ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS

TÓPICOS SOBRE VARIEDADES DIFERENCIABLES
INTEGRACIÓN SOBRE VARIEDADES DIFERENCIABLES

TRABAJO DE INTEGRACIÓN CURRICULAR PRESENTADO COMO REQUISITO PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE MATEMÁTICO

DAVID ALEJANDRO GUEVARA GARCÍA

david.guevara01@epn.edu.ec

DIRECTOR: M.SC. ZULY LEONELA SALINAS PILLAJO

zuly.salinas@epn.edu.ec

DMQ, SEPTIEMBRE 2022

CERTIFICACIONES

Yo, DAVID ALEJANDRO GUEVARA GARCÍA, declaro que el trabajo de integración curricular aquí descrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y, que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

David Alejandro Guevara García

Certifico que el presente trabajo de integración curricular fue desarrollado por David Alejandro Guevara García, bajo mi supervisión.

M.Sc. Zuly Leonela Salinas Pillajo

DIRECTOR

DECLARACIÓN DE AUTORÍA

A través de la presente declaración, afirmamos que el trabajo de integración curricular aquí descrito, así como el(los) producto(s) resultante(s) del mismo, es(son) público(s) y estará(n) a disposición de la comunidad a través del repositorio institucional de la Escuela Politécnica Nacional; sin embargo, la titularidad de los derechos patrimoniales nos corresponde a los autores que hemos contribuido en el desarrollo del presente trabajo; observando para el efecto las disposiciones establecidas por el órgano competente en propiedad intelectual, la normativa interna y demás normas.

David Alejandro Guevara García

M.Sc. Zuly Leonela Salinas Pillajo

RESUMEN

En este Trabajo de Integración Curricular demostramos el Teorema de Stokes en el contexto de las variedades diferenciables. Con este objetivo en mente, presentamos una generalización de la integral en el contexto de las variedades. Primero, definimos la integral para formas diferenciables a soporte compacto, que están definidas en dominios de integración de $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{H}^n$ (el semiespacio superior). Después, definimos la integral de formas diferenciables a soporte compacto, que están definidas sobre una variedad diferenciable, orientada y con frontera. Finalmente, demostramos el Teorema de Stokes en el contexto de las variedades diferenciables.

Palabras clave: Variedades diferenciables, Formas diferenciables, Orientaciones sobre variedades, Integración sobre variedades, Teorema de Stokes.

ABSTRACT

In this paper Stokes' Theorem was proven regarding smooth manifolds. With this objective in mind, a generalization of integral in the context of manifolds is developed. First, we extend the concept of integrals for differential forms with compact support wich are defined even $\mathbb{R}^n$ or $\mathbb{H}^n$ (upper halft-space). Afterwards, the integral for differential forms with compact support is allow to be defined in a oriented smooth manifold with boundary. Finally, Stokes' Theorem for smooth manifolds is proven as such.

Keywords: Smooth manifolds, Differential forms, Orientations of manifolds, Integration on manifolds, Stokes' Theorem.

Índice general

Índice de figuras

Capítulo 1

Descripción del componente desarrollado

1.1. Objetivo general

Presentar el Teorema de Stokes en el contexto de las variedades diferenciables.

1.2. Objetivos específicos

1. Examinar la integral de una forma diferenciable sobre dominios de integración en $\mathbb{R}^n$.
2. Discutir la integral de una forma diferenciable sobre variedades diferenciables.
3. Demostrar el Teorema de Stokes para variedades diferenciables con frontera.

1.3. Alcance

En este componente vamos a presentar el Teorema de Stokes en el contexto de las variedades diferenciables. Para ello presentamos los conceptos básicos relacionados con las variedades topológicas y diferenciables. También ofrecemos un ejemplo práctico de una variedad diferenciable. A continuación, definimos el espacio tangente a una variedad diferenciable, el cual usamos para extender el concepto de diferenciabilidad a un mapa entre dos variedades diferenciables. Posteriormente presentamos un breve resumen sobre la definición y propiedades básicas de las formas diferenciables, así como el concepto de orientación. Abordamos estos temas con el fin de examinar la integral de una forma diferenciable sobre variedades diferenciables. Finalmente, presentamos una demostración del Teorema de Stokes en el contexto de las variedades diferenciables.

1.4. Marco teórico

El desarrollo de la integral se ve motivada por un problema geométrico: Calcular el área bajo una curva. Como se expone en [5] una manera de realizar este cálculo es aproximar dicha área por suma de áreas de rectángulos cuyas bases tienen la misma magnitud. En efecto, supongamos que deseamos calcular el área debajo de una curva que determina una función $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en el intervalo $[a, b] \subseteq D$. Vamos a aproximar esta área usando n rectángulos cuya longitud de base es

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

Sea x_i, con $i = 1, \dots, n$, el extremo derecho de cada i-ésimo rectángulo. Como la base de estos rectángulos tienen igual tamaño podemos concluir que $x_i = a + i\Delta x$. Por tanto, la altura de cada rectángulo será $f(x_i)$, para $i = 1, \dots, n$. Todo lo anterior está ilustrado en la siguiente figura:

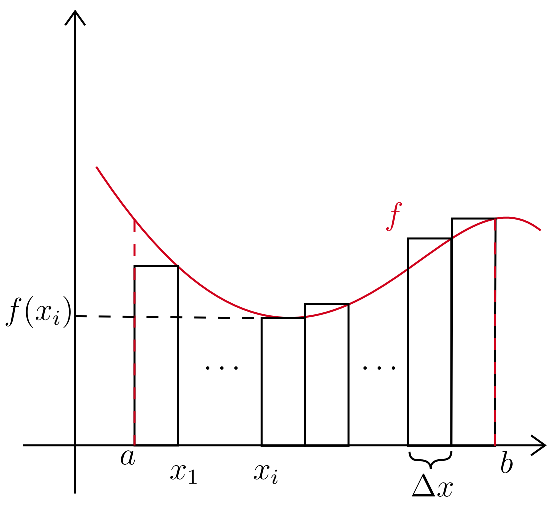

Figura 1.1: Área bajo la curva.

Por tanto, para calcular una aproximación del área bajo la curva que describe

f en $[a, b]$, podemos sumar las áreas de todos estos rectángulos, con lo cual obtenemos la siguiente expresión

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x,$$

a la cual llamamos **Suma de Riemann** (en [5] se encuentra una generalización de estas sumas usando rectángulos cuya base no necesariamente es la misma). Ahora, notemos que si el número de rectángulos es lo suficientemente grande, entonces, la aproximación del área será más exacta. Definimos la **integral de Riemann** de f en $[a, b]$ como

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} S_n,$$

siempre y cuando el límite exista. Decimos que $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **es integrable sobre** $[a, b] \subseteq D$ cuando

$$\int_a^b f(x)dx < \infty.$$

Recordemos que cuando $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en $[a, b] \subseteq D$, entonces, f es integrable en $[a, b]$.

A continuación, recordamos algunos conceptos de integral en contextos más generales. Para profundizar en estos temas se recomienda al lector acudir a [1], [3] y [5].

Sea $R \subseteq \mathbb{R}^2$ un conjunto cerrado y acotado. Ahora, la motivación es calcular el volumen bajo la gráfica de una función $f : R \to \mathbb{R}$. Aproximamos el volumen de la gráfica de f sobre la región R con k-prismas rectangulares como se muestra a continuación:

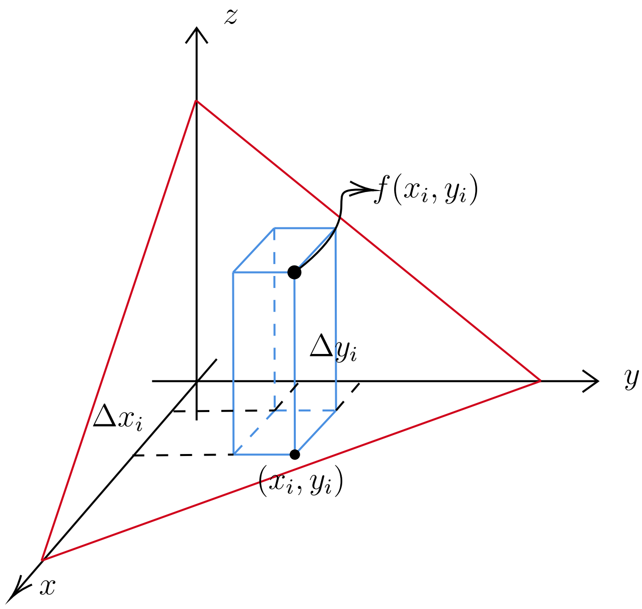

Figura 1.2: Volumen bajo una región en $\mathbb{R}^3$

El volumen del i-ésimo prisma viene dado por $f(x_i, y_i)\Delta A_i$, donde $\Delta A_i = f(x_i, y_i)\Delta x_i \Delta y_i$ es el volumen de cada prisma. Una aproximación del volumen total es la suma de los volúmenes de estos k-prismas:

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} f(x_i, y_i)\Delta A_i.$$

A cada S_k le llamamos, al igual que en el real Suma de Riemann.

Para calcular el volumen total basta con calcular el límite

$$\lim_{k\to\infty} S_k.$$

La **integral doble** de f sobre R se define por

$$\iint\limits_R f(x, y)dA = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} f(x_i, y_i)\Delta A_i$$

siempre que el límite exista, en cuyo caso decimos que f es integrable sobre R.

Una importante aplicación geométrica de la integral doble es el cálculo del área de la región R, la cual viene dada por $\iint\limits_R dA$.

Para el caso $\mathbb{R}^3$ no existe una motivación geométrica, debido a que la gráfica de las funciones definidas sobre un subconjunto de $\mathbb{R}^3$ a valores reales son hipersuperficies en $\mathbb{R}^4$. Aún con estas limitaciones se puede realizar procesos análogos a los casos anteriores ($\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$), como presentamos a continuación.

Sea $D \subseteq \mathbb{R}^3$ cerrado y acotado, y $f : D \to \mathbb{R}^3$. Sobre D consideramos prismas rectangulares como vemos en la siguiente gráfica:

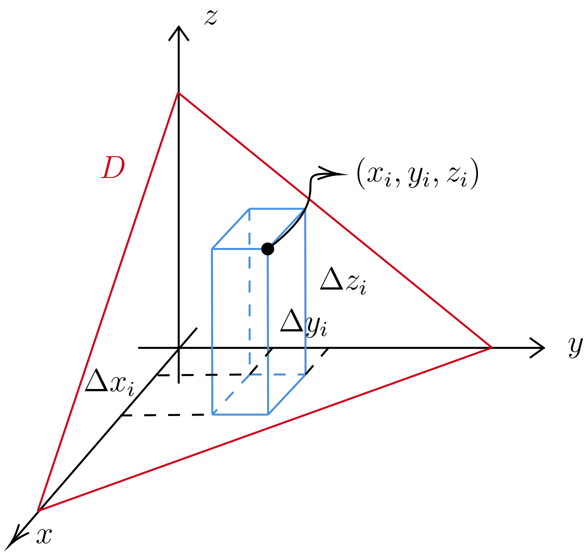

Figura 1.3: Partición de la región D.

Definimos la **integral triple** de f sobre D como

$$\iiint_D f dV = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} f(x_i, y_i, z_i)\Delta_{x_i}\Delta_{y_i}\Delta_{z_i},$$

siempre que el límite exista, en cuyo caso decimos que f es integrable sobre D.

Una importante aplicación geométrica de la integral triple es el cálculo del volumen de la región D, el cual viene dada por $\iiint_D dV$.

Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y no vacío y $C \subseteq U$ una curva con parametrización $r : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, esto es $r([a, b]) = C$. Supongamos que C es suave, es decir, r es infinitamente diferenciable y su derivada es no nula en todo punto de $[a, b]$. Sea $F : U \to \mathbb{R}^n$ un campo de vectores. Definimos la **integral de línea** de F sobre C como

$$\int_C F \cdot dr = \int_a^b F(r(t)) \cdot r'(t)dt.$$

Consideremos ahora una superficie diferenciable S con carta (R, r), definimos el

vector normal unitario de S como

$$\mathbf{n} = \pm \frac{\partial_1 r \times \partial_2 r}{\|\partial_1 r \times \partial_2 r\|},$$

donde el signo depende de la dirección que se desee dar en cada punto de la superficie. Finalmente, decimos que S es **orientada** cuando en cada punto la dirección de $\mathbf{n}$ es la misma.

Supongamos ahora que se desea calcular el área de una superficie S, para ello particionamos la superficie en k-rectángulos, donde al i-ésimo lo denotamos por S_i y a su área por ΔS_i, como ilustra la siguiente imagen:

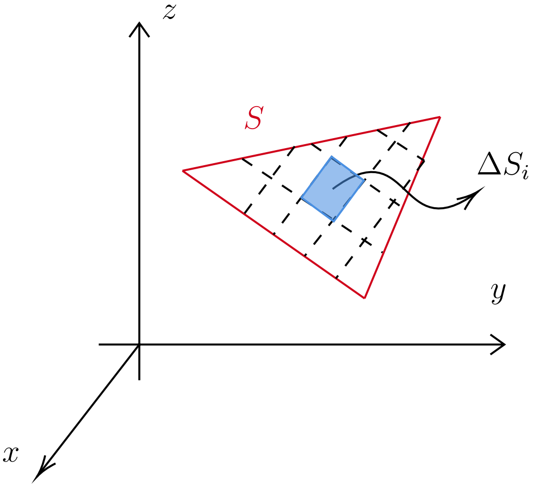

Figura 1.4: Partición de una superficie S.

Para $f : S \to \mathbb{R}$ definimos la **integral de superficie de** f **sobre** S como

$$\iint_S f ds = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} f(x_i, y_i, z_i)\Delta S_i,$$

siempre que el límite exista. Análogamente a las integrales dobles y triples, el valor de $\iint_S ds$ representa el área de la superficie S.

Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie orientada. Si $F : S \to \mathbb{R}^3$ es un campo de vectores continuo sobre S, la integral de superficie de F sobre S se define por

$$\iint_S F \cdot ds = \iint_S F \cdot \mathbf{n}\ ds,$$

en donde la expresión de la derecha es una integral de superficie, la cual recibe el nombre de **flujo de** F **a través de** S.

El siguiente resultado es uno de los más importantes en el análisis vectorial, el cual presenta una relación entra la integral de línea de una curva que acote una superficie.

Teorema de Kelvin-Stokes. *Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie diferenciable orientada y suave,la cual está acotada por una curva C con dirección antihoraria (orientación positiva). Sea $U \subseteq \mathbb{R}^3$ un abierto que contiene a S y $F : U \to \mathbb{R}^3$ suave, se tiene que*

$$\int\limits_C F \cdot dr = \iint\limits_S (\nabla \times F) \cdot ds,$$

donde $\nabla = (\partial_1, \partial_2, \partial_3)$.

Hasta el momento hemos visto integrales cuya motivación es geométrica: la integral simple para calcular áreas bajo la curva, integrales dobles para calcular volúmenes bajo la gráfica de una función, etc. Sin embargo estas integrales se definen para los espacios $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. Para generalizar el concepto de integral sobre todo $\mathbb{R}^n$ y, en general, en espacios más abstractos podemos hacer uso de la integral de Lebesgue. A continuación presentamos la definición de integral de Lebesgue.

Sea $(A, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio medido. Sea $f : X \to [-\infty, \infty]$ una función medible. Diremos que f es μ-medible si las dos cantidades

$$\int_X f^+ d\mu \quad \text{y} \quad \int_X f^- d\mu$$

son finitas. Donde $f^+ = \max(f, 0)$ y $f^- = \max(-f, 0)$. La integral de f está definida por

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu.$$

Con este concepto podemos ver que las integrales simples, dobles, triples y de superficie son casos particulares de la integral de Lebesgue. En efecto, para las tres primeras consideramos la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, respectivamente. Mientras que la integral de superficie consideramos la medida de superficie. Que no es más que la medida Boreliana sobre la esfera unitaria en $\mathbb{R}^3$.

Capítulo 2

Metodología

En este capítulo presentamos el Teorema de Stokes en el contexto de las variedades. Para el correcto desarrollo de este tema, desde la Sección 2.1 hasta la Sección 2.11 exponemos definiciones y resultados de la teoría básica de Variedades Diferenciables, así como el concepto de formas diferenciables y dominios de integración. Es recomendable que el lector experimentado omita estas secciones. Las definiciones y resultados principales de este documento son presentados en la Sección 2.12, en donde el Teorema 2.4 es el resultado principal.

2.1. Variedades Topológicas Diferenciables

Variedades Topológicas

Definición 2.1 (Variedad Topológica). Sea M un espacio topológico. Decimos que M es una *variedad topológica de dimensión* n (o una n-*variedad topológica*) cuando M satisface los siguientes enunciados:

- M es un espacio de Hausdorff.
- M es segundo contable.
- M es localmente euclidiano de dimensión n; en otras palabras, para cada $p \in M$ existe un abierto $U \subseteq M$ que contiene a p, tal que U es homeomorfo a un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$.

Cuando no haya lugar a confusiones omitimos la palabra "topológica" de la definición, así diremos "M es una n-variedad" en lugar de "M es n-variedad topológica". Cuando la dimensión no sea relevante también la omitimos, así diremos simplemente que "M es una variedad", en lugar de "M es una n-variedad".

Sea M una n-variedad. Una **carta coordenada** (o simplemente **carta**) de M es el par (U, φ), donde $U \subseteq M$ es abierto y $\varphi : U \to \hat{U}$ es un homeomorfismo de U hacia un conjunto abierto $\hat{U} = \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$. Por definición de variedad topológica, cada punto $p \in M$ está contenido en el dominio de alguna carta (U, φ).

Dada una carta (U, φ), al conjunto U lo llamamos **dominio coordenado**, o **vecindad coordenada** de cada uno de sus puntos. Si, en adición, $\varphi(U)$ es una bola abierta en $\mathbb{R}^n$, entonces U es llamado **bola coordenada**. Si $\varphi(U)$ es un cubo entonces U es llamado **cubo coordenado**. El mapa φ es llamado **mapa coordenado (local)**, como la imagen de φ es subconjunto de $\mathbb{R}^n$ podemos escribir, para cada $p \in U$, $\varphi(p) = (x^1(p), \ldots, x^n(p))$, para n funciones $x^i : U \to \mathbb{R}^n$. Estas funciones son llamadas **coordenadas locales** de U.

Es usual escribir "(U, φ) es una carta que contiene a p" para acortar la frase "(U, φ) es una carta cuyo dominio U contiene a p". También, es común usar las coordenadas locales de U al momento de notar una carta coordenada; esto significa que hacemos uso de $(U, (x^1, \ldots, x^n))$ ó $(U, (x^i))$.

Estructuras Suaves

Ahora, vamos a estudiar variedades con una estructura especial, con el objetivo de presentar resultados análogos a los del cálculo tradicional.

Sea M una n-variedad topológica. Dadas dos cartas (U, φ) y (V, ψ) tales que $U \cap V \neq \varnothing$, al mapa $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ se le denomina **mapa de transición de φ con ψ**. Al ser la composición de homeomorfismos, cualquier mapa de transición es un homeomorfismo. Dos cartas (U, φ) y (V, ψ) son **suavemente compatibles** (o simplemente **compatibles**) cuando $U \cap V = \varnothing$ o su mapa de transición $\psi \circ \varphi^{-1}$ es un difeomorfismo (en el sentido usual de $\mathbb{R}^n$); es decir, si $\psi \circ \varphi^{-1}$ es biyectivo, suave y su inversa también es suave.

Diremos que (U, φ) y (V, ψ) son **compatibles entre si** cuando (U, φ) y (V, ψ) son compatibles, así como (V, ψ) y (U, φ) son compatibles.

Definimos un **atlas de M** como la colección de cartas cuyo dominio recubre a M. Además, un atlas $\mathcal{A}$ se dirá **atlas suave** cuando cualquier par de cartas de $\mathcal{A}$

son compatibles entre sí.

Notemos que si (U, φ) y (V, ψ) son compatibles, entonces, (V, ψ) y (U, φ) también lo son, pues $(\psi \circ \varphi^{-1})^{-1} = \varphi \circ \psi^{-1}$, el cual sigue siendo un difeomorfismo. Por tanto, para probar que un atlas $\mathcal{A}$ es suave, basta probar que cualquier par de cartas de $\mathcal{A}$ son compatibles.

Ejemplo 2.1 (El espacio $\mathbb{R}^n$). Notemos que $\mathbb{R}^n$ es una n-variedad topológica con atlas

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_1 &= \{(\mathbb{R}^n, I_{\mathbb{R}^n})\}, \\
\mathcal{A}_2 &= \{(B_1(x), I_{B_1(x)}) : x \in \mathbb{R}^n\},
\end{aligned}$$

donde I_B denota la identidad sobre el conjunto B. Este mapa es un difeomorfismo, pues es infinitamente diferenciable y su inversa es el mismo mapa, sobre cualquier subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Así, todas las cartas de estos atlas son suavemente compatibles, por tanto, ambos atlas son suaves. $\square$

El ejemplo anterior nos muestra que una variedad topológica puede tener más de un atlas suave.

Ahora, sea $\mathcal{A}$ un atlas suave de una variedad M, decimos que $\mathcal{A}$ es **maximal** si no esta contenido propiamente en otro atlas suave. Esto significa que cualquier carta que es compatible con cada carta de $\mathcal{A}$ está también en $\mathcal{A}$.

Sea M una variedad topológica. Un atlas maximal y suave de M se denomina **estructura suave de M**. Con estos conceptos previos presentamos la siguiente definición de gran importancia:

Definición 2.2 (Variedad Topológica Diferenciable). Al par $(M, \mathcal{A})$, donde M es una n-variedad topológica y $\mathcal{A}$ es una estructura suave de M, le llamamos *n-variedad diferenciable*.

Al igual que en la definición de variedad, omitimos la dimensión en caso de no haber confusiones y omitiremos la palabra "topológica". Además, omitimos la mención de la estructura suave, así, cuando expresemos "M es una variedad diferenciable" entenderemos que posee una estructura suave.

De manera general, no siempre es fácil determinar la existencia una estructura suave para una variedad M, sin embargo, el siguiente resultado nos indica que para garantizar su existencia basta encontrar un atlas suave.

Proposición 2.1. *Sea M una variedad.*

a) *Cualquier atlas suave $\mathcal{A}$ de M está contenido en un único atlas maximal, al cual, lo llamaremos estructura suave determinada por $\mathcal{A}$.*

b) *Dos atlas de M determinan la misma estructura suave si y solo si su unión es un atlas suave.*

Demostración. Ver [4, Proposition 1.17]. □

Sea M una variedad diferenciable. Cualquier carta (U, φ) perteneciente a un atlas maximal se denomina **carta suave**, y al mapa coordenado φ le llamamos **mapa coordenado suave**. De manera similar al dominio coordenado U lo llamamos **dominio coordenado suave** (o **vecindad coordenada suave**).

Consideremos una carta suave (U, φ) de una variedad diferenciable M. Recordemos que $\varphi : U \to \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo, por tanto, U puede verse como un abierto de $\mathbb{R}^n$. Ahora, sea $p \in U$, podemos identificar a p mediante sus coordenadas $\varphi(p) = (x^1, \ldots x^n)$ de modo que p puede considerarse como un elemento de $\mathbb{R}^n$. En este contexto, se dice que $(x^1, \ldots, x^n)$ es la representación coordenada (local) de p o $p = (x^1, \ldots, x^n)$ en coordenadas locales.

Notemos que, por definición de variedad diferenciable cada punto p esta en el dominio coordenado suave de alguna carta suave. Por tanto, todo punto en una variedad diferenciable tiene una representación coordenada que depende de la carta suave.

Variedades con Frontera

Consideremos el conjunto $\mathbb{H}^n \subseteq \mathbb{R}^n$, definido por

$$\mathbb{H}^n = \{(x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n : x^n \geq 0\}.$$

A este conjunto se lo conoce como el **semiespacio superior cerrado *n*-dimensional**.

