# ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

## FACULTAD DE CIENCIAS

### MATEMÁTICAS PARA EL CURSO DE NIVELACIÓN DE LA EPN

### TRIGONOMETRÍA: RAZONES TRIGONOMÉTRICAS PARA ÁNGULOS EN UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO, RAZONES TRIGONOMÉTRICAS PARA ÁNGULOS EN UN SISTEMA DE COORDENADAS

**TRABAJO DE INTEGRACIÓN CURRICULAR PRESENTADO COMO REQUISITO PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE INGENIERO MATEMÁTICO**

**JHON GLIDDEN ÑACATA PILLAJO**

jhon.nacata@epn.edu.ec

**DIRECTOR: JUAN CARLOS TRUJILLO ORTEGA**

juancarlos.trujillo@epn.edu.ec

**DMQ, SEPTIEMBRE 2022**

## CERTIFICACIONES

Yo, JHON GLIDDEN ÑACATA PILLAJO, declaro que el trabajo de integración curricular aquí descrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y, que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

Jhon Glidden Ñacata Pillajo

Certifico que el presente trabajo de integración curricular fue desarrollado por Jhon Glidden Ñacata Pillajo, bajo mi supervisión.

Juan Carlos Trujillo Ortega

**DIRECTOR**

## DECLARACIÓN DE AUTORÍA

A través de la presente declaración, afirmamos que el trabajo de integración curricular aquí descrito, así como el(los) producto(s) resultante(s) del mismo, es(son) público(s) y estará(n) a disposición de la comunidad a través del repositorio institucional de la Escuela Politécnica Nacional; sin embargo, la titularidad de los derechos patrimoniales nos corresponde a los autores que hemos contribuido en el desarrollo del presente trabajo; observando para el efecto las disposiciones establecidas por el órgano competente en propiedad intelectual, la normativa interna y demás normas.

Jhon Glidden Ñacata Pillajo

Juan Carlos Trujillo Ortega

**RESUMEN**

Este componente propone, principalmente, los contenidos de *Trigonometría de los triángulos rectángulos* y de la *Trigonometría de los ángulos en un sistema de coordenadas* que deberían incluirse en un curso de Nivelación para las carreras de Ingeniería y Ciencias de la EPN, a través de los resultados de aprendizaje que los estudiantes deberían alcanzar.

A su vez, para dar mayor precisión a la formulación de los resultados de aprendizaje, se proponen, para cada uno de los resultados, tres ejemplos de preguntas, ejercicios o problemas que podrían utilizarse para evaluar si un estudiante los ha alcanzado o no.

Finalmente, con el fin de evidenciar que los contenidos propuestos no son insuficientes para abordar el estudio del Álgebra Lineal y el Cálculo en una variable en el primer semestre, se presenta una descripción de los contenidos de los capítulos “Matrices, Sistemas de ecuaciones lineales y determinantes” y “Rectas y planos” (descritos en los PEAs de dichas materias), y los conceptos de Fundamentos de Matemática y Geometría que son prerrequisitos de los referidos capítulos.

***Palabras clave:*** Resultados de aprendizaje, Fundamentos de Matemática, Trigonometría, Matrices, Sistemas de Ecuaciones Lineales, Determinantes, Rectas, y Planos.

**ABSTRACT**

This component mainly proposes the following contents *Trigonometry of right triangles* and Trigonometry of angles in a coordinate system that should be included in a Leveling course for EPN Engineering and Science majors, through the learning outcomes that students should achieve.

To give greater precision to the formulation of the learning outcomes, three examples of questions, exercises or problems that could be used to assess whether or not a student has achieved them are proposed for each of the outcomes.

Finally, in order to demonstrate that the proposed contents are not insufficient to approach the study of Linear Algebra and Calculus in one variable in the first semester, a description of the contents of the chapters "Matrix, Systems of linear equations and determinants" and "Lines and planes" (described in the PEAs of these subjects), and the concepts of Fundamentals of Mathematics and Geometry that are prerequisites of the referred chapters is presented.

***Palabras clave:*** Learning Outcomes, Fundamentals of Mathematics, Trigonometry, Matrices, Systems of Linear Equations, Determinants, Lines, and Planes.

# Índice general

# Índice de figuras

# Capítulo 1

## Descripción del componente desarrollado

De la misma manera como los diferentes campos científicos evolucionan, su enseñanza (sobre todo en los primeros niveles de la Universidad) debe evolucionar. En particular, la enseñanza de la Matemática. No obstante, en el Ecuador y, en particular, en la Escuela Politécnica Nacional, tanto la forma de enseñanza como los contenidos de Matemática presentes en los planes de estudio de las materias de Nivelación y Formación Básica no se han adaptado a los cambios sustanciales ocurridos durante los últimos 50 años.

La Facultad de Ciencias y, en particular, el Departamento de Matemática, ha participado en diversos esfuerzos de la EPN por diseñar planes de estudio adecuados para Nivelación. Como consecuencia del trabajo desplegado, se han formulado contenidos para las dos asignaturas de Matemática de Nivelación de la EPN: *Fundamentos de Matemática* y *Geometría*.

Para que la propuesta pueda transmitir, no solamente los contenidos, sino el alcance de estos, también se han formulado con mucho detalle los resultados de aprendizaje y ejemplos que los ilustren, y sean una pauta para el diseño de la evaluación del alcance o no de los resultados de aprendizaje por parte de los estudiantes.

Además, con el fin de mostrar que los contenidos propuestos no son insuficientes para el abordaje de los cursos de matemática del primer semestre de Formación Básica, se describen los contenidos de las materias de *Álgebra Lineal* y *Cálculo en una variable* y se identifican los conceptos de Fundamentos de la Matemática y de Geometría requeridos en las materias referidas.

En particular, en este trabajo, se desarrollan los contenidos y resultados de aprendizaje de *Razones trigonométricas para ángulos agudos* y *Razones trigonométricas para ángulos en un sistema de coordenadas*. Los contenidos de primer semestre descritos son *Matrices, sistemas de ecuaciones lineales y determinantes* y *Rectas y planos*.

## 1.1. Objetivo general

El objetivo general de este proyecto consiste en plantear los contenidos de las dos materias de Nivelación, *Fundamentos de Matemática* y *Geometría*, mediante la formulación de resultados de aprendizaje de estos contenidos y ejemplos de preguntas, ejercicios y problemas que ilustren dichos resultados de aprendizaje.

## 1.2. Objetivos específicos

Los siguientes:

1. Describir los contenidos de los capítulos “Matrices, sistemas de ecuaciones y determinantes” y “Rectas y planos” del curso Álgebra Lineal del primer semestre de Formación Básica de la EPN.
2. Identificar los conceptos de las materias “Fundamentos de Matemática” y “Geometría” de Nivelación en los capítulos descritos en el punto anterior.
3. Para los temas de *Razones trigonométricas para ángulos agudos* y *Razones trigonométricas para ángulos en un sistema de coordenadas*, la elaboración de:

    *a*) Los resultados de aprendizaje.

*b*) Ilustración, mediante problemas o ejercicios resueltos, de cada uno de los resultados de aprendizaje.

## 1.3. Alcance

Los contenidos de las materias considerados en este proyecto se ajustan a los Programas de Estudio de la Asignatura (PEA) de "Fundamentos de Matemática" y de "Geometría" aprobados por el Consejo de Docencia de la EPN en el año 2020.

Este trabajo no consiste en el desarrollo de los contenidos, sino en la formulación de los resultados de aprendizaje, a partir de material elaborado por las Comisiones de Implementación de los PEAs, que fueron nombradas por el Consejo de Docencia de la EPN.

## 1.4. Marco teórico

Para diseñar un curso, tradicionalmente se ha tomado un *enfoque centrado en el profesor*, en el que la enseñanza no se fija en las capacidades del estudiante al finalizar el curso. En la actualidad, hay una tendencia mayor en adoptar un enfoque *centrado en los estudiantes* con la propuesta de la formulación de los denominados *Resultados de Aprendizaje*.

### 1.4.1. Resultados de aprendizaje

Declan Kennedy [6] sintetiza el concepto de resultados de aprendizaje de la siguiente manera:

- Los resultados de aprendizaje se centran más en lo que el estudiante ha aprendido y no solamente en el contenido que se ha enseñado.
- Los resultados de aprendizaje se centran en lo que el estudiante puede demostrar al término de una actividad de aprendizaje.

### 1.4.2. Redacción de los resultados de aprendizaje

Para la redacción de los resultados de aprendizaje, partimos de lo aprendido anteriormente, con el fin de desarrollar uno o más niveles de compresión. Benjamin Bloom [6] propone una jerarquía de estos niveles, de menor a mayor: *Conocimiento, Comprensión, Aplicación, Análisis, Síntesis, Evaluación*. Siendo el nivel inferior el recordar hechos y la evaluación en el nivel superior; sin embargo, para este trabajo nos enfocaremos únicamente en los tres primeros niveles, dada la naturaleza del curso de Nivelación de la EPN.

Cada nivel se caracteriza por un conjunto de verbos. Algunos ejemplos para los tres primeros niveles:

- Conocimiento: organizar, reunir, relacionar o repetir.

  En este nivel se recuerda hechos o clases sin comprenderlos necesariamente.

- Comprensión: asociar, inferir, interpretar, revisar o seleccionar.

  En este nivel se interpreta información aprendida

- Aplicación: asociar, cambiar, describir, diferenciar o reconocer.

  En este nivel se comprende e interpreta la información aprendida.

# Capítulo 2

## Metodología

El curso de Nivelación de la Escuela Politécnica Nacional debe proveer los conceptos básicos y la metodología mínima para que los estudiantes puedan abordar, en el área de matemática, los cursos de *Cálculo en una Variable y Álgebra Lineal*. Por ello, hemos elegido estas materias para determinar qué conceptos de las materias "Fundamentos de Matemática" y "Geometría" son requeridos en Nivelación.

Así, con el fin de seleccionar los contenidos de Nivelación, la metodología a seguir es la siguiente:

1. Describir los aspectos más relevantes de los contenidos "Matrices, sistemas de ecuaciones lineales y determinantes" y "Rectas y planos" del curso Álgebra Lineal.

2. Identificar los conceptos de las materias "Fundamentos de Matemática" y "Geometría" son requeridos en los capítulos referidos en el numeral anterior.

3. Formular los resultados de aprendizaje de los contenidos propuestos para *Razones trigonométricas para ángulos agudos* y *Razones trigonométricas para ángulos en un sistema de coordenadas*.

4. Ilustrar los resultados propuestos mediante preguntas, ejercicios y problemas.

# Capítulo 3

## Resultados, conclusiones y recomendaciones

## 3.1. Resultados

En la segunda sección de este capítulo, presentamos la descripción de los *Matrices, sistemas de ecuaciones y determinantes* y de *rectas y planos*, lo que nos servirá de base para formular los resultados de aprendizaje y plantear ejercicios, problemas y preguntas que permitan medir el conocimiento de los estudiantes en cada uno de los temas, que lo haremos en la tercera sección. En la segunda sección, se expondrán los prerrequisitos de Fundamentos de Matemática y Geometría identificados en los capítulos de Álgebra Lineal descritos en la segunda sección. Finalmente, en la última sección se presentarán las conclusiones y recomendaciones.

## 3.2. Descripciones

### 3.2.1. De matrices, sistemas de ecuaciones lineales y determinantes

Se estudian en primer lugar los capítulos sobre matrices y sistemas de ecuaciones lineales porque son la herramienta mediante las cuales se responden varias de las cuestiones fundamentales en el estudio de los espacios vectoriales de dimensión finita y de las aplicaciones lineales entre espacios vectoriales de dimensión finita.

Estas cuestiones decantarán siempre en un problema del siguiente tipo:

> *Dada la matriz $A$, encontrar todas las matrices $X$, o todas las matrices $Y$, tales que*
> $$AX = Y,$$
> *donde $A = (a_{ij})_{m\times n}$ una matriz de orden $m \times n$, $X = (x_j)_{n\times 1}$ y $B = (y_i)_{m\times 1}$.*

En lo que sigue, utilizaremos la notación $N_n$ para indicar todos los números naturales mayores o iguales que $1$ y menores o iguales que $n$ para todo número natural $j$:

$$N_n = \{j \in \mathbb{N} : 1 \leqslant j \leqslant n\}.$$

Veamos unos temas donde se usa la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, para responder a las cuestiones de: Los siguientes son temas del curso de Álgebra Lineal, en donde la solución de sistemas de ecuaciones lineales es primordial.

**Coordenadas de un vector respecto a una base**

Uno de los problemas que requieren de matrices y sistemas de ecuaciones es la determinación de las coordenadas de un vector respecto a una base. Recordemos que:

> *Dada una base $B = \{v_1, v_2, \dots v_n\}$ de un espacio vectorial $E$, las **coordenadas** de un vector $v \in E$ respecto de la base $B$, son los únicos escalares $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ que verifican que:*
> $$v = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k. \qquad (3.1)$$

Veamos de modo general, consideremos una base $B$ de un espacio vectorial $E$ tal que:

$$B = \{e_j \in \mathbb{R}^n : j \in I_n\}$$

Para cada $j \in N_n$, se tiene que:

$$e_j = (e_j^1, e_j^2, \ldots, e_j^n).$$

Dado $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, para determinar sus coordenadas respecto a la base, es decir, para encontrar los escalares $\lambda_j \in \mathbb{R}$, para cada $j \in I_n$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n \in \mathbb{R}$ hay que resolver la ecuación (3.1):

$$(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$$

$$(x_j) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \left(e_k^j\right)$$

Así, para cada $x_j$, se tiene que

$$x_j = \sum_{k=1}^{n} \left(e_k^j \lambda_k\right),$$

de donde, la ecuación a resolver se transforma en un sistema de ecuaciones lineales,

$$A\Lambda = X,$$

donde

$$A = \left(e_j^i\right)_{(i,j)\in I_n \times I_n} = \begin{pmatrix} e_1^1 & e_2^1 & \cdots & e_n^1 \\ e_1^2 & e_2^2 & \cdots & e_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ e_1^n & e_2^n & \cdots & e_n^n \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Veamos un ejemplo, si $E = \mathbb{R}^3$ y consideramos la base:

$$B = \left\{\left(e_1^1, e_1^2, e_1^3\right), \left(e_2^1, e_2^2, e_2^3\right), \left(e_3^1, e_3^2, e_3^3\right)\right\}.$$

Dado $x \in \mathbb{R}^3$, para determinar sus coordenadas, es decir, los escalares $\lambda_1$, $\lambda_2$ y $\lambda_3$, debemos resolver la ecuación (3.1), así:

$$(x_1, x_2, x_3) = \lambda_1 \left(e_1^1, e_1^2, e_1^3\right) + \lambda_2 \left(e_2^1, e_2^2, e_3^3\right) + \lambda_3 \left(e_3^1, e_3^2, e_3^3\right),$$

es decir, debemos resolver la ecuación

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(\lambda_1 e_1^1 + \lambda_2 e_2^1 + \lambda_3 e_3^1, \quad \lambda_1 e_1^2 + \lambda_2 e_2^2 + \lambda_3 e_3^3, \quad \lambda_1 e_1^3 + \lambda_2 e_2^3 + \lambda_3 e_3^3\right)$$

que satisface con el sistema de ecuaciones lineales a resolverse:

$$\begin{aligned} \lambda_1 e_1^1 + \lambda_2 e_2^1 + \lambda_3 e_3^1 &= x_1 \\ \lambda_1 e_1^2 + \lambda_2 e_2^2 + \lambda_3 e_3^3 &= x_2 \\ \lambda_1 e_1^3 + \lambda_2 e_2^3 + \lambda_3 e_3^3 &= x_3, \end{aligned}$$

matricialmente $A\Lambda = X$. Donde:

$$A = \begin{pmatrix} e_1^1 & e_2^1 & e_3^1 \\ e_1^2 & e_2^2 & e_3^2 \\ e_1^3 & e_2^3 & e_3^3 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3. \end{pmatrix}$$

**Combinación lineal**

Otro problema que requerirá herramientas de matrices y sistemas ecuaciones para su solución es el de combinación lineal.

