ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS

PROBLEMAS NO LINEALES DE TIPO AMBROSETTI-PRODI

UN PROBLEMA DE TIPO AMBROSETTI-PRODI CON CONDICIÓN DE FRONTERA DIRICHLET HOMOGÉNEA CON EL P-LAPLACIANO

TRABAJO DE INTEGRACIÓN CURRICULAR PRESENTADO COMO REQUISITO PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE MATEMÁTICO

JHOEL NAPOLEÓN TORRES ULLOA

jhoel.torres@epn.edu.ec

DIRECTOR: MARCO VINICIO CALAHORRANO RECALDE PH.D.

marco.calahorrano@epn.edu.ec

DMQ, SEPTIEMBRE 2022

CERTIFICACIONES

Yo, JHOEL NAPOLEÓN TORRES ULLOA, declaro que el trabajo de integración curricular aquí descrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y, que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

JHOEL NAPOLEÓN TORRES ULLOA

Certifico que el presente trabajo de integración curricular fue desarrollado por JHOEL NAPOLEÓN TORRES ULLOA, bajo mi supervisión.

MARCO VINICIO CALAHORRANO RECALDE Ph.D.
DIRECTOR

DECLARACIÓN DE AUTORÍA

A través de la presente declaración, afirmamos que el trabajo de integración curricular aquí descrito, así como el producto resultante del mismo, es público y estará a disposición de la comunidad a través del repositorio institucional de la Escuela Politécnica Nacional; sin embargo, la titularidad de los derechos patrimoniales nos corresponde a los autores que hemos contribuido en el desarrollo del presente trabajo; observando para el efecto las disposiciones establecidas por el órgano competente en propiedad intelectual, la normativa interna y demás normas.

JHOEL NAPOLEÓN TORRES ULLOA

MARCO VINICIO CALAHORRANO RECALDE Ph.D.

RESUMEN

En el presente trabajo se busca determinar la existencia de al menos una solución débil para un problema de tipo Ambrosetti-Prodi con condición de frontera Dirichlet homogéneo que involucre el operador p-Laplaciano. Para ello, iniciamos proponiendo hipótesis sobre nuestro problema, a fin de estudiarlo bajo técnicas variacionales. Probaremos que dichas hipótesis implican una condición de acotamiento muy útil al momento de estudiar el funcional asociado al problema. Demostraremos que dichas hipótesis también implican condiciones de tipo Ambrosetti-Prodi y finalizamos mostrando la existencia de una solución débil siendo esta un mínimo para el funcional asociado al problema.

Palabras clave: Ambrosetti-Prodi, p-Laplaciano, métodos variacionales.

ABSTRACT

In this work we want to determine the existence of at least one weak solution of an Ambrosetti-Prodi problem with homogeneous Dirichlet boundary condition involving p-Laplacian operator. For that purpose, we begin proposing hypothesis on the problem in order to study it under variational techniques. We show that these hypotheses imply a boundness condition very useful to study the functional associated to the problem. We are going to prove that the hypothesis also imply the Ambrosetti-Prodi conditions and we end showing the existence of a weak solution being this a minimum point for the functional associated to the problem.

Keywords: Ambrosetti-Prodi, p-Laplacian, variational methods.

Índice general

Capítulo 1

Descripción del componente desarrollado

El análisis de este componente se centra en la existencia de soluciones con condición de frontera Dirichlet homogéneo para un problema de tipo Ambrosetti-Prodi que involucre el p-Laplaciano, abordado desde un esquema variacional. En este ambiente se pretende estudiar el funcional asociado al problema con el fin de hallar un punto crítico, en específico, un mínimo. Todo lo descrito se consigue haciendo uso de un resultado de minimización descrito en el **Teorema 1.4.4.1**.

1.1. Objetivo general

Estudiar el problema de tipo Ambrosetti-Prodi con condición de frontera Dirichlet homogéneo para el operador p-Laplaciano bajo técnicas variacionales.

1.2. Objetivos específicos

1. • Analizar de forma detallada el artículo "The Ambrosetti–Prodi Problem for the p-Laplace Operator" [4] y determinar la existencia de soluciones bajo técnicas variacionales.

2. • • Encontrar hipótesis adecuadas sobre f que permitan abordar el problema (1) de manera variacional.

1.3. Alcance

Se hace una recopilación y estudio bibliográfico de trabajos donde se abordan métodos variacionales para resolver ecuaciones diferenciales parciales de tipo Ambrosetti-Prodi que involucren al operador p-Laplaciano. En particular, se hace un estudio crítico del material recopilado, lo que nos permite contrastar los métodos variacionales con los cuales abordamos los resultados estudiados en [4] y finalmente se encuentra al menos una solución usando el método variacional más apropiado precisando las hipótesis adecuadas que nos permitan llevar acabo lo mencionado. En el contexto de nuestras hipótesis la técnica más apropiada es haciendo uso de los métodos directos del cálculo de variaciones.

1.4. Marco teórico

En esta sección se presentan definiciones y propiedades importantes para aplicarlos en capítulos posteriores. Para profundizar en estos temas se puede referir en gran medida a [6] y [11].

1.4.1. Notaciones previas

- Se considera $\mathbb{R}^N$, con $N \geq 3$, equipado de la norma euclidiana notada por $|\cdot|$.
- Se denota por $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ a un abierto no vacío y acotado de $\mathbb{R}^N$, el cual está dotado de la medida de Lebesgue dx, con $\partial\Omega$ su frontera lo suficientemente regular.
- Para todo $1 \leq p \leq +\infty$, se representa por p' al exponente conjugado de p. Esto es, que para todo $1 \leq p \leq +\infty$, se verifica la igualdad $1/p + 1/p' = 1$.
- Se denota por X a un espacio vectorial arbitrario y como $\|\cdot\|$ a una norma asociada a X.
- Si X es un espacio de Banach, se escribe X' como su dual topológico.

