ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS

MATEMÁTICAS PARA EL CURSO DE NIVELACIÓN - EPN

GEOMETRÍA: CONCEPTOS PRIMITIVOS Y AXIOMAS DE CONEXIÓN, DISTANCIA, SEPARACIÓN Y MEDIDA ANGULAR; CONGRUENCIA ENTRE TRIÁNGULOS, Y PERPENDICULARIDAD Y PARALELISMO

TRABAJO DE INTEGRACIÓN CURRICULAR PRESENTADO COMO REQUISITO PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE MATEMÁTICA

CARMEN SOFÍA SALTO SAICO

carmen.salto@epn.edu.ec

DIRECTOR: JUAN CARLOS TRUJILLO ORTEGA

juancarlos.trujillo@epn.edu.ec

DMQ, NOVIEMBRE DE 2022

CERTIFICACIONES

Yo, CARMEN SOFÍA SALTO SAICO, declaro que el trabajo de integración curricular aquí descrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y, que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

Sofía Salto

Carmen Sofía Salto Saico

Certifico que el presente trabajo de integración curricular fue desarrollado por Carmen Sofía Salto Saico, bajo mi supervisión.

Juan Carlos Trujillo Ortega

DIRECTOR

DECLARACIÓN DE AUTORÍA

A través de la presente declaración, afirmamos que el trabajo de integración curricular aquí descrito, así como el(los) producto(s) resultante(s) del mismo, es(son) público(s) y estará(n) a disposición de la comunidad a través del repositorio institucional de la Escuela Politécnica Nacional; sin embargo, la titularidad de los derechos patrimoniales nos corresponde a los autores que hemos contribuido en el desarrollo del presente trabajo; observando para el efecto las disposiciones establecidas por el órgano competente en propiedad intelectual, la normativa interna y demás normas.

Sofia Salto

Carmen Sofía Salto Saico

Juan Carlos Trujillo Ortega

RESUMEN

El principal propósito de este componente es presentar los contenidos de *Axiomas de incidencia, conexión y distancia*, *Segmentos, rayos, ángulos y polígonos*, *Axioma de separación*, *Axioma de Medida Angular*, *Congruencia de segmentos y ángulos*, *Congruencia de triángulos*, *Perpendicularidad*, *Desigualdades*, *Paralelismo*, *Semejanza de triángulos*, *Cuadriláteros*, *Círculos* y *Áreas* que deberían abordarse en un curso de Nivelación para las carreras de Ingeniería y Ciencias de la EPN, a la par de proponer resultados de aprendizaje que evidencien las capacidades adquiridas por el estudiante al finalizar el curso.

Con el fin de precisar la formulación de los resultados de aprendizaje, se proponen ejemplos de evaluación como preguntas, ejercicios o problemas para determinar si un estudiante a alcanzado o no dichos resultados de aprendizaje.

Palabras clave: resultados de aprendizaje, Geometría, triángulos, segmentos, rayos, ángulos, perpendicularidad, paralelismo.

ABSTRACT

The main objective of this component is to present the contents about *Axiom of distance, Incidence Axiom*, *Segments, rays, angles and polygons*, *Separation axiom*, *Angle measure axiom*, *Segment and angle congruence*, *Triangle congruence*, *Orthogonality*, *Inequalities*, *Parellelism*, *Triangle similarity*, *Quadrilateral*, *Circles* and *Areas* that should be treated in an introduction course for the Engineering and Science majors at EPN, as well as to propose learning outcomes that would accurately reflect the skills learned by the students upon successful finalization of the course.

With the aim to specify the formulation of the learning outcomes, sample evaluations methods are proposed, such as questions, exercises and problems, which would determine whether a student had reached said learning outcomes.

Keywords: Learning outcomes, Geometry, triangles, segments, angles, orthogonality, parallelism.

Índice general

Capítulo 1

Descripción del componente desarrollado

De la misma manera como los diferentes campos científicos evolucionan, su enseñanza (sobre todo en los primeros niveles de la Universidad) debe evolucionar. No obstante, en el Ecuador y, en particular, en la Escuela Politécnica Nacional, tanto la forma de enseñanza como los contenidos de Matemática que se enseñan en la Nivelación y en la Formación Básica no se han adaptado a los cambios sustanciales que se han dado en este campo del conocimiento durante los últimos 50 años.

La Facultad de Ciencias ha participado con algunos profesores en varias actividades durante los últimos 5 años, con el fin de re-definir, tanto el enfoque como los contenidos de Matemática en el curso de Nivelación. Fruto de esta participación, se ha reflexionado sobre los aspectos de su enseñanza. Con el propósito de completar la tarea ya realizada desde la Facultad de Ciencias, se diseñó este proyecto, en cinco componentes: Fundamentos de Matemática, Números, Funciones, Geometría y Trigonometría. El trabajo que se presenta ahora corresponde a una parte de la quinta componente: Geometría.

1.1. Objetivo general

El objetivo general de este proyecto es el de organizar los conocimientos fundamentales de Matemática que deberían enseñarse en el curso de Nivelación (que actualmente se organizan en dos materias: Fundamentos de Matemática, y Geometría y Trigonometría).

El objetivo general de esta componente consiste en plantear los contenidos de *Geometría*, mediante la formulación de resultados de aprendizaje de estos contenidos.

1.2. Objetivos específicos

1. Plantear los contenidos, a nivel micro, de Geometría.
2. Para los contenidos propuestos, elaborar los correspondientes resultados de aprendizaje.
3. Ilustrar, mediante ejercicios o problemas resueltos, la evaluación de los resultados de aprendizaje propuestos.

1.3. Alcance

Los contenidos de las materias considerados en este proyecto se ajustan a los PEA de Fundamentos de Matemática y de Geometría aprobados por el Consejo de Docencia de la EPN en el año 2020.

El trabajo que aquí se presenta no consiste en el desarrollo de los contenidos propuestos, sino en la formulación a nivel micro de los contenidos, de los resultados de aprendizaje y de ejemplos que ilustren la evaluación de dichos resultados de aprendizaje.

