ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS

TÓPICOS DE VARIEDADES DIFERENCIABLES

EL TEOREMA DE SARD

TRABAJO DE INTEGRACIÓN CURRICULAR PRESENTADO COMO REQUISITO PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE MATEMÁTICO

JEFFERSON ANDRÉS QUISPE HERRERA

jefferson.quispe@epn.edu.ec

DIRECTORA: M.Sc. ZULY LEONELA SALINAS PILLAJO

zuly.salinas@epn.edu.ec

DISTRITO METROPOLITANO DE QUITO, SEPTIEMBRE 2022

CERTIFICACIONES

Yo, JEFFERSON ANDRÉS QUISPE HERRERA declaro que el trabajo de integración curricular aquí descrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y, que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

Jandremk

Jefferson Andrés Quispe Herrera

Certifico que el presente trabajo de integración currivular fue desarrollado por JEFFERSON ANDRÉS QUISPE HERRERA, bajo mi supervisión.

M.Sc. Zuly Leonela Salinas Pillajo
DIRECTORA

DECLARACIÓN DE AUTORÍA

A través de la presente declaración, afirmamos que el trabajo de integración curricular aquí descrito, así como el(los) producto(s) resutante(s) del mismo, es(son) público(s) y estará(n) a disposición de la comunidad a través del repositorio institucional de la Escuela Politécnica Nacional; sin embargo, la titularidad de los derechos patrimoniales nos corresponde a los autores que hemos contribuido en el desarrollo del presente trabajo; observando para el efecto las disposiciones establecidad por el órgano competente en propiedad intelectual, la normativa interna y demás normas.

Jefferson Andrés Quispe Herrera

M.Sc. Zuly Leonela Salinas Pillajo

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a mis padres, Alba y Segundo, por ser ese ejemplo de superación, humildad y sacrificio; enseñandome a valorar todo lo que tengo, y a quienes les debo cada uno de mis logros alcanzados, en virtud de que han estado presentes en cada uno de ellos brindandome la fortaleza y apoyo necesario para poder cumplirlos.

A mi hermano y cuñada, Stalin y Aracely, quienes con sus palabras de aliento no me dejaban decaer para que siguiera adelante y cumpla con cualquier objetivo que me proponga.

A mis sobrinas, Alba y Alice, por ser mi fuente de motivación e inspiración.

A mi tía y abuelo, Martha y Jorge, por haber sido un gran ejemplo de perseveración y superación y ahora desde el cielo son mi guía.

A la M.Sc. Zuly Salinas, por la paciencia y guía que me brindo a lo largo de la carrera y es hoy la gran impulsadora en la finalización de este trabajo.

DEDICATORIA

A mis padres y mi hermano.
Gracias por estar siempre a mi lado apoyándome. Se lo merecen todo.

RESUMEN

Este trabajo tiene como fin realizar la demostración del Teorema de Sard, el cual constituye un resultado importante en la Teoría de Variedades. Éste nos dice que todo conjunto de valores críticos de una función suave tiene medida nula. Para iniciar, introducimos conceptos como: variedades diferenciables, mapas suaves entre variedades y espacio tangente a una variedad en un punto. Luego, presentamos el concepto de diferenciabilidad para un mapa definido entre variedades. Además, extendemos el concepto de conjuntos de medida nula a la Teoría de Varidades Diferenciables. Finalmente presentamos la demostración de nuestro resultado principal.

PALABRAS CLAVE: Variedades Diferenciables, mapas suaves, conjuntos de medida nula, subvariedades, Teorema de Sard.

ABSTRACT

The purpose of this paper is to show the Sard's Theorem, which is an important result in the Theory of Manifolds. It tells us that every set of critical values of a smooth function has null measure. To begin with, we introduce concepts such as: smooth manifolds, smooth maps between manifolds and tangent space to a manifold at a point. Then, we introduce the concept of differentiability for a smooth map between manifolds. Furthermore, we extend the concept of sets of zero measure to the manifolds framework. Finally, we present the proof of our main result.

KEYWORDS: Smooth manifolds, smooth maps, zero measure sets, submanifolds, Sard's Theorem.

Índice general

Capítulo 1

Descripción del componente desarrollado

1.1. Objetivo general

Explicar la razón por la cual el conjunto de puntos críticos de una función suave entre dos variedades diferenciables tiene medida nula.

1.2. Objetivos específicos

1. Revisar los conceptos y resultados básicos de la teoría de Variedades Topológicas y Diferenciables.
2. Adaptar el concepto de punto crítico al contexto de un mapa entre variedades diferenciables.
3. Extender el concepto de conjuntos de medida nula a la teoría de variedades.

1.3. Alcance

Precisaremos el concepto de variedades diferenciables, con este concepto a la mano, nos abrimos camino para definir funciones suaves sobre variedades y mapas suaves entre variedades. Introduciremos el concepto de espacio tangente a una variedad en un punto, para que el cálculo en las variedades tenga sentido. Además, adaptaremos el concepto de punto crítico al contexto de un mapa entre variedades diferenciables. Extenderemos el concepto de conjuntos de medida nula a la teoría de variedades para finalmente, con los conceptos previos en mente procederemos a la demostración del Teorema de Sard.

1.4. Marco teórico

En la Teoría del Cálculo en Varias Variables, un *punto crítico* de una función $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ es un elemento de su dominio en donde dicha función no es diferenciable o su jacobiano en ese punto es cero. En cambio, el *valor crítico* de una función, no es más que el valor que toma la función al evaluarse en un punto crítico. Por ejemplo, consideremos la función

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\mapsto \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \operatorname{sen}(x), \end{aligned}$$

la cual es suave. En este caso, el conjunto de puntos críticos de f, no es más que el conjunto de puntos donde la función coseno se anula, es decir, el conjunto

$$C = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Notemos que C es un conjunto infinito de puntos, sin embargo, la imagen directa de C a través de f, es decir, el conjunto de valores críticos de f es

$$f(C) = \{-1, 1\},$$

el cual es finito, y en consecuencia tiene medida de Lebesgue nula. En general, este hecho es cierto no solo para nuestro ejemplo, sino para cualquier función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que sea $\mathcal{C}^1$. A esta observación se le conoce como el Teorema de Sard, y ha encontrado diversas aplicaciones en el campo de las Ecuaciones en Derivadas Parciales (ver [4, Proposición 1.3]) y en Topología (ver [4, Sección 2.3]).

Capítulo 2

Metodología

En este capítulo introducimos un resultado importante en la teoría de variedades, al que conocemos como Teorema de Sard, el cual nos dice que el conjunto de valores críticos de una función suave tiene medida nula. Este resultado es fundamental en el estudio de las propiedades de las variedades diferenciables que se preservan por difeomorfismos o por deformaciones suaves.

En la Sección 2.1 presentamos todos los conceptos y resultados básicos de la Teoría de Variedades Diferenciables; recomendamos al lector familiarizado con estos tópicos a omitir esta sección. En la Sección 2.2 estudiaremos algunos resultados sobre conjuntos de medida nula en $\mathbb{R}^n$, para con ello definir el concepto de conjunto de medida nula en las variedades y finalmente realizar la demostración del Teorema de Sard, que nos dice que, el conjunto de puntos críticos de una función suave entre dos variedades diferenciables tiene medida nula.

2.1. Resultados preliminares

En esta sección presentamos las definiciones y resultados básicos sobre Topología, Cálculo y Teoría de Variedades Diferenciables. Para un estudio profundo de los resultados aquí expuestos, referimos al lector a [1] y [3].

2.1.1. Cálculo diferencial

En esta sección vamos a presentar definiciones y resultados que nos serán de utilidad para poder extender la noción de conjuntos de medida nula a la teoría de variedades.

Derivada total

Sean $(V, \|\cdot\|_1)$, $(W, \|\cdot\|_2)$ espacios vectoriales normados de dimensión finita. Sean $U \subseteq V$ un subconjunto abierto, $a \in U$ y $F : U \to W$ un mapa. Decimos que F es **diferenciable en** a cuando existe un mapa lineal $L : V \to W$ tal que

$$\lim_{v \to 0} \frac{\|F(a+v) - F(a) - L(v)\|_2}{\|v\|_1} = 0. \tag{2.1}$$

Escribimos $L := DF(a)$ y llamamos la **derivada total de** F **en** a**.**

La condición (2.1) puede ser reescrita por

$$F(a+v) = F(a) + DF(a)(v) + R(v),$$

donde

$$R(v) = F(a+v) - F(a) - DF(a)(v)$$

es tal que

$$\lim_{v \to 0} \frac{\|R(v)\|_2}{\|v\|_1} = 0.$$

Por lo tanto, la derivada total representa la mejor aproximación lineal a $F(a+v) - F(a)$, cerca de a.

A continuación, presentamos la regla de la cadena para derivadas totales.

Proposición 2.1. *Supongamos que* V, W, X *son espacios vectoriales normados de dimensión finita,* $U \subseteq V$ *y* $\hat{U} \subseteq W$ *subconjuntos abiertos,* $F : U \to \hat{U}$ *y* $G : \hat{U} \to X$ *dos mapas tales que* $F(U) \subseteq \hat{U}$. *Si* F *es diferenciable en* $a \in U$ *y* G *es diferenciable en* $F(a) \in \hat{U}$, *entonces* $G \circ F$ *es diferenciable en* a, *y*

$$D(G \circ F)(a) = DG(F(a)) \circ DF(a).$$

Demostración. Ver [1, Proposición C.3] □

Derivadas parciales

En adelante, trabajamos con mapas entre espacios Euclideanos. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y

$$\begin{aligned} f : U &\to \mathbb{R} \\ x = (x_1, \ldots, x_n) &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

una función real-valuada. Dados $a = (a_1, \ldots, a_n) \in U$ y $j \in \{1, \ldots, n\}$, la $j-$**ésima derivada parcial de** f **en** a se define como la derivada ordinaria de f con respecto a x^j, manteniendo fijas las demás variables. En otras palabras, tenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_j + h, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_n)}{h},$$

si el límite existe.