1.4.2. Definiciones previas

Definición 1.4.2.1. *(**Diferencial y derivada de Fréchet**)([6], p.11-12)*
Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach, $U \subseteq X$ un abierto no vacío y $F : U \to \mathbb{R}$ un funcional. Se dice que F es Fréchet diferenciable en $u \in U$ si existe $A \in X'$ tal que

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{F(u+h) - F(u) - A(h)}{\|h\|} = 0.$$

*La existencia de $A \in X'$ es única y para todo $u \in U$ se suele escribir $F'(u) := A$. Al funcional $F'(u) \in X'$ se le conoce como el **diferencial de Fréchet de** F **en** $u \in U$. En el caso que F sea Fréchet diferenciable para todo $u \in U$, se dice simplemente que F es diferenciable en U y de esta forma se puede definir el operador*

$$\begin{aligned} F' : U &\longrightarrow X' \\ u &\longmapsto F'(u), \end{aligned}$$

*F' se llama la **derivada de Fréchet de** F. En el caso que F' sea continuo se dice que F es de clase C^1 en U, o lo que es lo mismo, $F \in C^1(U)$.*

Definición 1.4.2.2. *(**Diferencial y derivada de Gâteaux**)([6], Definition 1.3.7, p.14)*
Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach, $U \subseteq X$ un abierto no vacío y $F : U \to \mathbb{R}$ un funcional. Se dice que F es Gâteaux diferenciable en $u \in U$ si existe $B \in X'$ tal que

$$\lim_{t\to 0} \frac{F(u+th) - F(u)}{t} = B(h) \quad \forall h \in X.$$

*La existencia de $B \in X'$ es única y para todo $u \in U$ donde F sea Gâteaux diferenciable se escribe $F'_G(u) := B$. Al funcional $F'_G(u) \in X'$ se le conoce como el **diferencial de Gâteaux de** F **en** $u \in U$. Si F es Gâteaux diferenciable para todo $u \in U$, entonces se dice que F es G-diferenciable en U y el operador*

$$\begin{aligned} F'_G : U &\longrightarrow X' \\ u &\longmapsto F'_G(u), \end{aligned}$$

*se llama la **derivada de Gâteaux de** F.*

Por un lado, se tiene que la diferenciablilidad de Fréchet implica la diferenciablilidad de Gâteaux, pero el recíproco en general no es cierto. Para que se cumpla la implicación recíproca se necesita una hipótesis adicional que se expone en el siguiente resultado.

Teorema 1.4.2.1. *Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach, $U \subseteq X$ un abierto no vacío y $F : U \to \mathbb{R}$ un funcional. Si F es G-diferenciable en U y F'_G es continua en $u \in U$, entonces F es Fréchet diferenciable en $u \in U$ y además $F'(u) = F'_G(u)$.*

Demostración. (Ver [1], Theorem 1.9, p.14).

□

Observación 1.4.2.1.1. *Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y F G-diferenciable en X. Para calcular el diferencial de Gâteaux de F en $u \in X$, se suele proceder de la siguiente forma*

$$F'_G(u)[h] = \left[\frac{d}{dt}F(u+th)\right]_{t=0} \qquad \forall h \in X,$$

donde $\left[\frac{d}{dt}F(u+th)\right]_{t=0}$ es la derivada de F en u en la dirección de h.

Definición 1.4.2.3. *([11], Definición 1.2.1, p.10) Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach reflexivo y sea $I : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Se dice que I es **débilmente semicontinuo inferiormente** (d.c.s.i) si y sólo si*

$$\liminf_{k\to\infty} I(u_k) \geq I(u),$$

siempre que $u_k \rightharpoonup u$ débilmente en X.

Teorema 1.4.2.2. *La norma en todo espacio de Banach es débilmente semicontinua inferiormente.*

Demostración. Ver ([11], Proposición 1.2.18, p. 17). □

Definición 1.4.2.4. *(**Funcional coercivo**)([8], Definition 2.2.6, p.72) Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. El funcional $I : A \subseteq X \to \mathbb{R}$ se llama **coercivo** en A si satisface la condición*

$$\lim_{n\to\infty} I(x_n) = +\infty,$$

para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ *tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = +\infty.$$

Definición 1.4.2.5. *(**Operador p-Laplaciano**)([6], p.86)*
Dados $p > 1$ *y* $u : U \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *con* U *abierto no vacío, se considera el p-Laplaciano como el operador diferencial no lineal de segundo orden definido en términos de divergencia como*

$$\Delta_p u := div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u).$$

En el caso que $p = 2$ *nos encontramos con el operador Laplaciano, podríamos decir que el operador* p*-Laplaciano es su generalización al contexto cuasilineal.*

Definición 1.4.2.6. *(**Espacios de Sobolev** $W^{1,p}$ **y** $W_0^{1,p}$)([7], p. 263)*
Dados $1 \leq p < \infty$ *y* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ *un abierto no vacío, se define*

$$W^{1,p}(\Omega) := \left\{ u \in L^p(\Omega) : \begin{array}{cc} \exists g_1, \ldots, g_n \in L^p(\Omega) & \textit{tal que} \\ \displaystyle\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \varphi \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), & \forall i = 1, \ldots, N \end{array} \right\}.$$

El cual está equipado de la norma

$$\|u\|_{W^{1,p}} := \|u\|_{L^p} + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p} \qquad \forall u \in W^{1,p}(\Omega).$$

Como en ([6], p.86), definimos

$$W_0^{1,p}(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W^{1,p}(\Omega)},$$

donde $C_0^\infty(\Omega)$ *es el espacio de todas las funciones de clase* C^∞ *a soporte compacto en* Ω*.*

Algunas propiedades de este espacio se presentan a continuación.

Teorema 1.4.2.3. *([6], Theorem 2.6.2, p.87) Sean* $N \geq 3$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ *un abierto acotado no vacío y* $1 < p < N$*. Entonces,*

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \forall q \in [1, p^*],$$

donde $p^* := \frac{Np}{N-p}$ es el exponente crítico de Sobolev para la inmersión de $W_0^{1,p}(\Omega)$ en L^q. Además, la inmersión es compacta para todo $q \in [1, p^*)$.

Teorema 1.4.2.4. ***(Desigualdad de Poincaré para** $W_0^{1,p}$**)***(*[6], *Theorem 2.6.3, p.87)*
Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto no vacío y acotado. Entonces, existe $C > 0$, que depende solamente de Ω, tal que

$$\int_\Omega |u|^p \, dx \leq C \int_\Omega |\nabla u|^p \, dx \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Observación 1.4.2.4.1. *Si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ es abierto y acotado, gracias a la desigualdad de Poincaré se puede probar que*

$$\|u\| := \left(\int_\Omega |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

es una norma sobre $W_0^{1,p}(\Omega)$, equivalente a la norma usual.

1.4.3. Resultados para el p-Laplaciano

En esta sección se presentan algunos resultados clásicos que involucran al p-Laplaciano los cuales se pueden encontrar en [6].

Teorema 1.4.3.1. *([6], Theorem 2.6.4, p.87) Sean $N \geq 3$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un abierto no vacío y $1 < p < \infty$. El funcional*

$$\begin{aligned} J : W_0^{1,p}(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto J(u) := \int_\Omega |\nabla u|^p dx, \end{aligned}$$

es diferenciable en $W_0^{1,p}(\Omega)$ y para cada $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$,

$$J'(u)[v] = p \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

De la **Observación 1.4.2.4.1** y gracias a este resultado obtenemos un ejemplo de un espacio de Banach cuya norma es diferenciable.

