Una Teoría de Homotopía para Categorías Finitas

AUTOR: Rosero Pozo, Pablo Sebastián[1]

[2]DIRECTOR: ***Pazmiño Pullas, David Emmanuel***

[1]*Escuela Politécnica Nacional, Facultad de Ciencias, Quito, Ecuador*
[2]*Escuela Politécnica Nacional, Departamento de Matemática, Quito, Ecuador*

Resumen: Se presenta una construcción de categorías y funtores que permiten definir una teoría análoga a la homotopía de caminos en espacios topológicos, pero sobre categorías finitas. Para esto, primero se desarrolla la Teoría de Homotopía clásica, en la cual se construye el grupo fundamental de un espacio topológico y se muestran varios resultados fundamentales sobre éste. A continuación, se muestran resultados fundamentales de la Teoría de Categorías con un enfoque topológico, que servirá para la construcción de los conjuntos simpliciales, en específico del nervio de una categoría y así dotar de una geometría a la misma, mostrando su relación con la Homotopía clásica. Finalmente, se realiza una categorización de la definición de homotopía, con lo que se define al grupo fundamental de una categoría y se demuestra que una categoría, cuya geometría es el círculo, verifica que su grupo fundamental en el sentido de las categorías coincide con el grupo fundamental topológico del círculo, además se demuestran teoremas similares a los de la Homotopía clásica.

Palabras claves: homotopía, grupo fundamental, realización geométrica, categorización.

An Homotopy Theory for Finite Categories

Abstract: We present a construction of categories and functors that allows us to define an analogous theory to the one of homotopy of paths in topological spaces, but over finite categories. For this purpose, we first develop the Classical Theory of Homotopy, in which the fundamental group of a topological space is constructed and several fundamental results are proven about it. Next, a brief introduction to the Theory of Categories is presented from a topological approach, which will be useful for the construction of simplicial sets; mainly with the nerve of a category and thus we will define a geometry for this category, showing its relationship with classical homotopy. Finally, a categorization of the homotopy is carried out, in which the fundamental group of a category is defined, and it is proven that a category whose geometry is homeomorphic to the circle verifies that its fundamental group in the sense of the categories coincides with the topological fundamental group of the circle. Plus theorems similar to those developed in classic homotopy are proved.

Keywords: homotopy, fundamental group, geometric realization, categorization.

1. INTRODUCCIÓN

En el afán por clasificar a los espacios topológicos para facilitar su estudio, la Topología Algebraica ha contribuido con herramientas algebraicas para realizar una distinción de los espacios topológicos en base a ciertas propiedades que pueden tener en común como lo muestra (Hatcher, 2005) a lo largo de su contenido, esta clasificación se realiza creando imágenes algebraicas de los espacios en cuestión. Una de estas imágenes es la que se conoce como n-ésimo grupo de homotopía, el cual describe a través de los lazos que se forman en un espacio una estructura de grupo sobre este, el estudio de estos grupos es lo que se conoce como Teoría de Homotopía clásica.

La idea de clasificación ha sido extendida a otras áreas de la Matemática, como es el caso de la Teoría de Grafos. En (Grigoryan et al, 2014) se encuentra el desarrollo de muchas ideas fundamentales para la clasificación de las estructuras llamadas digrafos, mientras que en (Larose y Tardif, 2004) se realiza una clasificación de lo que se conoce como estructuras binarias reflexivas; ambos trabajos realizan la definición de los grupos de homotopía en distintas estructuras, y para esto definen lo que es un lazo tanto en los digrafos como en las estructuras binarias reflexivas, respectivamente, realizando un símil entre la Teoría de Homotopía Clásica y su Teoría de Homotopía.

Basado en estas ideas, este trabajo realiza una clasificación de un concepto matemático llamado categoría, que viene a ser una colección de objetos y flechas con una determinada estructura, en lo que se llamará Teoría de Homotopía para Categorías. En particular, la colección de objetos en una categoría es una estructura binaria reflexiva, por lo que las ideas usadas en (Larose y Tardif, 2004) son base central de los conceptos nuevos definidos en este trabajo, y además, puesto que una categoría tiene asociado un multidigrafo cuando se olvida la estructura interna de la misma, entonces (Grigoryan et al, 2014) entrega ideas de cómo realizar

pablosebasrp@hotmail.com

una clasificación adecuada de las categorías.

En (Riehl, 2008) y en (Lane, 1998, págs. 270, 271) se define el nervio de una categoría como un conjunto simplicial, al cual se le puede asignar una topología como lo realiza en (Friedman et al, 2012) y (Curtis, 1971), obteniendo un espacio topológico del cual se puede calcular los grupos de homotopía clásicos, y entonces proceder a realizar una clasificación de categorías en base al grupo de homotopía asociado al nervio de la categoría. En el presente trabajo se tratarán únicamente a las categorías finitas por cuestiones prácticas, y define a los grupos de homotopía en el sentido de las categorías. De ese modo realiza una clasificación de las categorías sin tener que pasar por el nervio. Se muestran algunos ejemplos en donde esta nueva teoría de homotopía coincide con la teoría clásica.

2. CATEGORÍAS Y SU REALIZACIÓN GEOMETRICA

En los años 50, Samuel Eilenberg y Saunders Mac Lane introducen los fundamentos de la *Teoría de Categorías* (Lane, 1998) en su afán por capturar las similitudes que presentaban varias estructuras matemáticas en lo que se conoce como *categorización*, es decir, describir un concepto matemático en el lenguaje categorial.A continuación se expone varios de los conceptos básicos de la Teoría de Categorías. Además, entrega el marco teórico necesario para la categorización que se busca realizar del concepto de los *grupos de homotopía topológicos*(Hatcher, 2005) (Kosniowski, 1992). El desarrollo de esta teoría está basado en las ideas recogidas en (Awodey, 2010).

Definición 2.1. Una categoría $\mathbb{C}$ está estructurada por la siguiente información: 1) Una colección $\mathrm{Ob}_{\mathbb{C}}$, cuyos elementos serán llamados *objetos de la categoría* $\mathbb{C}$. En caso de no haber confusión esta colección será notada por Ob. Los objetos, comúnmente son notados por letras mayúsculas: $A,B,C,\cdots$. 2) Una colección $\mathrm{Mo}_{\mathbb{C}}$, cuyos elementos serán llamados *flechas de una categoría* $\mathbb{C}$. En caso de no haber confusión, simplemente, se notará a esta colección por Mo. Las flechas, también llamados *morfismos*, serán notados por letras minúsculas: $f,g,h,\cdots$. 3) Para cada flecha f, existe un único par de objetos $(\mathrm{dom}(f),\mathrm{cod}(f))$. Y se notará $f\colon \mathrm{dom}(f)\to\mathrm{cod}(f)$, o, más sencillamente, $f\colon A\to B$, donde $A=\mathrm{dom}(f)$ y $B=\mathrm{cod}(f)$. Dos flechas f,g se dicen *paralelas* si $\mathrm{dom}(f)=\mathrm{dom}(g)$ y $\mathrm{cod}(f)=\mathrm{cod}(g)$. 4) Dadas dos flechas de la forma $f\colon A\to B$ y $g\colon B\to C$, entonces existe una flecha, notada gf, de modo que

$$gf\colon A\to C,$$

Esta flecha se llamará la *composición de f con g* y al par (f,g) se le llamará *par componible*. 5) Para cada $A\in\mathrm{Ob}$, existe una única flecha $Id_A\in\mathrm{Mo}$, tal que

$$Id_A\colon A\to A.$$

La flecha Id_A se llamará la *flecha identidad de A* y en caso de no haber confusión se nota Id.

Esta información está sujeta a los siguientes axiomas categoriales:

1. *Asociatividad:* Sean $f,g,h\in\mathrm{Mo}$ de la forma $f\colon A\to B$, $g\colon B\to C$ y $h\colon C\to D$, entonces $h(gf)=(hg)f$. En este caso, (f,g,h) se llamará una *terna de flechas componible.*

2. *Unidad:* Sea $f\colon A\to B\in\mathrm{Mo}$, entonces $fId_A=f=Id_Bf$.

Definición 2.2. Una categoría $\mathbb{C}$ se dice *pequeña* si las colecciones Ob_C de objetos y Mo_C de morfismos son conjuntos. Caso contrario, la categoría $\mathbb{C}$ se dirá *grande*.

Definición 2.3. Sea $\mathbb{C}$ una categoría, y dados $A,B\in\mathrm{Ob}_{\mathbb{C}}$, se define la colección

$$Hom_{\mathbb{C}}(A,B)=\{f\in\mathrm{Mo}_{\mathbb{C}}:f\colon A\to B\}.$$

Se dice que la categoría $\mathbb{C}$ es *localmente pequeña* si $Hom_{\mathbb{C}}(A,B)$ es un conjunto para cada $A,B\in\mathrm{Ob}_{\mathbb{C}}$ y en este caso los conjuntos $Hom_{\mathbb{C}}(A,B)$ serán llamados *Hom-Sets* de $\mathbb{C}$. Y, en caso de que cada Hom-Set sea finito, se dice que la categoría es *localmente finita*.

Ejemplo 2.1. Algunos ejemplos de categorías son: la categoría *Sets*, cuyos objetos son conjuntos, las flechas son funciones entre conjuntos, la operación de composición es la composición usual de funciones y la función identidad es la flecha identidad en cada conjunto. Otro ejemplo es el de la categoría *Top*, que tiene por objetos a espacios topológicos, a las flechas a aplicaciones continuas, y la composición es la composición usual de aplicaciones continuas. La categoría *Grps*, tiene como objetos a grupos, a flechas a homomorfismos y la composición usual de homomorfismos.

Definición 2.4. Sean $\mathbb{C}$ y $\mathbb{D}$ categorías, la categoría producto

$$\mathbb{C}\times\mathbb{D}$$

es la categoría cuya estructura está compuesta por:

- *Objetos:* Para cada par de objetos $C\in\mathrm{Ob}(\mathbb{C})$ y $D\in\mathrm{Ob}(\mathbb{D})$. Un objeto en $\mathbb{C}\times\mathbb{D}$ es de la forma (C,D).

- *Flechas:* Sean $(C_1,D_1),(C_2,D_2)\in\mathrm{Ob}(\mathbb{C}\times\mathbb{D})$. Una flecha en $\mathbb{C}\times\mathbb{D}$ es de la forma

$$(f,g)\colon (C_1,D_1)\to(C_2,D_2),$$

donde $f\colon C_1\to C_2\in\mathrm{Mo}(\mathbb{C})$ y $g\colon D_1\to D_2\in\mathrm{Mo}(\mathbb{D})$.

- *Composición:* Sean $h_1=(f_1,g_1),h_2=(f_2,g_2)$ morfismos en $\mathbb{C}\times\mathbb{D}$. Se dice que (h_1,h_2) es un par componible en $\mathbb{C}\times\mathbb{D}$ si (f_1,f_2) es un par componible en $\mathbb{C}$ y (g_1,g_2) es un par componible en $\mathbb{D}$. La composición $h_2\circ h_1$ está definida por

$$h_2\circ h_1=(f_2\circ f_1,g_2\circ g_1).$$

- *Identidad* Sea $(C,D)\in\mathrm{Ob}(\mathbb{C}\times\mathbb{D})$, la flecha identidad $Id_{(C,D)}$ se define mediante

$$Id_{(C,D)}=(Id_C,Id_D).$$

2.1 Funtores

Una de las definiciones fundamentales de este trabajo es la de *funtor* entre dos categorías, pues es en base a ésta que se ha definido la *homotopía de categorías*.

Definición 2.5. Sean $\mathbb{C}$ y $\mathbb{D}$ categorías. Un *funtor covariante* $F\colon \mathbb{C} \to \mathbb{D}$, entre $\mathbb{C}$ y $\mathbb{D}$ consiste en un par de aplicaciones $F_0\colon \mathrm{Ob}_{\mathbb{C}} \to \mathrm{Ob}_{\mathbb{D}}$, $F_1 : \mathrm{Mo}_{\mathbb{C}} \to \mathrm{Mo}_{\mathbb{D}}$ tales que:

1. $\mathrm{dom}(F_1(f)) = F_0(\mathrm{dom}(f))$ para todo $f \in \mathrm{Mo}_{\mathbb{C}}$.
2. $\mathrm{cod}(F_1(f)) = F_0(\mathrm{cod}(f))$ para todo $f \in \mathrm{Mo}_{\mathbb{C}}$.
3. $F_1(Id_A) = Id_{F_0(A)}$ para todo $A \in \mathrm{Ob}_{\mathbb{C}}$.
4. $F_1(gf) = F_1(g)F_1(f)$ para todo (f,g) par componible en $\mathbb{C}$.