*Sean $E$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, $A = \{v_j \in E : j \in N_n\}$ y $x \in E$. Para determinar si $x$ es una **combinación lineal** de los elementos de $A$, debemos determinar si existe un conjunto $\{\lambda_j \in \mathbb{K} : j \in N_n\}$ tales que*

$$x = \sum_{j \in N_n} \lambda_j v_j [10]. \tag{3.2}$$

Supongamos que $\dim E = m$. Sea $B = \{e_j \in E : j \in N_m\}$ una base de $E$. Entonces existen escalares únicos $\alpha_j$ para todo $j \in N_m$ tales que, de la ecuación (3.1) tenemos:

$$x = \sum_{j \in N_m} \alpha_j e_j.$$

Por otra parte, para cada $k \in N_n$, existen escalares $\beta_k^j$ para todo $j \in N_m$

tales que

$$v_j = \sum_{k \in N_m} \beta_j^k e_k.$$

Luego, de la ecuación (3.2), se obtiene que

$$\sum_{j \in N_m} \alpha_j e_j = \sum_{j \in N_n} \lambda_j \left( \sum_{k \in N_m} \beta_j^k e_k \right).$$

De aquí, se obtiene que los escalares $\lambda_j$ para todo $j \in N_n$ son la solución del sistema de ecuaciones en forma matricial

$$B\Lambda = A,$$

donde:

$$B = \left(\beta_j^k\right)_{(j,k) \in N_m \times N_n} = \begin{pmatrix} \beta_1^1 & \beta_2^1 & \cdots & \beta_n^1 \\ \beta_1^2 & \beta_2^2 & \cdots & \beta_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_1^m & \beta_2^m & \cdots & \beta_n^m \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}$$

Veamos un ejemplo, si $m = 3$ y $n = 2$, entonces

$$\begin{aligned} \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 &= \lambda_1 \left(\beta_1^1 e_1 + \beta_1^2 e_2 + \beta_1^3 e_3\right) + \lambda_2 \left(\beta_2^1 e_1 + \beta_2^2 e_2 + \beta_2^3 e_3\right) \\ &= \left(\lambda_1 \beta_1^1 + \lambda_2 \beta_2^1\right) e_1 + \left(\lambda_1 \beta_1^2 + \lambda_2 \beta_2^2\right) e_2 + \left(\lambda_1 \beta_1^3 + \lambda_2 \beta_2^3\right) e_3. \end{aligned}$$

De aquí, por la unicidad de la representación (o porque $B$ es una base), se obtiene que

$$\alpha_1 = \lambda_1 \beta_1^1 + \lambda_2 \beta_2^1, \quad \alpha_2 = \lambda_1 \beta_1^2 + \lambda_2 \beta_2^2 \quad \text{y} \quad \alpha_3 = \lambda_1 \beta_1^3 + \lambda_2 \beta_2^3.$$

Es decir, los escalares $\lambda_j$ para todo $j \in N_2$, son las soluciones del sistema de ecuaciones siguiente

$$\begin{pmatrix} \beta_1^1 & \beta_2^1 \\ \beta_1^2 & \beta_2^2 \\ \beta_1^3 & \beta_2^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$$

de forma matricial $B\Lambda = A$.

### Matriz asociada a una aplicación lineal

*Dados dos espacios vectoriales $E$ y $F$ de dimensiones $m$ y $n$, respectivamente, sea $T\colon E \longrightarrow F$ una aplicación lineal. Sean $B = \{j \in N_n : e_j \in E\}$ y $B' = \{i \in N_m : u_i \in F\}$ bases de $E$ y $F$, respectivamente [10]. La **matriz** que representa a $T$ respecto de estas bases, se construye de la siguiente manera:*

1. *Para cada $j \in N_n$, se determina $Te_j$.*
2. *Para cada $j \in I_n$, se determina las coordenadas de $Te_j$ respecto de la base $B'$. Sean $e_j^k$ tales coordenadas. Por tanto,*

$$Te_j = \sum_{k=1}^{m} e_j^k u_k. \tag{3.3}$$

3. *Sea $M(T)$ la matriz de término general*

$$t_{kj} = e_j^k \tag{3.4}$$

*para todo $k \in I_m$ y todo $j \in I_n$, podemos denotar*

$$M\left(T, (e_1, e_2, \ldots, e_n), (u_1, u_2, \ldots, u_m)\right)$$

$$M(T) = \begin{pmatrix} e_1^1 & e_2^1 & \cdots & e_n^1 \\ e_1^2 & e_2^2 & \cdots & e_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_1^m & e_2^m & \cdots & e_n^m \end{pmatrix}$$

*La matriz $M(T)$ representa la aplicación lineal $T$.*

Por ejemplo, sea $T\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, tal que:

$$B = \left\{ \left(e_1^1, e_1^2\right), \left(e_2^1, e_2^2\right) \right\} \quad \text{y} \quad B' = \left\{ \left(u_1^1, u_1^2, u_1^3\right), \left(u_2^1, u_2^2, u_2^3\right) \left(u_3^1, u_3^2, u_3^3\right) \right\},$$

son las bases de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ respectivamente.

Por tanto, para cada $j \in N_2$, determinamos las coordenadas $Te_j$ respecto a la base $B'$, sean $e_j^k$, tal que:

$$Te_j = \sum_{k=1}^{3} e_j^k u_k.$$

Obtenemos la matriz $M(T)$ de termino general $t_{kj} = e_j^k$, que representa $T$ para cada $k \in I_3$ y para cada $j \in I_2$

$$M(T) = \begin{pmatrix} e_1^1 & e_2^1 \\ e_1^2 & e_2^2 \\ e_1^3 & e_2^3 \end{pmatrix},$$

matricialmente $T = M(T)$.

### Espacio nulo de una aplicación lineal

Veremos cómo hacemos uso de la resolución de un sistema ecuaciones. Recordemos que:

> *Dados dos espacios vectoriales $E$ y $F$ de dimensiones $m$ y $n$, respectivamente, sea $T\colon E \longrightarrow F$ una aplicación lineal [10]. El **Espacio Nulo de T** es el conjunto:*
>
> $$\mathscr{N}T = \{v \in V : Tv = 0\} \tag{3.5}$$

Ahora supongamos que $T\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Para encontrar todos los $x \in \mathbb{R}^n$ tales que $Tx = 0$, sea $M(T)$ la matriz que representa $T$ respecto de dos bases dadas en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$, respectivamente. Entonces, si $X$ es la matriz de las coordenadas de $x$, el problema de encontrar el espacio nulo de $T$

consiste en encontrar todas las matrices $X$ de $n \times 1$ tales que

$$M(T)X = 0,$$

donde $0$ es la matriz cero de orden $m \times 1$.

Por ejemplo, si consideramos $n = 3$ y $m = 2$ tal que:

$$B = \left\{ \left(e_1^1, e_1^2, e_1^3\right), \left(e_2^1, e_2^2, e_2^3\right), \left(e_3^1, e_3^2, e_3^3\right) \right\} \quad \text{y} \quad B' = \left\{ \left(u_1^1, u_1^2\right), \left(u_2^1, u_2^2\right) \right\},$$

son bases de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ respectivamente. Sea $M(T)$ la matriz de (3.4) que representa $T$ respecto a las bases $B$ y $B'$. De (3.5) debemos hallar $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$M(T)X = 0$$

tal que:

$$M(T) = \begin{pmatrix} e_1^1 & e_2^1 & e_3^1 \\ e_1^2 & e_2^2 & e_3^2 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

### Recorrido o imagen de una aplicación lineal

Finalmente, vemos cómo hacemos uso de la resolución de un sistema ecuaciones. Recordemos que:

> *Dados dos espacios vectoriales $E$ y $F$ de dimensiones $m$ y $n$, respectivamente, sea $T\colon E \longrightarrow F$ una aplicación lineal. El* ***recorrido o imagen de*** *$T$ es el conjunto:*
>
> $$\mathscr{R}T = \{v \in F : (\exists e \in E)\,(Te = v)\} \tag{3.6}$$

[10]

Ahora supongamos que $T\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Para encontrar todos los $x \in \mathbb{R}^n$ con $y \in \mathbb{R}^m$ tales que $Tx = y$, sea $M(T)$ la matriz que representa $T$ respecto de dos bases dadas en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$, respectivamente. Entonces, si $X$ es la matriz de las coordenadas de $x$ y $Y$ la matriz de coordenadas de $y$. El problema de encontrar el rango o imagen de $T$ consiste en encontrar todas las matrices $X$ de $n \times 1$ tales que

$$M(T)X = Y,$$

donde $Y$ es la matriz cero de orden $m \times 1$.

Por ejemplo, si consideramos $n = 3$ y $m = 2$ tal que:

$$B = \left\{ \left(e_1^1, e_1^2, e_1^3\right), \left(e_2^1, e_2^2, e_2^3\right), \left(e_3^1, e_3^2, e_3^3\right) \right\} \quad \text{y} \quad B' = \left\{ \left(u_1^1, u_1^2\right), \left(u_2^1, u_2^2\right) \right\},$$

son bases de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ respectivamente. Sea $M(T)$ la matriz de (3.4) que representa $T$ respecto a las bases $B$ y $B'$. Sea $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ debemos hallar $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$M(T)X = Y$$

tal que:

$$M(T) = \begin{pmatrix} e_1^1 & e_2^1 & e_3^1 \\ e_1^2 & e_2^2 & e_3^2 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Finalmente, hemos visto como los problemas de: *Coordenadas de un vector respecto a una base, Combinaciones lineales, Matriz asociada a una transformación lineal, El espacio nulo de una aplicación lineal y La imagen de una aplicación lineal.* Se resuelven mediante la solución de un sistema de ecuaciones lineales.

### 3.2.2. De rectas y planos

El principal objetivo del estudio de las rectas y los planos es resolver las cuestiones fundamentales de la **Geometría Afín y Euclídea** como la distancia entre:

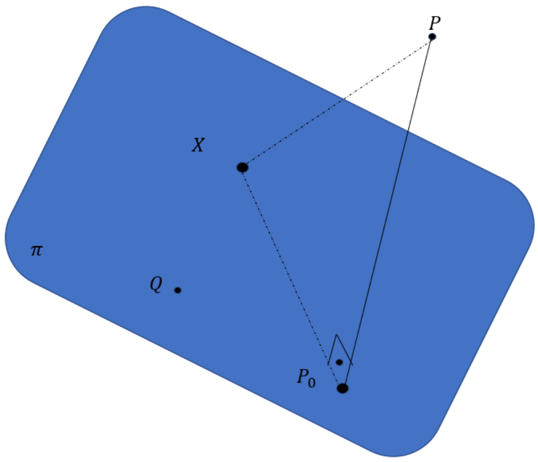
- *Puntos y planos.*
- *Puntos y rectas.*

Además, el **Ángulo entre dos rectas**. Todas estas cuestiones son producto de un amplio conocimiento del **Álgebra Lineal**

Veamos cómo se resuelven las cuestiones de las distancias antes mencionadas. Por ejemplo, la **Distancia de un punto a un plano**.

### Distancia de un punto a un plano

Si consideramos el espacio euclídeo afín de dimensión 3, queremos encontrar la distancia mínima de un punto $P$ hacia un plano $\pi$ como se puede observar en el siguiente gráfico.




*Dados un punto $P$ y un plano $\pi$ del espacio euclídeo $E_3$. Si $P$ no pertenece a $\pi$ (plano), entonces existe un punto $P_0$ de $\pi$ tal que el vector $\overrightarrow{PP}_0$ es ortogonal a $\pi$. Decimos que $P_0$ es la proyección ortogonal de $P$ sobre $\pi$ [2].*

*La distancia de $P$ a $P_0$ es la menor de las distancias de $P$ a los puntos de $\pi$ y se la llama distancia del punto $P$ al plano $\pi$.*

*Si respecto de una referencia rectangular $P\,(p_1, p_2, p_3)$ y $\pi$ tiene por ecuación a $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_0 = 0$, entonces la distancia de $P$ a $\pi$ es:*

$$d(P, P_0) = \frac{|a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3 + a_0|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} \tag{3.7}$$

Para encontrar la distancia de un punto a un plano en un espacio afín euclídeo de dimensión 3, debemos conocer:

- ***Espacio afín tridimensional.*** *Sea conjunto de puntos $E_3 \neq \emptyset$ que está asociado a a un espacio vectorial real $V$, en este caso $\mathbb{R}^3$ con la aplicación $E_3 \times E_3 \to E_3, (P, \overrightarrow{v}) \to Q = P + \overrightarrow{v}$. Decimos que $E_3$ es un espacio afín tridimensional [2] si:*

  *a) Para cada $P \in E_3$ y cada $Q \in E_3$ existe un y sólo un $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^3$, tal que:*

  $$Q = P + \overrightarrow{v}. \tag{3.8}$$

  *b) Para cualesquiera $P \in E_3$ y $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^3$ se verifica que"*

  $$P + (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = (P + \overrightarrow{u}) + \overrightarrow{v}. \tag{3.9}$$

  *Sea $E_3$ como lo definimos anteriormente, como $\mathbb{R}^3$ consta de producto escalar. Decimos que $E_3$ es un espacio afín euclídeo tridimensional.*

- ***Distancia****. Llamamos distancia del punto $P \in E_3$ al punto $Q \in E_3$ al número.*

  $$d\,(P, Q) = ||\overrightarrow{PQ}|| \tag{3.10}$$

  *ya que $\mathbb{R}^3$ es un espacio vectorial euclídeo.*

- ***Rectas en** $E_3$**.** Sea $P \in E_3$ y un vector no nulo $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^3$, llamamos **recta** que pasa por $P$ y tiene el vector de dirección $\overrightarrow{u}$ al conjunto formado por los puntos $X \in E_3$ tales que:*

  $$X = P + \lambda \overrightarrow{u} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R} \tag{3.11}$$

  *También dos punto $P, Q \in E_3$ con $P \neq Q$ pasa una sola recta que es la que forman los puntos:*

  $$X = P + \lambda \overrightarrow{PQ} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R} \tag{3.12}$$

- ***Planos en** $E_3$. Sea $P \in E_3$ y dos vectores linealmente independientes $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^3$, llamamos **plano** que pasa por $P$ y* *tiene los vectores de dirección $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ al conjunto formado por los puntos $X \in E_3$ tales que:*

$$X = P + \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v} \quad \text{con } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \tag{3.13}$$

*También por tres punto $P, Q, R \in E_3$ con $P \neq Q \neq R$ (no alineados) pasa una solo plano que es la que forman los puntos:*

$$X = P + \lambda\overrightarrow{PQ} + \mu\overrightarrow{PR} \quad \text{con } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \tag{3.14}$$

- ***Ortogonalidad***

  a) *Se dice que dos rectas son ortogonales si la dirección de las rectas $P + \alpha(\overrightarrow{u}), \quad \alpha \in \mathbb{R}$ y $Q + \mu(\overrightarrow{v}), \quad \mu \in \mathbb{R}$ cumplen con:*

  $$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0. \tag{3.15}$$

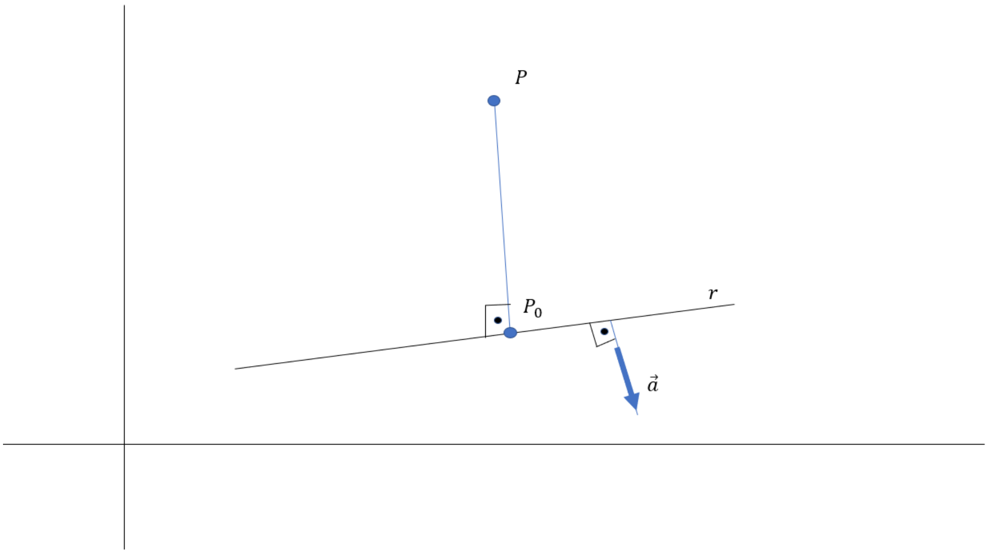
  b) *. Se dice que una recta y un plano son ortogonales si lo son sus direcciones de la recta $P + \alpha(\overrightarrow{u})$ y la dirección del plano de ecuación euclídea $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{QX} = 0$ cumplen con:*

  $$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{u}. \tag{3.16}$$

Así, podemos entender la definición de la distancia entre un punto y un plano.