De manera más general, para una función vector-valuada $F : U \to \mathbb{R}^m$, escribimos las coordenadas de $F(x)$ como

$$F(x) = (F_1(x), \ldots, F_m(x)),$$

donde $F_1, \ldots, F_m : U \to \mathbb{R}$ son m funciones llamadas las **funciones componente de** F**.** Una **derivada parcial de** F son simplemente las derivadas parciales

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$$

de sus funciones componentes. La matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \frac{\partial F_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

de las derivadas parciales de F es llamada la **matriz Jacobiana de** F**.**
Si $F : U \to \mathbb{R}^m$ es una función, para la cual cada derivada parcial existe en cada punto de U y las funciones $\frac{\partial F_i}{\partial x_j} : U \to \mathbb{R}$ son todas continuas, entonces F se dice es de clase $\mathcal{C}^1$ o **continuamente diferenciable.** En este caso, podemos diferenciar las funciones $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$ para obtener las **derivadas**

parciales de segundo orden

$$\frac{\partial^2 F_i}{\partial x_k \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)$$

si existen. Siguiendo esta idea la **derivada parcial de** F **de orden** k son las derivadas parciales de las de orden $k-1$, cuando existen.
En general, dados $U \subseteq \mathbb{R}^n$ subconjunto abierto, k un entero no negativo y $F : U \to \mathbb{R}^m$ un mapa. Decimos que F es **clase** $\mathcal{C}^k$,o k **veces continuamente diferenciable,** cuando todas la derivadas parciales de F, de orden menor o igual que k, existen y son funciones continuas sobre U.
Decimos que F es de clase $\mathcal{C}^\infty$, **suave** o **infinitamente diferenciable,** cuando las derivadas parciales de F de todos los ordenes existen y son funciones continuas sobre U.

Nota 2.1. *Un mapa de clase* $\mathcal{C}^0$ *es solo un mapa continuo.*

Definición 2.1. *Sean* $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *y* $V \subseteq \mathbb{R}^m$ *subconjuntos abiertos , un mapa* $F : U \to V$ *es llamado un* ***difeomorfismo*** *si es un mapa suave y biyectivo, y su inversa también es suave.*

En algunas ocasiones necesitamos considerar la suavidad de funciones cuyos dominios no son subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$. Por esta razón, presentamos el siguiente concepto

Definición 2.2. *Sean* $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *un subconjunto cualquiera y* $F : A \to \mathbb{R}^n$ *un mapa. Decimos que* F *es* ***suave en*** A *cuando para cada* $x \in A$*, existen* $U_x \subseteq \mathbb{R}^n$ *subconjunto abierto tal que* $x \in U_x$ *y un mapa suave* $\tilde{F} : U_x \to \mathbb{R}^m$ *que coincide con* F *en* $U_x \cap A$.

Probablemente conozca el teorema de Taylor, que muestra cómo una función suave puede ser aproximada, en una vecindad de un punto, por un polinomio. A continuación, presentamos una versión del teorema de Taylor en varias variables. Para ello, introducimos la siguiente notación. Sea $I = (i_1, \ldots, i_m)$ una $m-$tupla de índices con $1 \leq i_j \leq n$, denotamos por $|I| = m$ el número de índices en I, y además

$$\partial_I := \frac{\partial^m}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_m}},$$
$$(x-a)^I := (x_{i_1} - a_{i_1}) \cdots (x_{i_m} - a_{i_m}).$$

Teorema 2.1 (Taylor)**.** *Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un subconjunto abierto, $a \in U$ y $f \in C^{k+1}(U)$ para algún $k \geq 0$. Si W es un subconjunto convexo de U tal que $a \in W$, entonces para todo $x \in W$, tenemos*

$$f(x) = P_k(x) + R_k(x),$$

donde P_k es el ***polinomio de Taylor de orden k de f*** *en a, definido por*

$$P_k(x) = f(a) + \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{m!} \sum_{|I|=m} \partial_I f(a)(x-a)^I, \tag{2.2}$$

y R_k es el $k-$ésimo término restante, dado por

$$R_k(x) = \frac{1}{k!} \sum_{|I|=k+1} (x-a)^I \int_0^1 (1-t)^k \partial_I f(a + t(x-a))dt.$$

Demostración. Ver [1, Teorema C.15]. □

Corolario 2.1. *Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un subconjunto abierto, $a \in U$ y $f \in C^{k+1}(U)$ para algún $k \geq 0$. Si W es un subconjunto convexo de U tal que $a \in W$ sobre el cual todas las $(k+1)-$ésimas derivadas parciales de f están acotadas en valor absoluto por una constante M, entonces para todo $x \in W$, se tiene*

$$|f(x) - P_k(x)| \leq \frac{n^{k+1}M}{(k+1)!}|x-a|^{k+1},$$

donde P_k es el polinomio de Taylor de orden k de f en a, definido por (2.2)*.*

Demostración. Ver [1, Corolario C.16]. □

2.1.2. Conjuntos de medida nula

Un **rectángulo cerrado** en $\mathbb{R}^n$ es el producto de n intervalos cerrados de $\mathbb{R}$, es decir, conjuntos de la forma

$$[a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n],$$

donde $a_i < b_i$, para cualquier $i = 1, \ldots, n$. De manera análoga, un **rectángulo abierto** en $\mathbb{R}^n$ es el producto de n intervalos abiertos de $\mathbb{R}$, es decir, conjuntos de la forma

$$(a_1, b_1) \times \ldots \times (a_n, b_n),$$

en donde $a_i < b_i$, para cualquier $i = 1, \ldots, n$.

Definición 2.3. *Dado A un rectángulo de cualquier tipo (cerrado o abierto) en $\mathbb{R}^n$, el **volumen de A** ($A=[a_1,b_1]\times\ldots\times[a_n,b_n]$ o $A=(a_1,b_1)\times\ldots\times(a_n,b_n)$) denotado por $Vol(A)$, es la cantidad*

$$Vol(A)=\prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i)=(b_1-a_1)\cdots(b_n-a_n).$$

Nota 2.2. *Decimos que un rectángulo $[a_1,b_1]\times\ldots\times[a_n,b_n]$ (o $(a_1,b_1)\times\ldots\times(a_n,b_n)$) es un **cubo** cerrado (abierto) cuando*

$$b_i-a_i=b_j-a_j$$

para cada $i,j=1,\ldots,n$.

Definición 2.4. *Decimos que $X\subseteq\mathbb{R}^n$ tiene **medida nula** cuando para cada $\delta>0$, existe un recubrimiento numerable de rectángulos abiertos $\{C_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de X tal que*

$$\sum_{k\in\mathbb{N}}Vol(C_k)<\delta.$$

*Además, decimos que X tiene **medida nula** $n-$**dimensional** cuando X tiene medida nula como subconjunto de $\mathbb{R}^n$.*

Como un primer resultado de esta sección, presentamos algunas de las propiedades de los conjuntos de medida nula, en el sentido que precisamos anteriormente.

Proposición 2.2. *a) Si $A\subseteq\mathbb{R}^n$ es un subconjunto de medida nula y $x_0\in\mathbb{R}^n$, entonces el subconjunto trasladado*

$$x_0+A:=\{x_0+a:a\in A\}$$

también tiene medida nula.

b) Cualquier subconjunto de un conjunto de medida nula en $\mathbb{R}^n$ tiene medida nula.

c) La unión numerable de conjuntos de medida nula en $\mathbb{R}^n$ también tiene medida nula.

Demostración. a) Sea $\delta>0$, cualquiera. Por hipótesis, existe una familia numerable de rectángulos abiertos $\{d_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que

$$A\subseteq\bigcup_{k\in\mathbb{N}}d_k \quad \text{y} \quad \sum_{k\in\mathbb{N}}Vol(d_k)<\delta. \tag{2.3}$$

Tomando $c_k := d_k + x_0$, para cada $k \in \mathbb{N}$, probemos que $\{c_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una familia de rectángulos abiertos tal que

$$A + x_0 \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} c_k \quad \text{y} \quad \sum_{k\in\mathbb{N}} Vol(c_k) < \delta. \tag{2.4}$$

Sea $k \in \mathbb{N}$, cualquiera. Consideremos el mapa

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ z &\mapsto \varphi(z) = z - x_0, \end{aligned}$$

el cual es continuo sobre $\mathbb{R}^n$. Como d_k es un rectángulo abierto y φ es continuo sobre $\mathbb{R}^n$, se tiene que $\varphi^{-1}(d_k) = d_k + x_0$ es un rectángulo abierto. Ya que k es arbitrario, se sigue que

$$c_k = d_k + x_0$$

es abierto, para cada $k \in \mathbb{N}$. Además, por (2.3) tenemos que

$$A + x_0 \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (d_k + x_0) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} c_k,$$

gracias a lo cual, $\{c_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es un recubrimiento numerable de rectángulos abiertos para $A + x_0$. Luego, puesto que el volumen es invariante bajo traslaciones, es decir,

$$Vol(d_k + x_0) = Vol(d_k),$$

para cada $k \in \mathbb{N}$, se sigue que

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} Vol(c_k) < \delta.$$

En resumen, hemos probado que (2.4) se cumple. Finalmente, puesto que δ es arbitrario, se sigue que $A + x_0$ tiene medida nula.

b) Dado $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto de medida nula. Sea $B \subseteq A$, cualquiera. Sea $\delta > 0$, cualquiera. Por hipótesis, existe un familia numerable de rectángulos abiertos $\{c_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que

$$A \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} c_k \quad \text{y} \quad \sum_{k\in\mathbb{N}} Vol(c_k) < \delta. \tag{2.5}$$

Puesto que $B \subseteq A$ se tiene que

$$B \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} c_k \quad \text{y} \quad \sum_{k\in\mathbb{N}} Vol(c_k) < \delta. \tag{2.6}$$

Como δ es arbitrario, se sigue que B tiene medida nula.

c) Sea $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una familia numerable de conjuntos de medida nula en $\mathbb{R}^n$, cualquiera. Vamos a probar que $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} A_k$ tiene medida nula.