Usamos la notación $\operatorname{Int} \mathbb{H}^n$ y $\partial \mathbb{H}^n$ para referirnos al interior y a la frontera de $\mathbb{H}^n$, respectivamente. Por tanto, para cualquier $n > 0$, tenemos que,

$$\operatorname{Int} \mathbb{H}^n = \{(x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n : x^n > 0\}$$

y

$$\partial \mathbb{H}^n = \{(x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n : x^n = 0\}.$$

En cambio, cuando $n = 0$, tomamos $\mathbb{H}^0 = \mathbb{R}^0 = \{0\}$, por lo que, $\operatorname{Int}\mathbb{H}^0 = \mathbb{R}^0$ y $\partial\mathbb{H}^0 = \varnothing$.

Definición 2.3 (Variedad Topológica con Frontera). Una *n-variedad topológica con frontera* es un espacio topológico M segundo contable y de Hausdorff en el cual cada punto posee una vecindad que es homeomorfa a un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{H}^n$.

Al par (U, φ), donde $U \subseteq M$ es abierto y $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo sobre un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{H}^n$ le llamamos **carta** de M. Diremos que (U, φ) es una **carta interior** si $\varphi(U)$ es un subocnjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, y diremos que es una **carta de frontera** si $\varphi(U)$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{H}^n$ tal que $\varphi(U) \cap \partial\mathbb{H}^n \neq \varnothing$. Una carta de frontera cuya imagen es un conjunto de la forma $B_r(x) \cap \mathbb{H}^n$ para algún $x \in \partial\mathbb{H}^n$ y $r > 0$ es llamada **semibola coordenada**.

Un punto $p \in M$ es llamado **punto interior** de M si este está en el dominio de algua carta interior. Mientras que $p \in M$ es llamado **punto de frontera** de M si este está en el dominio de alguna carta de frontera tal que su mapa coordenado envía a p en $\partial\mathbb{H}^n$. La **frontera de M** es el conjunto de todos los puntos de frontera y es denotada por ∂M. De manera similar se define el **interior de M** y se lo denota por $\operatorname{Int} M$.

Como una similitud a la frontera e interior de un subconjunto en un espacio topológico tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.1 (Invariación Topológica de la Frontera). *Sea M una variedad topológica con frontera, entonces su frontera e interior son conjuntos disjuntos cuya unión es M.*

Demostración. Ver [4, Theorem 1.37]. □

Diremos que M es una **variedad sin frontera** para referirnos a una variedad en el sentido dado en el primer capítulo. Mientras que, diremos que M es una **variedad con o sin frontera** cuando la frontera de M puede, o no, ser vacía. Con respecto a la frontera y el interior de una variedad tenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.2. *Sea M una n-variedad con frontera. Se tiene que*

a) *$\operatorname{Int} M$ es un subconjunto abierto de M y una n-variedad sin frontera.*

b) *∂M es un subconjunto cerrado de M y una $(n-1)$-variedad sin frontera.*

c) *M es una variedad (en el sentido usual) si y solo si $\partial M = \varnothing$.*

Demostración. Ver [4, Proposition 1.38]. □

Estructuras Suaves en Variedades con Frontera

Sea U un subconjunto abierto de $\mathbb{H}^n$, un mapa $F : U \to \mathbb{R}^k$ se dice suave si para cada $x \in U$ existen $\tilde{U}$, abierto en $\mathbb{R}^n$ que contiene a x, y un mapa suave $\tilde{F} : \tilde{U} \to \mathbb{R}^k$ que coincide con F en $\tilde{U} \cap \mathbb{H}^n$.

Ahora, sea M una n-variedad con frontera, definimos una **atlas suave** para M como se hizo para variedades sin frontera, solo que usamos la noción de mapa suave dada al principio. Una **estructura suave** de M es un atlas suave maximal. Con esta estructura decimos que M es una **variedad diferenciable con frontera**. Cualquier carta en el atlas maximal se denominará **carta suave** de M.

Como la definición de suavidad dada al principio posee propiedades similares que la definición usual, para una variedad con frontera se tiene las mismas conclusiones que las dadas en la Proposición 2.1. Así, basta encontrar un atlas suave para poder determinar una estructura suave en una variedad con frontera.

2.2. Mapas Suaves

Funciones Suaves sobre Variedades

Sean M una n-variedad diferenciable, k un entero no negativo y $f : M \to \mathbb{R}^k$ una función. Decimos que f es una **función suave** si para cualquier $p \in M$ existe una carta suave (U, φ) cuyo dominio coordenado contiene a p y tal que $f \circ \varphi^{-1}$ es suave sobre el conjunto abierto $\varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$. Cuando $k = 0$ la función f es constante y, por tanto, será suave.

Cuando M es una n-variedad suave con frontera, la definición es similar, solo que $\varphi(U)$ es subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{H}^n$, y la suavidad de $f \circ \varphi^{-1}$ significa que para cada $x \in \varphi(U)$ existe una vecindad abierta de x y una extensión suave de f sobre esta vecindad.

Las funciones suaves más importantes son las funciones real-valuadas, así definimos

$$C^\infty(M) = \{f : M \to \mathbb{R} : f \text{ es suave}\}.$$

No es difícil ver que este conjunto es un espacio vectorial con las operaciones usuales entre funciones.

Dada una función $f : M \to \mathbb{R}^k$ y una carta (U, φ) de M, la función $\widehat{f} : \varphi(U) \to \mathbb{R}^k$, definida por $\widehat{f}(x) = f \circ \varphi^{-1}(x)$, es llamada como **representación en coordenadas de f** con respecto a la carta dada.

Supongamos que f es suave y que la carta (U, φ) lo es también. Sea $p \in M$, por definición existe una carta suave (V, ψ) tal que $p \in V$. Luego

$$\widehat{f} = (f \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ \varphi^{-1}),$$

como f es suave se sigue que $f \circ \psi^{-1}$ lo es, además, al ser las cartas (U, φ) y (V, ψ) suaves, el mapa $\psi \circ \varphi^{-1}$ también es suave, de donde, $\widehat{f}$ es suave. En resumen, si f es suave, entonces, cualquier representación coordenada de f con respecto a una carta suave es suave.

Mapas Suaves entre Variedades

Sean M y N variedades diferenciables, y sea $F : M \to N$ un mapa. Decimos que F es una **mapa suave** si para cada $p \in M$ existen dos cartas suaves (U, φ) que contiene a p y (V, ψ) que contiene a $F(p)$, con $F(U) \subseteq V$, las cuales satisfacen que el mapa $\psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$ es suave. Si M y N son variedades diferenciables con frontera usamos la noción de suavidad descrita anteriormente.

Los mapas suaves entre variedades satisfacen la siguiente propiedad, la cual es clásica en el cálculo sobre $\mathbb{R}^n$.

Proposición 2.3. *Todo mapa suave entre variedades, con o sin frontera, es continuo.*

Demostración. Ver [4, Proposition 2.4]. □

Sean $F : M \to N$ un mapa suave, y (U, φ) y (V, ψ) dos cartas suaves de M y N, respectivamente. El mapa $\widehat{F} : \varphi(U \cap F^{-1}(V)) \to \psi(V)$, definido por $\widehat{F}(x) = \psi \circ F \circ \varphi^{-1}(x)$, se denomina **representación en coordenadas de F** con respecto a las cartas suaves (U, φ) y (V, ψ). De manera similar a las funciones suaves, este mapa es suave.

A continuación, presentamos algunas propiedades importantes que cumplen los mapas suaves.

Proposición 2.4. *Sean M, N y P variedades diferenciales, con o sin frontera. Se tiene que*

a) Cualquier mapa constante $c : M \to N$ es suave.

b) El mapa identidad sobre M es suave.

c) Si $U \subseteq M$ es una subvariedad abierta, con o sin frontera (ver Ejemplo A.6). El mapa de inclusión $\iota : U \to M$ es suave.

d) si $F : M \to N$ y $G : N \to P$ son suaves, entonces, $G \circ F : M \to P$ es suave.

Demostración. Ver [4, Proposition 2.10]. □

Difeomorfismos

Sean M y N dos variedades diferenciables con o sin frontera, un **difeomorfismo de M a N** es un mapa suave y biyectivo $F : M \to N$, cuya inversa también es suave.

Como todo mapa suave es continuo, se sigue que un difeomorfismo es un homeomorfismo. Además, la composición de difeomorfismos es un difeomorfismo.

Gracias a la estructura estándar de $\mathbb{R}^n$, podemos ver que para cualquier carta suave (U, φ) de una variedad diferenciable M, con o sin frontera, el mapa coordenado $\varphi : U \to \varphi(U)$ es una difeomorfismo.

Particiones de la Unidad

Sea f una función real-valuada sobre un espacio topológico M. Definimos el **soporte de f** como

$$\operatorname{spt}(f) = \overline{\{p \in M : f(p) \neq 0\}}.$$

Decimos que f es a **soporte compacto** si su soporte es un conjunto compacto.

Sea M un espacio topológico, y $\mathcal{U} = (U_\alpha)_{\alpha \in A}$ un recubrimiento abierto de M, indexado por A. Una **partición de la unidad subordinada a $\mathcal{U}$** es una familia indexada $(\psi_\alpha)_{\alpha \in A}$ de funciones continuas $\psi_\alpha : M \to \mathbb{R}$ que satisfacen las siguientes propiedades:

i) $0 \leq \psi_\alpha(x) \leq 1$, para todo $\alpha \in A$ y $x \in M$.

ii) $\operatorname{spt}(\psi_\alpha) \subseteq U_\alpha$, para todo $\alpha \in A$.

iii) La familia $(\operatorname{spt}(\psi_\alpha))_{\alpha \in A}$ es localmente finita, esto es, cada punto en M tiene una vecindad que interseca únicamente a finitos elementos de la familia $(\text{spt}(\psi_\alpha))_{\alpha\in A}$.

iv) $\sum_{\alpha\in A}\psi_\alpha(x) = 1$, para todo $x \in M$.

Notemos que la suma de iv) está bien definida gracias a iii).

Con respecto a está definición, tenemos el siguiente, y muy importante, resultado.

Teorema 2.2 (Existencia de Particiones de la Unidad). *Sean M una variedad diferenciable, con o sin frontera, y $\mathcal{U} = (U_\alpha)_{\alpha\in A}$ un recubrimiento abierto de M. Entonces, existe una partición de la unidad suave, subordinada a $\mathcal{U}$.*

Demostración. Ver [4, Theorem 2.23]. □

2.3. Vectores Tangentes

Vectores Tangentes Geométricos

Sea $a \in \mathbb{R}^n$, un mapa $w : C^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ es una **derivación en a** si es lineal y satisface la siguiente propiedad

$$w(fg) = f(a)w(g) + g(a)w(f),$$

para todo $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Al conjunto de todas las derivaciones en a lo denotamos por $T_a\mathbb{R}^n$. Este conjunto es un espacio vectorial con las operaciones usuales de funciones, además, una base para este espacio viene dada en el siguiente resultado.

Proposición 2.5. *Para cualquier $a \in \mathbb{R}^n$, las n derivaciones*

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_a, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_a,$$

definidas por

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_a f = \frac{\partial f}{\partial x^i}(a),$$

forman una base para $T_a\mathbb{R}^n$. Por tanto, el espacio $T_a\mathbb{R}^n$ tiene dimensión n.

Demostración. Ver [4, Corollary 3.3]. □

Vectores Tangentes en Variedades

Sea M una variedad diferenciable, con o sin frontera, y sea $p \in M$. Un mapa lineal $v : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ es una **derivación en p** si satisface

$$v(fg) = f(p)v(g) + g(p)v(f),$$

para todo $f, g \in C^\infty(M)$.

Al conjunto de todas las derivaciones en p lo denotamos por T_pM. Este conjunto es un espacio vectorial llamado **espacio tangente de M en p**. Un elemento de T_pM es conocido como **vector tangente en p**.

El Diferencial de un Mapa Suave

Sean M y N variedades diferenciables, con o sin frontera, y sea $F : N \to N$ un mapa suave. Para cada $p \in M$, consideremos el mapa

$$dF_p : T_pM \to T_{F(p)}N,$$

definido por

$$dF_p(v)f = v(f \circ F),$$

para cada $v \in T_pM$ y $f \in C^\infty(N)$.

Este mapa es el **diferencial de F en p**, el cual, satisface propiedades similares al diferencial en $\mathbb{R}^n$ (Fréchet o Gâteaux).

Proposición 2.6. *Sean M, N y P variedades diferenciables, con o sin frontera. Sean $F : M \to N$ y $G : N \to P$ mapas suaves. Para cada $p \in M$ se tiene que*

a) $dF_p : T_pM \to T_{F(p)}N$ *es lineal.*

b) $d(G \circ F)_p = dG_{F(p)} \circ dF_p : T_pM \to T_{(G\circ F)(p)}P$.

c) $d(I_M)_p = I_{T_pM}$.

d) *Si F es un difeomorfismo, entonces, dF_p es un isomorfismo y $(dF_p)^{-1} = d(F^{-1})_{F(p)}$.*

Demostración. Ver [4, Proposition 3.6]. □

Sea M una variedad diferenciable, con o sin frontera. El siguiente resultado establece una relación entre el espacio tangente de una subvariedad abierta U de M y el espacio tangente de M.

Proposición 2.7. *Sea M una variedad diferenciable, con o sin frontera. Sea $U \subseteq M$ un conjunto abierto y $\iota : U \to M$ su mapa de inclusión. Para todo $p \in U$, el diferencial $d\iota_p : T_pU \to T_pM$ es un isomorfismo.*

Demostración. Ver [4, Proposition 3.9]. □

Con respecto a la dimensión del espacio tangente tenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.8. *Sea M es una n-variedad diferenciable, con o sin frontera. Para cada $p \in M$, T_pM es un espacio vectorial de dimensión n.*

Demostración. Ver [4, Proposition 3.10] y [4, Proposition 3.12]. □

Cálculo en Coordenadas

Sean M una n-variedad diferenciable sin frontera y (U, φ) una carta suave. Sabemos que φ es un homeomorfismo entre U y un subconjunto abierto $\widehat{U} = \varphi(U)$ de $\mathbb{R}^n$. Por tanto, usando la Proposición 2.6 y la Proposición 2.7, podemos considerar el ismorfismo $d\varphi_p : T_pM \to T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n$, para cada $p \in U$. Por la Proposición 2.5 podemos obtener una base de n derivaciones para T_pM, definidas por

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p = (d\varphi_p)^{-1}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\varphi(p)}\right) = d(\varphi^{-1})_{\varphi(p)}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\varphi(p)}\right),$$

para cada $i = 1, \ldots, n$. De manera más explícita, para cada $f \in C^\infty(U)$, se tiene que

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p f = \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\varphi(p)} (f \circ \varphi^{-1}) = \frac{\partial \widehat{f}}{\partial x^i}(\widehat{p})$$

donde $\widehat{f}$ es la representación en coordenadas de f respecto a la carta (U, φ), y $\widehat{p} = \varphi(p)$. Cuando no sea necesario especificar la carta sobre la cual se calcula las n derivaciones, se escribe

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$$

en lugar de

$$\frac{\partial \widehat{f}}{\partial x^i}(\widehat{p}).$$

Los vectores $\left.\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$ son los **vectores coordenados de p.**
En particular, para la carta suave (U, φ), consideremos sus coordenadas suaves (x^i). Sea $j = 1, \ldots, n$, arbitrario. Vamos a calcular $\widehat{x^j}$. Para ello, para cada $y =$

$(y^1, \ldots, y^n) \in \mathbb{R}^n$, se tiene que

$$(\varphi \circ \varphi^{-1})(y) = (y^1, \ldots, y^n),$$

de donde

$$(x^1(\varphi^{-1}(y)), \ldots, x^n(\varphi^{-1}(y))) = (y^1, \ldots, y^n),$$

por tanto

$$\widehat{x^j}(y) = x^j(\varphi^{-1}(y)) = y^j.$$

Gracias a la identidad anterior tenemos, para cada $i, j = 1, \ldots, n$, que

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \frac{\partial \widehat{x^i}}{\partial x^j}(\widehat{p}) = \delta^i_j,$$

donde δ^i_j es la **delta de Krónecker**, que viene dada por

$$\delta^i_j = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Supongamos ahora que M es una variedad con frontera. Sea $p \in M$. Si p es un punto interior, se realiza el análisis anterior para obtener una base del espacio tangente. Ahora, cuando $p \in \partial M$, se reemplaza $\mathbb{H}^n$ por $\mathbb{R}^n$ en el análisis anterior; en este caso $\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$ puede ser un elemento de $T_p\mathbb{H}^n$ o de $T_p\mathbb{R}^n$. Si es el primer caso, la n-ésima derivada $\left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_{\varphi(p)}$ se entiende como una derivada lateral (pues $\mathbb{H}^n$ es el semi-espacio superior).

Se puede resumir las afirmaciones anteriores en el siguiente resultado.

Proposición 2.9. *Sean M una n-variedad diferenciable, con o sin frontera y $p \in M$. Entonces, el espacio T_pM es un espacio vectorial de dimensión n, y para cualquier carta suave $(U, (x^i))$, cuyo domino contiene a p, el conjunto de vectores $\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \right\}$ forman una base para T_pM.*

Por tanto, todo vector $v \in T_pM$ se escribe como una combinación lineal de la siguiente forma

$$v = \sum_{i=1}^{n} v^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p.$$

La base $\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \right\}$ se llama **base coordenada de T_pM**, y los escalares $v^1, \ldots, v^n$

se denominan **componentes de v**. Estas componentes pueden calcularse de la siguiente manera

$$v(x^j) = \sum_{i=1}^{n} v^i \frac{\partial x^j}{\partial x^i} = \sum_{i=1}^{n} v^i \delta_j^i = v^j,$$

donde x^j es la j-ésima función coordenada.

Ahora, podemos establecer una relación entre la base coordenada y el diferencial, de la siguiente manera. Empecemos considerando un caso particular. Sea $F : U \to V$ un mapa suave, donde $U \subseteq \mathbb{R}^n$ y $V \subseteq \mathbb{R}^m$ son conjuntos abiertos. Sea $p \in U$, consideremos el diferencial $dF_p : T_p\mathbb{R}^n \to T_p\mathbb{R}^m$. Denotamos $(x^1, \ldots, x^n)$ y $(y^1, \ldots, y^n)$ como las coordenadas estándar de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$, respectivamente. Tenemos que

$$\begin{aligned} dF_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\right) f &= \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p (f \circ F) \\ &= \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial y^j}(F(p)) \frac{\partial F^j}{\partial x^i}(p) \\ &= \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial F^j}{\partial x^i}(p) \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_{F(p)} \right) f, \end{aligned}$$

por tanto,

$$dF_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\right) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial F^j}{\partial x^i}(p) \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_{F(p)}, \tag{2.1}$$

para $i = 1, \ldots, n$.

Podemos concluir que la matriz asociada a la aplicación lineal dF_p, con respecto a las bases coordenadas, es $\left(\frac{\partial F^j}{\partial x^i}(p)\right)$, que no es más que la matriz Jacobiana de F en p, la cual es notada por $DF(p)$. La función $DF : U \to \mathbb{R}^{n\times m}$, que asocia a cada $p \in U$ la matriz Jacobiana de F en p, se denomina matriz Jacobiana de F.

Consideremos el caso general. Sean M una n-variedad diferenciable y N una m-variedad diferenciable. Sean $F : M \to N$ un mapa suave, (U, φ) una carta suave para M. Sean $p \in U$ y (V, ψ) una carta suave para N, tal que $F(p) \in V$. Consideremos (x^i) y (y^i) las coordenadas de (U, φ) y (V, ψ), respectivamente. Consideramos la representación en coordenadas $\widehat{F} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap F^{-1}(V)) \to \psi(V)$ y $\widehat{p} = \varphi(p)$. Usando (2.1), en particular para $d\widehat{F}_{\widehat{p}}$, y el hecho de que $F \circ \varphi^{-1} = \psi^{-1} \circ \widehat{F}$, se sigue que

$$
\begin{aligned}
dF_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\right) &= dF_p\left(d(\varphi^{-1})_{\widehat{p}}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\widehat{p}}\right)\right)\\
&= d(F\circ\varphi^{-1})_{\widehat{p}}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\widehat{p}}\right)\\
&= d(\psi^{-1}\circ\widehat{F})_{\widehat{p}}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\widehat{p}}\right)\\
&= d(\psi^{-1})_{\widehat{F}(\widehat{p})}\left(d\widehat{F}_{\widehat{p}}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\widehat{p}}\right)\right)\\
&= \sum_{j=1}^{m} d(\psi^{-1})_{\widehat{F}(\widehat{p})}\left(\frac{\partial\widehat{F}^j}{\partial x^i}(\widehat{p})\left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_{\widehat{F}(\widehat{p})}\right)\\
&= \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial\widehat{F}^j}{\partial x^i}(\widehat{p})d(\psi^{-1})_{\widehat{F}(\widehat{p})}\left(\left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_{\widehat{F}(\widehat{p})}\right)\\
&= \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial\widehat{F}^j}{\partial x^i}(\widehat{p})\left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_{F(p)}.
\end{aligned}
$$

En resumen

$$
dF_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\right) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial\widehat{F}^j}{\partial x^i}(\widehat{p})\left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_{F(p)}, \tag{2.2}
$$

para $i = 1, \dots, n$.

Por la igualdad anterior, concluimos que la matriz asociada de dF_p, con respecto a las bases coordenadas, no es más que la matriz $\left(\frac{\partial\widehat{F}^j}{\partial x^i}(\widehat{p})\right)$. A esta matriz la llamaremos **matriz Jacobiana de F en p** respecto a las cartas suaves (U,φ) y (V,ψ), y la notamos por $DF(p)$. La función $DF : U \to \mathbb{R}^{n\times m}$, que asocia a cada $p \in U$ la matriz Jacobiana de F en p, se denomina **matriz Jacobiana de F** respecto a las cartas suaves (U,φ) y (V,ψ).

Es usual escribir

$$
\frac{\partial F^j}{\partial x^i}(p)
$$

en lugar de

$$
\frac{\partial\widehat{F}^j}{\partial x^i}(\widehat{p}).
$$

Sean (U,φ) y (V,ψ) dos cartas suaves de un n-variedad diferenciable M, con o sin frontera, y $p \in U\cap V$. Sean (x^i) y $(\tilde{x}^i)$ las coordenadas de (U,φ) y (V,ψ), respectivamente. Consideramos el mapa de transición $\psi\circ\varphi^{-1} : \varphi(U\cap V) \to \psi(U\cap V)$.

Tenemos que

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p &= d(\varphi^{-1})_{\varphi(p)}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\varphi(p)}\right) \\
&= d(\psi^{-1})_{\psi(p)} \circ d(\psi\circ\varphi^{-1})_{\varphi(p)}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\varphi(p)}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} d(\psi^{-1})_{\psi(p)}\left(\frac{\partial(\psi\circ\varphi^{-1})^j}{\partial x^i}(\varphi(p))\left.\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j}\right|_{\psi(p)}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial(\psi\circ\varphi^{-1})^j}{\partial x^i}(\varphi(p))\left.\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j}\right|_{p}.
\end{aligned}$$

Es decir

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial(\psi\circ\varphi^{-1})^j}{\partial x^i}(\varphi(p))\left.\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j}\right|_{p}, \tag{2.3}$$

para cada $i = 1, \ldots, n$. Esta fórmula no es más que la fórmula de cambio de base aplicada a dos bases de un espacio vectorial. A esta fórmula la llamaremos **fórmula de cambio de coordenadas**. Concluimos, además, que la matriz de cambio de base, en este caso, es $\left(\frac{\partial(\psi\circ\varphi^{-1})^j}{\partial x^i}(\varphi(p))\right)$.

El Fibrado Tangente

Sea M una variedad diferenciable, con o sin frontera. El **fibrado tangente de** $\boldsymbol{M}$, notado por TM, es la unión disjunta de los espacios tangentes de M, esto es

$$TM = \bigsqcup_{p\in M} T_pM = \{(v,p) : p \in M, v \in T_pM\}.$$

Al mapa $\pi : TM \to M$, definido por

$$\pi(v,p) = p,$$

lo llamamos **mapa de proyección** del fibrado tangente. Gracias a este mapa, podemos identificar el fibrado tangente como la unión (clásica) de los espacios tangentes. En este contexto, se escribe v_p en lugar de (v,p). Cuando no necesitemos hacer énfasis en el punto p se escribe, simplemente v.