### Distancia de un punto a una recta

Otro de los problemas importantes en la geometría afín euclídea en un plano bidimensional es la sustancia entre un punto y una recta.




*Dados un punto $P$ y una recta $r$ del espacio euclídeo $E_2$. Si el punto $P$ no pertenece a la recta $r$, entonces existe un punto $P_0$ de $r$ tal que el vector $\overrightarrow{PP_0}$ es ortogonal a $r$. Decimos que $P_0$ es la proyección ortogonal de $P$ sobre $r$. La distancia de $P$ a $P_0$ es la menor de las distancias de $P$ a los puntos de $r$ y se le llama distancia del punto $P$ a la recta $r$.*

*Si respecto de una referencia rectangular $P\,(p_1, p_2)$ y $r$ tiene por ecuación a $a_1x_1 + a_2x_2 + a_0 = 0$, entonces la distancia de $P$ a $r$ vale:*

$$d(P, P_0) = \frac{|a_1p_1 + a_2p_2 + a_0|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}$$

Podemos resolver estas cuestiones en el **Espacio Euclídeo Afín de Dimensión 2** con las definiciones enunciadas anteriormente. Consideramos $E_2$ un espacio afín bidimensional en lugar de $E_3$, siempre que este asociado a un espacio vectorial real, en este caso $\mathbb{R}^2$. Ahora veamos los conceptos sobre referencias:

- **Referencia cartesiana.** Sea $E_n$ un espacio afín de dimensión finita $n$, asociado al espacio vectorial $V$. Si el punto $O \in E_n$, llamado origen y $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n)$ una base del espacio $V$. Se dice que:

$$(O; \bar{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \ldots, \overrightarrow{e}_n) \tag{3.17}$$

  es una referencia cartesiana del espacio afín $E_n$

- **Coordenadas cartesianas** Sea $E_n$ un espacio afín de dimensión finita $n$, asociado al espacio vectorial $V$ con la referencia cartesiana $(O; \bar{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \ldots, \overrightarrow{e}_n)$. Llamamos coordenadas cartesianas en la base $(\bar{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \ldots, \overrightarrow{e}_n)$ de un punto $X \in E_n$ a las coordenadas:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ del vector } \overrightarrow{OX} \tag{3.18}$$

  Si $P(p)$, $Q\,(q_i) \in E_n$, entonces las coordenadas del vector $\overrightarrow{PQ}$ son los escalares $q_i - p_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$.

- **Referencia cartesiana rectangular** Se dice que una referencia cartesiana $(O; \overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \ldots, \overrightarrow{e}_n)$ es rectangular, si en espacio afín euclídeo $E_n$ asociado a un espacio vectorial $V$ la base $(\overrightarrow{e}_1, \rightarrow e_2, \ldots, \overrightarrow{e}_n)$ es ortonormal, es decir, si:

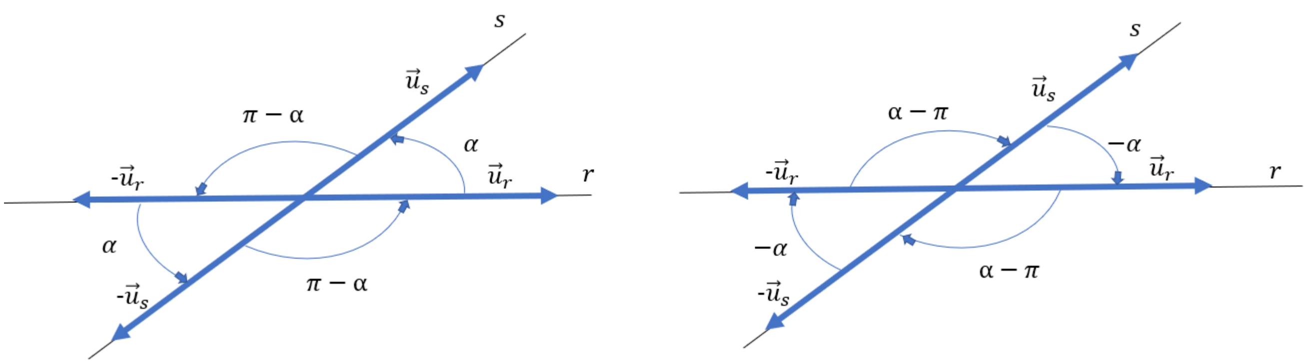
$$\|\bar{e}_i\| = 1 \quad \text{y} \quad \bar{e}_i \cdot \bar{e}_j = 0. \quad \text{Si} \quad i \neq j (i, j = 1, 2, \ldots, n). \tag{3.19}$$

Con estos conceptos podemos finalmente encontrar la distancia de un punto a una recta.

### Ángulo entre dos rectas

Si consideramos un espacio afín euclídeo de dimensión 2 $E_2$, un problema común es hallar el ángulo que forman las rectas cuando se intersecan. En el siguiente gráfico podemos ver los 4 ángulos que se forman entre dos rectas no nulas.

Figura 3.1: Ángulo entre dos rectas en $E_2$



*Dadas las rectas $r, s \in E_2$, con $\overrightarrow{u}_r, \overrightarrow{v}_s \in \mathbb{R}^2$; vectores direcciones de las rectas $r$ y $s$ respectivamente. Se forman cuatro ángulos, en función de $\alpha \in [0, \pi/2]$, los ángulos formados están en función de $\alpha$ áng$(r, s)$ y son:*

$$
\begin{aligned}
\text{áng}(\overrightarrow{u}_r, \overrightarrow{u}_s) &= \text{áng}(-\overrightarrow{u}_r, -\overrightarrow{u}_s) = \alpha \in [0, \pi/2] \\
\text{áng}(\overrightarrow{u}_s, \overrightarrow{u}_r) &= \text{áng}(-\overrightarrow{u}_s, -\overrightarrow{u}_r) = -\alpha \in [-\pi/2, 0] \\
\text{áng}(\overrightarrow{u}_r, -\overrightarrow{u}_s) &= \text{áng}(-\overrightarrow{u}_r, \overrightarrow{u}_s) = \alpha - \pi \in [-\pi, \pi/2] \\
\text{áng}(\overrightarrow{u}_s, -\overrightarrow{u}_r) &= \text{áng}(-\overrightarrow{u}_s, \overrightarrow{u}_r) = \pi - \alpha \in [-\pi/2, \pi]
\end{aligned}
$$

*Para encontrar el ángulo entre dos rectas debemos hallar $\alpha$ que está determinado por el coseno de los ángulos directores $\overrightarrow{u}_r$ y $\overrightarrow{u}_s$ de las rectas $r$ y $s$ respectivamente, de la siguiente forma:*

$$\cos(r, s) = |\cos(\overrightarrow{u}_r, \overrightarrow{u}_s)| = \frac{\overrightarrow{u}_r \cdot \overrightarrow{u}_s}{\|\overrightarrow{u}_r\| \, \|\overrightarrow{u}_s\|} \tag{3.20}$$

Para entender manejar el ángulo entre dos rectas debemos definir y manejar el concepto de norma.

- **Norma** Sea $E_2$ un espacio afín euclídeo, para cualquier vector $\overrightarrow{u} \in V$ en este caso $\mathbb{R}^2$, como $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} \geqslant 0$, existe el siguiente número real $\|\overrightarrow{u}\|$, que llamamos norma del vector $\overrightarrow{u}$ :

$$\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}} \tag{3.21}$$

  con $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}$ el producto interno.

## 3.3. Identificación de prerrequisitos

### 3.3.1. De matrices, sistemas de ecuaciones y determinantes

#### Lógica

- **Equivalencia Lógica** Usamos la equivalencia lógica para lo solución de un sistema de ecuaciones lineales en los teoremas, tales que:

*Toda matriz $A$ de orden $m \times n$ es equivalente por filas a una matriz $R$ de orden $m \times n$ reducida por filas.*

*Toda matriz $A$ de orden $m \times n$ es equivalente por filas a una matriz escalonada reducida por filas. La matriz escalonada es única.*

*Dos sistemas de ecuaciones lineales equivalentes tienen la misma solución.*

- **Implicación** La implicación es usada para determinar si un sistema de ecuaciones tiene solución única o no.

  *Sea el sistema de ecuaciones de $n$ incógnitas de la forma $AX = B$, Si conocemos el determinante una matriz $A$ de orden $n \times n$ tal que:*

  1. *Si $|A| \neq 0$, entonces el sistema tiene solución única.*
  2. *Si $|A| = 0$, entonces el sistema no tiene solución única o tiene infinitas soluciones.*

### Conjuntos

Para definir el conjunto $N_n = \{j \in \mathbb{R} : 1 \leqslant j \leqslant n\}$ usamos conceptos de *Pertenencia*.

### Inducción

Usamos la inducción matemática para demostrar que una matriz es *Nilpotente, Idempotente e Involutiva de orden r* a continuación veamos la definición de cada una de ellas.

- **Nilpotente** Sea $A$ una matriz de orden $n \times n$, si $r \in \mathbb{N}^*$ tal que $A^r = O_n$, se dice nilpotente.

- **Idempotente** Sea $A$ una matriz de orden $n \times n$, si $r \in \mathbb{N}^*$ tal que $A^r = A$, se dice idempotente.

- **Involutiva** $A$ una matriz de orden $n \times n$, Si $r \in \mathbb{N}^*$ tal que $A^r = I_n$, se dice involutiva.

**Números reales**

- **Propiedades de cuerpo** Las propiedades de cuerpo de los números reales (suma y multiplicación) son usados para encontrar el determinante una matriz.

  *Para encontrar el determinante por menores por la $s$-ésima columna de $A = (a_{ij})_{n\times n}$ :*

  $$|A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+s} a_{is} \left| A_i^s \right|$$

  *donde $A_i^s$ es la matriz de orden $n-1$ que resulta de quitar de la matriz $A$ la fila $i$ y la columna $s$ para $i = 1, 2, \ldots n$.*

**Ecuaciones y expresiones algebraicas**

- **Ecuaciones** En el *Método de Gauss* para resolver sistemas de ecuaciones lineales, hallamos una matriz escalonada de la matriz ampliada $(A|B)$ del sistema lineal $AX = B$, veamos un ejemplo de un sistema de ecuaciones, una vez que llegamos a una matriz escalonada.

  $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 6 \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 4 \\ x_3 + 2x_4 &= 6 \\ x_4 &= 3 \end{aligned}$$

  donde $x_1, x_2, x_3$ y $x_4$ son números reales, usando las propiedades algebraicas y axiomas de los números reales podemos solucionar las ecuaciones anteriores y la solución será:

  $$\begin{aligned} &x_4 = 3 \\ &x_3 = 6 - 2x_4 = 6 - 2 \cdot 3 = 0 \\ &x_2 = 4 - x_3 - x_4 = 4 - 0 - 3 = 1 \\ &x_1 = 6 - x_2 - x_3 - x_4 = 6 - 1 - 0 - 3 = 2. \end{aligned}$$

- **Términos y factores** Usamos términos y factores en los teoremas de los determinantes.

  > *Sea la matriz $A$ de orden $n \times n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces el determinante $|\alpha A| = \alpha^n |A|$*

  Para la demostración de este teorema se usa la inducción matemática sobre $n$.

### 3.3.2. De rectas y planos

#### Números reales

- **Teoremas de cuerpo** Los teoremas de cuerpo son usamos para hallar la norma de un vector de (3.21) dentro de un espacio afín euclídeo de dimensión finita. También para encontrar la distancia de un punto a un plano (3.7) usamos expresiones algebraicas, por ejemplo, la radiación de un número real.

#### Trigonometría

- **Ángulos en un sistema de coordenadas** cuando tenemos dos rectas $r, s$ véase (3.12) con $M, N$ puntos de $r, s$ respectivamente que se intersecan en un punto $M$ dentro de un espacio afín euclídeo.

- **Sistema de medición de ángulos** Generalmente dentro de la ciencia e ingeniería se usa el *Sistema radial* con la unidad e medida *radian*. Se usa para medir la medida del ángulo entre dos rectas dentro de un espacio afín euclídeo.

- **Razones trigonométricas** Para conocer el ángulo entre dos rectas usamos el *Coseno* de un ángulo que tiene valores de 0 a $pi/2$ (agudo).

#### Funciones

- **Valor absoluto** El valor absoluto se usa para encontrar la *Distancia de un punto a un plano, distancia de un punto a una recta y Ángulo entre dos rectas*

## 3.4. Resultados de aprendizaje

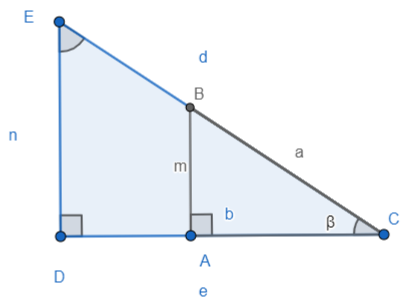
### 3.4.1. Razones trigonométricas de ángulos agudos

**Resultado**

*Conocer las definiciones de las razones trigonométricas.*

**Ilustración**

1. Dados los triángulos rectángulos $\triangle ABC$ y $\triangle ECD$, ¿cuál de las siguientes opciones representa la definición de seno del ángulo $\beta$? Justifique su respuesta.




*a*) $\operatorname{sen}\beta = \dfrac{e}{d}$ y $\operatorname{sen}\beta = \dfrac{b}{a}$.

*b*) $\operatorname{sen}\beta = \dfrac{n}{d}$ y $\operatorname{sen}\beta = \dfrac{m}{a}$.

*c*) $\operatorname{sen}\beta = \dfrac{m}{b}$ y $\operatorname{sen}\beta = \dfrac{n}{e}$.

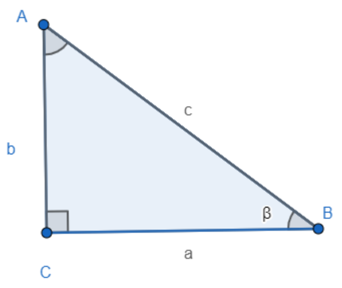
*Respuestas.*

*a*) No es la definición de *sen* porque, para el primer caso, el cateto opuesto es $n$, no $e$, y para el segundo caso, el cateto opuesto es $m$, no $b$.