1.4. Marco teórico

Con el pasar de los años, la forma en la que se diseña los currículum académicos ha ido cambiando, tradicionalmente se utilizaba el denominado **enfoque centrado en el profesor**, sin embargo, una de las críticas más frecuentes de este enfoque es la dificultad al establecer de manera precisa lo que el estudiante debe ser capaz de hacer para aprobar el curso [3, p. 16], por ello se ha adoptado internacionalmente un cambio de enfoque, ahora **centrado en el estudiante**, el cual pone énfasis en lo que los estudiantes deben ser capaces de hacer al culminar el período de aprendizaje. Para expresar dichas capacidades adquiridas se utilizan afirmaciones que se denominan **resultados de aprendizaje.**

1.4.1. Definición de resultados de aprendizaje

Podemos definir a los resultados de aprendizaje de la siguiente manera:

> Los resultados de aprendizaje son enunciados que expresan de forma clara y precisa las expectativas que se tiene sobre el estudiante, respecto a lo que será capaz de hacer, comprender y/o demostrar al finalizar un proceso de aprendizaje.[3, p. 19] La característica más importante de los resultados de aprendizaje es que son medibles.

1.4.2. Estructura de los Resultados de Aprendizaje

La Taxonomía de Bloom nos presenta al aprendizaje como un proceso durante el cual se presentan distintos niveles de pensamiento, esta clasificación está compuesta de seis niveles que suceden uno al otro, estos son utilizados con frecuencia para redactar resultados de aprendizaje mediante la lista de verbos (verbos de acción no ambiguos) provista para cada uno. A continuación, presentamos las definiciones de lo antes mencionado y un extracto de la lista de verbos utilizada para cada una de las etapas del pensamiento.

1. **Conocimiento**: Habilidad para recordar hechos o conceptos sin necesariamente haberlos comprendido. Verbos: Enunciar, Definir, Nombrar, Citar, Identificar, Rememorar, Reconocer.

2. **Comprensión**: Habilidad para comprender e interpretar lo aprendido. Verbos: Diferenciar, Distinguir, Explicar, Interpretar, Clasificar, Reformular.

3. **Aplicación**: Habilidad para emplear lo aprendido en circunstancias distintas. Verbos: Utilizar, Emplear, Aplicar, Calcular, Solucionar, Demostrar.

4. **Análisis**: Habilidad para dividir la información en sus partes. Verbos: Determinar, Inferir, Comparar, Desglosar, Organizar, Relacionar.

5. **Síntesis**: Habilidad de compilar las diferentes partes de la información. Verbos: Establecer, Formular, Reordenar, Plantear, Resumir, Argumentar, Desarrollar

6. **Evaluación**: Habilidad para valorar la información y sus distintos componentes, según la situación. Verbos: Justificar, Resolver, Recomendar, Concluir, Convencer, Evaluar.

Para elaborar resultados de aprendizaje, se debe evitar por completo el uso de verbos ambiguos; por ello, la Taxonomía de Bloom es una herramienta fundamental, pues nos proporciona un listado de verbos activos que, en la presente propuesta, nos permite evaluar de forma objetiva a los estudiantes.

Capítulo 2

Metodología

El curso de Nivelación debe nivelar **algunos** de los conocimientos que las y los estudiantes debieron aprender en el Bachillerato, pero con un "enfoque universitario". Esto quiere decir que las y los estudiantes deberán desarrollar:

- Capacidades de *abstracción* y *generalización*.
- El pensamiento deductivo.
- El lenguaje académico.

Dada la potencia de cálculo actual, no es necesario enfocar los contenidos y los procesos de enseñanza y aprendizaje en el desarrollo de competencias de cálculo numérico. Más bien, el enfoque pedagógico sigue el principio: "pocos contenidos, pero profundos".

La metodología de este trabajo es la siguiente:

1. Describir los contenidos de Geometría mediante el enunciado de definiciones, axiomas y teoremas, en el orden que estos deberían presentarse en el curso.

   La organización de los contenidos propuestos se basan en la axiomática SMSG [1, p. 20], complementándose con el desarrollo presentado en [5] y [4].

2. Formular los resultados de aprendizaje bajo el esquema presentado en [3].

3. Presentar ilustraciones de los resultados de aprendizaje propuestas. algunas ideas, ejercicios y ejemplo se basan en problemas y ejercicios presentes en [1], [2], [4] y [5].

Capítulo 3

Resultados, conclusiones y recomendaciones

3.1. Resultados

3.1.1. Introducción

La presente propuesta de contenidos de aprendizaje de Geometría para Nivelación, describe de forma precisa e ilustra los conceptos, definiciones, axiomas y teoremas sobre *Axiomas de incidencia, conexión y distancia*, *Segmentos, rayos, ángulos y polígonos*, *Axioma de separación*, *Axioma de Medida Angular*, *Congruencia de segmentos y ángulos*, *Congruencia de triángulos*, *Perpendicularidad*, *Desigualdades*, *Paralelismo*, *Semejanza de triángulos*, *Cuadriláteros*, *Círculos* y *Áreas*.

Cada sección del contenido contiene resultados de aprendizaje, formulados de acuerdo a la teoría presentada por Declan Kennedy [3], y se presenta ejemplos de evaluación para los estudiantes, junto con las soluciones de cada ejemplo.

3.2. Contenidos de aprendizaje

3.2.1. Conceptos fundamentales

Primitivos

Son seis:

1. Punto
2. Recta
3. Pasa por
4. Distancia
5. Semi plano
6. Medida angular

Definidos

1. Paralelismo
2. Colineal
3. Sistemas de coordenadas para una recta
4. Entre
5. Segmento
6. Rayo
7. Ángulo
8. Triángulo
9. Congruencia entre segmentos
10. Punto medio
11. Par vertical
12. Par lineal
13. Ángulos suplementarios
14. Congruencia entre triángulos
15. Bisectriz de un ángulo

3.2.2. Axiomas

Incidencia

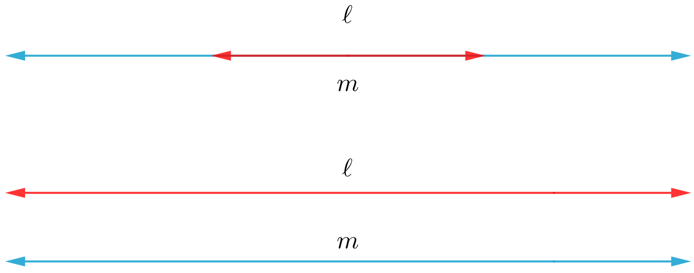
Este axioma define implícitamente los conceptos de **punto**, **recta** y **pasar por**

AXIOMA 1 (Punto, recta, pasar por)**:** *Por dos puntos distintos, pasa una y solo una recta. Es decir, si A y B son dos puntos distintos, existe una y solo una recta ℓ tal que ℓ pasa por A y por B .*

Si A y B son puntos distintos, la única recta que pasa por A y por B será representada por $\overleftrightarrow{AB}$. Para enunciar el teorema que se deduce de este axioma, se define el concepto de rectas paralelas.

