

## PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

Proyecto Interno  Proyecto Semilla  Proyecto Junior  Proyecto Multi e Inter Disciplinario

Investigación Básica

Investigación Aplicada

**DEPARTAMENTO(S) Y/O INSTITUTOS:**

1. Departamento de Matemática

**LÍNEA DE INVESTIGACIÓN:**

1. Optimización sobre grafos y estructuras discretas.

**DISCIPLINA CIENTÍFICA (Marque X, solamente una opción)**

Ciencias Naturales y Exactas	<input checked="" type="checkbox"/>
Ingeniería y Tecnologías	<input type="checkbox"/>
Ciencias Médicas	<input type="checkbox"/>
Ciencias Agrícolas	<input type="checkbox"/>
Ciencias Sociales	<input type="checkbox"/>
Humanidades	<input type="checkbox"/>

**OBJETIVO SOCIOECONÓMICO (Marque X, solamente una opción)**

Exploración y explotación del medio terrestre	<input type="checkbox"/>
Ambiente	<input type="checkbox"/>
Exploración y explotación del espacio	<input type="checkbox"/>
Transporte, telecomunicaciones y otras infraestructuras	<input type="checkbox"/>
Energía	<input type="checkbox"/>
Producción y tecnología industrial	<input type="checkbox"/>
Salud	<input type="checkbox"/>
Agricultura	<input type="checkbox"/>
Educación	<input type="checkbox"/>
Cultura, ocio, religión y medios de comunicación	<input type="checkbox"/>
Sistemas políticos y sociales, estructuras y procesos	<input type="checkbox"/>
Defensa	<input type="checkbox"/>
Avance general del conocimiento: I+D financiada con los Fondos Generales de Universidades (FGU)	<input checked="" type="checkbox"/>
Avance general del conocimiento: I+D financiados con otras fuentes	<input type="checkbox"/>



<b>1</b>	<b>Proyecto de Investigación</b>
	<b>Título:</b> Métodos exactos para un problema de particionamiento general de grafos.
	<b>Resumen del proyecto (máximo 200 palabras)</b> <p>El presente proyecto se enfoca en el problema de particionamiento general de grafos (PGG): sea <math>G=(V,E)</math> un grafo no dirigido con <math>V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}</math> el conjunto de nodos, <math>E = \{\{v_i, v_j\}: v_i, v_j \in V, v_i \neq v_j\}</math> el conjunto de aristas, <math>c: E \rightarrow R^+</math> una función de costo sobre las aristas, <math>k</math> un número entero mayor igual a dos, y <math>n_1, n_2, \dots, n_k</math> números enteros positivos tal que <math>\sum_{i=1}^k n_i = n</math>. El problema de particionamiento general de grafos consiste en dividir el conjunto <math>V</math> en una colección de <math>k</math> subconjuntos disjuntos <math>V_1, \dots, V_k</math>, donde <math> V_i  = n_i</math> para todo <math>i = 1, 2, \dots, k</math>, <math>V_i \cap V_j = \emptyset</math> para todo <math>i \neq j</math>, <math>\cup_{c=1}^k V_c = V</math>, tal que el costo total de las aristas en los subgrafos inducidos por cada subconjunto <math>V_i</math> sea minimizado.</p> <p>El objetivo principal de este proyecto es aportar con nuevas formulaciones para el problema de particionamiento general de grafos usando programación lineal entera, analizar la estructura de los politopos asociados a dichas formulaciones y tratar de encontrar familias de desigualdades válidas o probar algunos resultados relacionados a facetas del politopo. Con dichos resultados se pretende construir un algoritmo branch&amp;bound combinados con los resultados obtenidos en el estudio poliedral, es decir, proponer un algoritmo exacto tipo branch&amp;cut.</p>
	<b>Palabras clave (4-6):</b> Particionamiento de grafos, programación lineal entera, algoritmos exactos, análisis poliedral.

<b>2</b>	<b>Objetivos, limitaciones, hipótesis y resultados esperados de esta propuesta de investigación</b>
----------	---

### 2.1 Objetivos

#### 2.1.1 Objetivo General

- Formular el problema de particionamiento general de grafos usando programación lineal entera y diseñar algoritmos exactos de solución.

#### 2.1.2 Objetivos Específicos

- a. Escribir varias formulaciones del problema de particionamiento general de grafos.
- b. Realizar un estudio poliedral de las formulaciones.
- c. Identificar una "buena formulación" del problema.
- d. Diseñar algoritmos de solución con base en el análisis poliedral de las formulaciones enteras.
- e. Ejecutar pruebas computacionales para medir la eficiencia de los algoritmos diseñados.