Sea $\delta > 0$, cualquiera. Por hipótesis, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe una familia de rectángulos abiertos $\{d_j^k\}_{j\in\mathbb{N}}$ tal que

$$A_k \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} d_j^k \quad \text{y} \quad \sum_{j\in\mathbb{N}} Vol(d_j^k) < \frac{\delta}{2^k}. \tag{2.7}$$

Notemos que, para cada $k \in \mathbb{N}$

$$c_k := \bigcup_{j\in\mathbb{N}} d_j^k$$

es abierto, pues es la unión numerable de abiertos. Así, $\{c_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una familia de rectángulos abiertos que por (2.6) verifica

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} d_j^k \right) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} c_k.$$

Probemos que para cada $k \in \mathbb{N}$

$$Vol(c_k) \leq \sum_{j\in\mathbb{N}} Vol(d_j^k). \tag{2.8}$$

Sea $k \in \mathbb{N}$, cualquiera. Consideremos $\{b_m^k\}_{m\in\mathbb{N}}$la familia de rectángulos abiertos en $\mathbb{R}^n$ construidos a partir de $\{d_m^k\}_{m\in\mathbb{N}}$ de la siguiente forma

$$b_0^k = d_0^k \quad \text{y} \quad b_m^k = d_m^k \setminus \bigcup_{i=0}^{m-1} d_i^k.$$

Vemos que, para cada $m \in \mathbb{N}$

$$b_m^k \subseteq d_m^k,$$

de donde se tiene que

$$Vol(b_m^k) \leq Vol(d_m^k), \tag{2.9}$$

para cada $m \in \mathbb{N}$. Luego, como los rectángulos b_m^k son disjuntos para todo $m \in \mathbb{N}$ y verifican

$$\bigcup_{m\in\mathbb{N}} b_m^k = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} d_m^k,$$

se sigue que

$$Vol\left(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} d_m^k\right) = Vol\left(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} b_m^k\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}} Vol(b_m^k).$$

Por lo tanto, por (2.9) y como k es arbitrario, hemos probado que (2.8) es cierto.

Finalmente, por (2.8) y por (2.7) se tiene que

$$Vol(c_k) \leq \frac{\delta}{2^k}$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. En consecuencia,

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} Vol(c_k) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\delta}{2^k} = \delta.$$

Como δ es arbitrario, se sigue el resultado.

□

Un subconjunto $D \subseteq \mathbb{R}^n$ es llamado **dominio de integración** cuando D es acotado y su frontera tiene medida nula $n-$dimensional.

Definición 2.5. *Sea $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un dominio de integración. Definimos el* ***volumen de D*** *como*

$$Vol(D) = \int_D 1 dV.$$

La siguiente proposición nos indica algunos resultados básicos sobre el volumen de un subconjunto de $\mathbb{R}^n$.

Proposición 2.3. *Sea $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un dominio de integración.*

a) Si D es un rectángulo de cualquier tipo (abierto o cerrado) en $\mathbb{R}^n$, entonces la Definición 2.3 y la Definición 2.5 coinciden.

b) *$Vol(D) \geq 0$, la igualdad se da si y sólo si D tiene medida nula $n-$dimensional.*

c) *Si $D_1, \ldots, D_k$ son dominios de integración tales que su unión es D, entonces*

$$Vol(D) \leq Vol(D_1) + \cdots + Vol(D_k).$$

La igual se cumple si y sólo si $D_i \cap D_j$ tiene medida nula $n-$ dimensional, para cada i, j con $i \neq j$.

d) *Si $\hat{D}$ es un dominio de integración contenido en D, entonces*

$$Vol(\hat{D}) \leq Vol(D).$$

La igualdad se da si y sólo si $D \backslash \hat{D}$ tiene medida nula $n-$ dimensional.

Demostración. Ver [1, Proposición C.22] □

Corolario 2.2. *Cualquier conjunto de medida nula en $\mathbb{R}^n$ no contiene ningún subconjunto abierto no vacío.*

Demostración. Sea $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un subconjunto de medida nula $n-$dimensional, cualquiera. Supongamos por el absurdo que existe un subconjunto abierto U, no vacío tal que

$$U \subseteq D.$$

Puesto que U es abierto se puede expresar como la unión numerable de rectángulos abiertos no vacíos. Así, existe un rectángulo abierto no vacío $A \subseteq U$ tal que

$$Vol(A) > 0,$$

lo cual, por la Proposición 2.3 (literal b)) nos indica que A no tiene medida nula $n-$dimensional. Por otro lado, puesto que $A \subseteq D$ y por hipótesis D tiene medida nula $n-$dimensional, por la Proposición 2.2 (literal b)), se tiene que, A tiene medida nula $n-$dimensional, lo cual no es posible. En consecuencia, D no contiene ningún subconjunto abierto no vacío. Como D es arbitrario, se sigue el resultado.

□

Un último resultado en esta sección, trata de el comportamiento local de una función $\mathcal{C}^1$.

Proposición 2.4. *Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ subconjunto abierto y $F : U \to \mathbb{R}^m$ un mapa. Si F es de clase $\mathcal{C}^1$, entonces F es Lipschitz continua sobre todo compacto convexo $K \subseteq U$.*

Demostración. Ver [1, Proposición C.29]. □

2.1.3. Variedades topológicas y diferenciables

En esta sección presentamos el concepto de variedad diferenciable, que en términos simples, es un espacio topológico que se asemeja localmente a un espacio Euclideano $\mathbb{R}^n$, y sobre el cual podemos realizar cálculo.

El concepto de variedad topológica es menos exigente que el de variedad diferenciable. A grosso modo, una variedad topológica es un espacio topológico con ciertas propiedades que localmente se identifica con un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. A continuación se presenta la definición:

Definición 2.6. *Sea M un espacio topológico. Decimos que M es una* ***variedad topológica de dimensión*** n***,*** *o una n-**variedad topológica,** cuando se verifica las siguientes propiedades:*

- *M es un espacio de Haussdorff.*
- *M es segundo contable.*
- *M es localmente Euclideano de dimensión n, es decir, para cada $p \in M$ existen $U \subseteq M$ vecindad abierta de p, $\hat{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y $\varphi : U \to \hat{U}$ tales que φ es un homeomorfismo.*

Nota 2.3. *Una propiedad de los espacios topológicos segundo contables, es que, todo recubrimiento abierto de un espacio segundo contable admite un subrecubrimiento abierto numerable. Así, todo recubrimiento abierto de una variedad topológica de dimensión n admite un subrecubrimiento abierto numerable.*

Un ejemplo de una variedad topológica de dimensión n es el espacio Euclieano $\mathbb{R}^n$. Puesto que es de Haussdorff (ya que es un espacio métrico), y es segundo contable, pues el conjunto de todas las bolas abiertas con centros y radios racionales es una base contable para su topología. Además no es difícil ver que es localmente Euclediano de dimensión n, a través del mapa identidad.

Definición 2.7. *Sea M una variedad topológica de dimensión n. Una* ***carta de coordenadas****, o simplemente* ***carta****, es un par (U, φ), donde $U \subseteq M$ es abierto y $\varphi : U \to \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo.*

La definición de variedades presentada es útil para estudiar propiedades topológicas de las variedades, tales como, compacidad, conexidad, entre otras. Sin embargo, en la teoría de variedades topológicas no podemos realizar cálculo alguno. Por esta razón, procedemos a presentar algunas definiciones que nos serán de utilidad para poder realizar cálculo sobre variedades

Definición 2.8. *Un* ***atlas*** *para M es el conjunto de cartas cuyos dominios recubren M.*

Definición 2.9. *Decimos que dos cartas (U,φ) y (V,ψ) sobre M son* ***suavemente compatibles*** *cuando, o $U\cap V=\emptyset$, o $\psi\circ\varphi^{-1}$ es un difeomorfismo.*

Definición 2.10. *Un* ***atlas diferenciable*** *sobre M es un atlas para el cual cada una de sus cartas son suavemente compatibles.*

Definición 2.11. *Una* ***estructura diferenciable*** *sobre una variedad topológica M es un atlas diferenciable $\mathscr{A}$ el cual es maximal, es decir, un atlas diferenciable $\mathscr{A}$ que no está contenido estrictamente en otro atlas diferenciable sobre M.*

Definición 2.12. *Una* ***variedad diferenciable*** *de dimensión n es un par $(M,\mathscr{A})$, para el cual M es una variedad topológica de dimensión n y $\mathscr{A}$ es una estructura diferenciable sobre M.*

Un ejemplo de variedades diferenciables, es la **variedad de dimensión** 0. ¿Qué significa que M sea una variedad topológica de dimensión 0?. En este caso, para cada $p\in M$ la única vecindad de p que es homeomorfa a un abierto de $\mathbb{R}^0$ es $\{p\}$, con mapa coordenada

$$\varphi:\{p\}\to\mathbb{R}^0.$$

Así, M debe estar provisto de la topología discreta. En este caso, todas las cartas sobre M son suavemente compatibles, y además M deber ser numerable, admitiendo una única estructura diferenciable.

Nota 2.4. *Una carta suave (U,φ) sobre una variedad diferenciable M de dimensión n, suele pensarse como una* ***identificación*** *entre U y $\varphi(U)$ a través del homeomorfismo φ. Usando esta identificación podemos pensar en U como un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. Además, bajo esta identificación, podemos representar cada punto $p\in U$ por sus coordenadas $\varphi(p)=(x_1,\dots,x_n)$*

y pensar que esta $n-$tupla es el punto p. Llamamos

$$(x_1,\ldots,x_n)$$

*la **representación en coordenadas de** p o $p=(x_1,\ldots,x_n)$ en coordenadas locales.*

2.1.4. Mapas suaves

La razón principal por la cual introducimos el concepto de estructura diferenciable fue para permitirnos definir funciones suaves sobre variedades y mapas suaves entre variedades, como vemos a continuación.

Definición 2.13. *Sean M una variedad diferenciable de dimensión n, k un entero no negativo y $f: M \to \mathbb{R}^k$. Decimos que f es **suave** cuando para cada $p \in M$, existe una carta suave (U,φ) sobre M cuyo dominio contiene p y tal que la función compuesta*

$$f \circ \varphi^{-1}$$

es suave sobre el abierto $\varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$.

Nota 2.5. *Denotamos por*

$$C^\infty(M) := \{f : M \to \mathbb{R} : f \text{ es suave}\},$$

el cual es un espacio vectorial real con las operaciones usuales de suma y producto por escalar de funciones.

Definición 2.14. *Sean M una variedad diferenciable, $f: M \to \mathbb{R}^k$ una función y (U,φ) una carta sobre M. La función*

$$\begin{aligned} \hat{f} : \varphi(U) &\to \mathbb{R}^k \\ x &\mapsto \hat{f}(x) = f \circ \varphi^{-1}(x) \end{aligned}$$

*es llamada la **representación en coordenadas de f** en la carta (U,φ).*

Definición 2.15. *Sean M y N variedades diferenciables y $F: M \to N$ un mapa. Decimos que F es **suave** cuando, para cada $p \in M$, existen cartas suaves (U,φ), (V,ψ) sobre M y N, respectivamente, para las cuales $p \in U$, $F(p) \in V$, $F(U) \subseteq V$ y*

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$$

es suave. A $\hat{F} := \psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ le llamamos ***representación en coordenadas de F.***

El primer resultado importante de esta sección, así como en el caso del Cálculo Diferencial, nos indica que la suavidad de una función implica continuidad.