El fibrado tangente no es ajeno a las variedades diferenciables, pues tenemos el siguiente resultado

Proposición 2.10. *Para cualquier n-variedad diferenciable M, el fibrado tangente TM es una $2n$-variedad diferenciable con cierta estructura suave, que la llamaremos estructura natural. Con respecto a esta estructura, el mapa de proyección $\pi : TM \to M$ es suave.*

Demostración. Ver [4, Proposition 3.18], □

De ahora en adelante, consideraremos al fibrado tangente con la estructura natural; es decir, consideraremos a TM como una $2n$-variedad diferenciable.

Vector Velocidad de Curvas

Al igual que en la geometría Euclidiana (de superficies) se puede adaptar el concepto de curva (suave) en el contexto de las variedades. Sea M una variedad con o sin frontera, definimos una **curva en M** como un mapa continuo $\gamma : J \to M$, donde $J \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo. Notemos que si este intervalo contiene algún extremo, lo podemos considerar como una variedad con frontera; mientras que si el intervalo es abierto, pues se lo considera como una subvariedad abierta.

Ahora, recordemos que en la geometría euclidiana la derivada de una curva suave se interpretaba como la velocidad de la misma. Presentamos un concepto similar en el contexto de las variedades: sea $\gamma : J \to M$ una curva suave y $t_0 \in J$, definimos la **velocidad de γ en t_0**, notado por $\gamma'(t_0)$, como el vector

$$\gamma'(t_0) = d\gamma_{t_0}\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t_0}\right) \in T_{\gamma(t_0)}M,$$

donde la derivación $\left.\frac{d}{dt}\right|_{t_0}$ no es más que la derivada evaluada en el punto t_0, pues, vista como base coordenada, no es más que un elemento de $T_{t_0}\mathbb{R}$, donde $\mathbb{R}$ es una 1-variedad diferenciable.

De manera explícita

$$\gamma'(t_0)f = d\gamma_{t_0}\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t_0}\right)f = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t_0}(f \circ \gamma) = (f \circ \gamma)'(t_0),$$

para cada $f \in C^\infty(M)$.

Con respecto a la composición de una curva con mapas suaves tenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.11. *Sean M y N variedades diferenciables, con o sin frontera, y $J \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo. Consideramos $F : M \to N$ un mapa suave, y sea $\gamma : J \to M$ una curva suave. Para cualquier $t_0 \in J$, la velocidad en $t = t_0$ de la curva $F \circ \gamma : J \to N$ viene dada por*

$$(F \circ \gamma)'(t_0) = dF_{\gamma(t_0)}(\gamma'(t_0)).$$

Demostración. Ver [4, Proposition 3.24]. □

Como consecuencia inmediata del resultado anterior tenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.1. *Sean M y N variedades diferenciables, con o sin frontera, y $J \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo. Consideramos $F : M \to N$ un mapa suave, $p \in M$, y $v \in T_pM$. Entonces*

$$dF_p(v) = (F \circ \gamma)'(0)$$

para cualquier curva suave $\gamma : J \to M$, tal que, $0 \in J$, $\gamma(0) = p$ y $\gamma'(0) = v$.

2.4. Subvariedades Incrustadas

Sean M y N dos variedades diferenciables, con o sin frontera. sea $F : M \to N$ un mapa suave. Se dice que F es un **inmersión suave** si su diferencial es inyectivo en cada punto. Además, esta inmersión se conocerá como **incrustación suave de M en N** si es homeomorfa sobre su imagen $F(M)$.

Ahora, sea $S \subseteq M$. Se dice que S es una **subvariedad incrustada de M** si S es una variedad (sin frontera) con la topología de subespacio y está dotada de una estructura suave que hace del mapa de inclusión $S \hookrightarrow M$ una incrustación suave. Por otro lado, diremos que S es una **subvariedad incrustada de M con frontera** si está dotado de una topología y una estructura suave que hace de S una variedad diferenciable con frontera y el mapa de inclusión $S \hookrightarrow M$ es una incrustación suave.
Sea n la dimensión de N, se conocerá a S como una **hipersuperficie incrustada** cuando S es una subvariedad incrustada, con o sin frontera, de dimensión $n-1$.

En particular, tenemos el siguiente resultado con respecto a la frontera de una variedad diferenciable.

Teorema 2.3. *Sea M una n-variedad diferenciable con frontera. Entonces, con la topología de subespacio, ∂M es una $(n-1)$-variedad (sin frontera), y está dotada* *de una estructura suave que hace de ∂M una subvariedad incrustada de M.*

Demostración. Ver [4, Theorem 5.11]. $\square$

Ejemplo 2.2 (Subvariedades abiertas e incrustadas). Sea M una n-variedad diferenciable y $U \subseteq M$ una subvariedad abierta de M. Gracias a la Proposición 2.4 el mapa de inclusión $\iota : U \to M$ es suave, por tanto, U es una subvariedad incrustada de M con dimensión n. $\square$

Ejemplo 2.3 (Subvariedad incrustada de una subvariedad incrustada). Sea M una variedad diferenciable y $S \subseteq M$ una subvariedad incrustada de M. Consideremos $L \subseteq S$ una subvariedad incrustada de S. Mostremos que L es, también, una subvariedad incrustada de M.
Consideremos los mapas de inclusión $\iota : L \to M$, $\iota_1 : L \to S$ y $\iota_2 : S \to M$. Notemos que

$$\iota = \iota_2 \circ \iota_1,$$

por la Proposición 2.4 y la definición de subvariedad incrustada se sigue que el mapa $\iota : L \to M$ es suave, por tanto, L es una subvariedad incrustada de M. $\square$

Presentamos unas definiciones importantes con respecto a las subvariedades incrustadas. Sea M una variedad diferenciable, con o sin frontera. Sea $S \subseteq M$ una subvariedad incrustada de M y ι su mapa de inclusión. Para cada $p \in S$, se identifica T_pS como la imagen de T_pS a través del mapa lineal inyectivo (por definición de subvariedad incrustada) $d\iota_p : T_pS \to T_pM$. Por tanto, se puede considerar a T_pS como un subespacio lineal de T_pM.

Usando la identificación anterior se considera lo siguiente. Sea M una variedad con frontera, gracias al Teorema 2.3 la frontera ∂M es una subvariedad incrustada. Sea $p \in \partial M$, un vector $v \in T_pM \setminus T_p\partial M$ se dice que **apunta hacia afuera** si existen $\varepsilon > 0$ y una curva $\gamma : (-\varepsilon, 0] \to M$ tal que $\gamma(0) = p$ y $\gamma'(0) = v$. En cambio, decimos que el vector **apunta hacia adentro** cuando la curva tiene dominio $[0, \varepsilon)$. El siguiente resultado establece que cualquier vector en $T_pM \setminus T_p\partial M$ apunta hacia afuera, o, apunta hacia adentro.

Proposición 2.12. *Sean M una variedad diferenciable con frontera y $p \in \partial M$. Entonces, T_pM es la unión de: $T_p\partial M$ (usando la identificación discutida en los párrafos anteriores), el conjunto de los vectores que apuntan hacia afuera y el de los vectores que apuntan hacia adentro.*

Demostración. Ver [4, Proposition 5.41]. $\square$

2.5. Campos Vectoriales sobre Variedades

Sean M y N dos variedades diferenciables, con o sin frontera. Consideremos un mapa $\pi : M \to N$ continuo, una **sección (global) de π** es un mapa $\phi : N \to M$, continuo, tal que $\pi \circ \phi = I_N$. Una **sección local de π** es un mapa continuo $\phi : U \subseteq N \to M$ cbon U abierto, tal que, $\pi \circ \phi = I_U$.

En particular, vamos a considerar un caso especial de secciones. Sea M una variedad diferenciable, con o sin frontera, un **campo vectorial sobre M** es una sección del mapa de proyección $\pi : TM \to M$. Este mapa de proyección es continuo, pues gracias a la Proposición 2.10 el fibrado tangente TM posee una estructura suave tal que el mapa π es suave, por tanto, continuo.
Así, un campo vectorial es un mapa $X : M \to TM$, continuo, tal que $\pi \circ X = I_M$, o equivalentemente, $X(p) \in T_pM$, para cada $p \in M$. Se escribe X_p en lugar de $X(p)$, para cada $p \in M$.

Un mapa $X : M \to TM$ es un **campo vectorial rugoso** si X no es necesariamente continuo, pero $\pi \circ X = I_M$. Mientras que X será un **campo vectorial suave** si X es un mapa suave.

Sea $A \subseteq M$ (no necesariamente abierto), consideremos un mapa continuo $X : A \to TM$ que satisface $\pi \circ X = I_A$, o equivalentemente, $X_p \in T_pM$, para cada $p \in A$. A este mapa lo llamamos **campo vectorial a lo largo de A**.

2.6. Fibrados Vectoriales

Sea M un espacio topológico. Un **fibrado vectorial de rango k sobre M** es una pareja (E, π), donde E es un espacio topológico y $\pi : E \to M$ un mapa sobreyectivo y continuo que satisfacen las siguientes condiciones:

i) Para cada $p \in M$, el conjunto $E_p = \pi^{-1}(p)$ es un k-espacio vectorial (notar que escribimos $\pi^{-1}(p)$ en lugar de $\pi^{-1}(\{p\})$).

ii) Para cada $p \in M$, existe una vecindad U de p en M y un homeomorfismo $\varphi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$ (llamado **trivialización local de E sobre U**), que satisface los siguientes enunciados:

- $\pi_U \circ \varphi = \pi$ (donde $\pi_U : U \times \mathbb{R}^k \to U$ es el mapa proyección);
- para cada $q \in U$, la restricción de φ en E_q es un isomorfismo entre los

espacios vectoriales E_q y $\{q\} \times \mathbb{R}^k$.

Ahora, supongamos que M y E son dos variedades diferenciables, con o sin frontera, π es un mapa suave, y las trivializaciones locales son difeomorfismos. En este contexto E es llamado **fibrado vectorial suave**. En este caso, a cada trivialización local, la cual es un difeomorfismo, la llamaremos **trivialización local suave**.
Es usual usar las expresiones "E es un fibrado vectorial (suave) sobre M", "$E \to M$ es un fibrado vectorial (suave)" o "$\pi : E \to M$ es un fibrado vectorial (suave)".

Proposición 2.13. *Sea M una n-variedad diferenciable, con o sin frontera, y sea TM su fibrado vectorial. Se tiene que TM, con su mapa proyección $\pi : TM \to M$, es un fibrado vectorial suave de rango n sobre M.*

Demostración. Ver [4, Proposition 10.4]. □

Secciones Locales y Globales de Fibrados Vectoriales

Sea $\pi : E \to M$ un fibrado vectorial. Una **sección (global) de *E*** es una sección del mapa π, esto es, un mapa continuo $\phi : M \to E$ tal que $\pi \circ \phi = I_M$. O, equivalentemente, $\phi(p) \in E_p$ para cada $p \in M$.
Por otro lado, una **sección local de *E*** es un mapa continuo sobre $\phi : U \to E$ definido sobre un conjunto abierto $U \subseteq M$, y que satisface $\pi \circ \phi = I_U$.
Ahora, si M es una variedad diferenciable, con o sin frontera, y E es un fibrado vectorial suave, una **sección (local o global) suave de *E*** es una sección (local o global), que a su vez es un mapa suave sobre su dominio hacia E.
En caso de que este mapa ϕ no sea continuo, pero sea el inverso derecho para π, diremos que ϕ es una **sección (local o global) rugosa para *E***, dependiendo del domino de ϕ.

Fibrados Locales y Globales

Sea $E \to M$ un fibrado vectorial de rango k. Consideremos $U \subseteq M$ un conjunto abierto. Un **fibrado local de *E* sobre *U*** es un conjunto de k secciones sobre U, llámese $\{\phi_1, \ldots, \phi_k\}$, tal que, el conjunto $\{\phi_1(p), \ldots, \phi_k(p)\}$ es una base de E_p, para cada $p \in U$. Si $U = M$, este conjunto es un **fibrado global de *E***.
Supongamos ahora que $E \to M$ es un fibrado vectorial suave, el fibrado (local o global) $\{\phi_1, \ldots, \phi_k\}$ se denominará **fibrado (local o global) suave** si cada ϕ_i es

una sección suave. Se suele escribir $\{\phi_i\}$ en lugar de $\{\phi_1, \ldots, \phi_k\}$.

Ahora, sea M una n-variedad diferenciable, con o sin frontera, por la Proposición 2.13 sabemos que el fibrado tangente TM, con su mapa de proyección, es un fibrado vectorial suave de rango n. Sea $(U, (x^i))$ una carta suave de M, consideramos las secciones locales suaves $\dfrac{\partial}{\partial x^i} : U \to TM$ definidas por

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(p) = \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p,$$

para cada $i = 1, \ldots, n$. Gracias a la Proposición 2.9 el conjunto $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right\}$ es un fibrado local de TM sobre U.

2.7. Fibrado Cotangente

Covectores

En adelante se asume que todo espacio vectorial es real. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Un **covector de V** no es más que un funcional lineal $\omega : V \to \mathbb{R}$. El conjunto de todos los covectores, con las operaciones usuales entre funciones, es un espacio vectorial. A este espacio se lo denota por V^*, y es llamado **espacio dual de V**.
Con respecto a la dimensión del espacio dual tenemos el siguiente resultado, el cual es bastante conocido.

Proposición 2.14. *Sea V un espacio vectorial de dimensión n. Consideremos una base $\{E_1, \ldots, E_n\}$ de V, sean $\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n$ covectores definidos por*

$$\varepsilon^i(E_j) = \delta^i_j = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Se tiene que el conjunto $\{\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n\}$ es una base de V^*. Por tanto, el espacio dual de V tiene la misma dimensión de V.

Demostración. Ver [2, Proposición 4.2]. □

Gracias al resultado anterior, para cada $\omega \in V^*$, existen escalares únicos $\omega_1, \ldots, \omega_n$

tales que

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \varepsilon^i,$$

de donde

$$\omega_j = \omega(E_j),$$

para cada $j = 1, \ldots, n$.

Covectores Tangentes en Variedades

Sea M una variedad diferenciable, con o sin frontera. Para cada $p \in M$, definimos el **espacio cotangente en p**, denotado por T_p^*M, como el espacio dual de T_pM, es decir,

$$T_p^*M = (T_pM)^*.$$

Sabemos que T_pM es un espacio vectorial con la dimensión igual a la de M, por tanto, T_p^*M es un espacio vectorial de igual dimensión que M.
Los elementos de T_p^*M son llamados **covectores tangentes en p**, o simplemente, **covectores en p**.
Sea $(U, (x^i))$ una carta suave de M. Para cada $p \in U$, la base coordenada $\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \right\}$, de T_pM, genera una base dual para T_p^*M, la cual denotaremos por $\{\lambda^i|_p\}$. Por tanto, cualquier covector $\omega \in T_p^*M$ se escribe de manera única como $\omega = \sum_i \omega_i \, \lambda^i|_p$ donde

$$\omega_i = \omega\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \right).$$

Campos Covectoriales

Sea M una variedad diferenciable, con o sin frontera. Definimos el **fibrado cotangente de M**, denotado por T^*M, como la unión disjunta de los espacios cotangentes. Esto es

$$T^*M = \bigsqcup_{p \in M} T_p^*M = \{(\omega, p) : p \in M, \omega \in T_p^*M\}.$$

Al igual que el fibrado tangente, el fibrado cotangente esta asociado a un mapa de proyección $\pi : T^*M \to M$, definido por

$$\pi(\omega, p) = p.$$

Gracias a este mapa podemos considerar a T^*M como la unión (clásica) de los espacios cotangentes. En este contexto, escribimos ω_p, en lugar de (ω, p), o, si no necesitamos hacer énfasis en el punto, podemos escribir ω.

Ahora, sea $(U, (x^i))$ una carta suave de M. Notemos que, para cada $p \in M$, el conjunto $\{\lambda^i|_p\}$ es la base dual para T_p^*M, generada por la base coordenada. Sea n la dimensión de M, para cada $i = 1, \ldots, n$ definimos la función $\lambda^i : U \to T^*M$, dada por

$$\lambda^i(p) = \lambda^i\big|_p .$$

Estas funciones se denominan **campos covectoriales coordenados**.

Proposición 2.15. *Sea M una n-variedad diferenciable, con o sin frontera. El fibrado cotangente T^*M, con su mapa de proyección, posee una única topología, y una estructura suave, que lo convierte en un fibrado vectorial suave de rango n sobre M, en donde, todos los campos covectoriales coordenados son secciones locales suaves de TM.*

Demostración. Ver [4, Proposition 11.9]. □

Gracias al resultado anterior podemos considerar la siguiente definición. Una sección (local o global) de T^*M es llamada **campo covectorial**. Un **campo covectorial suave (rugoso)**, no es más que una sección (local o global) suave (rugosa) de T^*M. Sea $\omega : M \to T^*M$ un campo covectorial; para cada $p \in M$ escribimos ω_p, o $\omega|_p$, en lugar de $\omega(p)$. Además, al ser ω una sección tenemos que $\omega_p \in T_p^*M$, para cada $p \in M$.

Usando la definición de los campos vectoriales coordenados, podemos ver que cada campo covectorial sobre una n-variedad diferenciable, ω, puede escribirse, para una carta suave $(U, (x^i))$, como

$$\omega = \sum_i \omega_i \lambda^i,$$

para n funciones $\omega_i : U \to \mathbb{R}$, a las cuales llamaremos **funciones componentes**

de ω. Estas funciones están caracterizadas por la fórmula

$$\omega_i(p) = \omega_p \left(\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p \right),$$

para cada $p \in U$.

Cofibrados

Sean M una n-variedad diferenciable, con o sin frontera, y $U \subseteq M$ un conjunto abierto. Un **cofibrado local de M sobre U** es un conjunto de n campos covectoriales $\{\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n\}$, denotado también por $\{\varepsilon^i\}$, definidos sobre U tales que el conjunto $\{\varepsilon^i|_p\}$ forma una base de T_p^*M, para cada $p \in U$. Si $U = M$, este conjunto se llama **cofibrado global**. Notemos que un cofibrado local no es más que un fibrado local del fibrado vectorial suave T^*M.

Como un claro ejemplo, para una carta suave $(U, (x^i))$, el conjunto de los campos covectoriales coordenados $\{\lambda^i\}$ es un cofibrado local de M sobre U.

El Diferencial sobre C^∞

Sea M una variedad diferenciable, con o sin frontera. Para $f \in C^\infty(M)$ definimos el **diferencial de M** como el campo covectorial $df : M \to T^*M$, dado por

$$df_p(v) = vf,$$

para $v \in T_pM$. Con respecto a la suavidad de este campo covectorial tenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.16. *Sean M una variedad diferenciables, con o sin frontera, y $f : M \to \mathbb{R}$ una función suave. Se tiene que df es un campo covectorial suave.*

Demostración. Ver [4, Proposition 11.18]. □

Por otro lado, el diferencial satisface propiedades bastantes similares a la derivada tradicional.

Proposición 2.17. *Sea M una variedad diferenciable, con o sin frontera. Para $f, g \in C^\infty(M)$ se tiene que:*

a) *Para cada $a, b \in \mathbb{R}$ se satisface $d(af + bg) = adf + bdg$.*

b) $d(fg) = fdg + gdf$.

c) *Si f es constante, entonces,* $df = 0$.

Demostración. Ver [4, Proposition 11.20]. □

Sea M una variedad diferenciable, con o sin frontera. Usando este diferencial, observemos una relación entre el cofibrado local $\{\lambda^i\}$ y las coordenadas suaves de una carta, como sigue. Sea $(U, (x^i))$ una carta suave de M, consideremos el cofibrado local $\{\lambda^i\}$ sobre U. Tenemos, para cada $p \in U$, que $df_p = \sum_i A_i(p)\ \lambda^i|_p$, para ciertas funciones $A_i : U \to \mathbb{R}$. Luego cada A_i puede caracterizarse por

$$A_i(p) = df_p \left(\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p \right).$$

Usando la definición del diferencial se sigue que

$$A_i(p) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p).$$

Por tanto,

$$df_p = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)\ \lambda^i\big|_p .$$

Usando esta fórmula con la coordenada suave $x^j : U \to \mathbb{R}$ en lugar de f. tenemos que

$$dx^j\big|_p = \sum_i \frac{\partial x^j}{\partial x^i}(p)\ \lambda^i\big|_p = \sum_i \delta^i_j\ \lambda^i\big|_p = \lambda^j\big|_p ,$$

así

$$dx^j = \lambda^j.$$

La identidad anterior nos indica el importante hecho de que dx^j no es más que el campo covectorial coordenado λ^j. Por tanto, el conjunto $\{dx^i|_p\}$ es la base de T_p^*M generada por la base coordenada de T_pM, para cada $p \in U$.
Utilizando esta observación tenemos que

$$df_p = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)\ dx^i\big|_p .$$

Como la igualdad anterior es puntual, se sigue que

$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i,$$

para cada carta suave $(U, (x^i))$ de M.
Notemos que la última expresión es similar al diferencial total de campos escalares sobre $\mathbb{R}^n$. Así, cuando f sea función sobre un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ a valores reales, el diferencial df (en el sentido de las variedades) y el diferencial total coinciden.

A partir de ahora usaremos el diferencial dx^i en lugar de λ^i, así, el cofibrado local $\{\lambda^i\}$ pasará a ser $\{dx^i\}$.

2.8. Tensores

Álgebra Multilineal

Sean $V_1, \dots, V_k$ y W espacios vectoriales de dimensión finita. Un mapa $F : V_1 \times \cdots \times V_k \to W$ se dice **multilineal** si es lineal en cada componente, fijando las demás. Es decir, para cada $i = 1, \dots, k$, se cumple que

$$F(v_1, \dots, \alpha v_i + v_i', \dots, v_k) = \alpha F(v_1, \dots, v_i, \dots, v_k) + F(v_1, \dots, v_i', \dots, v_k),$$

para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ y $v_i, v_i' \in V_i$.
Se denota como $L(V_1, \dots, V_k; W)$ al conjunto de todos los mapas multilineales de $V_1 \times \cdots \times V_k$ a W. Este conjunto es un espacio vectorial con las operaciones usuales de funciones.

Ahora, vamos a definir una forma multilineal que es de gran importancia para los análisis siguientes. Sean $V_1, \dots, V_k$ y $W_1, \dots, W_l$ espacios vectoriales. Consideramos $F \in L(V_1, \dots, V_k; \mathbb{R})$ y $G \in L(W_1, \dots, W_l; \mathbb{R})$, el mapa $F \otimes G : V_1 \times \cdots \times V_k \times W_1 \times \cdots \times W_l \to \mathbb{R}$, definido por

$$F \otimes G(v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_l) = F(v_1, \dots, v_k) G(w_1, \dots, w_l),$$

es un elemento de $L(V_1, \dots, V_k, W_1, \dots, W_l; \mathbb{R})$ llamado **producto tensorial de F y G**.
De manera general, sean $F_1, \dots, F_l$ mapas multilineales sobre $k_1, \dots, k_l$ espacios vectoriales a valores reales, respectivamente. El mapa $F_1 \otimes \cdots \otimes F_l$ es un mapa que evalúa $k_1 + \cdots + k_l$-variables, a las cuales asocia el producto de F_1, evaluado en las primeras k_1-variables hasta F_l evaluado en las últimas k_l-variables. En particular, sean $V_1, \dots, V_k$ espacios vectoriales, y sean $\omega^i \in V_i^*$, para cada $i = 1, \dots, k$. El

producto tensorial $\omega^1 \otimes \cdots \otimes \omega^k : V_1 \times \cdots \times V_k \to \mathbb{R}$ viene dado por

$$\omega^1 \otimes \cdots \otimes \omega^k(v_1, \ldots, v_k) = \omega^1(v_1) \cdots \omega^k(v_k).$$

Proposición 2.18. *Sean $V_1, \ldots, V_k$ espacios vectoriales de dimensión $n_1, \ldots, n_k$, respectivamente. Para cada $j = 1, \ldots, k$, consideramos $\{E_1^{(j)}, \ldots, E_{n_j}^{(j)}\}$ base para V_j, y sea $\{\varepsilon_{(j)}^1, \ldots, \varepsilon_{(j)}^{n_j}\}$ su base dual asociada para V_j^*. Se tiene que el conjunto*

$$\{\varepsilon_{(1)}^{i_1} \otimes \cdots \otimes \varepsilon_{(k)}^{i_k} : 1 \leq i_1 \leq n_1, \ldots, 1 \leq i_k \leq n_k\}$$

es una base para $L(V_1, \ldots, V_k; \mathbb{R})$. Por tanto, la dimensión de $L(V_1, \ldots, V_k; \mathbb{R})$ es el producto $n_1 \ldots n_k$.

