ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS

MATEMÁTICAS PARA EL CURSO DE NIVELACIÓN DE LA EPN

LOS NÚMERO NATURALES, INDUCCIÓN MATEMÁTICA, EL CONCEPTO GENERAL DE FUNCIONES Y FUNCIONES REALES

TRABAJO DE INTEGRACIÓN CURRICULAR PRESENTADO COMO REQUISITO PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE INGENIERO MATEMÁTICO

CHRISTIAN ALEJANDRO BONILLA PILATAXI

christian.bonilla02@epn.edu.ec

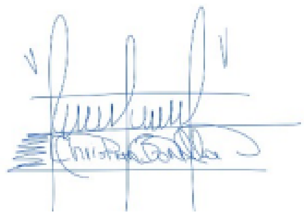
DIRECTOR: JUAN CARLOS TRUJILLO ORTEGA

juancarlos.trujillo@epn.edu.ec

DMQ, SEPTIEMBRE DE 2022

CERTIFICACIONES

Yo, CHRISTIAN ALEJANDRO BONILLA PILATAXI, declaro que el trabajo de integración curricular aquí descrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y, que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.



Christian Alejandro Bonilla Pilataxi

Certifico que el presente trabajo de integración curricular fue desarrollado por Christian Alejandro Bonilla Pilataxi, bajo mi supervisión.

Juan Carlos Trujillo Ortega

DIRECTOR

DECLARACIÓN DE AUTORÍA

A través de la presente declaración, afirmamos que el trabajo de integración curricular aquí descrito, así como el(los) producto(s) resultante(s) del mismo, es(son) público(s) y estará(n) a disposición de la comunidad a través del repositorio institucional de la Escuela Politécnica Nacional; sin embargo, la titularidad de los derechos patrimoniales nos corresponde a los autores que hemos contribuido en el desarrollo del presente trabajo; observando para el efecto las disposiciones establecidas por el órgano competente en propiedad intelectual, la normativa interna y demás normas.

Christian Alejandro Bonilla Pilataxi

Juan Carlos Trujillo Ortega

RESUMEN

Este componente propone, principalmente, los contenidos de *Números naturales*, *Inducción matemática*, *el concepto general de Función* y *Funciones reales*) que deberían incluirse en un curso de Nivelación para las carreras de Ingeniería y Ciencias de la EPN, a través de los resultados de aprendizaje que los estudiantes deberían alcanzar.

A su vez, para dar mayor precisión a la formulación de los resultados de aprendizaje, se proponen, para cada uno de los resultados, tres ejemplos de preguntas, ejercicios o problemas que podrían utilizarse para evaluar si un estudiante los ha alcanzado o no.

Finalmente, con el fin de evidenciar que los contenidos propuestos no son insuficientes para abordar el estudio del Álgebra Lineal y el Cálculo en una variable en el primer semestre, se presenta una descripción de los contenidos de los capítulos "Cálculo Integral en una variable" y "Espacios vectoriales con producto escalar" (descritos en los PEAs de dichas materias), y los conceptos de Fundamentos de Matemática y Geometría que son prerrequisitos de los referidos capítulos.

Palabras clave: resultados de aprendizaje, Fundamentos de Matemática, Geometría, Números naturales, Inducción matemática, Función, Función real, Cálculo Integral y Espacios vectoriales con producto escalar.

ABSTRACT

This component mainly proposes the contents of *Natural Numbers*, *Mathematical Induction*, *the general concept of Function* and *Real Functions* that should be included in a Leveling course for the Engineering and Science careers of the EPN, through the learning outcomes that students should achieve.

In turn, to give greater precision to the formulation of the learning outcomes, three examples of questions, exercises or problems are proposed for each of the outcomes that could be used to assess whether a student has achieved them or not.

Finally, in order to show that the proposed contents are not insufficient to approach the study of Linear Algebra and Calculus in one variable in the first semester, a description of the contents of the chapters "Integral Calculus in one variable" and "Vector Spaces with scalar product" (described in the PEAs of these subjects), and the concepts of Fundamentals of Mathematics and Geometry that are prerequisites of the referred chapters are presented.

Keywords: Learning outcomes, Fundamentals of Mathematics, Geometry, The Natural Numbers, Mathematical Induction, Function, Real Function, Integral Calculus and Vector spaces with scalar product.

Índice general

Capítulo 1

Descripción del componente desarrollado

De la misma manera como los diferentes campos científicos evolucionan, su enseñanza (sobre todo en los primeros niveles de la Universidad) debe evolucionar. En particular, la enseñanza de la Matemática. No obstante, en el Ecuador y, en particular, en la Escuela Politécnica Nacional, tanto la forma de enseñanza como los contenidos de Matemática presentes en los planes de estudio de las materias de Nivelación y Formación Básica no se han adaptado a los cambios sustanciales ocurridos durante los últimos 50 años.

La Facultad de Ciencias y, en particular, el Departamento de Matemática, ha participado en diversos esfuerzos de la EPN por diseñar planes de estudio adecuados para Nivelación. Como consecuencia del trabajo desplegado, se han formulado contenidos para las dos asignaturas de Matemática de Nivelación de la EPN: *Fundamentos de Matemática* y *Geometría*.

Para que la propuesta pueda transmitir, no solamente los contenidos, sino el alcance de estos, también se han formulado con mucho detalle los resultados de aprendizaje y ejemplos que los ilustren, y sean una pauta para el diseño de la evaluación del alcance o no de los resultados de aprendizaje por parte de los estudiantes.

Además, con el fin de mostrar que los contenidos propuestos no son insuficientes para el abordaje de los cursos de matemática del primer semestre de Formación Básica, se describen los contenidos de las materias de *Álgebra Lineal* y *Cálculo en una variable* y se identifican los conceptos de Fundamentos de la Matemática y de Geometría requeridos en las materias referidas.

En particular, en este trabajo, se desarrollan los contenidos y resultados de aprendizaje de *Inducción Matemática*, *el concepto general de Función* y *Funciones reales*. Los contenidos de primer semestre descritos son *Cálculo Integral* y *Espacios vectoriales con producto escalar*.

1.1. Objetivo general

El objetivo general de este proyecto consiste en plantear los contenidos de las dos materias de Nivelación, *Fundamentos de Matemática* y *Geometría*, mediante la formulación de resultados de aprendizaje de estos contenidos y ejemplos de preguntas, ejercicios y problemas que ilustren dichos resultados de aprendizaje.

1.2. Objetivos específicos

Los siguientes:

1. Describir los contenidos de los capítulos "Cálculo Integral" y "Espacios vectoriales con producto escalar" de los cursos de Cálculo en una variable y Álgebra Lineal del primer semestre de Formación Básica de la EPN, respectivamente.

2. Identificar los conceptos de las materias "Fundamentos de Matemática" y "Geometría" de Nivelación en los capítulos descritos en el punto anterior.

3. Para los temas de *Inducción Matemática*, *concepto general de Función* y *Funciones reales*, la elaboración de:

    a) Los resultados de aprendizaje.

    b) Ilustración, mediante problemas o ejercicios resueltos, de cada uno de los resultados de aprendizaje.

1.3. Alcance

Los contenidos de las materias considerados en este proyecto se ajustan a los Programas de Estudio de la Asignatura (PEA) de “Fundamentos de Matemática” y de “Geometría” aprobados por el Consejo de Docencia de la EPN en el año 2020.

Este trabajo no consiste en el desarrollo de los contenidos, sino en la formulación de los resultados de aprendizaje, a partir de material elaborado por las Comisiones de Implementación de los PEAs, que fueron nombradas por el Consejo de Docencia de la EPN.

1.4. Marco teórico

Las universidades recorren hacia cambios en su estructura funcional, tanto académica como administrativa. El proceso de reforma curricular inicia en los contextos internacionales para posteriormente concentrarse en los latinoamericanos, erigiéndose como desafíos a nivel nacional. La gran parte de ellos se vinculan al enfoque por competencias centrado en el estudiante, los que son contextualizados desde una perspectiva de los modelos educativos de cada institución de educación Superior [6].

El enfoque por competencias hace un amplio uso de los resultados de aprendizaje (RA), puesto que este enfoque aporta a la educación contemporánea una mayor transparencia de los perfiles profesionales en los programas de estudio y énfasis en los resultados de aprendizaje, y un cambio a un enfoque educativo más orientado a quien aprende [5]. Dentro de este enfoque, un módulo o unidad de estudio se define como un conjunto de actividades planificadas que permite lograr los resultados de aprendizaje. Además, un seguimiento de los programas de estudios como de los resultados de aprendizaje son aspectos esenciales para asegurar el óptimo funcionamiento del los sistemas de aseguramiento de la calidad [1], puesto que no solo permiten vigilar los logros que el estudiante va consiguiendo a través de su proceso de aprendizaje, sino identificar, en cuanto a los contenidos por materia, los ajustes requeridos para garantizar una mejora y contribuir a la disminución de causales de bajo rendimiento y deserción académico en los estudiantes.

Los resultados de aprendizaje ayudan enormemente en la creación y el diseño más estructural de módulos y programas. Facilita la transición de cambio de enfoque centrado en el profesor a un enfoque centrado en el estudiante y basado en resultados y logros. Su redacción adecuada apoya al profesor y al estudiante en el proceso de aprendizaje y enseñanza. Al mismo tiempo, simplifica el proceso de evaluación, debido a que cuanto más comprensibles estén, más claro será para el estudiante conocer cuáles son los conocimientos que deberá adquirir y sobre qué fundamentos será evaluado.

Finalmente, es importante distinguir entre *intención*, *objetivos* y *resultados de aprendizaje*. La *intención* se refiere a un enunciado general y amplio, mientras que un *objetivo* generalmente se refiere a un enunciado específico de lo que se va a enseñar; en cambio, los resultados de aprendizaje tienen la ventaja de ser enunciados claros sobre lo que se espera que un estudiante aprenda y cómo evaluar este logro.

Las características de los resultados de aprendizaje son:

- **Claridad**: No deben poseer palabras que generen ambigüedad.
- **Pertinencia**: Deben vincularse con los conceptos de estudio.
- **Factibilidad**: Deben detallar lo que el estudiante será capaz de alcanzar con los recursos y tiempos disponibles.
- **Evaluabilidad**: Deben ser medibles; esta característica se obtiene con el uso de verbos operativos.

La redacción de Resultados de Aprendizaje está conformado de oraciones cortas que inician con un verbo que expresar el aprendizaje en acción, continuando con el proceso que se debe desarrollar y finaliza con un complemento indirecto que señala el contexto y/o finalidad de la acción [7]. Algunas herramientas y pautas para una correcta redacción de los resultados de aprendizaje fue dada por Bloom, quién investigó los niveles de pensamiento durante el proceso de aprendizaje. Además, propuso que el aprender era un proceso y que los profesores deberían diseñar unidades de instrucción y tareas para ayudar a los estudiantes a cumplir con objetivos previamente establecidos. Como consecuencia de sus estudios, formuló una jerarquía de seis niveles de áreas que componen el saber: *conocimiento*, *comprensión*, *aplicación*, *análisis*, *síntesis* y *evaluación*.

El presente trabajo se centrará únicamente en los tres primeros niveles, debido al tiempo de duración y los objetivos del curso de Nivelación:

1. **Conocimiento**: La capacidad para retener y recordar hechos sin interpretarlos necesariamente.

2. **Compresión**: La habilidad para comentar e interpretar información memorizada.

3. **Aplicación**: La capacidad para utilizar hechos e información ya aprendidos en situaciones nuevas.

Esta categorización de los niveles de comportamiento del pensamiento provee una estructura y una lista de verbos que guían la redacción de resultados de aprendizaje. Se presentan varios verbos de acción frecuentemente utilizados para evaluar el conocimiento, Compresión, Aplicación, Análisis y Evaluación.

Los verbos sugeridos para estos niveles son [2]:

1. **Conocimiento**: definir, describir, listar, nombrar, presentar, citar, relacionar, mostar.

2. **Compresión**: describir, reformular, solucionar, reescribir, expresar, seleccionar, localizar, interpretar.

3. **Aplicación**: Aplicar, calcular, desarrollar, completar, emplear, utilizar, organizar, solucionar, demostrar.

Capítulo 2

Metodología

El curso de Nivelación de la Escuela Politécnica Nacional debe proveer los conceptos básicos y la metodología mínima para que los estudiantes puedan abordar, en el área de matemática, los cursos de *Cálculo en una Variable y Álgebra Lineal*. Por ello, hemos elegido estas materias para determinar qué conceptos de las materias “Fundamentos de Matemática” y “Geometría” son requeridos en la Nivelación.

Así, con el fin de seleccionar los contenidos de Nivelación, la metodología a seguir es la siguiente:

1. Describir los aspectos más relevantes de los contenidos “Cálculo Integral” del curso “Cálculo en una variable” y “Espacios vectoriales con producto escalar” del curso “Álgebra Lineal”.

2. Identificar los conceptos de las materias “Fundamentos de Matemática” y “Geometría” son requeridos en los capítulos referidos en el numeral anterior.

3. Formular los resultados de aprendizaje de los contenidos propuestos para *Inducción Matemática, el concepto general de Función* y *Funciones reales*.

4. Ilustrar los resultados propuestos mediante preguntas, ejercicios y problemas.

Capítulo 3

Resultado, conclusiones y recomendaciones

3.1. Resultados

Debido a la extensión, en los Anexos presentamos la descripción de los *Cálculo Integral* y de *Espacios vectoriales con producto escalar* y los prerrequisitos de Fundamentos de Matemática y de Geometría identificados en estos temas. Como se dijo, esto servirá de base para formular los resultados de aprendizaje y plantear ejercicios, problemas y preguntas que permitan medir el conocimiento de los estudiantes en cada de los temas.

Por la extensión del los ejemplos presentados, algunos de estos serán remitidos al capítulo de Anexos.

3.2. Resultados de Aprendizaje

Los resultados de aprendizaje que se proponen en este trabajo se enmarcan en los tres niveles inferiores, como se dijo en el Marco Teórico. De manera particular, los resultados propuestos en este trabajo se organizan de la siguiente manera:

1. Determinar lo que un estudiante **conoce** (“enuncie”, “escriba” o “identifique”): definiciones de conceptos, axiomas, teoremas, etcétera.

2. Determinar si un estudiante usa correctamente un concepto, aplica

un axioma o un teorema, en la solución de un determinado problema, o en la deducción de una determinada propiedad.

3. Averiguar si un estudiante aplica un concepto, un axioma o un teorema en la solución de un problema o en la deducción de una propiedad.

4. Averiguar si un estudiante reconoce la corrección o no de la deducción de un teorema, o la solución de un problema.

Después de cada resultado de aprendizaje, se presentan las ilustraciones correspondientes.

3.2.1. Los números naturales

Resultado

Determinar si un conjunto es un conjunto sucesor mediante la definición.

Ilustración

1. ¿El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ es un conjunto sucesor?

   Respuesta. Sí, es un conjunto sucesor porque, en primer lugar, $0 \in \mathbb{R}$ y, si x es un número real, $x + 1$ también es un número real. □

2. ¿El conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$ es un conjunto sucesor?

   Respuesta. No, no es un conjunto sucesor porque, $0 \notin A$. □

3. ¿El conjunto de los números reales $\mathbb{Z}$ es un conjunto sucesor?

   Respuesta. Sí, es un conjunto sucesor porque, en primer lugar, $0 \in \mathbb{Z}$ y, si $x \in \mathbb{Z}$, x es un número entero; por tanto, $x + 1$ es también un entero; luego, $x + 1 \in \mathbb{Z}$. □

4. ¿El conjunto de los números reales $\{0, 1\}$ es un conjunto sucesor?

Respuesta. No, no es un conjunto sucesor porque, si bien $1 \in \{0, 1\}$, $1+1 \notin \{0, 1\}$. $\square$

5. ¿El conjunto de los números reales $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$ es un conjunto sucesor?

   Respuesta. Si, es un conjunto sucesor porque, en primer lugar, $0 \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$ y, si $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$, $x + 1$ también pertenece a $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$. $\square$

6. ¿El conjunto de los números reales $A = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$ es un conjunto sucesor?

   Respuesta. Si, es un conjunto sucesor porque, en primer lugar, $0 \in A$ y, si $x \in A$, $x + 1$ también pertenece a A; Es decir, $x + 1 \in A$. $\square$

Resultado

Recordar la definición del conjunto de los números naturales.

Ilustración

1. Dar una definición del conjunto de número natural.

   Respuesta. El conjunto de los números naturales es el conjunto sucesor de todos los números reales cuyos elementos pertenecen a todos los conjuntos sucesores que existen, es decir,a la intersección de todos los conjuntos sucesores. $\square$

2. ¿Cuál enunciado corresponde a la definición de conjunto de número natural?.

   a) El conjunto de los números naturales es el conjunto de todos los números reales cuyos elementos pertenecen a todos los conjuntos sucesores que existen.

   b) El conjunto de los números naturales es el conjunto de todos los números reales cuyos elementos pertenecen a la unión de todos los conjuntos sucesores que existen.

c) El conjunto de los números naturales es el conjunto de todos los números reales cuyos elementos pertenecen a la intersección de todos los conjuntos sucesores existentes.

Respuesta.

a) Corresponde a la definición de número natural.

b) No corresponde a la definición de número natural porque, si los elementos del conjunto de números naturales ($\mathbb{N}$) pertenecen a la unión de todos los conjuntos sucesores, los números $-3, -1/2, 3/4, 5$ serían números naturales, puesto que estos números pertenecerían al conjunto $\mathbb{R}$, que es un conjunto sucesor. Así, el conjunto $\mathbb{N}$ dejaría de cumplir con las propiedades conocidas que tienen los números naturales: $\mathbb{N} \not\subseteq \mathbb{Z}$ y $\mathbb{N}$ sería denso.

c) Corresponde a la definición de número natural porque si los elementos del conjunto $\mathbb{N}$ pertenecen a la intersección de todos los conjuntos sucesores, sus elementos pertenecen a todos los conjuntos sucesores. □

3. ¿Por qué el número real 3 es un número natural?

Respuesta. Por definición, 0 pertenece a todo conjunto sucesor. Así, el 0 pertenece a la intersección de todos los conjuntos sucesores, en particular, $0 \in \mathbb{N}$. Luego, al ser $\mathbb{N}$ un conjunto sucesor $0+1 \in \mathbb{N}$, $0+1+1 \in \mathbb{N}$ y $0+1+1+1 \in \mathbb{N}$; Es decir, $3 \in \mathbb{N}$, por lo tanto, 3 es un número natural. □

Resultado

Identificar las propiedades de los números naturales.

Ilustración

1. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones sobre los números naturales son verdaderas, cuáles son falsas? Justifique su respuesta.

   a) Para todo $x \in \mathbb{N}$, $x > 0$

   b) $-3 \in \mathbb{N}$

   c) El número $\dfrac{3}{2}$ es un natural *d*) La diferencia de dos números naturales x y y tales que $x > y$ siempre es mayor o igual que uno.

Respuesta.

a) Es **falsa** porque $0 \in \mathbb{N}$, pero $0 \not> 0$. Luego, no todo número natural es mayor que 0.

b) Es **falsa** porque la proposición "para todo $x \in \mathbb{N}$, $x \geq 0$" es verdadera. Sin embargo, $-3 < 0$; luego, $-3 \notin \mathbb{N}$.

c) Es falsa porque para la proposición "todo número natural x, no existe un número natural y tal que

$$x < y \quad \text{y} \quad y < x + 1''$$

es verdadera. Luego, esta proposición no sería verdadera si $\frac{3}{2}$ fuera un natural, ya que existiría un natural entre dos naturales consecutivos: 1 y 2, ya que

$$1 < \frac{3}{2} \quad \text{y} \quad \frac{3}{2} < 2.$$

d) Es verdadera porque si x y y pertenecen a $\mathbb{N}$ tales que $y < x$, entonces, se tiene que $y + 1 \leq x$. Luego, $x - y \geq 1$. $\square$

2. Dados $m, n \in \mathbb{N}$ tales que $m > n$, demostrar que $m - n \in \mathbb{N}$.

Respuesta. Mediante inducción sobre n, se va a demostrar que para cada $n \in \mathbb{N}$, la proposición $\mathscr{A}(n) : m \in \mathbb{N}, m > n \Rightarrow m - n \in \mathbb{N}$ es verdadera.

- Base de Inducción. Para $n = 1$ la proposición $\mathscr{A}(1)$, se reduce a:

$$m \in \mathbb{N}, m > 1 \Rightarrow m - 1 \in \mathbb{N}$$

lo que a su vez se se demuestra por inducción sobre m, así, la base de inducción para $m = 2$ con $2 > 1 (m > 1)$ se reduce a $2 - 1 \in \mathbb{N}$ que es cierta. Luego, para el paso inductivo supongamos que dicha proposición se verifica para un número $l \in \mathbb{N}$. Es decir, suponemos verdadera la proposición

$$l > 1 \Rightarrow l - 1 \in \mathbb{N}$$

Deberemos probar que de la proposición anterior se deduce la siguiente proposición.

$$l + 1 > 1 \Rightarrow (l + 1) - 1 \in \mathbb{N}$$

la cual evidentemente es verdadera. Finalmente, se ha demostrado la veracidad de la proposición $\mathscr{A}(1)$

- Paso inductivo. Supongamos que la proposición es verdadera para un número $k \in \mathbb{N}$, es decir, $\mathscr{A}(k)$ verdadera, y se probará que en tal caso también se verifica para $k+1$. Deberemos probar que de la veracidad anterior se deduce la siguiente proposición.

$$\mathscr{A}(k+1) : m \in \mathbb{N}, m > k+1 \Rightarrow m-(k+1) \in \mathbb{N}$$

Del paso inductivo, $m > k$, y en particular tomemos a m de tal forma que $m > k+1$. Además, $m-k \in \mathbb{N}$ es verdadero, es decir; $m-k$ es un natural. Luego, $(m-k)-1 = m-(k+1)$ es un natural (base inductiva). De lo anterior se ha demostrado que

$$\mathscr{A}(k+1) : m \in \mathbb{N}, m > k+1 \Rightarrow m-(k+1) \in \mathbb{N}$$

es verdadero. □

Resultado

Comprender la definición del conjunto de los números enteros.

