



ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS

PROGRAMACIÓN LINEAL ENTERA PARA LA PLANIFICACIÓN DE LÍNEAS EN LA OPTIMIZACIÓN DE SISTEMAS DE TRANSPORTACIÓN PÚBLICA

**TRABAJO DE INTEGRACIÓN CURRICULAR PRESENTADO COMO
REQUISITO PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE INGENIERÍA
MATEMÁTICA.**

DARLYN MAITHÉ LUDEÑA CEDEÑO

darlyn.ludena@epn.edu.ec

DIRECTOR:DR. LUIS MIGUEL TORRES CARVAJAL

luis.torres@epn.edu.ec

DMQ, 13 DE SEPTIEMBRE DE 2022

CERTIFICACIONES

Yo, DARLYN MAITHÉ LUDEÑA CEDEÑO, declaro que el trabajo de integración curricular aquí descrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y, que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.



Darlyn Maithé Ludeña Cedeño

Certifico que el presente trabajo de integración curricular fue desarrollado por Darlyn Maithé Ludeña Cedeño, bajo mi supervisión.



Dr. Luis Miguel Torres Carvajal
DIRECTOR

DECLARACIÓN DE AUTORÍA

A través de la presente declaración, afirmamos que el trabajo de integración curricular aquí descrito, así como el(los) producto(s) resultante(s) del mismo, es(son) público(s) y estará(n) a disposición de la comunidad a través del repositorio institucional de la Escuela Politécnica Nacional; sin embargo, la titularidad de los derechos patrimoniales nos corresponde a los autores que hemos contribuido en el desarrollo del presente trabajo; observando para el efecto las disposiciones establecidas por el órgano competente en propiedad intelectual, la normativa interna y demás normas.

Darlyn Maithé Ludeña Cedeño

Dr. Luis Miguel Torres Carvajal

DEDICATORIA

A mi papito Milton, quien siempre será el amor de mi vida y mi fuente de inspiración, por inculcarme tantos valores y darme muchos consejos. Eres mi ángel de la guarda en mis momentos difíciles. A ti papito, gracias por haber tocado mi corazón antes que el cielo.

A mi mamita Katy, por darme la vida y ser mi fuerza e impulso durante mi trayectoria universitaria.

A mi hermano Dario, por sacarme siempre una sonrisa a pesar de las dificultades.

AGRADECIMIENTO

A Dios por haberme permitido estudiar en la Escuela Politécnica Nacional, en donde me inculcaron a más del amor por la ciencia y la matemática; el valor del esfuerzo y la perseverancia para cumplir mi meta de ser una profesional.

Al Dr. Luis Miguel Torres Carvajal, por su oportuna orientación, paciencia y apoyo durante el desarrollo del presente trabajo de Integración Curricular. A mis padres, quienes siempre fueron mi apoyo y el tesoro más valioso en mi vida.

A los matemáticos del mundo, en especial a Hipatia y Ada Lovelace, quienes se convirtieron en mi fuente de inspiración durante mi carrera universitaria.

RESUMEN

La planificación de líneas es uno de los problemas de la optimización en el transporte público que consiste en encontrar un conjunto de líneas con sus respectivas frecuencias, con el objetivo de cubrir la demanda del transporte garantizando un cierto nivel de servicio y minimizando los costos de operación. En este sentido, las líneas con sus frecuencias deben asegurar que el transporte público beneficie tanto a los pasajeros como a los operadores.

Existe una gran cantidad de modelos de planificación de líneas reportados en la literatura. En este proyecto de integración curricular nos centraremos en el estudio de dos modelos: un modelo de planificación de líneas básico con un enfoque orientado a la minimización de los costos operativos y un modelo integrado en el que se resuelve el problema de planificación de líneas junto con el enrutamiento de los pasajeros.

Ambos modelos fueron implementados computacionalmente usando el API Python del solver Gurobi (1) y probados sobre cinco instancias, de las cuales tres fueron extraídas de la página de GitHub del proyecto OpenLintim (2), mientras que las otras dos son instancias de creación propia. Se reportan los resultados de los experimentos computacionales y las conclusiones obtenidas.

Palabras clave: optimización en el transporte público, investigación de operaciones, programación lineal entera, planificación de líneas, planificación de líneas con enrutamiento de pasajeros, concepto de línea.

ABSTRACT

Line planning is one important step of public transportation optimization that consists in finding a set of lines with their respective frequencies, with the objective of covering transportation demand, guaranteeing a certain level of service for the passengers, and minimizing operational costs. In this sense, the selected lines with their frequencies must ensure that the public transportation system benefits both passengers and operators. There is a large number of line planning reported in the literature. In this work we focus on two models: a basic line planning model with a cost-oriented approach, and an integrated model in which the line planning problem is solved along with the routing of passengers.

Both models are computationally have been implemented using the Python API of the Gurobi solver (1) and tested on five instances, of which three were extracted from the GitHub web page of the OpenLintim project (2), while the other two are self created. The results of the computational experiments and the corresponding conclusions are reported.

Keywords: optimization in public transport, operations research, integer linear programming, line planning, line planning with passenger's routing, line concept.

Índice general

1. Introducción	16
2. Marco Téorico	20
2.1. Modelos orientados a minimizar los costos	23
2.2. Modelos orientados a maximizar la calidad del servicio	26
3. Formulación de los modelos	31
3.1. Modelo de planificación de líneas	31
3.2. Modelo integrado de planificación de líneas y enrutamiento de pa- sajeros.	37
4. Resultados Computacionales	51
4.1. Instancias	52
4.1.1. Características de las Instancias	53
4.1.2. Características de las redes change & go	57
4.2. Resultados y análisis	59
4.2.1. Modelo de planificación de líneas	60
4.2.2. Modelo integrado de planificación de líneas y enrutamiento de pasajeros	62
5. Conclusiones	70
Bibliografía	73

Índice de figuras

3.1. Tramo del Sistema de Trolebús de Quito desde la parada del Calzado hasta la Recoleta	33
3.2. Tramo del Sistema de Trolebús de Quito junto con las líneas que circulan desde la parada del Calzado hasta la Recoleta en horas de la mañana.	34
3.3. Red de Transporte de la Instancia "Toy0" como un grafo no dirigido.	41
3.4. Red de Transporte de la instancia "Toy0" como un grafo dirigido.	41
3.5. Líneas de transporte de la instancia "Toy0".	42
3.6. Red change & go de la instancia "Toy0".	46
4.1. Captura de pantalla del ambiente Power Shell con el programageneral.py ejecutándose en la máquina virtual.	52
4.2. Red de transporte de la instancia "Toy0".	54
4.3. Red de transporte de la instancia "Toy1".	54
4.4. Red de transporte de la instancia "Toy2".	55
4.5. Red de transporte de la instancia "Grid".	56
4.6. Red de transporte de la instancia "Atenas".	57
4.7. Enrutamiento de los pasajeros de la Instancia "Toy0" del nodo 1 al nodo 3	65

Índice de cuadros

3.1. Representación de las líneas del tramo anterior del Sistema de Trolebús de Quito con sus respectivos arcos.	35
3.2. Reservorio de líneas de la Instancia "Toy0" con los arcos de cada línea.	43
4.1. Características de la instancia "Toy0".	53
4.2. Características de la instancia "Toy1".	54
4.3. Características de la instancia "Toy2".	55
4.4. Características de la instancia "Grid".	55
4.5. Características de la instancia "Atenas".	56
4.6. Características de la red change & go para cada una de las instancias.	59
4.7. Resultados de la aplicación del primer modelo en las cinco instancias.	60
4.8. Concepto de líneas construido en la solución de la instancia "Toy0"	61
4.9. Concepto de líneas solución de la instancia "Toy0"	61
4.10. Resumen de la aplicación del modelo sobre las cuatro primeras instancias.	62
4.11. Concepto de líneas solución de "Toy0" en el Modelo 2	63

4.12 Enrutamiento de los pasajeros sobre la red change & go en la instancia "Toy0".	64
4.13 Flujo de pasajeros y oferta de transporte sobre cada uno de los arcos de la correspondiente instancia "Toy0".	66
4.14 Resultados obtenidos para la instancia "Atenas" con la heurística de fijación de variables.	68

Capítulo 1

Introducción

En el mundo actual, totalmente globalizado y que se encuentra en constante movimiento uno de los principales servicios que debe mantener una ciudad es un eficiente sistema de transporte público. Esto se debe a que la capacidad global de transporte refleja el desarrollo económico y tecnológico de un país.

Notemos además que el avance de la urbanidad y los constantes traslados hacia afuera y dentro de las grandes ciudades de los usuarios a distintos destinos sea al trabajo, al hogar u otros tipos de desplazamientos, reflejan una actividad de transportación imparable; por lo que es indispensable que a medida que crece el sector urbano se dé proporcionalmente el mejoramiento de su servicio.

La elevada importancia económica y social que tienen los sistemas de transportación pública, además de su alta complejidad, ha motivado el estudio y aplicación de diversos criterios y herramientas técnicas para su planificación y gestión. En particular, a lo largo de las últimas cinco décadas se han desarrollado modelos matemáticos que persiguen optimizar las diferentes etapas dentro de su funcionamiento.

Un modelo matemático es un esquema simplificado de un fenómeno real y constituido por medio de símbolos, operaciones y herramientas que permiten interpretar y cumplir un determinado objetivo.

Para el problema que se va desarrollar en el presente trabajo de inte-

gración curricular, emplearemos conceptos de la investigación de operaciones, una rama de la matemática, que surge en los años de la Segunda Guerra Mundial; cuando imperó la necesidad de implementar mejores tácticas y estrategias de guerra valiéndose de modelos y algoritmos para tomar decisiones operativas. Posteriormente, con la llegada y universalización de los computadores electrónicos, los modelos de programación matemática y las técnicas de investigación de operaciones encontraron amplia aplicación de manera transversal en diversos sectores de la industria y sociedad, permitiendo optimizar el uso de recursos disponibles y elevar la eficiencia en la ejecución de diversos procesos, entre otras tareas comunes.

Según Schiewe (3), el problema de la optimización de los sistemas de transporte público es un tema que ha sido estudiado con mucha frecuencia dentro de la comunidad de investigación de operaciones, y se lo puede subdividir en los siguientes subproblemas:

1. Problema de diseño de red.
2. Problema de asignación de pasajeros.
3. Problema de planificación de líneas de transporte.
4. Problema de enrutamiento de pasajeros.
5. Problema de calendarización de viajes.
6. Problema de asignación de vehículos.
7. Problema de asignación de la tripulación.

Generalmente, estos problemas se resuelven secuencialmente, en el orden que fueron descritos, debido a su alta complejidad computacional, aunque lo ideal, desde el punto de vista de la optimización del sistema, sería que fueran formulados en un solo problema integrado.

El presente trabajo de integración curricular se centra en uno de los subproblemas descritos anteriormente: el Problema de planificación de líneas de transporte. Según se establece en (4), este problema consiste en encontrar un conjunto de líneas con sus respectivas frecuencias, con el fin de que se pueda transportar una demanda dada.

El objetivo general del presente proyecto consiste en estudiar modelos de programación lineal entera para el problema de planificación de líneas de transporte e implementarlos computacionalmente. Específicamente, se estudiará la formulación de dos modelos: uno enfocado en la optimización de los costos del operador y otro dentro del enfoque de los pasajeros. Estos modelos fueron originalmente descritos en (4), (5) y (6).

Los modelos serán implementados computacionalmente empleando el API Python del solver Gurobi, y serán probados sobre cinco instancias, algunas de ellas obtenidas de la página de Github del proyecto OpenLinTim (2), para finalmente analizar los resultados y establecer conclusiones.

La estructura del presente trabajo de integración curricular es la siguiente: empezaremos revisando en el [Capítulo 2](#) antecedentes, investigaciones previas y consideraciones teóricas acerca del problema de planificación de líneas. Nos basaremos en el modelo propuesto en (4) que nos permite minimizar los costos de operación de un sistema de líneas de transporte, y revisaremos luego un segundo modelo que se puede encontrar en (5) y en (6), con una formulación más compleja y que consiste en resolver el problema de planificación de líneas junto con el enrutamiento de los pasajeros.

En el [Capítulo 3](#) se formulan los modelos propuestos como modelos de programación lineal entera. En el primero, enfocado a la optimización de los costos, se abordará con la formulación de un modelo estándar, y en el que usaremos variables binarias que indican si la línea de transporte con su respectiva frecuencia será operada o no en la red; el objetivo es alcanzar un costo mínimo y satisfacer la demanda. El segundo, en cambio, es un problema integrado, conformado por la planificación de líneas junto con el enrutamiento de los pasajeros, en el que nos centraremos en minimizar los inconvenientes percibidos por los usuarios, los cuales serán cuantificados como una suma ponderada de los tiempos totales de viaje y el número total de transbordos en el sistema; a más de ello, el modelo determina las frecuencias para las líneas, de tal forma que los costos no superen un límite presupuestario, mientras se satisface la demanda de transporte de los pasajeros enrutados por los caminos más cortos desde su origen a su destino.

En el [Capítulo 4](#) se describen aspectos relacionados a la implementa-

ción de los dos modelos a nivel de prototipo, esto debido a que el marco temporal del proyecto no permite que se pueda desarrollar un producto terminado. Se detallan las características de las instancias empleadas para las pruebas computacionales, los resultados obtenidos, los parámetros de configuración utilizados para los modelos, y una heurística para la resolución del segundo modelo con la instancia más grande.

Finalmente, en el [Capítulo 5](#), se presentan algunas conclusiones acerca del desempeño del algoritmo, la factibilidad de la solución encontrada y la comparación de los resultados obtenidos con los dos modelos.

A continuación, examinaremos como marco teórico algunos trabajos previos y relevantes en el área de la planificación de líneas.

Capítulo 2

Marco Téorico

Este capítulo se centra en la revisión de investigaciones previas acerca de la planificación de líneas del transporte público. Se describen algunos antecedentes y bases teóricas que motivaron y permitieron el estudio de este problema dentro del campo de la investigación operativa.

Los intentos de abordar la optimización de transporte empleando conceptos y técnicas de la investigación de operaciones surgen desde los años 60, época en la cual, el poder computacional no era tan avanzado como lo es ahora.

En la actualidad, una tarea importante que deben afrontar los organismos técnicos de planificación en las grandes ciudades para evitar problemas de saturación en el transporte público, abaratar los costos y proteger al medio ambiente es el adecuado diseño de las líneas de transporte. Resolver el problema de planificación de líneas beneficia tanto a los pasajeros como a los operadores. De acuerdo a (5) un elemento estratégico importante en el proceso de planificación del transporte es el desarrollo de un concepto de líneas, es decir, encontrar un conjunto de líneas y frecuencias tales que, se pueda cumplir con la demanda de los usuarios.

Una red de transporte público puede ser representada como un grafo cuyos nodos corresponden a la paradas y cuyos arcos corresponden a las conexiones directas entre paradas. Una línea de transporte es un ca-

mino simple en la red de transporte público que es operado por un mismo vehículo de principio a fin y la frecuencia de la línea corresponde al número de viajes realizados sobre este camino en un determinado horizonte de tiempo. (Definiremos todos estos conceptos de manera formal en el próximo capítulo, donde introduciremos además la notación respectiva).

Por ejemplo, la red de Transporte del Sistema de Trolebús de Quito puede representarse como un grafo, donde cada uno de los andenes o paradas son los nodos y los arcos indican las conexiones directas entre paradas consecutivas; así, las estaciones "*El Recreo*" y "*Villaflora*" serán nodos del grafo, conectados entre sí por una arista. Un ejemplo de línea es el circuito del Trolebús en dirección norte (C1-N), que circula desde la estación de "*El Recreo*" hasta la estación de "*El Labrador*". El número de unidades de trolebús que circulan en el sistema desde la estación de inicio hasta la estación final de C1-N dentro del horizonte de planificación, corresponde a lo que denominamos frecuencia de esta línea. Por otra parte, la demanda de transporte indica cuántos pasajeros quieren moverse entre cada par ordenado de estaciones del sistema en un determinado horizonte de tiempo. Estableciendo rutas específicas para los desplazamientos de los pasajeros, es posible expresar la demanda como el número de pasajeros que deben ser transportados sobre cada arco de la red de transporte. El problema que se aborda consiste en encontrar un conjunto de líneas de trolebús con sus respectivas frecuencias, que puedan transportar la demanda sobre cada uno de los arcos del sistema.