Una herramienta importante para nuestro trabajo es acerca del primer valor propio para el operador p-Laplaciano caracterizado por Aomar

Anane en [2] y [3]. Considerando el problema con condiciones de frontera Dirichlet homogéneas

$$(Vp)\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda|\nabla u|^{p-2}u, & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

con $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ un abierto acotado y $1 < p < +\infty$. Decimos que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ no idénticamente nula, es una función propia si

$$\int_\Omega |u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\varphi \, dx - \lambda \int_\Omega |u|^{p-2}u\varphi dx = 0 \qquad \forall\varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

El número real correspondiente λ se llama valor propio.
Al primer valor propio del del operador p-Laplaciano denotado por λ_1, como en [2], se lo caracteriza por

$$\lambda_1 := \text{ínf}\left\{\frac{\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx}{\int_\Omega |u|^p \, dx} \ : \ u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}\right\},$$

Algunas propiedades de λ_1 se describen en la sección cuatro de [9]. Entre ellas tenemos tenemos:

- $\lambda_1 > 0$.
- El valor propio λ_1 es simple en cualquier dominio acotado. Es decir, si w es una función propia asociada a λ_1, entonces cualquier otra función propia asociada a λ_1 es múltiplo constante de w.
- Una función propia positiva es siempre una función propia asociada a λ_1.

Finalmente, gracias a la desigualdad de Poincaré en $W_0^{1,p}(\Omega)$, se puede afirmar que

$$\int_\Omega |u|^p \, dx \leq \frac{1}{\lambda_1}\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}. \tag{1.1}$$

1.4.4. Puntos críticos

Dado que nuestro trabajo se resume a encontrar los puntos críticos de un cierto funcional asociado a un problema de tipo Ambrosetti-Prodi que involucre al operador p-Laplaciano, es importante describir los componentes que serán de utilidad.

Consideremos un funcional $I \in C^1(X)$ con X un espacio de Banach. Decimos que I es acotado inferiormente si existe una constante $M \in \mathbb{R}$ tal que

$$M \leq I(u) \quad \forall u \in X.$$

Además, decimos que $y \in X$ es un punto crítico de I si I es diferenciable en y e $I'(y) = 0$, es decir,

$$I'(y)[x] = 0 \quad \forall x \in X.$$

El siguiente resultado será utilizado en nuestro problema.

Teorema 1.4.4.1. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach reflexivo y sea $I : X \to \mathbb{R}$ un funcional débilmente semicontinuo inferiormente y coercivo. Entonces, existe al menos un $u_o \in X$ tal que*

$$I(u_o) = \inf_{u \in X} I(u).$$

Demostración. Ver ([11], Teorema 1.2.3, p.11). □

Capítulo 2

Metodología

En el presente capítulo se describe el método variacional utilizado para encontrar al menos una solución del problema de tipo Ambrosetti-Prodi

$$(*)\begin{cases} -\Delta_p u = f(u) + t\phi + h, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

donde $N \geq 3,\ \Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ es un abierto acotado y no vacío, $2 < p < N$ y $t \geq 0$. Además, $h, \phi \in L^\infty(\Omega)$ con ϕ positiva y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua que satisface:

$$\mu := \limsup_{u \to -\infty} \frac{f(u)}{|u|^{p-2}u} < \lambda_1; \tag{2.1}$$

$$\lambda_1 < \liminf_{u \to +\infty} \frac{f(u)}{|u|^{p-2}u}, \tag{2.2}$$

con λ_1 el primer valor propio del operador p-Laplaciano.

Comenzamos describiendo qué entendemos por solución débil del problema $(*)$ y seguidamente es importante precisar ciertas hipótesis sobre f, para abordar $(*)$ de manera variacional. También, probamos que estas hipótesis implican las condiciones de tipo Ambrosetti-Prodi introducidas en (2.1) y (2.2) . Además, demostramos en el **Teorema 3.3.0.1** que existen $a, b > 0$ con $b \leq \lambda_1$, tales que para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$|f(t)| \leq a + b|t|^{p-1}.$$

Esta última condición sobre f nos permite desarrollar la teoría necesaria a través de un método variacional. Para probar la existencia de al menos una solución débil de $(*)$ haremos uso de los métodos directos del cálculo de variaciones descritos en [11], para lo cual definimos sobre $W_0^{1,p}(\Omega)$ el funcional asociado a nuestro problema, denotado por J, cuyos puntos críticos serán soluciones débiles de $(*)$.

De la misma manera, haciendo uso de los métodos directos del cálculo de variaciones, en el apartado de resultados probamos que J posee al menos un mínimo. Para ello seguimos el siguiente esquema:

Primero, probamos que el funcional J está bien definido (**Teorema 3.4.0.1**). A continuación, se muestra que J es diferenciable en $W_0^{1,p}(\Omega)$, lo cual se detalla en el **Teorema 3.5.0.1**. Adicionalmente, probamos que J admite por lo menos un punto crítico y para esto, dado que $W_0^{1,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach reflexivo, basta probar que J es coercivo (**Teorema 3.5.0.2**), y débilmente semicontinuo inferiormente (**Teorema 3.5.0.3**). Finalmente, gracias al **Teorema 1.4.4.1** concluimos que el funcional J admite al menos un punto crítico. Así, podemos afirmar que el problema $(*)$ admite por lo menos una solución débil.

Capítulo 3

Resultados, conclusiones y recomendaciones

3.1. Resultados

Recordemos que nuestro problema de tipo Ambrosetti-Prodi está dado por

$$(*)\begin{cases} -\Delta_p u = f(u) + t\phi + h, & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

donde $N \geq 3$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un abierto acotado no vacío, $2 < p < N$ y $t \geq 0$. Además $h, \phi \in L^\infty(\Omega)$ con ϕ positiva y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua que satisface

$$\mu := \limsup_{u \to -\infty} \frac{f(u)}{|u|^{p-2}u} < \lambda_1; \tag{3.1}$$

$$\lambda_1 < \liminf_{u \to +\infty} \frac{f(u)}{|u|^{p-2}u}. \tag{3.2}$$

3.2. Solución débil

Dado que trabajamos a través de un esquema variacional es indispensable obtener la formulación variacional de $(*)$. Multiplicando la ecuación del problema por $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$, vemos que

$$-\Delta_p u\varphi = f(u)\varphi + t\phi\varphi + h\varphi.$$

Integrando sobre Ω, vemos que

$$\int_\Omega -\Delta_p u\varphi \, dx = \int_\Omega f(u)\varphi \, dx + t\int_\Omega \phi\varphi + \int_\Omega h\varphi \, dx. \tag{3.3}$$

Seguidamente, notamos que

$$\Delta_p u = div\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right),$$

de modo que usando integración por partes y la condición de frontera, para cada $i = 1, \ldots, N$, tenemos que