Ilustración

1. ¿Por qué el número -4 es un entero y el número $-4/3$ no lo es.

   Respuesta. Los números enteros son los naturales y los inversos aditivos de los naturales; luego, -4 es un entero, ya que es el inverso aditivo de 4 y $4 \in \mathbb{N}$.

   El número $-4/3$ no es un entero porque su inverso aditivo no es número natural, pues

   $$1 < \frac{4}{3} \quad \text{y} \quad \frac{4}{3} < 2.$$ □

2. ¿Cuál enunciado corresponde a la definición de conjunto de **número entero**?

   a) Es la unión del conjunto de los números naturales y el conjunto de los inversos aditivos de los números naturales.

b) Es la intersección del conjunto de los números naturales y el conjunto de los inversos aditivos de los números naturales.

c)
$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{x : -x \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$$

Respuesta.

a) El enunciado coincide con la definición de número entero.

b) No corresponde con la definición de número entero. En efecto, la intersección entre el conjunto $\mathbb{N}$ y el conjunto $\{-x : x \in \mathbb{N}\}$ es el conjunto $\{0\}$ (que es diferente de $\mathbb{Z}$), dado que el único número real cuyo inverso aditivo es igual a sí mismo es el número 0.

c) Corresponde a la definición de número entero porque

$$\{x : -x \in \mathbb{N}\} = \{-x' : x' \in \mathbb{N}\} \quad \text{y} \quad \mathbb{N} \cup \{0\} = \mathbb{N},$$

por lo tanto, $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{-x : x \in \mathbb{N}\}$. □

3. Es verdadera la igualdad

$$\mathbb{Z} = \{m - n : m \in \mathbb{N} \wedge n \in \mathbb{N}\}?$$

Respuesta. En efecto, se tiene que

$$\{m - n : m \in \mathbb{N} \wedge n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N} \cup \{x : -x \in \mathbb{N}\},$$

puesto que dado un elemento, x, de $\{m - n : m \in \mathbb{N} \wedge n \in \mathbb{N}\}$ se puede representar como $x = m - n$, donde $m \in \mathbb{N}$ y $n \in \mathbb{N}$. Si $m > n$, la diferencia es un natural. Por otro lado, si $m < n$, la diferencia $m - n$ es el inverso aditivo del número natural $-(m-n) = n-m$. Además, para todo $m \in \mathbb{N} \cup \{x : -x \in \mathbb{N}\}$ tenemos que $m = (m + 1) - 1$, y que $-m = 1 - (m + 1)$,es decir; se pueden representar como la diferencia de dos naturales. □

Resultado

Identificar las propiedades de los números enteros.

Ilustración

1. ¿Cuál de las siguientes proposiciones sobre los números enteros son verdaderas, cuáles son falsas? Justifique su respuesta aplicando propiedades de los números naturales.

   a) El número 2 es un número entero.

   b) El número -5 es un número entero.

   c) Para $a, b \in \mathbb{N}$, la diferencia $a - b$ es siempre un número entero:

   Respuesta.

   a) Es verdadera porque 2 es un número natural y, todo número natural es un número entero; en particular, 2 es un entero.

   b) Es verdadera porque -5 es el inverso aditivo del número natural 5.

   c) si $b < a$, sabemos que $a - b \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$; si $a = b$ tendremos $a - b = 0 \in \mathbb{Z}$. Finalmente, si $b > a$ y, expresemos $b - a$ como $a - b = -(b - a) \in \mathbb{Z}$, ya que$b - a \in \mathbb{N}$. $\square$

2. En los siguientes enunciados, hay un error. Identifíquelo y corríjalo. Justifique su corrección.

   a) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{N}$

   b) El enunciado

   Ningún inverso aditivo de un número natural, excepto 0, es positivo y ningún número natural es negativo

   es equivalente a la proposición

$$\mathbb{N} \cap \{x : x \in \mathbb{N}\} = \{0\}.$$

   c) Existe un entero mayor o igual que todos los enteros.

   Respuesta.

   a) La corrección es la siguiente: en lugar de

$$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{N},$$

debe ser

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z},$$

porque el conjunto de los enteros es la unión de ... El error consiste en que el conjunto de los enteros **no está contenido** en el conjunto de los números naturales porque existen enteros que no son naturales; por ejemplo, el -1 es un número entero que no es natural.

b) El error es que el inverso aditivo de un número natural, distinto de 0, no es un número natural.

Hay dos posibles correcciones:

$$\mathbb{N} \cap \{-x : x \in \mathbb{N}\} = \{0\}$$

o

$$\mathbb{N} \cap \{x : -x \in \mathbb{N}\} = \{0\}.$$

c) El error consiste en que no existe un número entero M tal que $M \geq x$ para todo número natural x.

La corrección es:

> ***No*** *hay un número entero mayor o igual que todos los números enteros.* □

3.2.2. Inducción y recursión matemática

Resultado

Explicar el uso del teorema de inducción matemática.

Ilustración

1. Describir, con sus palabras, el proceso para probar que una determinada propiedad, $\mathscr{A}(x)$; $x \in \mathbb{N}$, se cumple para todo número natural.

   Respuesta. Para demostrar una proposición, $\mathscr{A}$, sobre los números naturales, se procede aplicando los siguientes pasos:

   - Paso 1 (Base de inducción). Se demuestra que el primer natural n_0 cumple la proposición: $\mathscr{A}(1)$.

- Paso 2 (Paso Inductivo). Partiendo de la suposición de que un número natural cualquiera n cumple con la proposición: $\mathscr{A}(n)$ (hipótesis de Inducción) , se procede a demostrar que el número $n+1$ también cumple con dicha proposición: $\mathscr{A}(n+1)$. Es decir, se debe probar la validez de la implicación $\mathscr{A}(n) \Rightarrow \mathscr{A}(n+1)$. $\square$

2. ¿Cuál es la utilidad del teorema de inducción matemática?.

Respuesta. Mediante el teorema de inducción matemática se demuestran proposiciones sobre los números naturales. $\square$

3. Escribir los pasos a seguir para probar cada una de las siguientes proposiciones sobre los números naturales.

a)
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} a^{n-k} b^k$$

b)
$$3^{2n} - 1 \text{ es múltiplo de } 8$$

c)
$$\sqrt{n} \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 2\sqrt{n}$$

Respuesta.

a) Los pasos a seguir son:

- Paso 1 (Base de inducción). Se verifica que la proposición es verdadera para el natural 1. Es decir, probar que

$$(a+b)^1 = \sum_{k=0}^{1} \begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix} a^{1-k} b^k$$

es verdadera.

- Paso 2 (Paso inductivo). Partiendo de la suposición de que la proposición es verdadera para un número cualquiera m

$$(a+b)^m = \sum_{k=0}^{m} \begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix} a^{m-k} b^k$$

Se procede a demostrar que la proposición

$$(a+b)^{m+1} = \sum_{k=0}^{m+1} \left(\begin{array}{l} m+1 \\ k \end{array} \right) a^{m+1-k} b^k$$

es verdadera.

b) Los pasos a seguir son:

- Paso 1 (Base de inducción). Se verifica que la proposición es verdadera para el natural 1. Es decir, probar que

$$3^{2(1)} - 1 \text{ es múltiplo de } 8$$

  es verdadera.

- Paso 2 (Paso inductivo). Partiendo de la suposición de que la proposición es verdadera para un número cualquiera m

$$3^{2m} - 1 \text{ es múltiplo de } 8$$

  Se procede a demostrar que la proposición

$$3^{2(m+1)} - 1 \text{ es múltiplo de } 8$$

  es verdadera.

c) Los pasos a seguir son:

- Paso 1 (Base de inducción). Se verifica que la proposición es verdadera para el natural 1. Es decir, probar que

$$\sqrt{1} \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{1}} \leq 2\sqrt{1}$$

  es verdadera.

- Paso 2 (Paso inductivo). Partiendo de la suposición de que la proposición es verdadera para un número cualquiera m

$$\sqrt{m} \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{m}} \leq 2\sqrt{m}$$

  Se procede a demostrar que la proposición

$$\sqrt{m+1} \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{m+1}} \leq 2\sqrt{m+1}$$

  es verdadera. $\square$

Resultado

Aplicar el Teorema de Inducción para demostrar una proposición sobre los números naturales.

Ilustración

1. Demostrar la siguiente propiedad para los números enteros.

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

Respuesta esperada. En este caso, la proposición $\mathscr{A}(x)$ es:

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

a) *Base de inducción* Para $n=1$ la proposición, $\mathscr{A}(1)$, se reduce a $\frac{1}{1\times 2}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$ que, evidentemente, es cierta.

b) *Paso inductivo* Supongamos que dicha igualdad se verifica para un número $n\in\mathbb{N}$, es decir $\mathscr{A}(n)$ verdadera, y probemos que en tal caso también se verifica para $n+1$. Deberemos probar que de la igualdad anterior se deduce la siguiente igualdad.

$$\underbrace{\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}}_{\text{hipótesis inductiva}}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n+1}{(n+1)+1}$$

Tenemos que

$$\frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n+1}{[(n+1)+1]}$$

Llegamos a demostrar, en virtud del principio de inducción, que la igualdad del enunciado es cierta para todo $n\in\mathbb{N}$. □

2. Demostrar la siguiente propiedad para los números enteros.

$$x^n-y^n \text{ es divisible por } x-y$$

Solución. En este caso, la proposición $\mathscr{A}(x)$ es:

$$x^n-y^n \text{ es divisible por } x-y$$

a) *Base de inducción* Para $n = 1$ la proposición, $\mathscr{A}(1)$, se reduce a $\frac{x^1-y^1}{x-y} = 1$ que, evidentemente, es cierta.

b) *Paso inductivo* Supongamos que dicha igualdad se verifica para un número $n \in \mathbb{N}$, es decir $\mathscr{A}(n)$ verdadera, y probemos que en tal caso también se verifica para $n+1$. Deberemos probar que de la igualdad anterior se deduce la siguiente igualdad.

$$x^{n+1} - y^{n+1} \text{ es divisible por } x - y$$

Tenemos que

$$\begin{aligned}
&x^{n+1} - y^{n+1} = x^n x - y^n y \\
&x^n x - yx^n + yx^n - y^n y \\
&\Rightarrow \mathscr{A}(n+1) : x^n(x-y) + y\left(x^n - y^n\right) \text{ es divisible para } x - y
\end{aligned}$$

El primer término de la izquierda es divisible para $x - y$, y por la hipótesis de inducción el segundo término también es divisible para $x - y$. Llegamos a demostrar, en virtud del principio de inducción, que la igualdad del enunciado es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

3. Demostrar la siguiente igualdad en la que $n \in \mathbb{N}$:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

Solución esperada. En este caso, la proposición $\mathscr{A}(x)$ es:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

a) *Base de la inducción:* Para $n = 1$ la proposición, $\mathscr{A}(1)$, se reduce a $1 = 1$ que, evidentemente, es cierta

b) *Paso inductivo:* Supongamos que dicha igualdad se verifica para un número $n \in \mathbb{N}$, es decir $\mathscr{A}(n)$ verdadera, y probemos que en tal caso también se verifica para $n+1$. Deberemos probar que de la igualdad anterior se deduce la siguiente igualdad.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)$$

Tenemos que

$$
\begin{aligned}
1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2+(n+1)^2 &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+(n+1)^2 = \\
&= \frac{1}{6}(n+1)(n(2n+1)+6(n+1)) = \\
&= \frac{1}{6}(n+1)\left(2n^2+7n+6\right) = \\
&= \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3)
\end{aligned}
$$

Así, hemos demostrado, en virtud del principio de inducción, que la igualdad del enunciado es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Resultado

Explicar el teorema de la Recursión finita.

Ilustración

1. En el siguiente enunciado, hay uno o varios errores. Identifíquelo y justifique el origen del error.

   Para proporcionar una definición recursiva de los términos $a_n = 2n+1$, se inicia identificando el concepto, $\mathscr{C}(n)$, a definir, así, $\mathscr{C}(n)$ es el n-ésimo número impar. Luego, sea n un número real y, suponemos definido $\mathscr{C}(n)$. Finalmente, definimos a_{n+1} en términos de n, así,

   $$a_{n+1} = 2(n+1)+1 = 2n+2+2 = 2n+3$$

   Es decir, se define a_{n+1} como $2n+3$.

   Respuesta. Hay varios errores. El primero, es que no se ha definido la base de recusión para el número $n_0 = 0$, es decir, no se ha definido $\mathscr{C}(0)$. El segundo, es que para aplicar el teorema de recursión finita, se lo hace sobre el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ y no sobre el conjunto de los $\mathbb{R}$. Finalmente, en el paso recursivo , la definición de a_{n+1} se lo hace en términos de a_n y no en términos de n. □

2. Escribir el teorema de la Recursión finita

Respuesta. Para definir un concepto $\mathscr{C}(n)$ para todo número Real n, se procede de la siguiente manera:

a. Base de la recursión: se define el concepto para n_0; es decir, se define $\mathscr{C}(n_0)$.

b. Paso recursivo: se supone que n es un número natural cualesquiera y, bajo la suposición de que ya se ha definido el concepto para n, se define el concepto para $n+1$ en términos del concepto para n.

   De manera más precisa, si $n \in \mathbb{N}$, se supone definido $\mathscr{C}(n)$ y se define $\mathscr{C}(n+1)$ en términos de $\mathscr{C}(n)$. □

3. Escribir la utilidad del teorema de Recursión finita.

Respuesta. Ya que en las demostraciónes de proposiciones sobre números naturales siempre involucran conceptos definidos mediante inducción matemática. El teorema de Recursión finita nos ayuda a definir conceptos por inducción. □

Resultado

Aplicar el teorema de recursión finita para definir conceptos sobre números naturales.

Ilustración

1. Defina la potencia de exponente natural de un número real mediante el teorema de recursión finita.

Respuesta. En este caso, el concepto $\mathscr{C}(n)$ es:

$$a^n,$$

donde $a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$.

La definición buscada debe captar la siguiente idea de potencia: a^2 es el producto de a y a; a^3 se obtiene de multiplicar a^2 por a; a^4 se obtiene como el producto de multiplicar a^3 por a, etcétera. La generalización de este procedimiento, se expresa por

$$a^n = a^{n-1} \cdot a.$$

Y esta igualdad debe ser válida incluso cuando $n = 1$:

$$a^1 = a^0 \cdot a.$$

Esto nos sugiere que a^0 debe ser igual a 1. Por ello, para definir a^n, vamos a tomar $n_0 = 0$.

Por lo tanto, la aplicación del teorema de recursión finita para dar una definición recursiva de la potencia de exponente natural de un número real es:

a) Base de la recursión: $\mathscr{C}(n) : a^0 = 1$.

b) Paso recursivo: Si $n \in \mathbb{N}$, suponemos definido $\mathscr{C}(n) : a^n$ y definiendo a^{n+1} como el producto de a^n y a; es decir,

$$a^{n+1} = a^n \cdot a.$$

Finalmente, por el teorema de Recursión finita, se ha definido el número

$$a^n$$

□

2. Defina el sumatorio de una suma finita, mediante el uso del teorema de recursión finita.

Resultado Esperado. En este caso, el concepto $\mathscr{C}(n)$ es:

$$\sum_{k=1}^{n} x_k$$

donde, $x_1, x_2, \cdots x_n \in \mathbb{R}$.

Así, por el paso recursivo el sumatorio de dos números reales se define como:

$$\sum_{k=1}^{2} x_k = (\sum_{k=1}^{1} x_k) + x_2$$

y el sumatorio de un único número real es el mismo número, es decir,

$$\sum_{k=1}^{1} x_k = x_1$$

Entonces, tenemos que

$$\sum_{k=1}^{2} x_k = (\sum_{k=1}^{1} x_k) + x_2 = x_1 + x_2$$

De la misma manera, se obtiene recursivamente el sumatorio de tres números reales.

$$\sum_{k=1}^{3} x_k = (\sum_{k=1}^{2} x_k) + x_3 = (x_1 + x_2) + x_3 = x_1 + x_2 + x_3$$

Como una generalización, para el sumatorio de n números reales se obtiene

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = (\sum_{k=1}^{n-1} x_k) + x_n = (x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}) + x_n$$

y vamos a tomar $n_0 = 1$

Por lo tanto, de la aplicación del teorema de recursión finita, tenemos que

a) Base de la recursión:

$$\mathscr{C}(1) : \sum_{k=1}^{1} x_k = x_1$$

b) Paso recursivo: Si $n \in \mathbb{N}$, suponemos definido $\mathscr{C}(n) : \sum_{k=1}^{n} x_k$, y definiendo $\sum_{k=1}^{n+1} x_k$ como la suma de $\sum_{k=1}^{n} x_k$ y x_{n+1}; es decir,

$$\sum_{k=1}^{n+1} x_k = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k \right) + x_{n+1}$$

Finalmente, por el teorema de Recursión finita, se ha definido el número

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \qquad \square$$

3. Dar una definición recursiva de la cantidad $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$, donde n es un número entero no negativo.

Respuesta. En este caso, el concepto $\mathscr{C}(n)$ es:

$$n!$$

donde $n \in \mathbb{N}$.

La definición buscada debe captar la siguiente idea de factorial: $2!$ es el producto de 2 y 1; $3!$ se obtiene de multiplicar $2!$ por 3; $4!$ se obtiene como el producto de multiplicar $3!$ por 4, etcétera. La generalización de este procedimiento, se expresa por

$$n! = (n-1)! \times n$$

Y esta igualdad debe ser válida incluso cuando $n = 0$:

$$1! = 0! \times 1$$

Esto nos sugiere que $0!$ debe ser igual a 1. Por ello, para definir $n!$, vamos a tomar $n_0 = 0$.

Por lo tanto, de la aplicación del teorema de recursión finita, tenemos que

- Base de la recursión:
$$\mathscr{C}(0) : 0! = 1$$
- Paso recursivo: Si $n \in \mathbb{N}$, suponemos definido $\mathscr{C}(n) : n! = (n-1)! \times n$, y definiendo $(n+1)!$ como el producto de $n!$ y $(n+1)$; Es decir,
$$(n+1)! = 1 \times 2 \times \cdots \times n \times (n+1) = n! \times (n+1).$$

Finalmente, por el teorema de Recursión finita, se ha definido el número

$$n!$$

para todo número natural $n \geq 1$.

$\square$

4. Dar una definición recursiva de la siguiente sucesión infinita:

$$-5, -2, 1, 4, 7, 10 \ldots, 3n-5, \ldots$$

Respuesta. En este caso, el concepto $\mathscr{C}(n)$ es:

$$a_n$$

donde $n \in \mathbb{N}$.

Así, al diferenciar dos elementos consecutivos de la sucesión, obtenemos que

$$(3(n+1)-5)-(3n-5) = \cancel{3}n + 3 - \cancel{5} - \cancel{3}n + \cancel{5} = 3$$

y esta igualdad muestra que la diferencia entre términos consecutivos siempre es 3. De donde, el valor -2,el segundo término de la sucesión, se obtiene al sumar 3 a su término predecesor en la sucesión

$$-2 = -5 + 3$$

de manera similar, el valor de 1,tercero en la sucesión, se obtiene de sumar 3 al su término predecesor en la sucesión

$$1 = -2 + 3$$

La generalización de este proceso, se expresa por

$$a_n = a_{n-1} + 3$$

y el término que da inicio a la sucesión es el valor de -5. Por ello, para definir a_n, vamos a tomar $n_0 = -5$

Por lo tanto, de la aplicación del teorema de recursión finita, tenemos que

- Base de la recursión:
$$\mathscr{C}(0) : a_0 = 5$$
- Paso Recursivo: Si $n \in \mathbb{N}$, suponemos definido $\mathscr{C}(n) : a_n = a_n + 3$ y, definiendo a_{n+1} como la suma de a_n y 3; Es decir,
$$a_{n+1} = a_n + 3, n \geq 0$$

Finalmente, por el teorema de Recursión finita, se ha definido el número

$$a_n$$

para todo número natural $n \geq 0$ $\square$

5. Dar una definición recursiva de la siguiente sucesión infinita, conocida como los *números de Lucas*:

$$2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, \ldots$$

Respuesta. En este caso, el concepto $\mathscr{C}(n)$: es:

$$L_n$$

donde $n \in \mathbb{N}$ y L_n es el n-ésimo término de la sucesión de los números de Lucas.

En efecto, la definición buscada debe captar la siguiente idea de números de Lucas: cada número de Lucas se define como la suma de sus dos inmediatos anteriores, formando así una secuencia de enteros. La generalización de este procedimiento, se expresa por

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$$

y los valores que dan inicio a la sucesión son los dos primeros términos, así, tenemos que

$$L_0 = 2 \text{ y } L_1 = 1.$$

Por ello, para definir L_n, vamos a tomar $n_0 = 2$ y $n_1 = 1$.

Por lo tanto, la aplicación del teorema de recursión finita para dar una definición recursiva de los números de Lucas es:

- Base de la recursión:

$$\mathscr{C}(0) : L_0 = 2 \text{ y } L_1 = 1.$$

- Paso Recursivo: Si $n \in \mathbb{N}$, suponemos definido $\mathscr{C}(n) : L_n = a_n + 3$ y, definiendo L_{n+1} como la suma de L_n y L_{n-1}; Es decir,

$$L_{n+1} = L_n - L_{n-1}, n \geq 2$$

Finalmente, por el teorema de Recursión finita, se ha definido el número

$$L_n$$

para todo número natural $n \geq 2$ $\square$

6. Los números de *Fibonacci* son los números de la secuencia:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 \dots$$

Dar una definición recursiva de la sucesión.