En (3) se menciona que una solución de buena calidad para el problema de planificación de líneas permitirá obtener más adelante un enrutamiento de pasajeros adecuado con la finalidad de evitar saturaciones; a su vez, esto ayudará a encontrar mejores soluciones en la fase de calendarización de viajes, en la cual se fijan los tiempos de las salidas y llegadas de las líneas en las estaciones. En general, resolver correctamente un problema de planificación de líneas mejora el escenario para la solución de los siguientes subproblemas dentro de la planificación del sistema de transporte público: enrutamiento de pasajeros, calendarización de viajes y asignación de vehículos; ya que se trata de problemas muy dependientes el uno del otro.

Ante ello, se han propuesto en trabajos recientes estrategias que se

enfocan en resolver el problema de planificación de líneas de manera integrada con la fase subsiguiente del enrutamiento de pasajeros. Esto involucra un alto costo computacional, pero ha podido ser aplicado con éxito a instancias de tamaño pequeño y mediano. (5)

Según (7), los primeros enfoques del problema de planificación de líneas datan de los años 70 y consisten en ensamblar líneas a partir de piezas más cortas de las mismas, en un proceso iterativo. Un ejemplo de ello es el método *skeleton* descrito en (8) que elige los puntos finales de una ruta y varios nodos intermedios que luego se unen por caminos más cortos en cuanto a la longitud o tiempo de viaje.

En un artículo de Sonntag (9), que data de 1979, se construyeron líneas uniendo pequeños tramos de calles para maximizar el número de viajeros directos o viajeros que no hacen transbordos entre líneas.

Otros artículos se enfocan en optimizar distintas funciones objetivo precalculando un conjunto de líneas en una primera fase; para luego en una segunda escoger un plan de líneas que satisfaga ciertos criterios que puedan mejorar la calidad del sistema de transporte público modelado. Dos de ellos se mencionan en (7): el trabajo de Ceder A. et al. (10), de 1986 que describe un método de enumeración para generar líneas cuyo tamaño debe satisfacer un cierto factor de la longitud del camino más corto y el artículo de 1980 de Mandl C. (11) en donde se propuso una estrategia de búsqueda local para optimizar el conjunto de líneas precalculado de la primera fase.

A partir de los modelos que se propusieron inicialmente, otros artículos abordaron el estudio de métodos heurísticos que permitan solucionar los problemas de planificación de líneas de manera eficiente. Esto debido a que las computadoras de los años 70, 80 y 90 no eran lo suficientemente potentes para permitir la implementación de métodos exactos sobre instancias reales. Un ejemplo de ello se encuentra en los artículos de la década de los 90 de Ceder A. e Israeli Y. (12; 13) que introdujeron un modelo cuadrático de set covering para elegir conexiones directas entre destinos y conexiones de transbordo, ellos propusieron una heurística para resolverlo.

Según (4), desde finales de la década de 1990, en la literatura sobre

planificación de líneas se fue desarrollando una variedad de enfoques basados en la programación entera que capturaron diferentes aspectos del problema. Esto se puede evidenciar en la gran cantidad de artículos científicos con formulaciones de modelos de planificación de líneas bajo distintas perspectivas, bien sea desde el punto de vista del operador del sistema analizando los costos, o desde la del usuario, concéntrándose en los tiempos de viaje, en la maximización del número de viajeros directos, etc.

En (14) se expone que existen dos objetivos en conflicto cuando se determina un concepto de líneas. Por un lado el costo total del sistema debe ser pequeño, y por otro, el concepto de línea debe beneficiar lo mejor posible a los pasajeros. En consecuencia, un modelo en el que se minimicen los costos mientras las restricciones aseguren un mínimo nivel de calidad para los pasajeros se denominará modelo orientado a los costos; análogamente, si el objetivo es maximizar la calidad del servicio o del concepto de líneas (los costos pueden incluirse en las restricciones) entonces lo denominaremos modelos orientados al pasajero.

2.1. Modelos orientados a minimizar los costos

De acuerdo a (5) el objetivo de un modelo de planificación de líneas orientado a los costos es encontrar un concepto de líneas que pueda satisfacer a todos los usuarios y minimice los costos de operación para la empresa de transporte público. En el artículo del año 2005 de Scholl S. (6) se añade que los enfoques de planificación de líneas orientados a los costos han sido investigados extensivamente desde 1995 con una gran variedad de formulaciones de modelos de programación entera.

Una de las primeras contribuciones orientadas al operador es una investigación de Claessens de 1998, en donde se formula un modelo de planificación de líneas enfocado en la optimización de los costos operativos de los trenes de pasajeros para el sistema ferroviario holandés.(15) En este trabajo se sugiere que enfocarse en los costos de las líneas puede aumentar el número de transbordos de los pasajeros; pero, puede dismi-

nuir los costos operativos, lo que implicaría precios más bajos para los clientes, además se especifica que se debe tomar en consideración todos los costos operativos del sistema, los cuales se dividen en las siguientes tres categorías después de amplias discusiones con expertos financieros de los ferrocarriles holandeses:

- Costos fijos por vagón de un tipo de línea por hora en una dirección: incluyen depreciación de existencias, costo de capital, costos fijos de mantenimiento y los costos de estacionamiento nocturno.
- Costos variables por vagón de un tipo de línea por kilómetro: Costos de los cobradores de boletos, costos de limpieza, costos de energía, costos de infraestructura, costos variables de mantenimiento y de mecánica.
- Costos variables por tren de una determinada línea por kilómetro: Incluyen el sueldo del conductor, valores fijos de los cobradores de boletos y los costos de energía.

Esta estructura se reconsidera en (6), donde se detalla que los costos de cada línea varían dependiendo de la longitud de la ruta, el número de unidades, el tipo de motor, el número de pasajeros, etc; por lo que son divididos en costos fijos y variables. Con respecto al modelo propuesto por Claessens primero formula un modelo de programación no lineal con dos variables enteras encargadas de determinar el valor de la frecuencia y el número de unidades, el cual es linealizado introduciendo variables binarias y resuelto mediante un algoritmo de branch & bound. Finalmente, en (15) se demostró que el problema de planificación de líneas está dentro del tipo de problemas de optimización *NP-difícil*. El artículo de Claessens se convirtió en muy poco tiempo en base para muchas de las publicaciones que se desarrollarán años después bajo este enfoque.

En un trabajo de 1998 de Bussieck (16), se formulan dos linealizaciones diferentes y un algoritmo de branch & bound para el modelo propuesto en (15). En este trabajo, los resultados numéricos fueron obtenidos empleando instancias del sistema ferroviario alemán y holandés, además especifica que las ideas mencionadas pueden adaptarse fácilmente

al problema de planificación de líneas para otros sistemas de transporte, siempre y cuando, tengan horarios periódicos.

Después de seis años, en un artículo de Goossens et al. (17), se plantea un modelo simplificado del problema de planificación de líneas orientado a los costos para cinco instancias de ferrocarriles de Países Bajos, despreciando los requisitos de frecuencia máxima para cada arco que se plantean en los modelos de Claessens (15) y Bussieck (16), y en vez de ello incluye una restricción que impone un límite inferior para el número de vagones que circulan por hora. Además, emplea un nuevo enfoque para el algoritmo de branch & bound e incorpora en un solo coeficiente el valor del costo operativo que se asigna a cada línea sumando todas las clases de costos establecidos en Claessens (15). El artículo de Goossens concluye que el modelo propuesto funciona muy bien en instancias reales, por lo que puede ser implementado en otras redes de ferrocarriles y recomienda que estudios futuros sobre el tema impliquen la consideración de varios tipos de trenes simultáneamente, sin dividir los flujos a priori.

Bussieck, Lindner y Lübecke proponen en el año 2004 un procedimiento rápido para encontrar un concepto de líneas de costo óptimo basándose en la formulación no lineal de Claessens (15) con la finalidad de determinar un primer conjunto de posibles líneas y resolverlas en el modelo lineal, para luego obtener una buena solución primal en un mínimo tiempo de cálculo. (18)

Un modelo con una formulación más simplificada que el propuesto en (15) se puede encontrar en un artículo del año 2006 de Scholl (6), donde se formula un modelo estándar que resume el objetivo de los modelos propuestos anteriormente para una red de ferrocarriles. El modelo de programación lineal entera minimiza la suma total de todos los costos del sistema y en una sola restricción asegura que para cada arco de la red de transporte el valor de las frecuencias acumuladas no sobrepasen un valor de frecuencia mínimo y uno máximo. El valor de los costos incluye los fijos y variables. De acuerdo a la autora, si en la formulación de dicho modelo no se considera el parámetro de la frecuencia máxima como en (17), se convierte en un problema de multi-covering y demuestra que a pesar de ello, continúa siendo *NP-difícil*. En este artículo de Scholl S. se propone como un modelo extendido el modelo propuesto por Bussieck

(16).

En un artículo más reciente Borndörfer, Hoppmann y Karbstein plantean en el 2013 otro modelo básico de planificación de líneas similar al propuesto en Scholl (6), y plantea una formulación extendida para el mismo enumerando el conjunto de posibles configuraciones de frecuencia de las líneas para cada restricción de capacidad. En este artículo se realizan pruebas computacionales del modelo clásico y del modelo de configuración en cinco instancias: las redes de transporte de las ciudades de Sioux Falls y Chicago de Estados Unidos, la de Postdam de Alemania, una de las redes holandesas del artículo de Bussieck (16) y una instancia artificial de China. (4)

2.2. Modelos orientados a maximizar la calidad del servicio

Según (19), en un problema de planificación de líneas, a más de poder formular funciones objetivo que minimicen los costos operativos, se puede maximizar la calidad del servicio que brinda la empresa de transporte para los costos operativos fijos; además, como en esta etapa de planificación no hay un horario, no se puede determinar el periodo de espera exacto mientras cambia de línea, por lo que se puede optar por formular problemas para minimizar el número total de transbordos, problemas que maximizan el número total de viajeros directos y otros que minimizan el tiempo total de viaje de todos los pasajeros. Los modelos que se plantean para resolver los problemas mencionados son también llamados en la literatura como modelos orientados a los pasajeros. (5)

Según (6), el objetivo de los modelos con el enfoque de los viajeros directos es maximizar el número de pasajeros que no necesitan realizar transbordos para llegar a su destino, siempre y cuando se pueda encontrar un concepto de líneas factible.

Algunos de los primeros trabajos de investigación en el problema de planificación de líneas se centraron en la maximización del número de viajeros directos.

En un artículo del año 2012 de la matemática alemana Schöbel. A (14)

se menciona que la primera formulación como un modelo de programación entero para el problema de viajeros directos se encuentra publicado en un artículo de 1978 de Dienst (20) cuyo método de solución propuesto es un enfoque de branch & bound que crea una partición de líneas agregando líneas una tras otra y selecciona de manera heurística el nodo del árbol de branch & bound con el máximo número de viajeros directos. Además este modelo supone una capacidad infinita de los trenes.

Otros artículos menos antiguos que plantean un modelo de programación lineal entero para maximizar el número de viajeros directos son el de Bussieck M., Kreuzer P. y Zimmermann U. (19) del año de 1997 y el de Bussieck (16) del año de 1998. En ambos trabajos se plantean modelos que emplean dos variables enteras, una que determina el valor de la frecuencia de la línea y otra que indica el número de viajeros directos que viajan desde su origen a su destino usando una determinada línea. Ambos modelos están conformados por tres restricciones, pero la de capacidad los hace diferentes. En Bussieck (16) se emplea una restricción que asegura que todos los viajeros directos puedan ser transportados por cada arco asumiendo que el valor de la frecuencia mínima es menor a la de la frecuencia máxima ($f_e^{min} \leq f_e^{max}$), misma restricción que es usada en algunos de los modelos orientados en los costos, en cambio, en (19) se establece que para cada arco es igual el valor de la frecuencia mínima y máxima ($f_e^{min} = f_e^{max}$), esta peculiaridad fija de antemano las frecuencias en el modelo de este artículo. Finalmente, ambas formulaciones fueron implementadas con datos de instancias de compañías ferroviarias alemanas, y se concluyó que pueden ser implementadas en cualquier otra red de transporte, recomendando para estudios posteriores algoritmos heurísticos y la profundización en los modelos de este enfoque.

En el artículo de Schöbel (14), se menciona el artículo de 1997 de Zimmermann U. et al. (21), en el que se plantea una ligera modificación al modelo propuesto en (19) y se establece la restricción de capacidad con $f_e^{min} \leq f_e^{max}$, de modo que las frecuencias del arco no se fijan de antemano y se introduce una restricción presupuestaria. El modelo de programación lineal entero formulado en este artículo se resuelve mediante generación de columnas y desigualdades válidas, los resultados numéricos utilizaron datos de ferrocarriles alemanes, holandeses y suizos.

Generalmente, se suele considerar que el problema de minimizar transbordos es similar al de maximizar viajeros directos, sin embargo se demuestra en el artículo de Scholl (6) que no es el caso con un ejemplo. En el problema de maximización de viajeros directos se considera solamente un grupo de usuarios sin considerar el resto, que pueden realizar transbordos durante sus viajes y tampoco toma en cuenta el tiempo; factores que influyen especialmente en la calidad del servicio de transporte y en especial en la de los pasajeros, razón por la cual las soluciones de ambos modelos son muy distintas. (5)

El tiempo de viaje y la cantidad de transbordos, se estudia con mayor detalle por Schöbel y Scholl (5), en donde se sustenta que desde el punto de vista del cliente es preferible tener un transbordo pero llegar antes a su destino, en lugar de estar sentado en un vehículo que realiza un gran desvío. Con esta motivación, las autoras proponen un modelo de programación lineal entera cuya función objetivo mide la suma ponderada de todos los tiempos de viaje de todos los usuarios con penalizaciones por los transbordos requeridos. Para formular este modelo se define una red *change & go*, construida a partir de la red de transporte público, y en la cual se puede modelar el enrutamiento de los pasajeros. El modelo presentado por Schöbel y Scholl se convirtió en el primero dentro de este enfoque de minimización de los tiempos de viaje y de número de transbordos, además de que es un modelo que integra dos fases consecutivas del problema de optimización del transporte: la planificación de líneas y el enrutamiento de los pasajeros. En el artículo se plantea su resolución por medio de la descomposición de Dantzig-Wolfe y se comparan relajaciones del modelo tanto teóricamente como numéricamente, los resultados computacionales están basados en una aplicación real de un ferrocarril alemán y concluye que el modelo para instancias muy grandes se demora demasiado que es computacionalmente intratable, por lo que en el artículo de Scholl S. (6) se plantean distintos tipos de heurísticas para su resolución computacional.

Dentro de este mismo enfoque, los artículos de Borndörfer y Pfetsch (22) del año 2006, el de Borndörfer et al. (23) del año 2007 y el de Borndörfer et al (7) del año 2008 presentan varios modelos en donde los caminos de los pasajeros pueden enrutarse libremente generando líneas

dinámicamente y se proponen modelos de flujo multiproducto cuya función objetivo consiste en minimizar el tiempo de viaje sin tomar en cuenta el tiempo de transbordo y a los que se agregan los costos del sistema. En (22) y (23), el modelo es implementado computacionalmente para los datos de la ciudad alemana de Potsdam y en (7) se proponen dos modelos con sus respectivos análisis teóricos sin implementación numérica en alguna instancia.