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\varphi \; dx = -\int_\Omega \left(|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \cancelto{0}{\int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial \eta}\left(|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)}\varphi \; dx,$$

es decir,

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\varphi \; dx = -\int_\Omega \left(|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \; dx \quad \forall i = 1, \ldots, N.$$

De esta última igualdad obtenemos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega -\Delta_p u\varphi \, dx &= \int_\Omega -div(|\nabla u|^{p-2}u)\varphi \; dx \\
&= \int_\Omega \sum_{i=1}^{N} -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\varphi \; dx \\
&= \sum_{i=1}^{N}\int_\Omega -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\varphi \; dx \\
&= \sum_{i=1}^{N}\int_\Omega \left(|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \; dx \\
&= \int_\Omega \sum_{i=1}^{N}\left(|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \; dx \\
&= \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx.
\end{aligned}$$

En resumen, se ha conseguido que

$$\int_{\Omega} -\Delta_p u \varphi \, dx = \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx.$$

Reemplazando esta última igualdad en (3.3), obtenemos que

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx - \int_{\Omega} f(u) \, \varphi \, dx - t \int_{\Omega} \phi \varphi - \int_{\Omega} h \, \varphi \, dx = 0, \tag{3.4}$$

para cada $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Decimos que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ es una solución débil del problema $(*)$ si u verifica (3.4).

3.3. Hipótesis sobre f

En esta sección describimos las hipótesis que imponemos sobre f las mismas que nos ayudarán para abordar el problema $(*)$ desde un esquema variacional. Siguiendo las ideas de [5], suponemos las siguientes condiciones sobre f:

(f_1) Existen $b_1, C_1 > 0$, con $b_1 < \lambda_1$, tales que para todo $s \leq 0$,

$$f(s) \geq b_1 |s|^{p-2} s - C_1.$$

(f_2) Existen $b_2, C_2 > 0$, con $b_2 < \lambda_1$, tales que para todo $s \leq 0$,

$$f(s) \leq b_2 |s|^{p-2} s + C_2.$$

(f_3) Existen $b_3, C_3 > 0$ con $b_3 < \lambda_1$ y $p < q < p^*$ tales que para todo $s \geq 0$,

$$f(s) \geq b_3 |s|^{q-2} s - C_3.$$

(f_4) Existen $b_4, C_4 > 0$ con $b_4 < \lambda_1$ tales que que para todo $s \geq 0$,

$$f(s) \leq b_4 |s|^{p-2} s + C_4.$$

Notemos que (f_1) implica (2.1). En efecto, para todo $s \leq 0$, de (f_1) tenemos que

$$\frac{f(s)}{|s|^{p-2}s} \leq b_1 - \frac{C_1}{|s|^{p-2}s}.$$

Tomando límite superior cuando $s \to -\infty$ y dado que $b_1 < \lambda_1$, conseguimos que

$$\limsup_{s \to -\infty} \frac{f(s)}{|s|^{p-2}s} \leq \lambda_1.$$

Por lo tanto, se verifica la condición (2.1).
Por otro lado, (f_3) implica (2.2). En efecto, para todo $s > 0$, de (f_3) vemos que

$$\begin{aligned}
\frac{f(s)}{|s|^{p-2}s} &\geq \frac{b_3|s|^{q-2}\cancel{s}}{|s|^{p-2}\cancel{s}} - \frac{C_3}{|s|^{p-2}s} \\
&\geq b_3|s|^{q-p} - \frac{C_3}{|s|^{p-2}s}.
\end{aligned}$$

Tomando el límite inferior cuando $s \to +\infty$ y dado que $q-p > 0$, obtenemos que

$$\lambda_1 < \liminf_{s \to +\infty} \frac{f(s)}{|s|^{p-2}s} = +\infty.$$

Por lo tanto, se satisface la condición (2.2).

Así, al tomar $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tal que se verifiquen (f_1)-(f_4), estamos garantizando que $(*)$ es un problema de tipo Ambrosetti-Prodi con condición de frontera Dirichlet homogéneo que involucra el operador p-Laplaciano.

Ahora, mostremos que estas hipótesis impuestas sobre f implican una condición que será de utilidad para demostrar que el funcional asociado a $(*)$, denotado por J, admite puntos críticos. Esta condición la presentamos en el siguiente teorema.

Teorema 3.3.0.1. *Sean $p > 2$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua que verifica $(f_1), (f_2), (f_3)$ y (f_4). Entonces, existen $a, b > 0$ con $b < \lambda_1$, tales que para todo $s \in \mathbb{R}$,*

$$|f(s)| \leq a + b|s|^{p-1}. \tag{3.5}$$

Demostración. Sea $s \in \mathbb{R}$. Se tienen los siguientes dos casos:

(i) Primer caso: $s \leq 0$.

De las condiciones (f_1) y (f_2), se tiene que existen $b_1, b_2, C_1, C_2 > 0$, con $b_1, b_2 < \lambda_1$, tales que

$$\begin{aligned} b_1|s|^{p-2}s - C_1 \leq f(s) \leq b_2|s|^{p-2}s + C_2 &\Leftrightarrow \frac{b_1|s|^{p-1}s}{|s|} - C_1 \leq f(s) \leq \frac{b_2|s|^{p-1}s}{|s|} + C_2 \\ &\Leftrightarrow \frac{b_1|s|^{p-1}s}{-s} - C_1 \leq f(s) \leq \frac{b_2|s|^{p-1}s}{-s} + C_2 \\ &\Leftrightarrow -b_1|s|^{p-1} - C_1 \leq f(s) \leq -b_2|s|^{p-1} + C_2. \end{aligned}$$

Puesto que $b_2 > 0$, de la última desigualdad, vemos que

$$-b_1|s|^{p-1} - C_1 \leq f(s) \leq -b_2|s|^{p-1} + C_2 \leq b_2|s|^{p-1} + C_2.$$

y por lo tanto

$$-b_1|s|^{p-1} - C_1 \leq f(s) \leq b_2|s|^{p-1} + C_2.$$

Tomando $b_* := \text{máx}\{b_1, b_2\}$ y $a_* := \text{máx}\{C_1, C_2\}$, tenemos que

$$-b_*|s|^{p-1} - a_* \leq -b_1|s|^{p-1} - C_1 \leq f(s) \leq b_2|s|^{p-1} + C_2 \leq b_*|s|^{p-1} + a_*.$$

En consecuencia,

$$|f(s)| \leq a_* + b_*|s|^{p-1} \quad \forall s \leq 0, \tag{3.6}$$

pues $s \leq 0$ es arbitrario.