Respuesta. Sea $fib(n)$ el nth número de Fibonacci, en este caso, el concepto $\mathscr{C}(n)$ es:

$$fib(n)$$

La definición buscada debe captar la siguiente idea de número de Fibonacci: cada número, después de los dos primeros, es calculado por la suma de los dos números precedentes, formando así una sucesión de enteros. La generalización de este procedimiento, se expresa por

$$fib(n) = fib(n-1) + fib(n-2)$$

y los valores que dan inicio a la sucesión son los dos primeros números de Fibonacci, así, tenemos que

$$fib(0) = 0 \text{ y } fib(1) = 1$$

Por ello, para definir $fib(n)$, vamos a tomar $n_0 = 0$ y $n_1 = 1$. Por lo tanto, la aplicación del teorema de recursión finita para dar una definición recursiva de los números de Fibonacci es

- Base de Recursión: Definimos los elementos específicos en los casos bases.
$$fib(0) = 0$$
$$fib(1) = 1$$
- Paso Recursivo: Si $n \in \mathbb{N}$, suponemos definido $\mathscr{C}(n) : fib(n)$ y, definiendo $fib(n+1)$ como la suma de $fib(n-1)$ y $fib(n-2)$; Es decir,
$$fib(n) = fib(n-1) + fib(n-2), n \geq 2$$

Finalmente, por el teorema de Recursión finita, se ha definido el número. □

7. Sea $a_0, a_1, \ldots$ una secuencia definida recursivamente por $a_0 = 2$, $a_1 = 5$ y $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ para $n \geq 2$. Calcular a_5

Respuesta. Se tiene como base de recursión los valores $a_0 = 2$ y $a_1 = 5$. Luego, por el paso de recursión, tenemos que

$$\begin{aligned}
a_2 &= 5a_1 - 6a_0 = 5 \cdot 5 - 6 \cdot 2 = 13 \\
a_3 &= 5a_2 - 6a_1 = 5 \cdot 13 - 6 \cdot 5 = 35 \\
a_4 &= 5a_3 - 6a_2 = 5 \cdot 35 - 6 \cdot 13 = 97 \\
a_5 &= 5a_4 - 6a_3 = 5 \cdot 97 - 6 \cdot 35 = 275
\end{aligned}$$

Por lo tanto, a_5 es 275 □

8. Defina la sucesión $0, 1, 3, 7, 15, 31, 63, 127, \ldots$. mediante el teorema de recursión finita y probar que la sucesión tiene una regla no recursiva $f(n) = 2^n - 1$, para valores naturales mayores o iguales a 1.

Respuesta. Sea $f(n)$ el nth número de la sucesión, en este caso, el concepto $\mathscr{C}(n)$ es:

$$f(n)$$

La definición buscada debe captar la siguiente idea de número en la sucesión: cada número es el doble de su precedente más uno, formando así una sucesión de enteros. La generalización de este proceso, se expresa por

$$f(n) = 2f(n-1) + 1$$

y el término que da inicio a la sucesión es el valor de 0. Por ello, para definir $f(n)$, vamos a tomar $n_0 = 0$. Por lo tanto, de la aplicación del teorema de recursión finita, tenemos que

- Base de la recursión:
$$\mathscr{C}(0) : f(0) = 0$$
- Paso Recursivo: Si $n \in \mathbb{N}$, suponemos definido $\mathscr{C}(n) : f(n) = 2f(n-1)+1$ y, definiendo $f(n+1)$ como la suma de $2f(n)$ y 1; Es decir,

$$f(n+1) = 2f(n) + 1, n \geq 1$$

Finalmente, por el teorema de Recursión finita, se ha definido el número

$$f(n)$$

para todo número natural $n \geq 1$.

Ahora, para probar la regla no recursiva $f(n) = 2^n - 1$, procederemos mediante la aplicación del teorema de inducción.

En este caso, la proposición $\mathscr{A}(x)$ es:

$$f(n) = 2^n - 1$$

- *Base de la inducción:* Para $n = 1$ la proposición, $\mathscr{A}(1)$, se reduce a $1 = 1$ que, evidentemente, es cierta
- *Paso inductivo:* Supongamos que dicha igualdad se verifica para un número $n \in \mathbb{N}$, es decir, $\mathscr{A}(n) : f(n) = 2^n - 1$ verdadera, y probemos que en tal caso también se verifica para $n + 1$. Deberemos probar que de la igualdad anterior se deduce la siguiente igualdad.

  $$f(n+1) = 2^{n+1} - 1$$

  Tenemos que

  $$\begin{aligned} f(n+1) = 2f(n) + 1 &= 2(2^n - 1) + 1 \quad \text{Por paso inductivo} \\ &= 2 \cdot 2^n - 2 + 1 \\ &= 2^{n+1} - 1 \end{aligned}$$

  Llegamos a demostrar, en virtud del principio de inducción, que la igualdad del enunciado es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$. □

9. Proveer una definición recursiva de la sucesión generada por la fórmula $f(n) = n^2$, donde n es un natural.

Respuesta. En este caso, el concepto $\mathscr{C}(n)$ es:

$$f(n)$$

donde $n \in \mathbb{N}$. El paso recursivo requiere que el número $f(n+1)$ sea expresado en término de $f(n)$. Así, a partir de n^2, tenemos que

$$n^2 = ((n-1)+1)^2 = (n-1)^2 + 2(n-1) + 1 = (n-1)^2 + 2n - 1,$$

la ecuación expresa n^2 en términos de $(n-1)^2$. La generalización de este resultado, se expresa por

$$f(n) = f(n-1) + 2n - 1$$

y esta igualdad debe ser válida incluso cuando $n = 1$:

$$f(1) = f(0) + 2n - 1$$

Esto nos sugiere que $f(0) = 0$. En efecto, $1^2 = 1$ y $f(1) = 0 + 2(1) - 1 = 1$.

Por lo tanto, de la aplicación del teorema de recursión finita, tenemos que

- Base inductiva. $f(0) = 0$
- Base Recursiva. Si $n \in \mathbb{N}$, suponemos definido $\mathscr{C}(n) : f(n) = f(n-1) + 2n - 1$ y, definiendo $f(n+1)$ como la suma de $f(n)$, $2n$ y -1; Es decir,

$$f(n) = f(n-1) + 2n - 1, n \geq 1$$

Finalmente, por el teorema de Recursión finita, se ha definido el número

$$f(n) \qquad \square$$

3.2.3. El concepto general de funciones

Al finalizar esta unidad el estudiante podrá:

Resultado

Describir el concepto general de función.

Ilustración

1. ¿Cuál enunciado corresponde a la definición general de función?

a) Dados los conjuntos A y B, una función de A en B es una relación entre los elementos del conjunto B y los elementos de A tal que a cada elemento de B le corresponde (en la relación) **uno y solo** un elemento de A.

b) Dados los conjuntos A y B, una función de A en B es una relación entre los elementos del conjunto A y B tal que a cada uno de los elementos de A le corresponde (en la relación) **al menos** un elemento de B.

c) Dados los conjuntos A y B, Una función de A en B es una relación entre los elementos del conjunto A y los elementos de B tal que a cada uno de los elementos de A le corresponde (en la relación) **a lo más** un elemento de B.

d) Dados los conjuntos B y A, una función de A en B es una relación entre los elementos del conjunto B y los elementos de A tal que a cada elemento de B le corresponde (en la relación) **uno y solo** un elemento de A.

Respuesta esperada.

a) No corresponde a la definición general de función porque a cada elemento de **A** le corresponde uno y solo un elemento de **B**, en lugar de "a cada uno de los elementos de **B** le corresponde uno y solo un elemento de **A**". Otra corrección alternativa sería cambiar la primera parte del enunciado con "Una función de B en A ...".

b) No corresponde a la definición general de función porque, si los elementos de A le corresponde **al menos** un elemento de B, en una función podría existir dos elementos distintos del conjunto de llegada relacionados con un mismo elemento del conjunto de partida.

c) No corresponde a la definición general de función porque, si a cada uno de los elementos de A le corresponde **a lo más** un elemento de B, en una función podrían existir elementos del conjunto de partida que no estén relacionados con algún elemento del conjunto de llegada.

d) Corresponde a la definición general de función. □

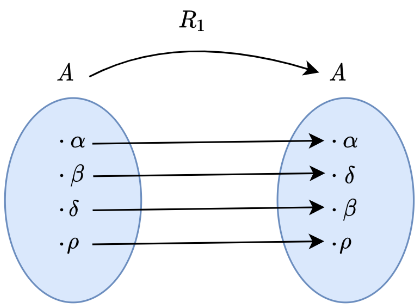
2. Enunciar la definición de función como un conjunto de pares ordenados.

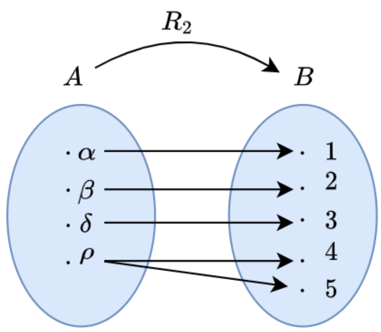
Respuesta. Dados los conjuntos A y B, el conjunto de pares ordenados f es una función de A en B si las siguientes proposiciones son verdaderas:

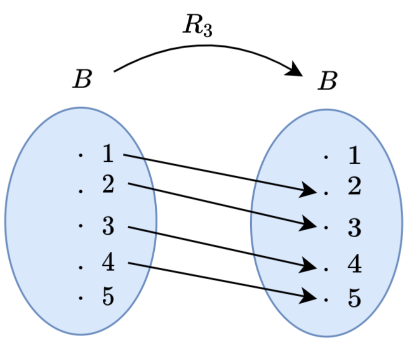
- f es un subconjunto del producto cartesiano de A y B; es decir, $f \subseteq A \times B$.
- Para cada $x \in A$, existe $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$.
- Si $(x, y) \in f$ y $(x, z) \in f$, entonces $y = z$. $\square$

3. Dada una relación entre los conjuntos A y B, determinar si es una función de A en B mediante la definición general de función.

a) Dados los conjuntos $A = \{\alpha, \beta, \delta, \rho\}$ y B $= \{1, 2, 3, 4, 5\}$, los siguientes diagramas sagitales definen tres relaciones: R_1 de A en A, R_2 de A en B y R_3 de B en B:







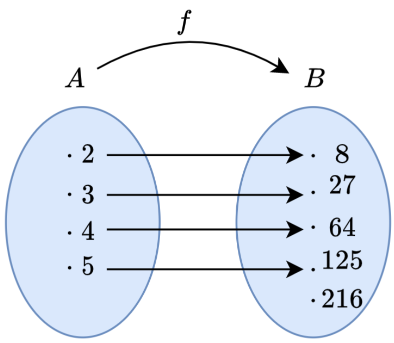
Determine si R_1, R_2 o R_3 son funciones de A en B, de A en A o de B en B.

Respuesta.

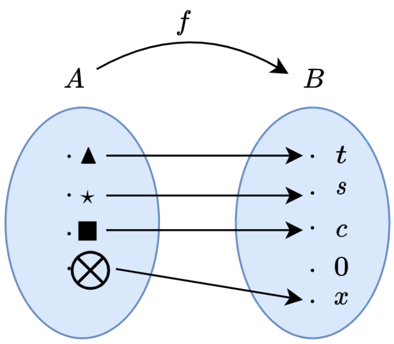
- La relación R_1 de A en A sí representa una función de A en A porque a cada elemento de A le corresponde uno y solo un elemento de A: a α le corresponde únicamente α, a β le corresponde solo β, etcétera.
- La relación R_2 de A en B no representa una función de A en B porque al elemento ρ de A le corresponde dos elementos de B, 4 y 5.
- La relación R_3 de B en B no representa una función de B en B porque al elemento 5, que pertenece a A, no le corresponde ningún elemento del conjunto de llegada B. $\square$

4. Presentar ejemplos de relaciones definidas con la ayuda de un diagrama sagital que son funciones y de relaciones que no lo son. Justifique su respuesta mediante la definición general de función.

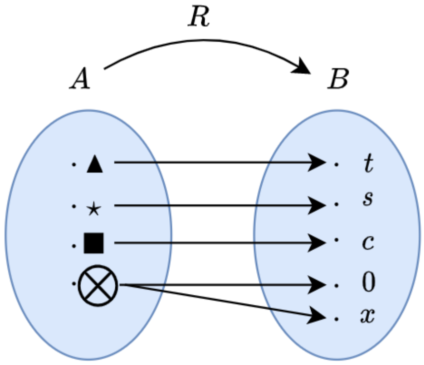
Respuesta.



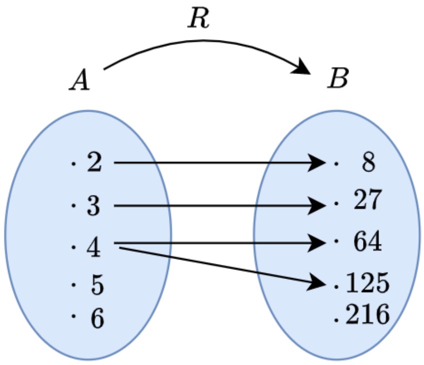
La relación es una función de A en B, debido a que a cada uno de los elementos de A le corresponde uno y solo un elemento de B.



La relación es una función de A en B, debido a que a cada uno de los elementos de A le corresponde uno y solo un elemento de B, a pesar de que el elemento $0 \in B$ no este relacionado con ningún elemento de A.



La relación no es una función de A en B, debido a que el elemento $\otimes \in A$ le corresponde dos elementos de B; 0 y x.



La relación no es una función de A en B, debido a que al elemento $4 \in A$ le corresponde dos elementos de B; 64 y 125. Además, hay elementos de A que no les corresponden ningún elemento del conjunto de llegada. $\square$

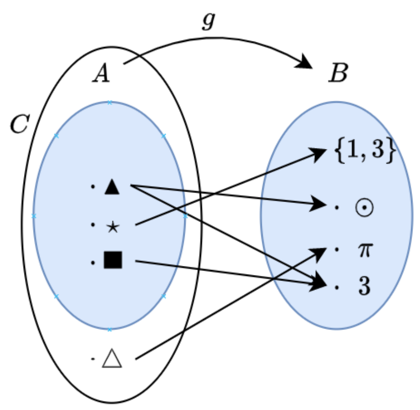
Resultado

Dada una función, identificar su dominio.

Ilustración

1. En los siguientes enunciados, hay un error. Identifíquelo y corríjalo. Justifique su corrección.

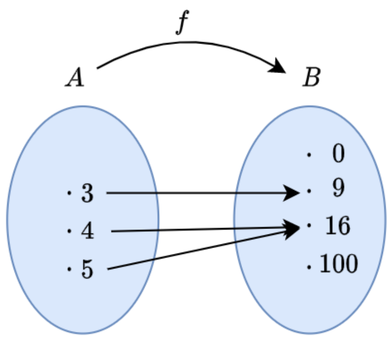
   a) Dada la función g de A en B



su dominio es:

$$\operatorname{dom} R_1 = \{\blacktriangle, \star, \blacksquare, \triangle\}$$

b) Dada la función de A en B



su dominio es:

$$\operatorname{dom} f = \{3, 4\}$$

Respuesta.

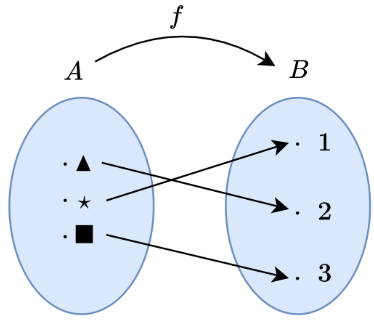
a) El error consiste en que el elemento $\triangle$ no debe ser incluido en el conjunto dominio de la función g de A en B, puesto que $\triangle$ no pertenece al conjunto de partida A.

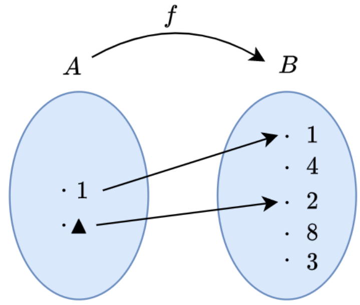
La corrección es:

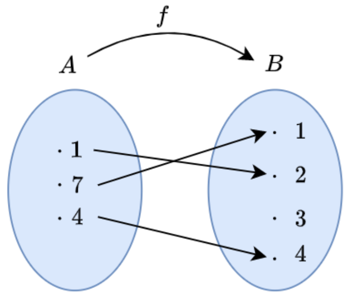
$\operatorname{dom} g = \{\blacktriangle, \star, \blacksquare\}$

b) El error consiste en que el elemento 5 no está incluido en el conjunto dominio de la función f de A en B, puesto que a 5 le corresponde uno y sólo un elemento del conjunto B. $\square$

2. Dada una función f de A en B, se define los siguientes diagramas sagitales:

a) 

b) 

c) 

Determinar el dominio para cada función.

Respuesta Respuesta. El dominio de una función de A en B es el conjunto de elementos de A que le corresponde un elemento del conjunto B, así

a) $dom(f) = \{\blacktriangle, \star, \blacksquare\}$

b) $dom(f) = \{1, \blacktriangle\}$

c) $dom(f) = \{1, 7, 4\}$ $\square$

3. Sea A un conjunto de números reales y suponga que

$$\begin{aligned} f\colon A &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{3}{\sqrt{|x-1|-2}}. \end{aligned}$$

Responda a cada una de las preguntas. Justifique su respuesta.

a) ¿Cuál es el dominio de f?

b) ¿El conjunto A puede ser igual a $\mathbb{R}$?

c) ¿Cuáles son todos los subconjuntos A de $\mathbb{R}$ tales que

$$\begin{aligned} f\colon A &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{3}{\sqrt{|x-1|-2}} \end{aligned}?$$

Respuesta.

a) El dominio es A. De la definición general de función, el conjunto de salida A es el mismo que el conjunto $\operatorname{dom} f$.

b) No, puesto que para el valor particular 0 no podemos sustituir en la regla de correspondencia de la función f para obtener un valor de correspondencia en B.

c) Sea $x \in A$ tal que

$$\begin{aligned} f\colon A &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{3}{\sqrt{|x-1|-2}} \end{aligned}.$$

Entonces $f(x) \in \mathbb{R}$. Por tanto,

$$\frac{3}{\sqrt{|x-1|-2}} \in \mathbb{R}.$$

Esto significa que

$$\sqrt{|x-1|-2} \neq 0.$$

Luego, esto significa que

$$|x-1|-2 > 0.$$

Y, puesto que

$$\begin{aligned} |x-1|-2 > 0 \ &\equiv \ |x-1| > 2 \\ &\equiv x-1 > 2 \vee x-1 < -2 \\ &\equiv (x > 3) \vee (x < -1), \end{aligned}$$

como $x \in A$, significa que

$$x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty).$$

Luego, hemos probado que el conjunto A debe satisfacer la condición

$$A \subseteq (-\infty, -1) \cup (3, +\infty).$$

Por otra parte, ningún número real que no esté en este conjunto tiene una imagen respecto de f.

En resumen, todos los conjuntos A tales que

$$A \subseteq (-\infty, -1) \cup (3, +\infty).$$

hacen verdadera la proposición

$$\begin{aligned} f\colon A &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{3}{\sqrt{|x-1|-2}} \end{aligned}.$$

□

Resultado

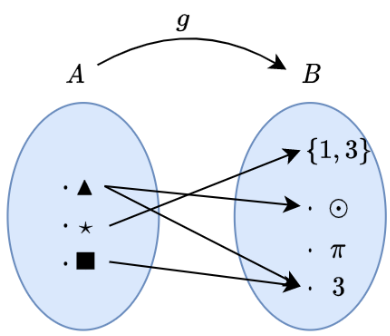
Dada una función, identificar los elementos de su ***recorrido****.*

Ejemplos para evaluar este resultado de aprendizaje:

Ilustración

1. En los siguientes enunciados, hay un error. Identifíquelo y corríjalo. Justifique su corrección

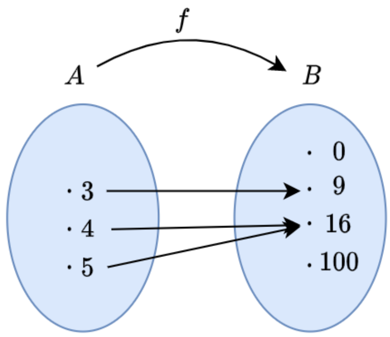
   a) Dada la función g de A en B



   su recorrido es:

$$\operatorname{rec} g = \{1, 3, \odot\}$$

   b) Dada la función de A en B



su recorrido es:

$$\operatorname{Rec} f = \{0, 9, 16, 100\}$$

Respuesta.

a) El error consiste en que el elemento 1 no pertenece al conjunto de llegada B y, por lo tanto, no pertenecen al recorrido de la función g. Además, el elemento $\{1, 3\}$ no se añadido al recorrido de g de A en B.

La corrección es:

$$\operatorname{Rec} g = \{\{1, 3\}, \odot, 3\}$$

b) El error consiste en que los elementos 0 y 100 no pertenecen al conjunto $\operatorname{Rec} g$, puesto que no establecen una correspondencia para algún elemento del conjunto de salida A.

La corrección es:

$$\operatorname{Rec} g = \{9, 16\}$$

$\square$

2. Determinar el recorrido de las siguientes funciones:

a) Sea

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto -x^2 + 2 \end{aligned}$$

b) Función de **Valor Absoluto**:

$$\begin{aligned} |\ |\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

c) Función **signo**:

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

d) Función **escalón**:

$$\begin{aligned} \mu\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

e) Función **parte entera** o **suelo**:

$$\begin{aligned} \lfloor\ \rfloor\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto n, \end{aligned}$$

donde $n \in \mathbb{Z}$ y $n \leq x < n + 1$.

Respuesta.

a) Dados dos conjuntos A y B, un procedimiento usado frecuentemente para hallar el recorrido de una función de A en B, consiste en establecer las condiciones necesarias y suficientes para que un elemento y del conjunto de llegada de la función esté en el recorrido. Así, en primer lugar, se supone que y está en el recorrido y se determinan las condiciones necesarias para y; luego, se determinan si esas condiciones son también suficientes. En general, en este procedimiento, se deberá resolver la ecuación $y = f(x)$, donde x pertenece al dominio de f.