Proposición 2.5. *Todo mapa suave entre variedades es continuo.*

Demostración. . Ver [1, Proposición 2.4] □

A continuación, presentaremos el concepto de difeomorfimos que son mapas suaves biyectivos y con inversa suave.

Definición 2.16. *Sean M y N variedades diferenciables y $F : M \to N$ un mapa. Decimos que F es un* ***difeomorfismo*** *entre M y N cuando F es suave, biyectiva y F^{-1} también es suave. Decimos que M y N son* ***difeomorfos*** *cuando existe un difeomorfismo entre ellos, y escribimos $M \approx N$.*

2.1.5. Vectores tangentes

Para que el cálculo en la teoría de variedades tenga sentido, necesitamos introducir el concepto de espacio tangente a una variedad en un punto. Debido a lo abstracto de la definición de variedad diferenciable, esto requiere de unos conceptos previos que los presentaremos en esta sección.

Vectores tangentes geométricos

Sea $a \in \mathbb{R}^n$ un punto, al conjunto

$$\mathbb{R}^n_a := \{a\} \times \mathbb{R}^n = \{(a, v) : v \in \mathbb{R}^n\}$$

le llamamos **espacio tangente geométrico a** $\mathbb{R}^n$ en a. Escribimos v_a o $v|_a$ en lugar de (a, v). El conjunto $\mathbb{R}^n_a$ es un espacio vectorial bajo las operaciones:

- **Suma:** Para cada x_a, $y_a \in \mathbb{R}^n_a$,

$$x_a + y_a := (x + y)_a;$$

- **Producto por escalar:** Para cada $x_a \in \mathbb{R}^n_a$ y $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\alpha x_a := (\alpha x)_a.$$

Definición 2.17. *Dado $a \in \mathbb{R}^n$, decimos que*

$$\omega : C^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$$

*es una **derivación en a** cuando es lineal y satisface la identidad*

$$\omega(fg) = f(a)\omega(g) + g(a)\omega(f)$$

para cada $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Denotamos por $T_a\mathbb{R}^n$ al conjunto de todas las derivaciones en a. Notemos que, el conjunto $T_a\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial bajo las operaciones:

- ***Suma:** Para cada $\omega_1,\ \omega_2 \in T_a\mathbb{R}^n$*

  $$(\omega_1 + \omega_2)f := \omega_1 f + \omega_2 f\ ;$$

  para cada $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

- ***Producto por escalar:** Para cada $\omega \in T_a\mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$,*

  $$\alpha\omega(f) := \alpha(\omega f)\ ;$$

  para cada $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Sea $v_a \in \mathbb{R}^n$ un vector tangente geométrico cualquiera. Definimos la función

$$\begin{aligned} D_v|_a : C_\infty(\mathbb{R}^n) &\to \mathbb{R} \\ f \mapsto D_v|_a(f) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(a+tv) \end{aligned}$$

la cual es lineal y satisface la regla de Leibniz

$$D_v|_a(fg) = f(a)D_v|_a(g) + g(a)D_v|_a(f).$$

Proposición 2.6. *Sean $a \in \mathbb{R}^n$, $\omega \in T_a\mathbb{R}^n$ y $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, se tiene que*

1. *Si f es constante entonces $\omega f = 0$;*

2. *Si* $f(a) = g(a) = 0$ *entonces* $\omega(fg) = 0$.

Demostración. Ver [1, Lema 3.1]. □

Proposición 2.7. *Dado cualquier* $a \in \mathbb{R}^n$, *se tiene que el mapa*

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n_a &\to T_a\mathbb{R}^n \\ v_a &\mapsto D_v|_a \end{aligned}$$

establece un isomorfismo entre $\mathbb{R}^n_a$ *y* $T_a\mathbb{R}^n$.

Demostración. Ver [1, Proposición 3.2]. □

Corolario 2.3. *Dado cualquier* $a \in \mathbb{R}^n$, *se tiene que las* n *derivaciones*

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_a, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x_n}\right|_a,$$

con

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_a f := \frac{\partial f}{\partial x_i}(a),$$

para cada $i = 1, \ldots, n$, *constituyen una base para* $T_a\mathbb{R}^n$. *Así* $T_a\mathbb{R}^n$ *es un espacio vectorial real de dimensión* n.

Demostración. Ver [1, Corolario 3.3]. □

Vectores tangentes sobre variedades

Sean M una variedad diferenciable y $p \in M$. Un mapa lineal

$$v : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$$

es una **derivación** en p cuando

$$v(fg) = f(p)v(g) + g(p)v(f)$$

para cada $f, g \in C^\infty(M)$. Denotamos por T_pM al conjunto de todas las derivaciones en p, el cual es un espacio vectorial al cual llamamos el **espacio tangente** de M en p. A cualquiera de sus elementos le llamamos **vector tangente** a M en p.

Proposición 2.8. *Sean* M *una variedad diferenciable,* $p \in M$, $v \in T_pM$, $f, g \in C^\infty(M)$. *Se tiene que:*

(i) Si f es constante entonces $vf = 0$;

(ii) Si $f(p) = g(p) = 0$ entonces $v(fg) = 0$.

Demostración. (i) Notemos que es suficiente probar que el enunciado se cumple para la función constante $g \equiv 1$. En efecto, si

$$f(x) = c,$$

donde c una constante real, entonces, de la linealidad y puesto que $v(g) = 0$, se sigue que

$$vf = v(cg) = cv(g) = 0.$$

Gracias a lo anterior, podemos suponer $g \equiv 1$. Como v es una derivación en p, se tiene que

$$v(g) = v(gg) = g(p)v(g) + g(p)v(g) = 2v(g)$$

de donde,

$$v(g) = 0.$$

(ii) Supongamos $f(p) = g(p) = 0$. Puesto que v es una derivación en p, se tiene que

$$v(fg) = f(p)v(f) + g(p)v(g) = 0 + 0 = 0,$$

lo cual concluye la demostración.

□

En el caso de un mapa suave entre espacio Euclideanos, la derivada total del mapa en un punto (representada por su matriz jacobiana) es un mapa lineal que representa la mejor aproximación lineal al mapa cerca del punto. En el caso de las variedades existe un mapa lineal similar, pero no tiene sentido hablar de un mapa lineal entre variedades. En su lugar, será un mapa lineal entre espacios tangentes.

Definición 2.18. *Sean M, N variedades diferenciables, y $F : M \to N$ suave. Para cada $p \in M$ definimos el mapa*

$$\begin{aligned} dF_p : T_pM &\to T_{F(p)}N \\ v &\mapsto dF_p(v) \end{aligned}$$

*le llamamos **diferencial de F en p,** donde*

$$dF_p(v)(f) = v(f \circ F)$$

para cada $f \in C^\infty(N)$.

Proposición 2.9. *Sean M ,N ,P variedades diferenciables, $F : M \to N$ y $G : N \to P$ suaves, y $p \in M$. Se tiene que:*

1. *El mapa $dF_p : T_pM \to T_{F(p)}N$ es lineal ;*
2. *Para el mapa $d(G \circ F)_p : T_pM \to T_{G\circ F(p)}P$, tenemos que*

$$d(G \circ F)_p = dG_{F(p)} \circ dF_p \;;$$

3. *Para el mapa $d(Id_M)_p : T_pM \to T_pM$, tenemos que*

$$d(Id_M)_p = Id_{T_pM}.$$

4. *Si F es un difeomorfismo, entonces $dF_p : T_pM \to T_{F(p)}N$ es un isomorfismo, y además*

$$(dF_p)^{-1} = d(F^{-1})_{F(p)}.$$

Demostración. Pendiente □

Proposición 2.10. *Sean M una variedad diferenciable, $p \in M$ y $v \in T_pM$. Si $f, g \in C^\infty(M)$ coinciden en una vecindad de p, entonces*

$$vf = vg.$$

Demostración. Ver [1, Proposición 3.8]. □

Proposición 2.11. *Sean M una variedad diferenciable, $U \subseteq M$ abierto y*

$$\begin{aligned} \iota : U &\to M \\ x &\mapsto \iota(x) = x \end{aligned}$$

el mapa inclusión. Para cada $p \in U$, el mapa $d\iota_p : T_pU \to T_pM$ es un isomorfimo.

Demostración. Ver [1, Proposición 3.9]. □

Proposición 2.12. *Si M es una variedad diferenciable de dimensión n entonces para cada $p \in M$ el espacio tangente T_pM es un espacio vectorial de dimensión n.*

Demostración. Ver [1, Proposición 3.10]. □

2.1.6. Cálculo en coordenadas

Sean M una variedad diferenciable de dimensión n y (U, φ) una carta local diferenciable sobre M. Sabemos que

$$\varphi : U \to \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$$

es un difeomorfismo, por tanto

$$d\varphi_p : T_pM \to T_{\varphi(p)}(\mathbb{R}^n)$$

estable un isomorfismo. Además

$$\mathbb{B} := \left\{ \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{\varphi(p)} : i = 1, \ldots, n \right\}$$

constituye una base para $T_{\varphi(p)}(\mathbb{R}^n)$. Usando el isomorfismo $d\varphi_p$, obtenemos una base para T_pM cuyos elementos son las imágenes inversas de elementos de $\mathbb{B}$ a través de $d\varphi_p$, a los cuales denotamos por

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p := d\varphi_p^{-1} \left(\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{\varphi(p)} \right) = d(\varphi^{-1})_{\varphi(p)} \left(\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{\varphi(p)} \right)$$

para cada $i = 1, \ldots, n$.

Notemos que para cada $f \in C^\infty \in C^\infty(U)$ se tiene que

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p f = \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{\varphi(p)} (f \circ \varphi^{-1}) = \frac{\partial \hat{f}}{\partial x_i}(\hat{p}),$$

donde $\hat{f} := f \circ \varphi^{-1}$ y $\hat{p} := (p^1, \ldots, p^n)$. Llamamos a los vectores

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p$$

los ***vectores en coordenadas en p asociados al sistema coordenado dado***. La base

$$\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p : i = 1, \ldots, n \right\}$$

se denomina ***base coordenada para*** T_pM.

A continuación, presentamos la definición de matriz jacobiana que nos será de gran utilidad en la siguiente sección.

Definición 2.19. *Sean M, N variedades diferencibles de dimensiones n y m, respectivamente. Sea $F : M \to N$ un mapa suave y $p \in M$. Sabemos que existen cartas (U, φ) sobre M y (V, ψ) sobre N, $p \in U$, $F(p) \in V$, tales que*

$$\hat{F} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap F^{-1}(V)) \to \psi(V),$$

es suave. Llamamos a $\hat{F}$ la representación en coordenadas de F en p. Sabemos que $d\hat{F}_{\hat{p}}$ tiene como matriz asociada respecto a la base de coordenadas, a la matriz jacobiana de $\hat{F}$ en $\hat{p} = \varphi(p)$. Puesto que

$$F \circ \varphi^{-1} = \psi^{-1} \circ \hat{F},$$

obtenemos las siguientes identidades:

$$\begin{aligned}
dF_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p\right) &= dF_p\left(d(\varphi^{-1})_{\hat{p}}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p\right)\right) \\
&= d(\psi^{-1})_{\hat{F}(\hat{p})}\left(d\hat{F}_{\hat{p}}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p\right)\right) \\
&= d(\psi^{-1})_{\hat{F}(\hat{p})}\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial \hat{F}_j}{\partial x_i}(\hat{p})\left.\frac{\partial}{\partial y_j}\right|_{\hat{F}(\hat{p})}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{m}\frac{\partial \hat{F}_j}{\partial x_i}(\hat{p})\left.\frac{\partial}{\partial y_j}\right|_{F(p)}.
\end{aligned}$$

Por tanto dF_p tiene como matriz asociada a la matriz Jacobiana de $\hat{F}$, a la cual llamamos ***matriz jacobiana asociada a F.***

2.1.7. Subvariedades

En esta sección introducimos los conceptos de mapas cuyos diferenciales dan buenos modelos locales, los cuales, resultan ser los diferenciales que tienen rango constante. Tres mapas con esta propiedad desempeñan un papel especial en la teoría de subvariedes: las inmersiones, sumersiones e incrustaciones suaves.

Definición 2.20. *Sean M, N variedades diferenciables, $F : M \to N$ suave y $p \in M$. Al rango de*

$$dF_p : T_pM \to T_{F(p)}N$$

le llamamos el ***rango de F en p****, y lo denotamos por $rang\, F$. El $rang\, F$ es el rango de la matriz jacobiana de F respecto a cualquier carta local cuyo dominio contenga a p. Decimos que F tiene* ***rango constante*** *cuando $rangF$ es el mismo en cada punto de M.*

Definición 2.21. *Sean M, N variedades diferenciables y $F : M \to N$ es de rango constante. Se tiene que*

- *F es una* ***sumersión suave*** *cuando su diferencial es sobreinyectivo en cada punto, o equivalentemente, cuando $rang\, F = dim\, N$;*
- *F es una* ***inmersión suave*** *cuando su diferencial es inyectivo en cada punto, o equivalentemente, $rang\, F = dim\, M$.*

Definición 2.22. *Sean M, N variedades diferenciables y $F : M \to N$ suave. Decimos que F es un* ***incrustación topológica*** *cuando F es un homeomorfimo sobre su imagen $F(M) \subseteq N$, con la topología de subespacio. En adición si F es una inmersión suave, entonces decimos que F es una* ***incrustación suave.***

Definición 2.23. *Sean M una variedad diferenciable, $S \subseteq M$ y $\iota : S \to M$ el mapa inclusión. Decimos S es una* ***subvariedad incrustada de M****, cuando S es una variedad topológica con la topología del subespacio, y admite una estructura diferenciable que hace de S una variedad diferenciable sin frontera, de modo que ι es una incrustación suave.*

Definición 2.24. *Sean M una variedad diferenciable, $S \subseteq M$ y $\iota : S \to M$ el mapa inclusión. Decimos S es una* ***subvariedad inmersa de M****, cuando S posee una topología que la convierte en una variedad topológica, y una* *estructura diferenciable que hace de S una variedad diferenciable, de modo que ι es una inmersión suave.*

Nota 2.6. *A la cantidad*

$$\dim(M) - \dim(S)$$

*le llamamos **codimensión de S en M.***

Definición 2.25. *Sea M una variedad diferenciable. Definimos una **subvariedad abierta de** M como cualquier subconjunto abierto con la topología del subespacio y con las cartas suaves obtenidas al restringirlas sobre M.*

Proposición 2.13. *Si M es una variedad diferenciable, entonces las subvariedades incrustadas de codimensión 0 en M son las subvariedades abiertas.*

Demostración. Ver [1, Proposición 5.1]. □

2.2. Teorema de Sard

Antes de comenzar, necesitamos extender la noción de conjuntos de medida nula a las variedades. Con esta herramienta a la mano, demostramos el Teorema de Sard.

A continuación, estudiamos la medida de ciertos conjuntos en $\mathbb{R}^n$ que serán de utilidad más adelante para nuestro propósito.

Lema 2.1. *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un subconjunto compacto, cuya intersección con $\{c\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ tiene medida nula $(n-1)-$dimensional, para cada $c \in \mathbb{R}$. Se tiene que A tiene medida nula $n-$dimensional.*

Demostración. Sea $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo tal que

$$A \subseteq [a,b] \times \mathbb{R}^{n-1}. \tag{2.10}$$

Sea $c \in [a,b]$, cualquiera. Consideremos el conjunto

$$A_c = \{x \in \mathbb{R}^{n-1} : (c,x) \in A\} \subseteq \mathbb{R}^{n-1},$$

el cual es compacto. En efecto, puesto que los conjuntos A_c y $A \cap (\{c\} \times$

$\mathbb{R}^{n-1}$) son isomorfos a través del mapa

$$\begin{aligned} f : A_c &\to A\cap(\{c\}\times\mathbb{R}^{n+1}) \\ x &\mapsto f(x) = (c,x). \end{aligned}$$

Como $A\cap(\{c\}\times\mathbb{R}^{n+1})\subseteq A$ es compacto, pues es un subconjunto cerrado contenido en un compacto. Así, A_c es compacto a través del mapa continuo

$$\begin{aligned} f^{-1} : A\cap(\{c\}\times\mathbb{R}^{n+1}) &\to A_c \\ x = (c,y) &\mapsto f^{-1}(x) = y. \end{aligned}$$

Sea $\delta > 0$, cualquiera. Por hipótesis, existe una familia numerable de rectángulos abiertos $\{C_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que

$$A_c \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k \quad \text{y} \quad \sum_{k\in\urcorner} Vol(c_k) < \frac{\delta}{2|b-a|}$$

como A_c es compacto, existe un subrecubrimiento finito, es decir, existe $n\in\mathbb{N}$ tal que

$$A_c \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} C_k \quad \text{y} \quad \sum_{k=1}^{n} Vol(c_k) < \frac{\delta}{2|b-a|} \tag{2.11}$$

Escribamos

$$U_c := \bigcup_{k=1}^{n} C_k.$$

el cual es abierto, pues es la unión finita de abiertos.

Por otro lado, como A es compacto, vemos que existe un intervalo I_c en $\mathbb{R}$ tal que $c\in I_c$ y

$$A\cap(I_c\times\mathbb{R}^{n-1}) \subseteq I_c\times U_c. \tag{2.12}$$

En efecto, pues caso contrario existe una sucesión $\{(c_n,x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq A$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} c_n = c \quad \text{y} \quad x_n \notin U_c \quad \text{para cada } n\in\mathbb{N}.$$

Puesto que A es compacto, existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x \in A_c\backslash U_c,$$

lo cual contradice (2.11).

Ahora, como $c \in [a,b]$ es arbitrario, vemos que la familia de intervalos $\{I_c\}_{c\in[a,b]}$ es un recubrimiento abierto del compacto $[a,b]$. Así, existen $c_1, c_2, \ldots, c_m \in [a,b]$ y una partición del intervalo $[a,b]$, digamos

$$a = d_1 < d_2 < \ldots < d_m < d_{m+1} = b$$

tal que

$$c_i \in I_{c_i} := [d_{i+1}, d_i] \qquad \forall i = 1, \ldots, m,$$

y de modo que

$$[a,b] \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} I_{c_i} \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{m} Vol(I_{c_i}) < 2|b-a|. \tag{2.13}$$

Luego, por (2.10) vemos que

$$A \subseteq A \cap ([a,b] \times \mathbb{R}^{n-1}),$$

junto con (2.11),(2.12) y (2.13), se sigue que

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} (I_{c_i} \times U_{c_i}) \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{m} Vol(I_{c_i} \times U_{c_i}) < 2|b-a| \frac{\delta}{2|b-a|} = \delta.$$

Como δ es arbitrario, se sigue que A tiene medida nula $n-$dimensional. □

Los más importantes conjuntos de medida nula son los grafos de funciones continuas. Para ello, recordemos la definición de grafo de una función.

Definición 2.26. *Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $f : A \to \mathbb{R}$ una función. Al conjunto*

$$G(f) = \{(x, f(x)) : x \in A\},$$

le llamamos ***grafo*** *de la función f.*

Proposición 2.14. *Si A es un subconjunto cerrado (abierto) de $\mathbb{R}^{n-1}$, y $f : A \to \mathbb{R}$ una función continua, entonces el grafo de f tiene medida nula en $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. Puesto que A ya sea cerrado o abierto puede ser escrito como una unión numerable de compactos. Vamos a demostrar que el

resultado es cierto cuando A es compacto. Para luego, demostrar el resultado cuando A no sea compacto.
Supongamos que A es compacto. Para la demostración de este resultado vamos a usar Inducción Matemática sobre $n \in \mathbb{N}$.

El caso $n=1$ se verifica inmediatamente, pues respecto a $\mathbb{R}^0$ el grafo de f tiene a lo más un solo punto. Para el paso inductivo, supongamos que la Proposición 2.14 es cierta para $n-1$, con $n>1$. Vamos a demostrar que la Proposición 2.14 es cierta para n. Notemos que, para cada $c \in \mathbb{R}$, la intersección del grafo de f con $\{c\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ es el grafo de la función f restringida al conjunto $\{x \in A : x_1 = c\}$. En otras palabras, tenemos que

$$G(f) \cap (\{c\} \times \mathbb{R}^{n-1}) = \{(x, f(x)) : x_1 = c,\, x = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \in A\},$$

el cual es el grafo de una función continua de $n-2$ variables. Por la hipótesis inductiva, como $c \in \mathbb{R}$ es arbitrario tenemos que cada grafo de la función restringida al conjunto $\{x \in A : x_1 = c\}$, tiene medida nula $(n-1)-$dimensional. Adicionalmente, el grafo de la función continua f es compacto, pues A es compacto, por tanto, gracias al Lema 2.1, se sigue que el grafo de la función f tiene medida nula $n-$dimensional.