Por último, un artículo más reciente es el de Karbstein M. y Borndörfer R. (24) del año 2012, en el que se propone un nuevo modelo basándose en los artículos de Schöbel y Scholl (5) y de Borndörfer et al. (23) con un enfoque de conexión directa que permite una optimización integrada de la planificación de líneas y el enrutamiento de los pasajeros, incluyendo estimaciones del número de viajeros directos. Los resultados computacionales son implementados en algunas instancias reales de ciudades europeas, norteamericanas y una artificial.

Los artículos mencionados arriba se centran en su mayoría en redes de transporte europeas. En Latinoamérica, cabe resaltar el trabajo del año 2017 de Galindres et al. (25), en el cual se plantea un modelo de programación entero con una función multiobjetivo que minimiza el tiempo de parada de las estaciones, los costos económicos de las empresas operadoras y una penalización adicional que se da cuando el usuario debe esperar por un segundo bus. El modelo fue resuelto mediante un algoritmo genético para la ciudad de Pereira en Colombia. Un segundo trabajo del año 2014 es el propuesto por Martínez H., Mauttone A. y Urquhart M. (26), en el cual se estudia el problema de optimización de las frecuencias para un conjunto de líneas dados por sus itinerarios, es decir, secuencias de paradas y tramos de calles, con la finalidad de optimizar el tiempo de espera y los costos; la solución debe satisfacer una demanda dada y una restricción en la flota de autobuses disponible; para los problemas grandes se propuso una metaheurística. Se obtuvieron resultados computacionales para instancias con las redes de transporte de las ciudades de Rivera y Montevideo en Uruguay y para una instancia anteriormente propuesta en (27).

En nuestro país vale la pena resaltar el estudio realizado en el año 2011 por Borndörfer R., Torres L., Torres R. y Pfetsch M., (28), en el cual

se discute un modelo de optimización para el problema de planificación de líneas en el Sistema de Trolebús de la Ciudad de Quito, con el fin de minimizar los costos de operación mientras se garantizan niveles de calidad de servicio desde el punto de vista de la comodidad del usuario, expresados como tasas máximas de ocupación de las unidades. En el trabajo se analizó además la complejidad computacional del problema sobre topologías de red en árbol.

En el presente trabajo de integración curricular nos centraremos en la aplicación de dos modelos de planificación de líneas que fueron mencionados anteriormente. El primero corresponde al modelo de planificación de líneas estándar que se encuentra orientado a los costos operativos. Lo podemos encontrar formulado, por ejemplo, en (4).

Al minimizar los costos operativos, se beneficia también al usuario, debido a que la empresa operadora podría eventualmente reducir la tarifa del pasaje. Sin embargo, existen adicionalmente otros aspectos importantes para el usuario, aparte del costo, que la empresa operadora debe tomar en cuenta si desea ofertar un mejor servicio de transporte, como por ejemplo: llegar a tiempo a su destino, la flexibilidad de poder tomar rutas distintas, evitar realizar transbordos innecesarios, entre otros.

El segundo modelo posee un enfoque orientado a la comodidad de los usuarios y consiste en resolver un problema integrado de planificación de líneas y enrutamiento de pasajeros con la finalidad de minimizar sus inconvenientes en el sistema de transporte. Este modelo ha sido propuesto en (5) y en (6) por Schöbel A. y Scholl S., bajo el nombre de Modelo de Planificación de Líneas con Transferencias Mínimas y Frecuencias (Line Planning Model with minimal transfers and frequencies, LPMTF).

En el siguiente capítulo, definiremos notación y algunos conceptos que nos permitirán formular los dos modelos como programas lineales enteros, para luego implementarlos computacionalmente.

Capítulo 3

Formulación de los modelos

Como mencionamos en los capítulos anteriores, presentaremos a continuación la formulación de dos modelos de programación lineal entera para el problema de planificación de líneas. El primero corresponde a una formulación clásica. El segundo modelo es más complejo e integra la planificación de líneas con el enrutamiento de pasajeros; este modelo se define sobre una red denominada *change & go*.

En primer lugar, presentaremos algunos conceptos matemáticos preliminares requeridos en la formulación de los modelos. Estos conceptos fueron tomados, entre otros, del libro de Schiewe (3), del artículo de Scholl (6) y del trabajo de Schöbel y Scholl (5).

3.1. Modelo de planificación de líneas

El primer modelo tiene una formulación simple, que puede ser considerada la formulación estándar clásica del problema de planificación de líneas. Este modelo está enfocado exclusivamente a la minimización de los costos de operación, y al resolverlo esperamos obtener un mayor entendimiento de la estructura del problema, antes de estudiar su integración con la fase de enrutamiento.

Los datos de entrada del modelo consisten en la red de transporte público, el reservorio de líneas (line pool) con sus respectivos costos, un conjunto de posibles frecuencias para las líneas y las frecuencias mínima y máxima para cada arco de la red donde la frecuencia mínima indica el mínimo número de vehículos que deben circular por ese arco para satisfacer la demanda dentro de un determinado horizonte de tiempo, mientras que la frecuencia máxima indica el número máximo de vehículos que pueden circular por el arco debido a restricciones técnicas u operativas.

El modelo emplea variables binarias para asignar una frecuencia a cada una de las líneas, de tal forma que se minimicen los costos operativos y que las frecuencias acumuladas de las líneas que pasan por cada arco se encuentren dentro de los límites de frecuencia mínima y máxima que fueron establecidos. Dentro de los costos operativos se incluyen tanto los costos fijos, como el sueldo de los conductores y la amortización de las unidades, así como los costos variables, como el costo del combustible y del desgaste de neumáticos.

Previo a la formulación del modelo es necesario introducir algunos conceptos y términos. Empezaremos con la definición formal del elemento principal de nuestro estudio: la red de transporte

Definición 1. *Una red de transporte público es un grafo (V, E) , donde el conjunto V de nodos representa las estaciones y el conjunto E de aristas contiene todas las conexiones directas que existen entre dos estaciones. Alternativamente, en lugar de aristas, se pueden emplear arcos dirigidos para las conexiones directas entre estaciones, si el sentido de circulación es importante.*

Por simplicidad, notaremos (u, v) con $u, v \in V$, a la arista o arco que conecta las estaciones u y v . Para cada arista o arco (u, v) se asume que el tiempo de conducción t_{uv} es conocido.

Ejemplo 1. Representación de la red de transporte como un grafo.

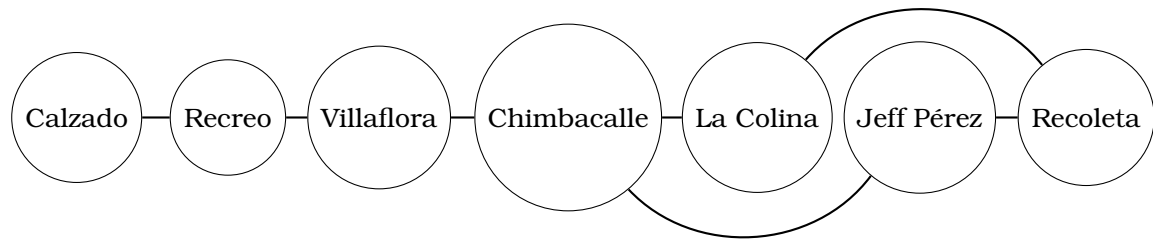


Figura 3.1: Tramo del Sistema de Trolebús de Quito desde la parada del Calzado hasta la Recoleta

Como podemos observar tenemos la representación por medio de un grafo de un tramo del Sistema de Trolebús de Quito, donde cada una de las paradas: “Calzado”, “Recreo”, “Villaflora”, “Chimbacalle”, “La Colina”, “Jefferson Pérez” y “Recoleta”, representan los nodos del grafo y los arcos son no dirigidos.

Sobre la red de transporte circulan las líneas cuya definición la podemos encontrar en (6) y es la siguiente:

Definición 2. Una línea l es un camino simple en la red de transporte público, el cual es operado por un mismo vehículo de principio a fin. Puede ser representado por una sucesión alternada de las estaciones (nodos) y de los arcos que se encuentran en la línea. Notaremos por c_l como el costo operativo de la línea l , que corresponde al costo total incurrido al realizar cada viaje de la línea.

Dentro de los costos operativos de las líneas de transporte se incluyen tanto costos fijos como costos variables. Entre los costos fijos, tenemos por ejemplo, el sueldo de los conductores, el cual no depende del tipo de línea que se vaya a operar; dentro de los costos variables está, por ejemplo, el gasto asociado al consumo de combustible utilizado para manejar las unidades, el mismo que depende tanto de la longitud de una línea como de su frecuencia.

Otras definiciones importantes son la de *reservorio de líneas (line pool)* y de *concepto de líneas*.

Definición 3. Un reservorio de líneas (*line pool*) L es un conjunto de líneas que pertenecen a la red de transporte. Llamaremos f_l a la frecuencia de

la línea l , la cual indica el número de viajes que esta línea va a realizar durante el horizonte de planificación.

Un concepto de líneas $\mathcal{L} = (L, F)$ es un par ordenado de un conjunto de líneas junto con sus respectivas frecuencias, es decir, a cada línea $l \in L$ se le asigna una frecuencia $f_l \in F \subseteq \mathbb{Z}^+$.

Ejemplo 2. Líneas de transporte en una red de transporte público.

Vamos a presentar sobre el mismo tramo del Sistema de Trolebús de Quito del ejemplo anterior un reservorio de líneas que circula de 06:00 am a 08:00 am. Se indican 3 líneas de transporte representadas por colores en la [Figura 3.2](#):

- ■ Línea C1
- ■ Línea C2
- ■ Línea C6

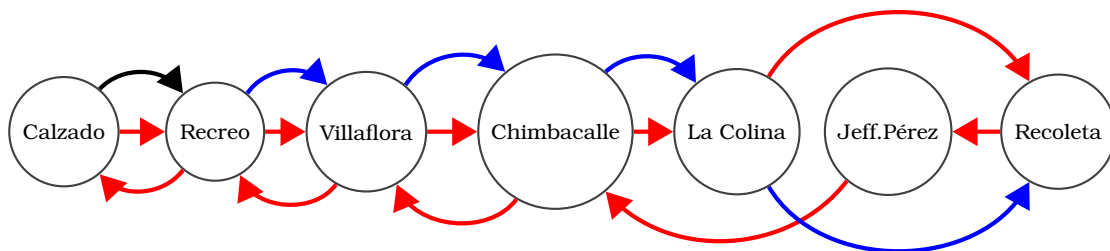


Figura 3.2: Tramo del Sistema de Trolebús de Quito junto con las líneas que circulan desde la parada del Calzado hasta la Recoleta en horas de la mañana.

Podemos observar que la línea C2 (rojo) recorre todas las paradas del tramo, además de que va en dos sentidos, de ida y regreso.

La línea C6 (negro) recorre paradas ubicadas más al Sur de la ciudad que no se presentan en el tramo del ejemplo, por lo que solamente recorre del Calzado al Recreo, donde el Recreo es una terminal de transbordos y solamente llega hasta allí.

Por último, la línea azul del circuito C1 solamente va en el sentido sur-norte,

desde la parada El Recreo, pasando por todas las paradas hasta La Colina, saltando la parada de la Jefferson Pérez que es de sentido norte-sur, y llega hasta la parada de La Recoleta.

Las tres líneas que se encuentran en este tramo de la Red de Transporte de Quito se pueden representar de la siguiente manera, por medio de sus arcos:

Líneas	Arcos
C1	(Recreo,Villaflora),(Villaflora,Chimbacalle),(Chimbacalle,La Colina), (La Colina, Recoleta).
C2	(Calzado,Recreo),(Recreo,Villaflora),(Villaflora,Chimbacalle), (Chimbacalle,La Colina),(La Colina, Recoleta),(Recoleta,Jeff.Pérez) (Jeff. Pérez, Chimbacalle), (Chimbacalle,Villaflora), (Villaflora, Recreo), (Recreo,Calzado).
C6	(Calzado,Recreo).

Cuadro 3.1: Representación de las líneas del tramo anterior del Sistema de Trolebús de Quito con sus respectivos arcos.

Como es posible que varias líneas circulen sobre un mismo arco, es importante establecer límites mínimos y máximos para sus frecuencias acumuladas.

Definición 4. *Dados una red de transporte (V, E) y un concepto de líneas $\mathcal{L} = (L, F)$, la frecuencia de un arco $e = (u, v) \in E$ viene dada por:*

$$f(e) = \sum_{l \in L: e \in l} f_l \quad (3.1)$$

Adicionalmente, las frecuencias mínima y máxima admisibles para el arco e , denotadas por f_e^{\min} y f_e^{\max} respectivamente, indican lo siguiente:

- f_e^{\min} es el número mínimo de vehículos que deben pasar por la arista $e \in E$ dentro del horizonte de tiempo de planificación para cubrir la demanda prevista.
- f_e^{\max} es el número máximo de vehículos que pueden pasar por la arista $e \in E$ dentro del horizonte de tiempo de planificación, debido a restricciones técnicas u operativas.

El parámetro de frecuencia mínima de cada arco se puede calcular a partir del número w_e de pasajeros que se estima que viajen a lo largo del arco e dentro del horizonte de planificación, si se asume que la capacidad N es la misma para todos los vehículos, de la siguiente manera:

$$f_e^{\min} = \left\lceil \frac{w_e}{N} \right\rceil \quad (3.2)$$

En base a lo anterior, podemos definir ahora un concepto de líneas factible.

Definición 5. Sea (V, E) una red de transporte público, donde para cada arco $e \in E$ se tienen dados cotas mínimas y máximas de frecuencia f_e^{\min} y f_e^{\max} y sea L el reservorio de las posibles líneas que van a circular en la red de transporte. Un concepto de líneas $\mathcal{L} = (L, F)$ se denomina factible si las frecuencias de todos los arcos están dentro de sus respectivas cotas; es decir, si para cada arco $e \in E$, se satisface la siguiente desigualdad:

$$f_e^{\min} \leq \sum_{l \in \mathcal{L}: e \in l} f_l \leq f_e^{\max}$$

El modelo clásico de planificación de líneas plantea encontrar un concepto de líneas factible cuyo costo sea mínimo; a continuación, se muestra una formulación de programación lineal entera para el mismo, la cual ha sido extraída de (4).

$$\text{mín} \quad \sum_{l \in \mathcal{L}} \sum_{f \in \mathcal{F}} c_{l,f} x_{l,f} \quad (3.3)$$

$$\text{s.t} \quad f_e^{\min} \leq \sum_{l \in \mathcal{L}: e \in l} \sum_{f \in \mathcal{F}} f \cdot x_{l,f} \leq f_e^{\max}, \quad \forall e \in E, \quad (3.4)$$

$$\sum_{f \in \mathcal{F}} x_{l,f} \leq 1, \quad \forall l \in L, \quad (3.5)$$

$$x_{l,f} \in \{0, 1\}, \quad \forall l \in L, \forall f \in F.$$

Las variables de decisión $x_{l,f}$ están indexadas por las líneas $l \in L$ del reservorio de líneas de la red de transporte y por las posibles frecuencias $f \in F \subseteq \mathbb{Z}^+$. Cada variable es binaria e indica la asignación de la línea a la frecuencia; si $x_{l,f} = 1$, entonces la línea l será operada en la red con

frecuencia f y si $x_{l,f} = 0$, la línea l no será operada con frecuencia f (puede ser operada con otra frecuencia).

La función objetivo (3.3) a minimizar mide el costo operativo del concepto de líneas, el mismo que se calcula al sumar los costos de operación de las líneas, correspondientes a las frecuencias seleccionadas.

La primera familia de restricciones (3.4) requiere que sobre cada arista $e \in E$, la suma de las frecuencias seleccionadas para todas las líneas que pasan por e debe estar dentro del rango $[f_e^{min}, f_e^{max}]$, lo que garantiza hallar un concepto de líneas factible.

La familia de restricciones (3.5) especifica que la suma de los valores de las variables de asignación $x_{l,f}$ sobre todas las posibles frecuencias de cada línea debe ser menor o igual que 1, es decir, para cada línea l se puede seleccionar a lo más una frecuencia de operación. Si para una línea determinada no se selecciona ninguna frecuencia de operación, esto significa que esa línea no será operada dentro del sistema.

3.2. Modelo integrado de planificación de líneas y enrutamiento de pasajeros.

La planificación de líneas y el enrutamiento de pasajeros son problemas acoplados entre sí. En efecto, la ruta que un pasajero tomará dentro del sistema de transporte depende fuertemente de las líneas disponibles, de sus frecuencias, e incluso de los horarios de viaje. Una limitación fuerte del primer modelo es que fija las rutas de los pasajeros a priori y no considera los posibles cambios que puedan existir en las mismas, como efecto de la modificación de las líneas y sus frecuencias. Ante ello, se plantea un segundo modelo enfocado en la perspectiva de los usuarios y en el que se resuelven integradamente la planificación de líneas con el enrutamiento de los pasajeros.

La idea del segundo modelo es capturar la relación entre la decisión de un usuario acerca de la ruta a tomar, con el estado de la operación del sistema transporte. Por ejemplo, si un individuo desea llegar pronto a su lugar de destino, y se le presenta la oportunidad de elegir entre una ruta que requiere la combinación de dos líneas con un transbordo que invo-

lucra tiempo de espera, y otra ruta en la que se desplaza empleando una única línea que realiza muchas paradas, pero, se moviliza más rápido; es muy probable que el usuario, sin importarle el costo, se decida por tomar la segunda alternativa.

En este contexto, el Modelo de Planificación de Líneas con Minimización de Transbordos y Frecuencias (Line Planning Model with Minimal Transfers and Frequencies, LPMTF) consiste en seleccionar un conjunto de líneas con sus respectivas frecuencias y determinar rutas para los usuarios desde cada uno de sus orígenes a sus destinos, de tal forma que la demanda agregada de transporte de pasajeros sobre cada arco de la red sea satisfecha por la frecuencia acumulada de las líneas que circulan sobre dicho arco; además de que los costos de operación de las líneas seleccionadas no superen el límite presupuestario disponible. La función objetivo a minimizar mide la suma de las *inconveniencias* de las rutas de todos los pasajeros.

En (5), se define a la inconveniencia de una ruta como un indicador que refleja los contratiempos que se le presentan al pasajero durante su traslado; se propone calcularla mediante la suma ponderada del tiempo de viaje de la ruta y el número de transbordos que se deben realizar.

Previo a la formulación del modelo es indispensable definir el concepto de la red change & go, además de otros términos y notaciones que fueron obtenidas de (6) y (5), en donde se propone un modelo de programación lineal entera para el problema integrado de planificación de líneas con el enrutamiento de los pasajeros.

Definición 6. *Dada una red de transporte (V, E) con su respectivo reservorio de líneas L , definiremos al conjunto de todas las líneas $l \in L$ que pasan por un determinado nodo $u \in V$ como:*

$$L(u) = \{l \in L : u \in l\}, \quad (3.6)$$

y al conjunto de todos los arcos que pertenecen a una línea $l \in L$ como:

$$E(l) = \{e \in E : e \in l\}. \quad (3.7)$$

La demanda dentro de un sistema de transportación pública se espe-

cifica comúnmente por medio de una matriz de orígenes y destinos.

Definición 7. *Dada una red de transporte (V, E) como un grafo dirigido o no dirigido; se define la matriz origen-destino asociada a la red de transporte $W \in \mathcal{M}_{|V| \times |V|}(\mathbb{Z}^+)$ como una matriz cuyas entradas $w_{st} \geq 0$ indican el número de pasajeros que viajan desde una estación de origen s a una estación de destino t dentro del horizonte de tiempo de planificación. Adicionalmente, se define $\mathcal{R} \subseteq V \times V$ como el conjunto de pares ordenados (s, t) para los cuales $w_{st} > 0$.*

Como deseamos minimizar el número de transbordos es necesario tener una definición formal de lo qué es un transbordo.

Definición 8. *Dados una red de transporte (V, E) y un concepto de líneas $\mathcal{L} = (L, f)$, denotaremos por $L' \subseteq L$ al subconjunto de líneas del reservorio que tienen frecuencias positivas, es decir, que se encuentran en operación. Un pasajero puede viajar desde un origen s a un destino t , si existe un camino que vaya de s a t en la red de transporte público tal que cada arco del mismo pertenezca a una línea $l \in L'$. El mínimo número de líneas de L' que se necesita para cubrir dicho camino, menos 1, es el número de transbordos requeridos por el pasajero.*

Según (6), en el problema integrado de planificación de líneas y enrutamiento de pasajeros con un tiempo de viaje mínimo y un mínimo número de transbordos, se debe buscar un concepto de líneas $\mathcal{L} = (L, F)$ y un conjunto de rutas para los pasajeros tales que:

- Cada pasajero tenga asignada una ruta que le permita desplazarse desde su origen a su destino.
- La frecuencia de las líneas se fijen de acuerdo al enrutamiento de los pasajeros.
- El concepto de líneas no sea demasiado costoso.

En este contexto, para medir el inconveniente del pasajero en una ruta determinada se empleará la suma ponderada del tiempo empleado en sus desplazamientos y el número de transbordos requeridos, mediante la siguiente fórmula:

$$\text{inconveniente}(P) = k_1 \sum_{(u,v) \in P} t_{uv} + k_2 n_{tr}, \quad (3.8)$$

donde P denota al camino empleado por el pasajero que va desde su origen s a su destino t , n_{tr} es el número de transbordos realizados durante el viaje por el camino P y t_{uv} es el tiempo de desplazamiento entre dos estaciones consecutivas u y v .

Para formular el segundo modelo integrado se requiere extender el grafo empleado para modelizar la red de transporte, de tal forma que sea posible representar todos los transbordos que se pueden realizar de una línea a otra, así como las entradas de los pasajeros al sistema y sus salidas del mismo. Esta nueva red fue propuesta en (5) y en (6) y se denomina red *change & go*.

Definición 9. *Dados una red de transporte público (V, E) como un grafo dirigido y un reservorio de líneas L , su correspondiente red *change & go* $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ es un grafo dirigido que consiste en un conjunto de nodos $\mathcal{V} := \mathcal{V}_{CG} \cup \mathcal{V}_{OD}$, donde,*

$$\mathcal{V}_{CG} := \{(v, l) \in V \times L : l \in L(v)\},$$

con $L(v)$ el conjunto de todas las líneas que pasan por el nodo v ,

$$\mathcal{V}_{OD} := \{(s, 0) : (s, t) \in \mathcal{R}\} \cup \{(0, t) : (s, t) \in \mathcal{R}\},$$

con \mathcal{R} el conjunto de todos los pares origen-destino,

y un conjunto de arcos $\mathcal{E} := \mathcal{E}_{change} \cup \mathcal{E}_{OD} \cup \mathcal{E}_{go}$, donde,

$$\mathcal{E}_{change} := \{((v, l_1), (v, l_2)) \in \mathcal{V}_{CG} \times \mathcal{V}_{CG} : l_1 \neq l_2\} \text{(arcos de transbordo)},$$

$$\mathcal{E}_{OD} := \{((s, 0), (s, l)) \in \mathcal{V}_{OD} \times \mathcal{V}_{CG} : (s, t) \in \mathcal{R}, l \in L(s)\} \cup$$

$$\{((t, l), (0, t)) \in \mathcal{V}_{CG} \times \mathcal{V}_{OD} : (s, t) \in \mathcal{R}, l \in L(t)\} \text{(arcos de entrada-salida)},$$

$$\mathcal{E}_l := \{((u, l), (v, l)) \in \mathcal{V}_{CG} \times \mathcal{V}_{CG} : (u, v) \in E(l)\} \text{(arcos de conducción para cada línea } l),$$

$$\mathcal{E}_{go} := \cup_{l \in L} \mathcal{E}_l, \text{ (arcos de conducción).}$$

Presentaremos a continuación un ejemplo que muestra la construcción de la red *change & go* a partir de la red de transporte; para este fin,

emplearemos la instancia más pequeña de las que consideraremos en el [Capítulo 4](#).

Ejemplo 3. La instancia "Toy0" corresponde a la red de transporte público con 3 estaciones representada por el grafo no dirigido con 3 nodos y 2 arcos de la [Figura 3.3](#).

El reservorio de líneas es $L = \{1, 2, 3\}$, en donde, la línea 1 pasa por los nodos 1 y 2, la línea 2 pasa por los nodos 2 y 3 y la línea 3 pasa por todos los nodos. Todas las líneas son bidireccionales y deben tener la misma frecuencia en ambos sentidos.

El conjunto de pares de orígenes y destinos es $\mathcal{R} = \{(1, 2), (2, 3), (2, 1), (3, 2)\}$.

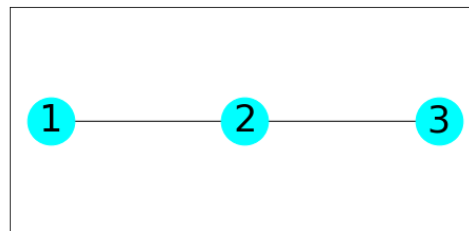


Figura 3.3: Red de Transporte de la Instancia "Toy0" como un grafo no dirigido.

Como existe información de desplazamientos en ambos sentidos, convertiremos la red de transporte de "Toy0" en un grafo con arcos dirigidos, sustituyendo para ello cada arista $\{u, v\}$ por dos arcos antiparalelos (u, v) y (v, u) .

Así, la misma red de transporte con arcos dirigidos es la siguiente:

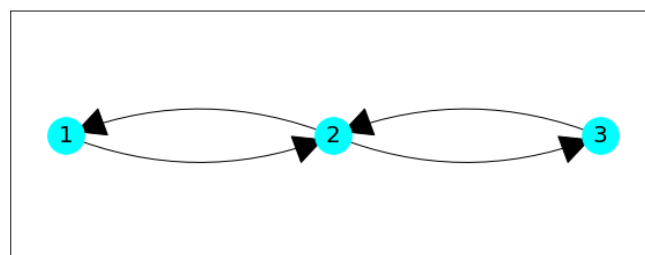


Figura 3.4: Red de Transporte de la instancia "Toy0" como un grafo dirigido.

La red con el conjunto de líneas se muestra en la [Figura 3.5](#).

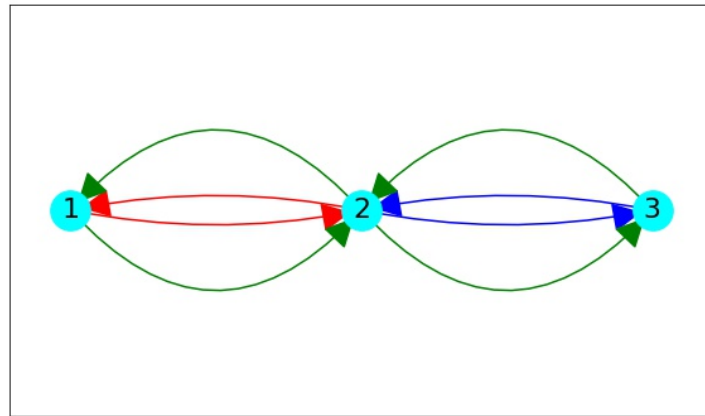


Figura 3.5: Líneas de transporte de la instancia "Toy0".

La línea 1 (color rojo) recorre los arcos $(1, 2)$ y $(2, 1)$, la línea 2 (color azul) recorre los arcos $(2, 3)$ y $(3, 2)$, y finalmente, la línea 3 (color verde) recorre los arcos $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$ y $(2, 1)$

Procederemos ahora a construir la red *change & go*, determinando primero los nodos de la red, que de acuerdo a la definición anterior, corresponden a la unión de dos conjuntos:

- Un conjunto \mathcal{V}_{CG} , el cual es un conjunto de pares ordenados que pertenecen al producto cartesiano del conjunto de nodos de la red de transporte y el reservorio de líneas; específicamente la primera componente del par ordenado corresponde a una estación de la red de transporte, mientras que la segunda corresponde a una línea que pasa por esa estación.
- Un conjunto \mathcal{V}_{OD} , el cual es la unión de dos conjuntos de pares ordenados. En el primer conjunto están todos los pares ordenados de la forma $(s, 0)$, para cada estación $s \in V$ que aparezca como primera componente de algún par origen-destino $(s, t) \in \mathcal{R}$. De manera similar, el segundo conjunto contiene los pares ordenados de la forma $(0, t)$, para cada estación t que aparezca como segunda coordenada de algún par origen-destino.

Para construir el conjunto \mathcal{V}_{CG} presentamos en el [Cuadro 3.2](#) el reservorio de líneas de la instancia "Toy0" con los arcos de cada línea.

Líneas	Arcos
1	(1,2),(2,1)
2	(2,3),(3,2)
3	(1,2),(2,1),(2,3),(3,2)

Cuadro 3.2: Reservorio de líneas de la Instancia "Toy0" con los arcos de cada línea.

Por otra parte, las líneas que pasan por cada uno de los nodos de la red de transporte son las siguientes:

$$L(1) = \{1, 3\}$$

$$L(2) = \{1, 2, 3\}$$

$$L(3) = \{2, 3\}$$

De esta manera, por el nodo 1 de la red de transporte pasan las líneas 1 y 3, y por tanto se tienen los nodos (1, 1) y (1, 3) en la red change & go; por el nodo 2 pasan las líneas 1, 2 y 3, entonces se tienen los nodos (2, 1), (2, 2) y (2, 3) en la red change & go; finalmente, por el nodo 3 pasan las líneas 2 y 3, que inducen nodos (3, 2) y (3, 3) en la red change & go.

Luego,

$$\mathcal{V}_{CG} = \{(1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$$

A continuación, construiremos el conjunto \mathcal{V}_{OD} . El conjunto de pares origen-destino está dado por $\mathcal{R} = \{(1, 2), (2, 3), (2, 1), (3, 2)\}$.

Para el primer subconjunto de nodos de salida se tiene que la primera componente es el nodo origen de cada par origen-destino, y la segunda componente es el 0 (eliminando elementos repetidos), entonces,

$$\mathcal{V}_{OD1} = \{(1, 0), (2, 0), (3, 0)\}$$

En el segundo subconjunto de nodos de entrada, en cambio, la segunda componente del par ordenado es el nodo destino y la primera es el 0 (eliminando elementos repetidos):

$$\mathcal{V}_{OD2} = \{(0, 1), (0, 2), (0, 3)\}$$

Así, el conjunto de nodos de entrada y salida es el siguiente:

$$\mathcal{V}_{OD} = \mathcal{V}_{OD1} \cup \mathcal{V}_{OD2} = \{(1, 0), (2, 0), (3, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3)\}.$$

De acuerdo a la [Definición 9](#) tenemos que la red change & go tiene un total de 13 nodos, que son los siguientes:

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_{CG} \cup \mathcal{V}_{OD} = \{(1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3), (1, 0), (2, 0), (3, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3)\}$$

Según la [Definición 9](#), los arcos de la red change & go corresponden a la unión de los siguientes 3 conjuntos:

- El conjunto \mathcal{E}_{change} es un conjunto de tuplas de pares ordenados correspondiente a los arcos de transbordo, y se obtiene a partir del producto cartesiano de \mathcal{V}_{CG} consigo mismo, siempre y cuando las líneas sean distintas.
- El conjunto \mathcal{E}_l es un conjunto de tuplas de pares ordenados correspondiente a los arcos de conducción de la línea $l \in L$, y se obtiene al definir para cada arco (u, v) que forme parte de la línea l en la red de transporte, es decir, el arco correspondiente $((u, l), (v, l))$ en la red change & go.
- El conjunto \mathcal{E}_{OD} contiene los arcos de origen y destino, y es un conjunto de tuplas de pares ordenados que surgen del producto cartesiano entre \mathcal{V}_{OD} y \mathcal{V}_{CG} , donde la componente de ambos pares ordenados tiene que tener el mismo nodo origen o nodo destino.

Determinaremos primero los arcos de transbordo, para lo que examinamos los nodos de \mathcal{V}_{CG} . Notemos que los pares con componentes de estación igual a 1 son: $\{(1, 3), (1, 1)\}$; de igual manera, los pares con la componente de estación igual a 2 son: $\{(2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$; y finalmente los pares con la componente de estación igual a 3 son: $\{(3, 2), (3, 3)\}$.

Entonces,

$$\mathcal{E}_{change} = \{((1, 3), (1, 1)); ((1, 1), (1, 3)); ((2, 3), (2, 1)); ((2, 3), (2, 2)); ((2, 1), (2, 3)); ((2, 2), (2, 3)); ((2, 1), (2, 2)); ((2, 2), (2, 1)); ((3, 3), (3, 2)); ((3, 2), (3, 3))\}$$

Ahora, determinaremos el conjunto de los arcos de conducción para cada línea $l \in L$.

Los arcos de la línea 1 en la red de transporte son $(1, 2)$ y $(2, 1)$ (ver el Cuadro 3.2). Cada uno de estos arcos induce el arco de conducción correspondiente en la red change & go:

$$\mathcal{E}_1 = \{((1, 1), (2, 1)), ((2, 1), (1, 1))\}$$

Para la línea 2, los arcos de la red de transporte son: $\{(2, 2), (3, 2)\}$ (ver el Cuadro 3.2) que inducen los siguientes arcos de conducción:

$$\mathcal{E}_2 = \{((2, 2), (3, 2)), ((3, 2), (2, 2))\}$$

Finalmente, los arcos de la red de transporte utilizados por la línea 3 son: $\{(1, 2), (2, 3), (3, 2), (2, 1)\}$ (ver el Cuadro 3.2) e inducen a los siguientes arcos de conducción:

$$\mathcal{E}_3 = \{((1, 3), (2, 3)), ((2, 3), (3, 3)), ((3, 3), (2, 3)), ((2, 3), (1, 3))\}$$

Así, el conjunto de arcos de conducción viene dado de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{go} &= \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2 \cup \mathcal{E}_3 \\ &= \{((1, 1), (2, 1)), ((2, 1), (1, 1)), ((2, 2), (3, 2)), ((3, 2), (2, 2)), \\ &\quad ((1, 3), (2, 3)), ((2, 3), (3, 3)), ((3, 3), (2, 3)), ((2, 3), (1, 3))\} \end{aligned}$$

A continuación, construimos el conjunto \mathcal{E}_{OD} que contiene los arcos de origen y destino.

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{OD} &= \{((1, 0), (1, 3)), ((1, 0), (1, 1)), ((1, 1), (0, 1)), ((1, 3), (0, 1)), ((2, 0), (2, 1)), \\ &\quad ((2, 0), (2, 2)), ((2, 0), (2, 3)), ((2, 1), (0, 2)), ((2, 3), (0, 2)), ((2, 2), (0, 2)), \\ &\quad ((3, 0), (3, 3)), ((3, 0), (3, 2)), ((3, 2), (0, 3)), ((3, 3), (0, 3))\} \end{aligned}$$

Finalmente, el conjunto de todos los arcos de la red change & go está dado por:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{change} \cup \mathcal{E}_{OD} \cup \mathcal{E}_{go}$$

Para concluir con el ejemplo, se presenta en la [Figura 3.6](#) la gráfica de la red change & go.

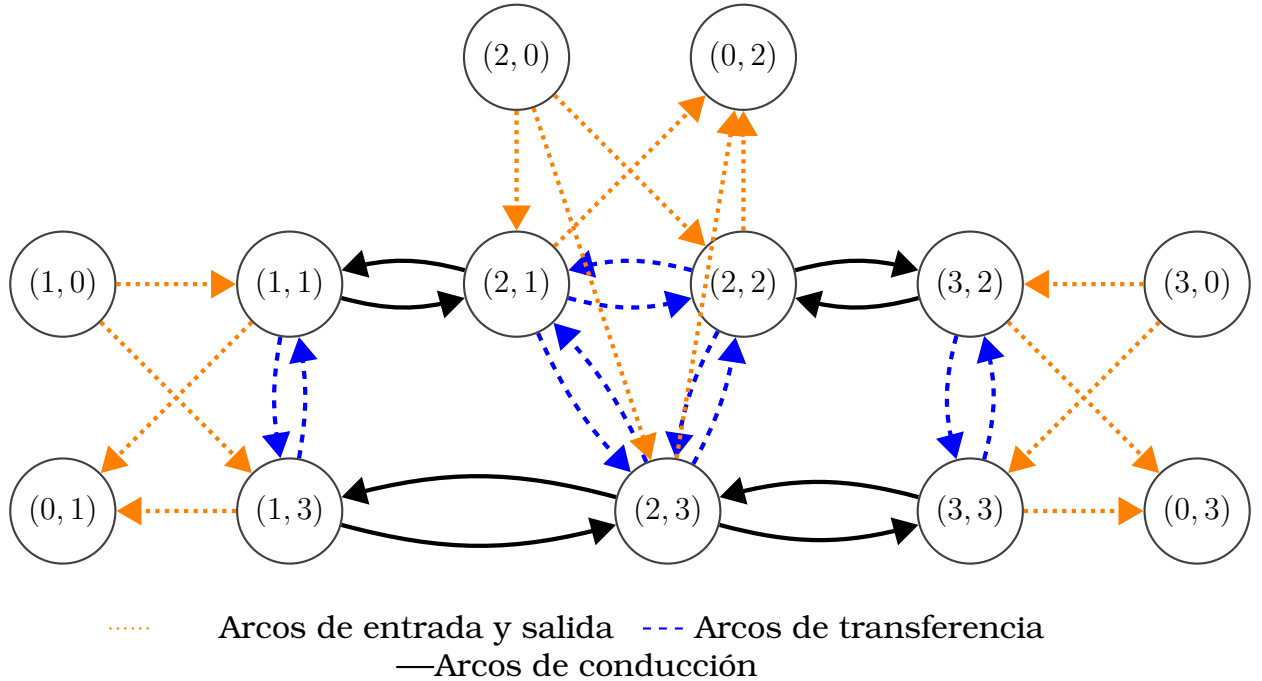


Figura 3.6: Red change & go de la instancia "Toy0".

El segundo modelo que se propone busca determinar líneas no muy costosas que puedan satisfacer la demanda; y tales que, al enrutar a los usuarios sobre las mismas se minimicen el tiempo de viaje promedio y el número de transbordos promedio. Para ello, definimos los siguientes costos sobre los arcos de la red change & go:

$$c_e = \begin{cases} 0, & \text{si } e \in \mathcal{E}_{OD}, \\ \text{penalización por el tiempo de viaje sobre el arco } e, & \text{si } e \in \mathcal{E}_{go}, \\ \text{penalización por transbordo,} & \text{si } e \in \mathcal{E}_{change}, \end{cases}$$

más específicamente,

$$c_e = \begin{cases} 0, & \text{si } e \in \mathcal{E}_{OD}, \\ k_1 t_{uv}, & \text{si } e \in \mathcal{E}_{go}, \\ k_2, & \text{si } e \in \mathcal{E}_{change}, \end{cases} \quad (3.9)$$

donde $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ son los coeficientes de ponderación del tiempo de viaje y de los transbordos, respectivamente, que fueron establecidos en la [Ecuación 3.8](#) para medir la inconveniencia de una ruta.

Con respecto al enrutamiento de los pasajeros, es claro que no es posible llevar a todos los usuarios siempre por una misma ruta desde su origen a su destino, puesto que las unidades tienen una capacidad limitada; por lo que lo más realista sería que los usuarios tengan la posibilidad de usar distintos recorridos.

Para permitir el uso de diferentes rutas, el modelo considera, para cada par origen-destino, un flujo de pasajeros que debe circular por los distintos arcos de la red *change & go*. El valor de este flujo debe coincidir con la demanda de transporte para el par origen-destino.

Esta condición se puede formular por medio de la siguiente familia de restricciones de conservación de flujo (una restricción matricial por cada par (s, t) origen-destino):

$$\theta x_{st} = b_{st}. \quad \forall (s, t) \in \mathcal{R} \quad (3.10)$$

donde,

- $\theta \in \mathbf{Z}^{|\mathcal{V}| \times |\mathcal{E}|}$ es la matriz de incidencia nodo-arco de la red *change & go*.

- $b_{st} \in \mathbb{Z}^{|\mathcal{V}|}$ es el vector de demandas definido por:

$$b_{st} = \begin{cases} -w_{st}, & si & i = (s, 0), \\ w_{st}, & si & i = (0, t), \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases} \quad (3.11)$$

- $w_{st} \in \mathbb{Z}$ indica el número de pasajeros que viajan desde el origen s al destino t dentro del horizonte de tiempo de planificación.
- $x_{st} \in \mathbb{Z}^{|\mathcal{E}|}$ es un vector compuesto por las variables de flujo asociadas a todos los arcos de la red change & go.

Para seleccionar las líneas del reservorio y establecer su frecuencia se incluyen variables enteras f_l , con $l \in L$. Una frecuencia de cero indica que la línea correspondiente no será operada.

De esta manera, la formulación del segundo modelo integrado de planificación de líneas y enrutamiento de los pasajeros, según se presenta en Schöbel y Scholl (5) es la siguiente:

$$\text{mín} \quad \sum_{(s,t) \in \mathcal{R}} \sum_{e \in \mathcal{E}} c_e x_{st}^e \quad (3.12)$$

$$\text{s.t.} \quad \frac{1}{N} \sum_{(s,t) \in \mathcal{R}} x_{st}^e \leq f_l, \quad \forall l \in \mathcal{L}, \forall e \in \mathcal{E}_l, \quad (3.13)$$

$$\theta x_{st} = b_{st}, \quad \forall (s, t) \in \mathcal{R}, \quad (3.14)$$

$$\sum_{l \in \mathcal{L}} c_l f_l \leq B, \quad (3.15)$$

$$\sum_{\substack{l \in \mathcal{L}: \\ (u,l), (v,l) \in \mathcal{V}_{CG}}} f_l \leq f_{uv}^{max}, \quad \forall (u, v) \in E, \quad (3.16)$$

$$x_{st}^e, f_l \in \mathbb{Z}^+ \quad \forall (s, t) \in \mathcal{R}, e \in \mathcal{E}, l \in \mathcal{L}.$$

Como ya se indicó, el modelo emplea las siguientes variables de decisión enteras:

- f_l denota la frecuencia de la línea l . Si $f_l = 0$, la línea no será operada.

- x_{st}^e denota el número de pasajeros que viajan desde el nodo origen s hacia el nodo destino t utilizando para ello el arco de la red change & go e .

Los parámetros del modelo incluyen la capacidad N de un vehículo de la flota (se asume que todas las unidades tienen la misma capacidad), el presupuesto B disponible para la operación del sistema, el vector de demandas de transporte b_{st} definido en la [Ecuación 3.11](#), los pesos c_e de los arcos de la red change & go definidos en la [Ecuación 3.9](#), y los costos c_l de operación por viaje, para cada línea $l \in L$.

La función objetivo (3.12) a minimizar mide el inconveniente total de las rutas asignadas a los pasajeros, lo que se calcula a partir del número de transbordos y el tiempo de viaje, según se indica en la [Ecuación 3.8](#). Para ello se utilizan los pesos definidos para los arcos de la red de change & go en la [Ecuación 3.9](#).

La primera familia de restricciones (3.13) asegura que la suma total de pasajeros que circulan sobre cada arco de conducción de cada línea en la red change & go, no debe superar el producto de la frecuencia de la línea por la capacidad de cada vehículo; es decir, estas restricciones de demanda aseguran que la frecuencia de la línea tome un valor lo suficientemente grande para garantizar el transporte de los pasajeros.

La familia de restricciones (3.14) corresponde a la misma que se mostró en la [Ecuación 3.10](#), y está conformada por restricciones matriciales de la forma $\theta x_{st} = b_{st}$, donde cada una de ellas, modela los desplazamientos entre cada par origen y destino $(s, t) \in \mathcal{R}$ como un flujo de pasajeros desde el nodo $(s, 0)$ al nodo destino $(0, t)$ en la red de change & go.

La restricción (3.15) corresponde a una restricción presupuestaria, en donde la suma de los costos de operación de las líneas (dados por los productos entre el costo por viaje de cada línea y su frecuencia) no debe superar al valor del presupuesto, especificado por el parámetro B .

La última familia de las restricciones (3.16), se refiere a la capacidad de cada arco de la red de transporte, y especifica que la suma de los números de vehículos de todas las líneas que pasan por dicho arco dentro del horizonte de tiempo no debe superar la frecuencia máxima establecida para el arco. Esto impone cotas superiores sobre la frecuencia acumulada

total de todas las líneas que comparten un determinado arco dentro del horizonte de planificación.

Capítulo 4

Resultados Computacionales

Una vez que se han formulado dos modelos para la planificación de líneas, un modelo clásico que minimiza los costos operativos y un segundo modelo que integra la planificación de líneas con el enrutamiento de pasajeros, pasaremos a la siguiente etapa que corresponde a la implementación computacional.

Para poder realizar las pruebas computacionales de ambos modelos se empleó el software de optimización de Gurobi, en su versión 9.5.2. Actualmente, Gurobi es una herramienta computacional frecuentemente utilizada para resolver una amplia gama de problemas de optimización. Estos incluyen programación lineal, programación lineal entera (que emplearemos en nuestros dos modelos), programación entera mixta, programación cuadrática, etc. Es accesible en la biblioteca de Python PuLP a través de una API y se lo puede encontrar en (1).

Para la implementación se usaron 5 instancias que serán descritas de manera más detallada en la primera sección de este capítulo.

Los dos modelos fueron implementados y probados, en una primera versión, en cuadernos de Jupyter (29). La versión final de los modelos fue implementada como un programa de Python. Las pruebas computacionales para todas las instancias fueron ejecutadas en una máquina virtual del supercomputador "Quinde" del Departamento de Modelización Matemática. Esta máquina virtual posee un sistema operativo Linux CentOS

6 o 7, de arquitectura x86_64 con 4 procesadores Intel (R) Xeon (R) 2.60 GHz y una memoria RAM de 32 GB.

El código correspondiente a todas las instancias, exceptuando la instancia más grande, fue implementado en un solo archivo fuente de Python, denominado "programageneral.py". La instancia faltante se implementó en un archivo separado llamado "programageneralAtenas.py". La ejecución de los programas se realizó a través de la VPN de la Escuela Politécnica Nacional, utilizando la herramienta Windows Powershell, que permite abrir una terminal de comandos básicos de Linux. En la [Figura 4.1](#) se muestra un gráfico con la ejecución de los programas desde el ambiente Powershell.

```
Tasks: 204 total,  2 running, 202 sleeping,  0 stopped,  0 zombie
%Cpu(s): 24.5 us,  0.6 sy,  0.0 ni, 74.7 id,  0.0 wa,  0.2 hi,  0.1 si,  0.0 st
MiB Mem : 31960.0 total, 26231.8 free,  5467.6 used,  260.6 buff/cache
MiB Swap:  8192.0 total,  7988.4 free,   203.6 used, 26099.5 avail Mem

  PID USER      PR  NI  VIRT  RES  SHR  S  %CPU  %MEM    TIME+  COMMAND
2439337 est-lto+  20   0 5855256  5.1g 40332 R  99.3  16.4   1:40.32 python3
2435915 root      20   0  97644   7524 5880 S   0.3   0.0   0:03.45 pmdalinux
2436143 pcp       20   0 129904 10240 6380 S   0.3   0.0   0:01.46 pmlogger
2439233 est-lto+  20   0  65436   5032 4140 S   0.3   0.0   0:01.53 top
   1 root      20   0  241208  7100 4156 S   0.0   0.0 14457:11 systemd
   2 root      20   0     0     0     0 S   0.0   0.0   0:04.08 kthreadd
   3 root      0 -20     0     0     0 I   0.0   0.0   0:00.00 rcu_gp
   4 root      0 -20     0     0     0 I   0.0   0.0   0:00.00 rcu_par_gp
   6 root      0 -20     0     0     0 I   0.0   0.0   0:00.00 kworker/0:0H-events_highpri
   9 root      0 -20     0     0     0 I   0.0   0.0   0:00.00 mm_percpu_wq
  10 root      20   0     0     0     0 S   0.0   0.0   0:46.71 ksoftirqd/0
  11 root      20   0     0     0     0 I   0.0   0.0   61:17.20 rcu_sched
```

Figura 4.1: Captura de pantalla del ambiente Power Shell con el programageneral.py ejecutándose en la máquina virtual.

Los archivos de todas las instancias, así como todos los datos auxiliares generados durante las pruebas computacionales y el código fuente correspondiente a la implementación de los modelos son parte integrante de este trabajo y se entregan en soporte magnético.

4.1. Instancias

En esta sección se describen 5 instancias que fueron utilizadas para las pruebas computacionales de los dos modelos formulados: tres pequeñas, una mediana y una grande.

La primera instancia, que la llamaremos "Toy0", es la más pequeña de todas y se encuentra reportada en (6). Se le añadieron algunas modificaciones y fue utilizada como ejemplo de la construcción de la red change & go, en el [Capítulo 3](#).

La segunda instancia denominada "Toy1", la cuarta llamada "Grid" y la quinta denominada "Atenas" fueron extraídas del conjunto de datos de GitHub del proyecto OpenLinTim (2; 3). La tercera instancia "Toy2" es un árbol (grafo conexo acíclico) y fue construida a partir de algunos datos de la instancia "Toy1".

Como se explicó en el [Capítulo 3](#), se va a considerar para todas las instancias exceptuando la instancia más pequeña "Toy0", la red de transporte para el primer modelo como no dirigida; mientras que para el segundo modelo se emplea la misma red de transporte, pero con arcos dirigidos, con la finalidad de facilitar la construcción de la red change & go. Esto se realiza, considerando que una arista sin dirección puede ser siempre reemplazada por dos arcos con direcciones opuestas. El valor del presupuesto requerido como parámetro para el segundo modelo no contaba dentro de la información de las instancias, por lo que fue fijado a un monto coherente con el resto de datos.

4.1.1. Características de las Instancias

1. Instancias Pequeñas

Instancia "Toy0"

Esta es la instancia más pequeña de todas.

Características	Valores
Nombre de la instancia	Toy0
Número de nodos	3
Número de arcos	4
Nº de líneas en el reservorio (line pool)	3
Cardinalidad del conjunto de frecuencias	10

Cuadro 4.1: Características de la instancia "Toy0".

La red de transporte es dirigida con 3 nodos y 4 arcos, por los cuales circulan 3 líneas de transporte. El conjunto de frecuencias disponibles $F \subseteq \mathbb{Z}^+$ está conformado por valores sucesivos que van del 1 al 10. La gráfica de la red de transporte para esta instancia es la siguiente:

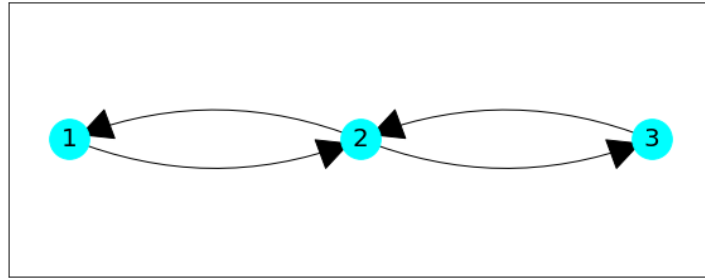


Figura 4.2: Red de transporte de la instancia "Toy0".

Instancia "Toy1"

Características	Valores
Nombre de la instancia	Toy1
Número de nodos	8
Número de arcos	8
Nº de líneas en el reservorio (line pool)	8
Cardinalidad del conjunto de frecuencias	20

Cuadro 4.2: Características de la instancia "Toy1".

La red de transporte no dirigida de esta instancia contiene 8 nodos y 8 arcos, sobre los cuales circulan 8 líneas de transporte. El conjunto de posibles frecuencias $F \subseteq \mathbb{Z}^+$ está conformado por valores sucesivos que van del 1 al 20. El Cuadro 4.2 resume las características de esta instancia y la Figura 4.3 muestra un esquema de la red de transporte público.

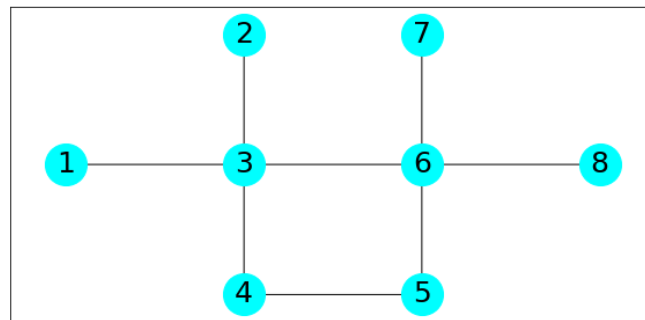


Figura 4.3: Red de transporte de la instancia "Toy1".

Instancia "Toy2"

Es la tercera instancia y de un tamaño similar al de la segunda instancia.

Características	Valores
Nombre de la instancia	Toy2
Número de nodos	10
Número de arcos	9
Nº de líneas en el reservorio (line pool)	9
Cardinalidad del conjunto de frecuencias	20

Cuadro 4.3: Características de la instancia "Toy2".

Su red de transporte es un grafo no dirigido que contiene 10 nodos y 9 arcos. El tamaño del reservorio es de 9 líneas y el conjunto de posibles frecuencias $F \subseteq \mathbb{Z}^+$ está conformado por valores sucesivos que van del 1 al 20. El Cuadro 4.3 resume las características de esa instancia y la Figura 4.4 muestra un esquema de la red de transporte público.

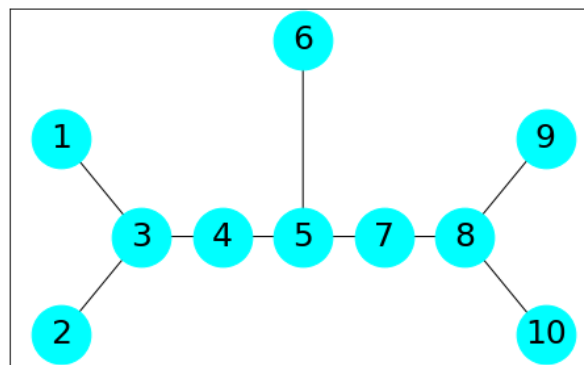


Figura 4.4: Red de transporte de la instancia "Toy2".

2. Instancia Mediana "Grid"

La cuarta instancia que vamos a detallar la llamaremos "Grid" y corresponde a una red de buses de transporte público.

Características	Valores
Nombre de la instancia	Grid
Número de nodos	25
Número de arcos	40
Nº de líneas en el reservorio (line pool)	28
Cardinalidad del conjunto de frecuencias	20

Cuadro 4.4: Características de la instancia "Grid".

La red de transporte en esta instancia es no dirigida. Contiene 25 nodos y 40 arcos, sobre los cuales circula un reservorio de 28 líneas.

El conjunto de posibles frecuencias $F \subseteq \mathbb{Z}^+$ está conformado por valores sucesivos que van del 1 al 20. El Cuadro 4.4 resume las características de esta instancia y la Figura 4.5 muestra un esquema de la red de transporte público.

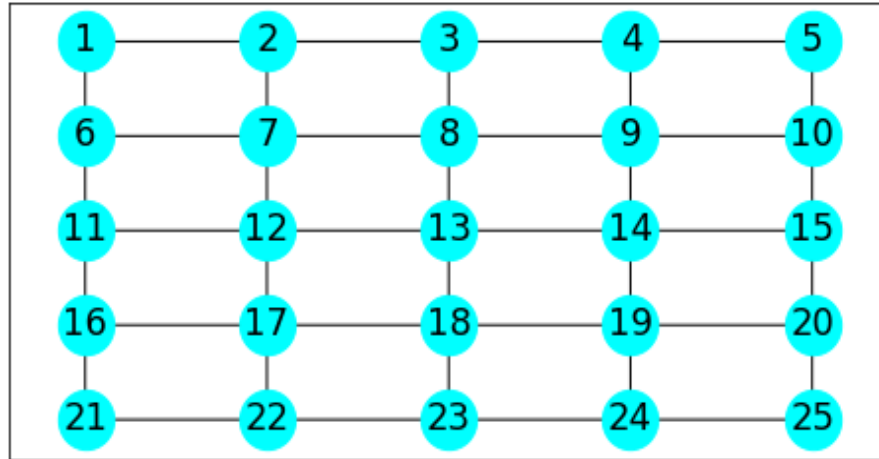


Figura 4.5: Red de transporte de la instancia "Grid".

3. Instancia Grande "Atenas"

Esta es la última instancia y la más grande de todas. Está basada en información real del Sistema de Metro de la ciudad de Atenas en Grecia.

Características	Valores
Nombre de la instancia	Atenas
Número de nodos	51
Número de arcos	52
Nº de líneas en el reservorio (line pool)	59
Cardinalidad del conjunto de frecuencias	20

Cuadro 4.5: Características de la instancia "Atenas".

La red de transporte es un grafo no dirigido con 51 nodos y 52 arcos, por donde circula un reservorio o line pool de 59 líneas. El conjunto de posibles frecuencias $F \subseteq \mathbb{Z}^+$ está conformado por valores sucesivos que van del 1 al 20. El Cuadro 4.5 resume las características de esta instancia y la Figura 4.6 muestra un esquema de la red de transporte público.

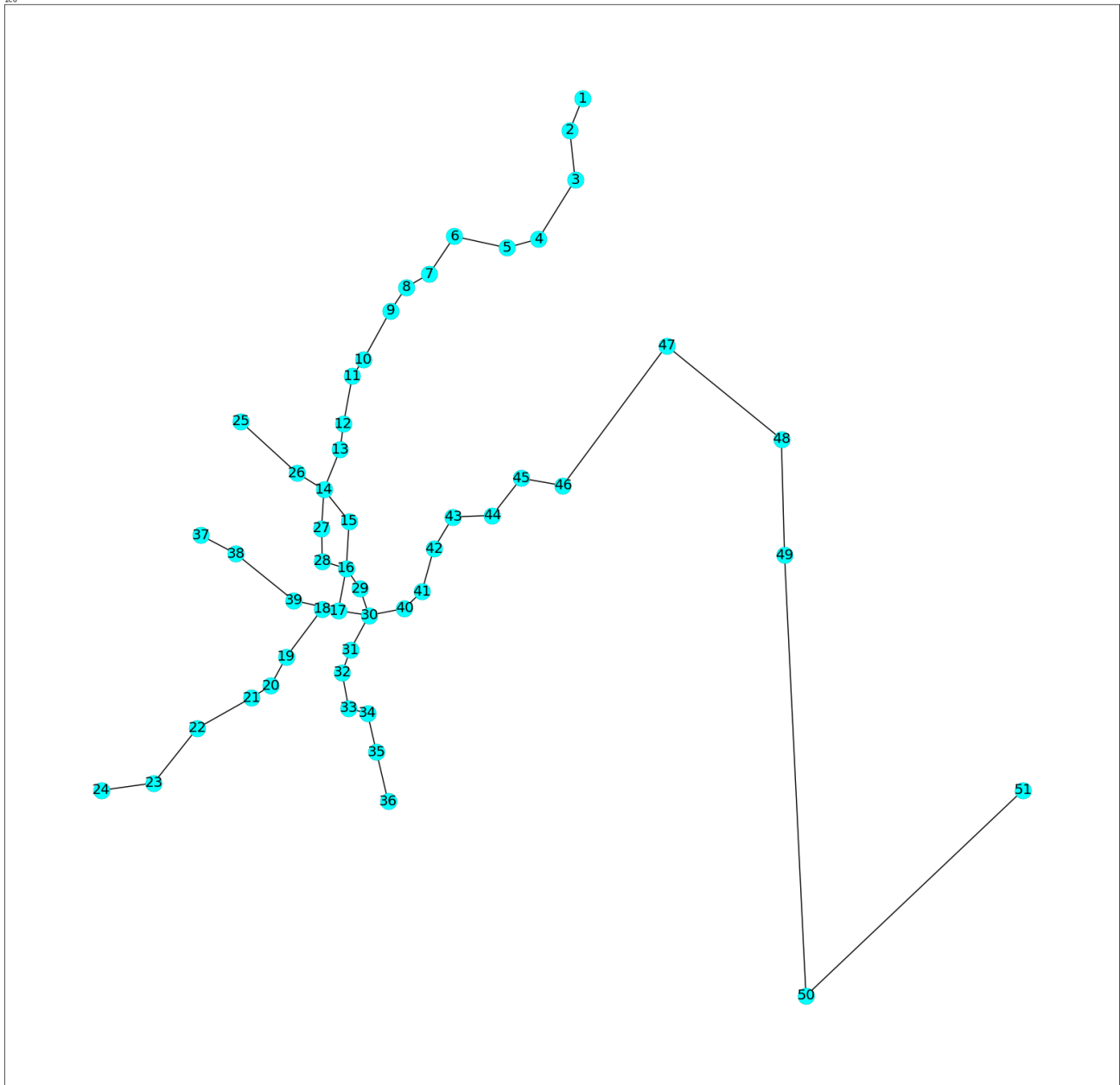


Figura 4.6: Red de transporte de la instancia "Atenas".

4.1.2. Características de las redes change & go

En la implementación del segundo modelo es necesario construir, para cada una de las instancias, la red change & go correspondiente. Adicionalmente, para todas las instancias con excepción de la primera, debe primero transformarse la red de transporte público no dirigida en una

red de transporte público dirigida, lo que implica duplicar el número de arcos.

En el [Cuadro 4.6](#) se resumen las características principales de la redes asociadas a cada instancia:

- Número de arcos de la red de transporte ($|V|$).
- Número de nodos de la red de transporte ($|E|$).
- Cantidad de líneas en el reservorio ($|L|$).
- Cantidad de pares de origen-destino ($|\mathcal{R}|$).
- Número de nodos de la red change & go ($|\mathcal{V}|$).
- Número de nodos de entrada y salida de la red change & go $|\mathcal{V}_{OD}|$.
- Número de nodos línea-estación en la red change & go ($|\mathcal{V}_{CG}|$).
- Número de arcos en la red change & go ($|\mathcal{E}|$).
- Número de arcos de transbordo en la red change & go ($|\mathcal{E}_{change}|$).
- Número de arcos de conducción en la red change & go ($|\mathcal{E}_{go}|$).
- Número de arcos de entrada y salida en la red change & go ($|\mathcal{E}_{OD}|$).
- Capacidad de los vehículos (N).
- Valor del presupuesto para la operación del sistema en unidades monetarias (B).
- Factores de ponderación empleados para balancear el tiempo de viaje frente al número de transbordos (k_1, k_2).

Características	Instancias				
	Toy0	Toy1	Toy2	Grid	Atenas
$ V $	3	8	10	25	51
$ E $	4	16	18	80	104
$ L $	3	8	9	28	59
$ \mathcal{R} $	6	46	79	567	2 385
$ \mathcal{V} $	13	46	64	203	792
$ \mathcal{V}_{OD} $	6	16	20	50	102
$ \mathcal{V}_{CG} $	7	30	44	153	690
$ \mathcal{E} $	32	226	332	1 662	17 476
$ \mathcal{E}_{change} $	10	122	174	1 106	14 834
$ \mathcal{E}_{go} $	8	44	70	250	1 262
$ \mathcal{E}_{OD} $	14	60	88	306	1 380
N	70	70	70	70	1 086
B	25	50	130	1 400	625 000
k_1	1	1	1	1	3
k_2	5	5	5	5	50

Cuadro 4.6: Características de la red change & go para cada una de las instancias.

No se muestran las gráficas de las redes change & go debido a su gran tamaño, con excepción de la gráfica correspondiente a la instancia "Toy0", que fue utilizada como ejemplo en el [Capítulo 3](#) y está indicada en la [Figura 3.6](#). Se puede comprobar en cada instancia que $|\mathcal{V}| := |\mathcal{V}_{OD}| + |\mathcal{V}_{CG}|$ y que $|\mathcal{E}| := |\mathcal{E}_{change}| + |\mathcal{E}_{go}| + |\mathcal{E}_{OD}|$.

4.2. Resultados y análisis

El solver de Gurobi utiliza un algoritmo "branch & cut". Por motivos de espacio, no describiremos en el presente trabajo de integración curricular, los detalles de este método estándar de solución; el interesado en los mismos puede revisar la amplia literatura al respecto (e.g.,(30; 31)).

Basta con resaltar que el algoritmo construye una sucesión de soluciones factibles cuyo valor en la función objetivo va mejorando (es decir, como en nuestros modelos minimizaremos, va disminuyendo) y una sucesión de cotas que se van haciendo más ajustadas (es decir, en el caso de nuestros modelos, que van aumentando). La brecha de optimalidad (también conocida por el término en inglés de "gap") es la diferencia porcentual entre el valor de la mejor solución y de la mejor cota encontradas por el algoritmo, y se usa como un indicador de calidad de la solución ob-

tenida. Una solución con brecha del 0% es una solución óptima para el problema. En nuestros experimentos ejecutados sobre las cinco instancias se registra para cada modelo tanto la mejor solución, como la mejor cota y la brecha de optimalidad obtenidas por el solver. Los resultados se muestran a continuación.

4.2.1. Modelo de planificación de líneas

En el Cuadro 4.7 se resumen los resultados obtenidos de la aplicación del primer modelo a las cinco instancias. Se muestra lo siguiente:

- Número de variables del modelo (Núm.Vars).
- Número de restricciones del modelo (Núm.Restr).
- El valor de la función objetivo de la mejor solución encontrada en el modelo (FuncObj).
- El valor de la mejor cota inferior (Cota).
- La brecha de optimalidad (Gap).
- El tiempo de cómputo utilizado en segundos (Tiempo).
- El número de nodos explorados en el árbol de branch & cut (Nodos).
- El número de líneas seleccionadas para la operación en el concepto de líneas ($|L'|$).

Parámetros \ Instancias	Toy0	Toy1	Toy2	Grid	Atenas
Num.Vars	30	160	180	560	1 180
Num.Restr	11	24	27	108	163
FuncObj	14.0	51.2	121.5	863.5	408 170.0
Cota	14.0	51.2	121.5	863.5	408 170.0
Gap	0%	0%	0%	0%	0%
Tiempo	0.005	0.010	0.009	0.010	0.06
Nodos	1	1	1	1	1
$ L' $	2	6	7	11	18

Cuadro 4.7: Resultados de la aplicación del primer modelo en las cinco instancias.

Para todas las instancias, fue posible encontrar una solución óptima en un tiempo de cómputo inferior a un segundo, lo que indica que se trata de un modelo que no demanda mayores recursos de cómputo para su solución. Esto induce a que el porcentaje de la brecha de optimalidad (en inglés "gap") sea igual al 0% y que el número de nodos explorados sea igual a 1 para todas las instancias.

Soluciones obtenidas con la Instancia "Toy0"

Al ser la instancia "Toy0" muy pequeña, puede emplearse para ilustrar el funcionamiento del primer modelo. Mostramos a continuación el concepto de líneas construido en la solución, sus respectivos costos y los arcos por los que circula:

Líneas	Frecuencia por línea	Costo de cada línea por su frecuencia
1	3	6
2	4	8

Cuadro 4.8: Concepto de líneas construido en la solución de la instancia "Toy0"

Arcos	Líneas que pasan por cada arco	$[f_e^{min}, f_e^{max}]$	Frecuencia acumulada
(1, 2)	1, 3	[3, 10]	3
(2, 3)	2, 3	[4, 10]	4
(2, 1)	1, 3	[3, 10]	3
(3, 2)	2, 3	[4, 10]	4

Cuadro 4.9: Concepto de líneas solución de la instancia "Toy0"

Se puede observar en el [Cuadro 4.8](#), que dentro del concepto de líneas obtenido en la solución solamente se encuentran las líneas 1 y 2. No fue seleccionada la línea 3, que recorría todos los nodos, pero, tenía un costo de operación muy elevado.

En el [Cuadro 4.9](#) podemos observar que la frecuencia acumulada sobre cada uno de los arcos de la red de transporte, se encuentra dentro del rango establecido, por lo que podemos concluir que la solución del concepto de líneas encontrado es factible. Recordar que este valor debe superar el límite mínimo f_e^{min} para cubrir la demanda de transporte, y estar por debajo del límite máximo f_e^{max} para respetar las restricciones técnicas de capacidad de las vías. El mínimo costo total del sistema que

se obtuvo en esta instancia es de 14 unidades monetarias (ver el Cuadro 4.7).

4.2.2. Modelo integrado de planificación de líneas y enrutamiento de pasajeros

En el Cuadro 4.10 se resumen los resultados obtenidos al aplicar el modelo integrado de planificación de líneas y enrutamiento de pasajeros a cuatro de las cinco instancias de prueba. Se muestra lo siguiente:

- Número de variables del modelo (Núm.Vars).
- Número de restricciones del modelo (Núm.Restr).
- El valor de la función objetivo de la mejor solución encontrada en el modelo (FuncObj).
- El valor de la mejor cota inferior (Cota)
- La brecha de optimalidad (Gap).
- El tiempo de cómputo utilizado en segundos (Tiempo).
- El número de nodos explorados en el árbol de branch & cut (Nodos)
- El número de líneas seleccionadas para la operación en el concepto de líneas ($|L'|$).

Parámetros	Instancias			
	Toy0	Toy1	Toy2	Grid
Num.Vars	195	10 404	26 237	942 382
Num.Restr	91	2 177	5 145	115 432
FuncObj	1 580	3 488	46 643.86	45 470
Cota	1 580	3 488	46 643.86	45 470
Gap	0%	0%	0%	0%
Tiempo	0.008	0.411	6.633	85.81
Nodos	1	1	1 513	1
$ L' $	3	6	8	22

Cuadro 4.10: Resumen de la aplicación del modelo sobre las cuatro primeras instancias.

Para todas las cuatro instancias fue posible encontrar una solución óptima. El valor de la función objetivo mide en minutos la suma total de

todos los inconvenientes de todos los pasajeros en el sistema de transporte. En la instancia "Toy2" se exploró la mayor cantidad de nodos en el árbol de branch & cut. El tiempo de cálculo fue inferior a un segundo en las instancias "Toy0" y "Toy1"; algo más de 6 segundos en la instancia "Toy2" y superó los 85 segundos en la instancia "Grid". Por otra parte, la cantidad de variables y restricciones del modelo requeridas para la instancia "Atenas" superó los límites de memoria del hardware, por lo que fue necesario recurrir a un método heurístico para su solución, el mismo que se describirá más adelante.

Soluciones obtenidas con la Instancia "Toy0"

Al igual que en la sección anterior, utilizaremos la instancia "Toy0" para explicar con ella la lógica del modelo. A pesar de ser la más pequeña de todas las instancias, la formulación del segundo modelo requirió 195 variables y 91 restricciones que se verifican en el [Cuadro 4.10](#).

Líneas	Arcos	Frecuencia	Costo por línea	Costo total
1	[(1, 2), (2, 1)]	4	2	8
2	[(2, 3), (3, 2)]	4	2	8
3	[(1, 2), (2, 3), (2, 1), (3, 2)]	1	8	8

Cuadro 4.11: Concepto de líneas solución de "Toy0" en el Modelo 2

En el [Cuadro 4.11](#) se presenta el concepto de líneas encontrado en la solución. Las líneas 1 y 2 fueron ambas seleccionadas con frecuencia 4, mientras que la línea 3 fue seleccionada con frecuencia 1.

Se puede verificar que en todos los arcos, la suma de las frecuencias de las líneas no sobrepasa el límite superior establecido por f_e^{max} (ver valores en el [Cuadro 4.9](#)): por el arco (1,2) circulan la línea 1 y la línea 3 cuyas frecuencias suman 5, por el arco (2,3) circulan la línea 2 y la línea 3 cuyas frecuencias suman 5; por el arco (2,1) circulan las líneas 1 y 3, cuyas frecuencias suman de nuevo 5; y finalmente, por el arco (3,2) circulan las líneas 2 y 3, cuyas frecuencias suman 5. Observar que las frecuencias son más elevadas que las obtenidas al aplicar el primer modelo, debido a que el segundo modelo incluye en la función objetivo un término de minimización de la cantidad de transbordos que realizan los

pasajeros. Por lo tanto, a diferencia del primer modelo, las frecuencias calculadas en general superarán a las frecuencias mínimas requeridas para cubrir la demanda al menor costo posible.

La última columna refleja los costos de operación de cada línea por sus frecuencias, y se puede verificar que su suma total no excede el valor del presupuesto especificado para esta instancia, de 25 unidades monetarias (ver el [Cuadro 4.6](#)).

Pares origen-destino	Demanda	Arcos de la red	Flujo
(1, 2)	250	((1, 0), (1, 1))	250.0
		((1, 1), (2, 1))	250.0
		((2, 1), (0, 2))	250.0
(1, 3)	100	((1, 0), (1, 1))	30.0
		((1, 0), (1, 3))	70.0
		((1, 1), (2, 1))	30.0
		((1, 3), (2, 3))	70.0
		((2, 1), (2, 2))	30.0
		((2, 2), (3, 2))	30.0
		((2, 3), (3, 3))	70.0
		((3, 2), (0, 3))	30.0
		((3, 3), (0, 3))	70.0
(2, 1)	100	((1, 1), (0, 1))	100.0
		((2, 0), (2, 1))	100.0
		((2, 1), (1, 1))	100.0
(2, 3)	40	((2, 0), (2, 2))	40.0
		((2, 2), (3, 2))	40.0
		((3, 2), (0, 3))	40.0
(3, 1)	150	((1, 1), (0, 1))	80.0
		((1, 3), (0, 1))	70.0
		((2, 1), (1, 1))	80.0
		((2, 2), (2, 1))	80.0
		((2, 3), (1, 3))	70.0
		((3, 0), (3, 2))	80.0
		((3, 0), (3, 3))	70.0
		((3, 2), (2, 2))	80.0
		((3, 3), (2, 3))	70.0
(3, 2)	140	((2, 2), (0, 2))	140.0
		((3, 0), (3, 2))	140.0
		((3, 2), (2, 2))	140.0

Cuadro 4.12: Enrutamiento de los pasajeros sobre la red change & go en la instancia "Toy0".

En el [Cuadro 4.12](#) se presentan los valores de las variables correspondientes al flujo de pasajeros sobre los diferentes arcos de la red change & go para cada uno de los pares de origen y destino. Se puede notar que, para cada par, los valores sobre los arcos corresponde a un flujo desde el nodo origen al nodo destino, con un valor igual o menor a la demanda.

Observemos que para los pares origen-destino $(1, 3)$ y $(3, 1)$, el flujo de pasajeros se distribuyó por distintos caminos; mientras que para el resto de pares de origen y destino todos los pasajeros son enviados por una misma ruta.

En la [Figura 4.7](#) se muestra como ejemplo el enrutamiento para el par origen-destino $(1, 3)$, sobre la red change & go de la instancia "Toy0".

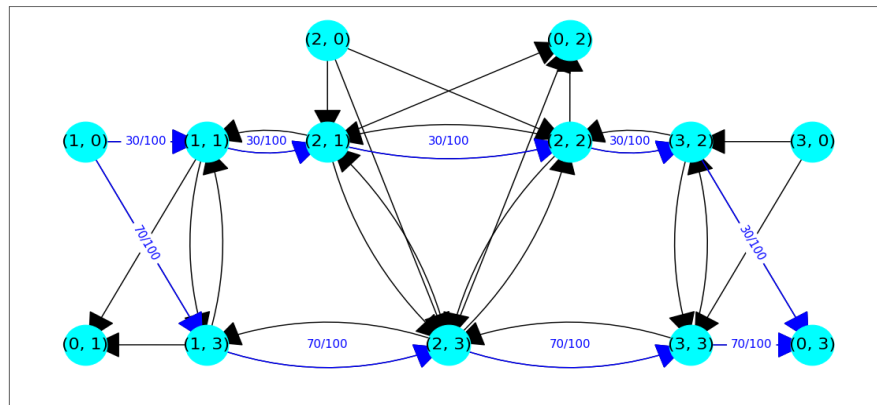


Figura 4.7: Enrutamiento de los pasajeros de la Instancia "Toy0" del nodo 1 al nodo 3

De color azul se representan los arcos por los cuales los pasajeros se movilizan desde el nodo destino 1 al nodo destino 3. El resto de arcos están de color negro. Se puede observar que, de la demanda de los 100 pasajeros que van del nodo origen $(1,0)$ al nodo destino $(0,3)$, 30 pasajeros se movilizan por el arco que va de $(1,0)$ a $(1,1)$, es decir, que salen de la parada 1 con la línea 1; luego se movilizan por el arco que va de $(1,1)$ a $(2,1)$, por lo que se trasladan con la línea 1 de la parada 1 a la parada 2; luego usan el arco de $(2,1)$ a $(2,2)$, es decir, los 30 pasajeros hacen transbordo a la línea 2; después toman el arco que va de $(2,2)$ a $(3,2)$, lo que implica que con la línea 2 llegan a la parada 3; y finalmente usan el arco de $(3,2)$ a $(0,3)$, que indica que los 30 pasajeros llegan a su destino, el nodo 3. Mientras, que los 70 pasajeros restantes salen del nodo $(1,0)$ al nodo $(1,3)$, lo que determina que toman la línea 3 en la parada 1; luego van del nodo $(1,3)$ al nodo $(2,3)$, es decir, se movilizan con la línea 3 a la parada 2; después siguen al nodo $(3,3)$ por lo que llegan a la parada 3 usando la misma línea 3; y por último arriban al nodo final $(0,3)$, sin realizar ningún transbordo.

Finalmente, en el [Cuadro 4.13](#) se presenta una comparación entre el flujo total de pasajeros y la oferta, es decir, la frecuencia acumulada multiplicada por la capacidad de las unidades sobre cada arco de la red de transporte.

Arco	Flujo	Oferta
(1, 2)	350.0	350.0
(2, 3)	140.0	350.0
(2, 1)	250.0	350.0
(3, 2)	290.0	350.0

Cuadro 4.13: Flujo de pasajeros y oferta de transporte sobre cada uno de los arcos de la correspondiente instancia "Toy0".

Se puede evidenciar que la suma de los flujos que pasan por cada uno de los arcos no excede la suma del producto entre las frecuencias de las líneas por la capacidad de las unidades, que representa la oferta de transporte del sistema.

Por ejemplo por el arco (1,2), de acuerdo al [Cuadro 4.11](#), circulan la línea 1 y la línea 3, con una frecuencia acumulada de 5 que multiplicada por la capacidad de 70 pasajeros por unidad da como resultado una oferta de 350 que se verifica en el [Cuadro 4.13](#); mientras que para el flujo, observamos que en la última columna del [Cuadro 4.12](#), los flujos que circulan por (1,2), pertenecen a los arcos de la red change & go: ((1,1),(2,1)) del par origen y destino (1,2) con un flujo de 250, ((1,1),(2,1)) del par origen y destino (1,3) con un flujo de 30, y ((1,3),(2,3)) del par origen y destino (1,3) con un flujo de 70; lo que suma un flujo total de 350 pasajeros que se verifica en la primera fila del [Cuadro 4.13](#). Lo mismo se puede comprobar para el resto de arcos.