En efecto, supongamos que $y \in \operatorname{Rec} f$; eso quiere decir que existe x (en el dominio de f que, en este caso, es $\mathbb{R}$) tal que

$$y = f(x) = -x^2 + 2.$$

Puesto que

$$
\begin{aligned}
y = -x^2 + 2 \;&\equiv\; x^2 = -y + 2 \\
&\equiv\; |x| = \sqrt{-y+2}
\end{aligned}
$$

siempre y cuando $-y + 2 > 0$.

Por tanto, si $y \in \operatorname{rec} f$, entonces $y < 2$ (esta es una condición necesaria para que y esté en el recorrido de f); es decir, $y \in (-\infty, 2)$. Esto quiere decir que

$$\operatorname{rec} f \subseteq (-\infty, 2).$$

Ahora veamos que la condición necesaria también es suficiente; es decir, veamos que también es verdad que

$$(-\infty, 2) \subseteq \operatorname{rec} f,$$

pues si $y < 2$, por la equivalencia lógica anterior, se tiene que si

$$x = \sqrt{-y+2},$$

entonces $y = f(x)$ y, por tanto, $y \in \operatorname{rec} f$.

En conclusión, se tiene que $\operatorname{rec} f = (-\infty, 2)$.

b) Supongamos $y \in \operatorname{dom} |\ |$; esto quiere decir que existe al menos un x, tal que

$$y = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Si $x < 0$, entonces $y = |x| = -x$ y, en consecuencia, $y > 0$; es decir, $y \in (0, +\infty)$. Por otro lado, si $x \geq 0$, entonces $y = |x| = x$ y, por eso, $y \geq 0$; es decir, $y \in [0, +\infty)$. Esta es una condición necesaria para que y esté en el recorrido de f.

De lo anterior, obtenemos que

$$\operatorname{rec} |\ | \subseteq [0, \infty)$$

Ahora veamos que la condición necesaria también es suficiente; es decir, veamos que también es verdad que

$$[0, \infty) \subseteq \operatorname{rec} |\ |$$

Tomando $y \in [0, \infty)$, basta tomar $y = f(x) = x$ y, en consecuencia, $x \geq 0$, el cual pertenece a $\mathrm{Dom} |\ |$. Así, obtenemos que

$$y \in \mathrm{rec} |\ |$$

En conclusión, se tiene que

$$\mathrm{rec} |\ | = [0, +\infty)$$

c) Sea $y \in \mathrm{rec}\,\mathsf{sgn} = \mathbb{R}$, fácilmente se puede observar de la definición de sgn que y puede tomar valores dentro de: $1, 0$ y -1, es decir, $y \in \{1, 0, -1\}$. Esta es una condición necesaria para que y esté en el recorrido de f. En consecuencia,

$$\mathrm{rec}\,\mathsf{sgn} \subseteq \{1, 0, -1\}$$

Ahora veamos que la condición necesaria también es suficiente; es decir, veamos que también es verdad que

$$\{1, 0, -1\} \subseteq \mathrm{rec}\,\mathsf{sgn}$$

pues si $y \in \{1, 0, -1\}$, basta con tomar tres valores diferente de x en el dominio de $|\ |$: $x = 0$, $x = 1$ y $x = -1$, para obtener imagenes con los mismos valores del conjunto $\{1, 0, -1\}$. Así, obtenemos que

$$y \in \mathrm{rec}\,\mathsf{sgn}$$

En conclusión, se tiene que $\mathrm{Rec}\,\mathsf{sgn} = \{1, 0, -1\}$

d) Sea $y \in \mathrm{Rec}\,\mu = \mathbb{R}$, fácilmente se puede observar de la definición de μ que y puede tomar valores dentro de: 1 y 0, es decir, $y \in \{1, 0\}$. Esta es una condición necesaria para que y esté en el recorrido de f. Esto quiere decir que

$$\mathrm{rec}\,\mu \subseteq \{1, 0\}$$

Ahora veamos que la condición necesaria también es suficiente; es decir, veamos que también es verdad que

$$\{1, 0\} \subseteq \mathrm{rec}\,\mu$$

pues si $y \in \{1, 0\}$, basta con tomar dos valores diferente de x que este en el dominio de μ: $x = 0$ y $x = 1$, para obtener imagenes con los mismos valores del conjunto $\{1, 0\}$. Así, obtenemos que

$$y \in \operatorname{rec} \mu$$

En conclusión, se tiene que $\operatorname{Rec} \mu = \{1, 0\}$

e) Supongamos que $y \in \operatorname{Rec}\lfloor\ \rfloor$; eso quiere decir que existe al menos un $x \in \operatorname{Dom}\lfloor\ \rfloor$, el cual es un elemento de conjuno $\mathbb{R}$, tal que

$$y \leq x < y + 1$$

Puesto que

$$y \leq x \wedge x < y + 1 \equiv x - 1 < y \leq x$$

siempre y cuando $y \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto, si $x \in \operatorname{Rec}\lfloor\ \rfloor$, entonces $y \in \mathbb{Z}$. Esta es una condición necesaria para que y esté en el recorrido de f .Esto quiere decir que

$$\operatorname{Rec}\lfloor\ \rfloor \subseteq \mathbb{Z}$$

Ahora veamos que la condición necesaria también es suficiente; es decir, veamos que también es verdad que

$$\mathbb{Z} \subseteq \operatorname{Rec}\lfloor\ \rfloor$$

pues si $y \in \mathbb{Z}$, por equivalencia lógica anterior, se tiene que si

$$x - 1 < y \leq x$$

entonces, $y = f(x)$ y, por lo tanto, y $y \in \operatorname{Rec}\lfloor\ \rfloor$. En conclusión, se tiene que $\operatorname{Rec}\lfloor\ \rfloor = \mathbb{Z}$

$\square$

3. Si
$$\begin{aligned} f\colon (0, +\infty) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{x+1}{x}, \end{aligned}$$
¿el número -3 pertenece a $\operatorname{rec} f$? Justifique su respuesta.

Demostración. Hay dos maneras de responder a esta pregunta.

Primera solución: Para determinar si -3 está o no en el recorrido, debemos saber si existe solución para la siguiente ecuación

$$-3 = f(x),$$

donde $x \in \operatorname{dom} f$; es decir, debemos determinar si existe $x \in (0, +\infty)$ tal que

$$\frac{x+1}{x} = -3.$$

Puesto que

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{x} = -3 \ &\equiv \ x + 1 = -3x \\ &\equiv \ x = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

y $-\frac{1}{4}$ no pertenece al dominio de f, entonces la ecuación mencionada no tiene solución y, por tanto, -3 no pertenece al recorrido de f.

Segunda solución: en este caso, vamos a determinar las condiciones necesarias para que un elemento del conjunto de llegada de f pertenezca al recorrido. Para ello, supongamos $y \in \operatorname{Rec} f$; eso quiere decir que existe al menos un $x \in \operatorname{Dom} f$ tal que

$$y = f(x) = \frac{x+1}{x}$$

despejando y en términos de x, tenemos que

$$\begin{aligned} y = \frac{x+1}{x} \ &\equiv \ x(y-1) = 1 \\ &\equiv \ x = \frac{1}{y-1} \end{aligned}$$

siempre y cuando $y - 1 \neq 0$, es decir, $y \neq 1$. Además, $x > 0$, por definición de función. En consecuencia,

$$\frac{1}{y-1} > 0$$

siempre y cuando $y > 1$. Por lo tanto,

$$\operatorname{Rec} f \subseteq (1, +\infty)$$

En conclusión, -3 no pertenece al intervalo $(1, +\infty)$ y, por consiguiente $-3 \notin \operatorname{Rec} f$ $\square$

Resultado

Identificar la imagen de un elemento del dominio respecto de la función.

Ilustración

1. Mediante la definición de imagen respecto de una función, indique cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas y cuáles son falsas.

   Sea f una función de A en B.

   a) Dado $x \in A$, y es la imagen de x respecto de f si $(x, y) \in f$.

   b) Una imagen de $x \in B$ respecto de f es un elemento $y \in A$ tal que $(x, y) \in f$.

   c) Si $y \in A$, una imagen de y respecto de f es un conjunto x tal que $(y, x) \in f$.

   d) Un elemento $y \in B$ es una imagen de x respecto de f si $(x, y) \in f$.

   Respuesta. La definición de imagen respecto a una función de A en B es:

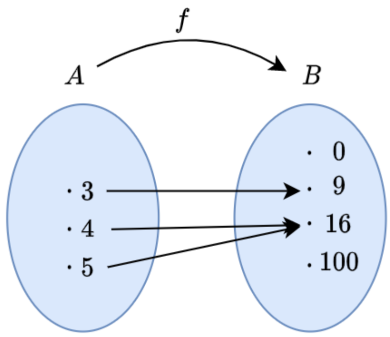
   a) El enunciado es verdadero porque, si $(x, y) \in f$, entonces x pertenece a A, y a B. En consecuencia, la imagen de x respecto a f es y.

   b) El enunciado es falso porque el par ordenado $(x, y) \notin f$, puesto que, no existe una correspondencia de $x \in B$ a $y \in A$. Además, la imagen de un elemento x se lo define sobre el conjunto de salida A, y no sobre el conjunto de llegada B.

   c) El enunciado es falso porque la imagen de un elemento y de A es un único elemento x de B y, no un conjunto de elemento de B.

   d) El enunciado es verdadero porque, si $(x, y) \in f$, $x \in \operatorname{dom} f$ y y es imagen de x respecto a f. $\square$

2. A continuación se indica una función de A en B expresada mediante un diagrama sagital.



Responder cada una de las siguientes preguntas.

a) ¿Cuál es la imagen de 4 respecto a f?

b) ¿Cuál es valor y tal que $f(3) = y$?

c) ¿Qué elementos de A tienen como imagen el número 16?

d) ¿Cuál es el elemento de A cuya imagen respecto a f es el cero?

Respuesta.

a) La imagen de 4 respecto a f es 16 porque $4 \in \operatorname{dom} f$ y el elemento de B, que le corresponde a 4, es 16, es decir, $f(4) = 16$.

b) y es igual a 9 porque la imagen de 3 respecto a f es 9, es decir, $f(3) = 9 = y$, por lo tanto, $y = 9$.

c) 4 y 5 tienen como imagen a 16 porque tanto la imagen de 4 respecto a f, como la imagen de 5 respecto a f son 16. Es decir, $f(4) = f(5) = 16$.

d) No existe un elemento de A cuya correspondencia sea el cero, es decir, el cero no es imagen para todo elemento de A respecto a f. $\square$

3. En cada caso, dada la función, se presenta un enunciado. Determine si es verdadero o falso. Justifique su respuesta.

a) Sea

$$\begin{aligned} f\colon [0,+\infty) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto |x| \end{aligned}$$

La imagen de -4 respecto a f es 4.

b) Sea

$$\begin{aligned} f\colon [0,+\infty) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sqrt{x} \end{aligned}$$

La imagen de 4 respecto a f es 2

c) Sea

$$\begin{aligned} f\colon [0,+\infty) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{1+x} \end{aligned}$$

La imagen de 1 respecto a f es 0.

Respuesta.

a) El enunciado es incorrecto porque el conjunto $dom f$ es igual a $[0,+\infty)$, y el elemento -4 no pertenece al conjunto, por lo tanto, la imagen de -4 respecto a f no existe.

b) El enunciado es correcto porque 4 es un elemento del dominio de f, es decir, $4 \in [0,+\infty)$,y la imagen de 4 respecto a f es

$$\sqrt{4} = 2$$

Por lo tanto, $f(4) = 2$.

c) El enunciado es incorrecto porque, aunque 1 pertenece al domino de f, la imagen de 1 respecto a f no es 0 sino más bien $f(1) = 1/2$.

□

Resultado

Comprender el concepto de la composición de funciones.

Ilustración

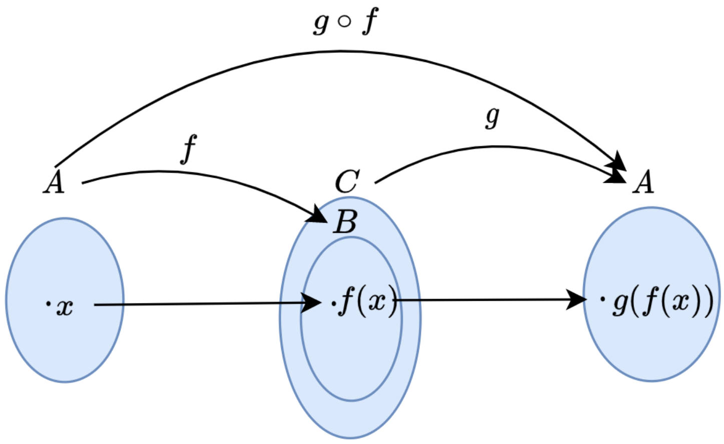
1. Enuncie la definición de la composición de funciones.

   Respuesta. Sean las funciones f de A a B y g de C a D tales que $\operatorname{rec} f \subseteq C$, la función compuesta de f y g, denotada por $g \circ f$, es la función de A en D tal que para todo $x \in A$, se tiene que

   $$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$ □

2. Ilustre la definición de la composición de dos funciones mediante diagramas sagitales.

   Respuesta.



$\square$

3. ¿Cuál enunciado corresponde al principio de composición de funciones?

   a) Sean las funciones f de A en B y g de C en D, la función compuesta de f y g, denotada como $g \circ f$, es la función de A en D tal que para todo $x \in A$, se tiene que

   $$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

   b) Sean las funciones f de A en B y g de B en D tales que $\operatorname{rec} f \subseteq B$, la función compuesta de f y g, denotada como $g \circ f$, es la función de A en D tal que para todo $x \in A$, se tiene que

   $$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

   c) Sean las funciones f de A en B y g de C en D tales que $C \subseteq \operatorname{rec} f$, la función compuesta de f y g, denotada como $g \circ f$, es la función de A en D tal que para algún $x \in A$, se tiene que

   $$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Respuesta.

- No corresponde a la definición de composición de funciones porque, si no se considera la condición: $\operatorname{rec} f \subseteq C$ en la definición, puede existir al menos un elemento x, perteneciente al conjunto de salida A, cuya imagen $f(x)$ no pertenezca al dominio de g, es decir,

$$f(x) \notin C$$

y en consecuencia, la imagen de $f(x)$ respecto a g no tendría una correspondencia a un elemento del conjunto de llegada D .

- Corresponde a la definición de composición de funciones.
- No corresponde a la definición de composición de funciones porque, si $C \subset \operatorname{rec} f$, existe al menos un $x \in A$ cuya imagen respecto a f no pertenece al conjunto C, es decir, $f(x) \notin \operatorname{dom} g$. En consecuencia, la imagen de $f(x)$ respecto a g no tendría una correspondencia en D. $\square$

Resultado

Dadas dos funciones, obtener su composición.

Ilustración

1. Dadas los conjuntos $A = \{6, 4, 2, 10\}$ y $B = \{a, b, c, d, e\}$. Se define las funciones:

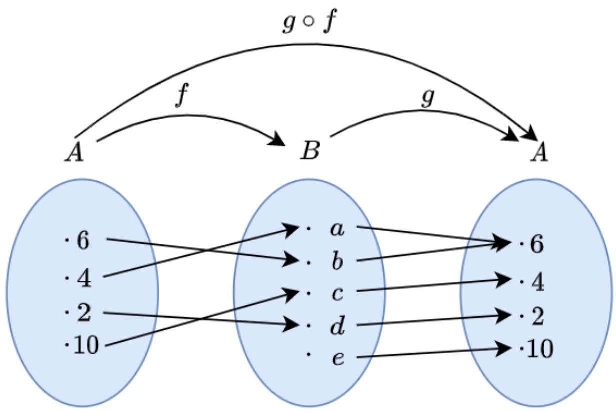
$$f : \mathrm{A} \to \mathrm{B} \quad \text{dada por } f = \{(6, b), (4a), (2, d), (10, c)\}$$
$$g : \mathrm{B} \to \mathrm{A} \quad \text{dada por } g = \{(a, 6), (b, 6), (c, 4), (d, 2), (e, 10)\}$$

Obtener $f \circ g$ y $g \circ f$. Muestre la relación mediante diagramas sagitales.

Respuesta. $f \circ g$ existe porque el recorrido de g esta contenido en el dominio de f. Así pues, La imagen de 6 respecto a f es b y, al ser $b \in B$, su imagen respecto a g es 6, es decir, $(6, 6) \in g \circ f$. Del mismo modo, la imagen de 4 respecto a f es a y su imagen respecto a g es 6, es decir, $(4, 6) \in g \circ f$. Procediendo de manera similar para cada uno de los elemento de A, obtenemos que la composición $g \circ f$ es:

$$\{(6, 6), (4, 6), (2, 2), (10, 4)\}$$

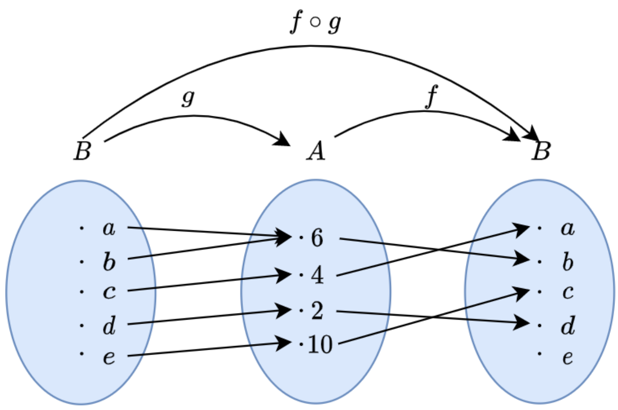
Su representación sagital queda como:



También, $g \circ f$ existe porque el recorrido de g esta contenido en el dominio de f. Así pues, La imagen de a respecto a g es 6 y, al ser $6 \in A$, su imagen respecto a f es b, es decir, $(a, b) \in f \circ g$. Del mismo modo, la imagen de b respecto a g es 6 y su imagen respecto a f es b, es decir, $(b, b) \in f \circ g$. Procediendo de manera similar para cada uno de los elemento de A, obtenemos que su función es:

$$f \circ g = \{(a, b), (b, b), (c, a), (d, d), (e, c)\}$$

Su representación sagital queda como:



De este ejemplo particular se puede concluir que $f \circ g$ es diferente a $g \circ f$, es decir, la composición de funciones no es conmutativa. $\square$

2. Sean $f\colon A \longrightarrow B$ y $g\colon B \longrightarrow C$ funciones con $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $C = \{w, x, y, z\}$ tal que $g \circ f = \{(a, y), (b, x), (c, w), (d, w)\}$ y $g = \{(1, y), (2, w), (3, x)\}$. Encontrar f y muestre la relación mediante un diagrama sagital.

Respuesta. Encontrar f equivale a hallar todas las $(x, y) \in A \times B$ tales que

$$(x, y) \in g \circ f$$

Para a, su imagen respecto a $g \circ f$ es y, es decir,

$$(a, y) \in g \circ f$$

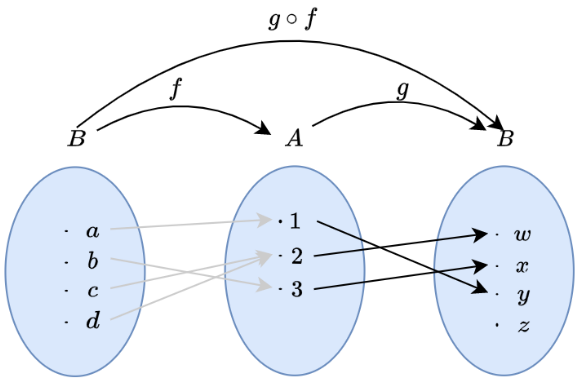
y el elemento de B que tiene como imagen respecto a g a y es 1, es decir, $g(1) = y$, en consecuencia, la imagen de a respecto a f es 1, es decir,

$$(a, 1) \in f$$

Procediendo de manera similar para cada uno de de los elementos de A, obtenemos que la función f de A en B es:

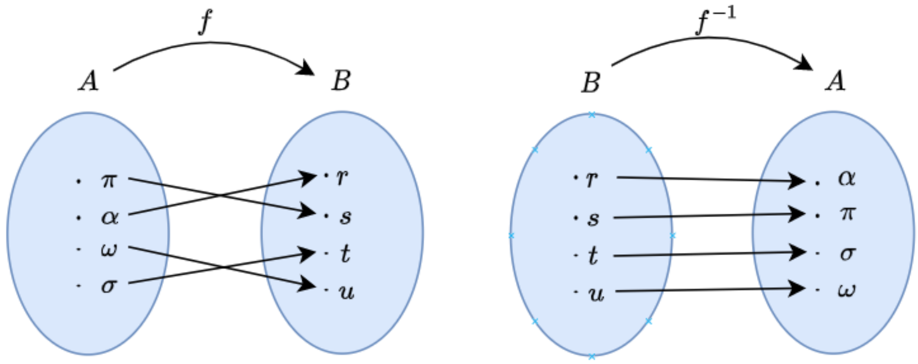
$$f = \{(a, 1), (b, 3), (c, 2), (d, 2)\}$$

Su representación sagital es



□

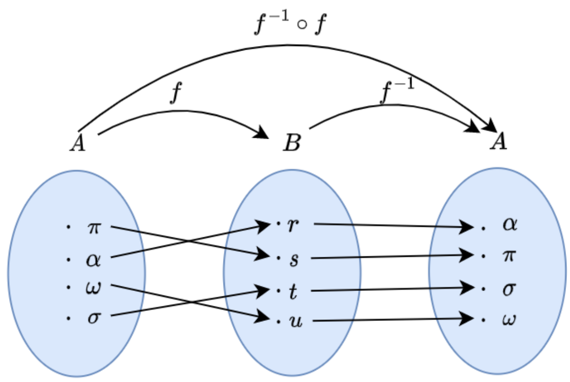
3. Dados los conjuntos $A = \{\pi, \alpha, \omega, \sigma\}$ y $B = \{r, s, t, u\}$. Los siguientes diagramas sagitales definen las funciones: f de A en B y f^{-1} de B en A

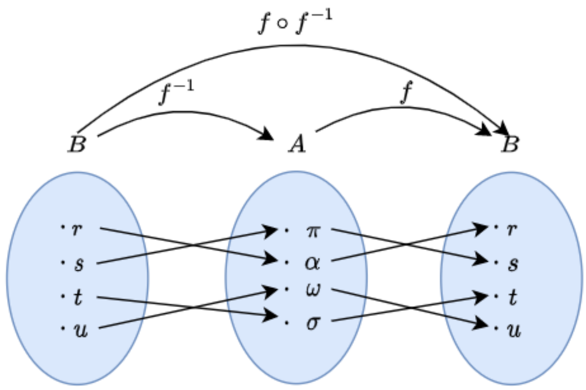


Obtener $f \circ f^{-1}$ y $f^{-1} \circ f$. Muestre la relación mediante una representación sagital y comente su resultado.