Abreviadamente, un funtor covariante, F, actúa de la siguiente manera: $F(f : A \to B) = F(f) : F(A) \to F(B)$, $F(Id_A) = Id_{F(A)}$ y finalmente, $F(gf) = F(g)F(f)$. Un funtor contravariante, F, es aquel que para cualquier $f \in \mathrm{Mo}_{\mathbb{C}_1}$, realiza las siguientes operaciones: $F(f : A \to B) = F(f) : F(B) \to F(A)$, $F(Id_A) = Id_{F(A)}$ y $F(gf) = F(f)F(g)$.

Ejemplo 2.2. A los funtores de la forma $F\colon \mathbb{C} \times \mathbb{D} \to \mathbb{E}$ se los conoce como bifuntores, pues estos son de carácter funtorial en sus dos componenetes $\mathbb{C}$ y $\mathbb{D}$. En este caso, el bifuntor F, tiene dos funtores asociados. El *primer funtor asociado* para un objeto $D \in \mathrm{Ob}_{\mathbb{D}}$, está definido por:

$$\begin{aligned} F^D\colon \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{E} \\ C &\longmapsto F(C,D), \\ f &\longmapsto F(f, Id_D). \end{aligned}$$

El *segundo funtor asociado* para un objeto $C \in \mathrm{Ob}_{\mathbb{C}}$ está definido como el funtor

$$\begin{aligned} F_C\colon \mathbb{D} &\longrightarrow \mathbb{E} \\ D &\longmapsto F(C,D), \\ f &\longmapsto F(Id_C, f). \end{aligned}$$

Se demostrará a continuación, que el primer funtor asociado es en realidad un funtor, la demostración para el segundo funtor asociado es similar a ésta y por lo tanto no se realizará.

Sean (f,g) un par componible en $\mathbb{C}$, entonces se tiene que

$$\begin{aligned} F^D(g \circ f) &= F(gf, Id_D), \\ &= F(gf, Id_D Id_D), \\ &= F^D(g)F^D(f). \end{aligned}$$

Además, se tiene que

$$F^D(Id_C) = F(Id_C, Id_D) = Id_{F(C,D)}.$$

Definición 2.6. Sean $A, B \in \mathrm{Ob}$ y F un funtor covariante, se define la aplicación $F_{A,B} : Hom(A,B) \to Hom(F(A), F(B))$, como $F_{A,B}(f) = F(f)$. En caso de que F se contravariante el codominio de $F_{A,B}$ será $Hom(F(B), F(A))$. Entonces, se dice que F es *fiel* si $F_{A,B}$ es inyectiva para todo $A, B \in \mathrm{Ob}$, y se dice que una categoría $\mathbb{C}$ es *concreta* si existe un funtor fiel de la forma $F : \mathbb{C} \to Sets$. Finalemente, sean $\mathbb{I}$ una categoría pequeña y $\mathbb{C}$ una categoría concreta, entonces un $\mathbb{C}-$*prehaz* sobre $\mathbb{I}$ es un funtor contravariante $F\colon \mathbb{I} \to \mathbb{C}$.

2.2 Nervio de una categoría

Muchas de las ideas expuestas a continuación necesitan un base fuerte y extensa de la teoría de categorías, es por este motivo que se ha intentado simplificar la exposición de las definiciones y los resultados expuestos. Para una mayor extensión y profundida al respecto se sugiere revisar (Riehl, 2008) (Goerss y Jardine, 2009).

Definición 2.7. Un *conjunto simplicial* X está compuesto por:

1. Una colección de conjuntos $\{X_n\}_{n \geq 0}$.
2. Para cada $n \geq 0$, aplicaciones de la forma $d_i\colon X_{n+1} \to X_n$ para todo $0 \leq i \leq n$, llamadas *aplicaciones de cara*.
3. Para cada $n \geq 0$, aplicaciones de la forma $s_i\colon X_n \to X_{n+1}$, para todo $0 \leq i \leq n$, llamadas *aplicaciones de degeneración*.

Esta información satisface que:

$$\begin{aligned} d_i \circ d_{j+1} &= d_j \circ d_i \ \text{ si } i < j, \\ s_{j+1} \circ s_i &= s_i \circ s_j \ \text{ si } i \leq j, \\ d_i \circ s_j &= \begin{cases} Id, & \text{si } i = j, j+1, \\ s_{j-1} \circ d_i & \text{si } i < j, \\ s_j \circ d_{i-1} & \text{si } i > j+1. \end{cases} \end{aligned}$$

Definición 2.8. Un $n-$simplice Δ^n como una colección

$$\Delta^n_k = Hom_\Delta([k], [n])$$

para $k \geq 0$, junto a las aplicaciones de cara y degeneración definidas por:

- *Aplicación de cara.* Sea $d^i\colon\ [k] \to [k+1]$ una aplicación de co-cara, entonces la aplicación de cara para el conjunto simplicial Δ^n, está definida por

$$\begin{aligned} d_i\colon \Delta^n_{k+1} &\longrightarrow \Delta^n_k \\ f &\longmapsto f \circ d^i. \end{aligned}$$

- *Aplicación de degeneración.* Sea $s^i\colon\ [k+1] \to [k]$ una aplicación de co-degeneración, entonces la aplicación de degenereación para el conjunto simplicial Δ^n, está definida por

$$\begin{aligned} s_i\colon \Delta^n_k &\longrightarrow \Delta^n_{k+1} \\ f &\longmapsto f \circ s^i. \end{aligned}$$

Definición 2.9. Sea Δ^n un $n-$símplice. La *realización geométrica de* Δ^n, se define como el espacio

$$|\Delta^n| = \left\{ \sum_{i=0}^{n} t_i v_i^n : t_0 + \cdots + t_n = 1,\ t_i \geq 0,\ \forall i = 0, \cdots, n \right\}$$

donde v_i^n es el vector $(v_i^n(j))_{j=0}^n$, donde $v_i^n(j) = 1$ si $i = j$ y $v_i^n(j) = 0$, si $i \neq j$, dotado de la topología inducida por la topología usual en $\mathbb{R}^n$.

Con un abuso de notación, se escribe $|\Delta^n| = [v_0^n, v_1^n, \cdots, v_n^n]$ donde cada v_i^n indica un vértice del $n-$ símplice. Topológicamente hablando, se tiene que $|\Delta^n| \simeq D^n$. Así, se define el funtor covariante $\sigma\colon \Delta \to Top$ el cual actúa de la siguiente manera: $[n] \mapsto |\Delta^n|$ y $(f\colon [n] \to [m]) \mapsto (f_*\colon |\Delta^n| \to |\Delta^m|)$, donde

$$f_*(t_0, \cdots, t_n) = (s_0, \cdots, s_m),$$

tal que $s_j = \sum_{f(i)=j} t_i$.

De este modo, $d_*^j\colon |\Delta^n| \to |\Delta^{n+1}|$ y $s_*^j\colon |\Delta^{n+1}| \to |\Delta^n|$, las cuales será llamada *aplicaciones de cocara* y *codegeneración simpliciales*, respectivamente.

Definición 2.10. Sea X un conjunto simplicial, y sea cada X_n del conjunto simplicial con la topología discreta. Entonces la realización geométrica de X, denotada por $|X|$, está definida como el espacio

$$|X| = \left(\dot{\bigcup}_n X_n \times |\Delta^n|\right) / \sim,$$

dotado por la topología cociente y donde $\sim$ es la relación de equivalencia dada por:

$$(x, s_*^j(p)) \sim (s_j(x), p) \text{ y } (x, d_*^j(p)) \sim (d_j(x), p),$$

para $(x,p) \in X_n \times |\Delta^{n+1}|$ en el primer caso y $(x,p) \in X_{n+1} \times |\Delta^n|$ en el segundo caso. $\dot{\bigcup}$ representa a la unión disjunta de conjuntos.

Definición 2.11. Sea $\mathbb{C}$ una categoría pequeña. Se define el *nervio* de una categoría como el conjunto simplicial $\mathscr{N}\mathbb{C}$ cuyos elementos están definidos por:

$$\begin{aligned}
&\mathscr{N}\mathbb{C}_0 = \mathrm{Ob}(\mathbb{C})\\
&\mathscr{N}\mathbb{C}_1 = \mathrm{Mo}(\mathbb{C})\\
&\mathscr{N}\mathbb{C}_2 = \{\text{pares de flechas componibles } \cdot \to \cdot \to \text{ en } \mathbb{C}\}\\
&\qquad \vdots\\
&\mathscr{N}\mathbb{C}_n = \{\text{cadenas de } n \text{ flechas componibles } \cdot \to \cdots \cdot \to \text{ en } \mathbb{C}\}
\end{aligned}$$

Junto con las siguientes operaciones:

1. La operación de degeneración $s_i\colon \mathscr{N}\mathbb{C}_n \to \mathscr{N}\mathbb{C}_{n+1}$, la cual toma cadenas la forma $c_0 \to \cdots c_i \to \cdots \to c_n$, y la transforma en la cadena $c_0 \to \cdots c_i \to c_i \to \cdots \to c_n$, al agregar la flecha identidad de i en $\mathbb{C}$ dentro de la posición $i-$ésima de la cadena original.

2. La operación de cara $d_i\colon \mathscr{N}\mathbb{C}_{n+1} \to \mathscr{N}\mathbb{C}_n$. Si $n = 0$, serán dos aplicaciones, $d_0, d_1\colon \mathscr{N}\mathbb{C}_1 \to \mathscr{N}\mathbb{C}_0$, tal que

   $$d_i(f\colon A_1 \to A_2) = A_{1-i},$$

   para $i \in \{0,1\}$. Si $n > 0$, d_i toma una cadena de $n+1$ pares componibles de la forma $c_0 \to c_1 \to \cdots c_i \to c_{i+1} \to c_{i+2} \to \cdots \to c_{n+1}$. Si $0 < i < n$, la envía a la cadena $c_0 \to \cdots c_i \xrightarrow{d_i} c_{i+2} \cdots \to c_n$, donde $c_i \xrightarrow{d_i} c_{i+2} = (c_{i+1} \to c_{i+2}) \circ (c_i \to c_{i+1})$. Si $i = 0$ o $i = n$, entonces elimina la primera o la última flecha, respectivamente.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

Figura 1. Categoría círculo $\mathbb{C}S^1$

Definición 2.12. La *categoría círculo*, notada por $\mathbb{C}S^1$, está formada por dos flechas paralelas. Su diagrama se muestra en la figura 1.

Proposicion 2.1. *Sea $\mathbb{C}S^1$ la categoría círculo, entonces $|\mathscr{N}\mathbb{C}S^1| \simeq S^1$.*

Demostración. Para $\mathbb{C} = \mathbb{C}S^1$ se tiene que:

$$\begin{aligned}
&\mathscr{N}\mathbb{C}_0 = \{A, B\},\\
&\mathscr{N}\mathbb{C}_1 = \{f, g, Id_A, Id_B\},\\
&\qquad \vdots\\
&\mathscr{N}\mathbb{C}_n = \{\text{cadenas de } n \text{ flechas componibles } \cdot \to \cdots \to \text{ en } \mathbb{C}\}
\end{aligned}$$

Con un caso bastará para mostrar que todas las identidades se pegan al objeto del cual son identidades, este caso será cuando $n = 0$. La relación $(x, s_*^j(p)) \sim (s_j(x), p)$, pega las identidades con sus objetos. Para realizar pegados sobre las flecha f y g se usa la relación $(x, d_*^j(p)) \sim (d_j(x), p)$. Por definición, las aplicaciones de cara para $n = 0$, inducen la relación $(x, d_*^j(1)) \sim (d_j(x), 1)$, para $x \in \mathscr{N}\mathbb{C}_1$. Teniendo los siguientes pegados, donde las líneas punteadas representan los pegados correspondientes:

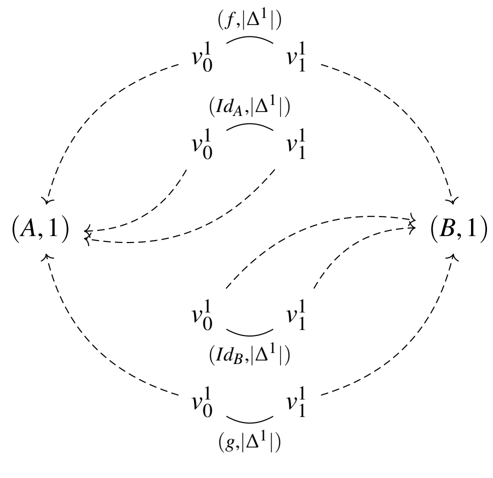

Figura 2. Representación del nervio de la categoría $\mathbb{C}S^1$.

$\square$

Ejemplo 2.3. Se presentan ejemplos de construcciones de nervios que serán utilizados en el presente trabajo.

1. La categoría disco, $\mathbb{C}D^2$, viene dada por el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, "f"] & \\
& B \arrow[dl, "g"] \\
C \arrow[uu, "g\circ f"] &
\end{tikzcd}$$

Figura 3. Categoría disco

Entonces las aplicaciones de cara y de degeneración permiten concluir que

$$|\mathbb{C}D^2| \simeq |\Delta^2| \simeq D^2.$$

Éste es un ejemplo importante, pues por cada triángulo conmutativo no trivial (que no involucren flechas identidades) en una categoría, la realización geométrica del nervio pega un disco D^2.