(i) Segundo caso: $s > 0$.
De las condiciones (f_3) y (f_4), se tiene que existen $b_3, b_4, C_3, C_4 > 0$, con $b_3, b_4 < \lambda_1$ y $p < q < p^*$, tales que

$$\begin{aligned} b_3|s|^{q-2} - C_3 \leq f(s) \leq b_4|s|^{p-2} + C_4 &\Leftrightarrow \frac{b_3|s|^{q-1}s}{|s|} - C_3 \leq f(t) \leq \frac{b_4|s|^{p-1}s}{|s|} + C_4 \\ &\Leftrightarrow \frac{b_3|s|^{q-1}s}{s} - C_3 \leq f(s) \leq \frac{b_4|s|^{p-1}s}{s} + C_4 \\ &\Leftrightarrow b_3|s|^{q-1} - C_3 \leq f(s) \leq b_4|s|^{p-1} + C_4. \end{aligned}$$

Puesto que $p < q$ y $b_3 > 0$ de la última desigualdad, se sigue que

$$-b_3|s|^{p-1} - C_3 \leq b_3|s|^{q-1} - C_3 \leq f(s) \leq b_4|s|^{p-1} + C_4.$$

Tomando $b^* := \max\{b_3, b_4\}$ y $a^* := \max\{C_3, C_4\}$, se tiene que

$$-b^*|s|^{p-1} - a^* \leq -b_3|s|^{p-1} - C_3 \leq f(s) \leq b_4|s|^{p-1} + C_4 \leq b^*|s|^{p-1} + a^*.$$

Por lo tanto,

$$|f(s)| \leq a^* + b^*|s|^{p-1} \quad \forall s > 0, \tag{3.7}$$

pues $s > 0$ fue tomado de manera arbitraria.

De (3.6) y (3.7), tomando $a = \max\{a_*, a^*\}$ y $b = \max\{b_*, b^*\}$, se concluye que para todo $s \in \mathbb{R}$,

$$|f(s)| \leq a + b|s|^{p-1}.$$

□

3.4. Funcional asociado a $(*)$

A continuación, se define el funcional J sobre $W_0^{1,p}(\Omega)$ dado por

$$J(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx - \int_\Omega F(u(x))\,dx - t\int_\Omega \phi\,u\,dx - \int_\Omega h\,u\,dx, \tag{3.8}$$

para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, donde $F(s) = \int_0^s f(r)\,dr$ y $t \geq 0$. El funcional J está bien definido lo que presentamos en el siguiente teorema.

Teorema 3.4.0.1. *El funcional J introducido en (3.8) está bien definido.*

Demostración. Sea $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, como

$$J(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx - \int_\Omega F(u(x))\,dx - t\int_\Omega \phi\,u\,dx - \int_\Omega h\,u\,dx.$$

Basta con probar que todas las integrales son finitas para que J esté bien definido. Por la **Observación 1.4.2.4.1** tenemos que

$$\frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx = \frac{1}{p}\|u\|^p < +\infty. \tag{3.9}$$

Por otro lado, gracias a (3.5), vemos que para cada $s \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F(s) &\leq |F(s)| \\ &= \left| \int_0^s f(r)\, dr \right| \\ &\leq \int_0^s |f(r)|\, dr \\ &\leq \int_0^s a\, dr + b \int_0^s |r|^{p-1}\, dr \\ &\leq a|s| + \frac{b}{p}|s|^p. \end{aligned}$$

En particular,

$$F(u(x)) \leq a|u(x)| + \frac{b}{p}|u(x)|^p \quad \forall x \in \Omega. \tag{3.10}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} \int_\Omega F(u)\ dx &\leq a \int_\Omega |u|\ dx + \frac{b}{p} \int_\Omega |u|^p\ dx \\ &= a\|u\|_{L^1} + \frac{b}{p}\|u\|_{L^p}^p \\ &< +\infty, \end{aligned} \tag{3.11}$$

donde la última desigualdad se debe al **Teorema 1.4.2.3**. Finalmente, dado que $\phi, h \in L^\infty(\Omega)$, en vista del **Teorema 1.4.2.3** y la desigualdad de Hölder vemos que

$$\begin{aligned} \int_\Omega hu\ dx &\leq \|h\|_\infty \int_\Omega |u|\ dx \\ &\leq \|h\|_\infty |\Omega|\ \|u\|_{L^p} \\ &< +\infty. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Análogamente tenemos que

$$\int_\Omega \phi u\ dx < +\infty.$$

Por tanto

$$t \int_\Omega \phi u\ dx < +\infty. \tag{3.13}$$

De (3.9). (3.11), (3.12) y (3.13) afirmamos que todas las integrales del lado derecho de (3.8) existen y por ende J es un funcional bien definido.

$\square$

En la siguiente sección probaremos que J es diferenciable sobre $W_0^{1,p}(\Omega)$ y sus puntos críticos establecen soluciones débiles del problema $(*)$.

3.5. Existencia de una solución débil para $(*)$

En esta sección probaremos que $(*)$ admite por lo menos una solución débil y que esta solución es un punto crítico del funcional J asociado a $(*)$. Para lo cual debemos probar que:

- J es diferenciable en $W_0^{1,p}(\Omega)$;
- J es coercivo;
- J es d.s.c.i.

Esto lo presentamos en los siguientes tres teoremas.

Teorema 3.5.0.1. *El funcional J definido en (3.8) es diferenciable en $W_0^{1,p}(\Omega)$. Además, para todo $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$,*

$$J'(u)[v] = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_\Omega f(u)\, v \; dx - t\int_\Omega \phi\, v \; dx - \int_\Omega h\, v \; dx.$$

Demostración. Denotemos

$$J(u) := \int_\Omega P(u)\, dx,$$

con

$$P(u) := \left[\frac{1}{p}|\nabla u|^p - F(u) - t\phi\, u - h\, u\right] \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Primero, se prueba que J es Gâteaux diferenciable sobre $W_0^{1,p}(\Omega)$. Sean

$u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, dado que

$$\begin{aligned} J'_G u[v] &= \lim_{\alpha \to 0} \frac{J(u+\alpha v) - J(u)}{\alpha} \\ &= \lim_{\alpha \to 0} \frac{\int_\Omega P(u+\alpha v)\, dx - \int_\Omega P(u)\, dx}{\alpha} \\ &= \lim_{\alpha \to 0} \int_\Omega \frac{P(u+\alpha v) - P(u)}{\alpha} dx. \end{aligned}$$

Mostraremos que

$$\lim_{\alpha \to 0} \int_\Omega \frac{P(u+\alpha v) - P(u)}{\alpha}\, dx = \int_\Omega \left[|\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v - (f(u) + t\phi + h) v \right] dx.$$

De la **Observación 1.4.2.1.1** y siguiendo las ideas de ([6], p.87-90) y ([10], p.98), vemos que

$$\begin{aligned} P'_G(u)[v] &= \left[\frac{d}{d\alpha} P(u(x) + \alpha v(x)) \right]_{\alpha=0} \\ &= \left[\frac{d}{d\alpha} \left(\frac{1}{p} |\nabla(u+\alpha v)|^p - F(u+\alpha v) - t\phi\,(u+\alpha v) - h\,(u+\alpha v) \right) \right]_{\alpha=0}. \end{aligned}$$

