.-C. y Suo, H.-M. Multiplicity of Solutions for Neumann Problems for Semilinear Elliptic Equations. *Abstract and Applied Analysis*, 2014:1–11, 2014.

[8] Auchmuty, G. Steklov Eigenproblems and the Representation of Solutions of Elliptic Boundary Value Problems. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 25:321–348, 2011.

[9] Badiale, M. y Serra, E. *Semilinear Elliptic Equation for Beginners*. Universitext. Springer, Estados Unidos de América, 2011.

[10] Berestycki, H., Capuzzo-Dolcetta, I., y Nirenberg, L. Variational methods for indefinite superlinear homogeneous elliptic problems. *Nonlinear Differential Equations and Applications*, NoDEA 2:553–572, 1995.

[11] Brezis, H. *Functional Analysis, Sobolev Space and Partial Differential Equation*. Universitext. Springer, Estados Unidos de América, 2011.

[12] Brezis, H. y Nirenberg, L. Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical sobolev exponents. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 36:437–477, 1983.

[13] Calahorrano, M. Existencia de soluciones positivas para problemas no lineales con discontinuidades indefinidas. *Sociedad Matemática Mexicana*, 13:96–101, 2007.

[14] Calahorrano, M. y Cevallos, I. Existencia de Soluciones Radiales para Problemas Semilineales Elípticos Indefinidos. *Selecciones Matemáticas*, 7:42–51, 2020.

[15] Cartan, H. *Differential Caculus*. HERMANN Arts and Science/ KERSHAW PUBLISHING COMPANY LTD, Francia, 1971.

[16] Chabrowski, J. y Ruf, B. On the critical Neumann problem with lower order perturbation. *Colloquium Mathematicum*, 94:141–150, 2004.

[17] Evans, L. *Partial Differential Equation*. American Mathematical Society, Rhode Island, Estados Unidos de América, 2010.

[18] Felli, V., Noris, B., y Ognibene, R. Eigenvalues of the Laplacian with moving mixed boundary conditions: the case of disappearing Dirichlet region. *Calculus of Variations*, 1:1–27, 2021.

[19] Gasinski, L. y Papageorgiou, S. *Nonlinear Analysis*. Chapman Hall/CRC Taylor Francis Group, Estados Unidos de América, 2005.

[20] Hofer, H. A Geometric Description of the Neighbourhood of a Critial Point Given by the Mountain- Pass Theorem. *London Mathematical Society*, s2-31:566–570, 1984.

[21] Hsu, T.-S. y Lin, H.-L. Three positive solutions for semilinear elliptic problems involving concave and convex nonlinearities. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, 142A:15–135, 2012.

[22] Mugnai, D. Multiplicity of critical points in presence of a linking: application to a superlinear boundary value problem. *Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA*, 11:379–391, 2004.

[23] Nordmann, S. Maximum Principle and principal eigenvalue in unbounded domains under general boundary conditions. *HAL open science*, 1:1–21, 2021.

[24] Rabinowitz, P. H. *Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations*. American Mathematical Society and Conference Board Mathematical Sciences, Estados Unidos de América, 1986.

[25] Rabinowitz, P. H. y Moser, J. K. Pairs of Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Partial Differential Equations. *Indiana University Mathematics*, 23:173–186, 1973.

[26] Struwe, M. *Variational Methods Applications to Nonlinear Partial Differential Equation and Hamiltonian Systems*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg Gmbh, Alemania, 1990.

[27] Willem, M. *Minimax Theorems*. Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, Estados Unidos de América, 1996.

[28] Yao, Z. Multiple Solutions for a Class of Semilinear Elliptic Equations with Nonlinear Boundary Conditions. *Applied Mathematics*, 5:90–95, 2014.