Ahora, si A no es compacto, sabemos que ya sea cerrado o abierto puede ser escrito como la unión numerable de compactos, gracias a la primera parte de esta demostración se tiene que, el grafo de f es la unión de conjuntos de medida nula, por el literal c) de la Proposición 2.2 se sigue el resultado. □

Corolario 2.4. *Todo subespacio afín propio de $\mathbb{R}^n$ tiene medida nula en $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un subespacio afín propio, cualquiera. Para empezar, supongamos que

$$dim\, S = n-1.$$

En este caso, existe al menos un eje de coordenadas, digamos x_i, que no es paralelo a S y adicionalmente S es el grafo de una función afín de la forma

$$x_i = F(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n),$$

que tiene medida nula por la Proposición 2.14.

Ahora, si $dim\, S < n-1$, entonces S esta contendido en algún subespacio propio afín de dimensión $n-1$, que tiene medida nula por lo hecho antes, y por el literal b) de la Proposición 2.2 se sigue que S tiene medida nula. Por lo tanto, como S es arbitrario, se tiene el resultado. □

Nuestro objetivo es extender la noción de medida nula mediante difeomorfismos invariantes a subconjuntos de variedades. Dado que una variedad no cuenta con una métrica, los volúmenes de rectángulos o bolas no tienen sentido, por lo que no podemos utilizar la misma definición. Sin embargo, la clave la proporciona el resultado que estudiamos en breve.

Proposición 2.15. *Si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ tiene medida nula y $F : A \to \mathbb{R}^n$ es un mapa suave, entonces $F(A)$ tiene medida nula.*

Demostración. Para cada $p \in A$, por definición existen $U_p \subseteq \mathbb{R}^n$ subconjunto abierto y un mapa suave $\tilde{F} : U_p \to \mathbb{R}^m$ tales que

$$\tilde{F}(x) = F(x) \qquad \forall x \in A \cap U_p.$$

Puesto que cada U_p es abierto, podemos encontrar un abierto V_p tal que $p \in V_p \subseteq U_p$, de modo que

$$A \cap V_p \subseteq A \cap U_p.$$

De igual manera, ya que V_p es abierto, podemos encontrar un abierto W_p con propiedades análogas. Así, para cada $p \in A$ podemos encontrar una vecindad U de p tal que

$$\tilde{F}(x) = F(x) \qquad \forall x \in \overline{U} \subseteq A. \tag{2.14}$$

Sea $j \in \mathbb{N}$ tal que $p_j \in A$, cualquiera. Por lo hecho antes, existe $\overline{U_j}$ tal que $p_j \in \overline{U_j}$ y verifica (2.14). Puesto que $\overline{U_j}$ es compacto y F es una función suave, por la Proposición 2.4 existe $C > 0$ tal que

$$|F(x) - F(y)| \leq C|x-y| \qquad \forall x, y \in \overline{U_j}. \tag{2.15}$$

Sea $\delta > 0$, cualquiera. Puesto que A tiene medida nula y $\overline{U_j} \subseteq A$, por la Proposición 2.2 (literal b)) $\overline{U_j}$ también tiene medida nula. Así, existe una familia numerable de rectángulos abiertos $\{c_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\overline{U_j} \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} c_k \quad \text{y} \quad \sum_{k\in\mathbb{N}} Vol(c_k) < \delta.$$

Por (2.15), existe una familia de rectángulos abiertos $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que

$$F(\overline{U_j}) \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} b_k \quad \text{y} \quad \sum_{k\in\mathbb{N}} Vol(b_k) < \delta.$$

Como j y δ son arbitrarios, se sigue que $F(\overline{U_j})$ tiene medida nula para cada $j \in \mathbb{N}$. Finalmente, probemos que

$$A = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \overline{U_j}. \tag{2.16}$$

En efecto, sea $x \in A$, cualquiera. Por la primera parte de esta demostración, existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $x \in \overline{U_j}$, por lo que

$$x \in \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \overline{U_j},$$

como x es arbitrario, se tiene que

$$A \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \overline{U_j}. \tag{2.17}$$

Sea $x \in \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \overline{U_j}$, cualquiera. Existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x \in \overline{U_k} \subseteq A$, como x es arbitrario, tenemos que

$$\bigcup_{j\in\mathbb{N}} \overline{U_j} \subseteq A. \tag{2.18}$$

Por (2.17) y (2.18), se cumple la igualdad de conjuntos (2.16). En consecuencia,

$$F(A) = F\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} \overline{U_j}\right) = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} F(\overline{U_j}),$$

tiene medida nula, pues es la unión numerable de conjuntos de medida nula. $\square$

Con esta herramienta a la mano, presentamos la definición de conjunto de medida nula en en el contexto de las variedades diferenciables.

Definición 2.27. *Sea M una variedad diferenciable de dimensión n. Decimos que $A \subseteq M$ tiene* ***medida nula en*** *M cuando para cada carta suave (U, φ) de M, el subconjunto $\varphi(A \cap U) \subseteq \mathbb{R}^n$ tiene medida nula $n-$dimensional.*

El siguiente lema nos indica que solo necesitamos verificar esta condición para una colección numerable de cartas suaves cuyos dominios cubre A.

Lema 2.2. *Sean M una variedad diferenciable de dimensión n y $A \subseteq M$. Supongamos que para alguna colección numerable $\{(U_k, \varphi_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ de cartas suaves cuyos dominios cubren A, $\varphi_k(A \cap U_k)$ tiene medida nula en $\mathbb{R}^n$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Se tiene que A tiene medida nula en M.*

Demostración. Sea (U, φ) una carta suave sobre M, cualquiera. Vamos a probar que $\varphi(A \cap U)$ tiene medida nula en $\mathbb{R}^n$. Notemos que, para cada $k \in \mathbb{N}$

$$\varphi(A \cap U \cap U_k) = (\varphi \circ \varphi_k^{-1}) \circ \varphi(A \cap U \cap U_k). \tag{2.19}$$

Por otro lado, puesto que

$$\varphi_k(A \cap U \cap U_k) \subseteq \varphi_k(A \cap U_k)$$

para cada $k \in \mathbb{N}$, junto con el hecho de que $\varphi_k(A \cap U_k)$ tiene medida nula en $\mathbb{R}^n$ para cada $k \in \mathbb{N}$ y la Proposición 2.2 (literal b)) vemos que

$$\varphi_k(A \cap U \cap U_k)$$

tiene medida nula en $\mathbb{R}^n$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, por la Proposición 2.15 aplicada a cada $\varphi \circ \varphi_k^{-1}$, se tiene que

$$(\varphi \circ \varphi_k^{-1}) \circ \varphi(A \cap U \cap U_k),$$

tiene medida nula en $\mathbb{R}^n$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Por (2.19), tenemos que

$$\varphi(A \cap U \cap U_k)$$

tiene medida nula en $\mathbb{R}^n$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Luego, vemos que

$$\varphi(A \cap U) = \varphi(A \cap U \cap A) \subseteq \varphi\left(A \cap U \cap \bigcup_{k \in \mathbb{N}} U_k\right) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \varphi(A \cap U \cap U_k),$$

lo cual, gracias a los literales b) y c) de la Proposición 2.2, se sigue que

$$\varphi(A \cap U)$$

tiene medida nula en $\mathbb{R}^n$. Como (U, φ) es una carta suave arbitraria sobre M, se concluye que A tiene medida nula en M. $\square$

Recordemos que, dados X un espacio topológico y $S \subseteq X$ no vacío, decimos que S es **denso** en X cuando $\overline{S} = X$, o de manera equivalente, cuando todo subconjunto abierto no vacío de X contiene al menos un punto de S.

Proposición 2.16. *Supongamos M es una variedad diferenciable y $A \subseteq M$ tiene medida nula en M. Se tiene que $M \backslash A$ es denso en M.*

Demostración. Razonando por el absurdo, supongamos que $M \backslash A$ no es denso en M, es decir, existe un subconjunto B abierto no vacío de M tal que

$$B \subseteq A.$$

Además, sabemos que existe una carta (U, φ) tal que

$$\varphi(B \cap U) \subseteq \varphi(A \cap U),$$

donde $\varphi(B \cap U)$ es abierto, pues φ es un homeomorfismo y $B \cap U$ es abierto (al ser la intersección de dos abierto). Además, por hipótesis como $A \subseteq M$ tiene medida nula en M, tenemos que, $\varphi(A \cap U) \subseteq \mathbb{R}^n$ tiene medida nula $n-$dimensional.

En resumen, hemos encontrado un subconjunto abierto no vacío contenido en un conjunto de medida nula en $\mathbb{R}^n$, lo cual, no es posible pues contradice el Corolario 2.2. □

Teorema 2.2. *Supongamos M y N variedades diferenciables de dimensión n, $F : M \to N$ un mapa suave, y $A \subseteq M$ subconjunto de medida nula en M. Se tiene que $F(A)$ tiene medida nula en N.*

Demostración. Sea (V, ψ) una carta suave en N, cualquiera. Vamos a probar que el subconjunto $\psi(F(A) \cap V) \subseteq \mathbb{R}^n$ tiene medida nula $n-$dimensional.