*b*) Corresponde a la definición de *sen* porque, para el primer caso, el cateto opuesto es $n$ y su hipotenusa es $d$, y para el segundo caso, el cateto opuesto es $m$ y su hipotenusa es $a$.

*c*) No es la definición de *sen* porque, para el primer caso, la hipotenusa es $a$, no $m$, y para el segundo caso, la hipotenusa es $d$, no $e$. $\square$

2. ¿Cuál de las siguientes expresiones representa la definición de *tangente* del ángulo $\beta$ dado el triángulo $\triangle ABC$? Justifique su respuesta




a) $\left(\frac{b}{a}\right)$

b) $\left(\frac{b}{c}\right)$

c) $\left(\frac{c}{a}\right)$

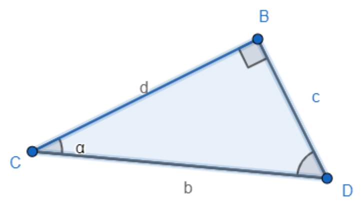
*Respuestas.*

a) Es la respuesta correcta porque es la razón entre el cateto opuesto, $b$, y el cateto adyacente, $a$.

b) No es la definición porque el cateto adyacente es $a$, no $c$.

c) No es la definición porque el cateto opuesto es $b$, no $c$ $\square$

3. Si la *cosecante* del ángulo $\hat{\alpha}$ es $\left(\frac{b}{c}\right)$, dado el triángulo $\triangle BCD$, ¿cuál es el valor de *seno* del ángulo $\alpha$?




*Respuesta.* Como la *cosecante* es el inverso multiplicativo de *seno*, tenemos que:

$$\csc\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} = \left(\frac{b}{c}\right)$$

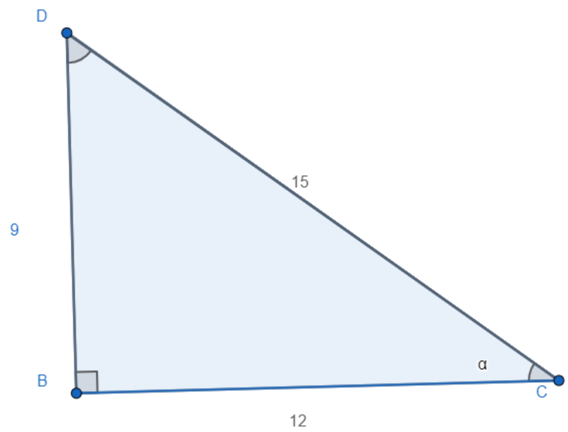
Por lo tanto, la respuesta es $\operatorname{sen}\alpha = \left(\frac{c}{b}\right)$ $\square$

**Resultado**

*Hallar las razones trigonométricas en un triángulo rectángulo.*

**Ilustración**

1. Calcular las razones trigonométricas *sen*, *cos* y *tan* del ángulo $\alpha$, dado el siguiente triángulo rectángulo con la medida de sus lados.

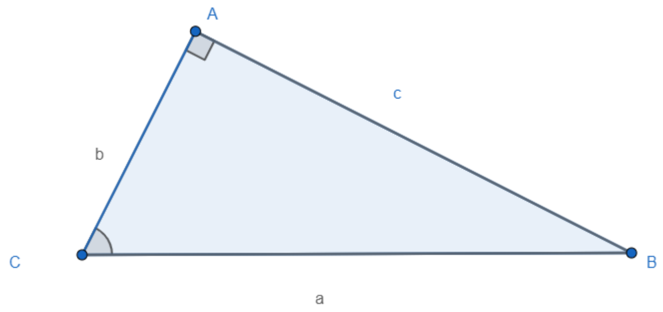



*Respuesta.* Dado que los tres lados del triángulo son conocidos, aplicamos las definiciones de razones trigonométricas. Para el ángulo $\alpha$ el cateto opuesto es 9, el cateto adyacente 12 y la hipotenusa 15.

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{9}{15} = 0,6$$
$$\cos\alpha = \frac{12}{15} = 0,8$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{9}{12} = 0,75$$

□

2. Calcular las razones trigonométricas *sen*, *cos* y *tan* del ángulo $C$, dado el siguiente triángulo rectángulo con la medida de un cateto y su hipotenusa.




*Respuesta.* Dado que falta uno de los catetos y para calcularlo vamos a utilizar el Teorema de Pitágoras con : $a = 14, \; b = 8$ y $c$ es el lado que queremos calcular.

Aplicando el Teorema de Pitágoras tenemos:

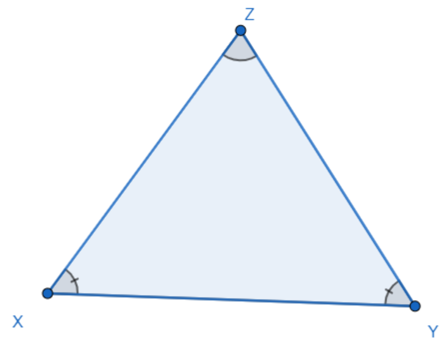
$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 \\ 14^2 &= 8^2 + c^2 \\ 196 &= 64 + c^2 \\ 196 - 64 &= c^2 \\ 132 &= c^2 \\ 11,49 &= c \end{aligned}$$

Aplicando las definiciones de razón trigonométrica:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} C &= \frac{11,49}{14} = 0,82 \\ \cos C &= \frac{8}{14} = 0,57 \\ \tan C &= \frac{11,49}{8} = 1,44 \end{aligned}$$

$\square$

3. Dado la siguiente figura:




a) ¿Es posible calcular las razones trigonométricas *sen*, *cos* y *tan* de los ángulos $\angle X$ y $\angle Y$ para el triangulo $\triangle XYZ$?

b) Añadiendo una bisectriz para el ángulo $Z$, determinar las razones trigonométricas: *seno, coseno y tangente* del ángulo $\angle X$ y $\angle Y$.

*Respuesta .*

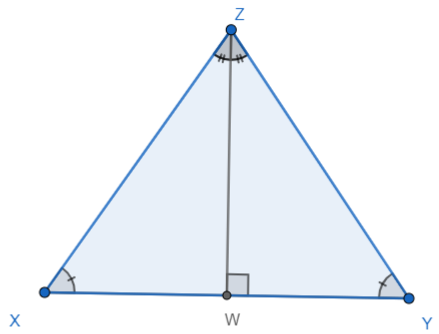
a) No es posible calcular las razones trigonométricas de los ángulos $Y$ y $X$ porque el triangulo no es rectángulo, es decir, no tiene un ángulo recto.

b) Trazamos la altura $\overline{ZW}$ respecto al lado $\overline{XY}$, como el triángulo $\triangle XYZ$ es un triángulo isósceles entonces la altura $\overline{ZW}$ coincide con la bisectriz, mediana y mediatriz por propiedad del triángulo isósceles. Se han formado dos triángulos $\triangle ZXW$ y $\triangle ZWY$. Sabemos que los lados $\overline{XZ} \cong \overline{ZY}$, además, $\overline{XW} \cong \overline{WY}$ y $\overline{ZW}$ es común para los dos triángulos formados por lo tanto los triángulos $\triangle ZXW$ y $\triangle ZWY$ son congruentes.

   Como los triángulos son congruentes entonces $\angle X \cong \angle Y$. Usando el teorema de Pitágoras, hallamos el valor del lado $\overline{ZW}$.

$$
\begin{aligned}
ZY^2 &= WY^2 + ZW^2 \\
ZW^2 &= ZY^2 - WY^2 \\
ZW^2 &= 17^2 - 8^2 = 225 \\
ZW &= 15
\end{aligned}
$$

   Entonces,




Las razones trigonométricas son:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\angle X &= \operatorname{sen}\angle Y \\ &= \frac{15}{17} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \cos\angle X &= \cos\angle Y \\ &= \frac{8}{17} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \tan\angle X &= \tan\angle Y \\ &= \frac{15}{8} \end{aligned}$$

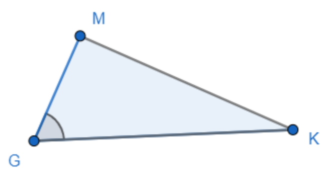
□

**Resultado**

*Aplicar las razones trigonométricas para encontrar la medida de los ángulos y lados de un triángulo rectángulo .*

**Ilustración**

1. Determinar la altura correspondiente al lado $\overline{GK}$ del triángulo rectángulo $\triangle GMK$, con $GM = 15$, $GK = 25$ y $\cos\angle G = 0{,}8$.




*Respuesta.* En el triángulo rectángulo $\triangle GMP$ usamos la definición de razón trigonométrica.

$$\begin{aligned}
\cos\angle G &= \frac{GP}{GM}\\
0{,}8 &= \frac{GP}{GM}\\
GP &= GM \cdot 0{,}8 = 15 \cdot 0{,}8\\
GP &= 12
\end{aligned}$$

Ahora hallamos la altura, usando el teorema de Pitágoras.

$$\begin{aligned}
GM^2 &= GP^2 + MP^2\\
MP^2 &= GM^2 - GP^2\\
MP^2 &= 15^2 - 12^2 = 81\\
MP &= 9
\end{aligned}$$

□

2. Encontrar la longitud del cateto adyacente y la hipotenusa de un triángulo rectángulo, dada la razón trigonométrica $\operatorname{sen}\angle A = \frac{3}{5}$ y $9$ de longitud en el cateto opuesto .

*Respuesta.* Sea $\triangle ABC$ un triángulo rectángulo donde el ángulo recto es $\angle B$

$$\operatorname{sen}\angle A = \frac{3}{5}.$$

Si el cateto opuesto al ángulo $\angle A$ mide 9. Para hallar la hipotenusa usando la definición de *razón* trigonométrica de seno será:

$$\operatorname{sen}\angle A = \frac{3}{5} = \frac{3\times 3}{3\times 5} = \frac{9}{15}$$

Obtenemos el valor de la hipotenusa. Ahora aplicando el teorema de Pitágoras hallamos el valor del otro cateto.

$$c = \sqrt{15^2 - 9^2} = \sqrt{144} = 12$$

□

3. Hallar la altura del trapecio $\square ABCD$ y el $\operatorname{sen}\angle B$, con $\overline{DC}\|\overline{AB}$, $AD = 10$, $BC = 13$ y $\operatorname{sen}\angle A = 0{,}5$ [8] .


*Respuesta esperada.* Trazamos una altura $MD$ correspondiente al lado $AB$ hacia el vértice $\hat{D}$ y otra altura $NP$ hacia el vértice $\hat{C}$, del trapecio $\square ABCD$. En el triángulo $\triangle ADM$ formado, usando la definición de *seno* hallamos la altura.

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \angle A &= \frac{MD}{AD} \\ 0{,}5 &= \frac{MD}{AD} \\ MD &= 0{,}5 \cdot AD = 0{,}5 \cdot 10 = 5 \end{aligned}$$

Ya que $\overline{DC} \| \overline{AB}$, las alturas $\overline{MD}$ y $\overline{NP}$ trazadas desde $AB$, entonces $\overline{MD} = \overline{NP}$.

Ahora en el triángulo $\triangle CNB$, hallamos la función trigonométrica *seno*, tal que:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \angle B &= \frac{NC}{CB} \\ &= \frac{5}{13} \approx 0{,}3846 \end{aligned}$$

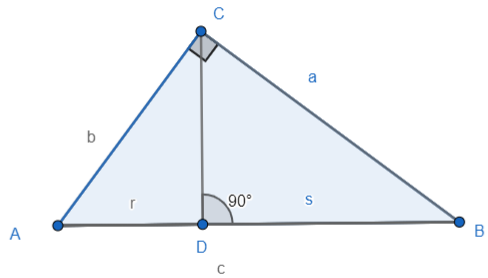
$\square$

## Resultado

*Deducir las principales identidades trigonométricas pitagóricas.*

**Ilustración**

1. Hallar la ecuación del teorema de Pitágoras aplicando semejanza. En la figura $\angle BCA$ es un ángulo recto y $\overline{CD}$ es la altura respecto a la hipotenusa del triángulo $\triangle ABC$ [8].




*Respuesta.* Tenemos que los ángulos $\angle BCA$, $\angle CDA$ y $\angle CDB$ son ángulos rectos, por lo tanto son congruentes entre sí, además, el ángulo $\angle CAB$ del triángulo $\triangle ABC$ es congruente con el ángulo $\angle BCD$ del triángulo $\triangle BCD$. Por lo tanto, los triángulos $\triangle ABC$, $\triangle CDA$ y $\triangle CDB$ son semejantes entre sí por el criterio de $AA$.

Aplicando el teorema de semejanza:

Si $\triangle ABC \sim \triangle BCD$

$$\frac{a}{c} = \frac{c_1}{a}$$
$$a^2 = c \cdot c_1$$

Si $\triangle ABC \sim \triangle CDA$

$$\frac{b}{c} = \frac{c_2}{b}$$
$$b^2 = c \cdot c_2$$

Ahora si sumamos $a^2 + b^2$ tenemos:

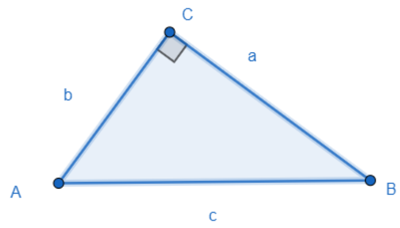
$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= c \cdot c_1 + c \cdot c_2 \\ &= c \cdot (c_1 + c_2) = c \cdot c \\ \Rightarrow a^2 + b^2 &= c^2 \end{aligned}$$

Se ha deducido el Teorema de Pitágoras con los Teoremas de semejanza de triángulos rectángulos. □

2. Demostrar la siguiente identidad trigonométrica pitagórica:

$$(\text{sen}\, \angle A)^2 + (\cos \angle A)^2 = 1$$

en un triángulo rectángulo $\triangle ABC$.




*Respuesta.* Usando el Teorema de Pitágoras se obtiene:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Dividiendo para $c^2$, obtenemos

$$\begin{aligned}\left(\frac{a^2}{c^2}\right) + \left(\frac{b^2}{c^2}\right) &= \left(\frac{c^2}{c^2}\right)\\ \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 &= 1\end{aligned}$$

Como $\operatorname{sen}\angle A = \frac{a}{c}$ y $\cos\angle A = \frac{a}{c}$, entonces:

$$(\operatorname{sen}\angle A)^2 + (\cos\angle A)^2 = 1$$

$\square$

## Resultado

*Aplicar las identidades trigonométricas pitagóricas.*

## Ilustración

1. Demostrar la siguiente identidad:

$$\left(1 + \tan^2\angle A\right)\cos^2\angle A = 1$$

para todo ángulo agudo $\angle A$.

*Respuesta.* Sea $\angle A$ un ángulo agudo. A partir de $1 + \tan^2\angle A = \sec^2\angle A$, obtenemos que

$$
\begin{aligned}
\left(1+\tan^2\angle A\right)\cos^2\angle A &= \sec^2\angle A\cos^2\angle A \\
&= (\sec\angle A\cdot\cos\angle A)^2 \\
&= 1^2 = 1;
\end{aligned}
$$

Entonces, queda demostrado que:

$$\left(1+\tan^2\angle A\right)\cos^2\angle A = 1.$$

□

2. Simplificar la siguiente expresión trigonométrica:

$$\frac{\sin\angle A}{1+\cos\angle A}+\frac{1+\cos\angle A}{\sin\angle A}$$

donde $\angle A$ es agudo.

*Respuesta.* Dado el ángulo agudo $\angle A$, obtenemos que

$$
\begin{aligned}
\frac{\sin\angle A}{1+\cos\angle A}+\frac{1+\cos\angle A}{\sin\angle A} &= \frac{\sin^2\angle A+(1+\cos\angle A)^2}{\sin\angle A\cdot(1+\cos\angle A)} \\
&= \frac{\sin^2\angle A+\cos^2\angle A+1+2\cdot\cos x}{\sin x\cdot(1+\cos x)} \\
&= \frac{2\cdot(1+\cos\angle A)}{\sin\angle A\cdot(1+\cos\angle A)} \\
&= \frac{2}{\sin\angle A} \\
&= 2\cdot\sec\angle A.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, hemos simplificado la expresión:

$$\frac{\sin\angle A}{1+\cos\angle A}+\frac{1+\cos\angle A}{\sin\angle A} = 2\cdot\sec\angle A.$$ □

## Resultado

*Conocer las definiciones de las razones trigonométricas del ángulo complementario.*

**Ilustración**

1. Hallar el valor de $x$, para que la proposición:

$$\operatorname{sen}(5x-30)-\cos(2x+50)=0$$

sea verdadera.

*Respuesta.* De $\operatorname{sen}(5x-30)-\cos(2x+50)=0$, obtenemos que

$$\operatorname{sen}(5x-30)=\cos(2x+50)$$

y del teorema de ángulos complementario, se debe verificar que:

$$\begin{aligned}(5x-30)-(2x+50)&=90\\ 7x+20&=90\\ 7x&=90\\ x&=10\end{aligned}$$

Entonces, el único número $x$ para el cual la proposición es verdadera es para $x=10$.

$\square$

2. Utilizando el teorema de ángulos complementario, calcular:

$$M=\frac{\operatorname{sen}10^\circ}{\cos 80^\circ}+\frac{\tan 20^\circ}{\cot 70^\circ}$$

*Respuesta.* Primero, analizamos si estos ángulos son complementarios, es decir si cumple con:

$$\operatorname{sen}(90-\beta)^\circ=\cos(\beta)^\circ$$

y

$$\tan(90-\alpha)^\circ=\cot(\alpha)^\circ.$$

donde $\beta=80$. Fácilmente se verifica las igualdades. De la misma forma si consideramos $\alpha=70$ se cumple la igualdad. Por lo tanto:

$$\begin{aligned}M&=\frac{\operatorname{sen}10^\circ}{\cos 80^\circ}+\frac{\tan 20^\circ}{\cot 70^\circ}\\ &=\frac{\cos 80^\circ}{\cos 80^\circ}+\frac{\cot 70^\circ}{\cot 70^\circ}\\ M&=1+1=2\end{aligned}$$

□

**Resultado**

*Aplicar las razones trigonométricas del ángulo complementario*

**Ilustración**

1. Determinar para que valores de $\alpha$ y $\beta$ los siguientes ángulos son complementarios.

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= \operatorname{sen}(2\beta) \\ \frac{\tan(2\alpha)}{\cot(\beta)} &= 1 \end{aligned}$$

*Respuesta.* Para que los ángulos $\alpha$ y $2\beta$ y, $2\alpha$ y $\beta$ sean complementarios, deben verificar que:

$$\alpha + 2\beta = 90 \tag{3.22}$$

$$3\alpha + \beta = 90 \tag{3.23}$$

Así, despejando $\alpha$ en (3.22) obtenemos que

$$\alpha = 90 - 2\beta$$

y remplazando el valor de $\alpha$ en (3.23):

$$\begin{aligned} 3(90 - 2\beta) + \beta &= 90 \\ 270 - 6\beta + \beta &= 90 \\ 5\beta &= 180 \\ \beta = \frac{180}{5} &= 36 \end{aligned}$$

luego, reemplazando el valor de $\beta$ en (3.22),

$$\alpha + 2(36) = 90$$
$$\alpha = 90 - 72 = 18.$$

Para $\alpha = 36$ y $\beta = 18$, se cumple que ángulos $\alpha, 2\beta$ y $3\alpha, \beta$ son complementarios. $\square$

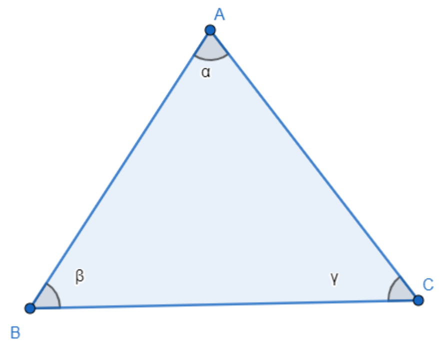
### 3.4.2. Leyes de senos y cosenos para el caso de triángulos acutángulos

#### Resultado

*Conocer la ley de senos en un triángulo acutángulo.*

#### Ilustración

1. Elegir la forma correcta de escribir la ley de senos, dado el triángulo $\triangle ABC$. Justifique su respuesta.




*a)* $\dfrac{c}{\sin(\alpha)} = \dfrac{b}{\sin(\beta)} = \dfrac{a}{\sin(\gamma)}$

*b)* $\dfrac{a}{\sin(\alpha)} = \dfrac{b}{\sin(\beta)} = \dfrac{c}{\sin(\gamma)}$

*c)* $\dfrac{a}{\sin(\alpha)} = \dfrac{c}{\sin(\beta)} = \dfrac{a}{\sin(\gamma)}$

*Respuesta esperada.* Como ley de *senos* es una proporción entre las longitudes de los lados de un triángulo y los senos de sus correspondientes ángulos opuestos. La opción correcta es :

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

respuesta correcta es la opción $b$. □

2. Escriba una variación de la *Ley de senos*, dado el triángulo anterior.

   *Respuesta esperada.* Usando el triángulo anterior. Como se trata de un proporción se puede escribir de la siguiente forma:

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

□

## Resultado

*Aplicar la ley de senos para hallar ángulos y lados de un triángulo acutángulo.*

## Ilustración

1. Calcular la medida de los lados restantes, dado el triángulo $\triangle ABC$, con $b = 15$, $\angle B = 42°$ y $\angle C = 76°$.

   *Respuesta.* Dado que los ángulos interiores de un triángulo debe ser $180°$, en un $\triangle ABC$,

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$$

$$\begin{aligned} &\angle A + 42° + 76° = 180° \\ &\angle A + 118° = 180° \\ &\angle A = 180° - 118° = 62° \end{aligned}$$

Encontramos la medida de $a$ y $c$, usando la *Ley de Senos*:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

de tal forma que:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} 62^\circ} = \frac{15}{\operatorname{sen} 42^\circ}$$

Despejando $a$

$$a = \frac{15 \cdot \operatorname{sen} 62^\circ}{\operatorname{sen} 42^\circ} = 19{,}79$$

Ahora para el lado $c$, tomamos:

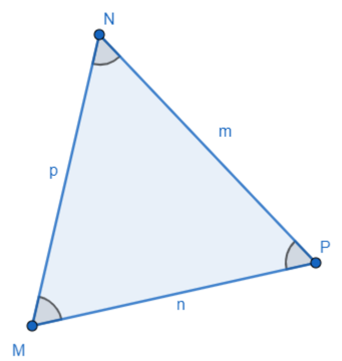
$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

Despejando $c$:

$$c = \frac{(19{,}79)\,(\operatorname{sen} 76^\circ)}{\operatorname{sen} 62^\circ} = 21{,}75$$

□

2. Calcular la medida de los lados y ángulos restantes, dado el triángulo $\triangle MNP$, con $p = 12$, $m = 8$ y $\angle P = 76^\circ$.




*Respuesta.* Dado que tenemos dos lados y un ángulo, usando la *Ley de Senos* podemos hallar la medida del ángulo $M$, tal que:

$$\frac{p}{senP} = \frac{m}{\operatorname{sen} M} = \frac{n}{\operatorname{sen} N}$$

usaremos la igualdad:

$$\frac{p}{\operatorname{sen} P} = \frac{m}{\operatorname{sen} M}$$

despejando a $\operatorname{sen} M$.

$$\operatorname{sen} M = \frac{m \cdot \operatorname{sen} P}{p}$$
$$\operatorname{sen} M = \frac{8 \cdot \operatorname{sen} 76^\circ}{12} = 0{,}6469$$

sacando la inversa del seno,

$$\operatorname{sen}^{-1} M = 0{,}6469$$
$$M = 40^\circ{,}18$$

dado que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es de $180^\circ$,

$$180^\circ = \angle M + \angle N + \angle P$$
$$180^\circ = 40{,}18^\circ + 76^\circ + \angle P$$
$$\angle N = 63{,}42^\circ$$

Ahora, usando la la ley de senos.

$$\frac{p}{\operatorname{sen} P} = \frac{n}{\operatorname{sen} N}$$

Despejando $n$

$$n = \frac{p \cdot \operatorname{sen} N}{\operatorname{sen} P}$$
$$n = \frac{12 \cdot \operatorname{sen}(63{,}42^\circ)}{\operatorname{sen}(76^\circ)} = 11{,}09$$

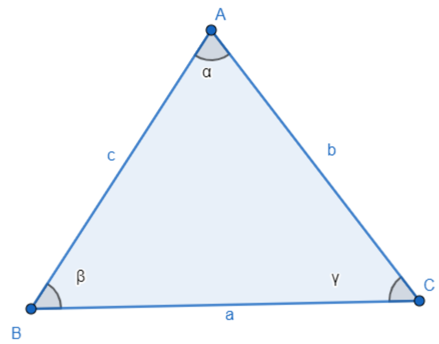
$\square$

## Resultado

*Conocer la Ley de Cosenos en un triángulo acutángulo.*

## Ilustración

1. Escribir la *Ley de cosenos* con respecto al lado $a$ y $b$, dado el triángulo $\triangle ABC$.




*Respuesta esperada.* Para encontrar un lado, basta con elevar al cuadrado las variables de los otros dos lados, menos el doble producto de ambas variables, por el coseno del ángulo que es opuesto al lado que deseamos encontrar [5] . Por lo tanto, para el lado $a$ y $b$ será:

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

□

## Resultado

*Aplicar la ley de cosenos para hallar ángulos y lados de un triángulo acutángulo.*

## Ilustración

1. Calcular la medida de los lados y ángulos restantes, dado el triángulo $\triangle ABC$, con $a = 13$, $c = 19$ y $\angle B = 55°$.

   *Respuesta esperada.* Mediante el uso de la ley de cosenos, obtenemos que

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\angle B$$
$$b^2 = 13^2 + 19^2 - 2(13)(19) \cdot \cos(55°)$$
$$b^2 = 169 + 361 - 494(0{,}5735)$$
$$b^2 = 246{,}6532$$
$$b = 15{,}7052$$

Luego, volvemos aplicar la ley de cosenos para hallar el ángulo $A$:

$$\begin{aligned}
a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \angle A \\
a^2 - b^2 - c^2 &= -2bc \cdot \cos \angle A \\
\cos \angle A &= \frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc} \\
\cos \angle A &= \frac{13^2 - 15{,}7052^2 - 19^2}{-2(15{,}7052)(19)} = 0{,}7350
\end{aligned}$$

Finalmente, calculando el coseno inverso, obtenemos que.

$$\angle A = \cos^{-1}(0{,}7350) = 42{,}69° \qquad \square$$

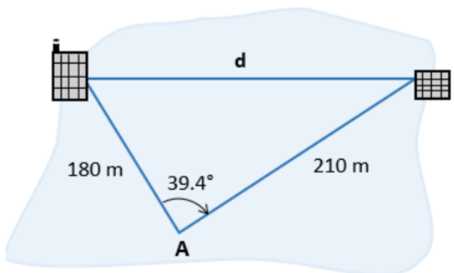
### 3.4.3. Aplicaciones

#### Resultado

*Calcular distancias entre puntos inaccesibles.*

#### Ilustración

1. Una persona desea calcular la distancia entre dos edificios, se sabe que el ángulo formado por los dos edificios y su posición actual $A$ es de $39{,}4°$. Además, él se encuentra en el punto $A$, y solo cuenta con las distancias respecto a los dos edificios, $180m$ y $210m$, respectivamente, ¿Qué distancia hay entre los dos edificios?

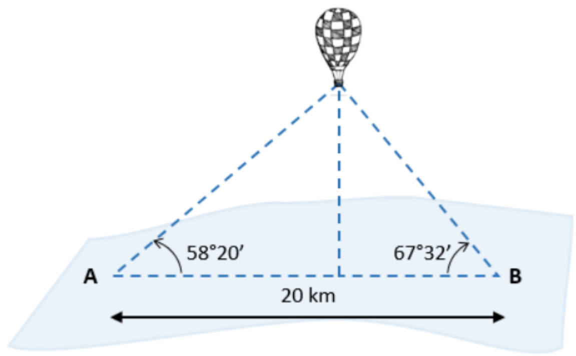



*Respuesta esperada.* Dado que tenemos dos lados y su ángulo, usaremos la ley de cosenos.

$$d^2 = (180)^2 + (210)^2 - 2(180)(210)\cos(39{,}4^\circ)$$
$$d = \sqrt{(180)^2 + (210)^2 - 2(180m(210)\cos(39{,}4^\circ)}$$
$$d = \sqrt{18081{,}34}$$
$$d = 134{,}47$$

La distancia entre los dos edificios es $134{,}47$ metros. □

2. Los ángulos de elevación de un globo con respecto a los puntos A y B son de $58{,}33^\circ$ y $67{,}33^\circ$ respectivamente. La distancia entre 2 puntos A y B es de 20 km. ¿A qué altura del suelo se encuentran?




*Respuesta esperada.* Hallamos el ángulo faltante, tal que:

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$
$$\angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B$$
$$\angle C = 180^\circ - 58{,}33^\circ - 67{,}53^\circ = 54{,}14^\circ$$

El lado a es opuesto al ángulo $\angle A$,recurrimos aplicar la ley de senos.

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

Usamos

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

Despejando $a$

$$a = \frac{c \cdot \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} C}$$
$$a = \frac{20 \cdot \operatorname{sen}(58{,}33°)}{\operatorname{sen}(54{,}14°)} = 21$$

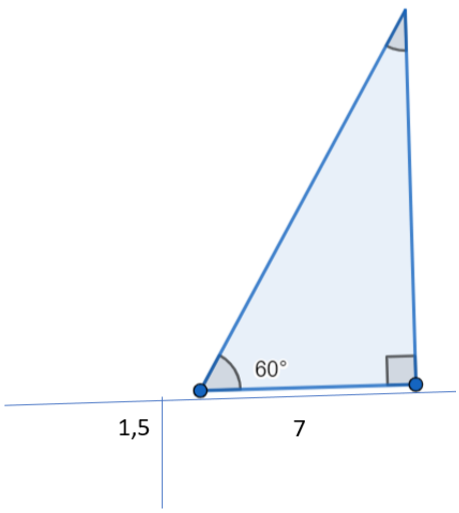
Para obtener el cateto opuesto, es la altura buscada.

$$\operatorname{sen} 67{,}53° = \frac{h}{20{,}95}$$
$$h = (\operatorname{sen} 67{,}53)(21) = 19{,}40$$

La altura a la que esta el globo es 19.40 km □

3. Una persona sostiene un péndulo a $7m$ de la base de la torre, el ángulo que forma el péndulo con la torre es de $60°$, la persona que sujeta el péndulo mide $1,5m$. ¿Cuál es la altura de la torre? [1]

*Respuesta esperada.* Realizamos un gráfico para guiarnos



Usando la definición de tangente de $60°$

$$\tan 60° = \frac{b}{c} = \frac{b}{7}$$
$$b = 7 \cdot \tan 60° = 7 \cdot 1,73 = 12,11$$

como la persona mide 1.5m entonces la torre medirá: $12,11m + 1,5m = 13,61m$. □

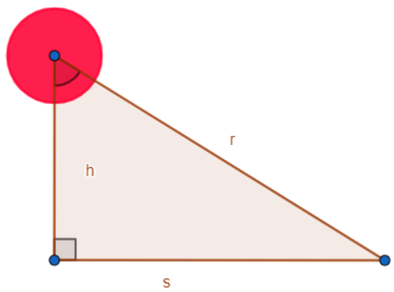
## Resultado

*Resolver problemas relacionados con la física.*

## Ilustración

1. Calcule la energía potencial gravitacional de una pelota de $5kg$ que se encuentra en la cima de una rampa, de longitud de la rampa $15m$ y la medida del soprte del suelo es $10m$.

*Respuesta.* Graficamos el escenario tal que:




Para obtener la energía potencial gravitacional debemos obtener la altura h a la que está situada la pelota, usando el teorema de Pitágoras:

$$h^2 = r^2 - s^2 = 15^2 - 10^2$$
$$= 125 \approx 11{,}18$$

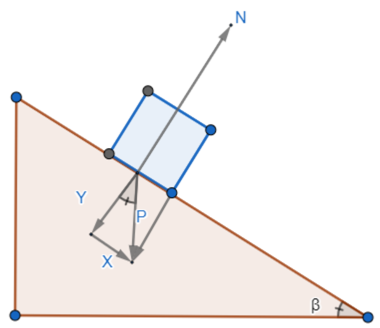
Como la energía potencial gravitacional es $E_p = mgh$,con g la gravedad, tenemos:

$$E_p = mgh = 1{,}5 \cdot 9,8 \cdot 11{,}18 = 164,34J$$

□

2. Tenemos un caja en reposo sobre una superficie inclinada de peso $P = 20kg$ y ángulo de inclinación $\beta = 30°$, realice la descomposición de fuerzas del peso de la caja.

   *Resultado.* Para ayudarnos realizamos un gráfico de apoyo.




   Vemos que se ha formado un triángulo $\triangle XYP$ con $N$ la normal y podemos descomponer el peso $P$ de la caja, ahora para obtener las componentes del peso $P$, tomando $g = 9{,}8m/s^2$ Para la componente en $X$ del peso tenemos:

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{X}{P}$$
$$X = P \cdot \operatorname{sen}\beta = 20 \cdot \operatorname{sen} 30° = 20 \cdot \frac{1}{2}$$
$$X = 10$$

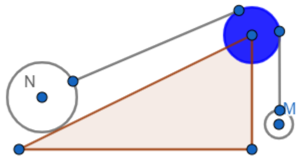
   Del misma forma para $Y$

$$\cos\beta = \frac{Y}{P}$$
$$Y = P \cdot \cos\beta = 20 \cdot \cos 30° = 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$Y = 10\sqrt{3}$$

□

3. Una bola de masa $N$ está sobre un plano inclinado sin rozamiento con un ángulo $\theta$. La masa $N$ está unida a una bola de masa $M$, mediante una cuerda ideal que pasa por una polea en el vértice del

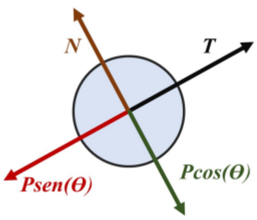
plano inclinado. Determine el ángulo del plano inclinado para que las bolas estén en equilibrio [3].




*Resultado.* tenemos el peso de la bola M $P_M$ y de la bola N $P_N$, la tensión para que se encuentren en reposo es:

$$T = P_M = P_N$$

si realizamos una descomposición de fuerzas de la bola N tenemos:




Como la bola N está en reposo,

$$N = P_N \cos(\theta)$$
$$P_N \sin(\theta) = T$$

Las tensiones son las mismas por lo tanto

$$Ng = P_N \sin(\theta)$$
$$Ng = Mg \sin(\theta)$$
$$\sin(\theta) = \frac{M}{N}$$
$$\theta = \arcsin\left(\frac{M}{N}\right)$$

□

### 3.4.4. Razones trigonométricas de ángulos en un sistema de coordenadas

Los requerimientos fundamentales son el tema anterior, sistemas de coordenadas. De la Geometría Euclídea, medidas angulares y propiedades básicas sobre círculos y circunferencias.

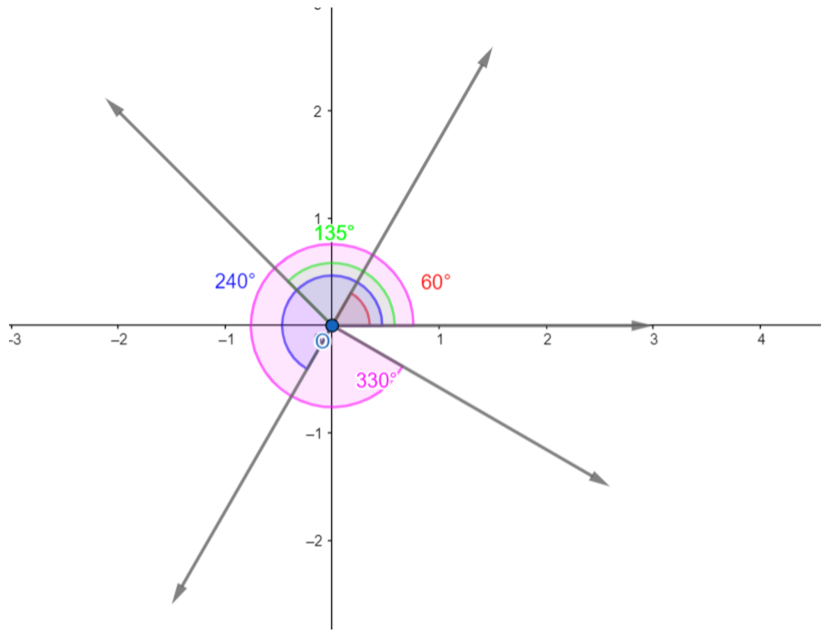
**Resultados**

*Comprender los ángulos de un sistema de coordenadas*

**Ilustración**

1. Dibujar en un sistema de coordenadas los ángulos de medida 60, 135, 240 y 330 grados. Y escribir en que cuadrante se encuentran.

   *Respuesta.*

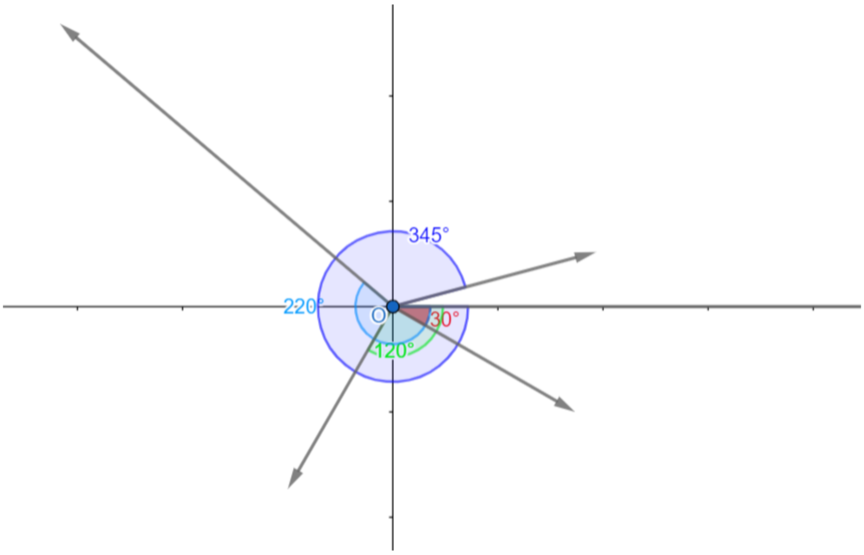



- El ángulo $60°$ está en el primer cuadrante.
- El ángulo $135°$ está en el segundo cuadrante.
- El ángulo $240°$ está en el tercer cuadrante.
- El ángulo $330°$ está en el cuarto cuadrante.

$\square$

2. *Dibujar en un sistema de coordenadas los ángulos de medida -30, -135, -210 y -300 grados. Y escribir en que cuadrante se encuentran*

*Respuesta .* La representación gráfica de los ángulos $-30°, -135°, -210°$ y $-300°$ es




Además,

- El ángulo $-30°$ está en el cuarto cuadrante.
- El ángulo $-120°$ está en el tercer cuadrante.
- El ángulo $-220°$ está en el segundo cuadrante.
- El ángulo $-345°$ está en el primer cuadrante.

$\square$

3. Dado los ángulos de medida $\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$ y $\frac{16\pi}{9}$ radianes. Escribir en que cuadrante se encuentran. Justifique su respuesta

*Respuesta esperada.*

*a*) Dado que $\frac{\pi}{3} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, entonces el ángulo está situado en el primer cuadrante.

*b*) Dado que $\frac{5\pi}{6} \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, entonces el ángulo se encuentra situado en el segundo cuadrante.

*c*) Dado que $\frac{7\pi}{6} \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, entonces el ángulo se encuentra situado en el tercer cuadrante.

*d*) Dado que $\frac{16\pi}{9} \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$, entonces el ángulo se encuentra situado en el cuarto cuadrante.

□

4. En un sistema de coordenadas los ángulos de medida $-\frac{\pi}{3}, -\frac{5\pi}{6}, -\frac{7\pi}{6}$ y $-\frac{16\pi}{9}$. Escribir en que cuadrante se encuentran.

   Justifique su respuesta.

   *Respuesta.*

   *a*) Dado que $-\frac{\pi}{3} \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$, entonces el ángulo se encuentra situado en el cuarto cuadrante.

   *b*) Dado que $-\frac{5\pi}{6} \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, entonces el ángulo se encuentra situado en el tercer cuadrante.

   *c*) Dado que $-\frac{7\pi}{6} \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, entonces el ángulo se encuentra situado en el segundo cuadrante.

   *d*) Dado que $-\frac{16\pi}{9} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, entonces el ángulo está situado en el primer cuadrante.

□

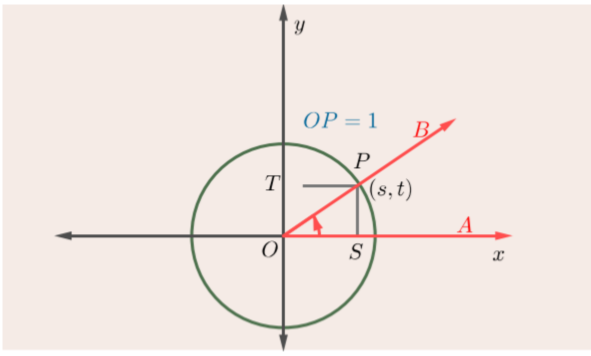
### 3.4.5. Razones trigonométricas en un ángulo en un sistema de coordenadas

#### Resultado

*Conocer la definición de las razones trigonométricas en un sistema de coordenadas.*

**Ilustración**

1. Dado la figura adjunta, halle las razones trigonométricas *sen*, *cos* y *tan* del $\angle AOB$, considerando la circunferencia unidad.




*Respuesta esperada.*

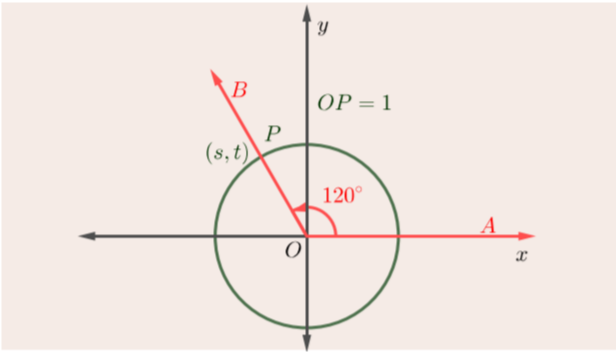
Para ello, además del ángulo ya indicado, consideremos la circunferencia unidad. Sea $P$ la intersección de esta circunferencia y el lado final $\overrightarrow{OB}$. Sean $s$ y $t$ las coordenadas de $P$ (abscisa y ordenada, respectivamente), y $S$ y $T$ las proyecciones de $P$ en los ejes de las abscisas y de las ordenadas, respectivamente:

Las razones trigonométricas del ángulo agudo $\angle AOB$ serán:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sen} \angle AOB &= \frac{PS}{OP} = \frac{t}{1} = t \\
\cos \angle AOB &= \frac{SO}{OP} = \frac{s}{1} = s \\
\tan \angle AOB &= \frac{PS}{SO} = \frac{t}{s}
\end{aligned}
$$

□

2. Dado la figura adjunta, en el segundo cuadrante, halle las razones trigonométricas del $\angle AOB = 120°$, considerando la circunferencia de radio $1$.




*Respuesta esperada.* Para ello, además del ángulo ya indicado, consideremos la circunferencia de radio $1$. Sea $P$ la intersección de esta circunferencia y el lado final $\overrightarrow{OB}$. Sean $s$ y $t$ las coordenadas de $P$ (abscisa y ordenada, respectivamente), y $S$ y $T$ las proyecciones de $P$ en los ejes de las abscisas y de las ordenadas, respectivamente:

El triángulo rectángulo $\triangle PSO$ mide 60 grados; pues la suma de $120° + 60° = 180°$ la hipotenusa de este triángulo es $\overline{OP}$ y mide $1$.

Como hemos analizado la razón trigonométrica en un triángulo rectángulo, determinamos la medida de los catetos $\overline{OS}$ y $\overline{PS}$ En efecto, tenemos que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \angle POS &= \frac{PS}{1} = PS \\ \operatorname{sen} \angle 60° &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \Rightarrow PS &= \frac{\sqrt{3}}{2} = t \end{aligned}$$

Para *Coseno*:

$$\begin{aligned} \cos \angle POS &= \frac{OS}{1} = OS \\ \cos \angle 60° &= \frac{1}{2} \\ \Rightarrow OS &= \frac{1}{2} = s \end{aligned}$$

Dado que el punto $P$ está en el segundo cuadrante, las coordenadas del punto $P$ son

$$\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$\square$

**Resultado**

*Calcular razones trigonométricas en un sistema de coordenadas.*

**Ilustración**

1. Determine las razones trigonométricas *seno, coseno, tangente, secante, cosecante y cotangente* del ángulo formado por el vector que pasa por el punto $(1, 2)$.

   *Respuesta esperada.* Dado que el punto $P(1, 2)$ se encuentra en el primer cuadrante, usando el Teorema de Pitágoras calculamos $r = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$. Con esto podemos calcular las razones trigonométricas:

$$\begin{array}{ll} \operatorname{sen}\theta = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5} & \csc\theta = \frac{\sqrt{5}}{3} \\ \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} & \sec\theta = \sqrt{5} \\ \tan\theta = 3 & \cot\theta = \frac{1}{3} \end{array}$$

□

2. Calcular $\operatorname{sen} 210°$ y $\cos 210°$

   *Respuesta esperada.* Dado que el ángulo $210°$ se encuentra en el tercer cuadrante.

   Tal que,

$$210 - 180 = 30$$

   Entonces

$$\operatorname{sen} 210° = -\operatorname{sen} 30° = -\frac{1}{2}$$
$$\cos 210° = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

□

3. Calcular $\tan 315°$ y $\cot 315°$

   *Respuesta esperada.* Dado que $315°$ se encuentra en el cuarto cuadrante. por lo tanto,

$$315 = 360 - 45$$

Entonces

$$\tan 315° = -\tan 45° = -1 \quad \text{y} \quad \cot 315° = -\cot 45° = -1$$

□

**Resultado**

*Aplicar las razones trigonométricas en un sistema de coordenadas.*

**Ilustración**

1. Determine el signo de las siguientes razones trigonométricas en los diferentes cuadrantes de un sistema de coordenadas.

   *a*) $\operatorname{sen}\theta$, con $(x, y)$ coordenadas de un vector con ángulo $\theta$.

   *b*) $\tan\theta$, con $(x, y)$ coordenadas de un vector con ángulo $\theta$.

*Respuestas.*

*a*) Usando la definición de razón trigonométrica en un sistema de coordenadas, tenemos que $\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r}$. Ya que $r$ siempre es positivo. Analizamos el signo de $y$ en cada cuadrante.

En el primer y segundo cuadrante $y > 0$, en el tercero y el cuarto $y < 0$. Entonces, $\operatorname{sen}\theta > 0$ en el primer y segundo cuadrante y $\operatorname{sen}\theta < 0$ en el tercer y cuarto cuadrante.

*b*) Usando la definición de razón trigonométrica en un sistema de coordenadas, tenemos que $\tan\theta = \frac{y}{x}$.

Analizamos cuando $\tan\theta$ es positivo, lo es cuando $x > 0$ y $y > 0$ ó $x < 0$ y $y < 0$, por lo tanto, esto ocurre en el primer y el tercer cuadrante. Ahora analizamos cuando $\tan\theta$ es negativo. Es negativo cuando $x > 0$ y $y < 0$ ó $x < 0$ y $y > 0$, por lo tanto, esto ocurre en el segundo y cuarto cuadrante.

□

**Resultado**

*Obtener las identidades trigonométricas pitagóricas en un sistema de referencia.*

**Ilustración**

1. Considere una circunferencia de radio $r$ y un punto $P$ con coordenadas $(x, y)$ sobre ella, demostrar:

   $$(\cos\theta)^2 + (\operatorname{sen}\theta)^2 = 1$$

   *Respuesta.* Sea una circunferencia de radio $r$ y un punto $P$ sobre ella. Dado que el punto $P$ pertenece a la circunferencia de radio $r$, satisface la ecuación

   $$x^2 + y^2 = r^2$$

   Luego, dividiendo la ecuación anterior entre $r^2$ obtenemos que:

   $$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2}$$
   $$\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1$$
   $$(\cos\theta)^2 + (\operatorname{sen}\theta)^2 = 1 \qquad \square$$

2. Considere una circunferencia de radio $r$ y un punto $P$ con coordenadas $(x, y)$ sobre ella, demostrar

   $$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$$

   *Respuesta.* Sea una circunferencia de radio $r$ y un punto $P$ sobre ella. Dado que el punto $P$ pertenece a la circunferencia de radio $r$, satisface la ecuación

   $$x^2 + y^2 = r^2$$

   Luego, usando el teorema de Pitágoras y dividiendo la ecuación $x^2 + y^2 = r^2$ entre $y^2$ obtenemos que:

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{y^2} = \frac{r^2}{y^2}$$
$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1 = \left(\frac{r}{y}\right)^2$$
$$(\cot\theta)^2 + 1 = (\csc\theta)^2$$

□

3. *Considere una circunferencia de radio $r$ y un punto $P$ con coordenadas $(x, y)$ sobre ella, demostrar*

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$

*Respuesta.* Sea una circunferencia de radio $r$ y un punto $P$ sobre ella. Dado que el punto $P$ pertenece a la circunferencia de radio $r$, satisface la ecuación

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Luego, usando el teorema de Pitágoras y dividendo la ecuación $x^2 + y^2 = r^2$ entre $y^2$ obtenemos:

$$\frac{x^2}{x^2} + \frac{y^2}{x^2} = \frac{r^2}{x^2}$$
$$1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \left(\frac{r}{x}\right)^2$$
$$1 + (\tan\theta)^2 = (\sec\theta)^2$$
$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$

□

## Resultado

*Aplicar las identidades trigonométricas pitagóricas en un sistema de coordenadas.*

## Ilustración

1. Calcular $\tan\theta$, si

$$\csc\theta = \sqrt{7} \quad \text{y} \quad \cot\theta < 0.$$

*Respuesta.* A partir de $\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$, obtenemos que:

$$\begin{aligned}
\cot^2\theta + 1 &= (\sqrt{7})^2 \\
\cot^2\theta + 1 &= 7 \\
\cot^2\theta &= 6 \\
\cot\theta &= \pm\sqrt{6}
\end{aligned}$$

Pero $\cot\theta < 0$, así que $\cot\theta = -\sqrt{6}$.

Como $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$, entonces tenemos

$$\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta} = \frac{1}{-\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{6}}{6}$$ □

2. Simplificar la expresión:

$$\sin(x)\cos^2(x) - \sin(x)$$

*Respuesta esperada.* Usamos la identidad $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$, despejando $-\sin^2(x)$ entonces:

$$\cos^2(x) - 1 = -\sin^2(x)$$

Entonces, al reemplazar a esta identidad, tenemos:

$$\begin{aligned}
\sin(x)\left(\cos^2(x) - 1\right) &= \sin(x)\left(-\sin^2(x)\right) \\
&= \sin^3(x)
\end{aligned}$$ □

3. *Representar la expresión trigonométrica*

$$\csc^2(x) - \cot(x) - 3$$

*en forma factorizada.*

*Respuesta esperada.*

Usamos la identidad Pitagórica $1 + \cot^2(x) = \csc^2(x)$. Luego, sustituyendo:

$$\begin{aligned}
&\csc^2(x) - \cot(x) - 3 \\
=&1 + \cot^2(x) - \cot(x) - 3 \\
=&\cot^2(x) - \cot(x) - 2 \\
=&(\cot(x) - 2)(\cot(x) + 1)
\end{aligned}$$

□

### 3.4.6. Ley de senos y cosenos generalizadas

**Resultado**

*Conocer la ley de Senos y Cosenos generalizada.*

**Ilustración**

1. Dado un triángulo $\triangle ABC$ en un sistema de coordenadas, enuncie la *Ley de senos y cosenos*

   *Respuestas.*

   *a*) *Ley de senos*:

   En el triángulo $\triangle ABC$, se cumple que:

   $$\frac{\operatorname{sen}\angle A}{BC} = \frac{\operatorname{sen}\angle B}{AC} = \frac{\operatorname{sen}\angle C}{AB}.$$

   En otras palabras, el cociente entre el seno de un ángulo del triángulo y la longitud del lado opuesto a ese ángulo es constante para el triángulo [7].

   *b*) *Ley de cosenos*:

   En el $\triangle ABC$, las siguientes proposiciones son verdaderas:

   $$\begin{aligned}
   AB^2 &= AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos\angle C \\
   AC^2 &= AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\angle B \\
   BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos\angle A
   \end{aligned}$$

En otras palabras, el cuadrado de la longitud de un lado del triángulo es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros lados menos el doble producto de las longitudes de esos lados y el coseno del ángulo comprendido entre dichos lados [7]. □

2. ¿Cuál es la diferencia con de esta definición con la vista en la sección anterior? Justifique su respuesta.

   *Respuesta.* La diferencia es que la generalización se extiende ángulos mayores de 90 grados. □

### Resultado

*Aplicar la ley de senos y cosenos par encontrar razones trigonométricas y medida de los lados .*

### Ilustración

Ejemplos de evaluación para este resultado de aprendizaje.

1. Dado el $\triangle ABC$ es tal que :

$$AC = 7, \quad \angle A = 30^\circ \quad \text{y} \quad \angle C = 105^\circ.$$

   Aplicar la ley de senos para determinar las longitudes de los otros dos lados.

   *Respuesta esperada.* La suma de los ángulos mide 180, por tanto, el ángulo $\angle B$ mide 45 grados. Para determinar las longitudes de los otros dos lados

$$\frac{\operatorname{sen}\angle A}{BC} = \frac{\operatorname{sen}\angle B}{AC};$$

   es decir, tenemos

$$\frac{\operatorname{sen}30^\circ}{BC} = \frac{\operatorname{sen}45^\circ}{7}$$

   Como

$$\operatorname{sen}30^\circ = \frac{1}{2} \quad y \quad \operatorname{sen}45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

   Despejamos $BC$ de donde,

$$BC = \frac{7\sqrt{2}}{2}.$$

Usando nuevamente, la ley de senos

$$\frac{sen\angle C}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{14}$$

despejando $AB$

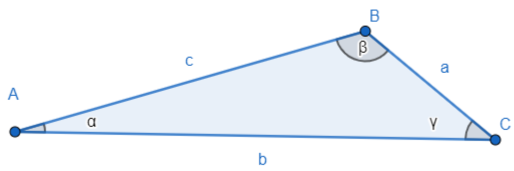
$$AB = \frac{14\,\mathrm{sen}\,105^\circ}{\sqrt{2}} = 7\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,105^\circ$$

entonces

$$AB \approx 9{,}56218 \quad y \quad BC \approx 4{,}94975$$

$\square$

2. Dado el triángulo $\triangle ABC$, dado $a = 8$, $b = 19$ y $c = 14$, encuentre la medida de los ángulos.




*Respuesta.* Dado que tenemos los tres lados podemos aplicar la ley de cosenos para par encontrar el lado b.

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$\cos\beta = \frac{b^2 - a^2 - c^2}{-2ac} = \frac{19^2 - 8^2 - 14^2}{-2(8)(14)} \approx -0{,}45089$$

como $\cos B$ es negativo, entonces $B$ es un ángulo obtuso.

$$\beta = 116{,}80^\circ$$

Por lo tanto el ángulo $A$ y el ángulo $C$ son agudos. Ahora usamos la ley de senos para hallar los ángulos faltantes,

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

entonces,

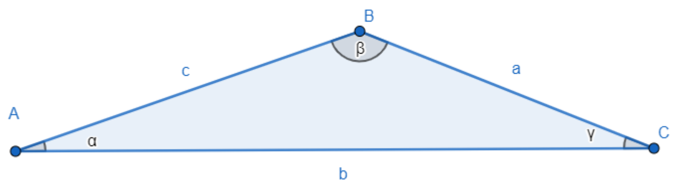
$$\frac{8}{\sin\alpha} = \frac{19}{\sin 116{,}80°}$$
$$\sin\alpha = \frac{8\sin 116{,}80°}{19}$$

Usando la calculadora $\alpha = 22{,}08°$ de la misma forma:

$$\sin\gamma = \frac{14\sin 116{,}80°}{19}$$
$$\gamma = 41{,}12°$$

□

3. Dado el triángulo $\triangle ABC$, dado $a = 11$, $b = 5$ y $\gamma = 20°$, encuentre la medida de los ángulos y lados.




*Respuesta.* Usando la ley de cosenos hallamos c, tal que:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$
$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}$$
$$= \sqrt{11^2 + 5^2 - 2(11)(5)(\cos 20°)} = 6{,}53$$

Ahora usando la ley de senos,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Despejamos $\operatorname{sen}\alpha$,

$$\sin\alpha = \frac{11\sin 20°}{6{,}53}$$
$$\alpha = 144{,}82°$$

de la misma forma para $\operatorname{sen}\beta$,

$$\sin\beta = \frac{5\sin 20^\circ}{6{,}53}$$
$$\beta = 15{,}2^\circ$$

□

### 3.4.7. Razones trigonométricas de suma y resta de ángulos en sistema de coordenadas.

**Resultado**

*Conocer las razones trigonométricas de sumas y restas.*

**Ilustración**

1. Identifique, dado los ángulos $\angle A$ y $\angle B$ en un sistema de coordenadas, las proposiciones ¿Cuál de las siguientes proposiciones es la correcta?

   *a*) $\tan(\angle A + \angle B) = \dfrac{\tan\angle A + \tan\angle B}{1 + \tan\angle A \tan\angle B}$

   *b*) $\operatorname{sen}(\angle A - (-\angle B)) = \operatorname{sen}\angle A \cos\angle B + \operatorname{sen}\angle B \cos\angle A$

   *c*) $\cos(\angle A + \angle B) = \operatorname{sen}\angle A \cos\angle B - \operatorname{sen}\angle A \operatorname{sen}\angle B$

   *d*) $\tan(-\angle A - \angle B) = \frac{\tan -\angle A - \tan\angle B}{1 + \tan -\angle A \tan\angle B}$

   *Respuestas.*

   *a*) La forma correcta es: $\tan(\angle A + \angle B) = \dfrac{\tan\angle A + \tan\angle B}{1 + \tan\angle A \tan\angle B}$

   *b*) Está escrita de forma correcta

   *c*) La forma correcta es: $\cos(\angle A + \angle B) = \cos\angle A \cos\angle B - \operatorname{sen}\angle A \operatorname{sen}\angle B$.

   *d*) Está escrita de forma correcta.

□

2. Analice el caso de las razones trigonométricas de sumas y restas, cuando $\angle A = \angle B$.

*Respuesta.* Trabajamos ahora con el caso especial en que $\angle A = \angle B$. Usando la fórmula de la suma del seno tenemos:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 2\angle A &= \sin(\angle A + \angle A)\\ &= \operatorname{sen}\angle A\cos\angle A + \operatorname{sen}\angle A\cos\angle A\\ &= 2\operatorname{sen}\angle A\cos\angle A\end{aligned}$$

En el caso de la suma de cosenos tenemos:

$$\begin{aligned}\cos 2\angle A &= \cos(\angle A + \angle A)\\ &= \cos\angle A\cos\angle A - \operatorname{sen}\angle A\operatorname{sen}\angle A\\ &= \cos^2\angle A - \operatorname{sen}^2\angle A\end{aligned}$$

Usando la identidad pitagórica $\operatorname{sen}^2\angle A + \cos^2\angle A = 1$ tenemos:

$$\begin{aligned}\cos 2\angle A =& \cos^2\angle A - \left(1 - \cos^2\angle A\right)\\ =& 2\cos^2\angle A - 1\\ =& \left(1 - \operatorname{sen}^2\angle A\right) - \operatorname{sen}^2\angle A\\ =& 1 - 2sen^2\angle A\end{aligned}$$

Obtenemos, las fórmulas de doble ángulo:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 2\angle A &= 2\operatorname{sen}\angle A\cos\angle A\\ \cos 2\angle A &= \cos^2\angle A - \operatorname{sen}^2\angle A\\ &= 2\cos^2\angle A - 1\\ &= 1 - 2\operatorname{sen}^2\angle A\end{aligned}$$

$\square$

## Resultado

*Aplicar las identidades trigonométricas de suma y resta de ángulos para encontrar razones trigonométricas.*

## Ilustración

1. Use la suma de ángulos para calcular el valor exacto de:

$$\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$$

Justifique de su respuesta.

*Respuesta.* Podemos expresar al ángulo como una suma de ángulos más simples

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) &= \cos\left(\frac{4\pi}{12} + \frac{3\pi}{12}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

Usamos la suma de ángulos de coseno, tenemos:

$$\begin{aligned} \cos(A+B) &= \cos(A)\cos(B) - \sin(A)\sin(B) \\ \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \end{aligned}$$

Entonces el valor exacto es $\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$. □

2. Encuentre el valor exacto de:

$$\operatorname{sen} 105°$$

*Respuesta.* Tenemos que $105° = 60° + 45°$, por lo tanto:

$$\operatorname{sen} 105° = \operatorname{sen}(60° + 45°)$$

Aplicando el seno de la suma de ángulos, obetenemos

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} 105° &= \operatorname{sen} 60° \cos 45° + \operatorname{sen} 45° \cos 60° \\
&= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}
\end{aligned}$$

$\square$

3. Calcule $\tan 105°$

   *Respuesta.* Podemos expresar $60° + 45° = 105°$, aplicando la tangente de la suma de ángulos.

$$\begin{aligned}
\tan(60° + 45°) &= \frac{\tan 60° + \tan 45°}{1 - \tan 60° \cdot \tan 45°} \\
&= \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}\cdot 1} = \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

   Simplificando y racionalizando,

$$\begin{aligned}
\tan(60° + 45°) &= \frac{(\sqrt{3}+1)}{(1-\sqrt{3})} \cdot \frac{(1+\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3})} = \frac{4+2\sqrt{3}}{-2} = -2-\sqrt{3} \\
\tan(105°) &= -2-\sqrt{3}
\end{aligned}$$

$\square$

4. Demostrar la siguiente identidad trigonométrica:

$$\frac{\operatorname{sen} u°}{1+\cos u°} = \frac{1-\cos u°}{\operatorname{sen} u°}$$

   válida valores de $u$ distinto de 180 y 90 grados.