Ahora, notemos los siguientes dos literales:

(i)

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} |\nabla(u+\alpha v)|^p &= p |\nabla(u+\alpha v)|^{p-2} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} + \alpha \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v}{\partial x_i} \\ &= p |\nabla(u+\alpha v)|^{p-2} \left[\nabla u \cdot \nabla v + \alpha |\nabla v|^2 \right]. \end{aligned}$$

(ii) Del teorema fundamental del cálculo, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} F(u+\alpha v) &= \frac{d}{d\alpha} \int_0^{u(x)+\alpha v(x)} f(s)\, ds \\ &= f(u+\alpha v) \frac{d}{d\alpha}(u+\alpha v) \\ &= f(u+\alpha v) v. \end{aligned}$$

Por lo tanto, gracias a (i) y (ii), tenemos que

$$\begin{aligned}
P_G'(u)[v] &= \left[\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{1}{p}|\nabla(u+\alpha v)|^p - F(u+\alpha v) - t\phi\left(u+\alpha v\right) - h\left(u+\alpha v\right)\right)\right]_{\alpha=0} \\
&= \left[|\nabla(u+\alpha v)|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla v + \alpha|\nabla v|^2 - f(u+\alpha v)v - t\phi v - hv\right]_{\alpha=0} \\
&= |\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla v - f(u)v - t\phi v - hv.
\end{aligned}$$

Es decir

$$P_G'(u)[v] = |\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla v - f(u)v - t\phi v - hv. \tag{3.14}$$

Además, del Teorema del valor medio de Lagrange sabemos que existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $|\beta| \le |\alpha|$ y de (3.5) vemos que para cada $x \in \Omega$,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{P(u+\alpha v) - P(u)}{\alpha}\right| &= ||\nabla(u+\beta v)|^{p-2}\nabla(u+\beta v)\cdot\nabla v - (f(u+\beta v) - t\phi - h)v| \\
&\le |\nabla(u+\beta v)|^{p-1}|\nabla v| + (a + b|u+\beta v|^{p-1} + |t\phi| + |h|)|v| \\
&\le |\nabla(u+v)|^{p-1}|\nabla v| + (a + b|u+v|^{p-1} + |t\phi| + |h|)|v|.
\end{aligned}$$

Dado que $p > 2$, entonces

$$|\nabla(u+v)|^{p-1} \le (|\nabla u| + |\nabla v|)^{p-1} \le 2^{p-2}(|\nabla u|^{p-1} + |\nabla v|^{p-1}).$$

De la misma manera

$$|u+v|^{p-1} \le 2^{p-2}(|u|^{p-1} + |v|^{p-1}).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{P(u+\alpha v) - P(u)}{\alpha}\right| &\le |\nabla(u+v)|^{p-1}|\nabla v| + (a + b|u+v|^{p-1} + |t\phi| + |h|)|v| \\
&\le 2^{p-1}(|\nabla u|^{p-1}|\nabla v| + |\nabla v|^p + b|u|^{p-1}|v| + b|v|^p) + a|v| \\
&+ |t\phi||v| + |h||v|.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

De la desigualdad de Hölder sabemos que

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-1}|\nabla v| \le \left\||\nabla u|^{p-1}\right\|_{L^{p'}} \||\nabla v|\|_{L^p}.$$

y

$$\int_{\Omega} |u|^{p-1}|v| \leq \left\| |u|^{p-1} \right\|_{L^{p'}} \| |v| \|_{L^p}.$$

De estas dos últimas desigualdades y de (3.15) vemos que

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \left| \frac{P(u+\alpha v) - P(u)}{\alpha} \right| &\leq 2^{p-1} \left(\left\| |\nabla u|^{p-1} \right\|_{L^{p'}} \| |\nabla v| \|_{L^p} + b \left\| |u|^{p-1} \right\|_{L^{p'}} \| |v| \|_{L^p} \right. \\ &\quad \left. + \| |\nabla v| \|_{L^p}^p + b \| |v| \|_{L^p}^p \right) + \|v\|_{L^1} \left(a + |t| \|\phi\|_{\infty} + \|h\|_{\infty} \right) \\ &< \infty.\end{aligned}$$

Lo cual muestra que el integrando de la parte izquierda de esta última desigualdad pertenece a $L^1(\Omega)$. Por consiguiente, del Teorema de convergencia dominada de Lebesgue y (3.14), tenemos que

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha \to 0} \int_{\Omega} \frac{P(u+\alpha v) - P(u)}{\alpha}\, dx &= \int_{\Omega} \lim_{\alpha \to 0} \frac{P(u+\alpha v) - P(u)}{\alpha}\, dx \\ &= \int_{\Omega} P'_G u[v]\, dx \\ &= \int_{\Omega} \left[|\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v - (f(u) + t\phi + h) v \right] dx.\end{aligned}$$

Así

$$J'_G u[v] = \int_{\Omega} \left[|\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v - (f(u) + t\phi + h) v \right] dx.$$

Lo cual prueba que J es es Gâteaux diferenciable sobre $W_0^{1,p}(\Omega)$, pues $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ fueron tomados de manera arbitraria. Ahora, probemos que para cada $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, se verifica que $J'_G(u) = J'(u)$. Para lo cual basta probar que el mapa

$$\begin{aligned} J'_G : W_0^{1,p}(\Omega) &\to \left(W_0^{1,p}(\Omega) \right)' \\ u &\to J'_G(u), \end{aligned}$$

es continuo. Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u \quad \text{en } W_0^{1,p}(\Omega).$$

También, sea $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ una subsucesión de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que :

(a) $u_{n_k} \to u$ en $L^p(\Omega)$ cuando $k \to \infty$.

(b) $u_{n_k}(x) \to u(x)$ c.t.p en Ω cuando $k \to \infty$.