Demostración. Ver [4, Proposition 12.4]. □

Tensores Covariantes y Contravariantes

Sean V un espacio vectorial de dimensión finita y k un entero positivo. Una forma multilineal

$$\alpha : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k-\text{veces}} \to \mathbb{R}$$

es llamada **k-tensor covariante en V**. El número k es llamado **rango de α**. Un 0-tensor es, por convención, un número real. Al conjunto de todos los k-tensores covariantes en V lo denotamos por

$$T^k(V^*).$$

Esta notación está motivada por el análisis realizado en el Capítulo 12 de [4].

Por otro lado, una forma multilineal

$$\alpha : \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{k-\text{veces}} \to \mathbb{R}$$

es llamada **k-tensor contravariante en V**. Al conjunto de todos los k-tensores contravariantes en V lo denotamos por

$$T^k(V).$$

Centraremos nuestro estudio en los tensores covariantes, así, omitiremos la palabra "covariante" cuando no sea necesario.

Gracias a la Proposición 2.18 podemos establecer el siguiente resultado.

Corolario 2.2. *Sea V un espacio vectorial de dimensión n. Consideremos $\{E_i\}$ una base para V y $\{\varepsilon^i\}$ su base dual asociada de V^*. Se tiene que el conjunto*

$$\{\varepsilon^{i_1} \otimes \cdots \otimes \varepsilon^{i_k} : 1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq n\}$$

es una base para $T^k(V^*)$. Por tanto, la dimensión de $T^k(V^*)$ es n^k.

En el contexto del Corolario 2.2, consideremos α, un k-tensor covariante en V. Se tiene que α se escribe de manera única como

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq n} \alpha_{i_1 \cdots i_k} \varepsilon^{i_1} \otimes \cdots \otimes \varepsilon^{i_k},$$

donde los n^k escalares $\alpha_{i_1 \cdots i_k}$ se pueden caracterizar por

$$\alpha_{i_1 \cdots i_k} = \alpha(E_{i_1}, \ldots, E_{i_k}).$$

Tensores Simétricos y Alternantes

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Un k-tensor covariante en V, llamémoslo α, es **simétrico** cuando, para cualesquiera vectores $v_1, \ldots, v_k \in V$ y cualquier par de índices distintos i y j se tiene que

$$\alpha(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n) = \alpha(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_n).$$

En cambio, este tensor es **alternante** (o **antisimétrico**) cuando

$$\alpha(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n) = -\alpha(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_n)$$

Al conjunto de todos k-tensores covariantes simétricos lo denotamos por $\Sigma^k(V^*)$. Este conjunto es un subespacio vectorial de $T^k(V^*)$.

Por otro lado, al conjunto de todos k-tensores covariantes alternantes lo denotamos por $\Lambda^k(V^*)$. Este conjunto es un subespacio vectorial de $T^k(V^*)$. A los k-tensores covariantes alternantes se los conoce como k**-covectores**.

Campos Tensoriales sobre Variedades

Sea M una variedad diferenciable, con o sin frontera. Definimos el **fibrado de los k-tensores covariantes en M** como

$$T^kT^*M = \bigsqcup_{p\in M} T^k(T_p^*M) = \{(\omega, p) : p \in M, \omega \in T^k(T_p^*M)\}.$$

Por comodidad, al conjunto T^kT^*M lo llamamos **fibrado k-tensorial sobre M** (o simplemente **fibrado tensorial sobre M** cuando no queremos hacer énfasis sobre el rango k).

Al igual que el fibrado tangente y cotangente, el fibrado tensorial es un fibrado vectorial suave. Una sección (local, global o rugosa) del fibrado tensorial se la conoce como **campo k-tensorial (local, global o rugoso) sobre M** (o **campo tensorial**); si esta sección es suave, el campo tensorial es un **campo k-tensorial (local o global) suave** (o **campo tensorial suave**). En algunos textos en español se escribe **campo tensorial de orden k** en lugar de campo k-tensorial.

Como un 0-tensor covariante es un número real, un campo 0-tensorial lo interpretaremos como una función real-valuada sobre M.

Al conjunto de todos los campos k-tensoriales suaves lo denotamos por $\Gamma(T^kT^*M)$.

Sea M una variedad diferenciable, con o sin frontera. Consideremos $(U, (x^i))$ una carta suave de M, sabemos que $\{dx^i\}$ es un cofibrado local de M sobre U. Gracias al Corolario 2.2 el conjunto

$$\left\{ dx^{i_1}\big|_p \otimes \cdots \otimes dx^{i_k}\big|_p : 1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq n \right\}$$

es una base de $T^k(T_p^*M)$, para cada $p \in U$. Definimos el campo tensorial local suave $dx^{i_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_k} : U \to T^kT^*M$ como

$$(dx^{i_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_k})(p) = dx^{i_1}\big|_p \otimes \cdots \otimes dx^{i_k}\big|_p.$$

Por las observaciones anteriores, cada $A \in \Gamma(T^kT^*M)$ se escribe de manera única, y con respecto a $(U, (x^i))$, como

$$A = \sum_{1\leq i_1,\ldots,i_k\leq n} A_{i_1\ldots i_k} dx^{i_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_k},$$

donde las funciones $A_{i_1\ldots i_k} : U \to \mathbb{R}$ se denominan **funciones componentes de A**.

Pullback de Campos Tensoriales

Sean M y N dos variedades diferenciables. Consideremos $F : M \to N$ un mapa suave entre variedades diferenciables, con o sin frontera. Para cada $p \in M$ y cada k-tensor $\alpha \in T^k(T^*_{F(p)}M)$ definimos el tensor $dF^*_p(\alpha) \in T^k(T^*_pM)$, llamado **pullback puntual de α por F en p**, por

$$dF^*_p(\alpha)(v_1, \ldots, v_k) = \alpha(dF_p(v_1), \ldots, dF_p(v_k)),$$

para cada $v_1, \ldots, v_k \in T_pM$. Sea A un campo k-tensorial sobre N, definimos el campo k-tensorial rugoso F^*A sobre M, llamado **pullback de A por F**, por

$$(F^*A)_p = dF^*_p(A_{F(p)}).$$

De manera explícita, para cada $v_1, \ldots, v_k \in T_pM$, se tiene que

$$(F^*A)_p(v_1, \ldots, v_k) = A_{F(p)}(dF_p(v_1), \ldots, dF_p(v_k)).$$

Proposición 2.19. *Sean M, N y P variedades diferenciables, con o sin frontera. Consideremos $F : M \to N$ y $G : N \to P$, mapas suaves; sean A y B campos tensoriales sobre N, f una función real-valuada sobre N y a un escalar. Se tiene que:*

a) $F^*(fB) = (f \circ F)F^*B$.

b) $F^*(aA + B) = aF^*(A) + F^*(B)$.

c) F^*B *es un campo tensorial, y es suave cuando* B *es suave.*

d) $(G \circ F)^*B = F^*(G^*B)$.

e) $(I_N)^*B = B$.

Demostración. Ver [4, Proposition 12.25]. □

2.9. Formas Diferenciables

Análisis de los Tensores Alternantes

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Los k-tensores alternantes son llamados ***k*-covectores**, y el espacio de estos tensores se denota por $\Lambda^k(V^*)$. Además, todos los 0-tensores y 1-tensores son alternantes.

Recordemos conceptos básicos sobre los números enteros positivos. Una permutación de un subconjunto N del conjunto de los enteros positivos es una función biyectiva $\sigma : N \to N$. Denotamos como S_k al conjunto de todas las permutaciones del conjunto $\{1, \ldots, k\}$. Con la operación composición ente funciones $\circ$, este conjunto S_k es un grupo llamado **grupo simétrico en k elementos**.
Una permutación $\tau \in S_k$ es una **transposición** cuando intercambia dos elementos de $\{1, \ldots, k\}$ fijando los demás. Es decir, para cierto par de elementos de $\{1, \ldots, k\}$, llámense i y j, se tiene que

$$\tau(l) = \begin{cases} i, & l = j, \\ j, & l = i, \\ l, & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Se dice que una permutación es **par** cuando puede ser expresada como la composición de un número par de transposiciones, de manera similar se define una permutación **impar**.
Consideremos la función $\operatorname{sgn} : S_k \to \{-1, 1\}$, llamada **función signo sobre S_k**, definida por

$$\operatorname{sgn} \sigma = \begin{cases} 1, & \text{cuando } \sigma \text{ es par,} \\ -1, & \text{cuando } \sigma \text{ es impar,} \end{cases}$$

a la imagen $\operatorname{sgn} \sigma$ se le llama **signo de σ**.

Regresemos al contexto de los tensores. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, dados un k-tensor α sobre V y una permutación $\sigma \in S_k$, definimos el k-tensor ${}^{\sigma}\alpha$ como

$${}^{\sigma}\alpha(v_1, \ldots, v_k) = \alpha(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}),$$

para todo $v_1, \ldots, v_k \in V$.

Consideremos el mapa $\operatorname{Alt} : T^k(V^*) \to \Lambda^k(V^*)$, llamado **alternación**, definido por

$$\operatorname{Alt}(\alpha) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (\operatorname{sgn} \sigma)({}^{\sigma}\alpha).$$

Proposición 2.20. *Sea α un tensor covariante sobre un espacio vectorial de dimensión finita. Se tiene que:*

a) $\operatorname{Alt}(\alpha)$ *es un tensor alternante.*

b) $\mathrm{Alt}(\alpha) = \alpha$ *si y solo si* α *es alternante.*

Demostración. Ver [4, Proposition 14.3]. □

El siguiente concepto resulta útil para los análisis posteriores sobre tensores alternantes. Sea k un entero positivo, una k-upla ordenada $I = (i_1, \dots, i_k)$ de enteros positivos es llamado **multi-índice de longitud k**. En cambio, para $\sigma \in S_k$, definimos el multi-índice I_σ por

$$I_\sigma = (i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(k)}).$$

Sean V un n-espacio vectorial y $\{\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n\}$ una base de V^*. Para cada multi-índice $I = (i_1, \dots, i_k)$ de longitud k, tal que, $1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n$, se define el k-tensor covariante ε^I (o $\varepsilon^{i_1 \dots i_k}$) por

$$\varepsilon^I(v_1, \dots, v_k) = \det \begin{pmatrix} \varepsilon^{i_1}(v_1) & \cdots & \varepsilon^{i_1}(v_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon^{i_k}(v_1) & \cdots & \varepsilon^{i_k}(v_k) \end{pmatrix},$$

para cada $v_1, \dots, v_k \in V$. Notemos que ε^I es un tensor alternante, el cual se lo conoce como **tensor alternante elemental** (o **k-covector elemental**).

Un multi-índice $I = (i_1, \dots, i_k)$ se dice que es **creciente** cuando $i_1 < \cdots < i_k$. Se usa el símbolo $\sum_I'$ para expresar una suma que se realiza sobre todos los multi-índices crecientes de la misma longitud; en otras palabras, los símbolos $\sum_I'$ y $\sum_{\{I: i_1 < \cdots < i_k\}}$ poseen el mismo significado. Por ejemplo, tenemos la siguiente igualdad

$$\sum_I{}' \alpha_I \varepsilon^I = \sum_{\{I: i_1 < \cdots < i_k\}} \alpha_I \varepsilon^I,$$

para escalares α_I y tensores ε^I.

Proposición 2.21. *Sea V un espacio vectorial de dimesión n. Sea $\{\varepsilon^i\}$ una base para V^*. Para cada entero $k \leq n$, la colección de k-covectores*

$$\{\varepsilon^I : I \textit{ es un multi-índice creciente de longitud } k\}$$

es una base para $\Lambda^k(V^*)$. Por tanto, la dimensión de este espacio es

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Cuando $k > n$ la dimensión de $\Lambda^k(V^*)$ es cero.

Demostración. Ver [4, Proposition 14.8]. □

Producto Exterior

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Sean $\omega \in \Lambda^k(V^*)$ y $\eta \in \Lambda^l(V^*)$, se define el **producto exterior** (también llamado **producto de cuña**), como el $(k+l)$-covector:

$$\omega \wedge \eta = \frac{(k+l)!}{k!l!} \operatorname{Alt}(\omega \otimes \eta).$$

Proposición 2.22. *Sean $\omega, \omega', \eta, \eta'$ y ξ tensores alternantes sobre un espacio vectorial V. Se satisface lo siguiente:*

a) Bilinealidad: Para cada $a, a' \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$(a\omega + a'\omega') \wedge \eta = a(\omega \wedge \eta) + a'(\omega' \wedge \eta),$$
$$\eta \wedge (a\omega + a'\omega') = a(\eta \wedge \omega) + a'(\eta \wedge \omega').$$

b) Asociatividad: Se tiene que

$$\omega \wedge (\eta \wedge \xi) = (\omega \wedge \eta) \wedge \xi.$$

c) Anticonmutatividad: Para $\omega \in \Lambda^k(V^*)$ y $\eta \in \Lambda^l(V^*)$ se satisface que

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{kl}(\eta \wedge \omega).$$

d) Para cualquier $\{\varepsilon^i\}$ base de V^* y multi-índice $I = (i_1, \ldots, i_k)$ de longitud $k \leq n$, se tiene que

$$\varepsilon^{i_1} \wedge \cdots \wedge \varepsilon^{i_k} = \varepsilon^{i_1 \ldots i_k} = \varepsilon^I.$$

Demostración. Ver [4, Proposition 14.11]. □

Gracias al último literal de la Proposición 2.22 y a la Proposición 2.21 establecemos el siguiente resultado.

Corolario 2.3. *Sea V un espacio vectorial de dimesión n. Sea $\{\varepsilon^i\}$ una base para*

V^*. Para cada entero $k \leq n$ la colección de k-covectores

$$\{\varepsilon^{i_1} \wedge \cdots \wedge \varepsilon^{i_k} : 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n\}$$

es una base para $\Lambda^k(V^*)$.

Formas Diferenciables en Variedades

Sea M una n-variedad diferenciable, con o sin frontera. Recordemos que T^kT^*M es el fibrado de los k-tensores covariantes en M, el cual es una fibrado tangente. Además, recordemos que una sección de T^kT^*M se denomina campo tensorial.

Definimos el subconjunto de T^kT^*M, considerando los conjuntos de los k-tensores alternantes $\Lambda^k(T_p^*M)$, denotado por Λ^kT^*M, como

$$\Lambda^kT^*M = \bigsqcup_{p \in M} \Lambda^k(T_p^*M) = \{(\alpha, p) : p \in M, \alpha \in \Lambda^k(T_p^*M)\}.$$

Este conjunto es un fibrado vectorial suave de rango $\binom{n}{k}$, y una sección de este conjunto es llamada ***k*-forma diferenciable** (o ***k*-forma**); es decir, una k-forma diferenciable no es más que un campo tensorial, el cual, a cada $p \in M$ le asocia un k-tensor alternante. Una k-forma es **suave** cuando es una sección suave de Λ^kT^*M. Sea ω una k-forma, se escribe ω_p en lugar de $\omega(p)$, para cada $p \in M$.

El soporte de una k-forma ω sobre M es el conjunto

$$\operatorname{spt}(\omega) = \overline{\{p \in M : \omega_p \neq 0\}}.$$

Se dice que ω es a **soporte compacto** cuando $\operatorname{spt}(\omega)$ es un conjunto compacto.

Sean ω una k-forma y η una l-forma, se define el **producto exterior (de formas)** como la $(k+l)$-forma $\omega \wedge \eta : M \to \Lambda^{k+l}T^*M$, dada por

$$(\omega \wedge \eta)_p = \omega_p \wedge \eta_p,$$

para cada $p \in M$. Notemos que una 0-forma (que a su vez es un campo 0-tensorial) no es más que una función real-valuada; para una k-forma ω, la expresión $f \wedge \omega$ se interpreta como el producto $f\omega$, dado por

$$(f\omega)_p = f(p)\omega_p,$$

para todo $p \in M$.

Sea $(U, (x^i))$ una carta suave de M. Recordemos que el conjunto $\{dx^i\}$ es un cofibrado local sobre U, es decir, el conjunto $\{dx^i|_p\}$ es una base de T_p^*M, para cada $p \in U$. Por tanto, por el Corolario 2.3, el conjunto

$$\{dx^{i_1}|_p \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}|_p : 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n\}$$

es una base de $\Lambda^k(T_p^*M)$, para cada $p \in U$. Por tanto, una k-forma ω puede escribirse como

$$\omega_p = \sum_I{}' \omega_I(p) dx^{i_1}|_p \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}|_p = \sum_I{}' \omega_I(p) dx^I|_p,$$

para todo $p \in U$.

En resumen, sobre una carta suave $(U, (x^i))$, una k-forma ω pude escribirse como

$$\omega = \sum_I{}' \omega_I dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} = \sum_I{}' \omega_I dx^I,$$

donde cada $\omega_I : U \to \mathbb{R}$ es una función continua que viene caracterizada por

$$\omega_I(p) = \omega_p \left(\left.\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\right|_p, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x^{i_k}}\right|_p \right),$$

para todo $p \in U$. En consecuencia, ω es una k-forma suave si y solo si cada función ω_I es suave.

Sea $F : M \to N$ un mapa suave entre dos variedades diferenciables, con o sin frontera. Sea ω una k-forma sobre N; el pullback $F^*\omega$ es una k-forma sobre M. Recordemos que el pullback esta definido por

$$(F^*\omega)_p(v_1, \ldots, v_k) = \omega_{F(p)}(dF_p(v_1), \ldots, dF_p(v_k)),$$

para todo $p \in M$ y $v_1, \ldots, v_k \in T_pM$.

Lema 2.1. *Sea $F : M \to N$ un mapa suave entre dos variedades diferenciables, con o sin frontera. Se tiene que:*

a) *Para cualquier k-forma ω sobre N y cualquier l-forma η sobre N se satisface*

$$F^*(\omega \wedge \eta) = (F^*\omega) \wedge (F^*\eta).$$

b) *Sea $(V, (y^i))$ una carta suave de N. Consideremos una k-forma diferenciable*

$\omega = \sum_I' \omega_I dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_k}$ *sobre* N*, se tiene que*

$$F^*\left(\sum_I{}' \omega_I dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_k}\right) = \sum_I{}' (\omega_I \circ F) d(y^{i_1} \circ F) \wedge \cdots \wedge d(y^{i_k} \circ F).$$

Demostración. Ver [4, Lemma 14.16]. □

Proposición 2.23. *Sea* $F : M \to N$ *un mapa suave entre dos* n*-variedades diferenciables, con o sin frontera. Sean* $(U, (x^i))$ *y* $(V, (y^i))$ *cartas suaves sobre* M *y* N*, respectivamente, y* u *una función real-valuada y continua sobre* V*. Se tiene lo siguiente sobre* $U \cap F^{-1}(V)$*:*

$$F^*(u dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n) = (u \circ F)(\det DF) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n,$$

donde DF *es la matriz Jacobiana de* F *respecto a las cartas suaves* $(U, (x^i))$ *y* $(V, (y^i))$ *(ver Sección 2.3).*

Demostración. Ver [4, Proposition 14.20]. □

Diferencial Exterior

Sea M una n-variedad diferenciable, con o sin frontera. Al conjunto de las k-formas diferenciables suaves sobre M lo denotamos por $\Omega^k(M)$.

Consideremos $\omega = \sum_J' \omega_J dx^J$ una k-forma suave sobre un subconjunto abierto U de $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{H}^n$. La **derivada exterior de ω**, denotada por $d\omega$, es una $(k+1)$-forma sobre U, definida por

$$d\omega = d\left(\sum_J{}' \omega_J dx^J\right) = \sum_J{}' d\omega_J \wedge dx^J, \tag{2.4}$$

donde $d\omega_J$ es el diferencial de la función $\omega_J : U \to \mathbb{R}$, el cual se define en la Sección 2.7. Como U es subconjunto de $\mathbb{R}^n$, este diferencial coincide con el diferencial total, por tanto, podemos escribir la derivada exterior de una manera más explícita como

$$d\omega = d\left(\sum_J{}' \omega_J dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k}\right) = \sum_J{}' \sum_i \frac{\partial \omega_J}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k}.$$

Cabe aclarar que, gracias a la estructura estándar de $\mathbb{R}^n$, la igualdad anterior es válida en cualquier punto de U.

Este concepto se puede extender sobre variedades diferenciables en general. El **diferencial exterior** es un operador $d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ definido por

$$(d\omega)_p = [\varphi^* d((\varphi^{-1})^* \omega)]_p,$$

para cada $\omega \in \Omega^k(M)$ y cada $p \in M$, con (U, φ) una carta suave cuyo dominio contiene a p. La expresión $d((\varphi^{-1})^*\omega)$ es la derivada exterior de $(\varphi^{-1})^*\omega$ definida como (2.4).

Podemos escribir el diferencial exterior de manera más compacta y clara obviando el punto, así

$$d\omega = \varphi^* d((\varphi^{-1})^* \omega). \tag{2.5}$$

Proposición 2.24. *Sea M una variedad diferenciable, con o sin frontera. Para cada entero no negativo k, el diferencial exterior $d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ está bien definido y es el único operador que satisface las siguientes propiedades:*

i) *d es lineal sobre $\mathbb{R}$.*

ii) *Si $\omega \in \Omega^k(M)$ y $\eta \in \Omega^k(M)$, entonces,*

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta.$$

iii) *$d \circ d = 0$.*

iv) *Para cada $f \in \Omega^0(M) = C^\infty(M)$, el diferencial exterior en f, df, coincide con el diferencial de f.*

Demostración. Ver [4, Theorem 14.24]. □

Gracias al resultado anterior se establece lo siguiente.

Corolario 2.4. *Sea M una variedad diferenciable, con o sin frontera. Consideremos $f \in C^\infty(M)$ y $\omega \in \Omega^k(M)$, se tiene que*

$$d(f\omega) = df \wedge \omega + f d\omega.$$

Además, tenemos lo siguiente respecto al pullback sobre variedades diferenciables.

Proposición 2.25. *Sean M y N variedades diferenciables, con o sin frontera. Sea*

$F : M \to N$ un mapa suave, se tiene que, para cada k el pullback $F^* : \Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$ conmuta con d, es decir, para todo $\omega \in \Omega^k(N)$, se satisface

$$F^*(d\omega) = d(F^*\omega).$$

Demostración. Ver [4, Proposition 14.26]. □

2.10. Orientaciones

Orientaciones sobre Espacios Vectoriales

Sea V un espacio vectorial de dimensión $n \geq 1$. Consideremos $B = \{E_1, \dots, E_n\}$ y $\widetilde{B} = \{\widetilde{E}_1, \dots, \widetilde{E}_n\}$ bases ordenadas para V. Estas bases se dicen **consistentemente orientadas** si la matriz de cambio de base (B_i^j), respecto a las bases B y $\widetilde{B}$, tiene determinante positivo. Recordemos que esta matriz es tal que

$$E_i = \sum_{j=1}^{n} B_i^j \widetilde{E}_j,$$

para cada $i = 1, \dots, n$.

Para dos bases ordenadas B y $\widetilde{B}$ de V, definimos la relación

$$B \sim \widetilde{B},$$

si y solo si B y $\widetilde{B}$ son consistentemente orientadas. No es difícil verificar que $\sim$ es una relación de equivalencia sobre el conjunto de las bases ordenadas de V. Además, notemos que existen únicamente dos clases de equivalencia. Para ver esto último consideremos las bases $B = \{E_1, \dots, E_n\}$ y $C = \{-E_1, \dots, E_n\}$. Sea $\widetilde{B} = \{\widetilde{E}_1, \dots, \widetilde{E}_n\}$ otra base de V. Mostremos que $\widetilde{B} \sim C$ o $\widetilde{B} \sim B$.