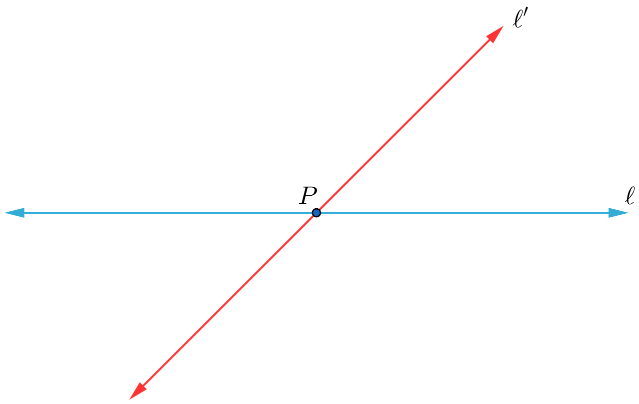
DEFINICIÓN 1 (Rectas paralelas). *Dos rectas son **paralelas** si son iguales o su intersección es el conjunto vacío. Se usará $\ell \parallel m$ para denotar que las rectas ℓ y m son paralelas.*

En los siguientes gráficos, ℓ y m son rectas paralelas.



De este axioma, se deduce el teorema siguiente:

TEOREMA 1: *Dadas dos rectas que no son paralelas, existe uno y solo un punto por el que ambas rectas pasan.*



Se denomina **plano** al conjunto de todos los puntos y se representará por $\mathscr{P}$.

Distancia

El siguiente axioma, define implícitamente el concepto primitivo **distancia**:

AXIOMA 2 (Distancia)**:** *A cada par de puntos (distintos o no), le corresponde un único número real mayor o igual que* 0*. Es decir, si* A *y* B *son puntos, existe un único número real mayor o igual que* 0*, denominado* ***distancia entre*** A ***y*** B *y representado por* AB*.*

Postulado de la regla

Este axioma "enlaza" los conceptos primitivos: punto, recta, pasar por, y distancia.

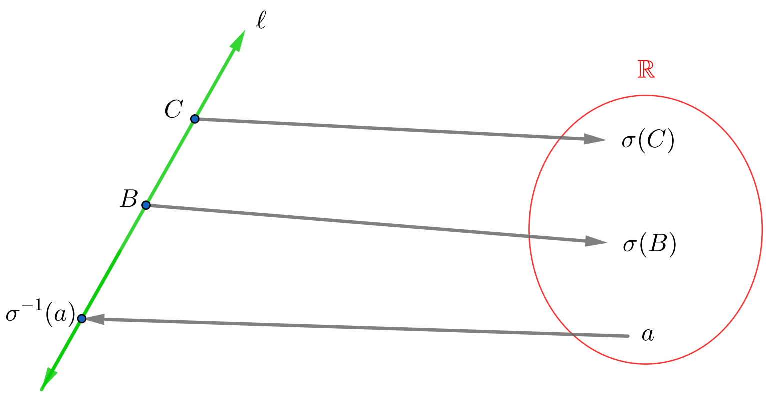
AXIOMA 3 (Postulado de la regla)**:** *Para toda recta* ℓ*, existe una función* σ *de* ℓ *sobre* $\mathbb{R}$*, biyectiva, tal que para todo punto* A *en* ℓ *y todo punto* B *en* ℓ*, la distancia entre* A *y*

B es igual al valor absoluto de la diferencia entre $\sigma(A)$ y $\sigma(B)$; es decir, tal que

$$AB = |\sigma(A) - \sigma(B)|.$$

Si A es un punto en ℓ, el número real $\sigma(A)$ se denomina **coordenada de** A **respecto de** σ. La función σ se denomina **sistema de coordenadas para** ℓ.

La siguiente es una forma de ilustrar las definiciones mencionadas:



De este axioma, y con ayuda de las propiedades de las funciones, se deduce el siguiente teorema.

TEOREMA 2 (Colocación de la regla)**:** *Dados los puntos P y Q en la recta ℓ, existe un sistema de coordenadas para ℓ tal que la coordenada de P sea el número 0 y la coordenada de Q sea un número mayor que 0.*

Del axioma de la distancia y del postulado de la regla, se deducen las siguientes propiedades de la distancia entre puntos:

TEOREMA 3: *Dados los puntos P y Q, se tiene que $PQ = 0$ si y solo si $P = Q$, y $PQ = QP$.*

3.2.3. Orden en una recta

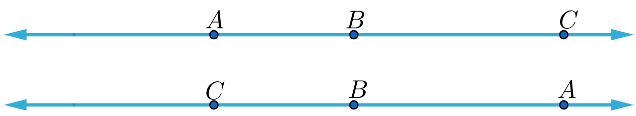
La relación **entre** define un "orden" en los puntos de una recta.

DEFINICIÓN 2 (Colineal). *Tres o más puntos distintos son **colineales** si existe una recta que pasa por todos ellos.*

DEFINICIÓN 3 (Entre). *Si A, B y C son tres puntos distintos, B está **entre** A y C, lo que se representa por $A - B - C$, si:*

1. *A, B y C son colineales; y,*
2. *$AC = AB + BC$.*

De esta definición, se desprende que $A{-}B{-}C$ si y solo si $C{-}B{-}A$. La siguiente es una representación gráfica de puntos colineales.

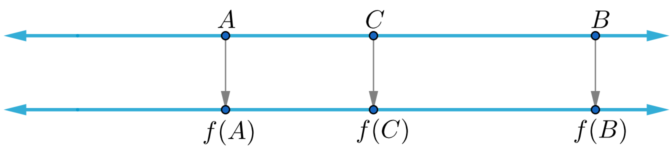


Antes de continuar con algunos resultados, agregaremos otra definición.

El siguiente teorema caracteriza el orden de la recta mediante el orden de los números reales.

TEOREMA 4 (Entre para puntos)**:** *Dada la recta ℓ, los puntos A, B y C por los que pasa la misma y el sistema de coordenadas f de ℓ sobre $\mathbb{R}$, el punto C está entre A y B si y solo si $f(A) < f(C) < f(B)$ o bien $f(A) > f(C) > f(B)$.*

Se presenta a continuación la representación gráfica del teorema anterior.