Otro ejemplo de una categoría disco, es la categoría descrita en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, bend left, "f"] & B \arrow[l, bend left, "f^{-1}"]
\end{tikzcd}$$

Figura 4. Categoría disco elemetal

Esta categoría tendrá el nombre especial de categoría *disco elemental*.

2. Considérese la categoría $\mathbb{C}T^2 = \mathbb{C}S^1 \times \mathbb{C}S^1$, la cual será llamada categoría *toro*. Por definición de producto de categorías, ésta tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}[row sep=huge, column sep=huge]
(A,A) \arrow[r, bend left, "2"] \arrow[r, dashed, "1"'] \arrow[d, bend right, "3"'] \arrow[d, dashed, "4"] \arrow[dr, bend left, "12"] \arrow[dr, dashed, bend left=15, "11"] \arrow[dr, dashed, bend right=15, "10"'] \arrow[dr, bend right, "9"'] & (A,B) \arrow[d, bend left, "6"] \arrow[d, dashed, "5"'] \\
(B,A) \arrow[r, dashed, "8"] \arrow[r, bend right, "7"'] & (B,B)
\end{tikzcd}$$

Figura 5. Categoría toro

Donde:

$$\begin{aligned}
&1 = (Id_A, f), \;\; 2 = (Id_A, g), \;\; 3 = (f, Id_A),\\
&4 = (g, Id_A), \;\; 5 = (f, Id_B), \;\; 6 = (g, Id_B),\\
&7 = (Id_B, f), \;\; 8 = (Id_B, g), \;\; 9 = (f, f),\\
&10 = (g, g), \quad 11 = (g, f), \quad 12 = (f, g).
\end{aligned}$$

La categoría toro puede ser visualizada mediante el siguiente diagrama conmutativo para una mayor facilidad de entendimiento del pegado realizado en la realización geométrica del nervio de la categoría:

$$\begin{tikzcd}
\Upsilon \arrow[r, "1"] \arrow[d, "3"'] \arrow[dr, "9"] & \Phi \arrow[d, "5"] & \Upsilon \arrow[l, "2"'] \arrow[d, "3"] \arrow[dl, "12"'] \\
\Psi \arrow[r, "7"'] & \Omega & \Psi \arrow[l, "8"] \\
\Upsilon \arrow[r, "1"'] \arrow[u, "4"] \arrow[ur, "11"] & \Phi \arrow[u, "6"] & \Upsilon \arrow[l, "2"] \arrow[u, "4"'] \arrow[ul, "10"']
\end{tikzcd}$$

Figura 6. Representación plana de categoría toro.

Así, $|\mathscr{N}\mathbb{C}T^2| \simeq T^2$, pues para cualesquier X, Y conjuntos simpliciales, el producto $X \times Y$ es un conjunto simplicial. Por lo tanto, $\mathscr{N}\mathbb{C}T^2 = \mathscr{N}\mathbb{C}S^1 \times \mathscr{N}\mathbb{C}S^1$ y así,

$$|\mathscr{N}\mathbb{C}T^2| \simeq |\mathscr{N}\mathbb{C}S^1| \times |\mathscr{N}\mathbb{C}S^1| \simeq S^1 \times S^1 = T^2.$$

3. Homotopía para categorías finitas

Se presenta una Teoría de Homotopía para categorías finitas, para lo cual es necesario definir lo que es *homotopía* en el sentido de las categorías. Con este fin se ha usado varias de las ideas descritas en (Larose y Tardif, 2004) y (Grigoryan et al, 2014). En general, se han tomado los conceptos que usa la Topología Algebraica (Hatcher, 2005) (Kosniowski, 1992) y se ha reemplazado por definiciones netamente categoriales, como por ejemplo, en vez de espacios topológicos, se habla de categorías, en vez de aplicaciones continuas, de funtores, entre otros análogos.

Todas las definiciones y demostraciones presentadas a continuación son originales.

Definición 3.1. La categoría Λ tiene la siguiente estructura:

- *Objetos:* $\mathrm{Ob}(\Lambda) = \mathbb{Z}$.
- *Flechas:* Una flecha $m_{ij}\colon i \to j$ en Λ es tal que:
    1. Si i es impar entonces $i = j$.
    2. Si i es par entonces $j = 2i-1$ o $j = 2i+1$ o $j = i$.
- *Composición:* Los únicos pares componibles son (m_{ii}, m_{ij}) y (m_{jj}, m_{ij}) cuyas composiciones están definidas por

$$\begin{aligned} m_{ij} \circ m_{ii} &= m_{ij},\\ m_{jj} \circ m_{ij} &= m_{ij}. \end{aligned}$$

- *Identidad:* Sea $i \in \mathrm{Ob}(\Lambda)$, la flecha identidad Id_i es la flecha m_{ii}. Claramente, esta definición de flecha identidad cumple los axiomas categóricos respectivos por las composiciones definidas en Λ.

Gráficamente, la categoría Λ puede visualizarse como el siguiente diagrama omitiendo las flechas identidades:

Definición 3.2. Sea $\mathbb{C}$ y $\mathbb{D}$ dos categorías finitas. Entonces dos funtores $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ y $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ son *homotópicamente equivalentes* si existe un funtor $F\colon \mathbb{C} \times \Lambda \to \mathbb{D}$ tal que existen $n, m \in \mathbb{Z}$,

$$... -3 \longleftarrow -2 \longrightarrow -1 \longleftarrow 0 \longrightarrow 1 \longleftarrow 2 \longrightarrow 3 ...$$

Figura 7. Categoría Λ

números pares con $m \leq n$, de modo que su primer funtor asociado verifica que: para todo $i \leq m$, $F^i = f$ y para todo $i \geq n$, $F^i = g$. En este caso se notará $f \simeq_H g$, o simplemente $f \simeq g$, y se dirá que son homotópicos a través de la *homotopía* F.

Proposicion 3.1. *$\simeq$ es una relación de equivalencia.*

Demostración. Sean $f, g, h \colon \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ funtores, entonces:

1. *Reflexividad.* Se define el funtor

$$\begin{aligned} F\colon\ \mathbb{C}\times\Lambda &\longrightarrow \mathbb{D} \\ (C,i) &\longmapsto f(C), \\ (\alpha, m_{ij}) &\longmapsto f(\alpha). \end{aligned}$$

Con lo cual, $F^i = f$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. Por tanto, F es una homotopía entre f y f.

2. *Simetría.* Suponiendo que $f \simeq g$, entonces existe un funtor $F\colon \mathbb{C}\times\Lambda \to \mathbb{D}$ tal que existen $n, m \in \mathbb{Z}$ números pares, con $m \leq n$, que verifican:

$$\begin{aligned} F^i &= f, \ \forall i \leq m, \\ F^i &= g, \ \forall i \geq n. \end{aligned}$$

Ahora, se define el funtor

$$\begin{aligned} G\colon\ \mathbb{C}\times\Lambda &\longrightarrow \mathbb{D} \\ (C,i) &\longmapsto F(C,-i), \\ (\alpha, m_{ij}) &\longmapsto F(\alpha, m_{-i,-j}), \end{aligned}$$

con lo que su primer funtor asociado $G^j = F^{-j}$ para todo $j \in \mathrm{Ob}(\mathbb{C})$. Por lo que $g \simeq_G f$.

3. *Transitividad.* Suponiendo que $f \simeq g$ y $g \simeq h$, entonces existen funtores $F, G\colon \mathbb{C}\times\Lambda \to \mathbb{D}$, tal que existen $n, m, p, q \in \mathbb{Z}$ pares, con $m \leq n$ y $p \leq q$, tales que sus primeros funtores asociados verifican que:

$$\begin{aligned} F^i &= f, \ \forall i \leq m, & F^i &= g, \ \forall i \geq n, \\ G^i &= g, \ \forall i \leq p, & G^i &= h, \ \forall i \geq q. \end{aligned}$$

Se define el funtor

$$\begin{aligned} H\colon\quad \mathbb{C}\times\Lambda &\longrightarrow \mathbb{D} \\ (C,i) &\longmapsto \begin{cases} F(C,i) & \text{si } i \leq n, \\ G(C, i-n+p) & \text{si } i \geq n. \end{cases} \\ (\alpha, m_{ij}) &\longmapsto \begin{cases} F(\alpha, m_{ij}) & \text{si } i,j \leq n, \\ G(\alpha, m_{i-n+p, j-n+p}) & \text{si } i,j \geq n. \end{cases} \end{aligned}$$

Con lo que tomando $r = m$ y $s = n+q-p$ se tiene que,

$$\begin{aligned} H^i &= f, \ \forall i \leq r, \\ H^i &= h, \ \forall i \geq s. \end{aligned}$$

□

Lema 3.1. *Sean $\mathbb{C}, \mathbb{D}, \mathbb{E}$ categorías y los funtores $f_1, f_2\colon \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ y $g_1, g_2\colon \mathbb{D} \to \mathbb{E}$ tales que $f_1 \simeq f_2$ y $g_1 \simeq g_2$, entonces se tiene que $g_1 \circ f_1 \simeq g_2 \circ f_2$.*

Demostración. Puesto que $f_1 \simeq f_2$, entonces existe un funtor $F\colon \mathbb{C}\times\Lambda \to \mathbb{D}$, tal que existen $n, m \in \mathbb{Z}$ pares, con $m \leq n$ tal que:

$$\begin{aligned} F^i &= f_1, \ \forall i \leq m \\ F^i &= f_2, \ \forall i \geq n. \end{aligned}$$

Además, puesto que $g_1 \simeq g_2$, entonces existe un funtor $G\colon \mathbb{D}\times\Lambda \to \mathbb{E}$ tal que existen $p, q \in \mathbb{Z}$ pares, con $p \leq q$, donde:

$$\begin{aligned} G^i &= g_1, \ \forall i \leq p, \\ G^i &= g_2, \ \forall i \geq q. \end{aligned}$$

Así, se define el funtor

$$\begin{aligned} H\colon\ \mathbb{C}\times\Lambda &\longrightarrow \mathbb{E} \\ (C,i) &\longmapsto G(F(C,i), i-n+p), \\ (\alpha, m_{ij}) &\longmapsto G(F(\alpha, m_{ij}), m_{i-n+p, j-n+p}). \end{aligned}$$

Ahora, tomando $r = m$, se tiene que para $i \leq r$,

$$\begin{aligned} H^i &= G^{i-n+p} \circ F^i, \\ &= g_1 \circ f_1. \end{aligned}$$

De un modo similar, tomando $s = n+q-p$, en caso de que $i \geq s$,

$$\begin{aligned} H^i &= G^{i-n+p} \circ F^i, \\ &= g_2 \circ f_2. \end{aligned}$$

□

Definición 3.3. Sean $\mathbb{C}$ y $\mathbb{D}$ dos categorías finitas y $F\colon \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ un funtor. Se dice que $\mathbb{C}$ y $\mathbb{D}$ son *homotópicamente equivalentes* o tienen *el mismo tipo de homotopía* si existe un funtor $g\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ tal que $f \circ g \simeq Id_{\mathbb{C}}$ y $g \circ f \simeq Id_{\mathbb{D}}$. En este caso, se nota $\mathbb{C} \simeq \mathbb{D}$.

Proposicion 3.2. *La equivalencia homotópica entre categorías es una relación de equivalencia.*

Demostración. Sean $\mathbb{C}, \mathbb{D}, \mathbb{E}$ categorías finitas, entonces:

1. *Reflexividad.* Sea $f = Id_{\mathbb{C}}$ y $g = Id_{\mathbb{C}}$, entonces $f \circ g = Id_{\mathbb{C}}$ y $g \circ f = Id_{\mathbb{C}}$, con lo que definiendo el funtor

$$\begin{aligned} F\colon\ \mathbb{C}\times\Lambda &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (C,i) &\longmapsto C, \\ (\alpha, m_{ij}) &\longmapsto \alpha, \end{aligned}$$

se tiene que, $F^i = f \circ g = Id_{\mathbb{C}}$ y $F^i = g \circ f = Id_{\mathbb{C}}$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. Con lo que $\mathbb{C} \simeq \mathbb{C}$.

2. *Simetría.* Suponiendo que $\mathbb{C} \simeq \mathbb{D}$ entonces existe un funtor $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ tal que existe $g\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ un funtor, donde $f \circ g \simeq Id_{\mathbb{D}}$ y $g \circ f \simeq Id_{\mathbb{C}}$. Por lo tanto tomando, $f' = g$ y $g' = f$, se tiene que $f' \circ g' = Id_{\mathbb{C}}$ y $g' \circ f' = Id_{\mathbb{D}}$ y así $\mathbb{D} \simeq \mathbb{C}$.

3. *Transitividad.* Supóngase que $\mathbb{C} \simeq \mathbb{D}$ y $\mathbb{D} \simeq \mathbb{E}$, entonces existe un funtor $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ tal que existe $g\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ un funtor, donde $f \circ g \simeq Id_{\mathbb{D}}$ y $g \circ f \simeq Id_{\mathbb{C}}$, además, existe un funtor $f'\colon \mathbb{D} \to \mathbb{E}$ tal que existe $g'\colon \mathbb{E} \to \mathbb{D}$ funtor, donde $f' \circ g' \simeq Id_{\mathbb{E}}$ y $g' \circ f' \simeq Id_{\mathbb{D}}$. Así, se define $f'' = f' \circ f$, $g'' = g \circ g'$, con lo que $f''\colon \mathbb{C} \to \mathbb{E}$ y $g''\colon \mathbb{E} \to \mathbb{C}$. Gracias al Lema 3.1, se tiene que

$$\begin{aligned} f'' \circ g'' &= f' \circ \left[(f \circ g) \circ g'\right], \\ &\simeq f' \circ (Id_{\mathbb{D}} \circ g'), \\ &\simeq Id_{\mathbb{E}}. \end{aligned}$$

De modo similar, $g'' \circ f'' \simeq Id_{\mathbb{C}}$. □

3.1 Primer grupo fundamental de una categoría

Definición 3.4. Sea $\mathbb{C}$ una categoría finita y $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathbb{C})$. Un *camino* de A a B es un funtor $\alpha\colon \Lambda \to \mathbb{C}$ tal que existen $n, m \in \mathbb{Z}$ pares, con $m \leq n$, de modo que:

1. Para todo $i, j \leq m$, se tiene que $\alpha(i) = A$ y $\alpha(m_{ij}) = Id_A$.
2. Para todo $i, j \geq n$, se tiene que $\alpha(i) = B$ y $\alpha(m_{ij}) = Id_B$.

El camino α será notado $\alpha_{m,n}$, o se dirá que el camino α es un $mn-$camino de A a B

Definición 3.5. Una categoría finita se dirá *conexa por caminos* si para todo par de objetos en $\mathbb{C}$, existe un camino entre ellos.

Observación 3.1. En una categoría $\mathbb{C}$ cualquiera, si $f\colon A \to B$ y $g\colon A \to C$ son dos flechas en $\mathbb{C}$, un camino de C a B, puede ser representado gráficamente de la siguiente manera, para p un entero par que sirve como base de referencia:

$$\cdots C \xrightarrow[Id]{} C \xleftarrow[g]{} A_{(p)} \xrightarrow[Id]{} A \xleftarrow[Id]{} A \xrightarrow[f]{} B$$

En efecto, el funtor envía $p \mapsto A$, $p-1 \mapsto C$, $m_{p,p-1} \mapsto g$, y así, consecutivamente.

Definición 3.6. Sea $\mathbb{C}$ una categoría finita y sea $C \in \mathrm{Ob}(\mathbb{C})$, entonces el *camino constante en* C, se define como el funtor

$$\begin{aligned} \alpha_C\colon \Lambda &\longrightarrow \mathbb{C} \\ i &\longmapsto C, \\ m_{ij} &\longmapsto Id_C. \end{aligned}$$

Equivalentemente, por definición de camino, el camino constante α_C es un $nn-$camino de C a C para todo $n \in \mathrm{Ob}(\mathbb{C})$.

Definición 3.7. Sea $\mathbb{C}$ categoría y sea $\alpha\colon \Lambda \to \mathbb{C}$ un camino de A a B en $\mathbb{C}$. El *camino inverso* de α, notado por $\overline{\alpha}$, se define como el funtor

$$\begin{aligned} \overline{\alpha}\colon \Lambda &\longrightarrow \mathbb{C} \\ i &\longmapsto \alpha(-i), \\ m_{ij} &\longmapsto \alpha(m_{-i,-j}). \end{aligned}$$

Definición 3.8. Sean $\alpha\colon \Lambda \to \mathbb{C}$ un $mn-$camino de A a B y $\beta\colon \Lambda \to \mathbb{C}$ un $pq-$camino de B a C, entonces definimos el producto de $\alpha \cdot \beta$, como el funtor

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \beta\colon \quad \Lambda &\longrightarrow \mathbb{C} \\ i &\longmapsto \begin{cases} \alpha(i) & \text{si } i \leq n, \\ \beta(i-n+p) & \text{si } i \geq n, \end{cases} \\ m_{ij} &\longmapsto \begin{cases} \alpha(m_{ij}) & \text{si } i, j \leq n, \\ \beta(m_{i-n+p,j-n+p}) & \text{si } i, j \geq n. \end{cases} \end{aligned}$$

El producto $\alpha \cdot \beta$ también será llamado la *concatenación* de α con β y por definición es un camino de A a C. De este modo, la concatenación $\alpha \cdot \beta$, será denotada mediante $(\alpha \cdot \beta)_{m,n+q-p}$.

Ejemplo 3.1. Los ejemplos a continuación ilustran la forma en la que se representarán caminos de forma abreviada para simplificar las demostraciones. Sea $\mathbb{C}$ una categoría y sea $n \in \mathbb{Z}$, entonces:

1. Sea $f\colon A \to B \in \mathrm{Mo}(\mathbb{C})$, entonces, el camino f con base $2n$, es el funtor

$$\begin{aligned} f\colon \quad \Lambda &\longrightarrow \mathbb{C} \\ i &\longmapsto \begin{cases} A & \text{si } i \leq 2n, \\ B & \text{si } i \geq 2n+1, \end{cases} \\ m_{ij} &\longmapsto \begin{cases} f & \text{si } m_{ij} = m_{2n,2n+1}, \\ Id_A & \text{si } i, j \leq 2n, \\ Id_B & \text{si } i, j \geq 2n+1. \end{cases} \end{aligned}$$

   Este camino puede ser representado mediante el siguiente diagrama:

$$\cdots A \xleftarrow[Id]{} A_{(2n)} \xrightarrow[f]{} B \xleftarrow[Id]{} B \xrightarrow[Id]{} B \cdots$$

2. Sea $f\colon A \to B \in \mathrm{Mo}(\mathbb{C})$, entonces, el camino $\overline{f}$ con base $2n$, es el funtor

$$\begin{aligned} \overline{f}\colon \quad \Lambda &\longrightarrow \mathbb{C} \\ i &\longmapsto \begin{cases} B & \text{si } i \leq 2n-1, \\ A & \text{si } i \geq 2n, \end{cases} \\ m_{ij} &\longmapsto \begin{cases} f & \text{si } m_{ij} = m_{2n,2n-1}, \\ Id_A & \text{si } i, j \geq 2n, \\ Id_B & \text{si } i, j \leq 2n-1. \end{cases} \end{aligned}$$

   Este camino puede es representado por el diagrama:

$$\cdots B \xrightarrow[Id]{} B \xleftarrow[f]{} A_{(2n)} \xrightarrow[Id]{} A \xleftarrow[Id]{} A \cdots$$

3. Sean dos flechas en $\mathbb{C}$, de la forma

$$A \xrightarrow{f} B \xleftarrow{g} C$$

   Entonces:

   - Se define el camino $f\overline{g}$, como el funtor

$$\begin{aligned} f\overline{g}\colon \quad \Lambda &\longrightarrow \mathbb{C} \\ i &\longmapsto \begin{cases} B & \text{si } i = 2n+1, \\ A & \text{si } i < 2n+1, \\ C & \text{si } i > 2n+1, \end{cases} \\ m_{ij} &\longmapsto \begin{cases} f & \text{si } m_{ij} = m_{2n,2n+1}, \\ g & \text{si } m_{ij} = m_{2n+2,2n+1}, \\ Id_A & \text{si } , j \leq 2n, \\ Id_C & \text{si } , j \geq 2n+2. \end{cases} \end{aligned}$$

Este camino puede ser representado mediante el siguiente diagrama:

$$\cdots A \xleftarrow[Id]{} A \xrightarrow[f]{} B_{(2n+1)} \xleftarrow[g]{} C \xrightarrow[Id]{} C \cdots$$

Obsérvese que si $\alpha = f\overline{g}$, entonces el camino inverso de $\overline{\alpha}$ es por definición el camino:

$$\begin{aligned} \overline{f\overline{g}}\colon\quad & \Lambda \longrightarrow \mathbb{C} \\ i \longmapsto & \begin{cases} B \text{ si } i = 2n-1, \\ A \text{ si } i > 2n-1, \\ C \text{ si } i < 2n-1, \end{cases} \\ m_{ij} \longmapsto & \begin{cases} f & \text{si } m_{ij} = m_{2n,2n-1}, \\ g & \text{si } m_{ij} = m_{2n-2,2n-1}, \\ Id_A & \text{si } i,j \geq 2n, \\ Id_C & \text{si } i,j \geq 2n-2, \end{cases} \end{aligned}$$

el cual se puede representar mediante el siguiente diagrama:

$$\cdots C \xleftarrow[Id]{} C \xrightarrow[g]{} B_{(2n-1)} \xleftarrow[f]{} A \xrightarrow[Id]{} A \cdots$$

Es importante notar que $\overline{\alpha} = g\overline{f}$ pero para una posición base distinta a la de α.

- Se define el camino $f_2\overline{g}$ por el funtor

$$\begin{aligned} f_2\overline{g}\colon\quad & \Lambda \longrightarrow \mathbb{C} \\ i \longmapsto & \begin{cases} B \text{ si } i = 2n-1, 2n, 2n+1, \\ A \text{ si } i < 2n-1, \\ C \text{ si } i > 2n+1, \end{cases} \\ m_{ij} \longmapsto & \begin{cases} Id_B & \text{si } m_{ij} = m_{2n,2n-1} \text{ o } m_{2n,2n+1} \\ f & \text{si } m_{ij} = m_{2n-2,2n-1}, \\ g & \text{si } m_{ij} = m_{2n,2n+1}, \\ Id_A & \text{si } i,j \leq 2n-2, \\ Id_C & \text{si } i,j \geq 2n+2. \end{cases} \end{aligned}$$

Este camino es representado mediante el siguiente diagrama:

$$\cdots A \xleftarrow[Id]{} A \xrightarrow[f]{} B \xleftarrow[Id]{} B_{(2n)} \xrightarrow[Id]{} B \xleftarrow[g]{} C \xrightarrow[Id]{} C \cdots$$

4. Sean dos flechas en $\mathbb{C}$, de la forma

$$B \xleftarrow{\ f\ } A \xrightarrow{\ g\ } C$$

Entonces:

- Se define el camino $\overline{f}g$ como el funtor

$$\begin{aligned} \overline{f}g\colon\quad & \Lambda \longrightarrow \mathbb{C} \\ i \longmapsto & \begin{cases} A \text{ si } i = 2n+2, \\ B \text{ si } i \leq 2n+2, \\ C \text{ si } i \geq 2n+2, \end{cases} \\ m_{ij} \longmapsto & \begin{cases} f & \text{si } m_{ij} = m_{2n+2,2n+1}, \\ g & \text{si } m_{ij} = m_{2n+2,2n+3}, \\ Id_B & \text{si } i,j \leq 2n+1, \\ Id_C & \text{si } i,j \leq 2n+3. \end{cases} \end{aligned}$$

Con lo que este camino puede ser representado mediante el siguiente diagrama:

$$\cdots B \xrightarrow[Id]{} B \xleftarrow[f]{} A_{(2n+2)} \xrightarrow[g]{} C \xleftarrow[Id]{} C \cdots$$

Ahora, si $\alpha = \overline{f}g$, el camino $\overline{\alpha} = \overline{g}f$ para un objeto base diferente como lo muestra el siguiente diagrama:

$$\cdots C \xrightarrow[Id]{} C \xleftarrow[g]{} A_{(2n-2)} \xrightarrow[f]{} B \xleftarrow[Id]{} B \cdots$$

- Se define el camino $\overline{f}_2 g$ como el funtor

$$\begin{aligned} \overline{f}_2 g\colon\quad & \Lambda \longrightarrow \mathbb{C} \\ i \longmapsto & \begin{cases} A \text{ si } i = 2n, 2n+1, 2n+2, \\ B \text{ si } i < 2n, \\ C \text{ si } i > 2n+2, \end{cases} \\ m_{ij} \longmapsto & \begin{cases} Id_A & \text{si } m_{ij} = m_{2n,2n+1} \text{ o } m_{2n+2,2n+1} \\ f & \text{si } m_{ij} = m_{2n,2n-1}, \\ g & \text{si } m_{ij} = m_{2n+2,2n+3}, \\ Id_B & \text{si } i,j \leq 2n-1, \\ Id_C & \text{si } i,j \geq 2n+3. \end{cases} \end{aligned}$$

Con lo que este camino puede ser representado mediante el siguiente diagrama:

$$\cdots B \xrightarrow[Id]{} B \xleftarrow[f]{} A \xrightarrow[Id]{} A_{(2n+1)} \xleftarrow[Id]{} A \xrightarrow[g]{} C \xleftarrow[Id]{} C \cdots$$

Definición 3.9. Sean $\alpha\colon \Lambda \to \mathbb{C}$ un camino de A a B y $\beta\colon \Lambda \to \mathbb{C}$ un camino de A a B. Se dice que los caminos α y β son *homotópicos*, notado mediante $\alpha \sim \beta$, si existe $F\colon \Lambda \times \Lambda \to \mathbb{C}$, llamado *homotopía de caminos,* tal que existe $r_i, s_i \in \mathrm{Ob}(\Lambda)$, con $r_i \leq s_i$ para $i = 1,2$ pares, que verifican:

$$\begin{aligned} F^i &= \alpha, \ \forall i \leq r_1, & \qquad F_i &= \alpha_A, \ \forall i \leq r_2, \\ F^i &= \beta, \ \forall i \geq s_1, & \qquad F_i &= \alpha_B, \ \forall i \geq s_2. \end{aligned}$$

Equivalentemente, se dice que los caminos α y β de A a B son *homotópicos* si $\alpha \simeq \beta$ a través de F, y además el segundo funtor asociado F_i de F se vuelve constante α_A para valores $i \leq r_2$ y α_B para $i \geq s_2$.

