



ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL
VICERECTORADO DE
INVESTIGACIÓN Y PROYECCIÓN SOCIAL



PIS-14-01

PROYECTOS DE INVESTIGACIÓN (Internos, Semilla, Inter y Multidisciplinarios, Externos):

Área del proyecto: Ciencias Básicas Ciencias Aplicadas

Reformulados

FACULTAD: Facultad de Ciencias

DEPARTAMENTO: Departamento de Matemática

LÍNEA DE INVESTIGACIÓN: Matemática Teórica, Análisis y Análisis Funcional (Ecuaciones Diferenciales). Geometría.
(verificable en el SAEW)

1 Proyecto de Investigación

Título: Sistemas Hamiltonianos no locales.

Resumen del proyecto (máximo 200 palabras)

El problema de la no equivalencia entre el conjunto de puntos de equilibrio y los elementos Casimir, ocurre cuando la formulación Hamiltoniana no canónica que describe la dinámica de fluidos y plasma ideales, es reformulada en términos de la ecuación de Euler para un fluido no viscoso incompresible. El problema se remonta a un déficit de Casimir, donde elementos de Casimir constituyen el centro del álgebra de Poisson bajo una formulación Hamiltoniana, y esto conduce a un estudio de las singularidades del operador de Poisson, definiendo de esta manera un corchete de Poisson. El objetivo de este proyecto es analizar el problema antes mencionado en un sistema Hamiltoniano no canónico, considerando en este caso diferentes tipos de corchetes de Poisson, los cuales por el hecho de que el sistema es no canónico van a ser considerados como funciones matriciales y ya no como matrices constantes, así obtendríamos una generalización de la teoría de las ecuaciones diferenciales singulares.



4	<p>Objetivos, hipótesis y resultados esperados de esta propuesta de investigación</p> <p>- Objetivos</p> <p>El objetivo principal de este trabajo de investigación es encontrar resultados que nos permitan probar la existencia, unicidad o multiplicidad de soluciones para los sistemas Hamiltonianos no canónicos cuando se trabaja con diferentes tipos de Corchetes de Poisson, además se estudiará los elementos Casimir asociados a este problema y finalmente la regularidad de las soluciones. También se considera como un objetivo del proyecto el tratar de desarrollar nueva teoría que nos permita resolver los sistemas antes mencionados.</p> <p>- Hipótesis</p> <p>En la actualidad existen algunos resultados relacionados con sistemas Hamiltonianos no canónicos, como los sistemas estudiados por F. Dobarro en los que relacionan los elementos Casimir de una ecuación de Euler con las soluciones del sistema Hamiltoniano no canónico asociado para un caso particular de corchetes de Poisson. Además se tiene el trabajo de J. Morrison en el cual, se hacen una descripción Hamiltoniana de fluidos ideales, lo que nos da una pauta de los métodos que son usados para abordar este tipo de problemas, además nos da una visión más clara de los posibles resultados que podemos obtener cuando se trabaja con sistemas Hamiltonianos no canónicos.</p> <p>- Resultados esperados</p> <p>Lo que primeramente se espera conocer es el comportamiento que tienen los sistemas Hamiltonianos no canónicos cuando se trabaja con diferentes corchetes de Poisson, es decir lo que trataremos de encontrar son condiciones que nos permitan obtener resultados de existencia de soluciones para dichos sistemas, además se abordará el tema de regularidad en el cual analizaremos bajo qué condiciones se puede obtener soluciones con una mejor regularidad.</p> <p>- Potenciales Usuarios</p> <p>Los usuarios que principalmente se beneficiarán de los resultados aquí encontrados, serán todos aquellos que realicen investigación en el área de las ecuaciones diferenciales parciales, particularmente en lo concerniente a sistemas Hamiltonianos o que estén relacionados con las áreas de la mecánica matemática, dinámicas de plasma, mecánica celeste, etc. Otros potenciales usuarios serán físicos, astrofísicos, geómetras y posiblemente ingenieros mecánicos, civiles y todos aquellos que usen fluidos pues estamos mirando formulaciones diversas para los fluidos ideales.</p>
5	<p>Relevancia de esta propuesta de investigación con los objetivos científicos del departamento y su Línea de Investigación</p>



El proyecto que se desarrollará será una gran contribución al desarrollo científico de la universidad, ya que uno de los puntos que se estarían fortaleciendo sería la investigación en ciencias básicas, en particular en temas relacionados con el análisis y las ecuaciones diferenciales, áreas en las cuales está basado este proyecto. En este ámbito, la propuesta de investigación aquí presentada entraría en la línea de investigación general denominada Análisis y Análisis Funcional. Los resultados que se obtendrán aunque aparentemente muy teóricos son de aplicación directa a la mecánica de fluidos y la física del plasma y en consecuencia a la astrofísica en el estudio de la dinámica de los plasmas. Debe tomarse en cuenta que estaremos incursionando también en la confluencia de algunas ramas de la matemática y la física y en este contexto tendremos también la colaboración del Prof. Prometeo Fernando Dobarro especialista en el campo de visita en la EPN desde septiembre 2014.