Supongamos que $\widetilde{B} \nsim B$ y verifiquemos que $\widetilde{B} \sim C$. Sea (B_i^j) la matriz de cambio de base respecto a las bases $\widetilde{B}$ y B, por tanto,

$$\widetilde{E_i} = \sum_{j=1}^{n} B_i^j E_j,$$

para cada $i = 1, \ldots, n$. En particular

$$\widetilde{E_1} = \sum_{j=1}^{n} (-B_1^j)(-E_1),$$

y

$$\widetilde{E_i} = \sum_{j=1}^{n} B_i^j E_j,$$

para $i = 2, \ldots, n$. Por tanto, la matriz de cambio de base (C_i^j), respecto a las bases $\widetilde{B}$ y C, está definida por

$$C_i^j = \begin{cases} -B_i^j, & i = 1, \\ B_i^j, & i \geq 2. \end{cases}$$

En otras palabras, la matriz (C_i^j) es la matriz (B_i^j) con los elementos de la primera fila con signo negativo. Ahora, como $\widetilde{B} \nsim B$, se tiene que $\det(B_i^j) < 0$ (no es cero pues esta matriz es no singular), de donde,

$$\det(C_i^j) = -\det(B_i^j) > 0,$$

así, $\widetilde{B} \sim C$.

Esta observación nos permite obtener el siguiente resultado.

Proposición 2.26. *Sea V un espacio vectorial de dimensión $n \geq 1$ y $\{E_1, \ldots, E_n\}$ una base ordenada de V. La relación $\sim$ definida sobre el espacio de bases ordenadas es una relación de equivalencia y existen únicamente dos clases de equivalencia. Además, estas clases de equivalencia son las que tienen por representante a las bases $\{E_1, \ldots, E_n\}$ y $\{-E_1, \ldots, E_n\}$.*

Sea V un espacio vectorial de dimensión $n \geq 1$. Una **orientación para *V*** es una clase de equivalencia sobre las bases ordenadas. Gracias a la Proposición 2.26 existen únicamente dos orientaciones para V. Sea $\{E_1, \ldots, E_n\}$ una base ordenada de V; la orientación que esta base determina para V es denotada por

$$[E_1, \ldots, E_n],$$

mientras que la orientación opuesta es denotada por

$$-[E_1, \ldots, E_n].$$

Por tanto, gracias a la Proposición 2.26, se tiene la igualdad

$$-[E_1, \dots, E_n] = [-E_1, \dots, E_n].$$

Además, gracias al hecho de que al cambiar de lugar un elemento de la base, una fila de la matriz asociada también es cambiada, tenemos lo siguiente

$$[E_1, \dots, E_i, E_{i+1}, \dots, E_n] = [-E_1, \dots, E_{i+1}, E_i, \dots, E_n] = -[E_1, \dots, E_{i+1}, E_i, \dots, E_n].$$

Un espacio vectorial V es **orientado** cuando elegimos una orientación para el mismo. Una base ordenada para este espacio vectorial que pertenezca a la orientación elegida (que no es más que una clase de equivalencia) se dice que es **positivamente orientada**. En cambio, cuando esta base pertenece a la orientación opuesta se dice que es **negativamente orientada**. En caso de que la base este orientada positivamente, decimos simplemente que está orientada.

En particular, la orientación $[e_1, \dots, e_n]$ de $\mathbb{R}^n$, determinada por la base canónica se la conoce como **orientación estándar** de $\mathbb{R}^n$.

Cuando el espacio vectorial V tiene dimensión nula definimos la orientación de V como la elección de dos números: 1 o -1.

Orientaciones sobre Variedades

Sea M una n-variedad diferenciable, con o sin frontera. Definimos una **orientación puntual en M** como la elección de una orientación para cada espacio tangente de M. Sea $\{E_i\}$ un fibrado local de TM; decimos que $\{E_i\}$ es **(positivamente) orientado** si $\{E_1|_p, \dots, E_n|_p\}$ es una base positivamente orientada de T_pM, para cada $p \in U$. Un fibrado **negativamente orientado** se define de manera similar. Una orientación puntual se dice **continua** si cada punto en M esta en el dominio de un fibrado local orientado. Una **orientación de M** es una orientación puntual continua. Decimos que M es **orientable** si existe una orientación para esta variedad, caso contrario se dirá que M es **no orientable**.

Una **variedad orientada**, positiva o negativamente, es el par $(M, \mathcal{O})$, donde M es una variedad diferenciable orientable y $\mathcal{O}$ es la orientación, positiva o negativa, elegida para M. Cuando M es una variedad diferenciable con frontera decimos que el par $(M, \mathcal{O})$ es una **variedad diferenciable orientada con frontera**. Cuando no es necesario hacer énfasis en la orientación $\mathcal{O}$, decimos “M es una variedad orientada".

Cuando la dimensión de M es cero, la orientación puntual en M no es más que la elección del número 1 o -1. Esta orientación es continua, pues la única carta suave de M es (M, φ), donde $\varphi = 0$. Por tanto, M es una variedad diferenciable orientada.

Una carta suave $(U, (x^i))$ de una variedad diferenciable orientada, con o sin frontera, se dice que es **(positivamente) orientada** si el fibrado local $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \right\}$ es positivamente orientado, en cambio, la carta se dirá que es **negativamente orientada** cuando este fibrado es negativamente orientado.

Sean M y N dos variedades diferenciables orientadas, con o sin frontera. Consideramos el difeomorfismo $F : M \to N$. Decimos que F **preserva orientaciones** si para cada $p \in M$, y cada base orientada $\{E_i\}$ de T_pM, el conjunto $\{dF_p(E_i)\}$ es una base orientada de $T_{F(p)}N$, o equivalentemente, si estos conjuntos tienen la misma orientación (positiva o negativa). Cuando el conjunto $\{dF_p(E_i)\}$ es una base negativamente orientada de $T_{F(p)}N$, F se dirá que **revierte orientaciones**, o equivalentemente, si estos conjuntos tienen diferente orientación (una positiva y la otra negativa).
Cuando M y N tienen dimensión cero, se dice que F preserva orientaciones si el punto p y $F(p)$ tienen la misma orientación, mientras que F se dice que revierte orientaciones si el punto p y $F(p)$ tiene orientaciones opuestas. Además, para cada $p \in M$, consideremos la base coordenada $\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \right\}$, respecto a una carta suave $(U, (x^i))$ de M, tal que $p \in U$. Supongamos que la base $\left\{ dF_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \right) \right\}$, para $T_{F(p)}N$, tiene la misma orientación que la base coordenada. Sea $\{E_i\}$ otra base para T_pM con la misma orientación de la base coordenada. Gracias a la linealidad de dF_p tenemos que

$$dF_p(E_i) = \sum_j B_i^j dF_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p \right),$$

donde (B_i^j) es la matriz de cambio de base respecto a $\{E_i\}$ y $\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \right\}$. Como estas bases tienen la misma orientación se tiene que $\det(B_i^j) > 0$, por tanto, las bases $\{dF_p(E_i)\}$ y $\left\{ dF_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \right) \right\}$ tienen la misma orientación.

Todo el análisis anterior se lo puede resumir en el siguiente resultado.

Proposición 2.27. *Sean M y N dos variedades diferenciables orientadas, con o sin frontera, y $F : M \to N$ un difeomorfismo. Se tiene que F preserva (o revierte) orientaciones si y solo si F preserva (o revierte) la orientación de la base coordenada respecto a cualquier carta suave de M.*

Sean M, N y F como en la proposición anterior. Para cada $p \in M$ consideremos cartas suaves $(U, (x^i))$ y $(V, (y^j))$ de M y N, respectivamente, tales que $p \in U$ y $F(p) \in V$. Recordemos que la fórmula (2.2) establece que la matriz asociada a dF_p, respecto a las bases coordenadas, es la matriz Jacobiana de F en p, es decir

$$dF_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\right) = \sum_j \frac{\partial F^j}{\partial x^i}(p) \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_{F(p)},$$

por tanto, la orientación de la base $\left\{dF_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\right)\right\}$ es la misma que la de la base $\left\{\left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_p\right\}$ cuando el determinante de la matriz Jacobiana en p es positivo, mientras que estas orientaciones son opuestas cuando el determinante de la matriz Jacobiana en p es negativo. Usando esta observación y la Proposición 2.27 tenemos lo siguiente.

Proposición 2.28. *Sean M y N dos variedades diferenciables orientadas, con o sin frontera, y $F : M \to N$ un difeomorfismo. Se tiene que F preserva (o revierte) orientaciones si y solo si el determinante del Jacobiano DF, es positivo (o negativo) para cualquier par de cartas suaves orientadas de M y N.*

Orientaciones de Frontera

Sean M una n-variedad diferenciables, con o sin frontera, y $S \subseteq M$ una subvariedad incrustada de M, con o sin frontera. Recordemos que el mapa $N : S \to TM$ es un campo vectorial a lo largo de S cuando N es continuo y $N_p \in T_pM$, para todo $p \in S$. Además, recordemos que S es una hipersuperficie incrustada cuando la dimensión de S es $n - 1$.

Proposición 2.29. *Sean M una n-variedad diferenciable orientada, con o sin frontera, y D una n-subvariedad incrustada de M, con o sin frontera. Se tiene que la orientación de M se restringe a una orientación de D; es decir, la orientación puntual y continua de M, considerando únicamente los puntos en D, define una* *orientación puntual y continua para S.*

Demostración. Ver [4, Proposition 15.11]. $\square$

Proposición 2.30. *Sean M una n-variedad diferenciable orientada, con o sin frontera, S una hipersuperficie incrustada de M, con o sin frontera, y N un campo vectorial a lo largo de S tal que $N_p \notin T_pS$, para cada $p \in S$. Se tiene que S posee una única orientación, tal que, para todo $p \in S$, la base $\{E_1, \dots, E_{n-1}\}$ es orientada en T_pS si y solo si la base $\{N_p, E_1, \dots, E_{n-1}\}$ es orientada en T_pM.*

Demostración. Ver [4, Proposition 15.21]. $\square$

Sean M una n-variedad diferenciable orientada con frontera. Gracias al Teorema 2.3 sabemos que la frontera ∂M es una subvariedad incrustada de M. Un campo vectorial a lo largo de ∂M, llámese N, se dice que **apunta hacia afuera** cuando $N_p \in T_pM$ es un vector que apunta hacia afuera, para cada $p \in \partial M$. En otras palabras, para cada $p \in \partial M$, $N_p \notin T_p\partial M$ (con la identificación analizada en la Sección 2.4) y existen $\varepsilon > 0$ y una curva $\gamma : (-\varepsilon, 0] \to M$, tales que, $\gamma(0) = p$ y $\gamma'(0) = N_p$.

Gracias a la Proposición 2.30 tenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.31. *Sean M una n-variedad diferenciable orientada con frontera. Se tiene que ∂M es orientable, y todos los campos vectoriales a lo largo de ∂M, que apuntan hacia afuera, determinan la misma orientación de ∂M. Es decir, para dos campos vectoriales N y $\widetilde{N}$, que apuntan hacia afuera, se tiene que, para todo punto $p \in \partial M$ y toda carta suave $(U, (x^i))$ de M, con $p \in U$, las bases $\left\{ N_p, \left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p, \dots, \left.\frac{\partial}{\partial x^{n-1}}\right|_p \right\}$ y $\left\{ \widetilde{N}_p, \left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p, \dots, \left.\frac{\partial}{\partial x^{n-1}}\right|_p \right\}$ de T_pM, tienen la misma orientación.*

Demostración. Ver [4, Proposition 15.24]. $\square$

La orientación de ∂M dada en la proposición anterior es la misma orientación dada por la Proposición 2.30. A esta orientación sobre ∂M se la conoce como **orientación inducida** u **orientación de Stokes**.

Ejemplo 2.4 (Orientación de $\partial\mathbb{H}^n$). Gracias a la Proposición 2.29 sabemos que $\mathbb{H}^n$ tiene una orientación heredada de $\mathbb{R}^n$. Consideremos (x^i) las coordenadas estándar de $\mathbb{R}^n$ y el campo vectorial $-\frac{\partial}{\partial x^n} : \partial\mathbb{H}^n \to T\mathbb{H}^n$, el cual apunta hacia afuera a lo largo de $\partial\mathbb{H}^n$. Dado cualquier $p \in \partial\mathbb{H}^n$, gracias a la Proposición 2.30 la base coordenada $\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x^{n-1}}\right|_p \right\}$ es orientada en $T_p\partial\mathbb{H}^n$ si y solo si la base $\left\{ -\left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_p, \left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x^{n-1}}\right|_p \right\}$ es orientada en $T_p\mathbb{H}^n$. Notemos que

$$\begin{aligned}\left[-\left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_p, \left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x^{n-1}}\right|_p \right] &= -\left[\left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_p, \left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x^{n-1}}\right|_p \right] \\ &= (-1)^n \left[\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x^{n-1}}\right|_p, \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_p \right],\end{aligned}$$

por tanto, la base estándar de $\partial\mathbb{H}^n$ es positivamente (negativamente) orientada si y solo si n es par (impar).

2.11. Dominios de Integración

Un **rectángulo cerrado** en $\mathbb{R}^n$ es un conjunto de la forma $[a^1, b^1] \times \cdots \times [a^n, b^n]$, para números reales $a^i < b^i$, con $i = 1, \ldots, n$. En cambio, un **rectángulo abierto** es un conjunto de la forma $(a^1, b^1) \times \cdots \times (a^n, b^n)$, para números reales $a^i < b^i$, con $i = 1, \ldots, n$.

Sea A un rectángulo (abierto o cerrado), definimos el **volumen de** $\boldsymbol{A}$, denotado por $\mathrm{Vol}(A)$, como el producto de las diferencias del extremo derecho y el extremo izquierdo de cada intervalo. Por ejemplo, si $A = [a^1, b^1] \times \cdots \times [a^n, b^n]$, entonces,

$$\mathrm{Vol}(A) = \prod_{i=1}^{n} (b^i - a^i).$$

Si $A = (a^1, b^1) \times \cdots \times (a^n, b^n)$ el volumen de A es el mismo dado por la fórmula anterior.

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $f : A \to \mathbb{R}$ una función integrable (en el sentido de Lebesgue), la integral de f sobre A la denotamos por

$$\int_A f dV,$$

donde V es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$.

Un conjunto $X \subseteq \mathbb{R}^n$ se dice que es de **medida nula** si para cada $\delta > 0$, existe un recubrimiento numerable $\{C_i\}$ de rectángulos abiertos para X, tal que,

$\sum_i \mathrm{Vol}(C_i) < \delta$.

Un conjunto $D \subseteq \mathbb{R}^n$ es llamado **dominio de integración** si D es acotado y ∂D (en el contexto de la topología de $\mathbb{R}^n$) es un conjunto de medida nula.

Proposición 2.32. *Sea U un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{H}^n$, y $K \subseteq U$ un conjunto compacto en $\mathbb{R}^n$. Se tiene que existe un dominio de integración abierto D tal que $K \subseteq D \subseteq \overline{D} \subseteq U$.*

Demostración. Ver [4, Lemma 16.2]. □

2.12. Integración sobre Variedades y el Teorema de Stokes

En lo que sigue, usaremos la estructura estándar en $\mathbb{R}^n$. Recordemos que un dominio de integración sobre $\mathbb{R}^n$ es un subconjunto acotado cuya frontera es de medida nula. Sea $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un dominio de integración y ω una n-forma en $\overline{D}$. Gracias al Corolario 2.3, y al hecho de que el único multi-índice creciente de longitud n, con respecto al espacio vectorial $\mathbb{R}^n$, es $\{1, \dots, n\}$, se sigue que

$$\omega = f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n,$$

donde $f : \overline{D} \to \mathbb{R}^n$ es continua. Definimos la ***integral de ω sobre D*** como

$$\int_D \omega = \int_D f dV. \tag{2.6}$$

De manera más general, sea U un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{H}^n$, y ω una n-forma en U a soporte compacto. Definimos la integral de ω sobre U como

$$\int_U \omega = \int_D \omega, \tag{2.7}$$

donde D es cualquier dominio de integración contenido en $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{H}^n$, tal que, el soporte de ω esta en D y a ω la hemos extendido por cero en el complemento del soporte, así el término $\int_D \omega$ tiene sentido tal como vimos en (2.6).

Antes de verificar que esta definición no depende de la elección del dominio D, vamos a estudiar el siguiente resultado.

Proposición 2.33. *Sean M una n-variedad diferenciable y ω una k-forma sobre el* *dominio coordenado de una carta suave* $(U, (x^i))$*, tal que,* $\omega = \sum'_I \omega_I dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$*, con* $\omega_I : U \to \mathbb{R}$ *funciones continuas. Se tiene que*

$$\operatorname{spt}(\omega) = \bigcup_I{}' \operatorname{spt}(\omega_I),$$

donde la expresión de la derecha es la unión finita, sobre los multi-índices crecientes de longitud k*, de los soportes de* ω_I*.*

Demostración. Recordemos que, para cada $p \in U$ y cada multi-índice I, se tiene que

$$\omega_I(p) = \omega_p \left(\left.\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\right|_p, \cdots, \left.\frac{\partial}{\partial x^{i_k}}\right|_p \right). \tag{2.8}$$

Notemos que, dado cualquier $p \in U$ tal que $\omega_p = 0$, se tiene que

$$\omega_p \left(\left.\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\right|_p, \cdots, \left.\frac{\partial}{\partial x^{i_k}}\right|_p \right) = 0,$$

lo cual, junto con (2.8), nos permite concluir que

$$\omega_I(p) = 0,$$

para todo multi-índice I.

Con esto hemos probado que $\{p \in U : \omega_p = 0\} \subseteq \bigcap_I{}' \{p \in U : \omega_I(p) = 0\}$, donde la expresión de la derecha es una intersección finita, sobre los multi-índices crecientes de longitud k. Por tanto, $\bigcup_I{}' \operatorname{spt}(\omega_I) \subseteq \operatorname{spt}(\omega)$.

Recíprocamente, sea $p \in U$ tal que $\omega_I(p) = 0$, para todo multi-índice I. De donde

$$\omega_p = \sum_I{}' \omega_I(p)(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k})_p = 0.$$

Con esto hemos probado que $\bigcap_I{}' \{p \in U : \omega_I(p) = 0\} \subseteq \{p \in U : \omega_p = 0\}$, por tanto, $\operatorname{spt}(\omega) \subseteq \bigcup_I{}' \operatorname{spt}(\omega_I)$. □

En particular concluimos lo siguiente.

Proposición 2.34. *Sean* M *una* n*-variedad diferenciable y* ω *una* n*-forma sobre el dominio coordenado de una carta suave* $(U, (x^i))$*, tal que,* $\omega = f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$*, con*

$f : U \to \mathbb{R}$ continua. Se tiene que

$$\operatorname{spt}(\omega) = \operatorname{spt}(f).$$

Regrsemos al contexto en el cual presentamos (2.7). Sean D y E dos dominios de integración, tales que, el soporte de ω está en D y E. Por la Proposición 2.34, concluimos que f es a soporte compacto y, además, este conjunto está contenido en D y E, pues el soporte ω lo está. Por (2.7) tenemos que

$$\begin{aligned}\int_D \omega &= \int_D f dV \\ &= \int_{\operatorname{spt}(f)} f dV \\ &= \int_E f dV \\ &= \int_E \omega.\end{aligned}$$

Esta última identidad nos indica que, la integral $\int_U \omega$ no depende del dominio escogido y, por tanto, está bien definida.

Gracias a esta observación, obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 2.5. *Sea ω una n-forma sobre un subconjunto abierto U de $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{H}^n$ a soporte compacto, tal que*

$$\operatorname{spt}(\omega) \subseteq V,$$

con $V \subseteq U$ abierto de $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{H}^n$. Se tiene que

$$\int_U \omega = \int_V \omega,$$

donde la integral del lado derecho corresponde a la de ω restringida en V.

Un resultado bastante interesante sobre esta integral es su relación con difeomorfismos que preservan o revierten orientaciones.

Proposición 2.35. *Sean D y E dominios de integración abiertos sobre $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{H}^n$, y $G : \overline{D} \to \overline{E}$ un mapa suave tal que $G : D \to E$ es un difeomorfismo que preserva o* *revierte orientaciones. Sea ω una n-forma en $\overline{E}$, se tiene que*

$$\int_D G^*\omega = \begin{cases} \displaystyle\int_E \omega, & \textit{cuando } G \textit{ preserva orientaciones,} \\ \displaystyle -\int_E \omega, & \textit{cuando } G \textit{ revierte orientaciones.} \end{cases}$$

Demostración. Sean $(y^1, \cdots, y^n)$ las coordenadas estándar en E, y sean $(x^1, \ldots, x^n)$ las coordenadas estándar en D. Supongamos que G preserva orientaciones. Puesto que $\omega = f dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n$, por el Teorema de Cambio de Variables, la Proposición 2.23 y la Proposición 2.28, se sigue que

$$\begin{aligned} \int_E \omega &= \int_E f dV \\ &= \int_D (f \circ G)|\det DG| dV \\ &= \int_D (f \circ G)(\det DG) dV \\ &= \int_D (f \circ G)(\det DG) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \\ &= \int_D G^*\omega. \end{aligned}$$

En cambio, cuando G revierte orientaciones tenemos que $|\det DG| = -\det DG$, por tanto, en los cálculos anteriores aparece un signo negativo, y así

$$\int_E \omega = -\int_D G^*\omega,$$

lo cual concluye la demostración. □

Para los análisis siguientes consideramos el resultado posterior.

Proposición 2.36. *Sean M y N n-variedades diferenciables, con o sin frontera. Sean $G : M \to N$ un mapa suave y abierto tal que $G : M \to G(M)$ es un difeomorfismo, y ω una k-forma sobre N. Se tiene que*

$$\operatorname{spt}(G^*\omega) = G^{-1}(\operatorname{spt}(\omega))$$

localmente. Es decir, la igualdad anterior se cumple para ciertas cartas suaves de M y N.

Demostración. Como ω es una k-forma vemos que, para una carta suave $(V, (x^i))$

de N, $\omega = \sum_I' \omega_I dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$, con $\omega_I : V \to \mathbb{R}$ funciones continua. Gracias al Lema 2.1 tenemos que

$$G^*\omega = \sum_I{}' (\omega_I \circ G) d(x^{i_1} \circ G) \wedge \cdots \wedge d(x^{i_k} \circ G).$$

Ahora, gracias a que G es un difeomorfismo sobre su imagen, se sigue que la carta $(G^{-1}(V), (x^i \circ G))$ es una carta suave para M. En efecto, al ser $(x^i \circ G)$ una composición de difeomorfismos, esta será suavemente compatible con cualquier carta del atlas maximal de M, así la carta $(G^{-1}(V), (x^i \circ G))$ estará en la estructura suave de M.

Por lo anterior, podemos tomar $(x^i \circ G)$ como coordenadas locales para M. Notemos que, en este caso, $\omega_I \circ G : G^{-1}(V) \to \mathbb{R}$, para cada multi-índice I. De este hecho y gracias a la Proposición 2.33, basta con probar que

$$\bigcup_I{}' \operatorname{spt}(\omega_I \circ G) = G^{-1}\left(\bigcup_I{}' \operatorname{spt}(\omega_I)\right).$$

Para ello, notemos que

$$G^{-1}\left(\bigcap_I{}' \{p \in V : \omega_I(p) = 0\}\right) = \bigcap_I{}' \{p \in G^{-1}(V) : (\omega_I \circ G)(p) = 0\},$$

así

$$G^{-1}\left(\bigcup_I{}' \{p \in V : \omega_I(p) \neq 0\}\right) = \bigcup_I{}' \{p \in G^{-1}(V) : (\omega_I \circ G)(p) \neq 0\},$$

y, como G es un mapa abierto y continuo, se tiene que

$$G^{-1}\left(\bigcup_I{}' \operatorname{spt}(\omega_I)\right) = \overline{G^{-1}\left(\bigcup_I{}' \{p \in V : \omega_I(p) \neq 0\}\right)} = \bigcup_I{}' \operatorname{spt}(\omega_I \circ G).$$

□

Del resultado anterior, tenemos en particular.