Respuesta.

Tanto el recorrido de f^{-1} como el de f son iguales al dominio de f y f^{-1}, respectivamente. Por lo tanto, es posible hallar la composición entre f y f^{-1}. Sus representaciones sagitales son:





Las correspondencias que resultan de la composición se caracterizan por tener como imagen el mismo valor que el argumento de la función. $\square$

4. Sean

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{y} \quad g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x^2 - 2 \qquad\qquad x \longmapsto x + 1,$$

¿es posible definir la composición de f y g?

Respuesta. El dominio de f es $\mathbb{R}$ y fácilmente se verifica que el recorrido de g es $\mathbb{R}$. De manera que, $\operatorname{Rec} g \subseteq \operatorname{Dom} f$, es decir, la composición de $f \circ g$ existe. Dado un $x \in \operatorname{dom} g$, obtenemos que

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (g(x))^2 - 2 = (x+1)^2 - 2$$

En conclusión,

$$(f \circ g)\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto (x+1)^2 - 2$$

□

Resultado

Explicar el concepto de inversión de funciones.

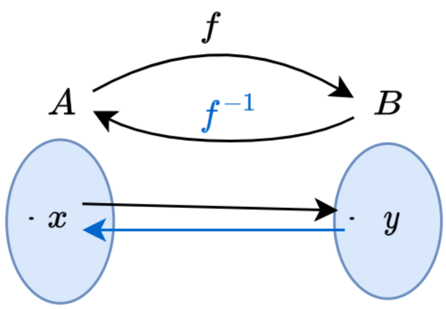
Ilustración

1. Enuncie la definición de inversión de funciones

Respuesta. Dada una función f de A en B, f es invertible si y solo si existe una función g de B en A tal que para todo $x \in B$,el único $y \in A$ para la cual la proposición $y = g(x)$ es verdadera, también lo es la proposición $x = f(y)$. □

2. Ilustre la definición de inversión de función mediante un diagrama sagital.

Respuesta.



$\square$

3. ¿Cómo se encuentra la inversa de una función algebraicamente?

Respuesta. Dado una función f de A en B. un procedimiento frecuentemente utilizado para la obtención de la inversa de una función es:

a) Intercambiar $f(x)$ por x, donde $x \in \operatorname{dom} f$; y remplazar x por y.

b) despejar y

Así, la regla de correspondencia de f^{-1} sería la ecuación obtenida, con el conjunto de partida de f como el conjunto de llegada de la inversa, y el conjunto de llegada de f como el conjunto de partida de la inversa. Es decir, $\operatorname{dom} f = \operatorname{rec} f^{-1}$ y $\operatorname{rec} f = \operatorname{dom} f^{-1}$. $\square$

4. ¿Puede una función ser su propia inversa? Explique.

Respuesta. Si, una función puede ser su propia inversa. Primero, dado una función de A en B, para determinar que $f = f^{-1}$, se tiene que comprobar que $f(f(x)) = x$ para todo x en el dominio de f. Por ejemplo, la función f de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto a - x \end{aligned}$$

donde, $a \in \mathbb{R}$, es su propia inversa, puesto que dado $x \in \operatorname{dom} f$

$$f(f(x)) = a - (a - x) = \cancel{a} - \cancel{a} + x = x$$

Otro ejemplo, es la función g de $\mathbb{R} - \{0\}$ en $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{R} - \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \quad &\longmapsto \frac{1}{x} \end{aligned}$$

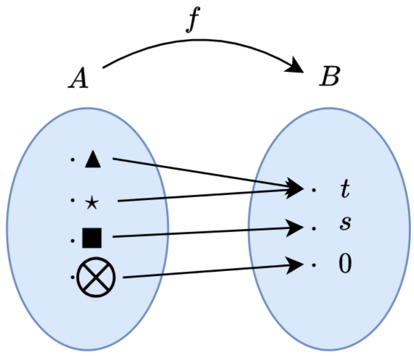
$\square$

Resultado

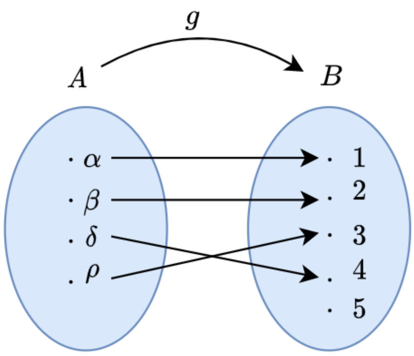
Dada una función, obtener su inversa

Ilustración

1. Dadas las siguientes funciones de A en B:



a)



b)

Determinar si las funciones son invertibles.

Respuesta.

a) No es invertible porque para el elemento $t \in B$ no existe un único elemento de A tal que tenga a t como imagen respecto a f, pues $f(\star) = t$ y $f(\blacktriangle) = t$.

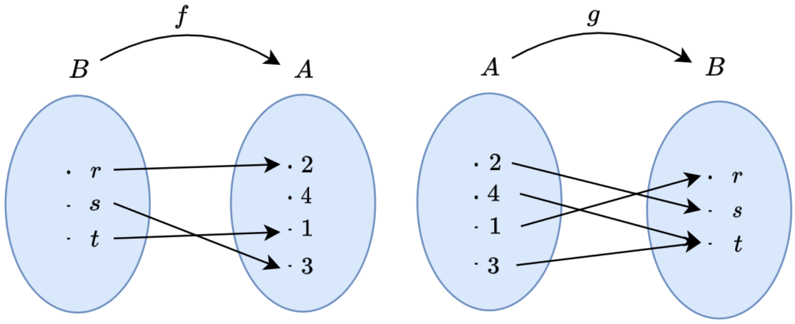
b) No es invertible porque para el elemento $5 \in B$, no existe un elemento de A tal que su imagen respecto a f sea 5. $\square$

2. Si $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{r, s, t\}$, f es una función de B en A y g es una función de A en B, donde:

Determine la veracidad de los siguientes enunciados. Justifique su repuesta.

a) $(g \circ f)^{-1} = \{(s, r), (t, s), (r, t)\}$

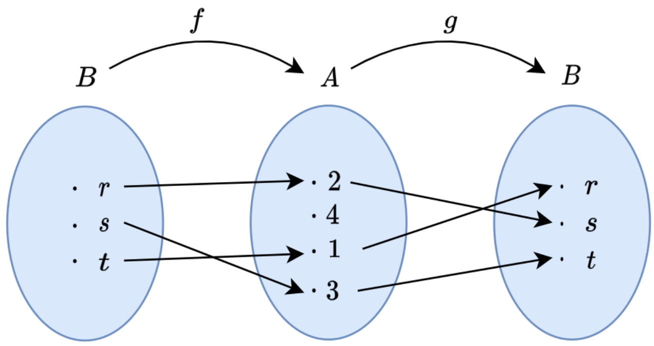
b) $g \circ f$ no es una función invertible.



(a) Diagrama sagital de f (b) Diagrama sagital de g

Respuesta.

a) El enunciado es verdadero. Se inicia determinando la composición $g \circ f$, cuya representación sagital es:



Luego, a partir de $g \circ f$ obtenemos su inversa.

$$(g \circ f)^{-1} = \{(s, r), (t, s), (r, t)\}$$

b) El enunciado es Falso porque se verifica que la composición $(g \circ f)^{-1} \circ (g \circ f) = 1_B$ $\square$

3. Indicar si cada uno de los enunciados es verdadero o falso, y justificar su respuesta.

   a) Se define previamente la inversa de una función:

   > *Una inversa para una función* $f \colon A \longrightarrow B$ *es una función* $g \colon B \longrightarrow A$ *tal que* $g \circ f = I_A$

   Si $f : \{a, b, c, d\} \longrightarrow \{1, 2, 3\}$ y $g : \{1, 2, 3\} \longrightarrow \{a, b, c, d\}$ tal que $f \circ g(x) = x$ para todo $x \in \{1, 2, 3\}$, entonces g es el inverso de f.

b) Se define previamente lo que es una función inyectiva:

> $f\colon A \longrightarrow B$ *se llama uno a uno, o 1-1, o inyectiva, si cada elemento del recorrido de f es imagen exclusiva de un único elemento del dominio de f.*

Sea $f\colon A \longrightarrow B$ y $g\colon B \longrightarrow C$. Si $g \circ f$ es un $1-1$, entonces $g \circ f$ tiene una inversa y $|A| = |C|$.

Respuesta.

a) El enunciado es falso porque, si bien para todo $x \in A$, existe un $z \in B$ tal que $z = g(x)$ y $x = f(z)$; es decir, $x = f(g(x))$, al ser la cardinalidad de B mayor que A, existe al menos un elemento $y \in B$ tal que $g(x) \neq y$ para todo $x \in A$, y por lo tanto $y \neq g(f(y))$.

b) El enunciado es falso porque, si bien $g \circ f$ es invertible, puesto que para cada $x \in \operatorname{rec}(g \circ f)$, existe un único $y \in \operatorname{dom}(g \circ f)$ tal que $y = (g \circ f)(x)$ es v, A no tiene necesariamente la misma cardinalidad de B. □

3.2.4. Funciones reales: operaciones. Funciones racionales.

Al finalizar esta unidad el estudiante podrá:

Resultado

> *Dadas dos funciones, obtener su suma, diferencia, producto y división.*

Ilustración

1. Dadas las funciones

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 8x^3 - 3x^2 \end{aligned}, \quad \begin{aligned} g\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 4x^3 + 9x^2 \end{aligned} \quad \text{y} \quad \begin{aligned} h\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 3x^2 \end{aligned}$$

Encontrar

$$\left(\frac{f+g}{h}\right)$$

Respuesta. Fácilmente se observa que el dominio de f, g y h es el conjunto $\mathbb{R}$. Una vez determinado el dominio de las funciones se procede a determinar la operación entre las funciones. Sea $x \in (\operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g \cup \operatorname{dom} h - \{x : h(x) = 0\})$

$$\begin{aligned}\left(\frac{f+g}{h}\right)(x) &= \frac{f(x)+g(x)}{h(x)} \\ &= \frac{(8x^3-3x^2)+(4x^3+9x^2)}{3x^2}, \quad x \neq 0\end{aligned}$$

Agregamos la restricción $x \neq 0$ porque caso contrario eso haría que el denominador $h(x)$ fuera cero y la fracción indeterminada. Luego,

$$\begin{aligned}&= \frac{12x^3+6x^2}{3x^3}, \quad x \neq 0 \\ &= \frac{\cancel{3x^2}(4x+2)}{\cancel{3x^2}}, \quad x \neq 0 \\ &= 4x+2, \quad x \neq 0\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\left(\frac{f+g}{h}\right)(x) = (4x+2), \quad x \neq 0$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\left(\frac{f+g}{h}\right) \colon \mathbb{R}-\{0\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 4x+2\end{aligned}$$

□

2. En los siguientes enunciados, hay un error. Identifíquelo y corríjalo. Justifique su corrección.

   a) Dadas las funciones:

$$\begin{aligned}f \colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2+2\end{aligned} \quad \text{y} \quad \begin{aligned}g \colon (0,+\infty] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto log(x-1)\end{aligned}.$$

   El dominio de la función resultante por la operación suma entre ellas es:

$$\operatorname{dom}(f+g) = \operatorname{dom} f \cup \operatorname{dom} g = \mathbb{R}$$

   b) Dadas las funciones:

$$\begin{aligned}f \colon (0,+\infty] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sqrt{x^2}\end{aligned} \quad \text{y} \quad \begin{aligned}g \colon \mathbb{R}-\{4\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{3}{x-4}\end{aligned}.$$

Los dominios de las funciones son los conjuntos:

$$\operatorname{dom} f = [0, +\infty] \quad \text{y} \quad \operatorname{dom} g = \mathbb{R} - \{-2\}$$

y el dominio de la función resultante de la operación resta es:

$$\operatorname{dom}(f - g) = \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g = [0, -2) \cup (-2, +\infty)$$

c) Dadas las funciones:

$$f(x) = 5^x \quad \text{y} \quad g(x) = x - 3.$$

El dominio de la función resultante de la operación división es:

$$\operatorname{dom}\left(\frac{f}{g}\right) = \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g = \mathbb{R}$$

Respuesta.

a) El error consiste en que el conjunto $\operatorname{dom}(f + g)$ es igual a la intersección de los dominios de f y g. Además, $\operatorname{dom}(log(x - 1)) = (1, +\infty)$, puesto que el argumento de la funcón log esta definido para valores positivos; es decir, $x - 1 > 0$, entonces $x > 1$.

La corrección es:

$$\operatorname{dom}(f + g) = \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g = (1, +\infty)$$

b) El error esta en el cálculo del dominio de la función g. Esta función esta definida en todos los reales, excepto en los valores en la cual el denominador es cero; es decir, $x - 4 \neq 0$, entonces, $x \neq 4$.

La corrección es:

$$\operatorname{dom}(f - g) = \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g = [0, 4) \cup (4, +\infty)$$

c) El error está en la definición del dominio de la división de funciones y en el cálculo de del dominio de f/g. El dominio de la división de funciones es el resultado de la intersección del dominio de cada función menos todos los números que hacen que la función que actúa como divisor se vuelva cero. E dominio de f y g es el conjunto $\mathbb{R}$, y el valor que vuelve cero a g satisface la ecuación $x-3=0$, que equivale a $x=3$. Así, $\operatorname{dom}(f/g)=\mathbb{R}-\{3\}$.

La corrección es:

$$\operatorname{dom}(f/g)=\operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g - \{x : g(x)=0\} = \mathbb{R}-\{3\} \qquad \square$$

Resultado

Dada una función, determinar su monotonía y paridad.

Ilustración

1. ¿Cuáles de las funciones que se dan a continuación son pares e impares, y cuáles no son pares ni impares?

   a)
   $$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^4-\frac{x^2}{5}+7 \end{aligned}$$

   b)
   $$\begin{aligned} g\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^3-\frac{x}{8} \end{aligned}$$

   c)
   $$\begin{aligned} z\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 2^x \end{aligned}$$

   Respuesta.

   a) Sea $x \in \operatorname{dom} f$. De $f(x)=x^4-x^2/5+7$, obtenemos que

   $$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^4-\frac{(-x)^2}{5}+7 \\ &= x^4-\frac{x^2}{5}+7 = f(x) \end{aligned}$$

   Así, se ha determinado que: $f(-x)=f(x)$, de modo que la función es par.

b) Sea $x \in \operatorname{dom} g$. A partir de $g(x)$ calculamos $g(-x)$:

$$\begin{aligned} g(-x) &= (-x)^3 - \frac{(-x)}{8} = -x^3 + \frac{x}{8} \\ &= -\left(x^3 - \frac{x}{8}\right) = -g(x) \end{aligned}$$

Así, se ha determinado que: $g(-x) = -g(x)$, de modo que la función es impar.

c) Sea $x \in \operatorname{dom} z$. De $z(x) = 2^x$, obtenemos que

$$f(-x) = 2^{-x} = \frac{1}{2^x} \neq f(x) \text{ y } f(-x) \neq -f(x)$$

Así, se ha determinado que la función no es par ni impar. □

2. Encuentre el valor de a para que la función f de A en $\mathbb{R}$ sea una función par.

$$\begin{aligned} f\colon A &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{6}{8x^2 + ax - 3} \end{aligned}$$

Respuesta. Para que la función f sea una función par, debe cumplir con la proposición $f(-x) = f(x)$, Así, el valor de a debe satisfacer la siguiente ecuación:

$$\frac{6}{8(-x)^2 - a(-x) - 3} = \frac{6}{8x^2 - ax - 3}$$

obteniendo el reciproco y eliminando los términos iguales de ambos lados de la ecuación se llega a que:

$$\begin{aligned} -a(-x) &= -ax \\ a\cancel{x} &= -a\cancel{x} \\ -a &= a \end{aligned}$$

Así, el único número cuyo inverso aditivo es el mismo número, es el cero. Por lo tanto, $a = 0$. La función f queda definida como:

$$\begin{aligned} f\colon A &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{6}{8x^2 - 3} \end{aligned}$$

□

3. Determinar la veracidad de las siguientes propiedades entre funciones pares e impares.

a) La suma de dos funciones pares produce una función impar

b) La suma de dos funciones impares produce una función impar.

c) La multiplicación de dos funciones impares resultará ser una función par.

d) La división de dos funciones impares es una función par.

e) La resta de dos funciones impares es una función.

Respuesta. Sean las funciones f y g de A en B.

a) El enunciado es falso porque, dado $x \in \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g$, a partir de la definición de suma de funciones se obtiene:

$$\begin{aligned}(f+g)(-x) &= f(-x)+g(-x)\\ &= f(x)+g(x) \quad \text{por ser pares}\\ &= (f+g)(x)\end{aligned}$$

y por lo tanto, $(f+g)(-x) = (f+g)(x)$, es decir, la suma de dos funciones pares es par.

b) El enunciado es verdadero porque, dado $x \in \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g$, a partir de la definición de suma de funciones se obtiene:

$$\begin{aligned}(f+g)(-x) &= f(-x)+g(-x)\\ &= -f(x)-g(x) \quad \text{por ser impares}\\ &= -(f+g)(x)\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(f+g)(-x) = -(f+g)(x)$, es decir, la suma de dos funciones impares es impar.

c) El enunciado es verdadero porque, dado $x \in \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g$, a partir de la definición de producto de funciones se obtiene:

$$\begin{aligned}(fg)(-x) &= f(-x)g(-x)\\ &= (-f(x))(-g(x)) \quad \text{por ser impares}\\ &= (fg)(x)\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(fg)(-x) = (fg)(x)$, es decir, el producto de dos funciones impares es par.

d) El enunciado es verdadero porque, dado $x \in \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g$, a partir de la definición de división de dos funciones se obtiene:

$$\begin{aligned}\frac{f}{g}(-x) &= \frac{f(-x)}{g(-x)}\\ &= \frac{-f(x)}{-g(x)}\\ &= \frac{f(x)}{g(x)}\\ &= \frac{f}{g}(x)\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(f/g)(-x) = (f/g)(x)$, es decir, la división de dos funciones impares es par.

e) El enunciado es verdadero porque, dado $x \in \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g$, a partir de la definición de resta de funciones se obtiene:

$$\begin{aligned}(f-g)(-x) &= f(-x) - g(-x)\\ &= (-f(x)) - (-g(x)) \quad \text{por ser impares}\\ &= -f(x) + g(x)\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(f-g)(-x) = (-f+g)(x)$, y no corresponde a la definición de función par ni función impar, por lo tanto, la diferencia de funciones impares no es par ni impar. □

4. Dadas las siguientes funciones: h de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, z de $(-\infty, 0]$ en $\mathbb{R}$ y f de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$

a)

$$\begin{aligned}h\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\longmapsto -x^3\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}z\colon (-\infty, 0] &\longrightarrow \mathbb{R}\\ m &\longmapsto 4 - x^2\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\longmapsto x^4\end{aligned}$$

Determinar cuáles son decrecientes, crecientes y qué funciones no son crecientes ni decrecientes.

Respuesta.

a) Sean dos números $x_1, x_2 \in \operatorname{dom} h$ tales que $x_1 < x_2$; entonces,

$$\begin{aligned} x_1^3 &< x_2^3 \\ -x_1^3 &> -x_2^3 \\ h(x_1) &> h(x_2) \end{aligned}$$

Por lo tanto, la función es decreciente.

b) Sean dos números $x_1, x_2 \in \operatorname{dom} z$ tales que $x_1 < x_2 < 0$; entonces,

$$\begin{aligned} x_1^2 &> x_2^2 > 0 \\ 4 - x_1^2 &< 4 - x_2^2 \\ z(x_1) &< z(x_2) \end{aligned}$$

Por lo tanto, la función es creciente.

c) Dados $x_1, x_2 \in \operatorname{dom} f$ tales que $x_1 < x_2$, no se puede afirmar de manera general que $x_1^4 < x_2^4$ o que $x_1^4 > x_2^4$, ya que el sentido de las desigualdades dependerá de los valores que tomen x_1 y x_2. Por lo tanto, la función f no es creciente ni decreciente sobre $\mathbb{R}$. $\square$

Resultado

Dadas dos funciones de variable real, encontrar su composición.

Ilustración

1. Sean

$$\begin{aligned} f\colon (1, +\infty) &\longrightarrow (1, +\infty) \\ x &\longmapsto \frac{x^2}{x^2 - 1} \end{aligned} \quad \text{y} \quad \begin{aligned} g\colon [1/2, +\infty) &\longrightarrow [0, +\infty) \\ x &\longmapsto \sqrt{2x - 1} \end{aligned}$$

a) ¿Es posible definir $f \circ g$ y $g \circ f$?

b) Redefinir el dominio de g de tal forma que se puedan definir $f \circ g$ y $g \circ f$.

c) Con el nuevo dominio de g, encontrar $f \circ g$ y $g \circ f$.