Por facilidad denotaremos a la subsucesión como $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$. De la desigualdad triangular, para cada $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, tenemos que

$$\begin{aligned}
&|(J_G'(u_n) - J_G'(u))[v]| \\
&= \left| \int_\Omega \left[(|\nabla u_n|)^{p-2}\nabla u_n - (|\nabla u|)^{p-2}\nabla u)\nabla v + (f(u) - f(u_n))v \right] \, dx \right| \\
&\leq \int_\Omega ||\nabla u_n|)^{p-2}\nabla u_n - (|\nabla u|)^{p-2}\nabla u||\nabla v| \, dx + \int_\Omega |f(u) - f(u_n)||v| \, dx \\
&\leq \int_\Omega (|\nabla u_n|)^{p-1} + |\nabla u|)^{p-1})|\nabla v| \, dx + \int_\Omega |f(u) - f(u_n)||v| \, dx. \qquad (3.16)
\end{aligned}$$

Ahora, de la desigualdad de Hölder

$$\int_\Omega |f(u) - f(u_n)||v| \, dx \leq \left(\int_\Omega |f(u) - f(u_n)|^{\frac{p-1}{p}} \, dx \right)^{\frac{p}{p-1}} \left(\int_\Omega |v|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (3.17)$$

Además, de (3.5) sabemos que para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
|f(u_n) - f(u)| &\leq |f(u_n)| + |f(u)| \\
&\leq 2a + b(|u_k|^{p-1} + |u|^{p-1}) \\
&\leq c(1 + |u_k|^{p-1} + |u|^{p-1}).
\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$|f(u_n) - f(u)|^{\frac{p-1}{p}} \leq C(1 + |u_k|^{p-1} + |u|^{p-1})^{\frac{p-1}{p}}.$$

Más aún, de (a) sabemos que existe $\varphi \in L^p(\Omega)$ tal que $|u_k(x)| \leq \varphi(x)$ c.t.p en Ω para cada $k \in \mathbb{N}$. En consecuencia, de la última desigualdad, vemos que

$$\begin{aligned}
|f(u_n) - f(u)|^{\frac{p-1}{p}} &\leq C(1 + |u_k|^{p-1} + |u|^{p-1})^{\frac{p-1}{p}} \\
&\leq C_1(1 + |\varphi|^{p-1} + |u|^{p-1})^{\frac{p-1}{p}} \\
&\leq C_2(1 + |\varphi|^{p-1} + |u|^{p-1}).
\end{aligned}$$

De donde

$$\int_\Omega |f(u_n) - f(u)|^{\frac{p-1}{p}} \, dx \leq \int_\Omega C_2(1 + |\varphi|^{p-1} + |u|^{p-1}) \, dx < \infty.$$

Lo cual muestra que el integrando de la parte izquierda de esta última desigualdad está en $L^1(\Omega)$. Por otro lado de (b) y la continuidad de f, se deduce que

$$\lim_{k\to\infty} \left| |\nabla u_n(x)|^{p-2}\nabla u_n(x) - |\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x) + (f(u(x)) - f(u_n(x))) \, dx \right| = 0.$$

Por lo mostrado y haciendo uso de la convergencia dominada de Lebesgue podemos afirmar que

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega \left| |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u + (f(u) - f(u_n)) \, dx \right| = 0.$$

Este último resultado aplicado a (3.16) se tiene que para cada $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$

$$\lim_{n\to\infty} J'_G(u_n)[v] = J'_G(u)[v] \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Lo cual prueba que J'_G es continuo. Finalmente del **Teorema 1.4.2.1** concluimos que J es diferenciable en $W_0^{1,p}(\Omega)$.

$\square$

Observación 3.5.0.1.1. *Los puntos críticos de J son soluciones débiles del problema* $(*)$.

Teorema 3.5.0.2. *El funcional J definido en* (3.8) *es coercivo.*

Demostración. Sea $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Por un lado, de la desigualdad de Hölder, la inmersión $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ y de la desigualdad de Poincaré en $W_0^{1,p}(\Omega)$, sabemos que existe $C > 0$ tal que

$$\int_\Omega |u| \, dx \leq |\Omega| \|u\|_{L^p} \leq |\Omega| C \|u\| = C_1 \|u\|,$$

con $C_1 = |\Omega| C$. Por otro lado, por (1.1), vemos que

$$\int_\Omega \frac{1}{p} |u|^p \, dx = \frac{1}{p} \int_\Omega |u|^p \, dx \leq \frac{1}{\lambda_1 p} \|u\|^p.$$

Usando estas últimas dos desigualdades y (3.10), obtenemos que

$$\begin{aligned}\int_\Omega F(u)\,dx &\leq a\int_\Omega |u|\,dx + \frac{b}{p}\int_\Omega |u|^p\,dx.\\ &\leq aC_1\|u\| + \frac{b}{\lambda_1 p}\|u\|^p.\end{aligned} \tag{3.18}$$

Ahora, usando la desigualdad de Hölder y dado que $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, se sigue que

$$\begin{aligned}\int_\Omega gu\;dx &\leq \|g\|_\infty \int_\Omega |u|\,dx\\ &\leq \|g\|_\infty |\Omega| \|u\|_{L^p}\\ &= C^*\|u\|_{L^p},\end{aligned}$$

con $C^* = \|g\|_\infty|\Omega|$. Finalmente, de la desigualdad de Poincaré existe $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^p} \leq C\|u\|,$$

que junto a la última desigualdad, tenemos que

$$\int_\Omega gu\;dx \leq C_2\|u\|, \tag{3.19}$$

donde $C_2 = C^*C$. Análogamente, dado que $\phi \in L^\infty(\Omega)$, tenemos que

$$t\int_\Omega \phi u\;dx \leq tC_3\|u\|. \tag{3.20}$$

Gracias a (3.18), (3.19) y (3.20)

$$\begin{aligned}J(u) &= \frac{1}{p}\|u\|^p - \int_\Omega F(u(x))\,dx - t\int_\Omega \phi\,u\,dx - \int_\Omega h\,u\,dx\\ &\geq \frac{1}{p}\|u\|^p - C_1\|u\| - \frac{b}{\lambda_1 p}\|u\|^p - tC_3\|u\| - C_2\|u\|\\ &= \frac{1}{p}\|u\|^p\left(1 - \frac{b}{\lambda_1}\right) - \|u\|(C_1 + tC_3 + C_2).\end{aligned} \tag{3.21}$$

Dado que $b < \lambda_1$, entonces

$$\left(1 - \frac{b}{\lambda_1}\right) > 0,$$

y tomando el límite cuando $\|u\| \to +\infty$ en (3.21) conseguimos que

$$\lim_{\|u\|\to\infty} J(u) = +\infty.$$

Lo cual prueba que J es coercivo.