Lema 3.2 (Lema de traslación). *Sea $\mathbb{C}$ una categoría y una flecha en $\mathbb{C}$, $f\colon A \to B$, entonces:*

1. *El camino f con base $2n$ es homotópico al camino:*
   (a) *f con base $2n+2$.*
   (b) *f con base $2n-2$.*
2. *El camino $\overline{f}$ con base $2n$ es homotópico al camino:*
   (a) *$\overline{f}$ con base $2n+2$.*
   (b) *$\overline{f}$ con base $2n-2$.*

Demostración. Solo se demostrará 1, pues para 2 se procede de la misma manera.

1. El funtor de homotopía se construye dado los siguientes diagramas conmutativos:

(a)

$$\begin{tikzcd}
A & A_{(2n,1)} \arrow[l, "Id"'] \arrow[r, "f"] & B & B \arrow[l, "Id"'] \arrow[r, "Id"] & B \\
A \arrow[u, "Id"] & A \arrow[l, "Id"] \arrow[r, "Id"'] \arrow[u, "Id"'] \arrow[ul, "Id"] \arrow[ur, "f"] & A \arrow[u, "f"] & A \arrow[l, "Id"] \arrow[r, "f"'] \arrow[u, "f"'] \arrow[ul, "f"] \arrow[ur, "f"] & B \arrow[u, "Id"']
\end{tikzcd}$$

(b)

$$\begin{tikzcd}
A & A \arrow[l, "Id"'] \arrow[r, "f"] & B & B \arrow[l, "Id"'] \arrow[r, "Id"] & B \\
A \arrow[u, "Id"] & A \arrow[l, "Id"] \arrow[r, "Id"'] \arrow[u, "Id"'] \arrow[ul, "Id"] \arrow[ur, "f"] & A \arrow[u, "f"] & A_{(2n,0)} \arrow[l, "Id"] \arrow[r, "f"'] \arrow[u, "f"'] \arrow[ul, "f"] \arrow[ur, "f"] & B \arrow[u, "Id"']
\end{tikzcd}$$

□

Lema 3.3 (Lema de anulación)**.** *En una categoría $\mathbb{C}$, para una flecha en $\mathbb{C}$, $f\colon A \to B \in Mo(\mathbb{C})$:*

1. $f\overline{f} \sim \alpha_A$.
2. $\overline{f}f \sim \alpha_B$.

Demostración. El funtor de homotopía que existe para demostrar 1 y 2 viene dado por los siguientes diagramas conmutativos, respectivamente, por lo cual se realiza una persecución de diagramas:

1.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "Id"'] & A_{(2n,0)} \arrow[l, "Id"'] \arrow[r, "Id"] \arrow[d, "Id"] \arrow[dl, "Id"] \arrow[dr, "f"] & A \arrow[d, "f"] & A \arrow[l, "Id"'] \arrow[r, "Id"] \arrow[d, "Id"] \arrow[dl, "f"] \arrow[dr, "Id"] & A \arrow[d, "Id"] \\
A & A \arrow[l, "Id"] \arrow[r, "f"'] & B & A \arrow[l, "f"] \arrow[r, "Id"'] & A
\end{tikzcd}$$

2.

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "Id"] \arrow[d, "Id"'] \arrow[dr, "Id"] & B \arrow[d, "Id"] & A_{(2n+2,0)} \arrow[l, "f"'] \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"] \arrow[dl, "f"] \arrow[dr, "f"] & B \arrow[d, "Id"] & B \arrow[l, "Id"'] \arrow[d, "Id"] \arrow[dl, "Id"] \\
B \arrow[r, "Id"] & B & B \arrow[l, "Id"] \arrow[r, "Id"'] & B & B \arrow[l, "Id"]
\end{tikzcd}$$

□

Lema 3.4 (Lema de simplificación)**.** *En una categoría $\mathbb{C}$, para cualquier par de flechas paralelas $f,g\colon A \to B$ se tiene que:*

1. *En caso de que f,g sean de la forma:*

$$A \xrightarrow{f} B \xleftarrow{g} C$$

Entonces $f\overline{g} \simeq f_2\overline{g}$.

2. *En caso de que f,g sean de la forma:*

$$B \xleftarrow{f} A \xrightarrow{g} C$$

Entonces $\overline{f}g \simeq \overline{f}_2 g$.

Demostración. El funtor de homotopía que existe para demostrar 1 y 2 viene dado por los siguientes diagramas conmutativos:

1.

$$\begin{tikzcd}
A & A \arrow[l, "Id"'] \arrow[r, "f"] & B & B_{(2n,0)} \arrow[l, "Id"'] \arrow[r, "Id"] & B & C \arrow[l, "g"'] \\
A \arrow[u, "Id"] & A \arrow[l, "Id"] \arrow[r, "Id"'] \arrow[u, "Id"'] \arrow[ul, "Id"] \arrow[ur, "f"] & A \arrow[u, "f"] & A \arrow[l, "Id"] \arrow[r, "f"'] \arrow[u, "f"'] \arrow[ul, "f"] \arrow[ur, "f"] & B \arrow[u, "Id"] & C \arrow[l, "g"] \arrow[u, "Id"'] \arrow[ul, "g"]
\end{tikzcd}$$

2.

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "Id"] \arrow[d, "Id"'] \arrow[dr, "Id"] & B \arrow[d, "Id"] & A_{(2n,0)} \arrow[l, "f"'] \arrow[r, "Id"] \arrow[d, "f"] \arrow[dl, "f"] \arrow[dr, "f"] & A \arrow[d, "f"] & A \arrow[l, "Id"'] \arrow[r, "g"] \arrow[d, "Id"] \arrow[dl, "f"] \arrow[dr, "g"] & C \arrow[d, "Id"] \\
B \arrow[r, "Id"'] & B & B \arrow[l, "Id"] \arrow[r, "Id"'] & B & A \arrow[l, "f"] \arrow[r, "g"'] & C
\end{tikzcd}$$

□

Lema 3.5 (Lema de extensión)**.** *Para un $mn-$camino cualquiera $\alpha\colon \Lambda \to \mathbb{C}$ de A a B se tiene que:*

1. $\alpha_A \cdot \alpha \sim \alpha$.
2. $\alpha \cdot \alpha_B \sim \alpha$.

Demostración. Solo se demostrará 1, pues para 2 se procede de la misma manera.

Por la defininción de camino constante, el producto $\alpha_A \cdot \alpha$ se puede escibir como

$$\begin{aligned}
\alpha_A \cdot \alpha\colon \quad \Lambda &\longrightarrow \mathbb{C} \\
i &\longmapsto \begin{cases} \alpha_A(i) & \text{si } i \leq m, \\ \alpha(i) & \text{si } i \geq m, \end{cases} \\
m_{ij} &\longmapsto \begin{cases} \alpha_A(m_{ij}) & \text{si } i,j \leq m, \\ \alpha(m_{ij}) & \text{si } i,j \geq m. \end{cases}
\end{aligned}$$

Puesto que $\alpha = \alpha_A$ para valores menores que m, por como se ha escrito el producto $\alpha_A \cdot \alpha$, se tiene que es igual al camino α y por lo tanto, al ser la homotopía de caminos una relación reflexiva, estos caminos son homotópicos, así $\alpha_A \cdot \alpha \simeq_H \alpha$. □

Lema 3.6 (Lema de concatenación)**.** *Sean α_i, β_i caminos concatenables tal que $\alpha_i \sim \beta_i$ para $i \in \{1,2\}$, entonces $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \sim \beta_1 \cdot \beta_2$.*

Demostración. Sea $\mathbb{C}$ una categoría. Suponiendo que α_i es un m_i,n_i-camino con y β_i es un p_i,q_i-camino para $i \in \{1,2\}$, y puesto que $\alpha_i \sim \beta_i$, entonces existen funtores $F,G\colon \Lambda \times \Lambda \to \mathbb{C}$ tal que:

1. Para $i \in \{1,2\}$, existen $a_i, b_i \in \mathbb{Z}$ con $a_i \leq b_i$ de modo que:
$$\begin{aligned} F^i &= \beta_1,\ \forall i \leq a_1, & F_i &= \alpha_A,\ \forall i \leq a_2,\\ F^i &= \alpha_1,\ \forall i \geq b_1, & F_i &= \alpha_B,\ \forall i \geq b_2. \end{aligned}$$

2. Para $i \in \{1,2\}$, existen $c_i, d_i \in \mathbb{Z}$ con $c_i \leq d_i$ de modo que:
$$\begin{aligned} G^i &= \beta_2,\ \forall i \leq c_1, & G_i &= \alpha_A,\ \forall i \leq c_2,\\ G^i &= \alpha_2,\ \forall i \geq d_1, & G_i &= \alpha_B,\ \forall i \geq d_2. \end{aligned}$$

Tomando:
$$\begin{aligned} a &= \min\{a_2, m_1, p_1\}, & b &= \max\{b_2, n_1, q_1\},\\ c &= \min\{c_2, m_2, p_2\}, & d &= \max\{d_2, n_2, q_2\}, \end{aligned}$$
por el lema 3.5, α_1, β_1 pueden ser vistos como $ab-$caminos y α_2, β_2 pueden ser vistos como $cd-$caminos. Por definición de concatenación de caminos se tiene que
$$\begin{aligned} \alpha_1 \cdot \alpha_2 : \quad \Lambda &\longrightarrow \mathbb{C}\\ i &\longmapsto \begin{cases} \alpha_1(i) & \text{si } i \leq b,\\ \alpha_2(i-b+c) & \text{si } i \geq b, \end{cases}\\ m_{ij} &\longmapsto \begin{cases} \alpha_1(m_{ij}) & \text{si } i,j \leq b,\\ \alpha_2(m_{i-b+c,j-b+c}) & \text{si } i,j \geq b. \end{cases} \end{aligned}$$

Además,
$$\begin{aligned} \beta_1 \cdot \beta_2 : \quad \Lambda &\longrightarrow \mathbb{C}\\ i &\longmapsto \begin{cases} \beta_1(i) & \text{si } i \leq b,\\ \beta_2(i-b+c) & \text{si } i \geq b, \end{cases}\\ m_{ij} &\longmapsto \begin{cases} \beta_1(m_{ij}) & \text{si } i,j \leq b,\\ \beta_2(m_{i-b+c,j-b+c}) & \text{si } i,j \geq b. \end{cases} \end{aligned}$$

Ahora, se define el funtor H, como el funtor
$$\begin{aligned} H : \quad \Lambda \times \Lambda &\longrightarrow \mathbb{C}\\ (k,i) &\longmapsto \begin{cases} F(k,i) & \text{si } k \leq b,\\ G(k-b+c,i) & \text{si } k \geq b. \end{cases}\\ (m_{kl}, m_{ij}) &\longmapsto \begin{cases} F(m_{kl}, m_{ij}) & \text{si } k,l \leq b,\\ G(m_{k-b+c,l-b+c}, m_{ij}) & \text{si } k,l \geq b. \end{cases} \end{aligned}$$

Con lo cual, se sigue que $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \sim \beta_1 \cdot \beta_2$ bajo la homotopía H. $\square$

Estos cinco lemas son de gran utilidad para la simplificación de la descripción de los caminos, pues, para algún $n \in \mathbb{N}$, todo camino en una categoría $\mathbb{C}$ se puede escribir de la forma,
$$\alpha = (f_1)\overline{g_1} f_2 \overline{g_2} \cdots f_n(\overline{g_n}),$$
donde $(\cdot)$ sirve para indicar que el camino puede o no, terminar o iniciar con una flecha del tipo que encierra el paréntesis. Así:

1. Si $\beta = (t_1)\overline{u_1} t_2 \overline{u_2} \cdots t_m(\overline{u_m})$ es un camino concatenable con α, entonces por el lema de concatenación, se tiene que:
$$\alpha \cdot \beta \sim (f_1)\overline{g_1} f_2 \overline{g_2} \cdots f_n(\overline{g_n})(t_1)\overline{u_1} t_2 \overline{u_2} \cdots t_m(\overline{u_m}),$$

2. Si existe $i \in \{1, \cdots, n\}$ tal que $h = f_i = g_i$ para alguna flecha $h : A \to B$ en $\mathbb{C}$, entonces,
$$\begin{aligned} \alpha &= (f_1)\overline{g_1} f_2 \overline{g_2} \cdots f_{i-1}\overline{g_{i-1}} h \overline{h} f_{i+1} \overline{g_{i+1}} \cdots f_n(\overline{g_n}),\\ &\sim (f_1)\overline{g_1} f_2 \overline{g_2} \cdots f_{i-1}\overline{g_{i-1}}\,{}_2\, f_{i+1} \overline{g_{i+1}} \cdots f_n(\overline{g_n}), \quad \text{(lema 3.3)}\\ &\sim (f_1)\overline{g_1} f_2 \overline{g_2} \cdots f_{i-1}\overline{g_{i-1}} f_{i+1} \overline{g_{i+1}} \cdots f_n(\overline{g_n}), \quad \text{(lema 3.4)} \end{aligned}$$

3. De manera general, considérese todos los j tal que $f_j = g_j$. Se puede proceder a anular y simplificar todos estas flechas como se procedió en 2 gracias a los lema de simplificación y anulación. Luego se puede realizar una traslación estándar, es decir, tomar el lugar base $n = 0$ y con el lema de traslación, tener caminos homotópicos, por lo que el lugar de base al final será innecesario en la notación. Este proceso se conocerá como *eliminación de flechas triviales de un camino* y cuando se ha realizado este procedimiento sobre un camino α, el camino resultante se conocerá como el representante minimal de α, notado por α_{min}.