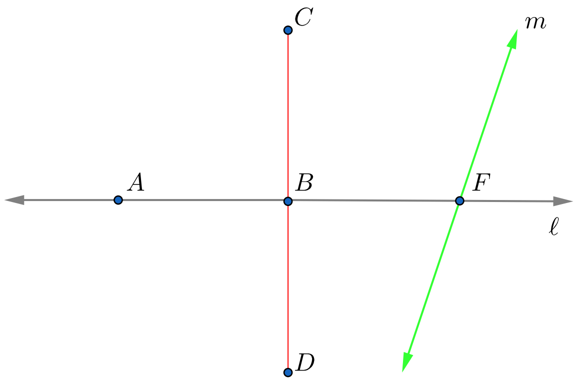


3.2.4. Segmentos, rayos, ángulos y polígonos

DEFINICIÓN 4 (Segmento). *Dados dos puntos distintos A y B, el **segmento de extremos** A **y** B, representado por $\overline{AB}$, es la unión de $\{A, B\}$ y el conjunto de puntos que están entre A y B. En otras palabras,*

$$\overline{AB} = \{A, B\} \cup \{X : A{-}X{-}B\}.$$

Todo punto del segmento $\overline{AB}$ distinto de los extremos se llama **punto interior** del segmento $\overline{AB}$. La **longitud** del segmento $\overline{AB}$ es la distancia entre A y B (AB).



Una **figura geométrica** (o, simplemente, figura) es un conjunto de puntos (es decir, es un subconjunto del plano).

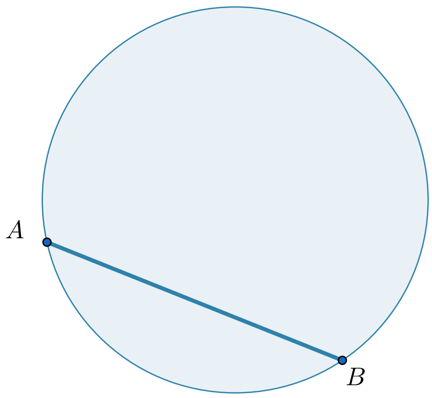
DEFINICIÓN 5 (Figura Convexa). *Una figura es **convexa** si contiene todos los puntos interiores del segmento cuyos extremos son dos puntos cualesquiera de la figura.*

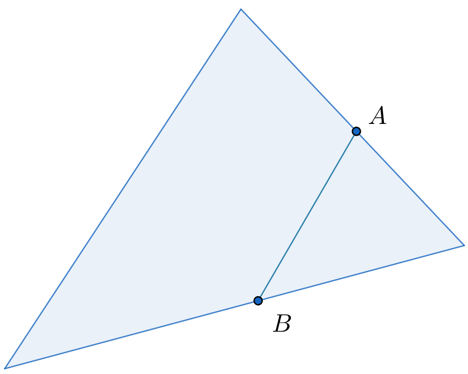
En otras palabras, si $\mathscr{F}$ es una figura, es convexa si para todo $A \in \mathscr{F}$ y todo $B \in \mathscr{F}$, se tiene que

$$\overline{AB} - \{A, B\} \subseteq \mathscr{F}.$$

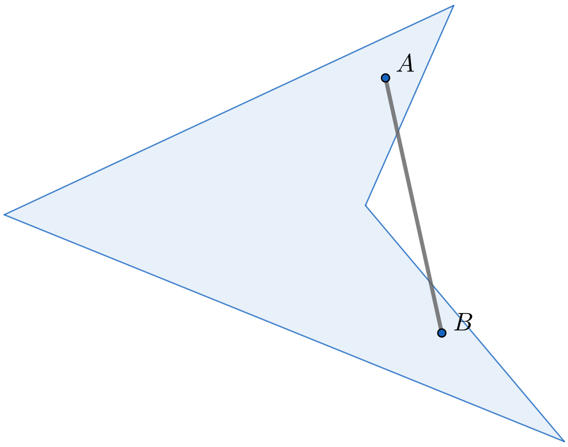
*Una figura que no es convexa se denomina **cóncava**.*

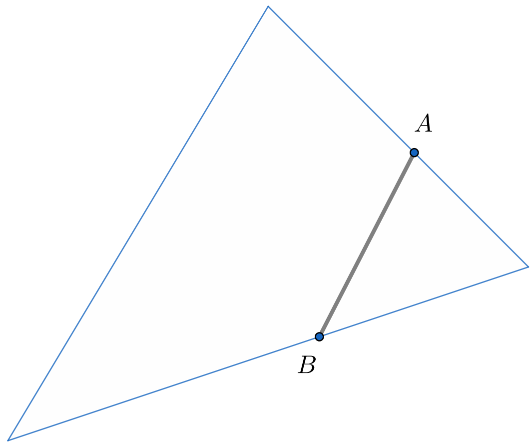
Los siguientes dibujos ilustran el concepto de figura convexa:





Los siguientes dibujos ilustran el concepto de figura cóncava:





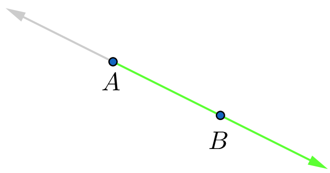
Definición 6 (Rayo). *Dados dos puntos distintos A, B, el* ***rayo de extremo*** *A* ***que pasa por*** *B o* ***desde*** *A* ***que pasa por*** *B, representado por $\overrightarrow{AB}$, es la unión del segmento $\overline{AB}$ y el conjunto de todos los puntos D tales que $A{-}B{-}D$.*

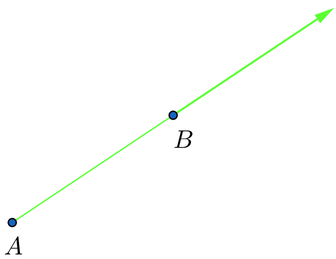
De manera más precisa, se tiene que

$$\overrightarrow{AB} = \overline{AB} \cup \{D : A{-}B{-}D\}.$$

Si los puntos A, B y C son tales que $A{-}B{-}C$, los rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$ son llamados opuestos.

Los siguientes dibujos ilustran el concepto de rayo:



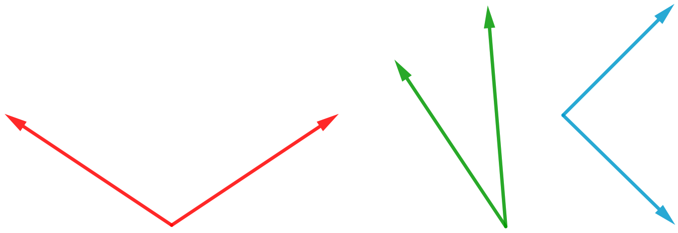


Definición 7 (Ángulo). *Se denomina* ***ángulo*** *a la unión de dos rayos con el mismo extremo, distintos y que no son opuestos.*

De manera precisa, si los rayos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son tales que A, B y C no son colineales, el ***ángulo de vértice*** *A* ***y lados*** *$\overrightarrow{AB}$* ***y*** *$\overrightarrow{AC}$, representado por $\angle BAC$ es la unión de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$; en otras palabras, tenemos que*

$$\angle BAC = \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{AC}.$$

Las siguientes son representaciones gráficas de ángulos.

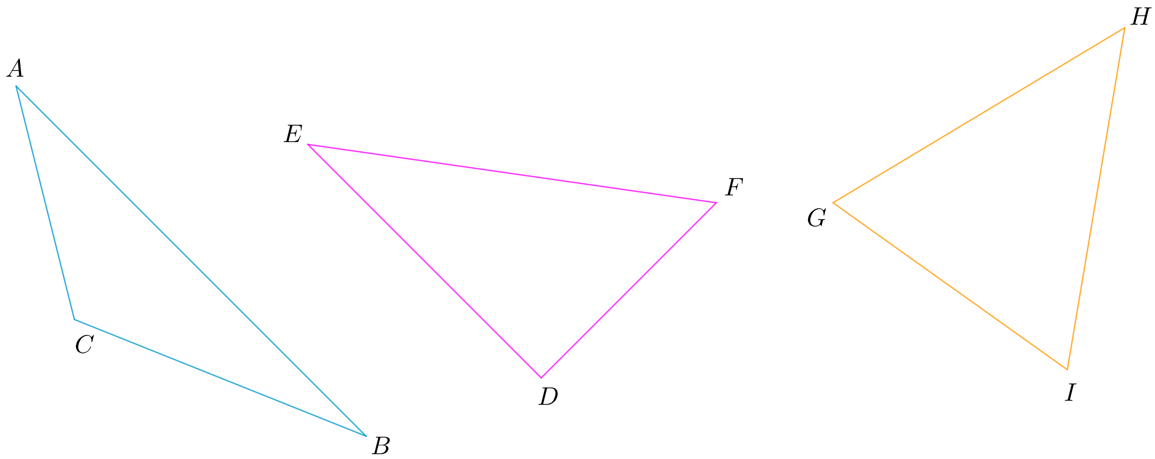


Definición 8 (Triángulo). *Dados los puntos A, B y C distintos y no colineales, la unión de los segmentos es el **triángulo de vértices** A, B y C $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ y es representado por $\triangle ABC$, es decir, se tiene que*

$$\triangle ABC = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{AC}$$

*Los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ se llaman **lados del triángulo** $\triangle ABC$; a su vez llamamos a $\angle A$, $\angle B$ y $\angle C$ los **ángulos del triángulo**, estos son los comprendidos por los lados que tienen vértice común A, B y C respectivamente.*

Las siguientes son representaciones gráficas de triángulos.

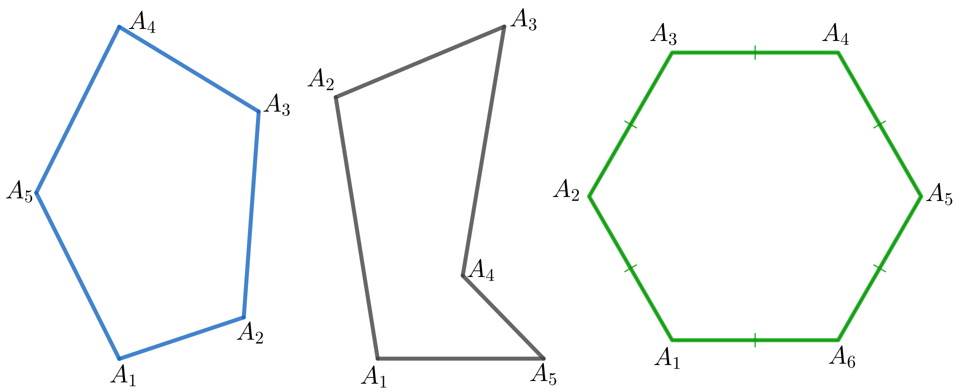


Definición 9 (Polígono). *Dados n puntos A_1, A_2, A_3, $\dots$, A_n distintos tales que no existen tres puntos consecutivos que sean colineales, el **polígono de n lados con vértices** A_1, A_2, A_3, $\dots$, A_n es la unión de los segmentos $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, $\dots$, $\overline{A_{n-1}A_n}$ y $\overline{A_nA_1}$, y es representado por Φ_n; en otras palabras,*

$$\Phi_n = \overline{A_1A_2} \cup \overline{A_2A_3} \cup \ldots \cup \overline{A_{n-1}A_n} \cup \overline{A_nA_1}.$$

*Los segmentos $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, $\dots$, $\overline{A_{n-1}A_n}$ y $\overline{A_nA_1}$ se llaman **lados** del polígono Φ_n.*

Los siguientes dibujos son representaciones de polígonos.



3.2.5. Axioma de Separación

AXIOMA 4 (Axioma de Separación del plano)**:** *Dada una recta, los puntos del plano que no están en la recta forman dos conjuntos convexos y cualquier segmento cuyos extremos estén cada uno en uno de los referidos conjuntos tiene un punto en común con la recta.*

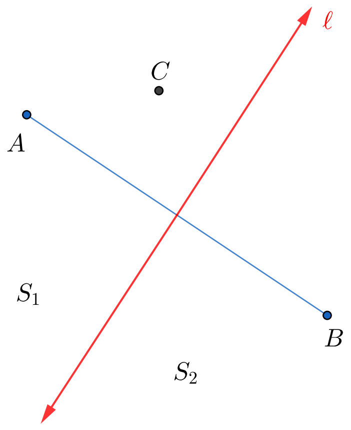
En otras palabras, si ℓ es una recta, existen dos conjuntos S_1 y S_2 tales que:

1. $\mathscr{P} = S_1 \cup S_2$.
2. *S_1 y S_2 son figuras convexas.*
3. *Si $A \in S_1$ y $B \in S_2$, entonces $\overline{AB} \cap \ell \neq \emptyset$.*

Puesto que dos rectas distintas y no paralelas se intersecan en un solo punto, se tiene que existe un punto R tal que $\overline{PQ} \cap \ell = \{R\}$.