Respuesta.

a) No es posible encontrar $f \circ g$ porque el recorrido de g no esta contenido en el dominio de f, es decir, $\operatorname{rec} g = [0, +\infty) \nsubseteq \operatorname{dom} f = (1, +\infty)$. Y también, no es posible definir $g \circ f$ porque el recorrido de f no esta contenido en el dominio de g, es decir, $\operatorname{rec} f = (1, +\infty) \nsubseteq \operatorname{dom} g = [0, +\infty)$.

b) Una condición necesaria y suficiente para que $f \circ g$ pueda ser definida es que $\operatorname{rec} g \subseteq \operatorname{dom} f$. Una solución posible es:

$$\begin{aligned} g\colon (1, +\infty) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sqrt{2x - 1} \end{aligned}$$

Entonces, $\operatorname{rec} g = (1, +\infty)$, puesto que dado un $y \in \operatorname{rec} g$; esto quiere decir que existe un $x \in \operatorname{dom} g$ tal que

$$y = \sqrt{2x - 1} \equiv \frac{y^2 + 1}{2} = x > 1,$$

se obtiene

$$\frac{y^2 + 1}{2} > 1 \equiv y > 1$$

y esta es una condición necesaria para que y esté en el recorrido de g. Por lo tanto, $\operatorname{rec} g \subseteq (1, +\infty)$. Así, $\operatorname{rec} g \subseteq \operatorname{dom} f = (1, +\infty)$, en consecuencia, $f \circ g$ se puede definir. Además, se puede definir $g \circ f$, puesto que $\operatorname{rec} f = (1, +\infty) \subseteq \operatorname{dom} g = (1, +\infty)$.

c) Sea $x \in \operatorname{dom} g$,

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{2x - 1}) = \frac{\sqrt{2x - 1}^2}{\sqrt{2x - 1}^2 - 1} = \frac{2x - 1}{2x - 2}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} f \circ g\colon (1, +\infty) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{2x - 1}{2x - 2} \end{aligned}$$

Además, Sea $x \in \operatorname{dom} f$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{x^2}{x^2 - 1}\right) = \sqrt{2\left(\frac{x^2}{x^2 - 1}\right) - 1} = \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} g \circ f\colon (1, +\infty) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}} \end{aligned}$$

□

2. Sean

$$f\colon [0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R} \atop x \longmapsto \sqrt{x}, \quad g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \atop x \longmapsto (x+1)^2 \quad \text{y} \quad h\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \atop x \longmapsto -2x$$

evaluar lo siguiente:

a) $f(g(x))$

b) $(h \circ f)(8)$

c) $(f \circ h)(-2)$

d) $(g \circ f \circ h)(-8)$

Respuesta.

a) Dado $x \in \operatorname{dom} g$, la imagen de x respecto a g es y tal que

$$y = (x+1)^2$$

y puesto que

$$y = (x+1)^2 \geq 0$$

por lo tanto, $y \geq 0$, es decir, $y \in [0, +\infty)$. Esta es una condición necesaria para que y esté en recorrido de g. En consecuencia, y pertenece al dominio de f, y obtenemos que

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{(x+1)^2} = |x+1|$$

b) Dado $8 \in \operatorname{dom} f$, su imagen respecto a f es $\sqrt{8}$. En consecuencia, $8 \in \operatorname{dom} h$ y la imagen de $\sqrt{8}$ respecto a h es $h(\sqrt{8}) = -2\sqrt{8}$. Por lo tanto,

$$(h \circ f)(8) = h(f(8)) = -2(\sqrt{8})$$

c) Dado $-8 \in \operatorname{dom} h$. La imagen de -8 respecto a h es 16, el cual pertenece al dominio de f y su imagen respecto a f es $\sqrt{16} = 4$. En consecuencia, $4 \in \operatorname{dom} g$ y su imagen respecto a g es $(4+1)^2 = 25$. Por lo tanto,

$$(g \circ f \circ h)(-8) = g(f(h(-8))) = (\sqrt{-2(-8)} + 1)^2 = 25 \qquad \square$$

Resultado

Dada una función de variable real, encontrar su inversa.

Ilustración

1. Dadas las funciones: f de $(5,+\infty)$ en $(-2,+\infty)$ y g de $(-6,+\infty)$ en $\mathbb{R}$

   a)
   $$\begin{aligned} f\colon (5,+\infty) &\longrightarrow (-2,+\infty) \\ x &\longmapsto \frac{1}{x-5}-2 \end{aligned}$$

   b)
   $$\begin{aligned} g\colon (-6,+\infty) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto ln(x+6)-3 \end{aligned}$$

   obtener su función inversa.

   Respuesta.

   a) Dado $x \in \operatorname{dom} f$. Sea y la imagen de x respecto a f, es decir,

   $$y = \frac{1}{x-5}-2$$

   así, procedemos a expresar x en términos de y.

   $$\begin{aligned} &\equiv y+2 = \frac{1}{x-5} \\ &\equiv \frac{1}{y+2} = x-5 \\ &\equiv \frac{1}{y+2}+5 = x \\ &\equiv x = \frac{1}{y+2}+5 \end{aligned}$$

   Entonces, por la equivalencia lógica anterior, para todo $y \in \operatorname{rec} f = (-2,+\infty)$, existe un único elemento x perteneciente a $\operatorname{dom} f$. Y lo denotaremos como $f^{-1}(y)$, es decir,

   $$f^{-1}(y) = \frac{1}{y+2}+5$$

   Por lo tanto, la función inversa de f es

   $$\begin{aligned} f^{-1}\colon (-2,+\infty) &\longrightarrow (5,+\infty) \\ x &\longmapsto \frac{1}{x+2}+5 \end{aligned}$$

   b) Dado $x \in \operatorname{dom} g$. Sea y la imagen de x respecto a g, es decir,

$$y = g(x) = \ln(x+6) - 3$$

así, procedemos a expresar x en términos de y.

$$\begin{aligned}
&\equiv y + 3 = \ln(x+6)\\
&\equiv \mathrm{e}^{y+3} = \mathrm{e}^{\ln(x+6)}\\
&\equiv \mathrm{e}^{y+3} = (x+6)\\
&\equiv \mathrm{e}^{y+3} - 6 = x\\
&\equiv x = \mathrm{e}^{y+3} - 6
\end{aligned}$$

Entonces, por la equivalencia lógica anterior, para todo $y \in \operatorname{rec} g = \mathbb{R}$, existe un único elemento x perteneciente a $\operatorname{dom} f$. Y lo denotaremos como $f^{-1}(y)$, es decir,

$$f^{-1}(y) = \mathrm{e}^{y+3} - 6$$

$$\begin{aligned}
g^{-1}\colon \mathbb{R} &\longrightarrow (-6, +\infty)\\
x &\longmapsto \mathrm{e}^{x+3} - 6
\end{aligned}$$

$\square$

2. Indica si las funciones dadas son inversas.

a)

$$\begin{aligned}
g\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}\\
y &\longmapsto -y^5 - 3
\end{aligned} \quad \text{y} \quad \begin{aligned}
f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}\\
x &\longmapsto \sqrt[5]{-x-3}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
g\colon \mathbb{R} - \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R}\\
y \quad &\longmapsto \frac{4-y}{y}
\end{aligned} \quad \text{y} \quad \begin{aligned}
f\colon \mathbb{R} - \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R}\\
x \quad &\longmapsto \frac{4}{x}
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
g\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}\\
y &\longmapsto -10y + 5
\end{aligned} \quad \text{y} \quad \begin{aligned}
f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}\\
x &\longmapsto = \frac{x-5}{10}
\end{aligned}$$

Respuesta.

a) Si son inversas porque para todo $x \in \operatorname{dom} f$, $(g \circ f)(x) = x$, y para todo $y \in \operatorname{dom} g$, $(f \circ g)(y) = y$. Es decir, dados $x \in \operatorname{dom} f$ y $y \in \operatorname{dom} g$, obtenemos que

$$\begin{aligned}(g\circ f)(x) &= -(\sqrt[5]{-x-3})^5-3 \\ &= -(-x-3)-3 \\ &= x+3-3 \\ &= x\end{aligned} \qquad \begin{aligned}(f\circ g)(y) &= \sqrt[5]{-(-y^5-3)-3} \\ &= \sqrt[5]{y^5+3-3} \\ &= \sqrt[5]{y^5} \\ &= x\end{aligned}$$

b) No son inversas porque para todo elemento $x\in\operatorname{dom} f$, $(g\circ f)(x)\neq x$, y para todo $y\in\operatorname{dom} g$, $(f\circ g)(y)\neq y$. Es decir, dados $x\in\operatorname{dom} f$ y $y\in\operatorname{dom} g$, obtenemos que

$$\begin{aligned}(g\circ f)(x) &= \frac{4-\frac{4}{x}}{\frac{4}{x}} \\ &= \frac{\frac{4x-4}{\cancel{x}}}{\frac{4}{\cancel{x}}} \\ &= \frac{4(x-1)}{4} \\ &= x-1\end{aligned} \qquad \begin{aligned}(f\circ g)(y) &= \frac{4}{\frac{4-y}{y}} \\ &= \frac{4y}{4-y}\end{aligned}$$

c) No son inversas porque para todo elemento $x\in\operatorname{dom} f$, $(g\circ f)(x)\neq x$, y para todo $y\in\operatorname{dom} g$, $(f\circ g)(y)\neq y$. Es decir, dados $x\in\operatorname{dom} f$ y $y\in\operatorname{dom} g$, obtenemos que

$$\begin{aligned}(g\circ f)(x) &= -\cancel{10}\left(\frac{x-5}{\cancel{10}}\right)+5 \\ &= -x+5+5 \\ &= -x+10\end{aligned} \qquad \begin{aligned}(f\circ g)(y) &= \frac{(-10y+\cancel{5})-\cancel{5}}{10} \\ &= \frac{-\cancel{10}y}{\cancel{10}} \\ &= -y\end{aligned}$$

□

3. ¿Por qué restringimos el dominio de la función

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2\end{aligned}$$

para encontrar la inversa de la función?

Respuesta. La función $f\colon\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ sería invertible, si existiere una única función $g\colon\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, tal que para todo $x\in\mathbb{R}$ y todo $y\in\mathbb{R}$, es válido la equivalencia lógica

$$y = g(x) \equiv x = f(y).$$

y en tal caso, las equivalencias lógicas:

$$f(5) = 25 \equiv f^{-1}(25) = 5 \quad \text{y} \quad f(-5) = 25 \equiv f^{-1}(25) = -5$$

serían válidas, puesto que $f(5) = f(-5) = 25$. En consecuencia, de

$$f^{-1}(25) = 5 \quad \text{y} \quad f^{-1}(25) = -5$$

se obtiene que

$$5 = -5$$

Por lo tanto, la función $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ no puede tener una inversa. Sin embargo, si se restringe el dominio de la función de modo que para todo y elemento de $\operatorname{rec} f$, y sea imagen de un único elemento de $\operatorname{dom} f$. Así, esta nueva función sería invertible. $\square$

3.3. Conclusiones y recomendaciones

1. La formulación pertinente y suficiente de Resultados de Aprendizajes en la actividad curricular favorece la creación y el diseño más sistemático de módulos y programas, así como las actividades de enseñanza y evaluaciones, convirtiendo a los Resultados de Aprendizaje en un criterio enfocado en las actividades didácticas.

2. Tras el análisis de la descripción de temas y prerrequisitos de Cálculo Integral en una variable y Espacios Vectoriales con producto interno, podemos deducir que muchos de los contenidos de Geometría, y en menor medida el de Fundamentos de Matemáticas, no son utilizados y en muchos casos innecesarios. Los cursos actuales de Nivelación están centrados en cumplir con la exposición de contenidos y no para qué requieren los estudiantes tales conocimientos.

3. La formulación de Resultados de Aprendizaje permite establecer estándares mínimos reales para los estudiantes, y son propuestos con ese fin.

4. Los Resultados de Aprendizaje propuestos y sus ilustraciones buscan en primera instancia conocer las definiciones de los principales conceptos, para luego identificar el uso de un concepto, aplicación de un axioma o teorema, en la solución de un determinado problema y, finalmente, aplicar un concepto, teorema o axioma en la solución de problemas o la deducción de propiedades.

Con base a los resultados obtenidos en el presente trabajo y al aporte bibliográfico, se recomienda:

1. La organización de contenidos sobre Números Naturales, Concepto General de Función y Función de Variable Real bajo el principio de enseñar lo necesario, facultando un adecuado desenvolvimiento del estudiante, sin exceso de contenidos, focalizándose únicamente en los temas relevantes de estudio.
2. Tanto los resultados de aprendizaje como la descripción de prerrequisitos de los capítulos “Cálculo Integral en una variable” y “Espacios vectoriales con producto escalar” servirían como punto de partida para la elaboración de Programas de Estudios por Asignatura (PEA) utilizando metodologías enfocadas en los resultados o logros, y constituyendo a los RA en ejes de metas a lograr.

Capítulo 4

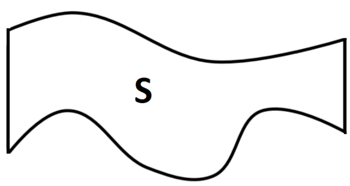
Anexos

4.1. Descripción de Cálculo Integral

El propósito de este tema es ofrecer una herramienta que, entre otras cosas, permite resolver problemas relacionados con el cálculo de áreas y volúmenes, longitudes, trabajo mecánico, momentos, etcétera. A continuación, veamos algunos de estos problemas.

1. **Área de figuras planas**

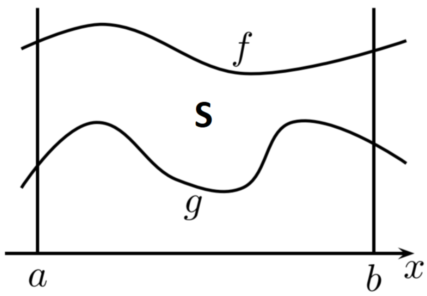
   Consideremos una superficie plana S delimitada por dos curvas y dos rectas, como se muestra en la siguiente figura:

   Queremos encontrar el área de esta superficie. El método para ello consiste en encontrar dos funciones $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, continuas, de forma que $0 \leq f \leq g$; es decir, $0 \leq f(x) \leq x \leq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, y el conjunto

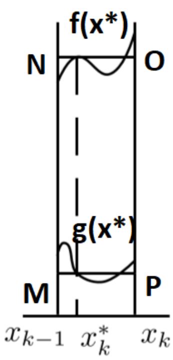
$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b] \wedge f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

es congruente con la figura plana S.



Si $A(S)$ representa el área de esta figura, la herramienta para el cálculo de A es el concepto de **integral de Riemann**.

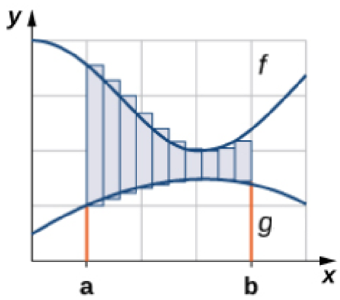
En efecto, dada una partición $\mathcal{P} = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b\}$ de $[a, b]$, con $x_k > x_{k-1}$, y también, sea $\Delta x_k = [x_k - x_{k-1}]$ y $x_k^* \in [x_k, x_{k-1}]$. Ahora, definamos una *sub-región*, S_k, como los puntos (x, y) delimitados por las gráficas f y g, y las rectas $x = x_k$ y $x = x_{k-1}$ para todo $1 \leq k \leq n$. Aproximando el valor del área de S_k con un rectángulo R_k, definido por los puntos $M = (x_{k-1}, g(x^*)), N = (x_{k-1}, f(x^*)), O = (x_{k-1}, f(x^*))$ y $P = (x_k, g(x^*))$, tal como se muestra en la figura siguiente. De lo anterior, el área del rectángulo R_k esta dado por $A(R_k) = |f(x^*) - g(x^*)|\, \Delta_k$.



Por tanto, el área aproximada de toda la región S viene dada por:

$$A(S) \approx \sum_{k=1}^{n} A(R_k)$$
$$A \approx \sum_{k=1}^{n} |f(x^*) - g(x^*)| \, \Delta x_k$$

Esta suma es llamada suma de Riemann. Observe la gráfica a continuación para una representación de esta aproximación.



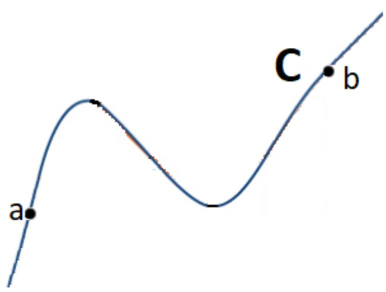
Si además, definimos $\|\mathcal{P}\| = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta x_k$, el valor al cual converge la suma de Riemann, cuando $\|\mathcal{P}\|$ tiende a cero, se lo define como:

$$A(S) = \int_a^b [g(x) - f(x)]dx$$

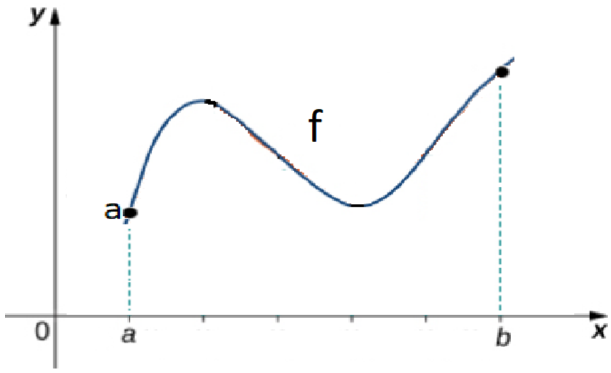
Adicionalmente, notemos que la existencia de este límite solo esta condicionado a que $\|\mathcal{P}\|$ tienda a cero, es decir, sin importar la elección de los valores de x_k y x_k^*. En la sección siguiente, se estudia bajo que condiciones el valor $\int_a^b f(x)dx$ existe, y así garantizar su existencia.

2. **Longitud de arco de una curva**

Dada una curva C, queremos hallar la longitud del segmento de C entre los puntos a y b:



El método para ello consiste en encontrar una función continua $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de forma que su gráfica sea equivalente a la curva C, es decir, $C = \{(x,y) : y = f(x)$ y $x \in [a,b]\}$.



La gráfica de la función se define de la siguiente manera

$$f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, y = f(x)\right\}$$

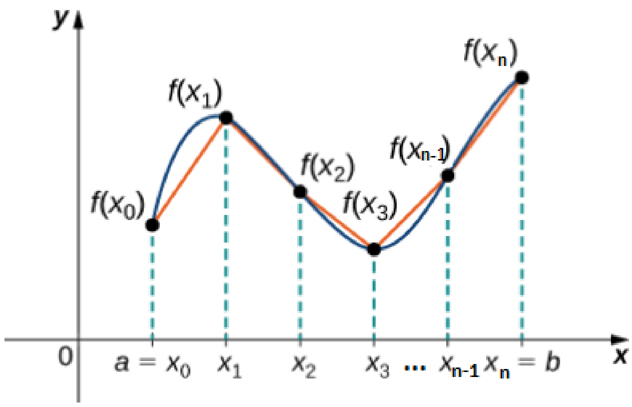
El problema de hallar la longitud se su gráfica, se conoce como un problema de **longitud de arco de una curva**. Se asume que la función es derivable en (a,b) y continua en $[a,b]$. Para la resolución de este problema se recurre una vez más al concepto de integral de Riemann. Iniciamos dividiendo la gráfica de f es sub-gráficas más pequeñas, mediante la partición $\mathcal{P} = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b\}$ de $[a,b]$, de la siguiente forma:

$$f_k = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x_{k-1} \leq x \leq x_k, y = f(x)\right\}$$

para todo $1 \leq k \leq n$. Aproximando cada sub-gráfica con la cuerda c_k que une los puntos $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$, y $(x_k, f(x_k))$ obtenemos la siguiente aproximación

$$longitud(c_k) \approx \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}, \text{ con } \Delta y_k = y_k - y_{k-1} \tag{4.1}$$

Observe la gráfica dada a continuación para visualizar las aproximaciones de cada sub-gráfica



Por el teorema del valor medio, sabemos que existe un $x_k^* \in [x_{k-1}, x_k]$ tal que

$$\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k} = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{\Delta x_k} = f'(x_k^*), \tag{4.2}$$

Con el resultado anterior y el remplazo de Δy_k en la ecuación (4.1), concluimos que la longitud de la sub-gráfica f_k se puede aproximar mediante su derivada en un punto dentro del intervalo $[x_k, x_{k-1}]$, quedando su aproximación de la siguiente forma:

$$longitud(f_k) \approx \sqrt{1 + [f'(x_k^*)]^2}\Delta x_k$$

De aquí, ya podemos aproximar toda la longitud de la gráfica de f mediante una suma de Riemann

$$longitud(f) \approx \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(x_k^*)]^2}\Delta x_k$$

Finalmente, el valor al cual converge la suma de Riemann, se lo define con $\int_a^a \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx$ cuando Δx_k tiende a cero. Es decir,

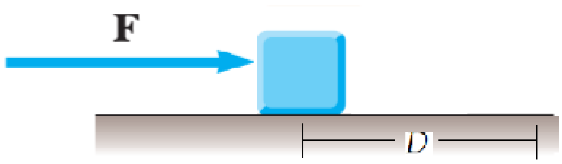
$$longitud(f) = \int_a^a \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx$$

Como se menciono anteriormente, la existencia de este límite solo esta condicionado a que los valores Δx_k tiendan a cero, sin importar la elección de los valores de x_k y x_k^*.

3. **Trabajo Mecánico**

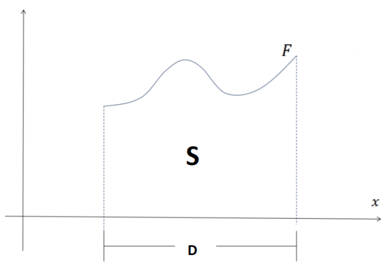
Una aplicación del concepto de integral a la Física es la modelización del concepto **trabajo mecánico**. Cuando una fuerza constante actúa sobre un cuerpo que se mueve en línea recta, del punto a al punto b, y esta fuerza actúa en la misma dirección y sentido, el trabajo realizado por la fuerza se define por:

$$W = FD$$



Donde, W representa el trabajo, F la fuerza aplicado en el objeto y D la distancia recorrida por el objeto [4]. Pero, si la fuerza es variable, el método para ello consiste en encontrar una función $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ cuya imagen correspondan a los valores de la fuerza aplicada al objeto en cada posición. Así, $F(x)$ representa la fuerza aplicada a un objeto en la posición x a lo largo del intervalo $[a, b]$.