Los puntos $1, 2$ y 3 tratados anteriormente están justificados por la siguiente proposición:

Proposicion 3.3. *En una categoría $\mathbb{C}$, para cualquier par de flechas f, g en $\mathbb{C}$ se tiene que:*

1. *En caso de que f, g sean de la forma:*
$$A \xrightarrow{f} B \xleftarrow{g} C$$
Entonces, si $\alpha = f\overline{g}$, se tiene $\overline{\alpha} \cdot \alpha \sim \alpha_C$.

2. *En caso de que f, g sean de la forma:*
$$B \xleftarrow{f} A \xrightarrow{g} C$$
Entonces, si $\alpha = \overline{f} g$, se tiene $\alpha \cdot \overline{\alpha} \sim \alpha_B$.

Demostración. Solo se demostrará 1, pues 2 es similar:

Si $\alpha = f\overline{g}$, entonces por definición de concatenación de caminos se tiene que $\overline{\alpha} \cdot \alpha$ es el camino representado por el siguiente diagrama:
$$\cdots C \underset{Id}{\longleftarrow} C \underset{g}{\longrightarrow} B \underset{f}{\longleftarrow} A_{(2n)} \underset{f}{\longrightarrow} B \underset{g}{\longleftarrow} C \underset{Id}{\longrightarrow} C \cdots$$

Este diagrama junto a los lemas 3.3, 3.4 y 3.6 indican que
$$\overline{\alpha} \cdot \alpha = g\overline{f} f \overline{g} \sim g_2 \overline{g} \sim g\overline{g} \sim \alpha_C.$$

$\square$

Proposicion 3.4. *$\sim$ es una relación de equivalencia sobre el conjunto de caminos en una categoría $\mathbb{C}$ entre dos objetos A y B.*

Demostración. Puesto que en la proposición 3.1 se ha demostrado que $\simeq$ es una relación de equivalencia, bastará demostrar que las homotopías construidas verifican las condiciones respecto a su segundo funtor asociado, lo cual se verifica de manera inmediata.

$\square$

Proposicion 3.5. *Sea $\mathbb{C}$ una categoría finita y $\alpha : \Lambda \to \mathbb{C}$ un camino de A a B en $\mathbb{C}$, entonces se tiene las siguientes homotopías de caminos:*

1. $\alpha \cdot \overline{\alpha} \sim \alpha_A$.

2. $\overline{\alpha} \cdot \alpha \sim \alpha_B$.

3. Si además, $\beta : \Lambda \to \mathbb{C}$ *es un camino de B a C y* $\gamma : \Lambda \to \mathbb{C}$ *es un camino de C a D, entonces*

$$\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) \sim (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$$

Demostración. Por las similitudes entre las demostraciones de 1 con 2 se procerá a realizar únicamente las demostraciones de 1 y 3. Para esto, sea $\alpha : \Lambda \to \mathbb{C}$ un $mn-$camino de A a B, $\beta : \Lambda \to \mathbb{C}$ un $pq-$camino de B a C y $\gamma : \Lambda \to \mathbb{C}$ es un $rs-$camino de C a D,en la categoría $\mathbb{C}$. Entonces:

1. Sea $k \in \mathbb{N}$, tal que el camino α puede ser expresado como $\alpha = (f_1)\overline{g_1}f_2\overline{g_2}\cdots f_k(\overline{g_k})$, entonces $\overline{\alpha} \sim (g_k)\overline{f_k}\cdots g_2\overline{f_2}g_1(\overline{f_1})$, por los lemas 3.4 y 3.3, con lo que por el lema de concatenación 3.1 se tiene que:

$$\begin{aligned}
\alpha \cdot \overline{\alpha} &\sim (f_1)\overline{g_1}f_2\overline{g_2}\cdots f_k(\overline{g_k})(g_k)\overline{f_k}\cdots g_2\overline{f_2}g_1(\overline{f_1}),\\
&\sim (f_1)\overline{g_1}f_2\overline{g_2}\cdots f_k\overline{f_k}\cdots g_2\overline{f_2}g_1(\overline{f_1}),\\
&\sim (f_1)\overline{g_1}f_2\overline{g_2}\cdots \overline{g_{k-1}}g_{k-1}\cdots g_2\overline{f_2}g_1(\overline{f_1}),\\
&\vdots\\
&\sim \alpha_A.
\end{aligned}$$

Donde la última línea viene del hecho de que α es un camino desde A. Y por lo tanto, $\alpha \cdot \overline{\alpha} \sim \alpha_A$.

3. Por notación se tiene que $(\alpha \cdot \beta)_{m,n+q-p}$ y de este modo, se tiene que

$$(\alpha \cdot \beta)_{m,n+q-p} \cdot \gamma_{rs} = [(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma]_{m,n+q-p+s-r}.$$

Además,

$$\alpha_{mn} \cdot (\beta_{pq} \cdot \gamma_{rs}) = \alpha_{mn} \cdot (\beta \cdot \gamma)_{p,q+s-r} = [\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)]_{m,n+q+s-r-p}.$$

Por definición de concatenación de caminos se tiene que

$$\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta \cdot)\gamma,$$

y así,

$$\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) \sim (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma.$$

□

Definición 3.10. Sea $(\mathbb{C}, C)$ una categoría con un objeto base $\mathbb{C}$. Un *lazo* en C es un camino $\alpha : \Lambda \to \mathbb{C}$ de C a C.

Considerando $L(C)$ como el conjunto de lazos en C, gracias a la proposición 3.4, la relación $\sim_C$ sobre $L(C)$ definida por $\alpha_1 \sim_C \alpha_2$ si y solamente si $\alpha_1 \sim \alpha_2$, para cada par de lazos (α_1, α_2) en C, es una relación de equivalencia sobre $L(C)$. El conjunto de clases de equivalencia $L(C)/\sim_C$ será notado[1] mediante $\kappa_1(\mathbb{C}, C)$ y los elementos de este conjunto serán notados por $[\alpha]$. Finalmente, la relación $\sim_C$ será notada simplemente $\sim$, entendiéndose en el contexto en el que se está trabajando.

[1] Se ha usado la letra κ para diferenciar del grupo de homotopía de espacios topológicos.

Proposicion 3.6. *El producto en* $\kappa_1(\mathbb{C}, C)$*, definido por*

$$[\alpha][\beta] = [\alpha \cdot \beta]$$

respeta homotopías.

Demostración. Por la proposición 3.6 se conoce que

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 \sim \beta_1 \cdot \beta_2,$$

para α_i, β_i lazos en C con $i \in \{1,2\}$ tales que $\alpha_i \sim \beta_i$. Por lo tanto, $[\alpha_1][\alpha_2] = [\beta_1][\beta_2]$. □

Proposicion 3.7. $\kappa_1(\mathbb{C}, C)$ *es un grupo con respecto al producto* $[\alpha_1][\alpha_2] = [\alpha_1 \cdot \alpha_2]$*. El grupo* $\kappa_1(\mathbb{C}, C)$ *se llamará* el grupo fundamental de la categoría $\mathbb{C}$ *o también llamado* primer grupo de homotopía*, con objeto base C.*

Demostración. Se procederá a demostrar que se verifican los axiomas de grupo para el conjunto $\kappa_1(\mathbb{C}, C)$ con la ley de composición

$$[\alpha_1][\alpha_2] = [\alpha_1 \cdot \alpha_2].$$

1. *Clausurativo.* Sean $[\alpha], [\beta] \in \kappa_1(\mathbb{C}, C)$, entonces, $[\alpha][\beta] = [\alpha \cdot \beta]$ es un elemento de $\kappa_1(\mathbb{C}, C)$, puesto que la concatenación de los lazos en C es un lazo en C y así $[\alpha \cdot \beta]$ es un elemento de $\kappa_1(\mathbb{C}, C)$.

2. *Elemento neutro.* Considérese $e = [\alpha_C]$, sea $[\alpha] \in \kappa_1(\mathbb{C}, C)$, gracias al lema 3.5, se tiene que $\alpha \cdot \alpha_C \sim \alpha_C \cdot \alpha$ y así,

$$e[\alpha] = [\alpha][\alpha_C] = [\alpha]e,$$

y además, puesto que $\alpha \cdot \alpha_C \sim \alpha$, entonces $e[\alpha] = [\alpha]$.

3. *Elemento inverso.* Sea $[\alpha] \in \kappa_1(\mathbb{C}, C)$, entonces el elemento inverso de $[\alpha]$, se definirá como $[\alpha]^{-1} = [\overline{\alpha}]$, pues gracias a la proposición 3.6, $\alpha \cdot \overline{\alpha} \sim \overline{\alpha} \cdot \alpha \sim \alpha_C$.

4. *Asociatividad.* Sean $[\alpha], [\beta], [\gamma] \in \kappa_1(\mathbb{C}, C)$. Gracias a la parte 3 de la proposición 3.6, se tiene que $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) \sim (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$, y por lo tanto $[\alpha]([\beta][\gamma]) = ([\alpha][\beta])[\gamma]$. □

Observación 3.2. Gracias a la estructura de grupo de $\kappa_1(\mathbb{C}, A)$ junto a los lemas de simplificado, de anulación y de concatenación, para un par de flechas paralelas $f, g : A \to B$, se tiene que para todo $n \in \mathbb{Z}$, $[f\overline{g}]^{-n} = [g\overline{f}]^n$. Esto se debe a que

$$[f\overline{g}]^n [g\overline{f}]^n = [f\overline{g}\cdots f\overline{g}g\overline{f}\cdots g\overline{f}] = [\alpha_A].$$

De igual manera, se tiene que $[g\overline{f}]^n [f\overline{g}]^n = [\alpha_A]$. Y por la unicidad del elemento inverso se concluye que $[f\overline{g}]^{-n} = [g\overline{f}]^n$.

Proposicion 3.8. *Para A, B objetos en la categoría* $\mathbb{C}$*, si existe un camino* β *de A a B, entonces*

$$\kappa_1(\mathbb{C}, A) \cong \kappa_1(\mathbb{C}, B).$$

Demostración. Sea $\beta\colon \Lambda \to X$ un camino de A a B, entonces la aplicación de grupos definida por:

$$\begin{array}{rccl} \tau\colon & \kappa_1(\mathbb{C},B) & \longrightarrow & \kappa_1(\mathbb{C},A) \\ & [\alpha] & \longmapsto & \left[\beta\cdot\alpha\cdot\overline{\beta}\right], \end{array}$$

es un isomorfismo de grupos puesto que: τ *está bien definida*, pues para α un lazo en A, se tiene que $\beta\cdot\alpha\cdot\overline{\beta}$ es un lazo en A, por lo tanto $\left[\beta\cdot\alpha\cdot\overline{\beta}\right]\in\kappa_1(\mathbb{C},A)$. Ahora, τ *es homomorfismo,* pues para α_1 y α_2 lazos en A se tiene

$$\tau[\alpha_1\cdot\alpha_2] = \left[\beta\cdot\alpha_1\cdot\overline{\beta}\cdot\beta\cdot\alpha_2\cdot\overline{\beta}\right] = \tau[\alpha_1]\,\tau[\alpha_2].$$

Finalmente, τ *es isomorfismo de grupos,* pues se considera la aplicación de grupos

$$\begin{array}{rccl} \sigma\colon & \kappa_1(X,x_0) & \longrightarrow & \kappa_1(X,x_1) \\ & [\alpha] & \longmapsto & \left[\overline{h}\cdot\alpha\cdot h\right], \end{array}$$

que por una razón similar que para τ está bien definida, con lo que τ es un isomorfismo con inversa σ, pues

$$\tau\circ\sigma[\alpha] = \tau\left[\overline{\beta}\cdot\alpha\cdot\beta\right] = \left[\beta\cdot\overline{\beta}\cdot\alpha\cdot\beta\cdot\overline{\beta}\right] = [\alpha],$$

para α cualquier lazo en A. Además,

$$\sigma\circ\tau[\gamma] = \sigma\left[\beta\cdot\gamma\cdot\overline{\beta}\right] = \left[\overline{\beta}\cdot\beta\cdot\gamma\cdot\overline{\beta}\cdot\beta\right] = [\gamma].$$

$\square$

La anterior proposición se generaliza en el siguiente corolario cuya demostración es evidente dada la definición de categoría conexa por caminos:

Corolario 3.1. *Sea $\mathbb{C}$ una categoría conexa por caminos, entonces $\kappa_1(\mathbb{C},A)\cong\kappa_1(\mathbb{C},B)$, para todo $A,B\in Ob(\mathbb{C})$*

En caso de tener una categoría $\mathbb{C}$ conexa por caminos el primer grupo fundamental será notado con $\kappa_1(\mathbb{C})$.

Proposicion 3.9. *Sea $\mathbb{C}$ una categoría tal que $f\overline{g}$ o $\overline{f}g$ está definido, entonces:*

1. $f\overline{g}\sim\alpha_{\mathrm{dom}(f)}$ *si y solamente si* $f\sim g$.
2. $\overline{f}g\sim\alpha_{\mathrm{cod}(f)}$ *si y solamente si* $f\sim g$.

Demostración. Solo se demostrará 1, pues 2 es similar.

Sea $A=\mathrm{dom}(f)$ y $B=\mathrm{cod}(f)$. Si $f\sim g$, se tiene que

$$f\overline{g}\sim f\overline{f}\sim\alpha_A,$$

por el lema de concatenación 3.1. Recíprocamente, si $f\overline{g}\sim\alpha_A$, entonces

$$g\sim\alpha_A\cdot g\sim f\overline{g}g\sim f\cdot\alpha_B\sim f.$$

$\square$

Teorema 3.1. *Sea $\mathbb{C}$ una categoría y sean $f,g\colon A\to B$ dos flechas paalelas en $\mathbb{C}$ tal que $f\nsim g$. Sea $n\in\mathbb{N}$, si se denota $C_n(f,g)$ como el lazo en A expresado como la cadena de n pares de la forma $f\overline{g}$, es decir,*

$$C_n(f,g) = \underbrace{f\overline{g}\cdots f\overline{g}}_{n\ pares}$$

y $S_n(f,g)$ como el lazo en B expresado como la cadena de n pares de la forma $\overline{f}g$, es decir,

$$S_n(f,g) = \underbrace{\overline{f}g\cdots\overline{f}g}_{n\ pares},$$

en este caso $C_0(f,g)=\alpha_A$ y $S_0(f,g)=\alpha_B$. Entonces para todo $m\in\mathbb{N}$, se tiene que:

1. $C_n(f,g)\nsim C_m(f,g)$ *para todo $n<m$, con $n\in\mathbb{N}$.*
2. $S_n(f,g)\nsim S_m(f,g)$ *para todo $n<m$, con $n\in\mathbb{N}$.*

Demostración. Solo se demostrará 1, pues 2 es similar.

Sea $m\in\mathbb{N}$, se tiene que $[C_m(f,g)]=[f\overline{g}]^m$ por la definición de producto de clases de equivalencia de lazos y por la estructura de grupo de $\kappa_1(\mathbb{C},A)$. Para facilidad de la notación se escribirá $[C_m]$ en vez de $[C_m(f,g)]$. Ahora, suponiendo que $f\nsim g$, se tiene: Procediendo por inducción, si $m=1$ entonces el único $n<m$ es $n=0$ y puesto que $f\nsim g$ se tiene que $f\overline{g}\nsim\alpha_A$ por la proposición 3.9 y por definición $C_0=\alpha_A$, con lo que $C_1\nsim C_0$. Suponiendo que para $m=k\in\mathbb{N}$, se tiene que $C_n\nsim C_k$ para todo $n<k$, entonces para $m=k+1$, sea $n<k+1$ se sigue que $[f\overline{g}]^{n-1}\neq[f\overline{g}]^k$, pues $n-1<k$, y ahora, puesto que

$$[C_n]=[f\overline{g}]^n=[f\overline{g}]^{n-1}[f\overline{g}],$$

entonces

$$[C_n]=[f\overline{g}]^{n-1}[f\overline{g}]\neq[f\overline{g}]^k[f\overline{g}]=[C_{k+1}],$$

por lo tanto $C_n\nsim C_{k+1}$. $\square$

Del anterior teorema se puede concluir automáticamente el siguiente corolario:

Corolario 3.2. *Sea $\mathbb{C}$ una categoría y sean $f,g\colon A\to B$ dos flechas paalelas en $\mathbb{C}$ tal que $f\nsim g$, como caminos. Entonces para todo $m\in\mathbb{N}$:*

1. $C_n(f,g)\nsim C_m(f,g)$ *para todo $n\neq m$.*
2. $S_n(f,g)\nsim S_m(f,g)$ *para todo $n\neq m$.*

Teorema 3.2. *Sea $\mathbb{C}S^1$ la categoría definida como en la proposición 2.1, es decir, la categoría:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

Entonces $\kappa_1(\mathbb{C}S^1,A)\cong\mathbb{Z}$.

Demostración. Se puede mostrar que $f \nsim g$, con lo cual, la aplicación

$$\begin{aligned} \phi\colon \mathbb{Z} &\longrightarrow \kappa_1(\mathbb{C}S^1, A) \\ n &\longmapsto \begin{cases} [C_n(f,g)] & \text{si } n \geq 0, \\ [C_{-n}(g,f)] & \text{si } n \leq 0, \end{cases} \end{aligned}$$

es un isomorfismo de grupos, pues:

1. Se demuestra primero que ϕ es un homomorfismo de grupos. Sean $n,m \in \mathbb{N}$. Si $n,m \geq 0$, entonces
$$\phi(n+m) = [C_n(f,g)]\,[C_m(f,g)] = \phi(n)\phi(m).$$
Si $n \geq 0$, $m \leq 0$ y $n+m \leq 0$ entonces, primero nótese que $\phi(n+m) = \left[C_{-(n+m)}(g,f)\right]$, por otro lado, se tiene que
$$\phi(n)\phi(m) = [g\overline{f}]^{-(m+n)} = \left[C_{-(n+m)}(g,f)\right].$$
Por tanto, $\phi(n+m) = \phi(n)\phi(m)$.
Si $n \geq 0$, $m \leq 0$ y $n+m \geq 0$, por lo cual
$$\phi(n+m) = \left[C_{(n+m)}(f,g)\right].$$
Ahora, se tiene que
$$\begin{aligned} \phi(n)\phi(m) &= [C_n(f,g)]\,[C_{-m}(g,f)], \\ &= [f\overline{g}]^{m+n}_{,} \\ &= \left[C_{(n+m)}(f,g)\right]. \end{aligned}$$
Con lo que, $\phi(n+m) = \phi(n)\phi(m)$. Finalmente, si $n,m \leq 0$, entonces $\phi(n+m) = \left[C_{-(n+m)}(g,f)\right] = \phi(n)\phi(m)$.

2. Para la inyectividad de ϕ, si $n,m \in \mathbb{N}$ son tales que $n,m \geq 0$ y $m \neq n$, entonces por el corolario 3.2 se tiene que
$$C_m(f,g) \nsim C_n(f,g),$$
con lo que $\phi(n) \neq \phi(m)$. Si $n,m \leq 0$ y $m \neq n$, por el corolario 3.2,
$$C_{-m}(g,f) \nsim C_{-n}(g,f),$$
por lo tanto $\phi(n) \neq \phi(m)$.
Finalmente, si existen $\overline{n} > 0$ y $\overline{m} < 0$ tales que $\phi(\overline{n}) = \phi(\overline{m})$, entonces $[f\overline{g}]^{\overline{n}} = [g\overline{f}]^{-\overline{m}} = [f\overline{g}]^{m}$. Así, $[f\overline{g}]^{n-m} = [\alpha_A]$, por lo tanto $C_{n-m}(f,g) \sim C_0(f,g)$, lo que es una contradicción del corolario 3.2, y por tanto para todo $n > 0$, $m < 0$ se tiene que $\phi(n) \neq \phi(m)$.

3. Para demostrar que ϕ es sobreyectiva, sea α un lazo en A entonces se puede tomar su representante minimal α_{min}, de modo que $\alpha \sim \alpha_{min}$. Como en la categoría $\mathbb{C}S^1$ solo existen las flechas f,g y las identidades correspondientes, entonces todo camino reducido es homotópico a un camino de la forma $C_{\widehat{n}}(f,g)$ o $C_{\widehat{m}}(g,f)$ para algún $\widehat{n},\widehat{m} \in \mathbb{N}$. □

Ejemplo 3.2. Sea $\mathbb{C}$ la categoría disco elemental, entonces
$$\kappa_1(\mathbb{C},A) \cong \{e\},$$
pues, cualquier lazo en A en esta categoría es homotópico al camino constante α_A. Mostrando que
$$\pi_1(|\mathscr{N}\mathbb{C}|,a) \cong \kappa_1(\mathbb{C},A).$$
Donde π_1 es el grupo fundamental topológico.

3.2 Homomorfismos funtoriales inducidos

Considérese $F\colon \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ un funtor tal que $F(C_0) = D_0$, y $F(Id_{C_0}) = Id_{D_0}$, donde C_0, D_0 son objetos base de las categorías $\mathbb{C}$ y $\mathbb{D}$, respectivamente, al igual que en los homomorfismos inducidos en Topología Algebraica, esta situación se abrevia con la notación
$$F\colon (\mathbb{C},C_0) \to (\mathbb{D},D_0).$$
Ahora, F induce un homomorfismo de grupos definido por
$$\begin{aligned} F_*\colon \kappa_1(\mathbb{C},C_0) &\longrightarrow \kappa_1(\mathbb{D},D_0) \\ [\alpha] &\longmapsto [F\circ\alpha]. \end{aligned}$$
En caso de que α sea un $mn-$lazo en C_0, se tiene que $F\circ\alpha$ es un lazo en D_0, puesto que para $i,j \leq m$ se tiene que
$$F\circ\alpha(i) = F(\alpha(i)) = F(C_0) = D_0,$$
$$F\circ\alpha(m_{ij}) = F(\alpha(m_{ij})) = F(Id_{C_0}) = Id_{D_0},$$
y de manera similar, para $i,j \geq s$. Los homomorfismos inducidos preservan homotopías, pues si G es una homotopía de lazos en C_0 entonces el funtor $H = F\circ G$ es una homotopía de lazos en D_0. De este modo, se tiene que si $\alpha \sim \beta$, donde α,β son lazos en C_0, entonces $F\circ\alpha \sim F\circ\beta$, a través de H y así $F_*[\alpha] = F_*[\beta]$.