Proposición 2.37. *Sean M y N n-variedades diferenciables, con o sin frontera. Sean $G : M \to N$ un mapa suave y abierto tal que $G : M \to G(M)$ es un difeomorfismo, y ω una n-forma sobre N. Se tiene que*

$$\operatorname{spt}(G^*\omega) = G^{-1}(\operatorname{spt}(\omega))$$

localmente. Es decir, la igualdad anterior se cumple para ciertas cartas suaves de M y N.

El siguiente resultado es un análogo a la Proposición 2.35 para formas a soporte compacto.

Proposición 2.38. *Sean U y V subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{H}^n$, y $G : U \to V$ un difeomorfismo que preserva o revierte orientaciones. Si ω es una n-forma a soporte compacto en V, entonces*

$$\int_V \omega = \pm \int_U G^*\omega,$$

donde el signo se toma como en la Proposición 2.35.

Demostración. Gracias a la Proposición 2.32 sabemos que existe un dominio de integración abierto E tal que

$$\operatorname{spt}(\omega) \subseteq E \subseteq \overline{E} \subseteq V.$$

Como G es un difeomorfismo, en particular, es suave y abierto, además, $G^{-1}(V) = U$. Gracias a la Proposición 2.37 tenemos que

$$\operatorname{spt}(G^*\omega) \subseteq G^{-1}(E) \subseteq G^{-1}(V) = U.$$

Más aún, el conjunto $D = G^{-1}(E)$ es un dominio de integración. En efecto, como E es acotado, D lo será también, pues G es un homeomorfismo. Además, se tiene que

$$\partial D = G^{-1}(\partial E),$$

gracias a lo cual, la medida de ∂E es cero, lo será también la medida de D.

En resumen, hemos hallado un dominio de integración D que contiene a $\operatorname{spt}(G^*\omega)$. El resultado se sigue de aplicar la proposición Proposición 2.35 a G y ω extendidas por cero en el complemento de D y E, respectivamente. $\square$

Usando los conceptos estudiados hasta ahora podemos generalizar estas integrales para variedades diferenciables arbitrarias. Sea M una n-variedad diferenciable orientada, con o sin frontera, y ω una n-forma en M. Supongamos primero que ω es a soporte compacto en el dominio de una única carta suave (U, φ), la cual está positiva o negativamente orientada. Definimos la ***integral de ω sobre***

M como:

$$\int_M \omega = \pm \int_{\varphi(U)} (\varphi^{-1})^* \omega, \tag{2.9}$$

donde el signo será positivo cuando la carta es positivamente orientada, y negativo caso contrario. Gracias a la Proposición 2.37 y al hecho de que φ es un difeomorfismo, concluimos que, $(\varphi^{-1})^*\omega$ es a soporte compacto en $\varphi(U)$. Por tanto, el lado derecho corresponde a la integral que definimos en (2.7).

A continuación, vamos a demostrar que este concepto de integral está bien definido.

Proposición 2.39. *Sea ω como en (2.9), la integral $\int_M \omega$ no depende de la elección de la carta suave que contiene al soporte de ω.*

Demostración. Sean (U, φ) y $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$, dos cartas suaves tales que $\mathrm{spt}(\omega) \subseteq U$ y $\mathrm{spt}(\omega) \subseteq \tilde{U}$. Sean (x^i) y $(\tilde{x}^i)$ las coordenadas de (U, φ) y $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$, respectivamente.

Supongamos, primero, que ambas cartas son positivamente (o negativamente) orientadas. Notemos que el mapa $\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}$ es un difeomorfismo que preserva orientaciones de $\varphi(U \cap \tilde{U})$ hacía $\tilde{\varphi}(U \cap \tilde{U})$.
En efecto, gracias a la fórmula de cambio de coordenadas (2.3), podemos ver que las componentes de la matriz Jacobiana de $\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}$ satisfacen la identidad

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p = \sum_j \frac{\partial(\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1})^j}{\partial x^i}(\varphi(p)) \left.\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j}\right|_p$$

para cada $p \in U \cap \tilde{U}$.
Como $\varphi(U \cap \tilde{U})$ y $\tilde{\varphi}(U \cap \tilde{U})$ son subvariedades abiertas en $\mathbb{R}^n$, las únicas cartas suaves para éstas son $(\varphi(U \cap \tilde{U}), I_{\varphi(U \cap \tilde{U})})$ y $(\tilde{\varphi}(U \cap \tilde{U}), I_{\tilde{\varphi}(U \cap \tilde{U})})$, respectivamente. Así, gracias a la Proposición 2.28, basta ver el signo del determinante de la matriz Jacobiana en $\varphi(p)$ para estas únicas cartas suaves.
Puesto que (U, φ) y $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ tienen la misma orientación, los fibrados locales en cada punto pertenecen a la misma clase de equivalencia en su respectivo espacio tangente, de la igualdad anterior y la definición de la relación de equivalencia concluimos que

$$\det\left(\frac{\partial(\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1})^j}{\partial x^i}(\varphi(p))\right) > 0,$$

para cada carta suave en los conjuntos mencionados anteriormente. Por tanto, $\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}$ preserva orientaciones.
Notemos que $\mathrm{spt}(\omega) \subseteq U \cap \tilde{U}$, así por la Proposición 2.37 tenemos que $\mathrm{spt}((\tilde{\varphi}^{-1})^*\omega) \subseteq$

$\tilde{\varphi}(U \cap \tilde{U})$. De manera similar $\mathrm{spt}((\varphi^{-1})^*\omega) \subseteq \varphi(U \cap \tilde{U})$.
Gracias al hecho de que $\tilde{\varphi}(U \cap \tilde{U}) \subseteq \tilde{\varphi}(U)$, $\varphi(U \cap \tilde{U}) \subseteq \varphi(U)$ el Corolario 2.5 y la Proposición 2.38 tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\tilde{\varphi}(\tilde{U})} (\tilde{\varphi}^{-1})^*\omega &= \int_{\tilde{\varphi}(U\cap\tilde{U})} (\tilde{\varphi}^{-1})^*\omega \\
&= \int_{\varphi(U\cap\tilde{U})} (\tilde{\varphi}\circ\varphi^{-1})^*(\tilde{\varphi}^{-1})^*\omega \\
&= \int_{\varphi(U\cap\tilde{U})} (\varphi^{-1})^*(\tilde{\varphi})^*(\tilde{\varphi}^{-1})^*\omega \\
&= \int_{\varphi(U\cap\tilde{U})} (\tilde{\varphi}^{-1})^*\omega \\
&= \int_{\varphi(U)} (\tilde{\varphi}^{-1})^*\omega.
\end{aligned}$$

Ahora, sí las cartas suaves tienen diferentes orientaciones tenemos que el determinante de la matriz Jacobiana del mapa $\tilde{\varphi}\circ\varphi^{-1}$ es negativo. Por tanto, este mapa es un difeomorfismo que revierte orientaciones en los mismos dominios que el caso anterior. Realizando un proceso análogo, obtenemos que

$$-\int_{\tilde{\varphi}(\tilde{U})} (\tilde{\varphi}^{-1})^*\omega = \int_{\varphi(U)} (\tilde{\varphi}^{-1})^*\omega.$$

Finalmente, con todos los casos analizados, concluimos que la integral $\int_M \omega$ no depende de la carta suave que contiene al soporte de ω, elegida. □

Ahora, presentamos la definición más general de integral sobre variedades que tengan más de una carta. Sean M una n-variedad diferenciable orientada con o sin frontera, y ω una n-forma a soporte compacto en M. Sea $\{U_i\}$ un recubrimiento abierto y finito de dominios coordenados suaves de $\mathrm{spt}(\omega)$, con la misma orientación. Sea $\{\psi_i\}$ una partición de la unidad, suave, subordinada a $\{U_i\}$ (notemos que esta existe pues $\{U_i\}$ es finito). Definimos la ***integral de ω sobre M*** como

$$\int_M \omega = \sum_i \int_M \psi_i\omega. \tag{2.10}$$

Notemos que cada $\psi_i\omega$ es una n-forma a soporte compacto, el cual está contenido en U_i, pues el soporte de ψ_i lo está. Por tanto, las integrales de la derecha corresponden a la integral que definimos en (2.9). Al igual que antes, verifiquemos que esta integral está bien definida.

Proposición 2.40. *La integral $\int_M \omega$, definida como en (2.10), no depende de la* *elección del recubrimiento abierto.*

Demostración. Sean $\{U_i\}$ y $\{\tilde{U}_j\}$ dos recubrimientos abiertos y finitos de dominios coordenados suaves, con particiones de la unidad $\{\psi_i\}$ y $\{\tilde{\psi}_j\}$, respectivamente. Como $\{\psi_j\}$ es una partición de la unidad, sabemos que, $\sum_j \psi_j = 1$. Así, para cada i, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_M \psi_i \omega &= \int_M \left(\sum_j \tilde{\psi}_j \right) \psi_i \omega \\ &= \sum_j \int_M \tilde{\psi}_j \psi_i \omega, \end{aligned}$$

de donde

$$\sum_i \int_M \psi_i \omega = \sum_{i,j} \int_M \tilde{\psi}_j \psi_i \omega. \tag{2.11}$$

Notemos que las integrales del lado derecho están bien definidas, pues el soporte de $\tilde{\psi}_j \psi_i \omega$ está contenido en el soporte de ψ_i (ver Proposición 2.39), el cual está contenido, a su vez, en U_i. De manera análoga, se tiene que

$$\sum_j \int_M \tilde{\psi}_j \omega = \sum_{i,j} \int_M \tilde{\psi}_j \psi_i \omega. \tag{2.12}$$

Gracias a (2.11) y (2.12), la integral $\int_M \omega$ está bien definida. □

La integral (2.10) satisface propiedades similares a las integrales definidas en el Capítulo I.

Proposición 2.41. *Sean M y N dos n-variedades diferenciables orientadas, con o sin frontera. Y dadas dos n-formas a soporte, digamos ω y η, se cumplen los siguientes enunciados:*

a) Linealidad: Para cada $a, b \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$\int_M (a\omega + b\eta) = a \int_M \omega + b \int_M \eta.$$

b) Inversión de orientaciones: Denotamos por $-M$ a M como variedad diferenciable con orientación opuesta a su orientación inicial. Se tiene que

$$\int_{-M} \omega = - \int_M \omega.$$

c) Invariancia a través de difeomorfismos: Si $F : M \to N$ es un difeomorfismo que preserva o revierte orientaciones, entonces

$$\int_M \omega = \begin{cases} \displaystyle\int_N F^*\omega, & \textit{cuando } F \textit{ preserva orientaciones,} \\ \\ \displaystyle -\int_N F^*\omega, & \textit{cuando } F \textit{ revierte orientaciones.} \end{cases}$$

Demostración.

a) Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Consideremos $\{U_i\}$, un recubrimiento abierto y finito de dominios coordenados suaves de $\operatorname{spt}(\omega)$, con la misma orientación. Consideremos la partición de la unidad subordinada a $\{U_i\}$, denotada por $\{\psi_i\}$. De igual manera, consideremos $\{V_j\}$, un recubrimiento abierto y finito de dominios coordenados suaves de $\operatorname{spt}(\eta)$, con la misma orientación. Consideremos la partición de la unidad subordinada a $\{V_j\}$, denotada por $\{\varphi_j\}$. Notemos que

$$\operatorname{spt}(\omega+\eta) \subseteq \operatorname{spt}(\omega) \cup \operatorname{spt}(\eta) \subseteq \bigcup_{i,j}(U_i \cup V_j).$$

Lo cual nos indica que $\{U_i \cup V_j\}$ es un recubrimiento abierto y finito de dominios coordenados suaves de $\operatorname{spt}(\omega+\eta)$ con la misma orientación. En consecuencia, podemos considerar la partición de la unidad subordinada a $\{U_i \cap V_j\}$, a la cual denotamos por $\{(\psi_i + \omega_j)/2\}$. Gracias a esto, tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_M (\omega+\eta) &= \frac{1}{2}\sum_{i,j}\int_M (\psi_i+\varphi_j)(\omega+\eta) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i,j}\left(\int_M \psi_i\omega + \int_M \psi_i\eta + \int_M \varphi_j\omega + \int_M \varphi_j\eta\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_M \omega + \int_M \eta + \sum_i \int_M \psi_i\eta + \sum_j \int_M \varphi_j\omega\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_M \omega + \int_M \eta + \sum_i \int_M \left(\sum_j \varphi_j\right)\psi_i\eta + \sum_j \int_M \left(\sum_i \psi_i\right)\varphi_j\omega\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_M \omega + \int_M \eta + \sum_j \int_M \varphi_j\eta + \sum_i \int_M \psi_i\omega\right) \\
&= \int_M \omega + \int_M \eta.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Ahora, para el producto por escalar notemos que

$$\operatorname{spt}(a\omega) \subseteq \operatorname{spt}(\omega) \subseteq \bigcup_i U_i,$$

por tanto, $\{U_i\}$ es un recubrimiento abierto y finito de dominios coordenados suaves de $\operatorname{spt}(a\omega)$, con la misma orientación. Así, podemos tomar la misma partición subordinada $\{\psi_i\}$ para este recubrimiento, por lo cual

$$\begin{aligned}\int_M a\omega &= \sum_i \int_M \psi_i(a\omega) \\ &= a\sum_i \int_M \psi_i\omega \\ &= a\int_M \omega.\end{aligned}$$

Gracias a la identidad anterior y (2.13), se sigue que

$$\int_M (a\omega + b\eta) = a\int_M \omega + b\int_M \eta,$$

para cada $a, b \in \mathbb{R}$.

b) Gracias a (2.10), basta con ver que el resultado se cumple para una n-forma ω, cuyo soporte está contenido en una única carta suave (U, φ). Supongamos primero que esta carta es orientada. Como $-M$ toma como orientación positiva a la opuesta de M, se sigue que la carta (U, φ) es negativamente orientada respecto a $-M$, así por (2.9) se tiene que

$$\begin{aligned}\int_{-M} \omega &= -\int_{\varphi(U)} (\varphi^{-1})^*\omega \\ &= -\int_M \omega.\end{aligned}$$

El caso cuando la carta suave es negativamente orientada es similar.

c) Consideremos, primero, una n-forma cuyo soporte está contenido en una única carta suave (U, φ) de M. Supongamos que la carta está positivamente orientada y que F preserva orientaciones. Se sigue que $(F^{-1}(U), \varphi \circ F)$ es una carta suave positivamente orientada para N. En efecto, dado $p \in F^{-1}(V)$, consideremos (V, ψ) otra carta suave para N, con coordenadas $(\tilde{x}^i)$, tal que su base coordenada determinan la orientación para T_pN. Gracias a la fórmula de cambio de coordenadas (2.3), se sigue que

$$\left.\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i}\right|_p = \sum_j \frac{\partial(\varphi \circ F \circ \psi^{-1})^j}{\partial x^i}(\psi(p)) \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p .$$

Gracias a la anterior identidad, junto con el hecho de que F preserva orientaciones y la Proposición 2.28, se sigue que la base $\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \right\}$ es positivamente orientada, por tanto, la carta $(F^{-1}(U), \varphi \circ F)$ lo será también. Más aún, por la Proposición 2.37, el dominio de la carta suave $(F^{-1}(U), \varphi \circ F)$ contiene al soporte de $F^*\omega$. Por tanto, junto con (2.9), tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_M \omega &= \int_{\varphi(U)} (\varphi^{-1})^*\omega \\
&= \int_{\varphi(F(F^{-1}(U)))} (F \circ F^{-1} \circ \varphi^{-1})^*\omega \\
&= \int_{(\varphi \circ F)(F^{-1}(U))} ((\varphi \circ F)^{-1})^* F^*\omega \\
&= \int_N F^*\omega.
\end{aligned}$$

En resumen, si la carta (U, φ) es positivamente orientada y F preserva orientaciones hemos mostrado que

$$\int_M \omega = \int_N F^*\omega. \tag{2.14}$$

Supongamos, ahora, que la carta (U, φ) es negativamente orientada y que F preserva orientaciones. En este caso, esta carta en $-M$ será positivamente orientada, y el mapa $F : -M \to -N$ preservará orientaciones. Así, por (2.14), se sigue que

$$\int_{-M} \omega = \int_{-N} F^*\omega$$

y, gracias a la parte b) de este resultado, tenemos que

$$\int_M \omega = \int_N F^*\omega.$$

Ahora, supongamos que la carta (U, φ) es positivamente orientada y que F revierte orientaciones. Notemos que el difeomorfismo $F : M \to -N$ preserva orientaciones, así por (2.13), se sigue que

$$\int_M \omega = \int_{-N} F^*\omega,$$

que junto a la parte b) de este resultado, nos indica que

$$\int_M \omega = -\int_{-N} F^*\omega.$$

El último caso a analizar es aquel en el cual la carta (U, φ) es negativamente orientada y que F revierte orientaciones. Notemos que el difeomorfismo $F : -M \to N$ preserva orientaciones y como la carta (U, φ) es positivamente orientada en $-M$, por (2.13), se sigue que

$$\int_{-M} \omega = \int_N F^*\omega.$$

De esta última identidad, y la parte b) de este resultado, tenemos que

$$\int_M \omega = -\int_N F^*\omega.$$

Con esto hemos probado que

$$\int_M \omega = \begin{cases} \displaystyle\int_N F^*\omega, & \text{cuando } F \text{ preserva orientaciones,} \\ \\ \displaystyle -\int_N F^*\omega, & \text{cuando } F \text{ revierte orientaciones,} \end{cases} \tag{2.15}$$

cuando el soporte de ω está contenido en una única carta suave.

Volvamos al caso general, sea ω un n-forma a soporte compacto en M. Sea $\{U_i\}$ un recubrimiento abierto y finito de cartas, positiva o negativamente orientadas y $\{\psi_i\}$ la partición de la unidad subordinada a este recubrimiento. Gracias a (2.15) y a la Proposición 2.19 tenemos que

$$\begin{aligned} \int_M \omega &= \sum_i \int_M \psi_i\omega \\ &= \sum_i \int_M \psi_i\omega \\ &= \pm\sum_i \int_N F^*(\psi_i\omega) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \pm \sum_i \int_N (\psi_i \circ F) F^* \omega \\
&= \pm \int_N F^* \omega,
\end{aligned}
$$

donde la última igualdad es cierta pues $\{\psi_i \circ F\}$ es una partición subordinada al recubrimiento $\{F^{-1}(U_i)\}$ del soporte de $F^*\omega$.

□

Para concluir este capítulo, vamos a presentar el Teorema de Stokes en el contexto de las variedades diferenciables. Esto nos permite apreciar como el concepto de integración sobre variedades extiende algunas de las propiedades de integración en el ambiente de una función de varias variables. Para ello, sea M una n-variedad con frontera, por el Teorema 2.3, sabemos que la frontera ∂M es una $(n-1)$-variedad que posee una estructura suave, tal que, el mapa de inclusión $\iota_{\partial M}$ es suave. En este contexto, sea ω una $(n-1)$-forma suave a soporte compacto, escribimos

$$
\int_{\partial M} \omega = \int_{\partial M} \iota^*_{\partial M} \omega.
$$

Esta integral existe, pues gracias a la Proposición 2.37, el soporte de $\iota^*_{\partial M}\omega$ esta contenido en ∂M.
En caso de que M sea una variedad sin frontera, convenimos que

$$
\int_{\partial M} \omega = 0.
$$

Además, se considerará la orientación de Stokes en ∂M, la cual está dada por la Proposición 2.31. Antes de presentar el Teorema de Stokes es importante mencionar el siguiente resultado.

Proposición 2.42. *Sea M una n-variedad diferenciable, con o sin frontera. Consideremos ω, una k-forma suave sobre M. Se tiene que*

$$
\operatorname{spt}(d\omega) \subseteq \operatorname{spt}(\omega),
$$

en donde $d\omega$ es el diferencial exterior de ω definido en la Sección 2.9.

Demostración. Supongamos primero que ω esta definido sobre un subconjunto abierto U de $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{H}^n$. En este caso $d\omega$ corresponde a la derivada exterior de ω.

Sean (x^i) las coordenadas estándar de $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{H}^n$, se tiene que

$$\omega = \sum_I{}' \omega_I dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k},$$

para funciones suaves $\omega_I : U \to \mathbb{R}$ (pues ω es suave). Luego, por definición de derivada exterior

$$d\omega = \sum_I{}' \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \omega_I}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}.$$

Sea $p \in U$ tal que $\omega_I(p) = 0$, para todo multi-índice I. Como cada ω_I es suave sabemos que las derivadas parciales se anulan en una vecindad de p, en particular

$$\frac{\partial \omega_I}{\partial x^j}(p) = 0,$$

para todo $j = 1, \ldots, n$ y todo multi-índice I. Por tanto,

$$(d\omega)_p = \sum_I{}' \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \omega_I}{\partial x^j}(p) dx^j(p) \wedge (dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k})_p = 0.$$

Con esto hemos probado que

$$\bigcap_I{}' \{p \in U : \omega_I(p) = 0\} \subseteq \{p \in U : (d\omega)_p = 0\},$$

que junto con la Proposición 2.33, nos permite concluir que

$$\operatorname{spt}(d\omega) \subseteq \bigcup_I{}' \operatorname{spt}(\omega_I) = \operatorname{spt}(\omega). \tag{2.16}$$

Consideremos, ahora, el caso general. Sea ω una k-forma suave sobre M. Por definición de diferencial exterior tenemos que

$$d\omega = \varphi^* d((\varphi^{-1})^* \omega),$$

para cada carta suave (U, φ) de cada punto de M. Gracias a la Proposición 2.36 y a (2.16), se sigue que

$$\begin{aligned}
\operatorname{spt}(d\omega) &= \operatorname{spt}(\varphi^* d((\varphi^{-1})^* \omega)) \\
&= \varphi^{-1}[\operatorname{spt}(d((\varphi^{-1})^* \omega))] \\
&\subseteq \varphi^{-1}[\operatorname{spt}((\varphi^{-1})^* \omega)]
\end{aligned}$$

$$= \varphi^{-1}[\varphi(\text{spt}(\omega))]$$
$$= \text{spt}(\omega),$$

lo cual concluye la demostración.

□

El siguiente resultado es uno de los mas importantes con respecto a la integral sobre variedades. Este resultado generaliza el Teorema de Kelvin-Stokes, presentado en el Capítulo I, usando la integral de formas diferenciables sobre variedades diferenciables orientadas con frontera.

Teorema 2.4 (Teorema de Stokes). *Sea M una n-variedad diferenciable, orientada y con frontera. Consideremos ω una $(n-1)$-forma, suave y a soporte compacto en M. Se tiene que*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Demostración. Primero, notemos que gracias a la Proposición 2.42, cuando ω es a soporte compacto, $d\omega$ lo es también. Además, el soporte de $d\omega$ está contenido en cualquier conjunto en el cual esté contenido el soporte de ω.

Supongamos que $M = \mathbb{H}^n$. Como ω tiene soporte compacto, se sigue que este está contenido en un rectángulo cerrado $A = [-R, R] \times \cdots \times [-R, R] \times [0, R]$, para algún $R > 0$, tal que, en la frontera de A, ω se anula. Tomando las coordenadas estándar en $\mathbb{H}^n$, podemos escribir ω como

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^n,$$

donde el símbolo $\widehat{dx^i}$ significa que la 1-forma dx^i se omite. Luego, por definición de derivada exterior, se sigue que

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{i=1}^{n} d\omega_i \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^n \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^n \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} (-1)^{i-1} \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^j \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^n. \end{aligned}$$

Gracias a la Proposición 2.22, y al hecho de que cada dx^i es una 1-forma, tenemos que $dx^i \wedge dx^i = 0$ para $i = 1, \ldots, n$. Así, la expresión anterior nos queda

$$d\omega = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

Luego

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{H}^n} d\omega &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \int_A \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \int_0^R \int_{-R}^R \cdots \int_{-R}^R \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i}(x) dx^1 \cdots dx^n. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Gracias al Segundo Teorema Fundamental del Cálculo tenemos que

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i-1} \int_0^R \int_{-R}^R \cdots \int_{-R}^R \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i}(x) dx^1 \cdots dx^n \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i-1} \int_0^R \int_{-R}^R \cdots \int_{-R}^R \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i}(x) dx^i dx^1 \cdots \widehat{dx^i} \cdots dx^n \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i-1} \int_0^R \int_{-R}^R \cdots \int_{-R}^R [\omega_i(x)]_{x^i=-R}^{x^i=R} dx^1 \cdots \widehat{dx^i} \cdots dx^n \\ &= 0,\end{aligned}$$

donde la última igualdad se obtiene debido a que el soporte de ω está en A y a la Proposición 2.33. Gracias a esta última igualdad y (2.17), se sigue que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{H}^n} d\omega &= (-1)^{n-1} \int_{-R}^R \cdots \int_{-R}^R \int_0^R \frac{\partial \omega_n}{\partial x^n}(x) dx^n dx^1 \cdots dx^{n-1} \\ &= (-1)^{n-1} \int_{-R}^R \cdots \int_{-R}^R [\omega_n(x)]_{x_n=0}^{x_n=R} dx^1 \cdots dx^{n-1} \\ &= (-1)^{n-1} \int_{-R}^R \cdots \int_{-R}^R -\omega_n(x^1, \cdots, x^{n-1}, 0) dx^1 \cdots dx^{n-1} \\ &= (-1)^{n-1}(-1) \int_{-R}^R \cdots \int_{-R}^R \omega_n(x^1, \cdots, x^{n-1}, 0) dx^1 \cdots dx^{n-1} \\ &= (-1)^n \int_{-R}^R \cdots \int_{-R}^R \omega_n(x^1, \cdots, x^{n-1}, 0) dx^1 \cdots dx^{n-1}. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Por otro lado, notemos que $\partial \mathbb{H}^n$ es una $(n-1)$-variedad diferenciable gracias al homeomorfismo $\varphi : \partial \mathbb{H}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$ dado por

$$\varphi(x^1, \cdots, x^{n-1}, 0) = (x^1, \cdots, x^{n-1}).$$

Sea A un conjunto, arbitrario, y $B \subseteq A$. Recordemos que el mapa de inclusión $\iota_B : B \to A$ viene dado por

$$\iota_B(x) = x,$$

para cada $x \in B$.
Ahora, gracias a la Proposición 2.37 se sigue que

$$\operatorname{spt}(\iota^*_{\partial\mathbb{H}^n}\omega) = \iota^{-1}_{\partial\mathbb{H}^n}(\operatorname{spt}(\omega)) \subseteq \iota^{-1}_{\partial\mathbb{H}^n}(A) = \partial\mathbb{H}^n \cap A.$$

Además, gracias a que $\iota_{\partial\mathbb{H}^n} \circ \varphi^{-1} = \varphi^{-1}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\mathbb{H}^n} \omega &= \int_{\partial\mathbb{H}^n} \iota^*_{\partial\mathbb{H}^n}\omega \\
&= \pm \int_{\varphi(\partial\mathbb{H}^n \cap A)} (\varphi^{-1})^* \iota^*_{\partial\mathbb{H}^n}\omega \\
&= \pm \int_{[-R,R]\times\cdots\times[-R,R]} (\varphi^{-1})^*\omega \\
&= \pm \sum_{i=1}^{n} \int_{[-R,R]\times\cdots\times[-R,R]} (\omega_i \circ \varphi^{-1}) dy^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dy^i} \wedge \cdots \wedge dy^n
\end{aligned}$$

donde $y^j = x^j \circ \varphi^{-1}$, para $j = 1, \ldots, n$. Notemos que, con las coordenadas estándar, $x^n = 0$ sobre la frontera de $\mathbb{H}^n$, por tanto, $dy^n = 0$. Así

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\mathbb{H}^n} \omega &= \pm \int_{[-R,R]\times\cdots\times[-R,R]} (\omega_i \circ \varphi^{-1}) dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^{n-1} \\
&= \pm \int_{-R}^{R} \cdots \int_{-R}^{R} \omega_n(y^1, \cdots, y^{n-1}, 0) dy^1 \cdots dy^{n-1}.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Gracias al Ejemplo 2.4 sabemos que al ser n par, las coordenadas estándar de $\partial\mathbb{H}^n$ son positivamente orientadas, y por tanto (2.18) y (2.19) son iguales. Cuando n es impar, se sigue que las coordenadas estándar de $\partial\mathbb{H}^n$ son negativamente orientadas, por lo que las expresiones (2.18) y (2.19) son iguales, también en este caso

Supongamos ahora que $M = \mathbb{R}^n$. En este caso, el soporte de ω está contenido en $[-R, R]^n$, para algún $R > 0$. Realizando un proceso análogo al anterior, podemos ver que

$$\int_{\mathbb{R}^n} d\omega = 0.$$

Además la frontera de $\mathbb{R}^n$ es el conjunto vacío, así

$$\int_{\partial\mathbb{R}^n} \omega = 0,$$

y el teorema se verifica en este caso.

En conclusión, tenemos que

$$\int_{\mathbb{H}^n} d\omega = \int_{\partial\mathbb{H}^n} \omega, \tag{2.20}$$

y

$$\int_{\mathbb{R}^n} d\omega = \int_{\partial\mathbb{R}^n} \omega = 0. \tag{2.21}$$

Ahora, supongamos que M es una n-variedad diferenciable, orientada y con frontera. Supongamos que el soporte de ω está contenido en el dominio de una única carta suave (U, φ), positiva o negativamente orientada. Supongamos que esta carta es una carta de frontera, positivamente orientada. Por el Corolario 2.5, y la Proposición 2.25, tenemos que

$$\begin{aligned}\int_M d\omega &= \int_{\mathbb{H}^n} (\varphi^{-1})^* d\omega \\ &= \int_{\mathbb{H}^n} d((\varphi^{-1})^*\omega),\end{aligned}$$

lo cual, junto con (2.20) nos permite ver que

$$\int_M d\omega = \int_{\partial\mathbb{H}^n} (\varphi^{-1})^*\omega,$$

donde $\partial\mathbb{H}^n$ posee la orientación de Stokes. Por el Corolario 2.5 tenemos que

$$\begin{aligned}\int_M d\omega &= \int_{\partial\mathbb{H}^n\cap\varphi(U)} \iota_{\partial\mathbb{H}^n}^* (\varphi^{-1})^*\omega \\ &= \int_{\partial\mathbb{H}^n\cap\varphi(U)} (\varphi^{-1}\circ\iota_{\partial\mathbb{H}^n})^*\omega \\ &= \int_{\partial\mathbb{H}^n\cap\varphi(U)} (\iota_{\partial M}\circ\varphi^{-1})^*\omega, \end{aligned} \tag{2.22}$$

donde la igualdad (2.22) es cierta gracias a que si consideramos $\varphi : U \cap \partial M \to \varphi(U) \cap \partial\mathbb{H}^n$ entonces

$$\iota_{\partial M}\circ\varphi^{-1} = \varphi^{-1} = \varphi^{-1}\circ\iota_{\partial\mathbb{H}^n}.$$

Ahora, mostremos que la carta $(U\cap\partial M, \varphi)$, con $\varphi : U\cap\partial M \to \varphi(U)\cap\partial\mathbb{H}^n$, es una carta suave y positivamente orientada de ∂M. Recordemos que M es de dimensión n. Denotamos por (x^i) a las coordenadas suaves de (U, φ). Notemos que $U \cap \partial M$ es una subvariedad abierta en ∂M, así, por el Ejemplo 2.2 es una subvariedad incrustada con frontera en ∂M, de dimensión $n-1$. Luego, al ser ∂M una hipersuperficie en M, por el Ejemplo 2.3 se sigue que $U \cap \partial M$ es una hipersuperficie incrustada en M, con frontera. Además, la única carta de frontera de $U \cap \partial M$ es $(U \cap \partial M, \varphi)$.

Notemos que, para cada $p \in U \cap \partial M$, el conjunto $\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x^{n-1}}\right|_p \right\}$ es una base de $U \cap \partial M$.

Consideremos el campo vectorial sobre $U \cap \partial M$, $N : U \cap \partial M \to TM$, dado por

$$N_p = \begin{cases} -\left.\dfrac{\partial}{\partial x^n}\right|_p, & \text{cuando } n \text{ es par}, \\ \\ \left.\dfrac{\partial}{\partial x^n}\right|_p, & \text{cuando } n \text{ es impar}. \end{cases}$$

Notemos que, para cada $p \in U \cap \partial M$, $N_p \notin T_p(U \cap \partial M)$. Supongamos que esto no es verdad; como la dimensión de $T_p(U \cap \partial M)$ es $n-1$, el conjunto siguiente $\left\{ \mp \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_p, \left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x^{n-1}}\right|_p \right\}$ es linealmente dependiente, lo cual es una contradicción ya que este conjunto es la base coordenada de T_pM, pues $p \in U$.

Para cada $p \in U \cap \partial M$ tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \left[\mp \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_p, \left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x^{n-1}}\right|_p \right] &= \mp \left[\left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_p, \left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x^{n-1}}\right|_p \right] \\ &= \mp(-1)^{n-1} \left[\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x^{n-1}}\right|_p, \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_p \right]. \end{aligned}$$

En particular, cuando n es par

$$\left[- \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_p, \left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x^{n-1}}\right|_p \right] = \left[\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x^{n-1}}\right|_p, \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_p \right], \tag{2.23}$$

y, cuando n es impar

$$\left[\left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_p, \left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x^{n-1}}\right|_p \right] = \left[\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x^{n-1}}\right|_p, \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_p \right]. \tag{2.24}$$

Gracias a (2.23), (2.24) y la definición de N, tenemos que

$$\left[N_p, \left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p, \dots, \left.\frac{\partial}{\partial x^{n-1}}\right|_p\right] = \left[\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p, \dots, \left.\frac{\partial}{\partial x^{n-1}}\right|_p, \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_p\right].$$

Así, la base $\left\{N_p, \left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p, \dots, \left.\frac{\partial}{\partial x^{n-1}}\right|_p\right\}$ es positivamente orientada en T_pM, pues la carta (U, φ) es positivamente orientada. Gracias a la Proposición 2.30 se sigue que la base $\left\{\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p, \dots, \left.\frac{\partial}{\partial x^{n-1}}\right|_p\right\}$ es positivamente orientada en $T_p(U \cap \partial M)$, para cada $p \in U \cap \partial M$. Finalmente, concluimos que la carta la carta $(U \cap \partial M, \varphi)$ es positivamente orientada.

En resumen, la carta $(U \cap \partial M, \varphi)$ es una carta suave positivamente orientada, tal que el soporte de $\iota_{\partial M}^*\omega$ esta contenido en su dominio suave (por la Proposición 2.37). Gracias a estas observaciones y (2.22), se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_M d\omega &= \int_{\partial \mathbb{H}^n \cap \varphi(U)} (\varphi^{-1})^*(\iota_{\partial M})^*\omega \\
&= \int_{\partial M} \iota_{\partial M}^*\omega \\
&= \int_{\partial M} \omega.
\end{aligned}$$

Cuando la carta (U, φ) es negativamente orientada, por razonamientos análogos, se sigue que la carta $(U \cap \partial M, \varphi)$ es negativamente orientada. Y en este caso, tenemos que

$$\int_M d\omega = -\int_{\partial \mathbb{H}^n} (\varphi^{-1})^*\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Cuando la carta (U, φ) es interior, debemos reemplazar $\mathbb{H}^n$ por $\mathbb{R}^n$. Gracias a (2.21) se sigue que

$$\int_M d\omega = \pm \int_{\partial \mathbb{R}^n} (\varphi^{-1})^*\omega = 0 = \int_{\partial M} \omega,$$

donde el signo es positivo si la carta es positivamente orientada, o negativo caso contrario.

En resumen, cuando M una n-variedad diferenciable orientada con frontera y el soporte de ω está contenido en el dominio de una única carta suave (U, φ), positiva o negativamente orientada, se tiene que

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega. \tag{2.25}$$

Finalmente, analicemos el caso general. Sean M un n-variedad diferenciable, orientada, con frontera y ω una $(n-1)$-forma suave, a soporte compacto en M. Sean $\{U_i\}$ un recubrimiento, abierto y finito, de cartas suaves positiva o negativamente orientadas, y $\{\psi_i\}$ una partición de la unidad, suave, subordinada a este recubrimiento. Puesto que el soporte de $d\omega$ está contenido en el de ω, se sigue que el recubrimiento $\{U_i\}$ es también un recubrimiento para el soporte de $d\omega$. Gracias a esta observación, la igualdad (2.25) y el Corolario 2.4 se sigue que

$$
\begin{aligned}
\int_{\partial M} \omega &= \sum_i \int_{\partial M} \psi_i \omega \\
&= \sum_i \int_M d(\psi_i \omega) \\
&= \sum_i \int_M (d\psi_i \wedge \omega + \psi_i d\omega) \\
&= \sum_i \int_M d\psi_i \wedge \omega + \sum_i \int_M \psi_i d\omega \\
&= \int_M d\left(\sum_i \psi_i\right) \wedge \omega + \sum_i \int_M \psi_i d\omega \\
&= \int_M 0 \wedge \omega + \sum_i \int_M \psi_i d\omega \\
&= \sum_i \int_M \psi_i d\omega \\
&= \int_M d\omega,
\end{aligned}
$$

lo cual concluye la demostración. □

Capítulo 3

Resultados, conclusiones y recomendaciones

3.1. Resultados

El objetivo principal de este trabajo de integración curricular es demostrar el Teorema de Stokes en el contexto de las variedades (ver Teorema 2.4). Con esta finalidad, definimos la integral para formas diferenciables a soporte compacto, que están definidas en dominios de integración de $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{H}^n$. Esta integral se presenta en (2.6). Con esta integral, definimos la integral de formas diferenciables a soporte compacto, que están definidas en dominios abiertos de $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{H}^n$, presentada en (2.7).

Para la integral (2.7), probamos la Proposición 2.38, en donde la integral de formas diferenciables definidas en abiertos de $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{H}^n$ presenta una relación bastante interesante con los difeomorfismos que preservan o revierten orientaciones.

Con el fin de generalizar la integral dada en (2.7), definimos la integral de formas a soporte compacto, que están definidas sobre una variedad diferenciable, orientada y con frontera. Primero consideramos el caso para el cual estas formas son a soporte compacto, el cual está contenido en el dominio de una única carta suave de la variedad diferenciable. Esta integral viene dada en (2.9). Gracias a esta integral consideramos el caso más general, donde el soporte de las formas no necesariamente está contenido en el dominio de una única carta suave. En este caso utilizamos recubrimientos abiertos de dominios coordenados de cartas suaves y particiones de la unidad, suaves, subordinadas a estos recubrimientos,

la integral mencionada vienen dada por (2.10).
Gracias a la Proposición 2.41, vemos que esta integral presenta propiedades similares a la integral tradicional sobre $\mathbb{R}^n$.

Para este último concepto de integral, se demuestra el resultado principal de este trabajo, el Teorema de Stokes sobre variedades diferenciables, orientadas y con frontera. Este resultado es análogo al Teorema de Kelvin-Stokes presentado en el Capítulo I, y se lo enuncia como sigue.

Teorema de Stokes. *Sea M una n-variedad diferenciable, orientada y con frontera. Consideremos ω una $(n-1)$-forma, suave y a soporte compacto en M. Se tiene que*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

3.2. Conclusiones

- Las integrales sobre variedades usan la integral (clásica) de Lebesgue sobre $\mathbb{R}^n$, por lo que la convierte en una herramienta bastante accesible para usar en variedades.
- Tal como vemos en la Proposición 2.41, la integral sobre variedades cumple con propiedades análogas a la integral sobre $\mathbb{R}^n$. Más aún, esta identifica los difeomorfismos que preservan o revierten orientaciones con un signo en su valor, y únicamente haciendo uso del pullback.
- El Teorema de Stokes nos proporciona una alternativa para calcular integrales sobre la frontera de una variedad diferenciable con frontera, haciendo uso del diferencial exterior, el cual posee propiedades bastantes interesantes. Por tanto, es una mejor alternativa integrar sobre la variedad diferenciables usando el diferencial exterior, que integrar directamente sobre la frontera.
- La definición de integral sobre variedades depende de las cartas suaves de la variedad. Por tanto, esta definición no es ajena a todo el desarrollo realizado con respecto a la teoría de variedades diferenciables, donde las cartas suaves son esenciales para la correcta comprensión de las definiciones y resultados de esta teoría.

3.3. Recomendaciones

- Es esencial que el lector interprete de manera correcta el concepto de integral de una forma diferenciable sobre la frontera de una variedad orientable, recordando el significado del pullback del mapa de inclusión.
- Las definiciones de las integrales sobre variedades dadas en este documento utilizan formas diferenciables a soporte compacto. El lector puede trabajar con integrales de formas diferenciables que no son necesariamente a soporte compacto y compararlas con las integrales definidas en este documento.
- Las integrales sobre variedades de formas definidas sobre conjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{H}^n$ utilizan la integral de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$. Resulta interesante investigar si este concepto de integral se lo puede definir usando otra medida en $\mathbb{R}^n$ y establecer ventajas o desventajas respecto a la definición de integral dada en este texto.
- El lector puede verificar si la definición de integral se puede extender a espacios más generales en otros contextos. Como, por ejemplo, la Teoría de Categorías. Además, se puede investigar alguna versión del Teorema de Stokes en este caso.
- El lector puede plantearse modificar las hipótesis del Teorema de Stokes, en particular, puede analizar que tan esencial es la suavidad de las formas diferenciables, y, de ser posible, suavizar esta hipótesis.

Capítulo A

Anexos

A.1. Ejemplos de Variedades Topológicas

Ejemplo A.1 (Grafos de Funciones Continuas). Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y sea $f : U \to \mathbb{R}^k$ una función continua. El **grafo de f** es el subconjunto de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ definido por

$$\Gamma(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k : x \in U \text{ e } y = f(x)\},$$

a este conjunto le dotamos de la topología de subespacio, así, $\Gamma(f)$ es de Hausdorff y segundo contable. Consideremos la función proyección del primer factor $\pi_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$, definida por

$$\pi(x, y) = x,$$

para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$. Esta función es continua.
Definimos el mapa $\varphi : \Gamma(f) \to U$ como la restricción de π_1 a $\Gamma(f)$, así

$$\varphi(x, y) = x,$$

para cada $(x, y) \in \Gamma(f)$.
Ahora, notemos que

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k : x \in U\} = U \times f(U),$$

por tanto, podemos escribir φ como

$$\varphi(x, f(x)) = x,$$

para cada $x \in U$.

Ahora, no es difícil ver que φ es invertible y, además, es continua pues es la restricción de la función continua π_1. Más aún, tiene inversa continua. En efecto la inversa viene dada por

$$\varphi^{-1}(x) = (x, f(x)),$$

con $x \in U$. Esta función es continua gracias al hecho de que f es continua. Por tanto, φ es un homeomorfismo.

Como φ tiene como dominio todo el grafo de f, entonces, todo punto del grafo tiene una vecindad homeomorfa a $U \subseteq \mathbb{R}^n$, así $\Gamma(f)$ es una n-variedad topológica con la carta $(\Gamma(f), \varphi)$. $\square$

Para los siguientes ejemplos, vamos a considerar una nueva notación: Para una k-upla $(x^1, \ldots, x^k)$ y para $j = 1, \ldots, k$ escribimos

$$(x^1, \ldots, \widehat{x^j}, \ldots, x^k) = (x^1, \ldots, x^{j-1}, x^{j+1}, \ldots, x^k).$$

Ejemplo A.2 (Grafos de Curvas de Nivel). Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ y $f : U \to \mathbb{R}$ una función continua. Consideramos el conjunto

$$\Gamma_i(f) = \{(x^1, \ldots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : (x^1, \ldots, \widehat{x^i}, \ldots, x^{n+1}) \in U \text{ y } x^i = f(x^1, \ldots, \widehat{x^i}, \ldots, x^{n+1})\}.$$

Realizando un análisis similar al Ejemplo A.1 podemos hacer de $\Gamma_i(f)$ conjunto es una n-variedad topológica considerando la restricción de los mapas $\pi_i : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ definidos por

$$\pi_i(x^1, \ldots, x^{n+1}) = (x^1, \ldots, \widehat{x^i}, \ldots, x^n)$$

a $\Gamma_i(f)$. $\square$

Ejemplo A.3 (Esferas). Para cada entero $n \geq 0$, definimos la ***n*-esfera unitaria** como el conjunto

$$\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}.$$

También, consideramos el conjunto

$$\mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}.$$

En este contexto, $\|\cdot\|$ representa la norma euclidiana.

Vamos a demostrar que $\mathbb{S}^n$ es una n-variedad topológica con la topología de subespacio. Con esta topología, gracias a que $\mathbb{R}^{n+1}$ es un espacio de Hausdorff y segundo contable, $\mathbb{S}^n$ lo sera también. Demostremos que $\mathbb{S}^n$ es localmente euclidiano de dimensión n.
Consideremos, para cada $i = 1, \ldots, n+1$, los conjuntos

$$U_i^+ = \{(x^1, \ldots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x^i > 0\}$$

y

$$U_i^- = \{(x^1, \ldots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x^i < 0\}.$$

Ahora, consideremos la función continua $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \sqrt{1 - \|x\|^2}.$$

Sean $f^+ : \mathbb{B}^n \to \mathbb{R}$ y $f^- : \mathbb{B}^n \to \mathbb{R}$, dos funciones definidas por

$$f^+(x) = f(x) \quad \text{y} \quad f^-(x) = -f(x),$$

para $x \in \mathbb{B}^n$.
Para cada $i = 1, \ldots, n$ tenemos que $\Gamma_i(f^+) = U_i^+ \cap \mathbb{S}^n$. En efecto, sea $(x^1, \ldots, x^{n+1}) \in \Gamma_i(f^+)$, así

$$(x^1, \ldots, \widehat{x^i}, \ldots, x^{n+1}) \in \mathbb{B}^n \quad \text{y} \quad x^i = f(x^1, \ldots, \widehat{x^i}, \ldots, x^{n+1}),$$

de donde $x^i > 0$ y, además,

$$\begin{aligned} \left\|(x^1, \ldots, x^{n+1})\right\|^2 &= \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n+1} (x^j)^2 + f(x^1, \ldots, \widehat{x^i}, \ldots, x^{n+1})^2 \\ &= 1. \end{aligned}$$

En resumen, se tiene que $(x^1, \ldots, x^{n+1}) \in U_i^+ \cap \mathbb{S}^n$.
Recíprocamente, sea $(x^1, \ldots, x^{n+1}) \in U_i^+ \cap \mathbb{S}^n$. Así $x^i > 0$ y $(x^1, \ldots, x^{n+1}) \in \mathbb{S}^n$. Luego, tenemos que

$$\left\|(x^1, \ldots, \widehat{x^i}, \ldots, x^{n+1})\right\|^2 = \sum_{j=1}^{n+1} (x^j)^2 - (x^i)^2$$

$$
\begin{aligned}
&= 1 - (x^i)^2 \\
&< 1,
\end{aligned}
$$

por tanto, $(x^1, \ldots, \widehat{x^i}, \ldots, x^{n+1}) \in \mathbb{B}^n$. Gracias a este hecho se sigue que

$$
\begin{aligned}
\left\|(x^1, \ldots, x^{n+1})\right\|^2 = 1 \Rightarrow (x^i)^2 = 1 - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} (x^j)^2 \\
\Rightarrow x^i = \sqrt{1 - \left\|(x^1, \ldots, \widehat{x^i}, \ldots, x^{n+1})\right\|^2} \\
\Rightarrow x^i = f(x^1, \ldots, \widehat{x^i}, \ldots, x^{n+1})
\end{aligned}
$$

por tanto $(x^1, \ldots, x^{n+1}) \in \Gamma_i(f^+)$. De manera similar tenemos que $\Gamma_i(f^-) = U_i^- \cap \mathbb{S}^n$. De estos resultados, y el Ejemplo A.2, concluimos que cada conjunto $U_i^{\pm} \cap \mathbb{S}^n$ es localmente euclidiano de dimensión n con los homeomorfismos $\varphi_i^{\pm} : U_i^{\pm} \cap \mathbb{S}^n \to \mathbb{B}^n$, definidos por

$$
\varphi_i^{\pm}(x^1, \ldots, x^{n+1}) = (x^1, \ldots, \widehat{x^i}, \ldots, x^{n+1}).
$$

Notemos que

$$
\mathbb{S}^n = \bigcup_{i=1}^{n+1} (\mathbb{S}^n \cap U_i^{\pm}),
$$

por tanto, $\mathbb{S}^n$ es localmente euclidiano de dimensión n. Esta variedad tiene $2n+2$ cartas dadas por $(U_i^{\pm} \cap \mathbb{S}^n, \varphi_i^{\pm})$. □

Ejemplo A.4 (Variedad Producto). Sean $M_1, \ldots, M_k$ variedades de dimensión $n_1, \ldots, n_k$, respectivamente. Como vemos en breve, el producto

$$
M = M_1 \times \cdots \times M_k
$$

es una variedad de dimensión $n_1 + \cdots + n_k$. Como cada M_i es un espacio de Hausdorff y segundo contable, se sigue que M es también de Hausdorff segundo contable. Probemos que M es localmente euclidiano de dimensión $n_1 + \cdots + n_k$. Sea $(p_1, \ldots, p_k) \in M$, así para cada $i = 1, \ldots, k$ existe un abierto U_i, con $p_i \in U_i$, y un homeomorfismo

$$
\varphi_i : U_i \to \varphi(U_i) \subseteq \mathbb{R}^{n_i}.
$$

Consideremos el mapa $\varphi_1 \times \cdots \times \varphi_k : U_1 \times \cdots \times U_k \to \varphi_1(U_1) \times \cdots \times \varphi_k(U_k)$ definido por

$$
\varphi_1 \times \cdots \times \varphi_k(x_1, \ldots, x_k) = (\varphi_1(x_1), \ldots, \varphi_k(x_k)).
$$

Así, este mapa es un homeomorfismo. Como $(p_1, \ldots, p_k) \in U_1 \times \cdots \times U_k$ concluimos que M es localmente euclidiano de dimesión $n_1 + \cdots + n_k$.

En resumen, $M_1 \times \cdots \times M_k$ es una variedad de dimensión $n_1 + \cdots + n_k$ con cartas de la forma $(U_1 \times \cdots \times U_k, \varphi_1 \times \cdots \times \varphi_k)$, donde cada (U_i, φ_i) es una carta de M_i. A esta variedad le denominamos **variedad producto**. $\square$

A.2. Ejemplos de Variedades Topológicas Diferenciables

Ejemplo A.5 (El espacio $\mathbb{R}^n$). Gracias al Ejemplo 2.1 sabemos que $\mathbb{R}^n$ posee, al menos, dos atlas suaves. En particular, a

$$\mathcal{A} = \{(\mathbb{R}^n, I_{\mathbb{R}^n})\}$$

se le conoce como **estructura estándar en** $\mathbb{R}^n$. $\square$

Ejemplo A.6 (Subvariedades Abiertas). Sea M una n-variedad diferenciable con estructura suave $\mathcal{A}$. Cualquier abierto U de M, con la topología de subespacio, es tambien una n-variedad. Ahora definimos

$$\mathcal{A}_U = \{(V, \varphi) \in \mathcal{A} : V \subseteq U\}$$

un atlas de U. En efecto, dado cualquier $p \in U$, existe una carta (W, φ) de $\mathcal{A}$ tal que $p \in W$. Gracias a esto, el par $(U \cap W, \varphi|_{U \cap W})$ es una carta de $\mathcal{A}_U$. Como $p \in U \cap W$, concluimos que los dominios coordenados de $\mathcal{A}_U$ recubren a U, así, $\mathcal{A}_U$ es un atlas para U.

Más aún, $\mathcal{A}_U$ es un atlas suave pues cualquier par de cartas de $\mathcal{A}_U$ están en $\mathcal{A}$ y, como este es suave, las cartas son compatibles. Por tanto, el conjunto U es una n-variedad diferenciable. $\square$

Ejemplo A.7 (Grafo de Funciones Suaves). Sea $f : U \to \mathbb{R}^n$ una función suave en un abierto U de $\mathbb{R}^n$. Como f es continua, entonces, gracias al Ejemplo A.1, $\Gamma(f)$ es una n-variedad topológica con el atlas

$$\mathcal{A} = \{(\Gamma(f), \varphi)\},$$

donde $\varphi : \Gamma(f) \to U$ es la restricción de la proyección π_1 en U, es decir,

$$\varphi(x, f(x)) = x,$$

cuya inversa viene dada por

$$\varphi^{-1}(x) = (x, f(x)).$$

Gracias a la forma de φ y su inversa, y al hecho de que f es suave, podemos concluir que este mapa es un difeomorfismo. Así $\mathcal{A}$ es un atlas suave y determina una estructura suave para $\Gamma(f)$. $\square$

Ejemplo A.8 (Esferas). Gracias al Ejemplo A.3 la esfera unitaria $\mathbb{S}^n$ es una n-variedad. Además podemos observar que un atlas para esta espacio es

$$\mathcal{A} = \{(U_i^{\pm}, \varphi_i^{\pm}) : i = 1, \dots, n+1\}$$

donde las cartas $(U_i^{\pm} \cap \mathbb{S}^n, \varphi_i^{\pm})$ son definidas como en el Ejemplo A.3. Más aún, este atlas es suave. En efecto, primero notemos que, para cada $i = 1, \dots, n+1$, basándonos en el Ejemplo A.1, el mapa $(\varphi_i^{\pm})^{-1} : \mathbb{B}^n \to U_i^{\pm} \cap \mathbb{S}^n$ viene dado por

$$(\varphi_i^{\pm})^{-1}(x^1, \dots, x^n) = (\varphi_i^{\pm})^{-1}(x) = \left(x^1, \dots, \pm\sqrt{1 - \|x\|^2}, \dots, x^n\right)$$

donde $\pm\sqrt{1 - \|x\|^2}$ esta en la i-ésima posición.

Ahora, verifiquemos que todos los mapas coordenados son suavemente compatibles. Sean $i, j = 1, \dots, n$. si $i < j$ vemos que

$$\begin{aligned}\varphi_i^{\pm} \circ (\varphi_j^{\pm})^{-1}(x^1, \dots, x^n) &= \varphi_i^{\pm} \circ (\varphi_j^{\pm})^{-1}(x) \\ &= \left(x^1, \dots, \widehat{x^i}, \dots, \pm\sqrt{1 - \|x\|^2}, \dots, x^n\right)\end{aligned}$$

donde $\pm\sqrt{1 - \|x\|^2}$ esta en la j-ésima posición. Se obtendrá un resultado análogo si $i > j$. Ahora, para $i = j$ vemos primero que $\varphi_i^{+} \circ (\varphi_i^{+})^{-1} = \varphi_i^{-} \circ (\varphi_i^{-})^{-1} = I_{\mathbb{B}^n}$. Luego

$$\begin{aligned}\varphi_i^{+} \circ (\varphi_i^{-})^{-1}(x^1, \dots, x^n) &= \varphi_i^{+} \circ (\varphi_i^{-})^{-1}(x) \\ &= (x^1, \dots, x^n)\end{aligned}$$

por tanto, $\varphi_i^{+} \circ (\varphi_i^{-})^{-1} = I_{\mathbb{B}^n}$. De manera similar $\varphi_i^{-} \circ (\varphi_i^{+})^{-1} = I_{\mathbb{B}^n}$.

De los resultados anteriores concluimos que todos los mapas de $\mathcal{A}$ son compatibles, por tanto $\mathcal{A}$ es un atlas suave y, por la Proposición 2.1, determina una estructura suave. Finalmente, $\mathbb{S}^n$ es una variedad diferenciable. $\square$

Ejemplo A.9 (Variedad Producto Diferenciable). Sean $M_1, \ldots, M_k$ variedades de dimensión $n_1, \ldots, n_k$, respectivamente. Gracias al Ejemplo A.4 el producto $M = M_1 \times \cdots \times M_k$ es una variedad de dimensión $n_1 + \cdots + n_k$ llamada variedad producto. Si en adición cada M_i es variedad diferenciable, entonces, la variedad producto lo será también. En efecto, cada M_i posee una estructura suave $\mathcal{A}_i$. Definimos

$$\mathcal{A} = \{(U_1 \times \cdots \times U_k, \varphi_1 \times \cdots \times \varphi_n) : (U_i, \varphi_i) \in \mathcal{A}_i,\ i = 1, \ldots, n\}.$$

Tenemos que $\mathcal{A}$ es un atlas suave pues los dominios suaves de cada $\mathcal{A}_i$ recubren a M_i, así, el producto de dominios recubrirá a M. Además, todos los mapas coordenados son compatibles pues para cada par de cartas se cumple que $(U_1 \times \cdots \times U_k, \varphi_1 \times \cdots \times \varphi_n), (V_1 \times \cdots \times V_k, \psi_1 \times \cdots \times \psi_n) \in \mathcal{A}$, así, tenemos que

$$(\psi_1 \times \cdots \times \psi_n) \circ (\varphi_1 \times \cdots \times \varphi_n)^{-1} = (\psi_1 \circ \varphi_1^{-1}) \times \cdots \times (\psi_1 \circ \varphi_n^{-1}),$$

por tanto, el mapa de transición sera suave pues cada $\psi_i \circ \varphi_i^{-1}$ lo es. De donde, $\mathcal{A}$ es un atlas suave y, en consecuencia, determina una única estructura suave para M. Esta estructura recibe el nombre de **estructura suave producto**. $\square$

A.3. Una Aplicación: Carro de Nelson

En esta sección presentamos un ejemplo de variedad diferenciable, que surge de una aplicación inspirada en “El carro de Nelson” (ver [9]).

En este ejemplo vamos a mostrar como el espacio de configuración del movimiento de un automóvil puede dotarse de una estructura de variedad topológica diferenciable. La presente descripción se inspira en el modelo original que presenta Nelson en [7].

Supongamos que el automóvil es perfectamente simétrico. Trazamos dos segmentos de recta, los cuales tienen como extremos las llantas delanteras y traseras, respectivamente. Posteriormente trazamos un eje de simetría, el cual unirá los puntos de los segmentos de recta trazado anteriormente, pues el automóvil es simétrico.

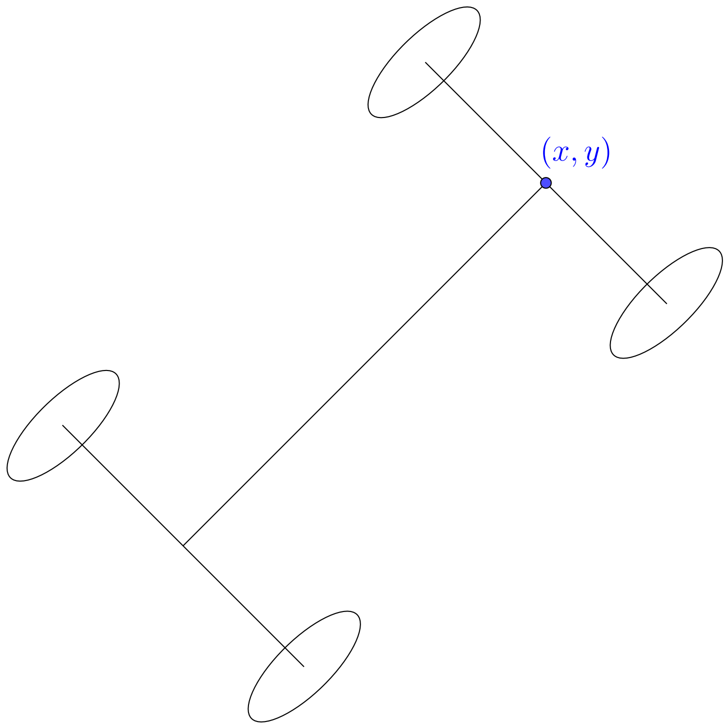

Figura A.1: Ejes de representación del automóvil

Sea (x, y) el punto de intersección del eje de simetría con el segmento de recta de las llantas delanteras (ver Figura A.1), a este punto le llamamos *punto de eje*.

Nosotros queremos analizar la “intención"de movimiento del automóvil en un instante de tiempo determinado, es decir, para cada periodo de tiempo se realizará el análisis que presentamos a continuación:

Vamos a considerar el ángulo que indica la dirección hacía la cual el automóvil desea dirigirse en el siguiente periodo de tiempo. Llamaremos θ a este ángulo. Consideraremos también el ángulo que forma las ruedas delanteras con el eje del automóvil para llegar a la dirección deseada, el cual llamaremos ϕ (nótese que θ y ϕ no son necesariamente iguales), como podemos ver en la Figura A.2.

Empecemos con la construcción del modelo. En primer lugar, dadas las limitaciones mecánicas del automóvil, podemos suponer que $\theta, \phi \in (-\pi/2, \pi/2)$, donde el signo de los ángulos se determinan con la convención usual.

Gracias al Ejemplo A.8, el conjunto $\mathbb{S}^1$ es una 1-variedad diferenciable. Ahora, definimos

$$\mathbb{S}^{1/2} := \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{S}^1 : x_1 > 0\}$$

y llamaremos a este conjunto la *semicircunferencia derecha de radio 1*. Notemos que este conjunto es abierto en $\mathbb{S}^1$ pues es la intersección de $\mathbb{S}^1$ con el interior de

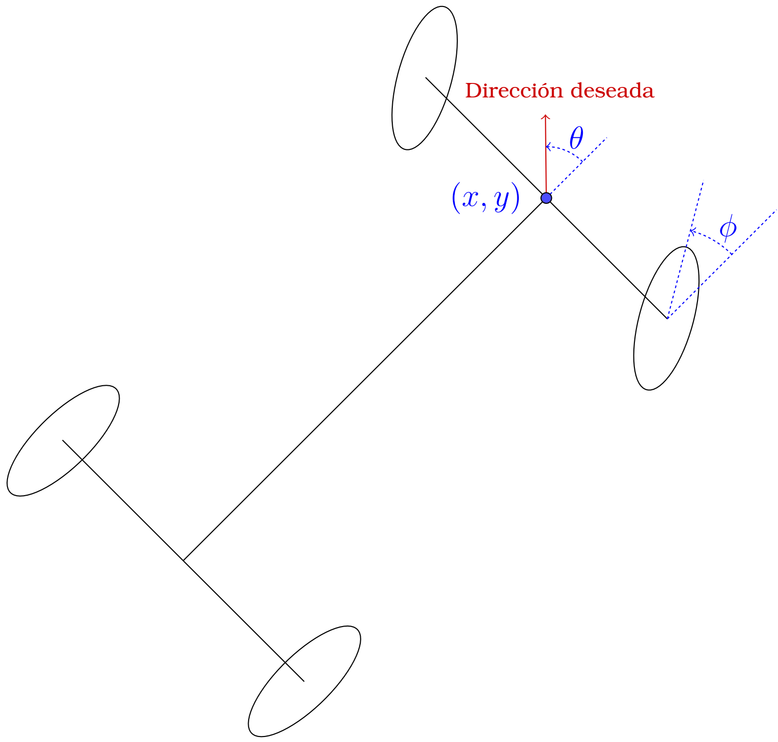

Figura A.2: Representación de los ángulos θ y ϕ

un rectángulo (ver Figura A.3), el cual es abierto en $\mathbb{R}^2$ con la topología usual.

Por tanto, usando el Ejemplo A.6, $\mathbb{S}^{1/2}$ es una subvariedad abierta de $\mathbb{S}^1$, así $\mathbb{S}^{1/2}$ es una 1-variedad diferenciable.

Ahora definimos

$$\mathbb{T}^{1/2} := \mathbb{S}^{1/2} \times \mathbb{S}^{1/2}$$

llamaremos a este conjunto *medio toro*. Como vimos en el Ejemplo A.9, este conjunto es una 2-variedad diferenciable.

Para la descripción, consideremos

$$M = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}^{1/2}.$$

Este conjunto es una 4-variedad diferenciable.

Consideramos ahora el mapa $\varphi : M \to \mathbb{R}^2 \times (-\pi/2, \pi/2)^2$, definido por

$$\varphi(x, y, z, w) = (x, y, \theta_z, \theta_w).$$

Aquí, para cada $u \in \mathbb{S}^{1/2}$, θ_u representa el ángulo medido desde el eje de las abscisas hacia el radio vector de u. Observando la Figura A.3, no es difícil deducir

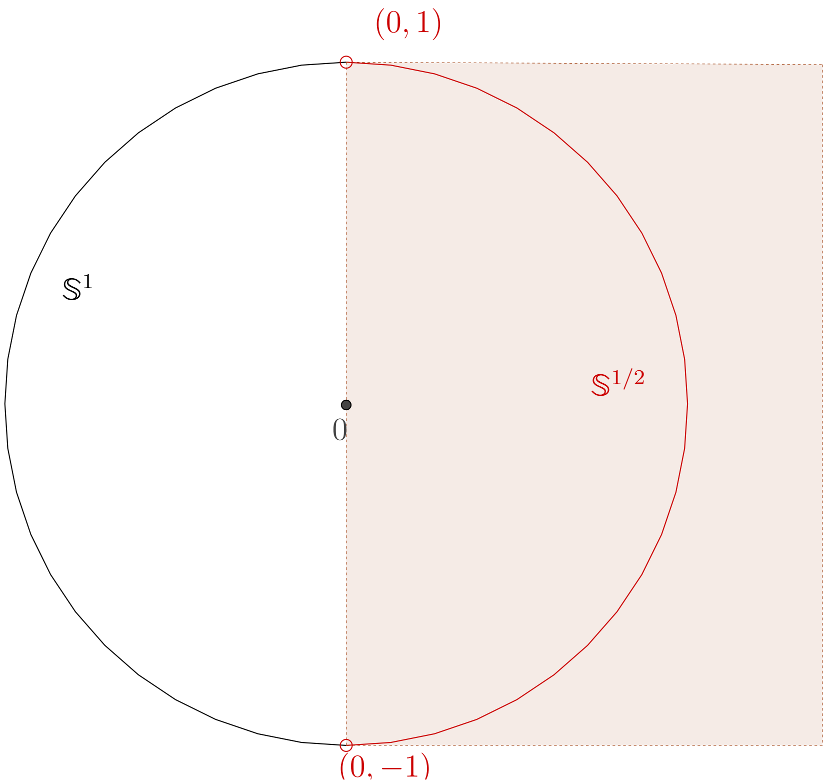

Figura A.3: $\mathbb{S}^{1/2}$ es abierto en $\mathbb{S}^1$

que $\theta_x \in (-\pi/2, \pi/2)$ para todo $x \in \mathbb{S}^{1/2}$. Además, estos ángulos son únicos en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$, por tanto φ está bien definido.

Usando el mapa φ podemos describir el automóvil de la siguiente manera: ubicamos el punto de eje (x, y), establecemos la dirección y su ángulo θ, finalmente, medimos el ángulo de las llantas delanteras ϕ. Por tanto, para cada instante de tiempo, tendremos la 4-upla (x, y, θ, ϕ).

Probemos ahora que (M, φ) es una carta coordenada. Para ello mostremos primero que φ es un homeomorfismo.

Para la inyectividad tenemos

$$\begin{aligned} &\varphi(x_1, y_1, z_1, w_1) = \varphi(x_2, y_2, z_2, w_2) \\ \Rightarrow &(x_1, y_1, \theta_{z_1}, \theta_{w_1}) = (x_2, y_2, \theta_{z_2}, \theta_{w_2}) \end{aligned}$$

concluimos, entonces, que $x_1 = x_2$ y $y_1 = y_2$. Además, vemos que $\theta_{z_1} = \theta_{z_2}$. De este hecho y como $\|z_1\| = \|z_2\| = 1$ obtenemos que $z_1 = z_2$, de manera similar $w_1 = w_2$.

Finalmente

$$(x_1, y_1, z_1, w_1) = (x_2, y_2, z_2, w_2)$$

por tanto φ es inyectiva.

Para la sobreyectividad notemos primero que, gracias a la restricción de los ángulos en $(-\pi/2, \pi/2)$, podemos calcular el ángulo de los puntos de la semicircunferencia de la siguiente manera: sea $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{S}^{1/2}$ entonces $\theta_x = \arctan(x_2/x_1)$.

Ahora, tomemos $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^2 \times (-\pi/2, \pi/2)^2$. Definamos

$$z = (\cos c, \operatorname{sen} c) \quad \text{y} \quad w = (\cos d, \operatorname{sen} d).$$

Como $c \in (-\pi/2, \pi/2)$ entonces $\cos c > 0$. Además $\|z\| = 1$, por tanto, $z \in \mathbb{S}^{1/2}$ y $\theta_z = \arctan(\operatorname{sen} c/\cos c) = c$. De manera similar $w \in \mathbb{S}^{1/2}$ y $\theta_z = d$.

Por tanto

$$\varphi(a, b, z, w) = (a, b, c, d)$$

así φ es sobreyectiva.

De lo anterior concluimos que φ es invertible, más aún, su función inversa φ^{-1} : $\mathbb{R}^2 \times (-\pi/2, \pi/2)^2 \to M$ viene dada por

$$\varphi^{-1}(x, y, \theta, \phi) = (x, y, (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta), (\cos\phi, \operatorname{sen}\phi))$$

la cual esta bien definida usando razonamientos similares a los que usamos en la sobreyectividad de φ.

Ahora para que φ sea un homeomorfismo falta verificar la continuidad de φ y su inversa. Para ello notemos que

$$\varphi(x, y, z, w) = (I_{\mathbb{R}^2}(x), I_{\mathbb{R}^2}(y), T(z), T(w))$$

donde T es el mapa definido por $T(x) = \theta_x$, para todo $x \in \mathbb{S}^{1/2}$, el cual es continuo pues si $x = (x_1, x_2) \in S^{1/2}$, entonces,

$$T(x) = T(x_1, x_2) = \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right).$$

Como la función $\arctan$ es continua, T es continua. Por tanto, φ es continua, pues cada función componente lo es.

De manera similar φ^{-1} es continua. Así concluimos que φ es un homeomorfismo.

Además como $\mathbb{R}^2 \times (-\pi/2, \pi/2)^2$ es abierto en $\mathbb{R}^4$ con la topología inducida por la norma $\|\cdot\|_\infty$, entonces, será abierto en la topología usual (pues las normas

$\|\cdot\|_\infty$ y $\|\cdot\|$ son equivalentes) así (M,φ) es una carta coordenada sobre M.

Más aún, φ es un difeomorfismo pues cada función componente de este mapa y de su inversa es infinitamente diferenciable. Por tanto, el conjunto

$$\mathcal{A} = \{(M,\varphi)\}$$

es un atlas suave.

Con esto hemos construido un espacio de configuración (variedad topológica diferenciable) para un automóvil.

Referencias bibliográficas

[1] D. L. COHN, *Measure Theory*, vol. 1, Springer, 2013.

[2] G. JERONIMO, J. SABIA, AND S. TESAURI, *Álgebra lineal*, Universidad Buenos Aires: Facultad de Ciencias Económicas y Negocios, 2008.

[3] S. LANG, *Calculus of Several Variables*, Springer Science & Business Media, 1973.

[4] J. LEE, *Introduction to Smooth Manifolds*, Second Edition, Springer Science & Business Media, 2003.

[5] L. LEITHOLD, *El Cálculo*, Harla, 7a. ed., 1998.

[6] J. R. MUNKRES, *Elements of Algebraic Topology*, CRC Press, 2018.

[7] E. NELSON, *Tensor Analysis*, Princeton University Press, 2015.

[8] A. N. PRESSLEY, *Elementary Differential Geometry*, Springer Science & Business Media, 2010.

[9] W. ROSSMANN, *Lectures on Differential Geometry*, Uattawa University, Faculty Of Sciences, 2003.