Resolver este problema implica calcular el área de una superficie, pues el trabajo realizado por la fuerza coincide con el valor del área de la región $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, y \leq F(x)\}$, es decir, el trabajo es dada por $W = A(S)$.



Por lo tanto, la aproximación del trabajo mediante sumas de Riemann esta dada por:

$$W \approx \sum_{k=1}^{n} F(x_k^*) \Delta x_k$$

el cual converge al valor $\int_a^b F(x)dx$, cuando el grosor Δx_k de la partición tiende a cero.

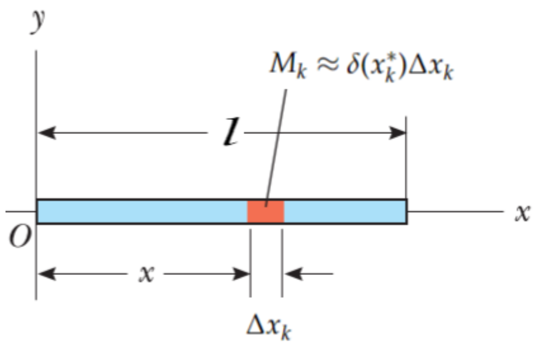
4. **Centros de Masa**

   Otro problema presente en la física es determinar el movimiento global de un sistema en términos de un punto particular llamado el **centro de masa** del sistema. Este punto es determinado por la posición promedio de todos los objetos de un sistema, ponderados acorde a sus masas. Este concepto es importante para establecer una equivalencia entre el comportamiento de un sistema completo de objetos y el comportamiento del centro de masa del sistema. Ejemplo, para el cálculo del centro de masa de una barra de longitud l, cuyo material no es homogéneo, y su densidad longitudinal está definida por la función continua:

$$\begin{aligned} \delta : [0, l] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \delta(x) \end{aligned}$$

   Es decir, $\delta(x)$ es la densidad del punto $x \in [0, l]$. Para resolver este problema se recurre al concepto de integral de Riemann y se inicia calculando la masa total del la barra. En efecto, definamos la partición $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[0, l]$. De aquí, aproximaremos la masa de cada sub-segmento $\Delta x_k = [x_{k-1}, x_k]$, como si este fuera de densidad homogéneo con una densidad correspondiente a un punto $x_k^* \in [x_{k-1}, x_k]$. Denotemos M_k como la masa de este segmento. De aquí, se obtiene que

$$M_k \approx \delta(x_k^*)\Delta x_k$$



De todo lo anterior, ya podemos aproximar toda la masa M de la barra mediante una suma de Riemann.

$$M_k \approx \sum_{k=1}^{n} \delta(x_k^*)\Delta x_k$$

Esta suma converge al valor $\int_0^l \delta(x)dx$. Así también, la aproximación del momento de un segmento de barra queda expresada como

$$Mo_k \approx \sum_{k=1}^{n} M_k x_k$$

y la aproximación del momento total Mo quedaría como

$$Mo \approx \sum_{k=1}^{n} M_k x_k$$

La anterior suma converge a

$$Mo = \int_0^l \delta(x)xdx$$

En este punto, con estas definiciones, somos capaces de llegar a calcular el centro de masa de la barra, expresada de la siguiente forma

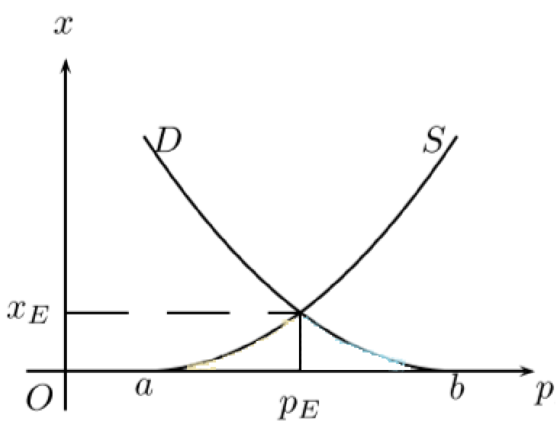
$$\bar{x} = \frac{\int_0^l \delta(x)xdx}{\int_0^l \delta(x)dx}$$

Las sumas de Riemann que aproximan el valor de la Masa y el momento convergen cuando el grosor $\|\mathcal{P}\| = \max_{1\leq k\leq n} \Delta x_k$ de la partición tiende a cero. También, la existencia de este límite solo esta condicionado a que $\|\mathcal{P}\|$ tienda a cero, sin importar la elección de los valores de x_k y x_k^*.

Además, mediante el uso de la integral definida podemos calcular magnitudes como el momentos de inercia, campo eléctrico, el flujo de un fluido a través de una superficie entre otras.

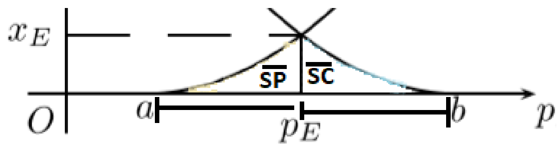
5. **Aplicaciones a la Economía**

En Economía y Administración, existen dos funciones que se utilizan para estudiar y analizar situaciones de mercado, estas funciones son llamadas *función de oferta* y *función de demanda*. La función de oferta representa la relación entre las cantidades de un bien que una empresa esta dispuesta a ofrecer en el mercado, y el precio de mercado de ese bien. Su representación gráfica resulta en una curva con pendiente positiva, ilustrando que cuando mayor sea el precio del bien, mayor es la cantidad de bienes que la empresa esta dispuesto a producir y vender. Por otro lado, la función demanda representa la relación entre la cantidad demandada de un bien, y su precio de mercado. La curva resultante tiene pendiente negativa, interpretándose que cuanto mayor es el precio del bien, menor es la cantidad demandada. Así, dado para cada $p \in [a, b]$, existe una demanda de $D(p)$ unidades y una oferta de $S(p)$ unidades. Supondremos que estas funciones son continuas y ,por lo dicho anteriormente, $D : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función decreciente, y $S : [a, b] \to \mathbb{R}$ es decreciente. El punto (p_E, x_E), tal que $S(p_E) = D(p_E) = x_E$, es llamado *punto de equilibrio*, particularmente p_E es llamado *precio de equilibrio*. En la figura de abajo se ilustra las curvas de las funciones $S(p)$ y $D(p)$, y el punto de equilibrio dada por la intersección de estas dos curvas.



Si el precio de un bien coincide con el precio de equilibrio, según los economistas, se produce una ganancia tanto para los consumidores como para la empresa. Por tanto, Si la empresa estaba dispuesta a vender un bien a precios menores que p_E, salen beneficiados.

De la misma manera, si los consumidores que hubieren adquirido el bien a un precio superior a p_E también saldrían beneficiados. De aquí, el dinero total que la empresa recibe por arriba del precio al que estaban dispuesto a vender,se define como *superávit de productor (SP)*, y la cantidad total de dinero que ahorra el sector de consumidores por no pagar por un bien con un precio superior al punto de equilibrio, se lo define como *superávit del consumidor (SC)*. Entonces, el SP viene definido como el área de la región $\bar{SP} = \{(p, x)|p \in [p_E, b], x = SP(p)\}$ y SC viene definido por el área de la región $\bar{SC} = \{(p, x)|p \in [a, p_E], x = SC(p)\}$, como se ilustra en la figura a continuación.



Como se observa, determinar los valores de SP y SC requiere hallar el área de estas dos regiones, y por tanto, recurrimos nuevamente al concepto de integral de Riemann. Así, sus aproximaciones mediante sumas de Riemann quedarían planteadas como:

$$SP \approx \sum_{k=1}^{n} S(p_k^*)\Delta p_k,$$
$$SC \approx \sum_{k=1}^{n} D(p_k^*)\Delta p_k$$

para dos particiones $\mathcal{P}_{sp} = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = p_E\}$ y $\mathcal{P}_{sc} = \{x_0 = p_E, x_1, \ldots, x_n = b\}$, con $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ y $x^* \in [x_k, x_{k-1}]$, y cuyos límites se definen de la siguiente manera:

$$SP = \int_{a}^{p_E} S(p)dp,$$
$$SC = \int_{p_E}^{b} D(p)dp$$

4.1.1. Integral

Se define el concepto de **función integrable según Riemann** para lo cual se definen inicialmente los conceptos de *partición* y *sumas de Riemann.*

> *Si* $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ *es un intervalo acotado y cerrado, entonces una* ***partición*** *de* I *es un conjunto finito y ordenado de puntos en* I *tal que*
>
> $$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_{n-1} \leq x_n$$
>
> *La partición es representada por* $\mathcal{P} = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b\}$*. Los puntos que componen* $\mathcal{P}$ *son usados para dividir el intervalo* $I = [a, b]$ *en subintervalos disjuntos de la forma:*
>
> $$I_1 = [x_0, x_1], \quad I_2 = [x_1, x_2], \quad ..., \quad I_n = [x_{n-1}, x_n].$$

Adicionalmente, se define la **norma de la partición** $\mathcal{P}$ como el número

$$\|\mathcal{P}\| = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta x_k$$

donde $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Con las definiciones anteriores, inmediatamente se define la **suma de Riemann**.

> *Dada una* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *y una partición* $\mathcal{P} = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b\}$*, la suma de Riemann se expresa como:*
>
> $$S(f, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} f\left(x_k^*\right) \Delta x_k, \quad x_k^* \in I_k$$

Así, una función $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice que es **Riemann integrable** en $[a, b]$ si para cualquier elección de $\mathcal{P}$ y cualquier elección de x_k^*, existe un número $L \in \mathbb{R}$ tal que

$$L = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f\left(x_k^*\right) \Delta x_k$$

Se determina que este límite es único y se lo llama **integral de Riemann** bajo $[a, b]$. A este límite también se lo denota como $\int_a^b f$ o $\int f$. Además, la **integral definida** se define como $\int_a^b f(x)dx = L$

A continuación, se presentan varios ejercicios sobre el cálculo de la integral de Riemann de funciones simples mediante su definición. Los ejemplos tradicionales son:

- Sea $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ constante, $f(x) = c$ para todo $x \in [a, b]$. Entonces, para cualquier partición $\mathcal{P}$, tenemos que $x_k^* = c$. Por lo tanto,

$$\int_a^b f(x)dx = c(b-a)$$

- Dada $f\colon [0, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$. El cálculo de la integral inicia con la selección de una partición que define los subintervalos $\left[\frac{2(i-1)}{n}, \frac{ni}{n}\right]$, $i = 1, 2, 3, ..., n$. Por lo tanto,

$$S(f, P) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i = \frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{2(n+1)}{n}$$

De la suma anterior, concluimos que

$$\int_0^2 f = \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)}{n} = 2$$

En este punto se establece la siguiente condición necesaria para que una función sea Riemann integrable

Si f es Riemann integrable, entonces f es acotado en $[a, b]$

Adicionalmente, se presenta las condiciones para garantizar que una función sea Riemann Integrable

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función real definida en un intervalo $[a, b]$. Entonces f es Riemann integrable en $[a, b]$ si se cumple una de las siguientes propiedades:

1. *f es continua en $[a, b]$.*
2. *f es monótona en $[a, b]$.*

3. *af es acotada en $[a,b]$ y es continua en $[a,b]$, salvo en un número finito de puntos.*

Mediante la definición de integral y los teorema anterior se demuestra la integral de una constante, la integral de una función multiplicada por una constante, la integral de la suma de dos funciones, conocida como la *aditividad respecto a funciones*, y la *linealidad de la integral* que engloba todas las propiedades anteriores.

1. $\displaystyle\int_a^b \alpha dx = \alpha(b-a)$
2. αf es Riemann-integrable en $[a,b]$ y

$$\int_a^b (\alpha f)(x)dx = \int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx. \quad \text{(homogeneidad)}$$

3. $f+g$ es Riemann-integrable en $[a,b]$ y

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

4. $\alpha f + \beta g$ es Riemann-integrable en $[a,b]$ y

$$\int_a^b (\alpha f+\beta g)(x)dx = \int_a^b [\alpha f(x)+\beta g(x)]dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

linealidad de la integral definida

A continuación, se demuestran varios teoremas que permitirán dar solución a varios problemas de aplicación. Una de ellas es la positividad de la integral definida, la cual establece que la integral de una función positiva es también positiva. Es decir

Dada una función integrable $f(x) \geq 0$ para cada $x \in [a,b]$ y si la función es positiva en un punto del intervalo, es decir, si f es continua en el punto $c \in [a,b]$ tal que $f(c) > 0$, entonces $\int_a^b f(x)dx > 0$

Este teorema es fundamental para definir el área de una región mediante la integral de Riemann. Además, se deduce el teorema del *valor* *medio para integrales*, el cual permite asegurar que una función continua en un intervalo alcanza su valor promedio al menos en un punto del intervalo. El teorema se muestra a continuación

Dada una función continua $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, existe al menos un punto $c \in [a,b]$, que cumple con

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$$

Posteriormente, haciendo uso de la linealidad de la integral se deduce la conservación del orden de la integral y la aditividad de la integral respecto a intervalos.

Sean $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ y $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ dos funciones Riemann-integrables en $[a,b], a_1, b_1$, $c_1 \in [a,b]$. Entonces

1. *f es integrable en cualquier intervalo de extremos en $\{a_1, b_1, c_1\}$. Además*

$$\int_{a_1}^{c_1} f(x)dx = \int_{a_1}^{b_1} f(x)dx + \int_{b_1}^{c_1} f(x)dx. \quad \textit{(aditividad respecto a intervalos)}$$

2. *Si para todo $x \in [a,b], f(x) \leq g(x)$, entonces $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$. (monotonía de la integral)*
3. *Si $|f|$ es integrable, entonces f también lo es y $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.*

Las propiedades anteriores son útiles para el cálculo del valor de integrales de funciones continuas definidas a trozos.

Adicionalmente, se demuestra la integral en un punto.

Dada una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ para $a \leq b$, la integra definida en el intervalo $[a,b]$ en el caso que $a = b$ esta dada por:

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

A continuación, se demuestra que para estudiar la integrabilidad de una función se puede modificar los valores de dicha función para un conjunto finito de puntos, y que esta modificación no afecta en nada a su integrabilidad ni el valor de su integral.

> *Sea f y g dos funciones que coinciden en todos los puntos de un intervalo $[a, b]$, excepto en un número finito de ellos. Entonces se verifica que f es integrable en $[a, b]$ si, y sólo si, g es integrable en $[a, b]$, en cuyo caso se verifica que las integrales en $[a, b]$ de ambas funciones coinciden.*

En este punto, nos encontramos con el problema de calcular el valor $\int_a^b f(x)dx$. Calcular este valor mediante la definición es en extremo complejo. Newton y Leibniz demostraron que estudiar el área de una región definida por funciones estaba estrechamente relacionada con la derivada, y resultado que la integral es la operación inversa a la derivación [3]. En efecto, este resultado nos permite obtener el valor de integrales definidas calculando únicamente una función $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$ y luego evaluarlas en los límites de integración. Es decir

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)dx$$

donde la función F se denomina *primitiva* o *antiderivada*. El resultado anterior engloba los dos teoremas más importantes del cálculo, denominados **Teoremas Fundamentales del Cálculo**.

Se demuestra el primer teorema fundamental del cálculo, el cual es útil para invertir el proceso que nos llevó de f a F.

> ***Teorema Fundamental del Cálculo I (TFC1)***. *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua y si $A(x) = \int_a^x f(t)dt$, entonces $A' = f$ y para todo $x \in]a, b[$*
>
> $$A'(x) = f(x)$$

Se demuestra el segundo teorema Fundamental del Cálculo:

> ***Teorema Fundamental del Cálculo II (TFC2)*** *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua y si $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una primitiva de f (es decir,*

$F' = f$), entonces

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Este teorema es útil para calcular la integral definida de la función f en un intervalo $[a, b]$.

Equivalencias de los teoremas fundamentales del cálculo

$$TFCI \Longleftrightarrow TFCII$$

Adicionalmente, se demuestra la equivalencia de los teoremas fundamentales del cálculo.

Posteriormente, se establece la definición de integral indefinida. Dada una función real f definida en un intervalo I, una **primitiva de** f es una función F tal que $F' = f$. Al conjunto de todas las funciones primitivas se le representa por

$$\int f = \{F + C : C \in \mathbb{R}\}$$

y F es una primitiva cualquiera de f. y cualquier elemento de este conjunto es de la forma

$$F + C,$$

donde F es una primitiva de F y C es un número real.

El símbolo $\int$ se lee “integral de” y se concluye que

$$\int dF = F + C \quad \text{y} \quad d\int f = f$$

De la definición anterior se demuestra la suma algebraica de funciones y multiplicación de una función por un escalar bajo una integral indefinida. A partir de aquí, se obtiene una lista amplia de primitivas a partir de las fórmulas de derivadas. Por ejemplo, de

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Además, surge la necesidad de calcular las primitivas de funciones más complejas, y para tal propósito se establecen varias técnicas que facilitan este trabajo. Las técnicas más importantes, de las cuales se derivan muchas otras, son el *cambio de variable* y *la Integración por partes*.

Se deduce el método de cambio de variable, el cual establece que dada dos funciones F y g tal que $F : J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, u \mapsto F(u)$, y sea H la composición de F y g, mediante el uso de la regla de la cadena se demuestra que

$$\int f(g)g' = \int F'(g)g' = \int d(F(g)) = F(g) + C$$

También, se establece la *fórmula de integración por partes*. Dada G y H obtenemos que

$$\int G(x)H'(x)dx = G(x)H(x) - \int H(x)G'(x)dx$$

Por otro lado, los métodos de integración equivalentes para el caso de la integral definida están dados por:

1. $\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$, y
2. $\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$

Para la integración de funciones racionales se establece el método de **reducción a fracciones parciales**, y si el denominador tiene raíces múltiples, se establece la fórmula de Ostrogradski.

En este punto, con los métodos de integración y mediante el uso de tablas de integración, somos capaces de calcular la integral de una gran variedad de funciones, incluyendo integrales de potencias de sen, cos, sec y tan.

$$\int cos^m(x)sen^n(x)dx; \quad m, n \in \mathbb{Q}.$$

$$\int sec^m(x)tan^n(x)dx; \quad m, n \in \mathbb{Q}.$$

Por otra parte, mediante el uso de sustituciones trigonométricas:

$$\cos^2\theta = 1 - \operatorname{sen}^2\theta$$

$$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta \quad \text{o} \quad \tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$$

podemos integrar funciones que contengan expresiones de la forma:

$$\sqrt{a^2 - x^2}, \sqrt{a^2 + x^2} \quad \text{o} \quad \sqrt{x^2 - a^2},$$

con $a > 0$.

4.2. Descripción de Espacios con producto escalar

Se estudia en primer lugar la definición de producto interno, herramienta que se usará para definir el concepto de distancia y ángulo entre vectores en espacios vectoriales de dimensión finita sobre el cuerpo de los reales ($\mathbb{R}$). Posteriormente, se estudian las listas ortogonales y ortonormales, bases ortonormales y su caracterización para determinar los escalares de una combinación lineal. Además, se presenta aplicaciones de la proyección ortogonal para resolver problemas de minimización.

4.2.1. Producto interno o escalar

Se inicia con la definición del concepto de producto interno:

> *Un **producto interno** en u es una aplicación que toma dos elementos de v y le asigna un número real $\langle u, v\rangle \in \mathbb{R}$ y tiene las siguientes propiedades: Dada $u, v, w \in V$ y $\lambda \in \mathbb{R}$*
>
> - $\langle u, v\rangle \geq 0$

- $\langle u,u\rangle$ *si sólo si* $u=0$
- $\langle u+v,w\rangle = \langle u,w\rangle + \langle v,w\rangle$
- $\langle \lambda u,v\rangle = \lambda\langle u,v\rangle$
- $\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle$

donde $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ *y* $y=(y_1,y_2,...,y_n)$

En efecto, un **espacio de producto interno** se define como un espacio vectorial V, junto a un producto interno $\langle,\rangle : V\times V\to\mathbb{R}$. En adelante se hará referencia a V como un espacio de producto interno, salvo que se diga lo contrario.

Después, se muestran algunos ejemplos de aplicaciones que cumplen con los axiomas de producto interno:

- Un producto interno del espacio vectorial formado por funciones continuas en el intervalo $[-1,1]$ esta dado por

$$\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$

- El producto interno euclídeo en R^n es definido por

$$\langle (w_1,\ldots,w_n),(z_1,\ldots,z_n)\rangle = w_1z_1+\cdots+w_nz_n.$$

Inmediatamente, se deducen varias propiedades derivadas de la definición de producto interno.

- $\langle 0,u\rangle = 0$ *para todo* $u\in V$
- $\langle u,0\rangle = 0$ *para todo* $u\in V$
- $\langle u,v+w\rangle = \langle u,v\rangle + \langle u,w\rangle$ *para todo* $u,v,w\in V$
- $\langle u,\lambda v\rangle = \lambda\langle u,v\rangle$ *para todo* $\lambda\in\mathbb{R}$ *y* $u,v\in R$

También, se define la norma de un vector en términos del producto internos. Es decir, $\|x\| = \sqrt{\langle u,u\rangle}$ para todo $u\in\mathbb{R}$. De aquí, se obtiene algunas propiedades básicas de la norma. Dada $v\in V$

- $\|v\|=0$ si y solo si $v=0$

- $\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$

A partir de aquí, se extiende el concepto de vectores ortogonales. Así, dos vectores $u, v \in V$ son llamados ortogonales si $\langle u, v\rangle$ =0. En consecuencia, se demuestra que dos vectores en $\mathbb{R}^2$ son ortogonales si y solo si el coseno del ángulo entre ellos es cero, es decir, dado $u, v \in \mathbb{R}^2$ se obtiene que

$$\langle u, v\rangle = \|u\|\|v\| \cos\theta$$

donde θ es el ángulo entre u y v.