Consideremos $(U_i, \varphi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ una familia numerable de cartas suaves cuyos dominios cubren M, como $A \subseteq M$ es un subconjunto de medida nula, tenemos que, para cada carta suave (U_i, φ_i) en M, cada subconjunto

$$\varphi(A \cap U_i) \subseteq \mathbb{R}^n$$

tiene medida nula $n-$dimensional. Ahora, puesto que F es un mapa suave, se tiene que el mapa

$$\psi \circ F \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i) \to \psi(V)$$

es suave, para cada $i \in \mathbb{N}$. Luego, vemos que

$$\varphi_i(A \cap U_i \cap F^{-1}(V)) \subseteq \varphi_i(A \cap U_i),$$

para cada $i \in \mathbb{N}$. Así, por la Proposición 2.2 (literal b) y el hecho de que cada subconjunto $\varphi(A \cap U_i) \subseteq \mathbb{R}^n$ tiene medida nula $n-$dimensional, se sigue que

$$\varphi_i(A \cap U_i \cap F^{-1}(V)) \subseteq \mathbb{R}^n$$

tiene medida nula $n-$dimensional, para cada $i \in \mathbb{N}$. De este modo, por la Proposición 2.15 aplicada a cada subconjunto $\varphi_i(A \cap U_i \cap F^{-1}(V)) \subseteq \mathbb{R}^n$ de medida nula $n-$dimensional y cada mapa suave $\psi \circ F \circ \varphi_i^{-1}$, se tiene que

$$\psi \circ F \circ \varphi_i^{-1}(\varphi_i(A \cap U_i \cap F^{-1}(V))) \subseteq \mathbb{R}^n$$

tiene medida nula $n-$dimensional, para cada $i \in \mathbb{N}$. Finalmente, probemos que

$$\psi(F(A) \cap V) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \psi \circ F \circ \varphi_i^{-1}(\varphi_i(A \cap U_i \cap F^{-1}(V))). \tag{2.20}$$

En efecto, como $A \subseteq M$ y $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una familia de abiertos que cubre M, se tiene que

$$\begin{aligned}
\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \psi \circ F \circ \varphi_i^{-1}(\varphi_i(A \cap U_i \cap F^{-1}(V))) &= \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \psi \circ F(\varphi_i^{-1}(\varphi_i(A \cap U_i \cap F^{-1}(V)))), \\
&= \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \psi \circ F(A \cap U_i \cap F^{-1}(V)), \\
&= \psi \circ F\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} (A \cap U_i \cap F^{-1}(V))\right), \\
&= \psi \circ F\left(A \cap \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i \cap F^{-1}(V)\right), \\
&= \psi \circ F(A \cap F^{1}(V)), \\
&= \psi(F(A \cap F^{-1}(V))), \\
&= \psi(F(A) \cap F(F^{-1}(V))), \\
&= \psi(F(A) \cap V).
\end{aligned}$$

Lo que nos indica que la igualdad (2.20) es cierta. Por lo tanto,

$$\psi(F(A) \cap V) \subseteq \mathbb{R}^n,$$

tiene medida nula $n-$dimensional, al ser la unión numerable de conjuntos de medida nula en $\mathbb{R}^n$. En consecuencia, como (V,ψ) es una carta suave arbitraria en N, se sigue que $F(A)$ tiene medida nula en N. $\square$

2.2.1. Teorema de Sard

Teorema 2.3 (Sard)**.** *Sean M, N variedades diferenciables de dimensión m y n, respectivamente, y $F : M \to N$ un mapa suave. Se tiene que el conjunto de valores críticos de F tiene medida nula en N.*

Demostración. Para la demostración de este teorema vamos a usar Inducción Matemática sobre $m \in \mathbb{N}$. Para el caso $m = 0$, no es difícil ver que, si $n = 0$, F no tiene valores críticos. Esto se debe a que, la imagen de M es un solo punto. Por otro lado, si $m = 0$ y $n > 0$, y ya que en este caso M tiene medida nula, por el Teorema 2.2, $F(M)$ tiene medida nula en N, por tanto, el subconjunto $C \subseteq F(M)$ de valores críticos tiene medida nula en N.

Supongamos que el teorema se cumple para el mapa F cuyo dominio tiene dimensión menor a m, con $m \geq 1$. Notemos que, como F es suave, para cada $p \in M$ existen cartas suaves (U_p, ψ_p) en M y (V_p, φ_p) en N tales que

$$\{p\} \subseteq U_p \quad \text{y} \quad \{F(p)\} \subseteq V_p,$$

así

$$M = \bigcup_{p\in M} \{p\} \subseteq \bigcup_{p\in M} U_p \quad \text{y} \quad F(M) = \bigcup_{p\in M} \{F(p)\} \subseteq \bigcup_{p\in M} V_p.$$

Gracias a esto, $\mathcal{U} := \{U_p : p \in M\}$ y $\mathcal{V} := \{V_p : p \in M\}$ son recubrimientos abiertos de M y $F(M)$, respectivamente. Por la Nota 2.3, $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ admiten subrecubrimientos numerables para M y $F(M)$. Debido a esta observación, podemos reducir nuestro problema para el caso en el que el teorema se cumple para el mapa F cuyo dominio es un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^m$ (ver Nota 2.4). Escribiremos las coordenadas en el dominio U por $(x_1, \ldots, x_m)$, y las coordenadas de $F(U)$ por $(y_1, \ldots, y_n)$.
Sea $C \subseteq U$ el conjunto de puntos críticos de F. Consideremos para $k \in \mathbb{N}$ los subconjuntos de la forma

$$C_k := \left\{ \begin{array}{ccl} x \in C & : & \text{todas las derivadas parciales de } F \text{ de orden} \\ & & \text{menor o igual a } k \text{ se anulan en } x \end{array} \right\}.$$

Por la forma en la que fueron definidos los subconjuntos, para cada

$k \in \mathbb{N}$ vemos que
$$C_{k+1} \subseteq C_k \subseteq C.$$
Probemos que C y C_k son cerrados, para cada $k \in \mathbb{N}$. En efecto, para el caso $C = \emptyset$, se tiene que $C_k = \emptyset$, así, C y C_k son cerrados para cada $k \in \mathbb{N}$. Sea $k \in \mathbb{N}$, cualquiera. Sea $x \in \overline{C_k}$, cualquiera. Existe una sucesión $(x_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}} \subseteq C_k$ tal que
$$\lim_{\ell \to \infty} x_\ell = x.$$
Probemos que $x \in C_k$. Notemos que para cada $\ell \in \mathbb{N}$
$$g_i(x_\ell) = 0, \tag{2.21}$$
donde g_i representa la derivada parcial de F de orden i, para cada $i = 1, \ldots, k$. Por lo tanto, de la suavidad del mapa F y tomando el límite cuando ℓ tiende a infinito en (2.21), obtenemos que
$$g_i(x) = g_i\left(\lim_{\ell \to \infty} x_\ell\right) = \lim_{\ell \to \infty} g_i(x_\ell) = 0,$$
para cada $i = 1, \ldots, n$. Lo que nos indica que, todas las derivadas parciales de F de orden menor o igual que k se anulan en x, lo que prueba que $x \in C_k$. Como x es arbitrario, se sigue que $\overline{C_k} \subseteq C_k$. En consecuencia, C_k es cerrado para cada $k \in \mathbb{N}$. Siguiendo esta misma idea se puede probar que C es cerrado. Con esto en mente, procedemos a demostrar en tres pasos que $F(C)$ tiene medida nula.

PASO 1. Vamos a probar que $F(C \backslash C_1)$ tiene medida nula.

Sea $a \in C \backslash C_1$, cualquiera. Puesto que $a \notin C_1$, por definición todas las derivadas parciales de F de orden 1 no se anulan en a, lo cual nos indica que existe al menos una función componenete F_i de F donde al menos una de sus derivadas parciales no se anula, es decir, para algún $j = 1, \ldots, m$
$$\frac{\partial F_i(a)}{\partial x_j} \neq 0.$$
Sin perdida de generalidad supongamos que $\frac{\partial F_1}{\partial x_1}$ es la derivada parcial de la función componente F_1 de F tal que
$$\frac{\partial F_1(a)}{\partial x_1} \neq 0.$$

Consideremos el mapa

$$\begin{gathered} H : U \to \mathbb{R}^m \\ x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \mapsto H(x) = (F_1(x), x_2, \ldots, x_m). \end{gathered}$$

Vemos que su matriz Jacobiana es la siguiente

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1(x)}{\partial x_2} & \frac{\partial F_1(x)}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial F_1(x)}{\partial x_m} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

la cual es no singular en a, puesto que su determinante

$$\frac{\partial F_1(x)}{\partial x_1} \times 1 \times \ldots \times 1$$

en el punto a es distinto de cero. Como el Jacobiano de H es no singular en a, por el Teorema de la función inversa, H es un difeomorfismo local, es decir, existen abiertos $V_a \subseteq U$ y $V_a^{'} \subseteq \mathbb{R}^m$ tales que $a \in V_a$, $H(a) \subseteq V_a^{'}$ y $H : V_a \to V_a^{'}$ es un difeomorfismo.
Gracias a lo anterior, podemos definir unas nuevas coordenadas suaves sobre V_a

$$(u, v) = (u, v_2, \ldots, v_m)$$

donde

$$u = F_1(x), \; v_2 = x_2, \; \ldots, \; v_m = x_m, \quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_m).$$

Además, podemos suponer que $\overline{V_a}$ es un subconjunto compacto de U y las coordenadas se extienden suavemente a $\overline{V_a}$. En este caso, F tiene la representación en coordenadas

$$F(u, v_2, \ldots, v_m) = (u, F_2(u, v), \ldots, F_n(u, v)), \tag{2.22}$$

y su matriz Jacobiana es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v_2} & \ldots & \frac{\partial F_2}{\partial v_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial u} & \frac{\partial F_n}{\partial v_2} & \ldots & \frac{\partial F_n}{\partial v_n} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, $C \cap \overline{V_a}$ consta exactamente de los puntos donde la matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_2}{\partial v_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial v_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial v_2} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial v_n} \end{pmatrix}$$

tiene rango menor que $n-1$. Debemos probar que el conjunto $F(C \cap \overline{V_a})$ tiene medida nula en $\mathbb{R}^n$. Para ello, vamos a hacer uso del Lema 2.1. Como $C \cap \overline{V_a}$ es compacto, es suficiente probar que su intersección con cada hiperplano $y_1 = c$ tiene medida nula $(n-1)-$dimensional. Sea $c \in \mathbb{R}$, cualquiera. Consideremos

$$B_c := \{v \in \mathbb{R}^{m-1} : (c,v) \in \overline{V_a}\},$$

y definamos

$$\begin{aligned} F_c : B_c &\to \mathbb{R}^{n-1} \\ v &\mapsto F_c(v) = (F_2(c,v), \ldots, F_n(c,v)). \end{aligned}$$

Como $F(c,v) = (c, F_c(v))$, los valores críticos de $F|_{\overline{V_a}}$, que se encuentran en el hiperplano $y_1 = c$, son exactamente los puntos de la forma (c,w) donde w es un valor crítico de F_c. Por nuestra hipótesis inductiva, el conjunto de valores críticos de F_c tiene medida nula $(n-1)-$dimensional. Ya que c es arbitrario, se tiene que el conjunto de valores críticos de F_c tiene medida nula $(n-1)-$ dimensional, para cada $c \in \mathbb{R}$, lo que implica que

$$F(C \cap \overline{V_a}) \cap \{c\} \times \mathbb{R}^{m-1}$$

tiene medida nula $(n-1)-$ dimensional, para cada $c \in \mathbb{R}$. Por el Lema 2.1, se sigue que

$$F(C \cap \overline{V_a})$$

tiene medida nula $n-$dimensional. Finalmente, como U está recubierto por la familia numerable de conjuntos de la forma $\overline{V_a}$ (ver Nota 2.3), obtenemos que

$$F(C) = F(C \cap U) \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} F(C \cap \overline{V_{a_k}}),$$

lo que nos indica que $F(C)$ tiene medida nula $n-$dimensional. En consecuencia, $F(C \backslash C_1)$ es de medida nula $n-$dimensional (por ser subconjunto de $F(C)$). Esto completa la demostración del Paso 1.