*Respuesta.*

Así, si sen $u^\circ > 0$, tenemos

$$\frac{\operatorname{sen} u^\circ}{1+\cos u^\circ} = \frac{1-\cos u^\circ}{\operatorname{sen} u^\circ}$$

y $\sin \operatorname{sen} u^\circ < 0$, entonces

$$-\frac{\operatorname{sen} u^\circ}{1+\cos u^\circ} = -\frac{1-\cos u^\circ}{\operatorname{sen} u^\circ}$$

Entonces,

$$\frac{\operatorname{sen} u^\circ}{1+\cos u^\circ} = \frac{1-\cos u^\circ}{\operatorname{sen} u^\circ}$$

□

## Resultado

*Usar las razones trigonométricas de múltiplos de ángulos, para encontrar valores de razones trigonométricas.*

## Ilustración

1. Calcular $\cos 2\theta$, si $\cos\theta = \frac{4}{5}$

   *Respuesta.* Usando la fórmula de doble ángulo de coseno tenemos:

$$\begin{aligned}\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 &= 2\left(\frac{4}{5}\right)^2 - 1\\ &= 2\left(\frac{16}{25}\right) - 1 = \frac{32}{25} - 1\\ &= \frac{7}{25}\end{aligned}$$

□

2. Calcular

$$\operatorname{sen} 2\theta$$

   con $\cos\theta = \dfrac{3}{5}$ y $\dfrac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ [4].

   *Respuesta esperada.*

Usando la fórmula de doble ángulo del seno, nos damos cuenta de que necesitamos el seno de este ángulo,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\theta &= \pm\sqrt{1-\cos^2\theta} = \pm\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} \\ &= \pm\sqrt{1-\frac{9}{25}} = \pm\sqrt{\frac{16}{25}} \\ &= \pm\frac{4}{5} \end{aligned}$$

Como el ángulo $\theta$ está en el cuarto cuadrante tenemos que $\operatorname{sen}\theta = -\frac{4}{5}$.

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}2\theta &= 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta = 2\left(-\frac{4}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right) \\ &= -\frac{24}{25} \end{aligned}$$

$\square$

3. Si $\cos\dfrac{\pi}{12} = \left(\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6})}{4}\right)$, calcular:

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{24}.$$

*Respuesta.* Vemos que $\dfrac{\pi}{24} = \dfrac{\frac{\pi}{12}}{2}$, tenemos que $\cos\dfrac{\pi}{12} = \left(\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6})}{4}\right)$. Como el ángulo $\dfrac{\pi}{12}$ está en el primer cuadrante.

Aplicando la razón trigonométrica de seno de la mitad del ángulo.

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\frac{\pi}{24} &= \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{12}}{2}} = \sqrt{\frac{1-\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6})}{4}\right)}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{4-(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{4}} = \frac{\sqrt{4-\sqrt{2}-\sqrt{6}}}{2\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{8-2\sqrt{2}-2\sqrt{6}}}{4} \end{aligned}$$

$\square$

4. *Calcular* $\cos 105°$.

*Respuesta.* Observe que $105° = \frac{210°}{2}$, además:

$$\begin{aligned}\cos 210° &= -\cos(210° - 180°) \\ &= -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

Aplicando, razón trigonométrica coseno de la mitad del ángulo,

$$\begin{aligned}\cos 105° &= -\sqrt{\frac{1 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2}} = -\sqrt{\frac{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}{2}} \\ &= -\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\end{aligned}$$

□

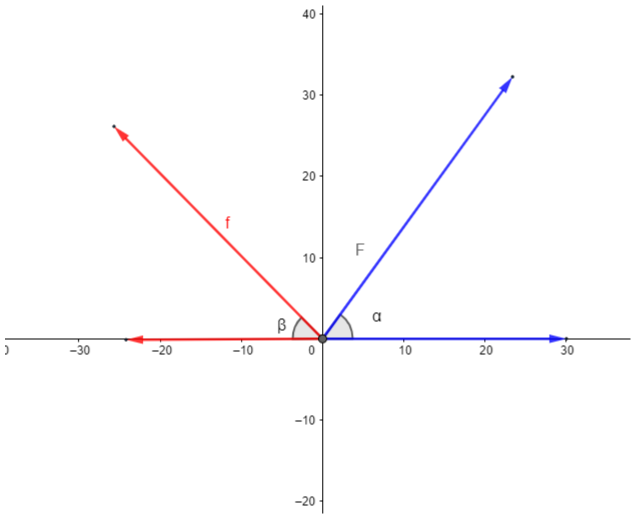
### 3.4.8. Aplicaciones de las razones trigonométricas en sistema de coordenadas

**Resultado**

*Resolver problemas relacionados con la física para hallar magnitudes de fuerza.*

**Ilustración**

1. En el centro de un sistema de coordenadas cualquiera se aplican dos fuerzas $F = 30$ y $f$, con $\alpha = 30°$ y $\beta = 60°$ para que el sistema siga en reposo de forma horizontal, ¿Cuál debe ser el valor de f? . A continuación la figura.




*Respuesta.* Para la fuerza F, calculamos la proyección de F sobre el eje de las abscisas , $F_x$, talque

$$\cos\alpha = \frac{F_x}{F}$$
$$F_x = F\cdot\cos\alpha = 30\cdot\cos 30^\circ$$

de la misma forma para f, consideremos que estamos el en segundo cuadrante

$$\cos\beta = -\frac{f_x}{f}$$
$$f_x = -f\cdot\cos\alpha = -f\cdot\cos 60^\circ$$

Realizando la sumatorio de fuerzas en el eje x, consideramos la orientación de estas componentes en el sistema de coordenadas, así pues:

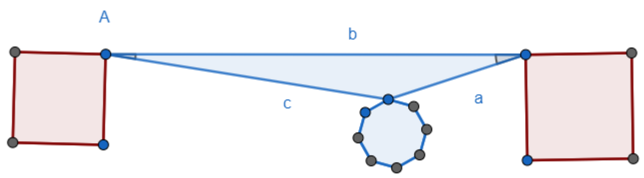
$$F_x + f_x = 0$$
$$30\cdot\cos 30^\circ - f\cdot\cos 60^\circ = 0$$
$$f = 30\cdot\frac{\cos 30^\circ}{\cos 60^\circ} = 30\sqrt{3}$$

□

2. Una persona quiere pasar colgada de una cuerda que se sostienen en los extremos de un acantilado de 100m, tal momento de cruzar

3/4 partes del acantilado la cuerda se estira y en los extremos se forma ángulo $\alpha = 10°$ y $\beta = 5°$, cuerda solo puede estirarse 1.2 veces su tamaño, determine si la persona cae al acantilado o logra pasar.

*Respuesta.* Nos guiamos de un gráfico para mejorar el análisis




dado que se forma un triangulo podemos hallar el ángulo B, pues $\alpha+\beta+B = 180°$ entonces $B = 165°$, para encontrar cuanto se ha estirado la cuerda hallamos los lados $a$ y $c$.

Para hallar $a$ usando la ley de senos:

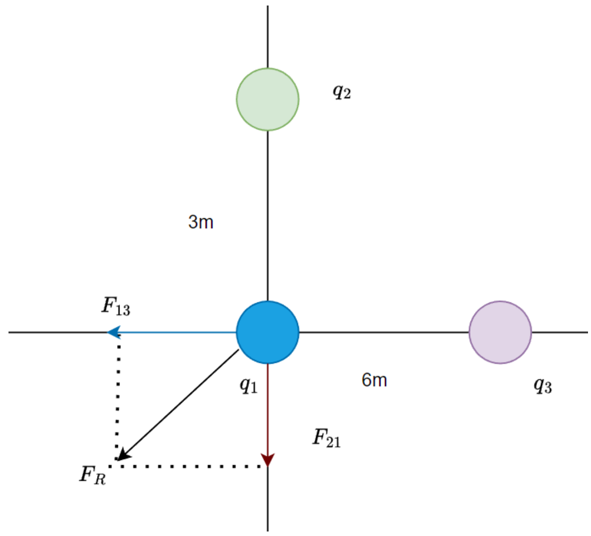
$$a = b\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}B} = 100 \cdot \frac{\operatorname{sen}10°}{\operatorname{sen}15°} \approx 67{,}09$$

Para hallar $c$ usando la ley de cosenos:

$$c^2 = 67{,}09^2 = 100^2 - 2 \cdot 67{,}09 \cdot 100 \cdot \cos\beta c \qquad\qquad \approx 39,24$$

Sumando las dos distancias tenemos $a + c = 67{,}09 + 39{,}24 = 106{,}3m$ no sobrepasa los 120m que soporta el estiramiento de la cuerda, la persona no caerá en el acantilado. □

3. Dada la figura :




Con $q_1 = 1 \times 10^{-3}\mathrm{C}, q_2 = 3 \times 10^{-4}\mathrm{C}$ y $q_3 = 16 \times 10^{-4}\mathrm{C}$, cargas eléctricas. Calcular la fuerza que actúa en $q_1$.

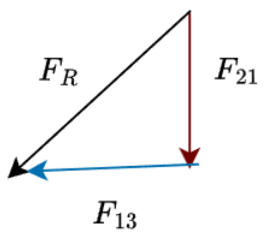
*Respuesta.* Usando la Ley de Coulomb: $F = K\frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$, con $k = 9 \times 10^{-9} N \cdot m^2 \cdot C^{-2}$. Calculamos $F_{21}$ tal que:

$$
\begin{aligned}
F_{21} &= 9 \cdot 10^9 \ \mathrm{N}^2 \ \mathrm{m}^{-2} \frac{1 \cdot 10^{-3}\mathrm{C} \cdot 3 \cdot 10^{-4}\mathrm{C}}{(3 \ \mathrm{m})^2} \\
F_{21} &= 3 \cdot 10^2 \ \mathrm{N}
\end{aligned}
$$

De la misma forma calculamos $F_{31}$,

$$
\begin{aligned}
F_{31} &= 9 \cdot 10^9 \ \mathrm{N}^2 \ \mathrm{m}^2\mathrm{C}^{-2} \frac{1 \cdot 10^{-3}\mathrm{C} \cdot 16 \cdot 10^{-4}\mathrm{C}}{(6 \ \mathrm{m})^2} \\
F_{31} &= 4 \cdot 10^2 \ \mathrm{N}
\end{aligned}
$$

Ahora para hallar la suma de fuerzas que actúan sobre $q_1$, consideramos el siguiente triangulo:



Usando el teorema de Pitagóricas en el triángulo anterior, obtenemos

$$\begin{aligned}
F_R^2 &= F_{21}^2 + F_{31}^2 \\
F_R &= \sqrt{F_{21}^2 + F_{31}^2} \\
F_R &= \sqrt{(3 \cdot 10^2)^2 + (4 \cdot 10^2)^2} \\
F_R &= 3 \cdot 10^2 N
\end{aligned}$$

La fuerza resultante que actúa sobre $q_1$ es $F_R = 3 \cdot 10^2 N$.

□

# 3.5. Conclusiones y recomendaciones

## 3.5.1. Conclusiones

Para este trabajo hemos concluido puntos importantes como:

- En algunos casos existe una cantidad excesiva de horas y de recursos en temas que son poco relevantes para una formación sólida en materias con alto contenido matemático de las mallas de carrera. En otros casos la cantidad de horas en ciertos temas es muy baja a comparación de la utilidad que se le puede dar a futuro en las materias de carrera

- Hemos evidenciado el alto contenido de *Fundamentos de la matemática* aporta al álgebra, hay conceptos y resultados que dependen mucho de esta materia, por ejemplo: Los de *Lógica* son importantes para entender como se concluyen muchos resultados en el *Álgebra* en los temas de *Teoremas de matrices y sistemas de ecuaciones.*

- El estudio de las razones trigonométricas no solo se queda en analizar un triángulo rectángulo, sino en hacer aplicaciones en Física y Cálculo de distancias, además, se puede ver como se relaciona con distintas ramas de la matemática. También vemos la relación directa de la trigonometría con el Álgebra Lineal, en especial en el estudio *de las rectas y planos*

- Hemos evidenciado como unas materias básicas como es Fundamentos de la matemática, trigonometría y geometría a más de ser un pilar fundamental en temas de Cálculo y Álgebra, no se le da el enfoque correcto, y se enfatiza en poner más y más contenidos muchas veces innecesarios, con el único propósito de cumplir con el PEA [9].
- Se ha encontrado como todos los conceptos de *Fundamentos de la matemática* desde el más simple se relaciona con los conceptos más avanzados del *Álgebra y el Cálculo* y como estos conceptos son dejados de lado muchas veces por su aparente ”sencillez” o ”irrelevancia”. Lo cual conlleva a confundir al estudiante o conlleva a tener un pensamiento mecánico y repetitivo de un procedimiento, un resultado o un calculo.

### 3.5.2. Recomendaciones

Se recomienda que:

- Se recomiendo que este estudio se extienda a más materias de las distintas carreras de la universidad para analizar los resultados de aprendizaje. No solo las que tengan un componente matemático, también las materias de *Química o Laboratorios* que se pueden ver en los PEAS de la EPN [9].
- Se trabajar en conjunto con los profesores, autoridades y alumnos para analizar generalizar los resultados de aprendizaje, ya que no se ha considerado el número de horas que toma enseñar un contenido el promedio de horas que el estudiante toma en aprender ciertos conceptos.
- Es necesario cambiar el paradigma de enseñanza y enfocarse mas en lo que el estudiante pueda hacer después de cursar la materia y no solo enfocarse en los contenidos de la materia. No solo se trata de pasar la materia sino lo que viene después y pasarla, para no tener deficiencias a futuro y tener mejores perfiles profesionales.
- Se debe enfocarse en tener un tronco común fuerte matemática que

se impartido en la EPN, independientemente de la carrera que cursen los estudiantes ya que es una herramienta muy útil para las demás ramas de la ciencia. Y una base sólida de la matemática enfocada en los resultados de aprendizaje será una ayuda al desarrollo de nuevos profesionales y científicos, con pensamiento crítico y formado.

- Crear encuestas entre estudiantes y profesores para determinar conceptos que no se estudian en nivelación y puedan ser útiles en las materias de las carreras de la EPN.

# Referencias bibliográficas


[1] Alcaste. Trigonometría, 2017.

[2] J. de Burgos Román. *Algebra lineal*. McGraw-Hill, 1993.

[3] Pontificia Universidad Católica de Chile. Nivelación de física, 2017.

[4] Universidad de Puerto Rico en Bayamón. Funciones trigonométricas, 2012.

[5] R. Jiménez. *Geometría Y Trigonometría*. Pearson Educación, 2007.

[6] Declan Kennedy and Hyland. *Writing and Using Learning Outcomes: A Practical Guide*. University College Cork, 2007.

[7] R. Larson. *Precálculo*. Reverté, 2008.

[8] E.E. Moise and F.L. Downs. *Geometría moderna*. Addison Wesley, 1966.

[9] Escuela Politécnica Nacional. Plan de estudios de pregrado, 2018.

[10] Axler S. *Linear Algebra Done Right*. Springer, 2015.