#### 2.2 Limitaciones (Aspectos que quedan fuera del alcance del Proyecto de Investigación)



- a. Descripción completa del polítopo asociado a la formulación escogida.
- b. Encontrar algoritmos que resuelvan el problema en un tiempo polinomial en el tamaño de la entrada.

**2.3 Hipótesis (Responden al problema de investigación)**

- a. El problema de particionamiento general de grafos admite una formulación lineal entera.
- b. El tiempo de solución del problema mediante un algoritmo de tipo Branch & Bound puede ser mejorado, incluyendo desigualdades válidas y cortes que reduzcan el espacio de soluciones que se buscan.

**2.3 Detalle de los resultados esperados (con relación a los objetivos)**

- a. Una buena formulación del problema de particionamiento general de grafos.
- b. Desigualdades válidas y facetas del poliedro asociado a la formulación escogida.
- c. Un algoritmo de solución eficiente del problema.
- d. Aportar a la literatura de problemas de Optimización en Grafos.
- e. Fortalecer la línea de investigación "Optimización sobre grafos y estructuras discretas" del Departamento de Matemática.

<b>3</b>	<b>Relevancia de la propuesta de investigación y su relación con la(s) líneas de investigación</b>
----------	--

En el año 2015, se abrió una nueva rama de investigación relacionada a la línea de investigación "Optimización sobre grafos y estructuras discretas" en el Departamento de Matemática de la Escuela Politécnica Nacional: los problemas de particionamiento de grafos. Esta rama de investigación fue parte del programa tripartito de investigación MathAmSud, en colaboración con investigadores Franceses, Argentinos y Ecuatorianos que laboran en el área de Matemática Discreta.

El capítulo de particionamiento de grafos del programa produjo, en dos años, dos reportes técnicos (ver [http://www.modemat.epn.edu.ec/#/reportes\\_tecnicos](http://www.modemat.epn.edu.ec/#/reportes_tecnicos)) y dos artículos científicos; de estos últimos, uno fue publicado en la revista Combinatorial Optimization de la serie Lecture Notes in Computer Sciences [8], y el otro se encuentra aceptado para su publicación en el Journal of Combinatorial Optimization. En este contexto, quienes suscribimos esta propuesta, consideramos pertinente y relevante que se continúe proponiendo proyectos de investigación en esta rama de investigación que ha sido abordada con éxito en los últimos años.

<b>4</b>	<b>Productos esperados</b>
----------	----------------------------

Tipo de Producto:	Marcar con una "X"
a. Publicaciones científicas (obligatorio);	x
b. Disertación a la comunidad politécnica;	x
c. Trabajo de titulación de acuerdo a lo que establece el Reglamento de Régimen Académico y la Normativa Interna de la EPN;	
d. Aplicación tecnológica construida o implementada;	
e. Patente presentada;	
f. Perfil de proyecto de mayor impacto científico, técnico, pedagógico o de innovación.	

<b>5</b>	<b>Descripción, metodología y diseño del proyecto</b>
----------	---

**5.1 Descripción, metodología y diseño del proyecto (Máximo dos carillas)**



El problema de particionamiento de grafos es un importante campo de investigación de la optimización combinatoria durante los últimos años, donde muchas variaciones y una amplia gama de aplicaciones han sido reportadas. Así, Grötschel y Wakabayashi [1] formularon un modelo de programación lineal entera para resolver un problema de clasificación de objetos basados en sus características cualitativas y cuantitativas. Los autores estudiaron el problema desde el punto de vista poliedral y los resultados fueron incluidos en un algoritmo branch&cut. Jaehn y Pesch [2] reportaron un algoritmo branch&bound para resolver el problema de particionamiento presentado en [1], donde cotas ajustadas sobre cada nodo del árbol de búsqueda son presentadas. El problema anterior es extendido por Labbé y Özsoyol incluir restricciones sobre el tamaño de los grupos [3]. Por otro lado, el problema de particionamiento de grafos satisfaciendo restricciones de capacidad sobre la suma de los pesos de los nodos en cada subconjunto de la partición es analizado en [4]. Ji y Mitchell [5] plantean resolver el problema de particionar un grafo en cliques derivado de una aplicación deportiva con un método branch-and-price.