PASO 2. Probemos ahora que para cada $k \in \mathbb{N}$, $F(C_k \backslash C_{k+1})$ tiene medida nula $n-$dimensional.

Sea $a \in C_k \backslash C_{k+1}$, cualquiera. Puesto que $a \notin C_{k+1}$, existe alguna $(k+1)-$ésima derivada parcial de F que no se anula en a. En otras palabras, podemos encontrar una $k-$ésima derivada parcial de F, digamos $g : U \to \mathbb{R}$, que se anula en C_k pero tiene al menos una primera derivada parcial. Sin perdida de generalidad, supongamos que

$$\frac{\partial g(a)}{\partial x_1} \neq 0,$$

lo cual nos indica que, a es un punto singular del mapa suave g. Gracias a que g es continua, existe una vecindad V_a de a tal que cada punto de esta vecindad es un punto singular de g. Sea $G = g^{-1}(0)$ el conjunto de nivel 0 de g en V_a, el cual es una hipersuperficie (por ser una subvariedad de codimensión 1 en $\mathbb{R}^m$). Por definición de C_k, todas las derivadas parciales de F, de orden menor o igual que k, incluida g, se anula sobre C_k. Así

$$C_k \cap V_a \subseteq G.$$

Por otro lado, si $p \in C_k \cap V_a$, se cumple que dF_p no es un mapa sobreyectivo, y además

$$d(F|_G)_p = (dF_p)|_{T_pG}$$

no es sobreyectivo. Por lo tanto,

$$C_k \cap V_A \subseteq C^{'}$$

donde $C^{'}$ es el conjunto de valores críticos de $F|_G : G \to \mathbb{R}^n$, lo que implica que

$$F(C_k \cap V_a) \subseteq F|_G(C^{'}),$$

por hipótesis inductiva $F|_G(C^{'})$ tiene medida nula. En consecuencia, por un razonamiento similar al del Paso 1, se sigue que

$$F(C_k \backslash C_{k+1})$$

tiene medida nula $n-$dimensional.

Aún no hemos terminado, pues puede haber puntos en C en los que todas las derivadas parciales de F se anulen, lo que significa que no están en $C \backslash C_1$ ni en $C_k \backslash C_{k+1}$, para cada $k \in \mathbb{N}$. De esta posibilidad se encarga el Paso 3.

PASO 3. Para k lo suficientemente grande, $F(C_k)$ tiene medida nula $n-$dimensional.

Puesto que U puede ser recubierto por una familia de cubos de la forma $\{E_a : a \in U\}$, es suficiente probar que $F(C_k \cap E_a)$ tiene medida nula $n-$dimensional, para cada $a \in U$. Sean $a \in U$, cualquiera. Existe E_a un cubo cerrado tal que

$$a \in E_a \subseteq U.$$

Denotemos por R a la longitud del lado de E_a y L un número entero que se elegirá más adelante. Ahora, como E_a es compacto, existe $A > 0$ que acota los valores absolutos de todas las derivadas parciales de F de orden menor o igual que $k+1$ están acotadas por A en E_a. Dividamos el cubo E_a en L^m cubos de lado $\frac{R}{L}$, denotados por

$$(E_1, \ldots, E_{L^m}).$$

En este contexto, entendemos por *dividir un cubo* al proceso de bisectar cada uno de sus lados. En el caso en el que $m = 3$, un cubo bisectado luce así:

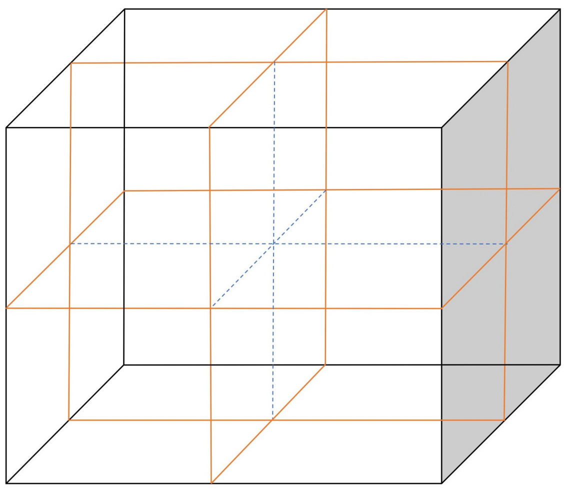

Figura 2.1: Cubo de lado R y con $L = 2$

Si E_i es uno de estos cubos y existe un punto $a_i \in C_k \cap E_i$, entonces por el Corolario 2.1, se tiene que para todo $x \in E_i$

$$|F(x) - P_k(x)| \leq \frac{m^{k+1}A}{(k+1)!}|x - a_i|^{k+1}, \tag{2.23}$$

donde P_k es el polinomio de Taylor de orden k de F en a_i, definido por (2.2). Luego, como todas las derivadas parciales de F de orden menor o igual que k se anulan en $a_{i,}$ tenemos que

$$P_k(x) = F(a_i). \tag{2.24}$$

De este modo, reemplazando (2.24) en (2.23), obtenemos

$$|F(x) - F(a_i)| \leq M|x - a_i|^{k+1} \leq M\left(\frac{R}{L}\right)^{k+1}, \tag{2.25}$$

con

$$M = \frac{m^{k+1}A}{(k+1)!}.$$

Esto nos indica que, $F(C_k \cap E_i)$ está contenido en un cubo de lado $M(\frac{R}{L})^{k+1}$. Por lo tanto, $F(C_k \cap E)$ está contenida en la unión de L^m bolas, cuya suma de sus volúmenes no es más que

$$\begin{aligned} 0 \leq Vol(F(C_k \cap E)) &\leq \sum_{i=1}^{L^m} Vol(F(C_k \cap E_i)) \\ &\leq \sum_{i=1}^{L^m} \left(M\left(\frac{R}{L}\right)^{k+1}\right)^n \\ &= L^m M^n \left(\frac{R}{L}\right)^{n(k+1)} \\ &= M^{'} L^{m-nk-n} \end{aligned}$$

donde $M^{'} = M^n R^{n(k+1)}$. Finalmente, para $L > 1$ y tomando el límite cuando k tiende al infito, se sigue que

$$Vol(F(C_k \cap E_a)) = 0,$$

por la Proposición 2.3 (literal b)), se tiene que $F(C_k \cap E_a)$ tiene medida nula $n-$dimensional. Con un razonamiento similar al del Paso 1, se concluye que $F(C_k)$ tiene medida nula $n-$dimensional. $\square$

Capítulo 3

Resultados, conclusiones y recomendaciones

Como se mencionó en la introducción del presente trabajo, y en consonancia con los objetivos formulados, este capítulo resume las principales conclusiones, discute los resultados obtenidos y emite recomendaciones para la continuidad del estudio en esta área.

3.1. Resultados

En el presente trabajo de integración curricular, nos planteamos explicar la razón por la cual el conjunto de puntos críticos de una función suave entre dos variedades diferenciables tiene medida nula (ver Teorema 2.3). Para ello, fue necesario revisar los conceptos y resultados básicos de la Teoría de Variedades Topológicas y Diferenciables, como vimos en la Sección 2.1. También fue preciso adaptar el concepto de punto crítico al contexto de un mapa entre variedades diferenciables y extender el concepto de conjuntos de medida nula a la teoría de variedades, como se vió en la Sección 2.2.

3.2. Conclusiones

En esta parte del capítulo a partir del análisis realizado en el presente trabajo de integración curricular, se desprenden las siguientes conclusiones:

- Para presentar la definición de conjuntos de medida nula en la teoría de variedades, fue preciso presentar una serie de resultados de conjuntos de medida nula en $\mathbb{R}^n$. Gracias a ello, obtuvimos la Proposición 2.15, resultado esencial para entender a los conjuntos de medida nula desde la perspectiva de las variedades diferenciables.

- Dada la definición de conjuntos de medida nula en la teoría de variedades, y gracias a la Nota 2.4, para demostrar el Teorema 2.3 nos basto con demostrar el resultado para $\mathbb{R}^m$, es decir, probamos que

  Si $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ es una función suave y $C \subseteq \mathbb{R}^m$ el conjunto de valores críticos de F, entonces $F(C)$ tiene medida nula en $\mathbb{R}^n$.

- Puesto que las variedades diferenciables pueden ser recubiertas por una cantidad numerable de cartas (ver Nota 2.3) fue suficiente demostrar el Teorema 2.3 para $F : U \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, donde U es un abierto tal que contiene al conjunto de valores críticos de F.

- Intuitivamente, el Teorema 2.3 nos dice que, pese a que el conjunto de puntos críticos de una función suave puede tener medida infinita o no, el conjunto de valores críticos de dicha función va a ser pequeño en el sentido de la Teoría de la Medida.

3.3. Recomendaciones

Antes de finalizar, deseamos sugerir algunas recomendaciones en base a los resultados y conclusiones obtenidos en el presente trabajo.

- Analizar con mayor detenimiento y buscar la razón del porque los conjuntos de medida nula son importantes para las ecuaciones diferenciales parciales.

- Revisar [1] para ver resultados interesantes que se desprenden del Teorema 2.3 y son de gran utilidad en la teoría de variedades.

- Se invita al lector revisar [2] para un mayor entendimiento del conjunto de valores críticos de una función suave.

Bibliografía

[1] J. Lee, *Introduction to Topological Manifolds*, Springer, New York, 2013.

[2] M. Schechter, *Minimax Systems and Critical Point Theory*. Springer, New York, 2009.

[3] V. Guillemin & A. Pollack, *Differential Topology*. American Mathematical Society, Rhode Island, 2010.

[4] V. Guillemin & M. Golubitsky, *Stable Mappings and Their Singularities*. Springer-Verlag, New York, 1973.