6 Descripción del proyecto, metodología, cronograma de trabajo y justificación del equipo requerido

- Descripción del proyecto (Máximo una carilla)

Empezamos revisando mecánica Hamiltoniana de sistemas canónicos de dimensión finita, con el fin de formular nuestro problema. Estos sistemas dinámicos tienen la forma:

$$\partial_t z = J \partial_z H(z) \tag{1}$$

donde $z = (z^1, \dots, z^m)$ denota en conjunto coordenado de fases, H es la función Hamiltoniana con ∂_z su gradiente y J una matriz $m \times m$ que se denominará corchete de Poisson. Para el caso de un sistema Hamiltoniano canónico de dimensión $m = 2n$, la matriz J tiene la forma

$$H = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ -I_n & 0_n \end{pmatrix}$$

En nuestro caso, en el que consideremos sistemas Hamiltonianos no canónicos se permitirá que J dependa de z , es decir $J(z)$ es una función matricial. Del sistema canónico (1), se desprende que si $\partial_t z = 0$, es decir z es un punto de equilibrio, entonces $\partial_z H(z) = 0$. Sin embargo, en el caso no canónico estos no pueden ser los únicos puntos de equilibrio de un determinado sistema Hamiltoniano, así la degeneración da lugar a los elementos de Casimir $C(z)$ que son soluciones de $H(z)$, no triviales (no constantes) de la ecuación diferencial

$$J(z) \partial_z C(z) = 0$$

El objetivo de nuestro trabajo es considerar diferentes matrices J y así estudiar la existencia de soluciones además de su regularidad. Nótese que las funciones J hacen que los sistemas sean infinitos, son verdaderos funcionales de la forma hamiltoniana y en consecuencia se debe generalizar de alguna manera las teorías conocida y por tanto para los investigadores ecuatorianos una verdadera investigación semilla.



ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL
VICERECTORADO DE
INVESTIGACIÓN Y PROYECCIÓN SOCIAL



- Metodología y diseño de la investigación (Máximo una carilla)

El trabajo de investigación que se propone está basado en el estudio de la formulación hamiltoniana de los fluidos ideales y en consecuencia debemos estudiar los sistemas Hamiltonianos, ecuación de Euler u otras ecuaciones de los fluidos y la teoría de Casimir; en este contexto se deberá realizar un profundo estudio de los artículos [4], [9], [15], [16], [17], los cuales nos servirán de base y orientación para la investigación que proponemos. Nótese que el artículo de Yoshida y otros [17] nos localiza en una de las teorías de más reciente actualidad y esto es la conjunción del análisis, la geometría y la física; todas ellas con el propósito de entender de mejor manera los fluidos y la física del plasma.

Por el carácter hamiltoniano parece ser que técnicas variacionales podrán ser utilizadas y así una vez, estudiada la teoría básica que puede ser usada para enfrentar el problema, se tratará de aplicar estos conocimientos para probar existencia y analizar la regularidad de las soluciones.