En el presente proyecto nos enfocamos en el problema que generaliza la mayoría de los problemas de particionamiento, el llamado problema de particionamiento general de grafos (PGG). Sea  $G=(V,E)$  un grafo no dirigido con  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  el conjunto de nodos,  $E = \{\{v_i, v_j\}: v_i, v_j \in V, v_i \neq v_j\}$  el conjunto de aristas,  $c: E \rightarrow R^+$  costos sobre las aristas,  $k$  un número entero mayor igual a dos y  $n_1, n_2, \dots, n_k$  números enteros positivos tal que  $\sum_{i=1}^k n_i = n$ . El problema de particionamiento general de grafos (PGG) puede ser descrito como la fragmentación del conjunto  $V$  en una colección de  $k$  subconjuntos disjuntos  $V_1, \dots, V_k$ , donde  $|V_i| = n_i$  para todo  $i = 1, 2, \dots, k$ ,  $V_i \cap V_j = \emptyset$  para todo  $i \neq j$ ,  $\cup_{c=1}^k V_c = V$ , y el costo total sobre los subgrafos  $(V_i, E(V_i))$  es minimizado. El conjunto  $E(V_i)$  contiene las aristas con nodos finales en  $V_i$  y el costo total del subgrafo  $(V_i, E(V_i))$  se define como la suma de los costos de las aristas que pertenecen a  $E(V_i)$ . Se puede suponer que el grafo  $G$  es completo, definiendo  $c_{ij} = 0$  si la arista que une el vértice  $v_i$  con el vértice  $v_j$  no existe. Notar además que si  $G$  es un grafo completo, entonces cada subgrafo  $(V_i, E(V_i))$  es una clique.

El problema PGG pertenece a la clase NP-completo [6] y fijando algunos parámetros adecuadamente otros problemas pueden ser obtenidos. Si los tamaños de los subconjuntos son iguales ( $n_1 = n_2 = \dots = n_k$ ), entonces el problema se conoce como problema de equiparticionamiento de grafos (k-wayproblem) [7]. Cuando se tiene que  $|n_i - n_j| \leq 1$  para todo  $i \neq j$ , se revela el problema de particionamiento balanceado [8]. Para el caso en el que  $k = 2$ , se define el problema conocido como problema de bisección de grafos [9], y si  $n_1 = n_2$  obtenemos el problema de equicorte (equicut problem) [10]. Específicamente, el problema PGG ha sido estudiado ampliamente en la literatura, donde se reportan métodos de solución exactos basados en modelos de programación lineal [11], métodos heurísticos de solución [12], o usando programación semidiferenciada [13]. Además, muchas aplicaciones en distintos campos han sido reportadas, tanto en el diseño de circuitos integrados (VLSI), computación con matrices dispersas, programación en paralelo, segmentación de imágenes, control de tráfico aéreo, etc. [14].

En el presente proyecto se pretende aportar con nuevas formulaciones para el problema de particionamiento general de grafos usando programación lineal entera, analizar la estructura de los politopos asociados a dichas formulaciones y tratar de encontrar familias de desigualdades validas o probar algunos resultados relacionados a facetas del politopo. Con dichos resultados se pretende construir un algoritmo branch&bound combinados con los resultados obtenidos en el estudio poliedral, es decir, proponer un algoritmo exacto tipo branch&cut.

Para lograr los objetivos planteados, se usará la metodología usualmente aplicada en los proyectos de investigación en el campo de la optimización combinatoria. Así, nosotros seguiremos los siguientes pasos:

- Se formulará varios modelos de programación lineal y entera para el problema PGG
- Se implementará el mejor modelo propuesto en un solver de programación lineal y entera de código abierto (SCIP) o un solver comercial (GUROBI). Esta tarea es realizada para verificar la validez de la formulación.
- Se realizará el estudio poliedral de los modelos diseñados con el fin de identificar propiedades y estructuras especiales de la formulación, lo que podría ayudar en el diseño de algoritmos de solución.
- Se implementará computacionalmente los algoritmos generados en el lenguaje de programación C++



- Se ejecutará experimentos computacionales basados en instancias simuladas y así obtener conclusiones sobre su desempeño.
- Los resultados serán reportados en un artículo técnico que será enviada a una revista indexada para su posible publicación.

**BIBLIOGRAFIA.**

[1]. M. Grötschel, Y. Wakabayashi, A cutting plane algorithm for a clustering problem, *Mathematical Programming* 45 (1-3) (1989) 59–96.

[2]. F. Jaehn, E. Pesch, New bounds and constraint propagation techniques for the clique partitioning problem, *Discrete Applied Mathematics* 161 (13- 14) (2013) 2025 – 2037.

[3]. M. Labbé, F. A. Özsoy, Size-constrained graph partitioning polytopes, *Discrete Mathematics* 310 (24) (2010) 3473 – 3493.