1. Los **semiplanos** S_1 y S_2 se denominan **lados de la recta determinados** por ℓ.
2. Si A y B son dos puntos que están en S_1 o que ambos están en S_2, se dice que A están del **mismo lado** de la recta ℓ.
3. Por otra parte, si $A \in S_1$ y $B \in S_2$, se dice que A y B están en lados **opuestos** de ℓ.

Ilustramos a continuación el Axioma de Separación del plano y los conceptos que acabamos definir:



Los puntos A y C están en el mismo lado de ℓ (semiplano S_1); A y B están en lados opuestos de ℓ (A está en S_1 y B está en S_2).

TEOREMA 5: *Dados los puntos P, Q y T, tales que:*

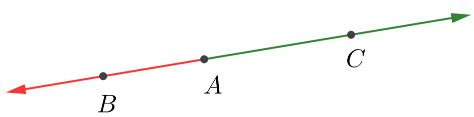
1. *P y Q están en lados opuestos de la recta ℓ.*

Si

2. *Q y T están en lados opuestos de ℓ, entonces P y T están del mismo lado.*
3. *Q y T están del mismo lado de ℓ, entonces P y T están en lados opuestos.*

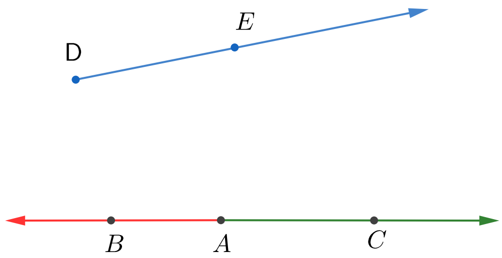
DEFINICIÓN 10 (Rayos Opuestos). *Dos rayos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ con extremo común son **rayos opuestos** si no son iguales pero $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{AC}$. En otras palabras, los rayos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son opuestos si $B - A - C$.*

A continuación una representación gráfica de rayos opuestos:



DEFINICIÓN 11 (Rayos Colineales). *Dos rayos distintos son **colineales** si son opuestos y diremos que un rayo es colineal consigo mismo.*

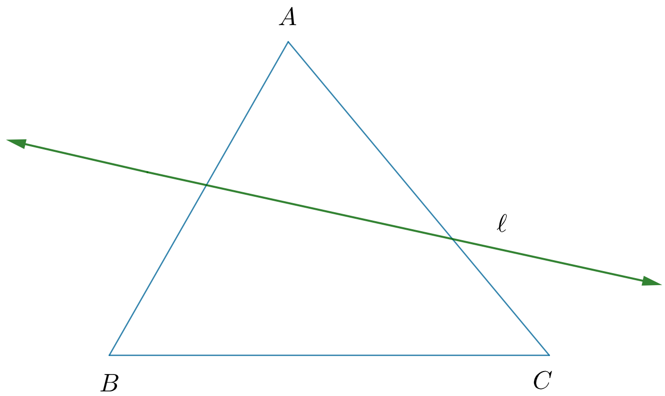
Los siguientes dibujos representan rayos colineales:



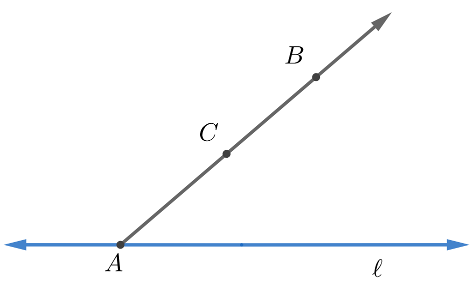
Las consecuencias más relevantes del axioma de Separación, junto con los axiomas de conexión, son las siguientes:

TEOREMA 6:

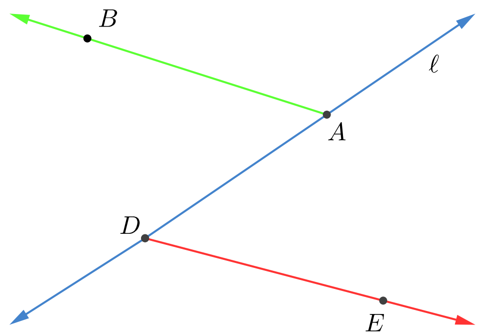
1. ***Postulado de Pasch***: *Dados el triángulo $\triangle ABC$ y la recta ℓ tal que A,B y C no están en la recta ℓ. Si ℓ interseca a $\overline{AB}$, entonces también interseca a $\overline{AC}$ o $\overline{BC}$.[5, p.51] A continuación se ilustra el Postulado de Pasch:*



2. ***Teorema del rayo***: *Dada la recta ℓ, A un punto de ℓ, y B un punto externo de la recta ℓ. Si C es un punto en el rayo $\overrightarrow{AB}$ y C $\neq$ A, entonces B y C están del mismo lado de ℓ. A continuación se ilustra el Teorema del rayo:*

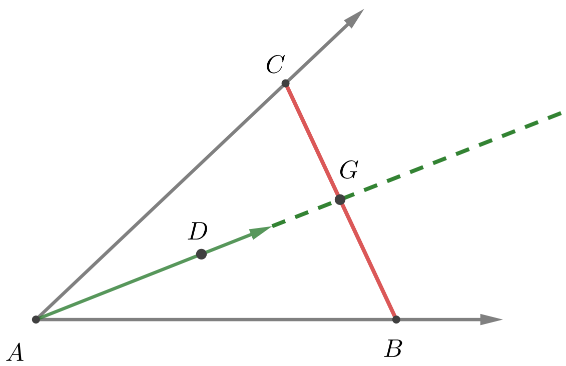


3. ***Teorema Z***: *Dada la recta ℓ y los puntos A y D distintos de ℓ. Si B y E son puntos en lados opuestos de ℓ, entonces $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{DE} = \emptyset$. A continuación se ilustra el Teorema Z:*