Bibliografía

1. Ambrosetti, A., Malchiodi, A.: Nonlinear analysis and semilinear elliptic problems. Cambridge studies in advanced mathematics, vol. 104. Cambridge University Press, Cambridge (2007).
2. Arnold, V.I.: On an a priori estimate in the theory of hydrodynamic stability. Am. Math. Soc. Transl. **19**, 267–269 (1969).
3. Arnold, V.I.: Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits. Ann. Inst. Fourier. (Grenoble) **16**, 319–361 (1966).
4. Arnold, V.I.: The Hamiltonian nature of the Euler equation in the dynamics of a rigid body and of an ideal fluid. Usp. Mat. Nauk. **24**(3), 225–226 (1969).
5. Brézis, H.: Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espace de Hilbert. North-Holland, Amsterdam (1973).
6. Brézis, H.: Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations. Springer, New York (2011)
7. Caffarelli, L., Cabré, X.: Fully nonlinear elliptic equations, vol. 43. AMS Colloquium Publications, Providence (1995).
8. Caffarelli, L., Salazar, J.: Solutions of fully nonlinear elliptic equations with patches of zero gradient: existence, regularity and convexity of level curves. Trans. AMS. **354**, 3095–3115 (2002).
9. Khesin, B., Wendt, R.: The geometry of infinite-dimensional groups. Springer, New York (2009).
10. Morrison, P.J., Greene, J.M.: Noncanonical Hamiltonian density formulation of hydrodynamics and ideal magnetohydrodynamics. Phys. Rev. Lett. **45**, 790–794 (1980).
11. Morrison, P.J.: The Maxwell–Vlasov equations as a continuous Hamiltonian system. Phys. Lett. A. **80**, 383–386 (1980).
12. Morrison, P.J.: Hamiltonian field description of two-dimensional vortex fluids an guiding center plasmas, Princeton University Plasma Physics Laboratory Report, PPPL-1783 (1981). Available as American Institute of Physics Document No. PAPS-PFBPE-04-771-24. doi:10.2172/6351319
13. Morrison, P.J.: AIP Conf. Proc. **88**, 13 (1982). doi:10.1063/1.33633
14. Morrison, P.J., Pfirsch, D.: Free-energy expressions for Vlasov equilibria. Phys. Rev. A. **40**, 3898–3910 (1989)
15. Morrison, P.J.: Hamiltonian description of the ideal fluid. Rev. Mod. Phys. **70**, 467–521 (1998).
16. Morrison, P.J.: Hamiltonian fluid mechanics. In: Encyclopedia of Mathematical Physics, vol. 2, p. 593. Elsevier, Amsterdam (2006).
17. Yoshida, Z., Morrison, P. and Dobarro F., Singular Casimir Elements of the Euler Equation and Equilibrium Points, J. Math. Fluid Mech. **16** (2014), 41–57



ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

VICERECTORADO DE INVESTIGACIÓN Y PROYECCIÓN SOCIAL



Se recomienda que el proyecto, su metodología y diseño de la investigación, este sustentada en referencias bibliográficas actualizadas y que en el cronograma de ejecución del proyecto se considere el tiempo que toma la adquisición de equipos, reactivos y materiales de laboratorio.

Cronograma de trabajo anual:

Año 1

Actividad	MESES					
	1-2	3-4	5-6	7-8	9-10	11-12
Recopilación de la información						
Estudio de la teoría						
Realización de la investigación						
Realización del documento escrito						
Correcciones						
Presentación final						

- Justificación del equipo requerido

El equipo requerido para este proyecto son únicamente las oficinas de los docentes, un computador portátil y dispositivos de almacenamiento, además del material bibliográfico necesario para realizar la investigación.

7 Fecha de inicio

1 de septiembre de 2014

8 Tiempo dedicación docentes, infraestructura, equipamientos y fondos adicionales.

- Tiempos de dedicación semestral del Director de proyecto, de los docentes participantes y otros colaboradores. (Máximo 200 horas por semestre para el Director y 100 horas por semestre para los docentes colaboradores)

El tiempo que dedicarán al proyecto los investigadores serán:

El director de proyecto: 200 horas por semestre.
El docente Colaborador: 100 horas por semestre.

- Infraestructura y equipos disponibles para la ejecución del proyecto

La infraestructura únicamente estará compuesta por las oficinas de los docentes, además se necesitará comprar una computadora portátil, además de dispositivos de almacenamiento.



**ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL
VICERECTORADO DE
INVESTIGACIÓN Y PROYECCIÓN SOCIAL**



9	Presupuesto estimado para la ejecución del presente proyecto	
	Se recomienda que los costos de los equipos, reactivos y materiales de laboratorio, <u>estén sustentados con proformas actuales:</u>	
	<u>Año 1</u>	
	Lista de ítems (por favor especifique)	Cantidad solicitada (US \$)
	1. Contratación de pasantes	
	Subtotal	US \$ 2500
	2. Equipos	
	Subtotal	US \$ 1000
	3. Reactivos y materiales de laboratorio	
	Subtotal	US \$ 0
	4. Literatura especializada	
	Subtotal	US \$ 3500
	5. Viajes técnicos y de muestreo	
	Subtotal	US \$ 0
	6. Presentación de ponencias en congresos internacionales	
Subtotal	US \$ 3000	
TOTAL AÑO 1 (Proyectos Semilla hasta US\$ 10.000,00 más IVA) (Proyectos Inter y Multidisciplinarios US\$ 40.000,00 más IVA)	US \$ 10000	
TOTAL	US \$ 10000	
10		
Nombre: Marco Vinicio Calahorrano Recalde CC: 1706263231		
DECLARACION DEL JEFE DE DEPARTAMENTO		
Esta propuesta ha sido aprobada por el Consejo del Departamento, en Sesión del..... mediante Resolución No. y las instalaciones, incluyendo personal, edificios, equipo y recursos financieros están a disposición del aplicante de acuerdo con las especificaciones que se encuentran en esta aplicación.		
_____ JEFE DEL DEPARTAMENTO Nombre: Dr. Luis Horna CC:		_____ Quito, 20 de mayo de 2014