[4]. C. Ferreira, A. Martin, C. de Souza, R. Weismantel, L. Wolsey, The node capacitated graph partitioning problem: A computational study, *Mathematical Programming* 81 (2) (1998) 229–256.

[5]. X. Ji, J. E. Mitchell, Branch-and-price-and-cut on the clique partitioning problem with minimum clique size requirement, *Discrete Optimization* 4 (1) (2007) 87 – 102, mixed Integer Programming Special Workshop on Mixed-Integer Programming.

[6]. Garey, M.R., Johnson, D.S., Stockmeyer, L.: Some simplified NP-complete graph problems. *Theor. Comput. Sci.* 1, 237–267 (1976).

[7]. Anjos, M.F., Ghaddar, B., Hupp, L., Liers, F., Wiegele, A.: Solving k-Way Graph Partitioning Problems to Optimality: The Impact of Semidefinite Relaxations and the Bundle Method. In Jünger, M., Reinelt, G. (eds) *Facets of Combinatorial Optimization: Festschrift for Martin Grötschel*. pp. 355–386. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg (2013).

[8]. Recalde D, Severin D, Torres R, Vaca P (2016) Balanced partition of a graph for football team realignment in ecuador. *Lect Notes Comput Sc* 9849:357–368.

[9]. Karish S., Rendl F. (2000), *Solving Graph Bisection Problems with Semidefinite Programming*, *INFORMS Journal of Computing*, 12, pp. 177-191.

[10]. Lorenzo Brunetta, Michele Conforti, Giovanni Rinaldi. A branch-and-cut algorithm for the equicut problem. *Mathematical Programming* 78 (1997) 243-263.

[11]. Fan N., Pardalos P. (2010), *Linear and quadratic programming approaches for the general graph partition problem*, *Journal of Global Optimization*, 48, pp. 57-71.

[12]. Lodi, A., Allemand, K., Liebling, T.M.: An evolutionary heuristic for quadratic 0–1 programming. *Eur. J. Oper. Res.* 119(3), 662–670 (1999).

[13]. Lissner, A., Rendl, F.: Graph partitioning using linear and semidefinite programming. *Math. Program. Ser. B* 95, 91–101 (2003).

[14]. Bichot C., Siaty P. (2011), *Graph Partitioning*, John Wiley & Sons, Inc.

**6 Infraestructura, equipos y fondos adicionales.**

**6.1 Infraestructura y equipos**

- Indicar la infraestructura y equipos **disponibles** para la ejecución del proyecto, con la ubicación actual de los mismos

Infraestructura			Equipos	
Laboratorio ZZ			Nombre del Equipo	Ubicación del Equipo
Laboratorio	de	Cálculo Científico	HP C70000	Escuela Politécnica Nacional, Edificio EARME.

**6.2 Breve justificación del equipo requerido**

- No se necesita equipo adicional..

**6.3 Fondos Adicionales**



- *Proyecto con presupuesto cero.*





# VICERRECTORADO DE INVESTIGACIÓN Y PROYECCIÓN SOCIAL

UNIDAD DE INVESTIGACIÓN

PRESUPUESTO PROYECTOS DE INVESTIGACIÓN



**AÑO 1**

<b>Director del proyecto</b>	<b>Título del proyecto</b>
Dr. Ramiro Torres	Métodos exactos para un problema de particionamiento general de grafos.