Teorema 7 (Teorema de la barra cruzada)**:** *Si $\triangle ABC$ es un triángulo y D es un punto en el interior del $\angle BAC$, entonces existe un punto G tal que G está en $\overrightarrow{AD}$ y $\overline{BC}$*

A continuación ilustramos gráficamente el Teorema Z:

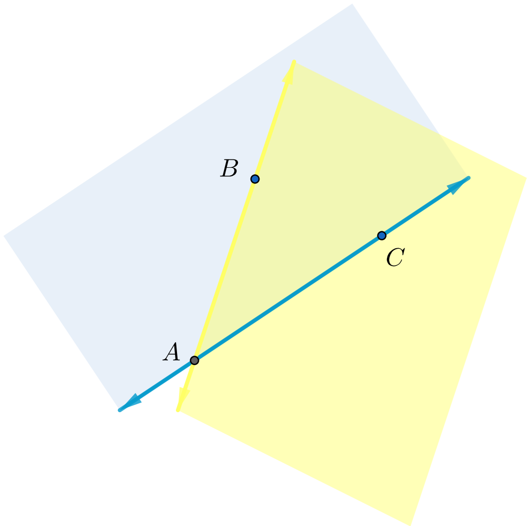


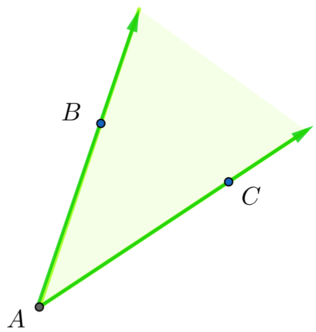
Teorema 8: *Si $C{-}A{-}B$ y D está en el interior de $\angle BAE$, entonces E está en el interior de $\angle BAC$.*

Definición 12 (Interior de un ángulo). *Dado el ángulo $\angle BAC$, el **interior del ángulo** $\angle BAC$ es la intersección de los siguientes semiplanos:*

1. *el determinado por la recta $\overleftrightarrow{AC}$ que contiene a B;*
2. *el determinado por la recta $\overleftrightarrow{AB}$ que contiene a C.*

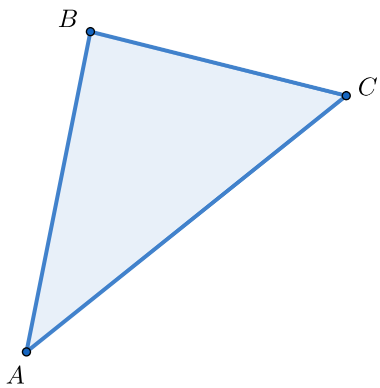
El siguiente dibujo representa el interior de un ángulo:





Definición 13 (Interior de un triángulo). *El* ***interior del triángulo*** *$\triangle ABC$ es la intersección de los interiores de sus tres ángulos.*

De forma similar a como se ilustró la intersección de semiplanos del interior del ángulo, el siguiente dibujo representa el interior de un triángulo:



3.2.6. Axioma de medida Angular

Los siguientes axiomas definen implícitamente el concepto primitivo **medida angular**:

Axioma 5 (Postulado de la Medida Angular)**:** *A cada ángulo le corresponde un número real mayor que* 0 *y menor que* 180*. A este número le llamamos* ***medida angular del ángulo****.*

De manera más precisa, si α representa un ángulo, existe un único número real r tal que $0 < r < 180$ que le corresponde a α. El número r es la ***medida angular de*** *α. Utilizaremos el símbolo $\mathrm{m}\,\alpha$ para indicar la medida angular de α.*

Axioma 6 (Postulado de la Construcción del ángulo)**:** *Sean $\overrightarrow{AB}$ y S uno de los semiplanos de $\overleftrightarrow{AB}$. Para todo número real r tal que $0 < r < 180$, existe exactamente un rayo $\overrightarrow{AP}$, con P en S, tal que la media angular de $\angle PAB$ es r.*

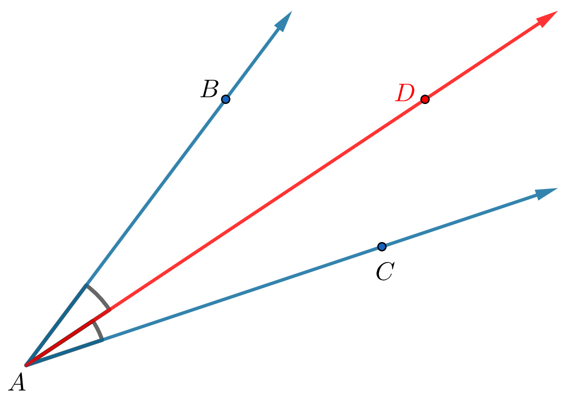
En otras palabras,

$$\mathrm{m}\,\angle PAB = r.$$

Axioma 7 (Postulado de la Suma de ángulos)**:** *Si D es un punto en el interior del ángulo $\angle BAC$, entonces*

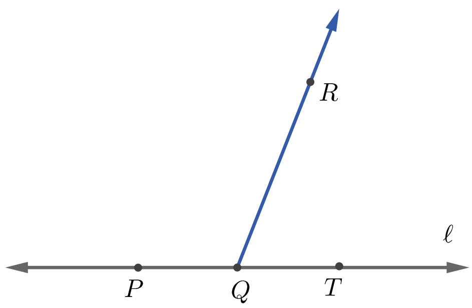
$$\mathrm{m}\,\angle BAC = \mathrm{m}\,\angle BAD + \mathrm{m}\,\angle DAC.$$

A continuación un dibujo que representa el postulado anterior:



Definición 14 (Par Lineal). *Dos ángulos $\angle PQR$ y $\angle RQT$ forman un* ***par lineal*** *si $P - Q - T$ y R no está en la recta $\overleftrightarrow{PT}$.*

Lo siguiente es un dibujo del concepto de par lineal:



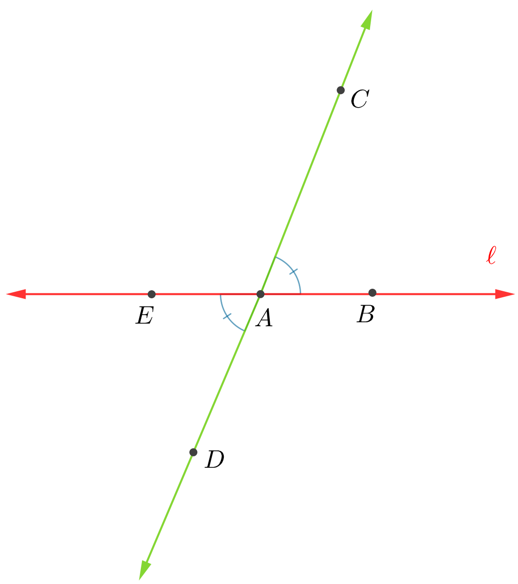
Definición 15 (Ángulos Suplementarios). *Si la suma de las medidas de dos ángulos es $180°$, los ángulos se llaman* ***suplementarios****.*