$\square$

Teorema 3.5.0.3. *El funcional J definido en (3.8) es débilmente semicontinuo inferiormente (d.s.c.i).*

Demostración. Para cada $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, recordemos que el funcional J se define como

$$J(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx - \int_\Omega F(u(x))\, dx - t\int_\Omega \phi\, u\, dx - \int_\Omega h\, u\, dx.$$

Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $u_k \rightharpoonup u$ en $W_0^{1,p}(\Omega)$. De la inmersión compacta de Sobolev, tenemos que $u_k \to u$ en $L^p(\Omega)$ y por tanto $u_k(x) \to u(x)$ c.t.p en Ω. Además notemos que existe $q \in L^p(\Omega)$ tal que

$$|u_k(x)| \leq q(x) \quad \text{c.t.p en } \Omega,\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Como Ω es acotado tenemos que $q \in L^1(\Omega)$ y así de la convergencia dominada de Lebesgue vemos que

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega F(u_k)\, dx = \int_\Omega F(u)\, dx. \tag{3.22}$$

Por otro lado tenemos que

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega t\phi\, u_k\, dx = \int_\Omega t\phi\, u\, dx \quad \text{y} \quad \lim_{k\to\infty} \int_\Omega h\, u_k\, dx = \int_\Omega h\, u\, dx, \tag{3.23}$$

por la definición de convergencia débil. Finalmente de (3.22), (3.23) y el

Teorema 1.4.2.2, tenemos que

$$\begin{aligned}
J(u) &= \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx - \int_\Omega F(u)\,dx - t\int_\Omega \phi\,u\,dx - \int_\Omega h\,u\,dx \\
&\leq \frac{1}{p}\liminf_{k\to\infty} \|u_k\|^p - \lim_{k\to\infty}\int_\Omega F(u_k)\,dx - \lim_{k\to\infty}\int_\Omega t\phi\,u_k\;dx - \lim_{k\to\infty}\int_\Omega h\,u_k\;dx \\
&= \frac{1}{p}\liminf_{k\to\infty} \|u_k\|^p - \liminf_{k\to\infty}\int_\Omega F(u_k)\,dx - \liminf_{k\to\infty}\int_\Omega t\phi\,u_k\;dx - \liminf_{k\to\infty}\int_\Omega h\,u_k\;dx \\
&= \liminf_{k\to\infty}\left(\frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u_k|^p\,dx - \int_\Omega F(u_k)\,dx - t\int_\Omega \phi\,u_k\,dx - \int_\Omega h\,u_k\,dx\right) \\
&= \liminf_{k\to\infty} J(u_k).
\end{aligned}$$

Lo cual prueba que J es (d.s.c.i).

$\square$

Finalmente de estos tres teoremas presentamos el resultado principal de nuestro trabajo.

Teorema 3.5.0.4. *El problema*

$$(*)\begin{cases} -\Delta_p u = f(u) + t\phi + h, & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

con $N \geq 3$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ *un abierto acotado no vacío,* $2 < p < N$ *y* $t \geq 0$, $h, \phi \in L^\infty(\Omega)$ *con* ϕ *positiva y* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función continua que satisface*

(f_1) *Existen* $b_1, C_1 > 0$, *con* $b_1 < \lambda_1$, *tales que para todo* $s \leq 0$,

$$f(s) \geq b_1|s|^{p-2}s - C_1.$$

(f_2) Existen $b_2, C_2 > 0$, *con* $b_2 < \lambda_1$, *tales que para todo* $s \leq 0$,

$$f(s) \leq b_2|s|^{p-2}s + C_2.$$

(f_3) Existen $b_3, C_3 > 0$ *con* $b_3 < \lambda_1$ *y* $p < q < p^*$ *tales que para todo* $s \geq 0$,

$$f(s) \geq b_3|s|^{q-2}s - C_3.$$

(f_4) Existen $b_4, C_4 > 0$ con $b_4 < \lambda_1$ tales que que para todo $s \geq 0$,

$$f(s) \leq b_4|s|^{p-2}s + C_4.$$

Es un problema de tipo Ambrosetti-Prodi y admite por lo menos una solución débil.

Demostración. Dado que las condiciones (f_1) y (f_3) implican (3.1) y (3.2), respectivamente, podemos afirmar que $(*)$ es un problema de tipo Ambrosetti-Prodi. Por otro lado, de la sección anterior sabemos que el funcional asociado al problema $(*)$ descrito en (3.8) y denotado por J es diferenciable sobre $W_0^{1,p}(\Omega)$, coercivo y d.s.c.i, por tanto del **Teorema 1.4.4.1** existe $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ que es mínimo de J. Lo cual prueba que u es solución débil de $(*)$ por ser un punto crítico de J.

□

3.6. Conclusiones

- El método directo del cálculo de variaciones en el problema de tipo Ambrosetti-Prodi que involucra al p-Laplaciano descrito en $(*)$, nos permite cumplir con nuestro objetivo general.
- Las hipótesis (f_1)-(f_4) impuestas sobre la función f son de importancia para el análisis de puntos críticos de funcional J descrito en (3.8) y así poder abordar el problema con métodos directos del cálculo de variaciones.
- Las hipótesis (f_1)-(f_4) impuestas sobre f implican las condiciones de tipo Ambrosetti-Prodi.

3.7. Recomendaciones

- A los interesados en el área de problemas de ecuaciones diferenciales parciales con condiciones de tipo Ambrosetti-Prodi y que involucren al p-Laplaciano, pueden notar que también es factible abordar el problema por métodos directos del cálculo de variaciones, a diferencia de los métodos de sub y super soluciones y de grado topológico que son comúnmente utilizados en la literatura. Para futuros trabajos en esta línea se recomienda abordar aspectos como el de multiplicidad y regularidad de la solución del problema. Así como estudiar el problema $(*)$ bajo otras técnicas variacionales como Paso de Montaña o de Linking.

Referencias bibliográficas

[1] Antonio Ambrosetti and Giovanni Prodi. *A primer of Nonlinear Analysis*. Cambridge University Press, 2011.

[2] Aomar Anane. *Etude des valeurs propres et de la résonance pour l'opérateur p-Laplacien*. Université Libre de Bruxelles (Thése de doctorat), 1988.

[3] Aomar Anane. *Simplicité et isolation de la première valeur propre du p-Laplacien avec poids*. C.R. Acad. Sci. Paris, 305: 725-728, 1987.

[4] David Arcoya and Davis Ruiz. The Ambrosetti–Prodi problem for the p-Laplace operator. *Communications in Partial Differential Equations*, 31:849–865, 2006.

[5] Margarita Arias and Mabel Cuesta. A one side superlinear Ambrosetti-Prodi problem for the Dirichlet p-Laplacian. *J. Math. Anal. Appl.*, 367:499–507, 2010.

[6] Marino Badiale and Enrico Serra. *Semilinear Elliptic Equations for Beginners*. Springer, 2011.

[7] Haim Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer Science & Business Media, 2011.

[8] Dimitrios Kravvaritis and Athanasios Yannacopoulos. *Variational Methods in Nonlinear Analysis*. CPI books GmbH leck, 2020.

[9] Peter Lindqvist. *On a nonlinear eigenvalue problem*. Berichte Univ. Jyvaskyla Math. Inst., 68: 33-54, 1995.

[10] Avci Mustafa and Rabil Ayazoglu. Existence and uniqueness of solutions for a quasilinear elliptic equation involving p-Laplacian. *International Journal of Differential Equations and Applications*, 12: 95-102, 2013.

[11] Ireneo Peral Alonso. *Métodos Variacionales y Ecuaciones en Derivadas Parciales*. Universidad de Almeria, 1998.