Heurística para la Instancia "Atenas"

Esta instancia es la más grande de todas, y su formulación requiere 41 680 319 variables y 1 890 287 restricciones, lo cual excede la memoria disponible en el computador. Ante ello, se optó por emplear una heurística de fijación de variables, con la finalidad de encontrar una solución factible de manera eficiente, aunque no necesariamente se pueda obtener la solución óptima. La heurística que se plantea consiste en obtener una

solución inicial para las variables x_{st}^e de los flujos de los pasajeros, que luego será inyectada en el segundo modelo. Se resuelve entonces el segundo modelo fijando los valores de estas variables, mientras se calculan valores para las variables que determinan las frecuencias f_l .

Las soluciones de las frecuencias vuelven a ser inyectadas en el segundo modelo, y se obtienen nuevos valores para las variables de flujos. Este proceso se repite iterativamente, con la finalidad de que el valor de la función objetivo se reduzca en cada iteración; la heurística termina cuando ya no sea posible mejorar la solución, y retorna la mejor solución encontrada.

Para encontrar valores iniciales para las variables $x_{st}^e \in \mathbb{Z}^+$; resolvemos una simplificación del segundo modelo sin tomar en cuenta las restricciones (3.13),(3.15) y (3.16):

$$\text{mín} \quad \sum_{(s,t) \in \mathcal{R}} \sum_{e \in \mathcal{E}} c_e x_{st}^e \quad (4.1)$$

$$\text{s.t.} \quad \theta x_{st} = b_{st} \quad , \forall (s, t) \in \mathcal{R} \quad (4.2)$$

$$x_{st}^e \in \mathbb{Z}^+ \quad , \forall (s, t) \in \mathcal{R}, e \in \mathcal{E} \quad (4.3)$$

Este modelo todavía tiene un tamaño muy grande, pues, en el caso de la instancia "Atenas", se tiene que $|\mathcal{R}| = 2385$. Sin embargo, el modelo presenta la ventaja de que las restricciones matriciales de conservación de flujo (4.2) están desacopladas y pueden resolverse independientemente para cada par origen-destino. De esta manera, fue posible dividir el conjunto \mathcal{R} en cuatro subconjuntos de pares origen-destino, y resolver el modelo sobre cuatro "subinstancias" más pequeñas. Los flujos de pasajeros obtenidos fueron luego combinados en un enrutamiento sobre la red original.

Los tres primeros subconjuntos estuvieron conformados por 596 pares de origen y destino, mientras que el último por 597.

Los valores de flujos de pasajeros fueron inyectados en el segundo modelo, fijando en este caso las variables x_{st}^e . Al resolver el modelo, su tamaño se redujo durante la fase de preprocesamiento y fue posible ob-

tener valores para las variables de frecuencias f_i , con lo que se completó una primera solución factible para la instancia.

Para evitar problemas de saturación de memoria, se fijaron algunos parámetros del solver Gurobi: el parámetro *Threads*, que controla el número de núcleos/ procesadores empleados se fijó en el valor de 1, el parámetro *NodefileStart* que controla el número de nodos que se escriben en el disco se fijó en un valor de 0 y el parámetro *MIPFocus*, que controla la estrategia general a utilizar en la búsqueda branch & bound se seleccionó el valor igual a 1, que corresponde a poner énfasis en la búsqueda de soluciones factibles.

Heurística de fijación de variables para la Instancia "Atenas"	
Función Objetivo	2 720 686.927
Mejor cota	2 720 686.927
Tiempo de ejecución	59.153
Gap	0 %
Cantidad de líneas seleccionadas	13

Cuadro 4.14: Resultados obtenidos para la instancia "Atenas" con la heurística de fijación de variables.

Los resultados obtenidos están detallados arriba en el [Cuadro 4.14](#), donde se puede observar que el tiempo computacional requerido en este proceso fue de aproximadamente 59.15 segundos, el valor de la mejor solución encontrada y de la cota inferior coinciden, por lo que el porcentaje del gap es del 0%. Notar que esto no implica que la solución encontrada sea óptima, pues las variables de flujo fueron prefijadas a los valores iniciales.

La función objetivo, que mide la suma total de todos los inconvenientes de todos los pasajeros en el sistema de transporte alcanzó un valor de 2 720 686.927 minutos; es decir de un aproximado de 45 344 horas, 46 minutos y 56 segundos. Del total de 59 líneas del reservorio, el modelo seleccionó 13 líneas.

El resultado obtenido es un concepto de líneas, que se inyectó nuevamente en el segundo modelo, fijando las variables f_i ; mientras se calculaban nuevos valores para las variables x_{st}^e . Sin embargo, en esta nueva iteración ya no fue posible mejorar el valor de la función objetivo, por lo

que la heurística terminó.

Capítulo 5

Conclusiones

A partir de las observaciones realizadas durante la implementación de los dos modelos propuestos y los resultados computacionales obtenidos, se presentan las siguientes conclusiones:

1. El nivel de complejidad en la resolución computacional del primer modelo es mucho menor que la del segundo modelo. Esto se debe a varios factores. En primer lugar, es evidente que, para cada instancia, la formulación del primer modelo es de menor tamaño que la del segundo modelo, tanto en el número de variables como en el de restricciones. Adicionalmente, puede destacarse que el primer modelo tiene una estructura básica casi similar a los problemas de *Set-Covering*; que generalmente puede ser abordada con bastante éxito por los solvers tipo branch & cut modernos. Por el contrario, el segundo modelo es un problema integrado con una estructura mucho más compleja, que involucra variables enteras generales y mezcla restricciones de flujo multiproducto para el enrutamiento, con restricciones de enforzamiento para la asignación de frecuencias y adicionalmente una restricción tipo *knapsack* para el presupuesto. Esto se evidencia en las tablas de los resultados con los tiempos computacionales.

Para todas las 5 instancias, en el primer modelo se obtuvieron soluciones óptimas (con una brecha de optimalidad del 0%), explorando

únicamente un nodo del árbol y en un tiempo computacional menor a un segundo. En ningún caso fue necesario implementar heurísticas o ajustar parámetros del solver.

Con respecto al segundo modelo, todas las instancias se resolvieron en tiempos computacionales superiores a las del primer modelo, siendo la instancia "Toy2", en la que más cantidad de nodos del árbol de branch & cut se exploró, con 1513 nodos. La instancia "Atenas", debido a su gran tamaño y su complejidad no pudo ser resuelta de manera directa y se tuvo que recurrir a la implementación de una heurística, con la cual fue posible construir una solución factible. Los resultados están descritos en mayor detalle en la [Sección 4.2](#).

Cabe señalar que, en el caso del segundo modelo, la instancia "Atenas" puede ser resuelta de forma directa si se emplean ponderaciones de $k_2 = 0$, $k_1 = 3$ en la función objetivo, lo que equivale a no considerar el número de transbordos y solamente minimizar los tiempos de conducción. Sin embargo esta formulación no captura el objetivo principal del modelo integrado; razón por la cual esta solución no fue incluida en la parte de resultados.

2. Se evidenció computacionalmente que el valor del presupuesto (B) en cada una de las instancias del segundo modelo incide directamente sobre la calidad de la solución obtenida y en la complejidad computacional del proceso de solución. Esto se debe a que la restricción presupuestaria fija un límite superior sobre la cantidad de líneas que pueden ser seleccionadas, así como para sus frecuencias. Si no se toma en cuenta esta restricción es muy probable que el modelo tome en consideración todas las líneas del reservorio, lo que en la práctica resultaría muy costoso; por otro lado, si se toma un valor del presupuesto muy pequeño, es muy probable que ningún concepto de líneas dentro del presupuesto disponible pueda satisfacer la demanda de los pasajeros enrutados, puesto que valores bajos descartan soluciones. En general, un valor muy grande para el presupuesto está asociado a un exceso de líneas con valores de frecuencias muy altos y por ende a soluciones poco o nada eficientes que producen un enrutamiento de los pasajeros que no optimiza los recursos disponibles.

El valor del presupuesto utilizado en las pruebas computacionales (ver la [Sección 4.2](#)), fue obtenido realizando ensayos de prueba y error, seleccionando para cada instancia el valor más bajo que sea coherente con los datos disponibles y que permitiera que el problema sea factible.

3. En cada una de las instancias se puede evidenciar que el tamaño de la red change & go crece de manera proporcional al tamaño del reservorio de líneas L y del conjunto de pares de orígenes y destinos \mathcal{R} .
4. Por otro lado, se pudo evidenciar en cada una de las instancias implementadas del primer modelo, que la cantidad de variables depende del tamaño del reservorio de líneas L y del conjunto de posibles frecuencias F , mientras que el número de restricciones depende del número de arcos de la red de transporte y del número de líneas del reservorio.

Con respecto al segundo modelo, la cantidad de variables depende del tamaño del conjunto de arcos de la red change & go, del tamaño del reservorio de líneas y del conjunto de pares de orígenes y destinos; mientras que el número de restricciones depende del número de arcos de conducción de la red change & go, del número de arcos de la red de transporte y del conjunto de pares de orígenes y destinos.

5. Se evidencia que la cantidad de líneas seleccionadas y los conceptos de línea en las soluciones de ambos modelos no son los mismos, debido a que en el segundo problema se enrutan a los pasajeros y se considera la minimización de los transbordos.
6. Finalmente, se sugiere para trabajos futuros estudiar otro tipo de heurísticas que puedan resolver el segundo modelo integrado con eficiencia computacional; así como métodos y criterios para fijar el valor del presupuesto sin realizar ensayos de prueba y error; además de implementar el primer modelo en redes de transporte mucho más grandes que el de la instancia "Atenas" para poder analizar su comportamiento.

Referencias bibliográficas

- [1] Gurobi Optimization, LLC. Gurobi Optimizer Reference Manual, 2022.
- [2] Alexander Schiewe. Gitlab repository - Openlintim datasets. <https://gitlab.rlp.net/lintim/OpenLinTim/-/tree/master/datasets>. (Accedido el 07/07/2022).
- [3] Philine Schiewe et al. *Integrated optimization in public transport planning*. Springer, 2020.
- [4] Ralf Borndörfer, Heide Hoppmann, and Marika Karbstein. A configuration model for the line planning problem. In *ATMOS-13th Workshop on Algorithmic Approaches for Transportation Modelling, Optimization, and Systems-2013*, volume 33, pages 68–79. Schloss Dagstuhl—Leibniz-Zentrum fuer Informatik, 2013.
- [5] Anita Schöbel and Susanne Scholl. Line planning with minimal traveling time. In *5th Workshop on Algorithmic Methods and Models for Optimization of Railways (ATMOS'05)*. Schloss Dagstuhl-Leibniz-Zentrum für Informatik, 2006.
- [6] Susanne Scholl. *Customer-oriented line planning*. Dissertation. de, 2006.
- [7] Ralf Borndörfer, Martin Grötschel, and Marc E Pfetsch. Models for line planning in public transport. In *Computer-aided systems in public transport*, pages 363–378. Springer, 2008.

- [8] Lionel Adrian Silman, Zeev Barzily, and Ury Passy. Planning the route system for urban buses. *Computers & operations research*, 1(2):201–211, 1974.
- [9] Herbert Sonntag. Ein heuristisches verfahren zum entwurf nachfrageorientierter linienführung im öffentlichen personennahverkehr. *Zeitschrift für Operations Research*, 23(2):B15–B31, 1979.
- [10] Avishai Ceder and Nigel HM Wilson. Bus network design. *Transportation Research Part B: Methodological*, 20(4):331–344, 1986.
- [11] Christoph E Mandl. Evaluation and optimization of urban public transportation networks. *European Journal of Operational Research*, 5(6):396–404, 1980.
- [12] Yechezkel Israeli and Avishai Ceder. Transit route design using scheduling and multiobjective programming techniques. In *Computer-aided transit scheduling*, pages 56–75. Springer, 1995.
- [13] Avishai Ceder and Yechezkel Israeli. Scheduling considerations in designing transit routes at the network level. In *Computer-Aided Transit Scheduling*, pages 113–136. Springer, 1992.
- [14] Anita Schöbel. Line planning in public transportation: models and methods. *OR spectrum*, 34(3):491–510, 2012.
- [15] MT Claessens, Nico M van Dijk, and Peter J Zwaneveld. Cost optimal allocation of rail passenger lines. *European Journal of Operational Research*, 110(3):474–489, 1998.
- [16] Michael Bussieck. *Optimal lines in public rail transport*. PhD thesis, Citeseer, 1998.
- [17] Jan-Willem Goossens, Stan Van Hoesel, and Leo Kroon. A branch-and-cut approach for solving railway line-planning problems. *Transportation Science*, 38(3):379–393, 2004.
- [18] Michael R Bussieck, Thomas Lindner, and Marco E Lübbecke. A fast algorithm for near cost optimal line plans. *Mathematical Methods of Operations Research*, 59(2):205–220, 2004.

- [19] Michael R Bussieck, Peter Kreuzer, and Uwe T Zimmermann. Optimal lines for railway systems. *European Journal of Operational Research*, 96(1):54–63, 1997.
- [20] Hartmut Dienst. *Linienplanung im spurgeführten Personenverkehr mit Hilfe eines heuristischen Verfahrens*. Institut für Verkehr, Eisenbahnwesen und Verkehrssicherung Technische . . . , 1978.
- [21] Uwe T Zimmermann, Michael R Bussieck, Matthias Krista, and K-D Wiegand. Linienoptimierung—modellierung und praktischer einsatz. In *Mathematik Schlüsseltechnologie für die Zukunft*, pages 595–607. Springer, 1997.
- [22] Marc E Pfetsch and Ralf Borndörfer. Routing in line planning for public transport. In *Operations research proceedings 2005*, pages 405–410. Springer, 2006.
- [23] Ralf Borndörfer, Martin Grötschel, and Marc E Pfetsch. A column-generation approach to line planning in public transport. *Transportation Science*, 41(1):123–132, 2007.
- [24] Ralf Borndörfer and Marika Karbstein. A direct connection approach to integrated line planning and passenger routing. In *12th Workshop on algorithmic approaches for transportation modelling, optimization, and systems*. Schloss Dagstuhl-Leibniz-Zentrum fuer Informatik, 2012.
- [25] D Galindres, J Soto, and S Estrada. Asignación de frecuencias óptimas, a través de un modelo multiobjetivo, para un sistema brt. *rev. eia* 13, 2017.
- [26] Héctor Martínez, Antonio Mauttone, and María E Urquhart. Frequency optimization in public transportation systems: Formulation and metaheuristic approach. *European Journal of Operational Research*, 236(1):27–36, 2014.
- [27] Christoph Mandl. *Applied network optimization*. 1980.
- [28] Luis M Torres, Ramiro Torres, Ralf Borndörfer, and Marc E Pfetsch. Line planning on tree networks with applications to the quito tro-

- lebús system. *International Transactions in Operational Research*, 18(4):455–472, 2011.
- [29] Thomas Kluyver, Benjamin Ragan-Kelley, Fernando Pérez, Brian Granger, Matthias Bussonnier, Jonathan Frederic, Kyle Kelley, Jessica Hamrick, Jason Grout, Sylvain Corlay, Paul Ivanov, Damián Avila, Safia Abdalla, and Carol Willing. Jupyter notebooks – a publishing format for reproducible computational workflows. In F. Loizides and B. Schmidt, editors, *Positioning and Power in Academic Publishing: Players, Agents and Agendas*, pages 87 – 90. IOS Press, 2016.
- [30] Laurence A Wolsey. *Integer programming*. John Wiley & Sons, 2020.
- [31] Michele Conforti, Gérard Cornuéjols, Giacomo Zambelli, et al. *Integer programming*, volume 271. Springer, 2014.