Lista de Items	Cantidad	Unidad	Precio Unitario Referencial	Precio Total Referencial	Precio Unitario Referencial +Aporte IESS	Precio Total Referencial con IVA + Aporte del IESS
<b>1 Contratación de servicios personales por contrato</b>						
1.1 Ayudantes de investigación		mes	\$ -	\$ -	\$ -	\$ -
1.2 Prestación de servicios profesionales (Homologado Escala de remuneración de servidores publicos)		mes	\$ -	\$ -	\$ -	\$ -
<b>Subtotal 1</b>			\$ -	\$ -	\$ -	\$ -
Lista de Items	Cantidad	Unidad	Precio Unitario Referencial sin IVA	Precio Total Referencial sin IVA	Precio Unitario Referencial con IVA	Precio Total Referencial con IVA
<b>2 Maquinaria equipos</b>						
2.1 Item 1 (Detallar nombre de la maquinaria y equipos solicitado)			\$ -	\$ -	\$ -	\$ -
2.2 Item 2 (Detallar nombre de la maquinaria y equipos solicitado)			\$ -	\$ -	\$ -	\$ -
2.3 Item 3 (Detallar nombre de la maquinaria y equipos solicitado)			\$ -	\$ -	\$ -	\$ -
2.4 Item 4 (Detallar nombre de la maquinaria y equipos solicitado)			\$ -	\$ -	\$ -	\$ -
2.5 Item 5 (Detallar nombre de la maquinaria y equipos solicitado)			\$ -	\$ -	\$ -	\$ -
<b>Subtotal 2</b>			\$ -	\$ -	\$ -	\$ -
<b>3 Reactivos y materiales de laboratorio</b>						
3.1 Item 1 (Detallar nombre de los insumos y reactivos)			\$ -	\$ -	\$ -	\$ -
3.2 Item 2 (Detallar nombre de los insumos y reactivos)			\$ -	\$ -	\$ -	\$ -
3.3 Item 3 (Detallar nombre de los insumos y reactivos)			\$ -	\$ -	\$ -	\$ -
3.4 Item 4 (Detallar nombre de los insumos y reactivos)			\$ -	\$ -	\$ -	\$ -
3.5 Item 5 (Detallar nombre de los insumos y reactivos)			\$ -	\$ -	\$ -	\$ -
<b>Subtotal 3</b>			\$ -	\$ -	\$ -	\$ -
<b>4 Literatura especializada</b>						
4.1 Item 1 ( Detallar nombre del libro)			\$ -	\$ -	\$ -	\$ -
4.2 Item 2 ( Detallar nombre del libro)			\$ -	\$ -	\$ -	\$ -
4.3 Item 3 ( Detallar nombre del libro)			\$ -	\$ -	\$ -	\$ -
4.4 Item 4 ( Detallar nombre del libro)			\$ -	\$ -	\$ -	\$ -
4.5 Item 5 ( Detallar nombre del libro)			\$ -	\$ -	\$ -	\$ -
<b>Subtotal 4</b>			\$ -	\$ -	\$ -	\$ -
<b>5 Viajes técnicos y de muestreo</b>						
5.1 Pasajes al interior			\$ -	\$ -	\$ -	\$ -
5.2 Viaticos al interior			\$ -	\$ -	\$ -	\$ -
<b>Subtotal 5</b>			\$ -	\$ -	\$ -	\$ -
<b>6 Presentación de ponencias en congresos Internacionales y publicaciones</b>						
6.1 Pasajes al exterior				\$ -	\$ -	\$ -
6.2 Viaticos al exterior				\$ -	\$ -	\$ -
6.3 Pago de inscripción y publicaciones				\$ -	\$ -	\$ -
<b>Subtotal 6</b>			\$ -	\$ -	\$ -	\$ -
<b>TOTAL</b>			<b>0.0</b>	<b>\$ -</b>	<b>0.0</b>	<b>\$ -</b>

## DECLARACIÓN FINAL

### TIPO DE PROYECTO

Proyecto Interno  Proyecto Semilla  Proyecto Junior  Proyecto Multi e Interdisciplinario

### TIPO DE INVESTIGACIÓN

Investigación básica  Investigación aplicada

### TÍTULO DEL PROYECTO

Métodos exactos para un problema de particionamiento general de grafos.

### DECLARACIÓN DEL DIRECTOR DEL PROYECTO

El equipo de investigadores, representado por el Director del Proyecto declara lo siguiente:

- Que el presente proyecto es una obra original de este equipo de investigadores y por tanto, asumimos la completa responsabilidad legal en caso de que un tercero alegue la titularidad de los derechos intelectuales del proyecto, exonerando a la EPN de cualquier acción legal que se derive por esta causa.
- Que el presente proyecto no ha sido presentado en ninguna convocatoria de otra institución pública o privada solicitando el financiamiento total del presupuesto. El incumplimiento será causal para que el proyecto no sea tomado en consideración.
- Que, todos los bienes adquiridos en el proyecto permanecerán bajo la custodia y responsabilidad del director de proyecto.
- Que, aceptamos que si el proyecto genera algún producto o procedimiento susceptible de obtener de derechos de propiedad intelectual, de los cuales se deriven beneficios, estos serán compartidos entre los investigadores y las instituciones participantes en el proyecto.



-----  
Firma del Director del Proyecto  
Nombre: Ramiro Daniel Torres Gordillo  
C.I.: 1002563524

### DECLARACIÓN DEL JEFE DE DEPARTAMENTO

Esta propuesta ha sido aprobada y avalada por el Consejo del Departamento de .....<sup>M</sup>....., en sesión del día 4/01/2019 mediante resolución No. 024.

Las instalaciones, incluyendo personal, edificios, equipo y recursos financieros están a disposición del proponente y sus colaboradores de acuerdo con las especificaciones que se encuentran en esta propuesta.

-----  
Firma del Jefe del Departamento  
Nombre:  
C.I.: