ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS

MATEMÁTICAS PARA EL CURSO DE NIVELACIÓN DE LA EPN

LÓGICA MATEMÁTICA, CONJUNTOS Y NÚMEROS REALES (ECUACIONES E INECUACIONES)

TRABAJO DE INTEGRACIÓN CURRICULAR PRESENTADO COMO REQUISITO PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE INGENIERO MATEMÁTICO

JHONNY XAVIER EUGENIO PILLIZA

jhonny.eugenio@epn.edu.ec

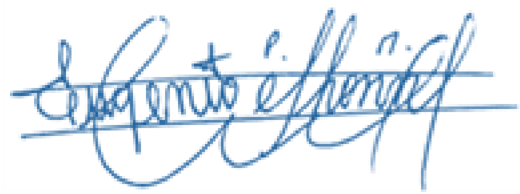
DIRECTOR: JUAN CARLOS TRUJILLO ORTEGA

juancarlos.trujillo@epn.edu.ec

DMQ, SEPTIEMBRE DE 2022

CERTIFICACIONES

Yo, JHONNY XAVIER EUGENIO PILLIZA, declaro que el trabajo de integración curricular aquí descrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y, que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.



Jhonny Xavier Eugenio Pilliza

Certifico que el presente trabajo de integración curricular fue desarrollado por Jhonny Xavier Eugenio Pilliza, bajo mi supervisión.

Juan Carlos Trujillo Ortega

DIRECTOR

DECLARACIÓN DE AUTORÍA

A través de la presente declaración, afirmamos que el trabajo de integración curricular aquí descrito, así como el(los) producto(s) resultante(s) del mismo, es(son) público(s) y estará(n) a disposición de la comunidad a través del repositorio institucional de la Escuela Politécnica Nacional; sin embargo, la titularidad de los derechos patrimoniales nos corresponde a los autores que hemos contribuido en el desarrollo del presente trabajo; observando para el efecto las disposiciones establecidas por el órgano competente en propiedad intelectual, la normativa interna y demás normas.

Jhonny Xavier Eugenio Pilliza

Juan Carlos Trujillo Ortega

RESUMEN

Este componente propone, principalmente, los contenidos de *Lógica Matemática*, *Conjuntos* y *Números reales* (*ecuaciones e inecuaciones*) que deberían incluirse en un curso de Nivelación para las carreras de Ingeniería y Ciencias de la EPN, a través de los resultados de aprendizaje que los estudiantes deberían alcanzar.

A su vez, para dar mayor precisión a la formulación de los resultados de aprendizaje, se proponen, para cada uno de los resultados, tres ejemplos de preguntas, ejercicios o problemas que podrían utilizarse para evaluar si un estudiante los ha alcanzado o no.

Finalmente, con el fin de evidenciar que los contenidos propuestos no son insuficientes para abordar el estudio del Álgebra Lineal y el Cálculo en una variable en el primer semestre, se presenta una descripción de los contenidos de los capítulos "Espacios vectoriales" y "Formas cónicas y cuádricas" (descritos en los PEAs de dichas materias), y los conceptos de Fundamentos de Matemática y Geometría que son prerrequisitos de los referidos capítulos.

Palabras clave: resultados de aprendizaje, Fundamentos de Matemática, Geometría, Lógica Matemática, Conjuntos, Números reales, Espacios vectoriales, Formas cónicas y cuádricas.

ABSTRACT

This component mainly propose the contains of *Logical mathematics*, *Sets* and *Real Numbers* (*equations and inequalities*) that should be included in the Leveling course of Engineering carrers and Sciences of the EPN, through the learning outcomes that the students have to achieve.

At the same time, for giving a major precision to the fomulation of the learning outcomes, for each one of the results, three examples of questions, excercises or problems are proposed that could be used to evaluate if the student achieve the knowledge or not. At the end, in order to evidence that the proposed contains were not be enough to address the study of Linear Algebra and the One Variable Calculus in the first semester, is presented a description of the contains of the chapters,“Vectorial Spaces“ and “Conical and quadratic forms“(described in PEAs of those subjects) and the concepts of Mathematical Fundaments and Geometry that are prerequisites of the aforementioned chapters.

Keywords: learning outcomes, Mathematical Fundaments, Geometry, Logical Mathematics, Sets, Real Numbers, Vectorial Spaces, Conical and quadratic forms.

DEDICATORIA

A mi madre Balvina, por su amor
incondicional y sus concejos.

Índice general

Capítulo 1

Descripción del componente desarrollado

De la misma manera como los diferentes campos científicos evolucionan, su enseñanza (sobre todo en los primeros niveles de la Universidad) debe evolucionar. En particular, la enseñanza de la Matemática. No obstante, en el Ecuador y, en particular, en la Escuela Politécnica Nacional, tanto la forma de enseñanza como los contenidos de Matemática presentes en los planes de estudio de las materias de Nivelación y Formación Básica no se han adaptado a los cambios sustanciales ocurridos durante los últimos 50 años.

La Facultad de Ciencias y, en particular, el Departamento de Matemática, ha participado en diversos esfuerzos de la EPN por diseñar planes de estudio adecuados para Nivelación. Como consecuencia del trabajo desplegado, se han formulado contenidos para las dos asignaturas de Matemática de Nivelación de la EPN: *Fundamentos de Matemática* y *Geometría*.

Para que la propuesta pueda transmitir, no solamente los contenidos, sino el alcance de estos, también se han formulado con mucho detalle los resultados de aprendizaje y ejemplos que los ilustren, y sean una pauta para el diseño de la evaluación del alcance o no de los resultados de aprendizaje por parte de los estudiantes.

Además, con el fin de mostrar que los contenidos propuestos no son insuficientes para el abordaje de los cursos de matemática del primer semestre de Formación Básica, se describen los contenidos de las materias de *Álgebra Lineal* y *Cálculo en una variable* y se identifican los conceptos de Fundamentos de la Matemática y de Geometría requeridos en las materias referidas.

En particular, en este trabajo, se desarrollan los contenidos y resultados de aprendizaje de *Lógica*, *Conjuntos* y *Números reales*. Los contenidos de primer semestre descritos son *Espacios vectoriales* y *Formas cónicas y cuádricas*.

1.1. Objetivo general

El objetivo general de este proyecto consiste en plantear los contenidos de las dos materias de Nivelación, *Fundamentos de Matemática* y *Geometría*, mediante la formulación de resultados de aprendizaje de estos contenidos y ejemplos de preguntas, ejercicios y problemas que ilustren dichos resultados de aprendizaje.

1.2. Objetivos específicos

Los siguientes:

1. Describir los contenidos de los capítulos “Espacios vectoriales” y “Formas cónicas y cuádricas” del curso Álgebra Lineal del primer semestre de Formación Básica de la EPN.
2. Identificar los conceptos de las materias “Fundamentos de Matemática” y “Geometría” de Nivelación en los capítulos descritos en el punto anterior.
3. Para los temas de *Lógica Matemática*, *Conjuntos* y *Números reales* (*ecuaciones* e *inecuaciones*), la elaboración de:
    a) Los resultados de aprendizaje.
    b) Ilustración, mediante problemas o ejercicios resueltos, de cada uno de los resultados de aprendizaje.

1.3. Alcance

Los contenidos de las materias considerados en este proyecto se ajustan a los Programas de Estudio de la Asignatura (PEA) de “Fundamentos de Matemática” y de “Geometría” aprobados por el Consejo de Docencia de la EPN en el año 2020.

Este trabajo no consiste en el desarrollo de los contenidos, sino en la formulación de los resultados de aprendizaje, a partir de material elaborado por las Comisiones de Implementación de los PEAs, que fueron nombradas por el Consejo de Docencia de la EPN.

1.4. Marco teórico

Como lo indica Declan Kennedy [3], la forma tradicional de diseñar módulos y programas académicos es partir del contenido del curso. Los profesores deciden el contenido que pretenden enseñar en el programa, planifican cómo enseñar este contenido y luego evalúan el contenido. Este tipo de enfoque se centra en la aportación del profesor y en la evaluación en términos de la asimilación del material por parte de los estudiantes. Las descripciones de los cursos se refieren principalmente al contenido del curso que se cubre en las conferencias. Este método de la enseñanza está *centrado en el profesor*.

Una de las críticas de este tipo de enfoque (véase [3]) observa que puede ser difícil el establecer, con precisión, qué es lo que debe ser capaz de hacer el estudiante para aprobar un curso.

Por otra parte, hay una tendencia para adoptar un método en el que el estudiante sea el centro, método que se basa en las capacidades que debe adquirir el estudiante al finalizar un curso; a estas capacidades se las define como los **resultados de aprendizaje**.

1.4.1. Qué son los resultados de aprendizaje

Los resultados de aprendizaje, como su propio nombre lo indica, son los resultados que se esperan tenga una persona luego de haber finalizado una actividad de aprendizaje; es decir, los resultados de aprendizaje son los conocimientos y habilidades adquiridas luego de finalizar la actividad de aprendizaje.

1.4.2. Diferenciar entre Propósitos, Objetivos y Resultado de Aprendizaje

Propósitos, objetivos y resultado de aprendizaje son términos que, a primera vista, significarían lo mismo. No obstante, hay diferencias importantes entre ellos.

Propósitos. Son planteados por quien va a dirigir la enseñanza, e indican o presentan de manera general los contenidos y el orden a ser revisados o tratados. Por ejemplo, el propósito de un profesor al enseñar Álgebra Lineal podría ser “presentar a los alumnos el concepto de cuerpo”.

Objetivos. Al igual que en el caso anterior, son planteados por quien va a dirigir la enseñanza, con la diferencia de que los objetivos o metas indican de manera más profunda los temas a ser tratados y que los alumnos, al final del proceso de aprendizaje, se espera comprendan de manera correcta. Por ejemplo, el objetivo de un profesor al enseñar Espacios Vectoriales podría ser que los estudiantes “comprendan y diferencien los conceptos de base y conjunto generador”.

Resultados de aprendizaje. Por su parte, los resultados de aprendizaje son enunciados más fáciles y claros de expresar que los objetivos. Permiten juzgar la calidad de conocimiento del estudiante. Por ejemplo, el resultado de aprendizaje de un profesor al enseñar Espacios Vectoriales podría ser que los estudiantes “dado un conjunto de vectores, determinen si el conjunto es una base (o no) mediante la definición de base”.

1.4.3. Tipo de resultados de aprendizaje del proyecto

Los resultados de aprendizaje propuesta para esta componente se organizan en los siguientes tipos:

1. Determinar lo que un estudiante **conoce** (“enuncie”, “escriba” o “iden-

tifique”): definiciones de conceptos, axiomas, teoremas, etcétera.

2. Determinar si un estudiante usa correctamente un concepto, aplica un axioma o un teorema, en la solución de un determinado problema, o en la deducción de una determinada propiedad.

3. Averiguar si un estudiante aplica un concepto, un axioma o un teorema en la solución de un problema o en la deducción de una propiedad.

4. Averiguar si un estudiante reconoce la corrección o no de la deducción de un teorema, o la solución de un problema.

Capítulo 2

Metodología

La Escuela Politécnica Nacional tiene un total de 20 carreras de tercer nivel de grado y en todas estas carreras de acuerdo al *Plan de estudios de Pregrado* [4]: *Cálculo en una Variable y Álgebra Lineal* son materias que forman parte del $20\,\%$ del área curricular: *Matemáticas y Ciencias Básicas*. Estas dos materias se imparte en el primer semestre y la cursan los estudiantes una vez que aprueban el curso de Nivelación.

Por ello, hemos elegido estas materias para determinar qué conceptos de las materias "Fundamentos de Matemática" y "Geometría" son requeridos en la Nivelación.

Así, con el fin de seleccionar los contenidos de Nivelación, la metodología a seguir es la siguiente:

1. Describir los aspectos más relevantes de los contenidos "Espacios vectoriales" y "Formas cónicas y cuádricas" de "Álgebra Lineal".
2. Identificar los conceptos de las materias "Fundamentos de Matemática" y "Geometría" son requeridos en los capítulos referidos en el numeral anterior.
3. Formular los resultados de aprendizaje de los contenidos propuestos para *Lógica*, *Conjuntos* y *Números reales*.
4. Ilustrar los resultados propuestos mediante preguntas, ejercicios y problemas.

Capítulo 3

Resultados, conclusiones y recomendaciones

3.1. Resultados

En la primera sección de este capítulo, presentamos la descripción de los *Espacios vectoriales* y de *Formas cónicas y cuádricas*, lo que nos servirá de base para formular los resultados de aprendizaje y plantear ejercicios, problemas y preguntas que permitan medir el conocimiento de los estudiantes en cada de los temas, que lo haremos en la segunda sección.

3.1.1. Descripción de Espacios vectoriales

Se presenta en primer lugar la definición de un espacio vectorial, que no es más que un conjunto al cual sus elementos se les denomina **vectores**, y que está definido sobre un cuerpo y dos operaciones: una interna: **la suma** y una operación externa: **producto o multiplicación por un escalar**. Hay varios cuerpos sobre el cual se puede definir un espacio vectorial, por ejemplo, el cuerpo de los números reales, y es por esto que se lo llama **espacio vectorial real**, aunque los espacios vectoriales pueden ser definidos sobre otros cuerpos como es el cuerpo de los números complejos.

Para verificar que un conjunto dado es un espacio vectorial, lo que se debe probar es que los elementos de dicho conjunto cumplen con los **axiomas de cuerpo** sobre el cual está definido. Por ejemplo, el conjunto de los polinomios de grado como máximo m definido sobre el campo de los reales:

$$\mathbb{P}_m = \left\{ p\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid p(x) = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i x^i, \alpha_i \in \mathbb{R} \right\}$$

se puede verificar fácilmente que cumple con los axiomas de cuerpo y, por lo tanto, que es un espacio vectorial.

Subespacio vectorial

Un subespacio vectorial es un espacio vectorial que está contenido dentro de un espacio vectorial. Entonces, para verificar que un conjunto es un subespacio vectorial se deben cumplir las mismas condiciones que cumple un espacio vectorial, pero como el subespacio pertenece a un espacio vectorial, las condiciones a verificar se reducen, pues solo basta probar que el subespacio es no vacío, y probar que el conjunto de elementos del subespacio es cerrado bajo la suma y la multiplicación por un escalar sobre el campo que está definido.

Por ejemplo, el conjunto de los polinomios de grado 3 definido sobre el campo de los reales:

$$\mathbb{P}_3 = \left\{ p\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid p(x) = \sum_{i=0}^{3} \alpha_i x^i, \alpha_i \in \mathbb{R} \right\}$$

es un subespacio vectorial del espacio vectorial $\mathbb{P}_m$.

Obsérvese que las definiciones, propiedades y teoremas, que se enuncian para espacios vectoriales, pueden aplicarse a todos los subespacios vectoriales, pues sabemos que un subespacio vectorial es un espacio vectorial definido sobre el mismo campo.

En adelante, nos referimos con V un espacio vectorial (salvo se especifique lo contrario) y a $\mathbb{K}$ como el campo sobre el cual está definido el espacio vectorial V.

Inmediatamente, se introducen las definiciones más importantes sobre espacios vectoriales (véase [5]):

***Combinación lineal**: un vector $v \in V$ es una combinación lineal de los vectores: $v_1, v_1, ..., v_n$ que pertenecen a V si existen los escalares: $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$, tales que:*

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n$$

Resolver un problema de este tipo, es decir, comprobar que un vector es combinación lineal de un conjunto de vectores, siempre nos lleva a encontrar determinar si un sistema de ecuaciones lineales posee o no solución.

Luego, se define el conjunto generado que es un subespacio vectorial por un conjunto de vectores ([5]):

***Subespacio vectorial generado por un conjunto de vectores**: el conjunto de todas las combinaciones lineales de la lista de vectores $v_1, v_1, ..., v_n$ que pertenecen a V es llamado subespacio vectorial generado por $v_1, v_1, ..., v_n$, denotado $\langle \{v_1, v_1, ..., v_n\} \rangle$; es decir,*

$$\langle \{v_1, v_1, ..., v_n\} \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i : \ \lambda_i \in \mathbb{K}, \ \forall i = 1, 2, 3, .., n \right\}$$

Observar que el subespacio vectorial generado por el conjunto vacío es el subespacio nulo $\{0\}$.

Enseguida, se enuncia el siguiente teorema, que gracias a las definiciones anteriores, se puede demostrar fácilmente [5].

***Teorema. El subespacios vectorial generado es el subespacio contenedor más pequeño**. El subespacios vectorial generado de una lista de vectores en V es el subespacio más pequeño de V que contiene todos los vectores en la lista.*

Se estudia también el concepto de sistema generador o simplemente **generador** [5]:

***Generador:** si el subespacios vectorial generado $(v_1, v_1, ..., v_n)$ es igual a V, decimos que $\{v_1, v_1, ..., v_n\}$ genera V o que los vectores$v_1, v_1, ..., v_n$ generan V*

Observar que los conceptos de “subespacio vectorial generado por” y “conjunto generador” no son iguales.

Ahora, ya se puede enunciar una de las definiciones claves en álgebra lineal:

> ***Espacio vectorial de dimensión finita:*** *un espacio vectorial se llama de dimensión finita si alguna lista de vectores genera el espacio* (V).

Los conceptos descritos anteriormente guían hacia la definición de **base**, pero antes se deben definir la **independencia** y **dependencia** lineal.

> ***Dependencia lineal:*** *un conjunto de vectores es linealmente dependiente si dentro de este conjunto existe al menos un vector que puede ser escrito como combinación lineal de los otros.*

> ***Independencia lineal:*** *un conjunto que no es linealmente dependiente, es un conjunto linealmente independiente.*

Inmediatamente, se sigue con la definición de base que a su vez nos permitirá definir lo que es la dimensión de un espacio vectorial de dimensión finita.

> ***Base de un espacio vectorial:*** *la base de un espacio vectorial es un conjunto de vectores linealmente independientes y que generan al espacio.*

Es importante recalcar que la base de un espacio vectorial, no es única. A continuación, se demuestra que todas las bases tienen el mismo número de elementos. Así, formalmente, se presenta la definición de dimensión.

> ***Teorema. Dimensión de un espacio vectorial.*** *La dimensión de un espacio vectorial de dimensión finita es la cardinalidad de cualquiera de sus bases.*

A la dimensión de V se la nota por $\dim V$.

El siguiente teorema establece la relación de las dimensiones del espacio y sus subespacios:

Dimensión de un subespacio vectorial: *si V es de dimensión finita y W es un subespacio de V, entonces $dim\ W \leq dim\ V$.*

Lógicamente, la dimensión de un subespacio no debe superar la dimensión del espacio vectorial en el cual está contenido. Y esto se refleja en el teorema anterior.

Coordenadas de un vector

Si $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es una base de V, todo vector $v \in V$ se puede expresar de manera única como combinación lineal de B; es decir, para todo $u \in V$, si

$$u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n,$$

a los escalares $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n$ se les llama **coordenadas** del vector u en la base B.

No debemos confundir al vector con sus coordenadas, recordemos que $u \in V$ y que los $\lambda_i \in \mathbb{K}$, para todo $i = 1, ..., n$.

Suma e intersección de subespacios vectoriales

Se presentan las operaciones entre subespacios vectoriales: **suma** e **intersección** entre subespacios de un mismo espacio vectorial.

Intersección de subespacios vectoriales*: sean U_1 y U_2 subespacios vectoriales de V. Se define la intersección como:*

$$U_1 \cap U_2 = \{v \in V \mid v \in U_1 \wedge v \in U_2\}.$$

La intersección de dos subespacios es un subespacio vectorial.

Se presenta, además, la definición de suma de dos subespacios.

Suma de subespacios vectoriales*: sean U_1 y U_2 subespacios del mismo espacio vectorial V. Se define la suma como:*

$$U_1 + U_2 = \{v \in V \mid v = u_1 + u_2, u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$$

La suma de dos subespacios es un subespacio vectorial.

3.1.2. Descripción de las formas cuádricas

Se empieza definiendo lo que es una forma cuádrica:

Sean V un espacio vectorial con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y $f \colon V \longrightarrow V$ una aplicación lineal simétrica; es decir, tal que

$$\langle f(v),\, u \rangle = \langle v,\, f(u) \rangle\,, \forall u, v \in V.$$

Entonces, la función

$$\begin{aligned} Q\colon V &\longrightarrow \mathbb{K} \\ v &\longmapsto Q(v) \end{aligned} = \langle f(v),\, v \rangle$$

*se la denomina **forma cuádrica** asociada a f.*

Observar que una forma cuádrica es una aplicación que concede a cada vector v de un espacio vectorial un elemento del cuerpo sobre el cual está definido el espacio vectorial. Además, notar que para entender esta definición previamente, se deben revisar varios conceptos del Álgebra Lineal.

Se hace énfasis en el estudio de las formas cuádricas definidas sobre el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$:

*Una **forma cuadrática definida sobre** $\mathbb{R}^n$ es una función $Q\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que:*

$$Q\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j,\ \forall \left(x_1, x_2, ..., x_n\right) \in \mathbb{R}$$

donde $a_{ij} \in \mathbb{R}$ para todo $1 \leq i, j \leq n$.

*A la última ecuación se la conoce como **representación polinómica de** Q.*

Por lo tanto, una forma cuadrática definida sobre $\mathbb{R}^n$, es una función polinomial de grado 2 que generaliza la operación ax^2 en un espacio vectorial de dimensión mayor a 1.

La matriz que representa a una forma cuádrica es simétrica. Los valores propios de esta matriz proporcionan mucha información sobre la forma cuadrática, muy útil al momento de representarla mediante un polinomio más sencillo a través de un cambio de variables o al momento de clasificarla.

Teorema. Representación polinómica y matricial de una forma cuádrica. *Sea la función $Q\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Entonces, Q es una forma cuádrica* si y solo si *existe una matriz simétrica $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ tal que:*

$$Q(X) = X^t \cdot A \cdot X$$

donde $X = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, representa un vector columna y X^t su transpuesta.

*Al término $Q(X) = X^t \cdot A \cdot X$ se lo conoce como **representación matricial de** Q.*

Se presenta la clasificación de las formas cuádricas de acuerdo a los signos de los valores propios de las matrices de sus representaciones matriciales. A continuación, se presenta la clasificación de las formas cuádricas.

Clasificación de las formas cuádricas.

Sea $Q\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, a la función Q se la llama:

- ***definida positiva*** *si $Q(X) > 0$, $\forall X \in \mathbb{R}^n$ no nulo.*
- ***semi definida positiva*** *si $Q(X) \geq 0$, $\forall X \in \mathbb{R}^n$ no nulo.*
- ***definida negativa*** *si $Q(X) < 0$, $\forall X \in \mathbb{R}^n$ no nulo.*
- ***semi definida negativa*** *si $Q(X) \leq 0$, $\forall X \in \mathbb{R}^n$ no nulo.*
- ***indefinida*** *si $Q(X)$ no está en ninguna de las clasificaciones anteriores, es decir, si existen $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^n$ tal que: $Q(X_1) > 0$ y $Q(X_2) < 0$.*

Por lo tanto, existen 5 posibilidades para clasificar a una forma cuádrica.

3.1.3. Descripción de las formas cónicas

Observar que el estudio de una forma cónica, sección cónica o simplemente cónica, comprende estudiar curvas en $\mathbb{R}^2$.

Se inicia con la definición de cónica:

> *A todas las curvas que resultan de las diferentes intersecciones entre un cono y un plano se las llama **forma cónica**.*

Se define también una forma cónica como el conjunto siguiente:

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \right\}$$

La ecuación $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ representa una cónica.

Se establecen algunas condiciones que deben satisfacer los parámetros de la ecuación anterior, para la formación de una sección cónica u otra.

- **Circunferencia:** para que la ecuación general describa una circunferencia, se debe cumplir que: $A = C$ y $B = 0$
- **Elipse:** para que la ecuación general describa una elipse, se debe verificar la desigualdad: $B^2 - 4AC < 0$
- **Parábola:** para que la ecuación general describa una parábola, se debe verificar la igualdad: $B^2 - 4AC = 0$
- **Hipérbola:** para que la ecuación general describa a una hipérbola, se debe verificar la desigualdad: $B^2 - 4AC > 0$

3.2. Identificación de prerrequisitos

3.2.1. De Fundamentos de Matemática para Espacios Vectoriales

Lógica

- **Proposiciones y las conectivas**

  Algunas definiciones deben cumplir varias condiciones para verificar que efectivamente se trata del concepto en mención, como por ejemplo, un espacio vectorial para ser considerado como tal debe satisfacer todas las condiciones de cuerpo. Entonces, el uso de proposiciones y conectivas es importante en el estudio de los espacios vectoriales.

- **Equivalencia lógica**

  Existen varios caminos de probar un resultado o definir un concepto, por lo tanto, entender lo que es la equivalencia lógica, nos permitirá resolver un problema de varias maneras. Por ejemplo, demostrar que un conjunto es una base es equivalente a demostrar que este conjunto es linealmente independiente y que genera el espacio.

- **Predicados y cuantificadores**

  Entender la proposición "una base no es única" es un ejemplo claro de que el estudio de los predicados y cuantificadores es muy importante.

Conjuntos

- **Presentación de las nociones de conjunto y pertenencia**

  En el punto anterior, ya explicamos la importancia de tener en cuenta la noción de conjunto. Ahora, para motivar el estudio de la pertenencia, podemos mencionar las siguientes definiciones:

  - Coordenadas de un vector.
  - Combinación lineal.

  Pues, en ambos casos, se especifica que los escalares deben pertenecer al cuerpo sobre el cual están definidos los espacios vectoriales.

- **Definición y propiedades de las relaciones de igualdad y subconjunto entre conjuntos**

  Decir que una base no es única quiere decir que es posible tener varios conjuntos diferentes que son linealmente independientes y que generan el espacio, de ahí la importancia de tener un conocimiento de la negación e igualad de conjuntos.

- **Construcción de conjuntos**

  Este conocimiento permite demostrar, por ejemplo, varios teoremas acerca de espacios vectoriales, como por ejemplo el siguiente:

  > ***Teorema: Un conjunto generador contiene una base***. *Todo conjunto generador en un espacio vectorial se puede reducir a una base del espacio vectorial.*

  Para demostrar este teorema, hay que construir paso a paso un conjunto de vectores linealmente independientes proveniente del espacio generador.

- **Definiciones y propiedades de las operaciones de unión, intersección, diferencia, complemento y partes**

  El uso de la unión de conjuntos se ve reflejado en el siguiente teorema:

  > ***Teorema***. *Sea V un e.v. y $B = (v_1, v_2, ..., v_n) \subseteq V$, $u \in V$.*
  > *Si B es LI y $u \notin$ es el subespacios vectorial generado de B entonces $B \cup \{u\}$ es LI.*

  Es claro que, para entender el teorema, se debe tener en cuenta la unión de conjuntos.

  La intersección, por su parte, puede usarse para definir la intersección de subespacios vectoriales.

Números reales

- **Propiedades de cuerpo**

  La definición misma de espacio vectorial depende de lo que es un cuerpo y de sus propiedades, de ahí la importancia de conocer el concepto de cuerpo.

- **Aplicación de las propiedades de cuerpo**

  Determinar si un conjunto de vectores es LI o LD conlleva a determinar si un sistema de ecuaciones tiene o no solución. Y para esto, se debe tener presente conocimiento de: expresiones algebraicas, polinomios, descomposición en factores de polinomios y simplificación de expresiones algebraicas.

- **Propiedades de orden**

  La dimensión de un subespacio vectorial es a lo más la dimensión del espacio vectorial; para entender esto, se necesita tener en cuenta las propiedades de orden.

  Además, un ejemplo más del uso de las propiedades de orden se puede ver en la demostración del siguiente teorema ([5]):

  > ***Teorema***. *Sea V un e.v. de dimensión finita, entonces todas las bases de V tiene el mismo número de elementos.*

  Para demostrar este teorema, se consideran dos bases con diferente número de elementos y se demuestra que la cantidad de elementos debe ser la misma. Con este fin, se recurre a varios teoremas de orden y, en particular, a la ley de tricotomía.

- **Inducción Matemática**

  Subespacio vectorial generado, combinación lineal, coordenadas de un vector, el espacio $\mathbb{P}_m$, son algunos de los términos que se pueden definir mediante sumatorias y, de aquí, su importancia de estudio.

Funciones

Para definir el concepto de espacio vectorial, se debe tener en cuenta lo que son las funciones; por ejemplo, si tomamos el espacio vectorial $\mathbb{P}_m$:

$$\mathbb{P}_m = \left\{ p\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid p(x) = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i x^i, \alpha_i \in \mathbb{R} \right\}$$

entonces, como tenemos el conocimiento de funciones (y de conjuntos), podemos entender que $\mathbb{P}_m$ está formado por los polinomios p, que el conjunto de salida y llegada de la función p es $\mathbb{R}$.

3.2.2. De Geometría para Espacios Vectoriales

Conceptos primitivos de la geometría

El punto, la recta, el plano, son conceptos primitivos que son de suma importancia, ya que, dentro del estudio de los espacios vectoriales $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, los conceptos básicos nos permiten abstraer y generalizar e interpretar geométricamente estos últimos.

Paralelismo

Determinar si una recta es paralela a otra, o no. En espacios vectoriales, la idea se generaliza para $\mathbb{R}^n$ y la idea es determinar si un vector es paralelo a otro o no, o lo que es lo mismo, determinar si un vector es combinación lineal de otros, o no. Por tal motivo la importancia del estudio de este tema.

3.2.3. De Fundamentos de Matemática para formas cuádricas y canónicas

Lógica

La implicación y doble implicación son bastante usadas en los teoremas y definiciones descritos anteriormente. El conocimiento de la lógica matemática es fundamental. Por ejemplo, en la siguiente definición:

> ***Hipérbola:*** *para que la ecuación general describa a una hipérbola, se debe verificar la desigualdad:* $B^2 - 4AC > 0$,

la lógica nos permite entender que si, $B^2-4AC > 0$, entonces podremos llamar a la ecuación general de una forma cónica hipérbola; en el caso contrario, no.

Conjuntos

- **Presentación de las nociones de conjunto y pertenencia**

Tener el conocimiento de conjunto nos permite entender lo que es una cónica, dado que se la puede definir como un conjunto de puntos.

Números reales

- El estudio de los números reales es de suma importancia debido a que las formas cuádricas y canónicas, son aplicaciones o funciones que su conjunto de salida es $\mathbb{R}^n$ y su conjunto de llegada es $\mathbb{R}$, por lo que debemos manejar bien las propiedades de los reales.
- Entender que bajo ciertas condiciones de los parámetros de la ecuación general de una cónica, esta podría ser un tipo específico de cónica, y para esto nos sirven de mucho el conocimiento delas desigualdades, ecuaciones, inecuaciones.

Funciones

Las formas cuádricas y cónicas son funciones que toma un elemento de $\mathbb{R}^n$ y asocian un valor en $\mathbb{R}$. Pueden representarse, además, como polinomios.

3.2.4. De Geometría para formas cuádricas y canónicas

Conceptos primitivos de la geometría

- Entender la idea del plano, punto, recta, pasa por es básico para comprender cómo es que obtenemos la idea de cónica. Dado que los diferentes tipos de cónicas que existen, se pueden abstraer del concepto de intersección entre planos, pues como mencionamos, las cónicas se obtienen como la intersección de un cono y un plano.

Ángulos

- Observar que los diferentes tipos de cónicas que conocemos, se obtienen en función de los ángulos que se forman al intersectar un plano y el eje de un cono. De ahí la necesidad de entender los ángulos, pues esto nos permite abstraer el tipo de cónica que podemos obtener al intersectar un cono y un plano.

Perpendicularidad

- Notar que si un plano es perpendicular al eje de un cono, la cónica que se obtiene es la circunferencia. Gracias a que conocemos el concepto de perpendicularidad, podemos abstraer la proposición anterior y confirmar que intuitivamente es correcta.

Circunferencia

- Notar que la circunferencia es una cónica. Y su estudio no solo es importante dentro del estudio de las formas cónicas, ya que la circunferencia es una de las curvas más usadas en esta y otras materias como física.

Geometría analítica

- La circunferencia, hipérbola, elipse y parábola están dentro del estudio de la geometría analítica, pero de una forma más sencilla de la manera que se aborda dentro del estudio de las formas cónicas.

3.3. Resultados de aprendizaje

Después de cada resultado de aprendizaje, se presentarán varios ejemplos de preguntas, ejercicios o problemas que ilustren el alcance del contenido propuesto.

3.3.1. Lógica

Resultado

Explicar si un enunciado dado es o no una proposición mediante la definición de proposición.

Ilustración

1. Explique cuáles de los siguientes enunciados y expresiones representan una proposición y cuáles no.

   a) *Si* $x > 0$*, entonces* $\sqrt{x}^2 = x$

   Respuesta. El enunciado anterior sí es una proposición. En efecto: este se puede expresar de la siguiente manera:

   Si x *es mayor que* 0*, entonces* $\sqrt{x^2} = x$.

   Luego, es evidente que se puede determinar su valor de verdad. Y, además, no es posible que este enunciado sea verdadero y falso al mismo tiempo. □

   b) $8 + x =$

   Respuesta. La expresión anterior no representa una proposición, ya que no podemos determinar su valor de verdad. □

Resultado

Comprender el principio del tercer excluido.

Ilustración

1. Redactar la definición del principio del tercer excluido.

   Respuesta. Una proposición o bien es verdadera, o bien es falsa; no es posible otra opción[1].

   Este principio se representa simbólicamente por $(p \vee \neg p)$, donde p representa una proposición cualesquiera. □

2. Presentar un ejemplo que ilustre el principio del tercer excluido.

   Respuesta. Dada la proposición p:

   "π es un número real"

   entonces debido al principio del tercer excluido, tenemos que:

   "π es un número real.", o "π no es un número real."

   y el principio establece que solo una de las dos proposiciones anteriores es verdadera y no hay otra opción. □

Resultado

Comprender el principio de no contradicción.

Ilustración

1. Redactar la definición del principio de no contradicción.

   Respuesta. Dada una proposición, esta no puede ser verdadera y falsa al mismo tiempo [1].

   Este principio se representa simbólicamente por $\neg(p \wedge \neg p)$, donde p representa una proposición cualesquiera. □

2. Presentar un ejemplo que ilustre el principio de no contradicción.

   Respuesta. Dada la proposición

   $$\text{“}77 + 23 \neq 100''$$

   y su negación

   $$\text{“}77 + 23 = 100''$$

   es evidente que ambas no pueden ser verdaderas y falsas al mismo tiempo. Y además, notemos que la conjunción entre estas proposiciones es una contradicción. □

Resultado

Determinar si una proposición es simple o no.

Ilustración

1. Determinar si las siguientes proposiciones son simple o no. Justificar la respuesta.

   a) *“Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes”.*

   Respuesta. Esta proposición es simple, pues es un enunciado con un solo sujeto: “Los ángulos opuestos por el vértice” y un solo predicado:

"son congruentes"; luego, esta proposición no se expresa mediante otras proposiciones.

Por otra parte, lo que este enunciado afirma, también podría expresarse de modo equivalente:

"Si dos ángulos son opuestos por el vértice, entonces son congruentes".

Esta proposición, en cambio, no es simple, porque se expresa mediante las proposiciones "Dos ángulos son opuestos por el vértice" y "Dos ángulos son congruentes", y la conectiva *si, . . . , entonces, ...*

Este ejemplo muestra cómo una misma propiedad se puede expresar, de manera equivalente lógicamente, tanto a través de una proposición simple como de una proposición que no lo es. □

b) *"Si ABC es un triángulo rectángulo y tiene dos ángulos congruentes, entonces dos de los ángulos del triángulo ABC miden 45 grados".*

Respuesta. La proposición no es simple, pues se expresa mediante las siguientes proposiciones:

p : ABC es un triángulo rectángulo.

q : ABC tiene dos ángulos congruentes.

r : ABC tiene dos ángulos que miden 45 grados.

Y además se usan las conectivas *si, . . . , entonces, . . .* , y la conjunción.

Por otra parte, lo que este enunciado afirma, también podría expresarse de modo equivalente:

"Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo con ángulos congruentes miden 45 grados cada uno".

Y obtenemos una proposición simple, pues cuenta con un solo sujeto: "Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo con ángulos congruentes" y un solo predicado: " miden 45 grados cada uno"; luego, esta proposición no se expresa mediante otras proposiciones. □

c) *"La longitud de una circunferencia de radio r es $2\pi r$".*

Respuesta. Sí es una proposición simple, pues no puede ser expresada mediante otras proposiciones, ya que es un enunciado con un solo sujeto: "La longitud de una circunferencia de radio r" y un solo predicado: "es $2\pi r$".

Notar que lo que este enunciado afirma, también podría expresarse de la siguiente forma equivalente:

"Si el radio de una circunferencia es r, entonces la longitud de esta circunferencia es $2\pi r$".

Esta proposición, en cambio, no es simple, porque se expresa mediante las proposiciones "Si el radio de una circunferencia es r" y "la longitud de esta circunferencia es $2\pi r$", y la conectiva *si, ..., entonces, ...* □

Resultado

Identificar las proposiciones simples y las conectivas mediante las cuales se expresa una proposición.

Ilustración

1. Identifique las proposiciones simples y las conectivas mediante las que se expresan las siguientes proposiciones:

   a) *La suma de los ángulos internos de un cuadrilátero no es* 360 *grados.*

   Respuesta. Esta proposición se puede reescribir de la siguiente manera

   > "La suma de los ángulos internos de un cuadrilátero es 360 grados".

   de donde, es más fácil ver que se trata de una proposición simple y que se escribe con la ayuda de la palabra **no**:

   > "La suma de los ángulos internos de un cuadrilátero **no** es 360 grados".

   □

   b) *El* 8 *es divisor del* 64*, y el* 4 *es divisor del* 32 *y del* 64*.*

   Respuesta. Reescribamos el enunciado para resaltar las proposiciones simples y las conectivas que aparecen:

   > "El 8 es divisor del 64", **y** "el 4 es divisor del 32" **y** "el 4 es divisor del 64".

Se puede ver, entonces, que esta proposición se expresa mediante las siguientes proposiciones simples con ayuda de la conjunción (dos veces):

p : El 8 es divisor del 64,

q : El 4 es divisor del 32; y

r : El 4 es divisor del 64.

Además, simbólicamente la proposición dada se representa por:

$$p \wedge (q \wedge r).$$ □

c) *El valor absoluto de un número real es igual a* 0 *si y solo si el número es igual a* 0*.*

Respuesta. En este caso, esta proposición se expresa mediante las siguientes dos proposiciones simples:

p : el valor absoluto de un número real es igual a 0; y

q : el número real es igual a 0,

y con ayuda de la doble implicación:

> "El valor absoluto de un número real es igual a 0 **si y solo si** el número real es igual a 0".

Además, simbólicamente, la proposición está representada por:

$$p \Leftrightarrow q.$$ □

Resultado

Representar de forma simbólica una proposición dada.

Ilustración

1. *No es verdad que tres es un número par.*

Respuesta. La proposición anterior puede escribirse de la siguiente manera sin alterar el sentido

p: 3 no es un número par.

Entonces, simbólicamente, la proposición anterior está representada por la siguiente proposición simple:

$$p$$

Además, notar que, si la proposición q es la proposición que niega a la proposición p, es decir.

q : 3 es un número par.

Entonces, simbólicamente, la proposición inicial está representada también por:

$$\neg q.$$

□

2. *Si f es una función biyectiva, entonces f es una función inyectiva y una función sobreyectiva.*

Respuesta. Sean las siguientes proposiciones simples:

p: f es una función biyectiva.

q: f es una función inyectiva.

r: f es una función sobreyectiva.

Así, la representación simbólica es:

$$p \Rightarrow (q \wedge r)$$

□

3. *Si a y b son números enteros positivos y c un número real negativo, entonces $a < b$ si y solo si $a \cdot c > b \cdot c$.*

Respuesta. En este caso, las proposiciones simples mediante las cuales se expresa la proposición inicial son:

p : a y b son números enteros positivos;

q : c un número real negativo;

r : $a < b$; y

s : $a \cdot c > b \cdot c$.

Entonces, simbólicamente, la proposición está representada por:

$$(p \wedge q) \Rightarrow (r \Leftrightarrow s).$$

□

Resultado

Determinar si una proposición es una tautología mediante una tabla de verdad.

Ilustración

1. *Utilice una tabla de verdad para determinar si la siguiente proposición es una tautología.*

$$[p \wedge (p \vee q)] \Rightarrow \neg q$$

Respuesta. La tabla de verdad de la proposición anterior es la siguiente:

p	q	$p \vee q$	$p \wedge (p \vee q)$	$\neg q$	$[p \wedge (p \vee q)] \Rightarrow \neg q$
v	v	v	v	f	f
v	f	v	v	v	
f	v	v	f	f	
f	f	f	f	v	

Por lo tanto, $[p \wedge (p \vee q)] \Rightarrow \neg q$ no es una tautología pues, en la primera fila de la proposición concluimos que su valor de verdad es falso, y no es necesario seguir llenando los demás valores de verdad, pues sabemos que para ser tautología todos sus valores de verdad deben ser verdadero [2].

□

2. *Elaborar una tabla de verdad para la siguiente proposición y verificar si es o no una tautología.*

$$(\neg p \Rightarrow q) \Rightarrow p$$

Respuesta. La tabla de verdad de la proposición anterior es la siguiente:

p	q	$(\neg p \Rightarrow q)$	$(\neg p \Rightarrow q) \Rightarrow p$
v	v	v	v
v	f	v	v
f	v	v	f
f	f	f	

Por lo tanto, $(\neg p \Rightarrow q) \Rightarrow p$ no es una tautología pues, el tercer valor de la tabla es falso.

$\square$

3. *Elaborar una tabla de verdad para la siguiente proposición y verificar si es o no una tautología.*

$$[(p \wedge \neg q) \Rightarrow q] \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$$

Respuesta. Entonces, la tabla de verdad de la proposición anterior es la siguiente:

p	q	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$(p \wedge \neg q) \Rightarrow q$	$p \Rightarrow q$	$[(p \wedge \neg q) \Rightarrow q] \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$
v	v	f	f	v	v	v
v	f	v	v	f	f	v
f	v	f	f	v	v	v
f	f	v	f	v	v	v

Por lo tanto, $[(p \wedge \neg q) \Rightarrow q] \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$, efectivamente es una tautología. $\square$

Resultado

Determinar el valor de verdad de las proposiciones simples de una proposición mediante las definiciones de las conectivas, dado el valor de verdad de la proposición.

Ilustración

1. Determinar los valores de verdad que deben tener p y q para que la siguiente proposición sea:

   a) $[\neg p \wedge (p \vee q)] \wedge (p \Leftrightarrow q)$ Verdadera

   Respuesta. La proposición

$$[\neg p \wedge (p \vee q)] \wedge (p \Leftrightarrow q)$$

es una conjunción; por lo tanto, por la *definición de conjunción*, obligatoriamente las proposiciones

$$\neg p \wedge (p \vee q) \quad \text{y} \quad p \Leftrightarrow q$$

son verdaderas; es decir, se tiene que:

$$\underbrace{\neg p \wedge (p \vee q)}_{v} \quad \text{y} \quad \underbrace{p \Leftrightarrow q}_{v}.$$

Ahora, la proposición de la izquierda es una conjunción verdadera, y por la *definición de conjunción*, se tiene que las dos proposiciones son verdaderas, es decir;

$$\underbrace{\neg p}_{v} \quad \text{y} \quad \underbrace{p \vee q}_{v}$$

Así, de lo anterior y por la *definición de negación*, p es falsa, ya que $\neg p$ es verdadera.

Por otra parte, como ya tenemos el valor de verdad de p podemos determinar el valor de q de la siguiente proposición

$$\underbrace{p \vee q}_{v}$$

por la *definición de disyunción*, concluimos que q es verdadera ya que $p \vee q$ es verdadera.

Finalmente, ya que p es falsa y q verdadera, la proposición

$$p \Leftrightarrow q$$

es falsa, por la *definición de doble implicación*, esto contradice el hecho de que también es verdadera. Esto nos permite concluir que no hay valores de verdad para p y q de modo que la proposición, $[\neg p \wedge (p \vee q)] \wedge (p \Leftrightarrow q)$ sea verdadera.

□

b) $[(q \Leftrightarrow p) \wedge \neg q] \Rightarrow (p \wedge \neg q)$ Falsa.

Respuesta. La proposición:

$$[(q \Leftrightarrow p) \wedge \neg q] \Rightarrow (p \wedge \neg q)$$

es una implicación y para que esta sea falsa, por la *definición de impli-*

cación, obligatoriamente el antecedente es verdadero y el consecuente falso, es decir:

$$\underbrace{(q \Leftrightarrow p) \wedge \neg q}_{v} \quad \text{y} \quad \underbrace{(p \wedge \neg q)}_{f}$$

Empezamos analizando la proposición consecuente ya que a simple vista parece más sencilla de analizar.

Si la proposición:

$$p \wedge \neg q$$

es falsa, pueden ocurrir dos cosas: que p es verdadera y $\neg q$ es falsa, o viceversa. Esto es todo lo que podemos concluir analizando esta proposición.

Ahora, dado que la proposición $[(q \Leftrightarrow p) \wedge \neg q]$ es verdadera y es una conjunción, la única opción para que se cumpla que es verdadera es que:

$$\underbrace{(q \Leftrightarrow p)}_{v} \quad \text{y} \quad \underbrace{\neg q}_{v}$$

por lo tanto, ya que $\neg q$ es verdadera, por la *definición de negación*, concluimos que q es falsa.

Ahora, como ya que tenemos el valor de verdad de q y por la *definición de la doble implicación*, concluimos que p también es falsa.

Y con los valores de verdad obtenidos de p y q podemos verificar que: $(p \wedge \neg q)$ es falsa.

Por lo tanto, si la proposición $[(q \Leftrightarrow p) \wedge \neg q] \Rightarrow (p \wedge \neg q)$ es falsa, entonces el valor de verdad de las proposiciones p y q es falso. □

c) Determinar los valores de verdad que deben tener p,q y r para que las siguientes dos proposiciones sean falsas

$$(p \vee q) \Rightarrow r \quad \text{y} \quad r \Leftrightarrow p$$

Respuesta. Debemos hallar los valores de verdad de p, q y r para los cuales las proposiciones

$$(p \vee q) \Rightarrow r \tag{1}$$

$$r \Leftrightarrow p \tag{2}$$

sean falsas.

Entonces, por la definición de la *implicación*, la única opción para que la proposición 1 sea falsa es que el antecedente sea verdadero y el consecuente falso, y por lo tanto, el valor de verdad de r obligatoriamente es falso, es decir, tenemos que:

$$\underbrace{(p \vee q)}_{v} \quad \text{y} \quad \underbrace{r}_{f}$$

Ahora, por la definición de la *doble implicación* y de la proposición 2, debido a que el valor de verdad de la proposición r es falso, entonces de podemos concluir que el valor de verdad de la proposición p también es falso, es decir;

$$\underbrace{r}_{f} \quad \text{y} \quad \underbrace{p}_{f}$$

Finalmente, para hallar el valor de verdad de la proposición q, usamos la definición de la *disyunción*, y el hecho de que

$$\underbrace{(p \vee q)}_{v}$$

pues ya que p es falsa, entonces podemos concluir que la proposición q es verdadera.

Por lo tanto, para que las proposiciones 1 y 2 sean falsas, las proposiciones simples r y p deben ser falsas y la proposición q debe ser verdadera. $\square$

Resultado

Reconocer una equivalencia lógica.

Ilustración

1. *¿Cuál de las siguientes proposiciones son equivalentes a la proposición: "Si $x^2 > 0$, entonces $x > 0$ "?*

   a) Si $x > 0$, entonces $x^2 > 0$.

   b) Si $x \leq 0$, entonces $x^2 \leq 0$.

   c) Si $x^2 \leq 0$, entonces $x \leq 0$.

d) Si $x^2 \not> 0$, entonces $x \not> 0$.

Respuesta. La proposición "Si $x^2 > 0$, entonces $x > 0$ ", se puede representar simbólicamente de la siguiente manera:

$$p \Rightarrow q \tag{1}$$

donde las proposiciones p y q son:

$p : x^2 > 0$; y

$q : x > 0$.

Entonces, como sabemos, hay un par de equivalencias de la *implicación*:

$$p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q \quad \text{y} \quad p \Rightarrow q \equiv \neg q \Rightarrow \neg p$$

pero, solo la *contrapositiva* se expresa usando la *implicación*, y es por esto que usaremos esta opción, pues en todas las posibles respuestas se usa la *implicación*, y solo falta verificar que se nieguen correctamente las proposiciones p y q.

Entonces, negando las proposiciones p y q tenemos que:

$\neg p : x^2 \not> 0 \equiv x^2 \leq 0$; y

$\neg q : x \not> 0 \equiv x \leq 0$.

Por lo tanto, usando la *contrapositiva* tenemos que la proposición inicial es equivalente a la siguiente:

$$\text{Si } x \leq 0, \text{ entonces } x^2 \leq 0$$

o simbólicamente

$$\neg q \Rightarrow \neg p$$

Ahora si representamos las proposiciones dadas simbólicamente.

a) Si $x > 0$, entonces $x^2 > 0$, simbólicamente es: $q \Rightarrow p$.

b) Si $x \leq 0$, entonces $x^2 \leq 0$, simbólicamente es:$\neg q \Rightarrow \neg p$.

c) Si $x^2 \leq 0$, entonces $x \leq 0$, simbólicamente es: $\neg p \Rightarrow \neg q$.

d) Si $x^2 \not> 0$, entonces $x \not> 0$, simbólicamente es: $\neg p \Rightarrow \neg q$.

Por lo tanto, la única proposición equivalente a 1 es la opción (2).

□

2. *Modificar la proposición*

$$p \Rightarrow \neg(\neg q \Rightarrow r)$$

en otra equivalente que contenga solo las conectivas: conjunción y negación.

Respuesta. Aplicando la equivalencia *implicación- disyunción* en la proposición $p \Rightarrow \neg(\neg q \Rightarrow r)$, tenemos:

$$p \Rightarrow \neg(\neg\neg q \vee r),$$

aplicando la *doble negación* en la proposición anterior:

$$p \Rightarrow \neg(q \vee r),$$

aplicando *De Morgan: negación de la disyunción*:

$$p \Rightarrow (\neg q \wedge \neg r),$$

aplicando la *implicación-disyunción*:

$$\neg p \vee (\neg q \wedge \neg r),$$

aplicando la *Distributiva: disyunción respecto de conjunción*:

$$(\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg q \vee \neg r).$$

Notar que la proposición anterior todavía no está expresada únicamente mediante la *conjunción* y *negación*, por lo que aún no hemos terminado el ejercicio.

Entonces, aplicando la equivalencia *De Morgan: negación de la conjunción* (dos veces) en la proposición anterior, tenemos:

$$\neg(p \wedge q) \wedge \neg(q \wedge r).$$

Ahora sí, la proposición anterior solo contiene las conectivas "$\wedge$" y "$\neg$", por lo que hemos concluimos el ejercicio. □

3. *Simplifique a una expresión equivalente que sea una sola letra (T,F, p o $\neg p$) Justifique su respuesta.*

Donde $\mathtt{T}$ representa a una proposición verdadera y $\mathtt{F}$ representa a una proposición falsa y p una proposición cualquiera.

a) $\neg\mathtt{T} \vee \mathtt{F} \equiv$

Respuesta. $\neg\mathtt{T} \vee \mathtt{F} \equiv \mathtt{F} \vee \mathtt{F} \equiv \mathtt{F}$, pues la negación de una proposición verdadera es falsa, y por la definición de la equivalencia *Ley de idempotencia*, se tiene el resultado. □

b) $\mathtt{T} \wedge p \equiv$

Respuesta. $\mathtt{T} \wedge p \equiv p$, se tiene este resultado debido definición de la equivalencia *Ley de identidad.* □

c) $\mathtt{F} \wedge \neg p \equiv$

Respuesta. $\mathtt{F} \wedge \neg p \equiv \mathtt{F}$, este resultado debido a las *Leyes de dominación.* □

d) $(\mathtt{F} \vee \mathtt{T}) \vee \mathtt{T} \equiv$

Respuesta. $(\mathtt{F} \vee \mathtt{T}) \vee \mathtt{T} \equiv \mathtt{T} \vee \mathtt{T} \equiv \mathtt{T}$, debido a la definición de la *conjunción.* □

Resultado

Explicar la diferencia entre tautología y equivalencia lógica.

Ilustración

1. *¿ $p \equiv q$ y $p \Leftrightarrow q$ representan lo mismo? ¿Por qué?*

Respuesta. La *equivalencia lógica* y la *doble implicación* no representan lo mismo, pues;

$$p \equiv q$$

representa que la *doble implicación* entre p y q es una tautología, es decir, $p \equiv q$ no es una proposición sino una una relación entre p y q, en cambio

$$p \Leftrightarrow q$$

sí representa una proposición, expresada a través de las proposiciones simples p y q y la conectiva *doble implicación*, y que además, puede o no ser una tautología.

$\square$

2. *¿El signo $p \equiv q$ significa que p sea igual a q? Justifique su respuesta.*

Respuesta. El signo $p \equiv q$ **no** significa que p sea igual a q. En realidad lo que significa es que las proposiciones p y q tienen el mismo valor de verdad sin importar los valores de verdad de las proposiciones simples mediante las cuales se expresan. $\square$

3. *Sean p y q dos proposiciones cualquiera, entonces, si la proposición p es lógicamente equivalente a la proposición q, entonces ¿es correcto afirmar que siempre se cumple que p y q son tautologías ?*

Respuesta. La afirmación es incorrecta. Lo correcto es afirmar que si las proposiciones p y q son lógicamente equivalentes, entonces siempre los valores de verdad de p y q deben ser los mismos.

Veamos otra manera de responder a esta pregunta haciendo uso de un contraejemplo:

Sean las proposiciones

$$P : p \quad \text{y} \quad Q : p \wedge (p \vee q)$$

Notar que la proposición P es simple y la proposición Q no lo es.

Entonces, en la siguiente tabla podemos verificar que $P \equiv Q$ pero que P y Q no necesariamente son tautologías pero, sí se verifica que tienen los mismos valores de verdad.

p	q	$p \vee q$	$p \wedge (p \vee q)$	$[\, p \wedge (p \vee q\,)\,] \Leftrightarrow p$
v	v	v	v	v
v	f	v	v	v
f	v	v	f	v
f	f	f	f	v

Por lo tanto, hemos encontrado un ejemplo donde, a pesar de que $P \equiv Q$, no es verdad que P y Q sean tautologías. $\square$

3.3.2. Conjuntos

Luego que el estudiante haya terminado el módulo de *Conjuntos*, ejemplos de resultados de aprendizaje que evidencien el conocimiento adquirido son:

Resultado

Conocer las formas de representar un conjunto.

Ilustración

1. Determinar si los siguientes conjuntos están dados por comprensión o extensión.

   a) A *es el conjunto de los signos que representan las conectivas: negación, conjunción, disyunción, implicación y doble implicación.*

   b) $B = \{y \mid y - 2 = 5\}$

   c) $C = \{1, 2, 3\}$

   d) $D = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$

   e) E *es el conjunto de los números naturales menores que* 5.

   Respuestas.

   a) A es un conjunto expresado por *extensión*, pues se especifican de manera explícita sus elementos.

   b) El conjunto B está dado por *comprensión*, pues se especifica la propiedad que cumplen sus elemento, y no se listan sus elementos explícitamente.

   c) El conjunto C está dado por *extensión*, pues se listan sus elementos explícitamente.

   d) El conjunto D está dado por *comprensión*, pues se comprende que sus elementos son todos los números pares, y **no** debemos confundirnos, y decir que se expresa por *extensión*, ya que es imposible listar explícitamente sus elementos.

e) E es un conjunto expresado por *comprensión*, pues expresa la propiedad que sus elementos poseen, y no se los lista de manera específica. $\square$

2. Escribir los siguientes conjuntos por extensión.

   a) $P = \{x \mid x$ *es negativo*, x *es positivo*, $\}$

   Respuesta. No hay ningún número que sea positivo y negativo, por lo tanto, el conjunto P es vacío, es decir, $C = \varnothing$ $\square$

   b) $Q = \{x \mid x - 5 = 5\ \}$

   Respuesta. La única solución de $x - 5 = 5$ que es 10, de modo que $Q = \{10\}$ $\square$

3. Escribir los siguientes conjuntos por comprensión.

   a) $A = \{3, 6, 9, 12, \ldots\}$

   Respuesta. $A = \{x \mid x$ es múltiplo de $3\ \}$ $\square$

   b) $B = \{2\}$

   Respuesta. $B = \{x \mid 8x = 16\ \}$=$\{x \mid x$ es un número primo par $\}$ $\square$

Resultado

Enunciar la definición de igualdad de conjuntos.

Ilustración

1. Contestar con SI o NO según corresponda. Justifique su respuesta.

   Sean los conjuntos:

$$A = \left\{8, 9, 6, \frac{3}{3}\right\},\ B = \left\{1, 8, 9, 6, \frac{2}{3}\right\}$$

   a) *¿Se verifica que* $x \in A \Rightarrow x \in B$*?*

Respuesta. SI, ya que $\frac{3}{3} = 1$ y por lo tanto, el conjunto A se puede reescribir de la siguiente manera:

$$A = \{8, 9, 6, 1\}$$

y de esta manera es más evidente verificar que $\frac{3}{3}$ está en A y también está en B, simbólicamente:

$$x \in A \Rightarrow x \in B \tag{1}$$

$\square$

b) *¿Se verifica que $x \in B \Rightarrow x \in A$?*

Respuesta. NO, ya que $\frac{2}{3}$ está en el conjunto B pero no está en el conjunto A, simbólicamente;

$$\frac{2}{3} \in B \text{ y } \frac{2}{3} \notin A$$

entonces, podemos concluir que

$$x \in B \not\Rightarrow x \in A, \tag{2}$$

donde "$\not\Rightarrow$" significa *no implica*. $\square$

c) *¿Son iguales los conjuntos A y B?*

Respuesta. NO, puesto que para afirmar que A y B son iguales, los dos conjuntos deben tener los mismos elementos, o lo que es lo mismo, se de de verificar que:

$$x \in A \Leftrightarrow x \in B \tag{3}$$

pero, por 1 y 2 podemos afirmar que la proposición 3 es falsa, es decir, $A \neq B$. $\square$

2. Determinar si el par de conjuntos dados a continuación son iguales o no.

$$P = \{x \in \mathbb{N} \mid 5 \leq x < 9\}, Q = \{x \in \mathbb{N} \mid 4 \leq x < 8\}$$

Respuesta. Primero expresamos los conjuntos por extensión dado que así es más fácil ver todos los elementos de un conjunto.

Del conjunto "P": $P = \{x \in \mathbb{N} \mid 5 \leq x < 9\}$; "$x$" toma los valores: $5, 6, 7$, y 8, es decir, $P = \{5, 6, 7, 8\}$.

Del conjunto "Q": $Q = \{x \in \mathbb{N} \mid 4 \leq x < 8\}$; "$x$" toma los valores: $4, 5, 6$ y 7, es decir, $Q = \{4, 5, 6, 7\}$.

Ahora es más fácil ver que el número 8 pertenece al conjunto P pero no pertenece al conjunto Q y esto basta para concluir que P y Q no son conjuntos iguales, es decir, $P \neq Q$.

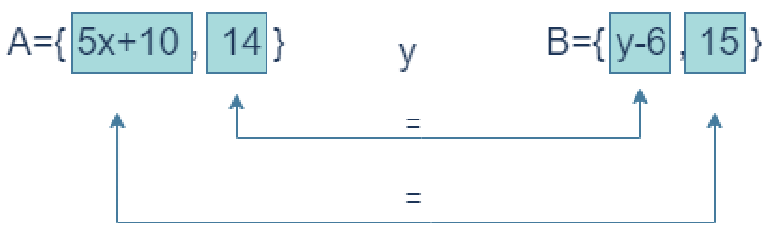
De manera similar, podemos afirmar que $Q \neq P$, ya que el número 4 pertenece al conjunto Q pero no pertenece al conjunto P. □

3. Si los conjuntos A y B son iguales:

$$A = \{5x + 10, 14\}, B = \{y - 6, 15\}$$

Calcular; $y - x$

Respuesta. Sabemos que dos conjuntos son iguales, si tienen exactamente los mismos elementos. Luego si $A = B$:



Es decir,se debe cumplir que:

$$5x + 10 = 15 \Rightarrow 5x = 5 \Rightarrow x = 1 \quad \text{y} \quad 14 = y - 6 \Rightarrow 20 = y$$

Finalmente como nos piden calcular: $y - x$, basta reemplazar los valores calculados anteriormente. Por lo tanto, $y - x = 20 - 1 = 19$

□

Resultado

Enunciar la definición de subconjunto.

Ilustración

1. Determinar si la proposición: $\varnothing \subseteq \varnothing$, es verdadera o falsa.

   Respuestas. Por la definición de subconjunto, determinar el valor de verdad $\varnothing \subseteq \varnothing$, es equivalente a determinar el valor de verdad de la *implicación*:

   $$\forall x, x \in \varnothing \Rightarrow x \in \varnothing,$$

   entonces, dado que el conjunto vacío no contiene ningún elemento, $x \in \varnothing$ es una proposición *falsa*. Luego, la *implicación*

   $$\underbrace{x \in \varnothing}_{f} \Rightarrow x \in \varnothing$$

   siempre es verdadera, sin importar el valor de verdad que tenga la proposición consecuente, pues la conclusión siempre es verdadera. En conclusión, la proposición $\varnothing \subseteq \varnothing$, es verdadera. $\square$

2. Sean los conjuntos:

   $$\varnothing, P = \{1\}, Q = \{1, 3\}, R = \{1, 5, 9\}, S = \{1, 2, 3, 4, 5\}, T = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

   Llenar el espacio en blanco con el símbolo "$\subseteq$", si es subconjunto o "$\nsubseteq$" si no es subconjunto, según corresponda. Justifique su respuesta.

   a) $\varnothing$ ___ P b) P ___ Q c) Q ___ R d) P ___ T
   e) R ___ S f) R ___ T g) S ___ T h) T ___ T

   Respuestas.

   a) $\varnothing \subseteq P$, dado que el conjunto $\varnothing$ es subconjunto de todo conjunto.

   b) $P \subseteq Q$, dado que 1 es el único elemento de P y pertenece a Q.

   c) $Q \nsubseteq R$, dado que $3 \in Q$ pero $3 \notin R$

   d) $Q \subseteq T$, dado que los elementos de Q también pertenecen a T.

   e) $R \nsubseteq S$, dado que $9 \in R$ pero $9 \notin S$.

   f) $R \subseteq T$, dado que los elementos de R también pertenecen a T.

   g) $S \nsubseteq T$ dado que $2, 4 \in S$ pero $2, 4 \notin T$

   h) $T \subseteq T$, puesto que todo conjunto es subconjunto de sí mismo.

   $\square$

Resultado

Reconocer la diferencia entre las relaciones de "pertenencia" e "inclusión" de conjuntos.

Ilustración

1. Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

   a) $\{\varnothing\} \in \{\{\varnothing\}\}$

   Respuesta. Esta proposición es *verdadera*, ya que $\{\{\varnothing\}\}$ es un conjunto que tiene por único elemento al conjunto"$\{\varnothing\}$". $\square$

   b) $\{\varnothing\} \subseteqq \{\{\varnothing\}\}$

   Respuesta. Esta proposición es *falsa*. Pues $\{\varnothing\}$ no es un subconjunto de $\{\{\varnothing\}\}$ porque hay un único elemento del conjunto $\{\varnothing\}$, es decir "$\varnothing$", que no es un elemento de $\{\{\varnothing\}\}$. $\square$

   c) Fundamentos de Matemática $\in DFB \in C$.

   Si DFB es el conjunto de todas las materias que se dictan en el curso propedéutico de la *EPN* y C es el conjunto de todas las carreras que tiene la *EPN*.

   Respuesta. La proposición es *falsa*. Ya que Fundamentos de Matemática está en DFB, pero Fundamentos de Matemática no está en C (ya que ni siquiera es una carrera), y por lo tanto, $DFB \notin C$, es decir, $DFB \nsubseteqq C$. $\square$

2. Si $\Omega = \{\ \varnothing, 3, 6, 7, 8, \{7\}, \{8\}, \{5, 7\}, \{1, 3, 8\}\}$.

   Colocar en el paréntesis una v si la proposición es verdadera o una f si la proposición es falsa. Justifique su respuesta.

a) $\varnothing$ pertenece a Ω	( )	b) $\{\varnothing\} \subseteqq \Omega$	( )
c) $\{6, 6, 6\} \subseteqq \Omega$	( )	d) $\{\{5, 7\}, \{8\}\} \subseteqq \Omega$	( )
e) $\{\{5, 7\}, \{8\}\} \in \Omega$	( )		

Respuesta. Recordar que tanto la **pertenencia** como la **inclusión** (también llamada **contenencia**) son relaciones entre conjuntos [2]. Sin embargo, son diferentes, pues, dadas las proposiciones:

$$A \in B \quad \text{y} \quad A \subseteq B,$$

si la primera (la de la izquierda) es verdadera, no podemos asegurar que todos los elementos de A también sean elementos de B; en cambio, si la segunda (la derecha) fuera verdadera, sí lo podemos hacer. Tampoco, si la segunda proposición es verdadera, no podemos saber si A es o no un elemento de B.

Otra manera de mirar la diferencia entre inclusión y pertenencia es la siguiente: de la proposición $A \in B$, no podemos concluir si $A \subseteq B$; y, viceversa.

Por otra parte, la pertenencia y la inclusión se relacionan por la siguiente equivalencia lógica:

$$a \in A \equiv \{a\} \subset A. \tag{1}$$

Ahora, bien:

a) $\varnothing \in \Omega$. (v)

Pues en este caso "$\varnothing$" sí es elemento del conjunto Ω.

b) $\{\varnothing\} \subseteqq \Omega$. (v)

Por 1, como: $\varnothing \in \Omega \Rightarrow \{\varnothing\} \subseteqq \Omega$

c) $\{6, 6, 6\} \subseteqq \Omega$. (v)

Sabemos que: $\{6, 6, 6\} = \{6\}$ y además 6 está en Ω y por 1 se tiene el resultado.

d) $\{\{5, 7\}, \{8\}\} \subset \Omega$. (v).

Pues, $\{5, 7\}$ y $\{8\} \in \Omega$ y por 1, entonces $\{\{5, 7\}, \{8\}\} \subset \Omega$

e) $\{\{5, 7\}, \{8\}\} \in \Omega$. (f)

Pues $\{\{5, 7\}, \{8\}\}$ no es elemento de Ω.

□

Resultado

Enunciar las definiciones de las operaciones entre conjuntos.

Ilustración

1. El lado derecho de las siguientes definiciones tiene un error, encuéntrelo y corríjalo.

   Sean A y B subconjuntos de un conjunto universal adecuado U.

   a) $A \cap B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

   Respuesta. El error está en el signo de la *disyunción*. La definición correcta es [1]:

   $$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

   □

   b) $A' = \{x \mid x \notin B\}$

   Respuesta. Dado que el enunciado dice que el lado derecho presenta el error, entonces, lo que se quiere definir es el *complemento* del conjunto A y no de B como lo expresa el lado derecho, por lo tanto ese es el error, entonces lo correcto es [1]:

   $$A' = \{x \mid x \notin A\}$$

   □

   c) $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in U\}$

   Respuesta. El lado izquierdo, que se asume correcto, denota la unión entre A y B, y el lado derecho, expresa la unión entre A y U,por lo tanto este es el error, entonces lo correcto es [1]:

   $$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

   □

   d) $A' = \{x \mid x \in U \wedge x \in A\}$

   Respuesta. El lado izquierdo, define el *complemento* del conjunto A, y esto se define como los elementos del conjunto U y que no están en A, por lo tanto, lo correcto es [1]:

   $$A' = \{x \mid x \in U \wedge x \notin A\}$$

   □

e) $A - B = \{x \mid x \in A \vee x \notin B\}$

Respuesta. El error consiste en la símbolo de la *disyunción*, pues por definición de la diferencia de conjuntos, debe estar el símbolo de *conjunción*, es decir, lo correcto es [1]:

$$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

$\square$

2. Hallar la intersección y la unión de los siguientes conjuntos.

a) $A = \{\blacktriangle, \triangledown, \blacksquare, \bullet, 7\}$
$B = \{\triangledown, 2, 5, 7, \pi\}$

Respuesta. Primero calculamos $A \cap B$:
Si,

$$A = \left\{\blacktriangle, \underline{\triangledown}, \blacksquare, \bullet, \underline{7}\right\} \quad \text{y} \quad B = \left\{\underline{\triangledown}, 2, 5, \underline{7}, \pi\right\},$$

entonces : $A \cap B = \{\triangledown, 7\}$, pues $\triangledown$ y 7, son únicos elementos que se están en ambos conjuntos.
Ahora calculamos $A \cup B$:

$$A \cup B = \{\blacktriangle, \bullet, \blacksquare, \triangledown, 7, 2, 5.\pi\}$$

ya que la unión está conformada por los elementos que están en el conjunto A o los elementos del conjunto B. $\square$

b) $P = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ es un número primo menor que 15$\}$
$Q = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ es un número par menor que 10$\}$
$R = \emptyset$

Respuesta. Para determinar la unión e intersección de los conjuntos P, Q y R, por facilidad, primero expresamos estos conjuntos por extensión, es decir;

$$P = \{1, 2, 3, 5, 7, 11, 13\}, Q = \{2, 4, 6, 8\} \quad \text{y} \quad R = \{\ \} = \varnothing$$

Empezamos calculando $P \cap Q \cap R$:
Puesto que la intersección de cualquier conjunto con el conjunto vacío, da como resultado el conjunto vacío, entonces:

$$P \cap Q \cap R = \{\ \} = \varnothing,$$

Dado que la unión de los conjuntos A, B y C está conformada por los elementos que están en estos conjuntos, tenemos que:

$$P \cup Q \cup R = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 11, 13\}$$

$\square$

3. Hallar el complemento de un conjunto.

   Sean:

$$U_1 = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 < x \leq 5\}$$

$$U_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 5\}$$

   a) Contestar la siguiente pregunta. Justifique su respuesta.

   ¿Los conjuntos U_1 y U_2 son iguales?

   Respuesta. Si escogemos el número $4{,}5$ podemos notar que este número pertenece a U_2 pero no pertenece al conjunto U_1 ya que $4{,}5$ no es un entero. Por lo tanto, U_1 y U_2 no son iguales. $\square$

   b) Si afirmamos que $A = \{y \mid 0 < y \leq 3\}$ y que $A \subseteq U_1$. Hallar A'.

   Respuesta. Notar que los elementos del conjunto A, son números naturales, esto porque $A \subseteq U_1$. Luego,

$$A' = \{x \mid x \in U_1 \wedge x \notin A\} = \{x \mid x \notin A\}$$

   Para esto expresemos los conjuntos U_1 y A por extensión: El conjunto U_1 es el conjunto formado por los números naturales mayores que cero y menores o iguales a cinco, y el conjunto A esta formado por los números naturales menores o iguales a 3 y mayores que cero, entonces:

$$U_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad \text{y} \quad A = \{1, 2, 3\}$$

   Así es más fácil ver que los elementos que no están en A son 4 y 5, es decir,

$$A' = \{4, 5\}$$

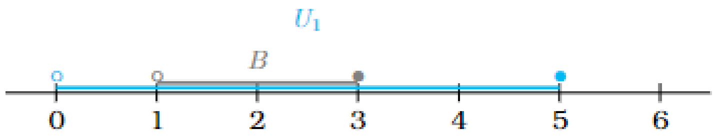
$\square$

   c) Si afirmamos que $B = \{z \mid 1 < z \leq 3\}$ y que $B \subseteq U_2$. Hallar B'.

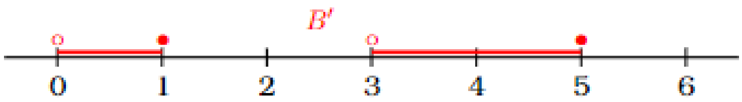
Respuesta. Por definición:

$$B' = \{x \mid x \in U_2 \wedge x \notin B\}$$

Para tener una mejor idea de los conjuntos dados, es bueno realizar un esquema de los conjuntos, sobre todo cuando se trata de subconjuntos de los números reales.



Graficando los conjuntos U_1 (celeste) y B (gris), es más fácil ver el complemento de B. Sabemos que el complemento de B es el conjunto con los elementos que no están en B, gráficamente:



Por lo tanto,

$$B' = \{x \mid 0 < x \leq 1 \vee 3 < x \leq 5\}$$

o equivalentemente

$$B' =]0;1] \cup [3;5[$$

$\square$

Resultado

Reconocer la diferencia entre "par ordenado" y "par desordenado".

Ilustración

1. Si los pares ordenados $(x^2+4, 3)$ y $(29, y-2)$ son iguales, determinar los valores de x e y de tal forma que el par desordenado $\{x, y\}$ sea igual a $\{x\}$.

   Respuesta. Dado que los pares ordenados $(x^2+4, 3)$ y $(29, y-2)$ son iguales, entonces, sus "primeras" y "segundas" componentes son iguales, es decir,

$$x^2+4=29 \quad \text{y} \quad 3=y-2$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x^2=25 \quad \text{y} \quad y=5$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x=5 \lor x=-5 \quad \text{y} \quad y=5$$

   Ahora, para que el par desordenado cumpla que:

$$\{x, y\} = \{x\}$$

   x e y deben ser iguales, por lo tanto, $x=y=5$. □

Resultado

Enunciar la definición de producto cartesiano.

Ilustración

1. Sean los conjuntos:

$$M=\{x \in \mathbb{N} \mid 2 < x \leq 4\} \quad \text{y} \quad N=\{y \in \mathbb{Z} \mid -2 < y \leq 1\}$$

   Determinar si los siguiente enunciados son correctos.

a) (0,1) $\in M \times N$

b) (4,1) $\in M \times N$

c) (-1,1) $\in N \times M$

d) (1,4) $\in M \times N$

Primero expresemos por extensión los conjuntos M y N:

$$M = \{3, 4\} \quad \text{y} \quad N = \{-1, 0, 1\}$$

y recordemos la definición de *producto cartesiano* [1]:

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

Entonces:

a) $(0, 1) \in M \times N$

Respuesta. Dado que 0 no está en M, directamente sin hacer más, podemos concluir que:

$$(0, 1) \notin M \times N$$

$\square$

b) (4,1) $\in M \times N$

Respuesta. Dado que: 4 está en M, y 1 está en N, podemos concluir que:

$$(4, 1) \in M \times N$$

$\square$

c) (-1,1) $\in N \times M$

Respuesta. Dado que -1 está en N pero 1 no está en M, concluimos que:

$$(-1, 1) \notin N \times M$$

$\square$

d) (1,4) $\in M \times N$

Respuesta. Dado que: 1 no está en M, y 4 no está en N, podemos concluir que:

$$(1,4) \notin M \times N$$

□

Resultado

Enunciar las propiedades del producto cartesiano.

Ilustración

1. Dados:

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 7 < x + 5 < 14\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 4 < x - 2 \leq 8\}$$

Determinar cuántos elementos tiene el conjunto $A \times B$.

Respuesta. Para determinar cuantos elementos tiene el conjunto $A \times B$, podemos usar la siguiente propiedad [1]:

$$n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$$

donde, $n(A)$: representa el número de elementos del conjunto A.

Entonces si;

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 7 < x + 5 < 14\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 4 < x - 2 \leq 8\}$$

primero expresamos estos dos conjuntos por extensión.

Conjunto A:

$$7 < x + 5 < 14 \Rightarrow 2 < x < 9$$

Por lo tanto, $A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, entonces, $n(A) = 6$.

Conjunto B:

$$4 < x - 2 \leq 8 \Rightarrow 6 < x \leq 10$$

Por lo tanto, $B = \{7, 8, 9, 10\}$, entonces, $n(B) = 4$.

Finalmente,

$$n(A \times B) = n(A) \cdot n(B) = 6 \cdot 4 = 24$$

Es decir, el número de elementos de $A \times B$ es 24. $\square$

2. Sabiendo que [1]:
$$n(A \times B) = n(A) \cdot n(B),$$
donde $n(A)$ es el número de elementos que tiene el conjunto A.

Contestar a la siguiente pregunta.

> ¿Por qué si el producto cartesiano no es conmutativo, se cumple que $n(A \times B) = n(B \times A)$?.

Respuesta. Efectivamente, el producto cartesiano no es conmutativo, es decir, si A y B son dos conjuntos cualquiera distintos del vacío, tenemos que la siguiente proposición es verdadera:
$$A \times B \neq B \times A$$
notar además que $A \times B$ es un conjunto de pares ordenados, y $n(A \times B)$ es el número de elementos que tiene este conjunto, por lo tanto, a pesar de que el producto cartesiano no es conmutativo, se verifica que:
$$n(A \times B) = n(B \times A)$$
pues $n(A \times B)$ es un número y no un conjunto, y por lo tanto, se verifica la ley conmutativa de la multiplicación, es decir:
$$n(A \times B) = n(A) \cdot n(B) = n(B) \cdot n(A) = (B \times A)$$

3.3.3. De Números Reales

Resultado

Conocer los axiomas de cuerpo de los números reales.

Ilustración

1. En las siguiente igualdades, determine el *axioma de cuerpo* que se utiliza.

a) $\frac{8}{9} + \frac{5}{9} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{8}{3} + \frac{5}{3}\right)$

Respuesta. Observamos la igualdad con atención y nos fijamos que tiene la forma del axioma *Distributiva del producto respecto de la suma* [2], es decir, $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, ya que número $\frac{1}{3}$ hace el papel de a, $\frac{8}{3}$ seria b y $\frac{5}{3}$ la letra c. $\square$

b) $\sqrt[n]{x + \sqrt{x}} - \sqrt[n]{x + \sqrt{x}} = 0$

Respuesta. Observamos la igualdad con atención y nos fijamos que tiene la forma del axioma *Existencia y unicidad del inverso aditivo*[2], es decir, $a + (-a) = 0$, ya que el número: $\sqrt[n]{x + \sqrt{x}}$, hace el papel de a. Notar que x debe ser mayor que cero. $\square$

c) $\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^2 \cdot \left[\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^2\right]^{-1} = 1$

Respuesta. Esta igualdad tiene la forma del axioma *Existencia y unicidad del inverso multiplicativo*[2] es decir, $a \cdot a^{-1} = 1$, ya que número $\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^2$ hace el papel de a. Notar que x debe ser distinto de cero. $\square$

Resultado

Conocer los axiomas de orden de los números reales.

Ilustración

1. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones. Además, encuentre el error y corríjalo en el caso que la posposición sea falsa.

   a) Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a > c$.

   Respuesta. La proposición anterior es falsa. Veamos el siguiente contraejemplo. Si $a = 5$, $b = 10$ y $c = 20$, entonces podemos constatar que:

   $$5 < 10 \text{ y } 10 < 20, \text{ pero esto no implica que } 5 > 20$$

   El axioma escrito correctamente es:

   $$\text{Si } a < b \text{ y } b < c \text{ entonces } a < c$$

$\square$

b) $\forall\, z$ en $\mathbb{R}$, si $a \leq b$ entonces $a + z < b + z$.

Respuesta. La proposición anterior es falsa. Veamos el siguiente contraejemplo. Si $a = 2$, $b = 2$ y $c = 0$, entonces podemos constatar que

$$2 \leq 2 \text{ pero esto no implica que } 2 + 0 < 2 + 0.$$

El axioma escrito correctamente es:

$$\forall z \text{ en } \mathbb{R}, \text{si } a < b \text{ entonces } a + z < b + z,$$

o también puede ser correjido de la siguinete manera:

$$\forall z \text{ en } \mathbb{R}, \text{si } a \leq b \text{ entonces } a + z \leq b + z,$$

$\square$

Resultado

Conocer el concepto de valor absoluto.

Ilustración

1. Determine la veracidad de los siguientes enunciados acerca del valor absoluto.

a) El valor absoluto de un número siempre es positivo.

Respuesta. El enunciado es falso. Ya que si tomamos el número -0, entonces su valor absoluto es el número 0, pero no es cierto que 0 es mayor que 0, es decir;

$$|-0| = 0 \text{ pero, } 0 \not> 0$$

por lo tanto, el valor absoluto de un número no es siempre un número positivo, pues existe un número cuyo valor absoluto no es positivo.

Lo correcto es afirmar que: el valor absoluto un de número, es número no negativo siempre. $\square$

b) $|x| = y \equiv x = y \wedge x = -y$

Respuesta. El enunciado es falso. Pues por el principio de no contradicción;

$$x = y \quad \text{y} \quad x = -y$$

no pueden ser verdaderas ambas al mismo tiempo. Lo correcto es afirmar que:

$$|x| = y \equiv x = y \vee x = -y$$

□

c) El valor absoluto de un número diferente de cero, es el mismo número si este es positivo[2].

Respuesta. Este enunciado es correcto, pues es parte de la definición de valor absoluto. □

Resultado

Aplicar el concepto del valor absoluto de un número real.

Ilustración

1. Calcular los siguientes valores absolutos.

a) $|x^2 + 4|$

Respuesta. El valor absoluto de x^2+4 es x^2+4 porque x^2+4 es siempre mayor a 4, es decir;
$\left|x^2 + 4\right| = x^2 + 4$ □

b) $|x - \pi|$

Respuesta. El valor absoluto de $x - \pi$ es:

$$|x - \pi| = \begin{cases} x - \pi, & \text{si } x - \pi \geq 0 \\ -(x - \pi), & \text{si } x - \pi < 0 \end{cases}$$

Es decir,

$$|x - \pi| = \begin{cases} x - \pi, & \text{si } x \geq \pi \\ -x + \pi, & \text{si } x < \pi \end{cases}$$

□

2. Aplicar el concepto de valor absoluto para resolver ecuaciones.

a) $|x-10|=8$

Respuesta. Si $x-10$ es mayor o igual que cero:

$$x-10 \geq 0$$

esto ocurre cuando $x \geq 10$, entonces, el valor absoluto de $x-10$ es $x-10$, por lo tanto, tenemos que:

$$x-10=8$$

$$x=8+10$$

$$x=18$$

Ahora, si $x-10$ es negativo:

$$x-10<0$$

esto ocurre cuando $x<10$, entonces, el valor absoluto de $x-10$ es $-(x-10)$, por lo tanto, tenemos que:

$$-(x-10)=8$$

$$-x+10=8$$

$$-x=8-10$$

$$-x=-2$$

$$x=2$$

Ahora si sustituimos los valores de $x=2$ y $x=18$ en la ecuación original, confirmamos que efectivamente son solución de esta ecuación, pues:

$$|2-10|=|-8|=8 \text{ y } |18-10|=|8|=8$$

Por lo tanto, la ecuación tiene dos soluciones: $x=2$ y $x=18$. $\square$

b) $|x+5|=x$

Respuesta. Por definición de valor absoluto, debemos separar en dos casos:

- $x+5>0$

- $x + 5 \leq 0$
- Si $x + 5$ es mayor que cero:

$$x + 5 > 0 \implies x > -5$$

es decir, cuando $x > -5$ el valor absoluto de $x + 5$ es $x + 5$. Luego

$$\begin{aligned} |x+5| = x &\implies x + 5 = x \\ &\implies 5 = 0 \end{aligned}$$

Pero, la ecuación anterior es falsa, es decir, no existe x tal que se cumpla que $x + 5 = x$. Por lo tanto, de la condición $x + 5 \geq 0$, no hallamos ninguna solución para la ecuación.

- Si $x + 5$ es menor o igual a cero:

$$x + 5 \leq 0$$

es decir, cuando $x \leq -5$, el valor absoluto de $x + 5$ es $-(x + 5)$, por lo tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned} |x+5| = x &\implies -(x+5) = x \\ &\implies -x - 5 = x \\ &\implies -x - x = +5 \\ &\implies -2x = 5 \\ &\implies x = -\frac{5}{2} \end{aligned}$$

Ahora si sustituimos $x = -\frac{5}{2}$ en la ecuación original $|x + 5| = x$, tenemos que:

$$
\begin{aligned}
|x+5| &= -\frac{5}{2} \\
\left|-\frac{5}{2}+5\right| &= -\frac{5}{2} \\
\left|\frac{-5+10}{2}\right| &= -\frac{5}{2} \\
\left|\frac{5}{2}\right| &= -\frac{5}{2} \\
\frac{5}{2} &= -\frac{5}{2}
\end{aligned}
$$

Como en el caso anterior, llegamos a un absurdo, por lo tanto, la ecuación $|x+5| = x$ no tiene solución. □

Resultado

Conocer el concepto de raíz cuadrada.

Ilustración

1. ¿Cuál es la razón para definir la raíz cuadrada solo para números positivos y el cero?

   Respuesta. La razón es la siguiente; por definición [2] la raíz cuadrada de x es el número y tal que:
   $$x = y^2$$
   además, recordar que de las propiedades o axiomas de los números reales, para todo número x se verifica que;
   $$x \cdot x = x^2 \geq 0$$
   Entonces, es lógico que no existe un número real $x < 0$ para el cuál la proposición
   $$x = y^2$$
   sea verdadera. □

2. ¿Por qué la raíz cuadrada de un número es no negativa, o cero?

Respuesta. Por la definición misma de raíz cuadrada, [2] pues la raíz cuadrada de un número x, es un número al cual lo multiplicamos consigo mismo para obtener el número x, y sabemos que todo número multiplicado consigo mismo, siempre es positivo. □

3. Determine el valor de verdad del siguiente enunciado.

   "Todo número mayor que 0 tiene 2 raíces cuadradas".

   Respuesta. El enunciado es falso, ya que según el *axioma de completitud*, existe una única raíz cuadrada de un número, bajo la condición que este número siempre sea positivo. □

Resultado

Aplicar el concepto de raíz cuadrada.

Ilustración

1. Identifique el error que se realiza en el siguiente procedimiento:

$$\begin{aligned} 4 = (-2)^2 \quad &\Longrightarrow \quad \sqrt{4} = \sqrt{(-2)^2} \\ &\Longrightarrow \quad 2 = -2 \end{aligned}$$

Respuesta. El error consiste en que no se satisface y aplica correctamente el *teorema de la raíz cuadrada* [2].

Dados los números x y y mayores o iguales que cero, entonces

$$x = y^2 \Leftrightarrow \sqrt{x} = y$$

Luego, con $x = 4$ y $y = 2$:

$$4 = (-2)^2 \Leftrightarrow \sqrt{4} = -2$$

lo que no se verifica es que y, en este caso -2, es mayor o igual a 0, por lo tanto, no se satisfacen las condiciones para aplicar el teorema correctamente. □

2. Halle los valores de $x \in \mathbb{R}$, si es que existen, para los cuales se verifica la siguiente proposición:

$$\sqrt{\frac{x^2}{8}} < 0$$

Respuesta. Dado que por definición la *raíz cuadrada* de un número es mayor o igual a cero, no existen valores de x para los cuales se satisfaga que $\sqrt{\frac{x^2}{8}} < 0$ □

3. Halle los valores de $x \in \mathbb{R}$, si es que existen, para los cuales se verifica la siguiente proposición:

$$\sqrt{\frac{x+5}{8}} > 0$$

Respuesta. Para resolver la desigualdad, primero debemos hallar los valores para los cuales $\frac{x+5}{8} > 0$, entonces:

$$\begin{aligned} \frac{x+5}{8} > 0 \quad &\Longrightarrow \quad x+5 > 0 \\ &\Longrightarrow \quad x > -5 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\sqrt{\frac{x+5}{8}}$, existe siempre que $x > -5$, entonces, dado que hallamos los valores para los cuales el *radicando* es positivo, podemos aplicar el teorema de la *raíz cuadrada* de manera correcta y elevar al cuadrado ambos lados de la desigualdad sin problema, es decir;

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{x+5}{8}} > 0 \quad &\Longrightarrow \quad \sqrt{\frac{x+5}{8}}^{\,2} > (0)^2 \\ &\Longrightarrow \quad \frac{x+5}{8} > 0 \\ &\Longrightarrow \quad x+5 > 0 \\ &\Longrightarrow \quad x > -5 \end{aligned}$$

Por lo tanto, los valores de x para los cuales se verifica que $\sqrt{\frac{x+5}{8}} > 0$, son los que pertenecen al conjunto $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -5\}$. □

Resultado

Aplicar los axiomas y teoremas de los números reales para resolver ecuaciones.

Ilustración

1. *Encontrar la solución de las siguientes ecuaciones.*

   a) $4 - \left[-4(x+1) - \dfrac{2x-6}{2}\right] = \dfrac{4x}{3}\dfrac{10x-6}{12} + 6x$

   Respuesta.

$$4 - \left[-4(x+1) - \frac{2x-6}{2}\right] = \frac{4x}{3} - \frac{10x-6}{12} + 6x \tag{1}$$

Operamos para quitar los corchetes:

$$4 + 4(x+1) + \frac{2x-6}{2} = \frac{4x}{3} - \frac{10x-6}{12} + 6x$$

Calculamos el mínimo común múltiplo $(m.c.m.)$ de $2, 3, 12$, que son los denominadores de la ecuación anterior:

$$m.c.m(2,3,12) = m.c.m.(2,3,2^2 \cdot 3) = 2^2 \cdot 3 = 12$$

Multiplicamos ambos lados de la ecuación por el $m.c.m.(2,3,12)$ y aplicamos la propiedad distributiva.

$$12 \cdot \left(4 + 4(x+1) + \frac{2x-6}{2}\right) = 12 \cdot \left(\frac{4x}{3} - \frac{10x-6}{12} + 6x\right)$$

$$48 + 48(x+1) + 6 \cdot (2x-6) = 16x - (10x-6) + 72x$$

$$48 + 48x + 48 + 12x - 36 = 16x - 10x + 6 + 72x$$

Sumamos y restamos términos semejantes

$$60 + 60x = 6 + 78x$$

A ambos lados de la ecuación anterior restar: $78x + 60$

$$60 + 60x - (78x + 60) = 6 + 78x - (78x + 60)$$

Sumamos y restamos términos semejantes:

$$-18x = -54$$

Multiplicamos ambos lados de la ecuación anterior por $-\frac{1}{18}$

$$-\frac{1}{18} \cdot (-18x) = -\frac{1}{18} \cdot (-54)$$

Simplificamos

$$x = 3$$

Ahora, para comprobar que $x = 3$ efectivamente es solución de la ecuación 1 remplazamos $x = 3$ en la ecuación 1, entonces:

$$4 - \left[-4((3)+1) - \frac{2(3)-6}{2}\right] = \frac{4\cdot(3)}{3} - \frac{10\cdot(3)-6}{12} + 6\cdot(3)$$

$$4 - \left[-4(4) - \frac{6-6}{2}\right] = \frac{12}{3} - \frac{30-6}{12} + 18$$

$$4 - [-16 - 0] = 4 - 2 + 18$$

$$20 = 20$$

Por lo tanto la solución de la ecuación 1 es $x = 3$. □

b) $\dfrac{x}{x+\pi} = 1 + \dfrac{2}{x+2}$

Respuesta.

$$\frac{x}{x+1} = 1 + \frac{2}{x+2} \tag{2}$$

Multiplicamos ambos lados de la igualdad por $(x+1)(x+2)$.

$$(x+1)(x+2)\cdot\left[\frac{x}{x+1}\right] = (x+1)(x+2)\cdot\left[1 + \frac{2}{x+2}\right]$$

Simplificamos y aplicamos la propiedad distributiva

$$(x+2)\cdot x = (x+1)(x+2) + 2\cdot(x+2)$$

$$x^2 + 2x = x^2 + x + 2x + 2x + 4$$

Sumamos y restamos términos semejantes

$$x^2 + 2x = x^2 + 5x + 4$$

Restar $x^2 + 5x$ a ambos lados de la ecuación anterior

$$x^2 + 2x - (x^2 + 5x) = x^2 + 5x + 4 - (x^2 + 5x)$$

Sumamos y restamos términos semejantes

$$x^2 + 2x - x^2 - 5x = x^2 + 5x + 4 - x^2 - 5x$$

$$-3x = 4$$

Multiplicamos ambos lados de la ecuación anterior por $-\frac{1}{3}$

$$-\frac{1}{3} \cdot (-3x) = -\frac{1}{3} \cdot (4)$$

Simplificamos

$$x = -\frac{4}{3}$$

Ahora, para comprobar que $x = -\frac{4}{3}$ efectivamente es solución de la ecuación 2 remplazamos $x = -\frac{4}{3}$ en la ecuación 2, entonces:

$$\frac{-\dfrac{4}{3}}{-\frac{4}{3}+1} = 1 + \frac{2}{-\frac{4}{3}+2}$$

$$\frac{-\frac{4}{3}}{\frac{-4+3}{3}} = 1 + \frac{2}{\frac{-4+6}{3}}$$

$$\frac{-\frac{4}{3}}{\frac{-1}{3}} = 1 + \frac{2}{\frac{2}{3}}$$

$$4 = 1 + 3$$

$$4 = 4$$

Por lo tanto, $x = -\dfrac{4}{3}$ es la solución de la ecuación 2. $\square$

Resultado

Aplicar los axiomas y teoremas de los números reales para resolver inecuaciones.

Ilustración

1. *Encontrar la solución de las siguientes inecuaciones.*

a) $\frac{x}{x+\pi}+1\leq 0$

Respuesta.

$$\frac{x}{x+\pi}+1\leq 0 \tag{1}$$

Notemos que:

$$\begin{aligned} \frac{x}{x+\pi}+1&\leq 0\\ \frac{x+x+\pi}{x+\pi}&\leq 0\\ \frac{2x+\pi}{x+\pi}&\leq 0 \end{aligned}$$

Si el denominador de la fracción anterior es cero, entonces se cumple que la fracción es cero, esto es si $2x+\pi=0$, es decir, $x=-\frac{\pi}{2}$.

Ahora, para que la fracción sea menor que cero, se debe cumplir que el numerador y el denominador tengan signo contrario.

- Supongamos que el numerador es positivo y el denominador negativo, es decir:

  $$2x+\pi>0 \quad \text{y} \quad x+\pi<0$$

  esto es;

  $$x>-\frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad x<-\pi$$

  lo que quiere decir que x pertenece a la intersección de los intervalos: $(-\frac{\pi}{2},\infty)$ y $(-\infty,-\pi)$, la cual es vacía.

- Supongamos ahora que el numerador es negativo y el denominador positivo, es decir:

  $$2x+\pi<0 \quad \text{y} \quad x+\pi>0$$

  esto es;

  $$x<-\frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad x>-\pi$$

  lo que quiere decir que x pertenece a la intersección de los intervalos: $(-\infty,-\frac{\pi}{2}$ y $(-\pi,\infty,)$, la cual es $(-\pi,-\frac{\pi}{2})$.

Del análisis anterior concluimos que para que se cumpla $\frac{2x+\pi}{x+\pi}\leq 0$, se debe cumplir que x pertenece a la unión de los conjuntos que obtuvimos y el punto $x=-\frac{\pi}{2}$, es decir;

$$\varnothing\cup(-\pi,-\frac{\pi}{2})\cup\left\{-\frac{\pi}{2}\right\}$$

Por lo tanto, el conjunto solución de 1 es $(-\pi,\frac{\pi}{2}]$

$\square$

b) $3(x-5)^2 - 27 > 0$

Respuesta.

$$3(x-5)^2 - 27 > 0 \tag{2}$$

Si dividimos 2 para 3:

$$(x-5)^2 - 9 > 0$$

Ahora, obtenemos los valores críticos de la inecuación anterior, igualamos a cero y factorizamos.

$$(x-5)^2 - 9 = 0$$

$$(x-5)\cdot(x-5) - 9 = 0$$

$$x^2 - 5x - 5x + 25 - 9 = 0$$

$$x^2 - 10x + 25 - 9 = 0$$

$$x^2 - 10x + 16 = 0$$

$$(x-8)(x-2) = 0$$

Igualamos estos factores a cero, y obtenemos las raíces $x = 8$, $x = 2$.

Ahora, como obtuvimos 2 raíces, la recta real se divide en los tres intervalos siguientes: $(-\infty, 2)$, $(2, 8)$ y $(8, \infty)$.

Para determinar los intervalos donde 2 se cumple, escogemos tres valores sencillos de evaluar y que pertenezcan a cada uno de los tres intervalos dados anteriormente.

Si escogemos los valores: $0, 3, 10$ y los evaluamos tenemos:

$$\begin{array}{ccc} x = 0 & \Rightarrow & 3(0-5)^2 - 27 = 48 > 0 \\ x = 3 & \Rightarrow & 3(3-5)^2 - 27 = -15 < 0 \\ x = 10 & \Rightarrow & 3(10-5)^2 - 27 = 48 > 0 \end{array}$$

Por lo tanto, la solución de la inecuación es la unión de los intervalos: $(-\infty, 2) \cup (8, \infty)$, pues es donde los valores evaluados son positivos. $\square$

3.4. Conclusiones y recomendaciones

3.4.1. Conclusiones

Durante el desarrollo de este documento hemos podido concluir algunos puntos importantes:

- En algunos temas, las materias de *Fundamentos de Matemática y Geometría* del cursos de nivelación del *Departamento de Formación Básica* están sobrecargadas de contenido innecesario, en otros casos los contenidos que se tratan se los revisa a breves rasgos cuando deberían tratarse y ser analizados con más profundidad.

  Por ejemplo el contenido correspondiente a *Exponentes y Logaritmos* es un tema que se trata exhaustivamente en el curso de nivelación y cuando el estudiante llega al curso de *Cálculo en una Variable* vuelve a ver este tipo de funciones e inclusive definiéndolas con el uso de límites. Este ejemplo nos permite observar que la planificación de los contenidos en los cursos de nivelación no tienen un estudio previo a las necesidades del estudiante.

- También se puede notar que hay temas que a pesar de ser y constar en el contenido de estas materias, no son tratados con la profundidad que correspondería para que los estudiantes tengan un mejor rendimiento en las materias de carrera.

- Se puede apreciar debido a la detección de prerrequisitos que la carga horaria destinada al contenido de Fundamentos de Matemática y Geometría en su mayoría, no tiene un plan adecuado a las necesidades de los alumnos de los primeros semestres de las carreras de la EPN.

- El contenido académico actual de *Fundamentos de Matemática y Geometría* al parecer está planificado de manera antigua y sin un análisis previo de la utilidad del contenido e importancia que tendrá el alumno al cursar por los primeros semestres de carrera.

- Los resultados de aprendizaje planteados, en su mayoría son preguntas o ejercicios que se resuelven fácilmente pero conociendo bien las definiciones, que es lo que se quiere o se necesita que los estudiantes conozcan.

- Los resultados de aprendizaje planteados, no buscan que los estudiantes pasen horas en tratar de resolver las preguntas o ejercicios, lo que se quiere plasmar, es que los estudiantes lleven los conocimientos bien fundamentados, con el fin de que en el caso de encontrarse con un problema de mayor “dificultad” tengan el conocimiento suficiente para resolverlo sin problema.

3.4.2. Recomendaciones

- Se recomienda como trabajo futuro se haga un estudio similar con añadiendo otras materias de formación básica como *Física o Probabilidad y Estadística* que son materias con alto contenido matemático. Ya que que para este trabajo solo nos basamos en el contenido de las materias: *Cálculo en una Variable y Álgebra Lineal.*

- Los prerrequisitos planteados, pueden servir de guía para plantear un *PROGRAMA DE ESTUDIOS POR ASIGNATURA (PEA)* acorde a las necesidades de los estudiantes. Ya que en este documento se plantean los prerrequisitos que las materias de formación básica de las carreras de la EPN requieren y podrían servir de guía para bajar la carga horaria destinada a temas que no son muy relevantes y dedicarle más tiempo a temas con más utilidad para los estudiantes.

- Los resultados de aprendizaje planteados en este trabajo tienen problemas, ejercicios y preguntas que pueden servir de guía para diseñar otros problemas, o ejercicios que se podrían tomar en pruebas a los estudiantes.

- Se recomienda a quien competa hacer un *PEA* tomando en cuenta los prerrequisitos planteados en este documento.

Referencias bibliográficas

[1] C. Castillo. *Fundamentos de Matemática*. Escuela Politécnica Nacional, 2011.

[2] Cátedra de Fundamentos de Matemática EPN. *Fundamentos de Matemática 2021-A*. Escuela Politécnica Nacional Del Ecuador, 2019.

[3] Declan Kennedy and Hyland. *Writing and Using Learning Outcomes: A Practical Guide*. University College Cork, 2007.

[4] Escuela Politécnica Nacional. *Plan de Estudios de Pregrado*. Online.Disponible:https://www.epn.edu.ec/plan-de-estudios-de-pregrado/.

[5] Axler S. *Linear Algebra Done Right*. Springer, 2015.