Adicionalmente, se establece la **descomposición ortogonal** de vectores, es decir, dado un vector $u \in V$, se le puede definir como la suma de un múltiplo escalar de $v \in V$ y un vector w ortogonal a v.

En este punto, con estas definiciones se demuestra el *teorema de Pitagóricas*, la *desigualdad de Cauchy-Schwarz*, la *desigualdad triangular* y la *ecuación del paralelograma.*

Dada $u, v \in V$

- *Suponiendo que* u, v *son ortogonales.*

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

- $|\langle u, v\rangle| = \|u\|\|v\|$
- $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$
- $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$

A continuación, se define las listas ortogonales, las cuales se usaran para definir una base ortonormal, Así:

Dada una lista $e_1, e_2, ..., e_m$ *de vectores en* V *es ortonormal si*

$$\langle e_j, e_k\rangle = \begin{cases} 1 & \textit{if } j = k, \\ 0 & \textit{if } j \neq k. \end{cases}$$

mediante el teorema de Pitágoras se demuestra que dada una lista ortonormal $e_1, e_2, ..., e_m$ en V y para todo $a_1, a_2, ..., a_m \in \mathbb{R}$, entonces

$$\|a_1e_1, a_2e_2, ..., a_me_m\|^2 = |a_1|^2 + ... + |a_m|^2$$

A partir del resultado anterior, se demuestra que toda lista ortonormal es linealmente independiente.

En este punto, una **base ortonormal** se define como una lista de vectores ortonormales en V que además es una base de V. Inmediatamente, se demuestra que toda lista ortonormal de vectores en V con longitud $dimV$ es una base ortonormal de V.

Dada una base $e_1, e_2, ..., e_m$ de V y un vector $v \in V$, se sabe que existen escalares $a_1, a_2, .., a_m \in \mathbb{R}$ tal que

$$v = a_1e_1 + ... + a_me_m$$

Hallar los escalares requiere la solución de un sistema de ecuaciones. Pero, si la base fuera ortonormal bastaría con definir los $a_j = \langle v, e_j \rangle$ para todo $j = 1, 2, ..m$.

Dada una base ortonormal de V y $v \in V$. Entonces

$$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + ... + \langle v, e_m \rangle e_m$$

En este punto, ya se conoce la utilidad de las bases ortonormales y surge la necesidad de encontrar métodos eficientes para la obtención de estas bases. Así, se establece el **procedimiento de Gram-Schmidt** que permite obtener una base ortogonal a partir de una lista de vectores independientes.

Suponga $v_1, \ldots, v_m$ es una lista linealmente independiente en V. Sea $e_1 = v_1 / \|v_1\|$. para $j = 2, \ldots, m$, definir e_j inducido por

$$e_j = \frac{v_j - \langle v_j, e_1 \rangle e_1 - \cdots - \langle v_j, e_{j-1} \rangle e_{j-1}}{\|v_j - \langle v_j, e_1 \rangle e_1 - \cdots - \langle v_j, e_{j-1} \rangle e_{j-1}\|}$$

Entonces, $e_1, \ldots, e_m$ es una lista ortonormal de vectores en V tal que

$$\operatorname{span}(v_1, \ldots, v_j) = \operatorname{span}(e_1, \ldots, e_j)$$

para $j = 1, \ldots, m$.

El siguiente teorema nos asegura la existencia de una base ortonormal

> Todo espacio de producto interno con dimensión finita tienen una base ortonormal.

Uno de los problemas que requiere el uso de espacios vectoriales con producto interno es la **proyección ortogonal**. Este problema trata de: dado un vector $x \in V$, elemento de un espacio con producto interno V, y dado un subespacio vectorial U, de V, se busca la proyección ortogonal de x sobre U. Se demostrará que este problema tiene solución única.

Para el estudio de este problema se desarrolla el concepto de **complementos ortogonales**. Así, el complemento ortogonal se define como:

> *Si U es un subespacio de V, entonces el complemento ortogonal de U, denotado $U^{\perp}$,es el conjunto de todos los vectores en V que son ortogonales para todo vector en U:*

$$U^{\perp} = \{v \in V : \langle v, u \rangle = 0 \text{ para todo } u \in U\}$$

de la definición se deduce las siguientes propiedades:

- Si U es un subconjunto de V, entonces $U^{\perp}$ es un subespacio de V.
- $\{0\}^{\perp} = V$
- $\{V\}^{\perp} = 0$
- Si U es un subconjunto de V, entonces $U \cap U^{\perp} \subset \{0\}$
- Si U y W son subconjuntos de V y $U \subset W$, entonces $W^{\perp} \subset U^{\perp}$

Para demostrar un resultado importante sobre los complementos ortogonales se define el concepto de *suma directa* ($\oplus$). De la definición de suma directa y las propiedades de complementos ortogonales deducimos que un espacio vectorial con producto interno V es igual la suma directa de un subespacio U de V y su complemento ortogonal $U^{\perp}$, es decir,

$V = U \oplus U^{\perp}$. Un resultado importante como consecuencia de esto es que $U = (U^{\perp})^{\perp}$. Luego, se demuestra que dado un espacio vectorial con producto interno V y un subespacio U, la dimensión de V viene dada por

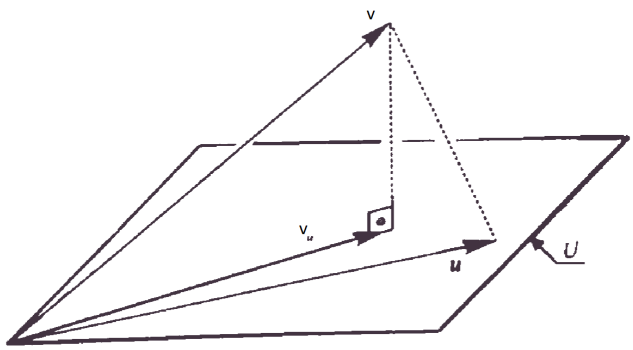
$$\dim V = \dim U + \dim U^{\perp}$$

En este punto, con estas definiciones, somos capaces de precisar el concepto de proyección ortogonal. Así,

> *Supongamos U es un subespacio de V. La proyección ortogonal de V sobre U es el operador $P_U \in \mathcal{L}(V)$ definido como: Para todo $v \in V$, se escribe $v = u + w$, donde $u \in U$ y $w \in U^{\perp}$. Entonces $P_U v = u$.*

Se demuestra que cada $v \in V$ puede ser únicamente escrito en la forma $v = u + w$ con $u \in U$ y $w \in U^{\perp}$

La proyección ortogonal nos permite dar solución a varios problemas de minimización. Ejemplo, Dado un subespacio U de V y un punto $v \in V$, se desea encontrar un punto en $u \in U$ tal que $\|v - u\|$ sea tan pequeño como sea posible.



El siguiente teorema demuestra que este problema de minimización es resuelto al tomar $u = P_U v$.

> ***Minimizando la distancia a un subespacio**. Suponga que U es un subespacio de V, $v \in V$, y $u \in U$. Entonces,*

$$\|v - P_U v\| \leq \|v - u\|$$

Por lo tanto, la inecuación de arriba es una igualdad si y solo si $u = P_U v$.

4.3. Identificación de prerrequisitos

4.3.1. De Fundamentos para Cálculo Integral

Conjuntos

El concepto de conjunto, subconjunto y pertenencia es muy usado en las aplicaciones de la integral para definir los conceptos de gráfica y regiones de funciones:

- Gráfico de una función

$$\text{Gráfico de } f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I, y = f(x)\right\}$$

- Regiones delimitadas por curvas:

$$\text{Región de } f = \{(x,y)|f(x) \leq y \leq g(x), x \in I\}$$

- Gráfica de un semi-círculo de radio R:

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -R \leq x \leq R, 0 \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2}\right\}$$

También, en la definición de la integral indefinida y para indicar el dominio y el rango de una función:

- Integral indefinida:

$$\int f = \{F + C : C \in \mathbb{R}\}$$

- Dominio de una función:

$$\begin{aligned} f\colon A &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sqrt{\tfrac{x+4}{x^2-5x+6}}, \end{aligned}$$

  donde $A = [-4,2) \cup (3,\infty)$.

Números Reales

Las propiedades de los números reales es fundamental para la definición de Integral definida, pues esta se basa en las sumas de Riemann y la integral de Riemann. La integral definida es un número real y, para llegar a su definición, se recurre a las propiedades de cuerpo de los números reales:

$$\sum_{k=1}^{n} f\left(x_k^*\right) \Delta x_k$$

Para deducir la propiedad de *monotonía de la integral*

si $x \in [a, b]$ ***con*** $f(x) \leq g(x)$, ***entonces*** $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$,

se recurre a las propiedades de orden de los reales.

Para la deducción de

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx,$$

se recurre al uso de las propiedades de *valor absoluto*.

Expresiones Algebraicas

Las propiedades de aditividad y linealidad de la integral, requieren la aplicación de signos de agrupación, propiedad distributiva, asociativa y conmutativas de los números reales.

$$\int \alpha(f(x) + g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \alpha \int g(x)dx$$

Así también, las expresiones algebraicas son usadas para la deducción de los métodos de integración y en sus aplicaciones, pues son requeridas para la simplificación de expresiones complejas a otras más simples.

Por ejemplo, al calcular la longitud de la curva $y = \frac{x^4+48}{24x}$ donde $2 \leqslant x \leqslant 4$. Para ello, hay que calcular la integral:

$$\int_2^4 \sqrt{1 + y'(x)^2}\ \mathrm{d}x = \int_2^4 \sqrt{1 + \left(\frac{x^4 - 16}{8x^2}\right)^2}\ \mathrm{d}x = \int_2^4 \frac{x^4 + 16}{8x^2}\ \mathrm{d}x = \frac{17}{6}.$$

Para su solución se tuvo que eliminar la radicación y con la ayuda de la diferencia de cuadrados llegar a una expresión más simple.

Por otro lado, el uso de tablas de integración a menudo requiere primero simplificar o reescribir expresiones a una forma que permita el uso directo de una de las fórmulas de integración. Por ejemplo,

$$\int \frac{x+1}{x-5}dx = \int \frac{x+1-5+5}{x-5}dx = \int 1dx + \int \frac{6}{x-5}dx = x + 6\ln(x-5) + \mathrm{C}.$$

Para resolver la integral, se "agrega" un cero en forma de $0 = 5 - 5$ (definición del inverso aditivo de un número real); luego, aplicamos la aditividad de la integral y la fórmula $\int \frac{1}{x}dx = \ln x$.

Funciones

El objeto en el cual se sustenta la definición de integral es la función. Tanto la integral definida como la integral indefinida opera con funciones. La suma, resta, multiplicación y división de funciones es requerida en todo momento. Ejemplo

- Definición de Suma de Riemann: $\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$
- $\int \frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{x}dx$
- $\int (x^2-9)(x^5+x^3)dx$

El método de integración de cambio de variable requiere el uso de los conceptos de composición de funciones e inversa de funciones.

Adicionalmente, identificar el dominio y recorrido de funciones elementales es necesario para determinar adecuadamente los límites de integración. Así, también, para identificar los recorridos y rangos de funciones compuestas a partir de estas mediante operaciones elementales y la composición de funciones.

- $\int_0^b \sqrt{x}dx$
- $\int_a^b \frac{1}{\sqrt{\alpha^2-x^2}}dx$, con $a, b, x \in (-\alpha, \alpha)$

Trigonometría

Las identidades trigonométricas, $\cos^2\theta = 1-\operatorname{sen}^2\theta$ y $\sec^2\theta = 1+\tan^2\theta$ o $\tan^2\theta = \sec^2\theta-1$, son necesarias para resolver integrales que involucren funciones trigonométricas de la forma:

$$\int 3sen(x) + 4sec^2(x)dx.$$

$$\int cos^m(x)sen^n(x)dx; \quad m, n \in \mathbb{Q}.$$

$$\int sec^m(x)tan^n(x)dx; \quad m, n \in \mathbb{Q}.$$

También, son fundamentales para resolver integrales que contengan expresiones de la forma $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{a^2+x^2}$ o $\sqrt{x^2-a^2}$ con $a > 0$, mediante un adecuado cambio de variable.

Además, las razones trigonométricas y razones trigonométricas inversas son usadas para aplicar el cambio de variable. Ejemplo, Calcular el área de la superficie de revolución engendrada al girar la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ alrededor del eje OY. Dicha área viene dada por la integral:

$$A = 2\pi\int_{-b}^{b} h(y)\sqrt{1+h'(y)^2}\,\mathrm{d}y = 2\pi\frac{a}{b^2}\int_{-b}^{b}\sqrt{b^4+(a^2-b^2)\,y^2}\,\mathrm{d}y.$$

Este problema se lo puede resolver directamente con tablas de integración, pero también mediante el uso de una sustitución trigonométrica. Si definimos $\alpha = \frac{b^2}{c}$, podemos tomar el cambio de variable $y = \alpha senh(t)$ y

4.3.2. De Geometría para Cálculo Integral

Rectas tangentes a la circunferencia

El concepto de arco, secante, recta tangente y su unicidad en un punto dado es requerido en aplicaciones del cálculo integral donde se requiere determinar la longitud de un segmento de curva, ya que, para su resolución mediante la integral de Riemann se inicia mediante aproximaciones de arcos y finalizando con el uso de la pendiente de rectas tangentes a la curva.

El número π: la longitud de una circunferencia

La relación que tiene el número π entre una circunferencia y su diámetro es fundamental para entender el concepto del área de un círculo, y el cual es de mucha utilidad en el cálculo de volúmenes de sólidos de revolución. Por ejemplo:

- Calcular el volumen de un cono circular recto tal que el radio de su base mida R y su altura mida H, mediante el método de rodajas.
- Determinar el volumen V de una bola de radio R.
- Hallar el volumen de un sólido en forma de cruz de altura H y envergadura L, formado por dos cilindros circulares de radio R

Sistemas de coordenadas para un plano

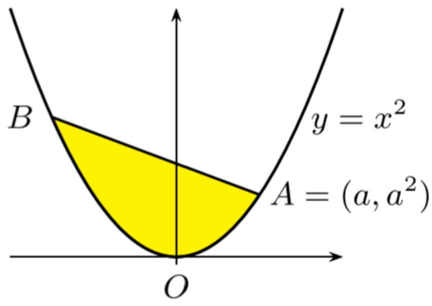
Definir un sistema de coordenadas para un plano es fundamental en aplicaciones que se requiera hallar áreas de superficies planas. Pues, este problema se modela mediante el uso de funciones, cuyas gráficas delimite una región congruente a la superficie. Por ejemplo:

- Determinar el área de un círculo de radio r. Su solución requerirá hallar una función cuya gráfica sea congruente al círculo. La gráfica de la función f tal que $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ es congruente a la mitad del círculo, y solo bastaría con multiplicar por 2 al área de la región formada para hallar el área total.
- Calcular el área de una región en forma de parábola. De manera similar, se buscaría una función cuya gráfica sea congruente a la parábola.

Ecuación de una recta en un plano

La ecuación de la recta y la interpretación de los casos particulares $y = a, a \in \mathbb{R}$ y $x = b, b \in \mathbb{R}$,como también, su construcción dado dos puntos en un sistema de coordenadas o dada la pendiente y un punto son fundamentales en aplicaciones de la integral en las cuales sea necesario delimitar regiones por rectas. Además, es importante conocer la relación de las pendientes de rectas perpendiculares entre sí; es decir, la ecuación $m_1 \cdot m_2 = -1$. Por ejemplo:

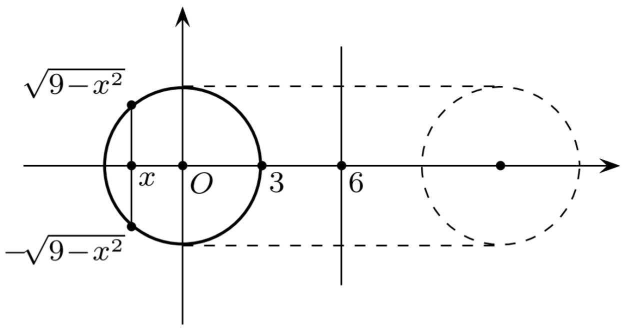
> *Calcula $a > 0$ por la condición de que el sector parabólico OAB de la figura de abajo. El punto B es la intersección de la parábola $y = x^2$ con su normal en el punto $A = (a, a^2)$.*



Ecuación de una circunferencia en un plano

La ecuación de la recta es fundamental para aplicaciones de la integral definida. Por ejemplo:

> *Calcular el volumen del toro engendrado al girar el círculo de centro $(0, 0)$ y radio 3 alrededor de la recta $x = 6$. La resolución de este problema requiere hallar la ecuación de la circunferencia definida en $x \in [-3, 3]$, y su área.*



Ecuación de una elipse en un plano

La ecuación de la elipse, su construcción por medio de sus ejes mayores y menores, y su excentricidad son fundamentales para aplicaciones de la integral. Por ejemplo:

Calcular el área de una elipse de semiejes a y b. Para ello, una de las primeras cosas es determinar la ecuación de la elipse; es decir,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Longleftrightarrow y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

y el área pedida viene dada por la integral:

$$\frac{b}{a}\int_{-a}^{a} 2\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x=\pi ab$$

Para el caso en que $a=b=r$, es decir, la elipse es un círculo de radio r, se obtiene la conocida fórmula πr^2 para el área de un círculo.

Ecuación de una parábola

La ecuación de la parábola es fundamental para aplicaciones de la integral. Por ejemplo:

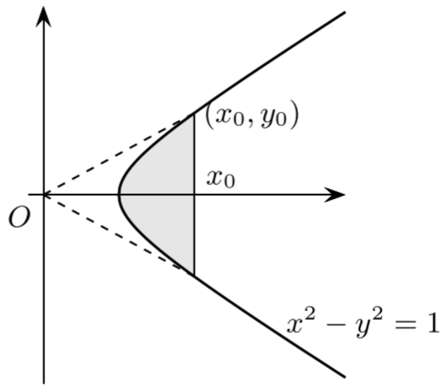
Calcular el área de las dos partes en que la parábola $y^2=4x$ divide al círculo $x^2+y^2=8$.

Ecuación de una hipérbola

La ecuación de la parábola y sus asíntotas son fundamentales para aplicaciones de la integral. Por ejemplo:

Se considera la hipérbola de ecuación $x^2-y^2=1$ y un punto (x_0,y_0) de la misma $(x_0>1)$. Se desea calcular el área, ω_0, de la región sombreada en gris en la figura, y deducir que:

$$x_0=\cosh(\omega_0)\,,\quad y_0=\operatorname{senh}(\omega_0)\,.$$



4.3.3. De Fundamentos en Espacios Vectoriales con producto escalar

Variable y constante

Estos conceptos son usados con frecuencia. Es importante diferencia una constante de una variable según el contexto, ya que pueden representarse con los mismos símbolos.

La importancia de las nociones de variable y constante están presente en:

1. La definición de producto interno y en la propiedad del producto por escalares, pues esta es una aplicación de $V \times V$ a $\mathbb{R}$ que cumple con: Dado $u, v \in V$

$$\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$$

2. La representación de un elemento perteneciente a un espacio con producto interno mediante una combinación lineal de los elementos de una base ortonormal.

$$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + ... + \langle v, e_m \rangle e_m$$

Conjuntos

El concepto de conjunto, subconjunto y pertenencia es muy usado en la definición de espacios vectoriales, subespacios vectoriales, bases y complementos ortogonales. Así como tambien, para la definición de propiedades derivadas de estos conceptos. Ejemplo

> Dado un espacio vectorial V:
>
> - Si U es un subconjunto de V, entonces $U^{\perp}$ es un subespacio de V.
> - $\{0\}^{\perp} = V$
> - $\{V\}^{\perp} = 0$
> - Si U es un subconjunto de V, entonces $U \cap U^{\perp} \subset \{0\}$
> - Si U y W son subconjuntos de V y $U \subset W$, entonces $W^{\perp} \subset U^{\perp}$

Números Reales

Las propiedades de desigualdad son fundamentales para la obtención de propiedades del producto interno y para la aplicación de las proyecciones ortogonales. Ejemplo

- Desigualdad Triangular: $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$
- Minimización de distancia a un subespacio: Dado un subespacio U de V, $v \in V$ y $u \in U$, minimizar

$$\|v - P_U v\| \leq \|v - u\|$$

Función

Las funciones son utilizadas para definir el producto interno de un espacio vectorial:

> *Un producto interno en V es una función que asigna a cada par ordenado de vectores u y v en V, un número real que se denota $\langle u, v \rangle$ ...*

Referencias bibliográficas

[1] Ministerio de Educación de Colombia. *¿Cómo formular e implementar los resultados de aprendizaje?, Nota Orientadora.* Mineducación, 2021.

[2] Declan Kennedy and Hyland. *Writing and Using Learning Outcomes: A Practical Guide.* University College Cork, 2007.

[3] Germán Patricio Rojas Idrovo, Juan Carlos Trujillo Ortega, and Luis Fabián Barba Lovato. *Cálculo en una variable (Cálculo diferencial).* Escuela Politécnica Nacional, 2010.

[4] R.A. & Jewett J.W Serway. *Física para ciencias e ingeniería.* Vol.1. Cengage Learning, 2005.

[5] María Ruth Vargas. *Diseño curricular por Competencias.* Asociación Nacional de Facultades y Escuelas de Ingeniería, 2008.

[6] Oscar Jerez Yánez. *Los Resultados de Aprendizaje en la Educación Superior por competencias, Tesis Doctoral.* Universidad de Granada, España, 2012.

[7] Concepción Yániz and Lourdes Villardón. Planificar desde competencias para promover el aprendizaje : el reto de la sociedad del conocimiento para el profesorado universitario. *Deusto Digital*, 02 2006.