Ahora, F_* es un homomorfismo, pues se puede probar que
$$F\circ(\alpha\cdot\beta) = (F\circ\alpha)\cdot(F\circ\beta),$$
y así,
$$F_*[\alpha\cdot\beta] = [F\circ(\alpha\cdot\beta)] = F_*[\alpha]\,F_*[\beta].$$

Teorema 3.3. *Sean $\mathbb{C},\mathbb{D}$ categorías conexas por caminos. Entonces*
$$\kappa_1(\mathbb{C}\times\mathbb{D}) \cong \kappa_1(\mathbb{C})\times\kappa_1(\mathbb{D}).$$

Demostración. Basta considerar la siguiente aplicación
$$\begin{aligned} \phi\colon \kappa_1(\mathbb{C}\times\mathbb{D}) &\longrightarrow \kappa_1(\mathbb{C})\times\kappa_1(\mathbb{D}) \\ [\alpha] &\longmapsto (p_*[\alpha], q_*[\alpha]), \end{aligned}$$
donde $C \xleftarrow{p} \mathbb{C}\times\mathbb{D} \xrightarrow{q} \mathbb{D}$ son los bifuntores proyección, es decir, $p(C,D) = C$ y $p(f,g) = f$, para todo $(C,D) \in \mathrm{Ob}_{\mathbb{C}\times\mathbb{D}}$ y para todo $(f,g) \in \mathrm{Mo}_{\mathbb{C}\times\mathbb{D}}$, y q de manera similar. Entonces ϕ es un homomorfismo, puesto que para dos lazos $\alpha,\beta\colon \Lambda \to \mathbb{C}\times\mathbb{D}$, se tiene que
$$\phi([\alpha]\,[\beta]) = (p_*[\alpha], q_*[\alpha])(p_*[\beta], q_*[\beta]) = \phi[\alpha]\,\phi[\beta].$$
Ahora, ϕ *es sobreyectiva*. Sea $([\alpha_1],[\alpha_2]) \in \kappa_1(\mathbb{C})\times\kappa_1(\mathbb{D})$, se define el funtor
$$\begin{aligned} \gamma\colon\ \Lambda &\longrightarrow \mathbb{C}\times\mathbb{D} \\ i &\longmapsto (\alpha_1(i),\alpha_2(i)), \\ m_{ij} &\longmapsto (\alpha_1(m_{ij}),\alpha_2(m_{ij})), \end{aligned}$$
con lo cual
$$\phi[\gamma] = ([p\circ\gamma],[q\circ\gamma]) = ([\alpha_1],[\alpha_2]).$$

Finalmente, ϕ *es inyectiva*. Suponiendo que $\phi[\alpha] = \phi[\beta]$, entonces

$$(p_*[\alpha], q_*[\alpha]) = (p_*[\beta], q_*[\beta]),$$

por lo tanto $[p\circ\alpha] = [p\circ\beta]$ y $[q\circ\alpha] = [q\circ\beta]$ y así, $p\circ\alpha \sim p\circ\beta$ a través de una homotopía de caminos F y $q\circ\alpha \sim q\circ\beta$ a través de G. Con lo cual se define el funtor

$$\begin{array}{rrcl} H\colon & \Lambda\times\Lambda & \longrightarrow & \mathbb{C}\times\mathbb{D} \\ & (i,j) & \longmapsto & (F(i,j), G(i,j)), \\ & (m_{ij}, m_{kl}) & \longmapsto & (F(m_{ij}, m_{kl}), G(m_{ij}, m_{kl})). \end{array}$$

Así, $\alpha\sim\beta$ por medio de H y por tanto ϕ es inyectiva. □

Así, gracias a este teorema se puede concluir de inmediato que:

Proposicion 3.10. *Sea $\mathbb{C}T^2 = \mathbb{C}S^1\times\mathbb{C}S^1$, la categoría toro. Entonces*

$$\kappa_1(\mathbb{C}T^2) = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}.$$

3.3 Grupos de homotopía de orden superior

Se pueden definir los grupos de homotopía de orden superior de una categoría finita, notados por $\kappa_n(\mathbb{C}, A)$ para algún $n\in\mathbb{N}$, en cuyo caso se llamará el *$n-$ésimo grupo de homotopía* de la categoría $\mathbb{C}$, con base en A. Solo se realizará una breve descripción de estos, como muestra del trabajo futuro que se podría realizar, es por esto que los resultados que se describan no tendrán demostración.

Definición 3.11. Sea $\mathbb{C}$ una categoría y A un objeto base cualquiera. Sea $p\in\mathbb{N}$, entonces un *lazo $p-$ dimensional* en A es un funtor $\alpha\colon \Lambda^p\to\mathbb{C}$, tal que para todo $i = 1,\cdots,p$ existen duplas de la forma $(m_i, n_i)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, de modo que $m_i\le n_i$ números pares, tal que para todo $k\in\{1,\cdots,p\}$ se tiene que: para todo $i_k, j_k\le m_k$, $\alpha(i_1,\cdots,i_p) = A$ y $\alpha(m_{i_1,j_1},\cdots,m_{i_p,j_p}) = Id_A$ y para todo $i_k, j_k\ge n_k$, $\alpha(i_1,\cdots,i_p) = A$ y $\alpha(m_{i_1,j_1},\cdots,m_{i_p,j_p}) = Id_A$. En este caso, α se dice un $(m_i,n_i)-$lazo en la dirección i.

Definición 3.12. Sea $\mathbb{C}$ una categoría, y α y β lazos $p-$dimensionales en A para algún $p\in\mathbb{N}$, entonces se dice que son *homotópicos*, notado $\alpha\sim\beta$, si existe un funtor $F\colon\Lambda^p\times\Lambda\to\mathbb{C}$, tal que: para todo $i\in\mathrm{Ob}(\Lambda)$, existen $r_i, s_i\in\mathbb{Z}$ pares con $r_i\le s_i$, tal que el funtor

$$\begin{array}{rrcl} F^i\colon & \Lambda^p & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & a & \longmapsto & F(a,i), \\ & m_{(a,b)} & \longmapsto & F(m_{(a,b)}, Id_i), \end{array}$$

verifica que para todo $i\le r_i$, $F^i = \alpha$ y para todo $i\ge s_i$, $F^i = \beta$. Y, para todo $a\in\mathrm{Ob}(\Lambda^p)$, existen $p,q\in\mathbb{Z}$ pares con $p\le q$, tal que el funtor

$$\begin{array}{rrcl} F_a\colon & \Lambda & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & i & \longmapsto & F(i,a), \\ & m_{ij} & \longmapsto & F(m_{ij}, Id_a), \end{array}$$

verifica que para todo $a\le p$, $F_a = \alpha_A$ y para todo $a\ge q$, $F_a = \alpha_A$. La relación $a\le p$, significa que, si $a = (a_1,\cdots,a_p)$, entonces

$$a_i\le p$$

para todo $i\in\{1,\cdots,p\}$. Se define $a\ge q$, de manera similar.

Definición 3.13. Sea $\mathbb{C}$ una categoría, y α y β lazos $p-$dimensionales en A para algún $p\in\mathbb{N}$, entonces la concatenación $\alpha+\beta$ es el funtor

$$\alpha+\beta(a) = \begin{cases} \alpha(a_1, a_2\cdots, a_p) & \text{si } a_1\le n_1, \\ \beta(a_1 - n_1 + p_1, a_2,\cdots, a_p) & \text{si } a_1\ge n_1, \end{cases}$$

$$\alpha+\beta(m_{(a,b)}) = \begin{cases} \alpha(m_{(a,b)}) & \text{si } a_1, b_1\le n_1, \\ \beta(m_{(a,b)-z_1}) & \text{si } a_1, b_1\ge n_1, \end{cases}$$

para todo $a,b\in\mathrm{Ob}_{\Lambda^p}$, donde α es un $(m_1,n_1)-$ lazo en A en la dirección 1, mientras que β es un $(p_1,q_1)-$ lazo en A en la dirección 1 y con operación

$$(a,b) - z_1 = ((a_1 - n_1 + p_1, a_2\cdots, a_p), (b_1 - n_1 + p_1, b_2\cdots, b_p)).$$

De manera similar que para el caso $1-$dimensional, se puede mostrar que:

Proposicion 3.11. *$\sim$ es una relación de equivalencia.*

Proposicion 3.12. *Sea $\kappa_n(\mathbb{C}, A)$ el conjunto de clases de equivalencia de lazos $n-$dimensionales dadas por $\sim$, entonces $\kappa_n(X, x_0)$ es un grupo abeliano, cuya operación de composición interna es* $[\alpha][\beta] = [\alpha+\beta]$.

Sketch de la demostración. Basta tomar el camino constante α_A, el cual está definido como

$$\begin{array}{rrcl} \alpha_A\colon & \Lambda^n & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & a & \longmapsto & A, \\ & m_{(a,b)} & \longmapsto & Id_A. \end{array}$$

Y, para un camino $n-$dimensional α, su camino inverso $-\alpha$, está definido por

$$\begin{array}{rrcl} -\alpha\colon & \Lambda^n & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & a & \longmapsto & \alpha(-a_1, a_2\cdots, a_n), \\ & m_{(a,b)} & \longmapsto & \alpha(m_{((-a_1,a_2,\cdots,a_n),(-b_1,b_2,\cdots,b_n))}), \end{array}$$

Finalmente, para demostrar que este grupo es abeliano se procederá de manera similar que en los grupos de homotopía de orden superior topológicos. □

4. RESULTADOS

4.1 Análisis de resultados

Para mostrar que se ha establecido una teoría consistente, mediante la siguiente tabla se muestra la analogía existente entre la Homotopía clásica (Hatcher, 2005, cáp. 2) y la descrita en este trabajo.

Categoría	Rea. Geométrica	G.F.T	G.F.C
$\mathbb{C}S^1$	S^1	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$
Disco elemental	D^2	$\{e\}$	$\{e\}$
$\mathbb{C}T^2$	T^2 (toro)	$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

Tabla 1. Comparación de resultados de homotopía

En la tabla 1, G.F.T se refiere al grupo fundamental *topológico* y G.F.G al *categorial*. De este modo, todos los resultados presentados coinciden con la teoría de Homotopía clásica. Quedaría por verificar si existen casos en los que no sucede esto. Este hecho indica que se está yendo por buen camino en la categorización de la homotopía, además de que se ha realizado una clasificación de las categorías, pues todos los conceptos presentados verifican ser una relación de equivalencia. Y resulta exitoso, que esta clasificación a simple vista coincida con la clasificación topológica que ofrece la teoría de Homotopía.

4.2 Conclusiones

Es posible realizar una clasificación similar a la realizada por (Larose y Tardif, 2004) y (Grigoryan et al, 2014), de las categorías. Esta clasificación además, coincide con la la realización geométrica del nervio asociado a la categoría al menos en los ejemplos tradicionales.

Se ha definido a un *camino* dentro de una categoría como un funtor que se vuelve constante a partir de ciertos puntos. Además, se ha definido *homotopía entre funtores*, lo cual permite una clasificación en categorías *homotópicamente equivalentes*. La homotopía entre funtores permite definir a la *homotopía entre caminos* y así definir el *grupo fundamental* de una categoría.

El ejemplo principal de la teoría presentada en este trabajo es el de la categoría $\mathbb{C}S^1$ cuyo grupo fundamental categorial es $\mathbb{Z}$ coincidiendo con el grupo fundamental de su realización geométrica. Para la demostración de esto se usaron técnicas algebraicas similares a las usadas en (Hatcher, 2005, cáps. 1 y 2). Se ha verificado que el grupo fundamental categorial respeta al producto de categorías. Finalmente, se definíó a los *grupos de homotopía de orden superior*, basado en lo desarrollado por (Hatcher, 2005, cáp. 4).

Existe todavía trabajo por hacer en el campo de la Teoría de Homotopía para Categorías finitas, como por ejemplo:

- Plantear condiciones para un resultado que demuestre la equivalencia o la no equivalencia de definiciones de los grupos κ_n y π_n.
- Definir categorías con realización geométrica de espacios cuyos grupo de homotopía topológicos sea conocidos, como lo son la Banda de Moebius, $S^1 \times I$, entre otros.
- Mediante un resultado análogo al teorema de Van Kampen (Hatcher, 2005, págs 40-55), para categorías finitas, calcular los grupos de homotopía de distintas categorías.

REFERENCIAS

Awodey, S. (2010). *Category theory*. Oxford University Press.

Cockett, J. R. B., y Hofstra, P. J. (2008). Introduction to turing categories. *Annals of Pure and Applied Logic*, *156*(2-3), 183–209.

Curtis, E. B. (1971). Simplicial homotopy theory. *Advances in Mathematics*, *6*(2), 107–209.

Friedman, G., y cols. (2012). Survey article: an elementary illustrated introduction to simplicial sets. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, *42*(2), 353–423.

Goerss, P. G., y Jardine, J. F. (2009). *Simplicial homotopy theory*. Springer Science & Business Media.

Grigoryan, A., Lin, Y., Muranov, Y., y Yau, S.-T. (2014). Homotopy theory for digraphs. *arXiv preprint arXiv:1407.0234*.

Hatcher, A. (2005). *Algebraic topology*. Cambridge Univ Pr.

Ivorra, C. (s.f.). *Topología algebraica: con aplicaciones a la geometría diferencial.*

Kosniowski, C. (1992). *Topología algebraica*. Editorial Reverté, S.A.

Lane, S. M. (1998). *Categories for the working mathematician*. Springer-Verlag New York Inc.

Larose, B., y Tardif, C. (2004). A discrete homotopy theory for binary reflexive structures. *Advances in Mathematics*, *189*(2), 268–300.

Lawvere, F. W., y Schanuel, S. H. (2009). *Conceptual mathematics: a first introduction to categories*. Cambridge University Press.

Munkres, J. (2000). *Topology (2nd economy edition)*. Prentice-Hall, Inc.

Riehl, E. (2008). A leisurely introduction to simplicial sets. *Available from the author's webpage at http://www. math. jhu. edu/eriehl/ssets. pdf*.

Vilches, M. A. (s.f.). Topologia geral. *Departamento de Análise-IME-UERJ*.

Wickless, W. J. (2004). *A first graduate course in abstract algebra*. CRC Press.