Axioma 8 (Postulado del Suplemento)**:** *Si dos ángulos forman un par lineal, entonces son suplementarios.*

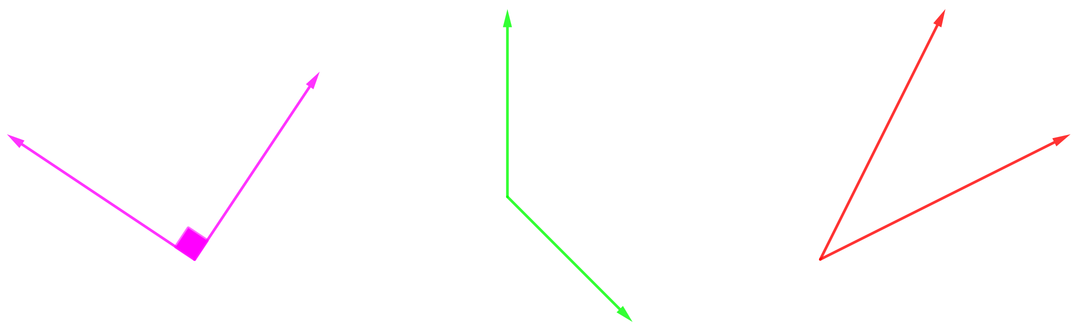
Definición 16 (Ángulos Complementarios). *Si la suma de las medidas de dos ángulos es* $90°$ *,entonces se llaman* ***ángulos complementarios****.*

Definición 17 (Par vertical). *Dos ángulos constituyen un* ***par vertical*** *si tienen el mismo vértice y los lados de uno de los ángulos son rayos opuestos de los lados del otro. Dicho de otra manera, los ángulos* $\angle BAC$ *y* $\angle DAE$ *forman un par vertical si los rayos* $\overrightarrow{AB}$ *y* $\overrightarrow{AE}$ *son opuestos y los rayos* $\overrightarrow{AC}$ *y* $\overrightarrow{AD}$ *son opuestos.*

Lo siguiente es un dibujo del concepto de par vertical:



Definición 18 (Ángulos: agudo, recto, y obtuso). *Un ángulo es* ***agudo*** *si su medida angular es menor que* 90*; es* ***recto****, si mide* 90*; y, es* ***obtuso****, si su medida angular es mayor que* 90*.*



Los gráficos anteriores representan a un ángulo recto, obtuso, y agudo, respectivamente.

3.2.7. Congruencia de segmentos y ángulos

DEFINICIÓN 19 (Congruencia entre segmentos). *Dos segmentos son **congruentes** si tienen la misma longitud. En otras palabras, los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son **congruentes** si $AB = CD$.*

Escribiremos $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ para indicar que los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son congruentes.

Es claro de la definición que la igualdad entre segmentos implica la congruencia de los mismos; de manera precisa, se tiene que si $\overline{AB} = \overline{CD}$, entonces $\overline{AB} \cong \overline{CD}$. El recíproco no es verdadero.

La congruencia de segmentos es una relación de equivalencia en la clase de todos los segmentos:

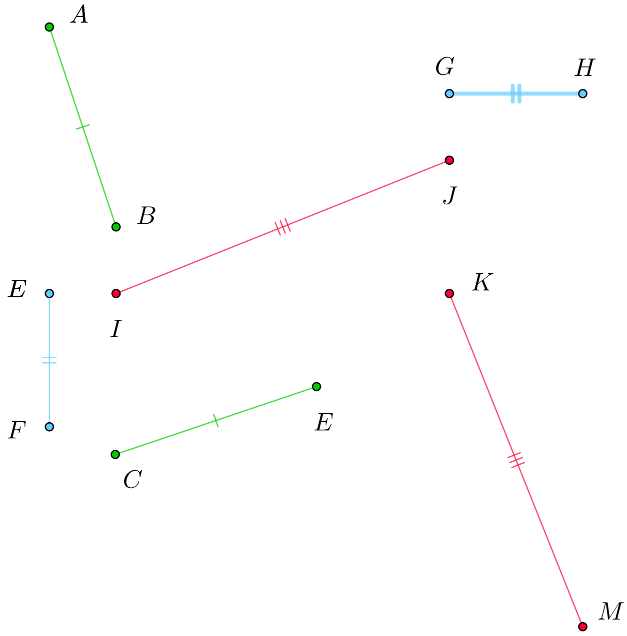
TEOREMA 9 (Congruencia de segmentos es una relación de equivalencia)**:** *La congruencia entre segmentos es una relación **reflexiva**, **simétrica** y **transitiva**. Es decir:*

1. ***Reflexiva**: para todo segmento $\overline{AB}$, se tiene que $\overline{AB} \cong \overline{AB}$.*

2. ***Simétrica**: dados dos segmentos, si el primero es congruente con el segundo, entonces el segundo es congruente con el primero. Es decir, si $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, entonces $\overline{CD} \cong \overline{AB}$.*

3. ***Transitiva**: dados tres segmentos, si el primer segmento es congruente con el segundo, y el segundo segmento es congruente con el tercer segmento, entonces el primer segmento es congruente con el tercero. De forma mas precisa, si $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ y $\overline{CD} \cong \overline{EF}$, entonces $\overline{AB} \cong \overline{EF}$.*

A continuación, se ilustra ejemplos de segmentos congruentes:



El siguiente teorema, cuyo nombre suele ser "adición y sustracción de segmentos", no indica que se haya definido una operación de "suma" entre segmentos.

TEOREMA 10 (Adición y substracción de segmentos)**:**

1. *Si se tiene que*

   a) $A - B - C$

   b) $D - E - F$

   c) $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ *y*

   d) $\overline{BC} \cong \overline{EF}$,

   entonces $\overline{AC} \cong \overline{DF}$

2. *Si se tiene que*

   a) $A - B - C$

   b) $D - E - F$

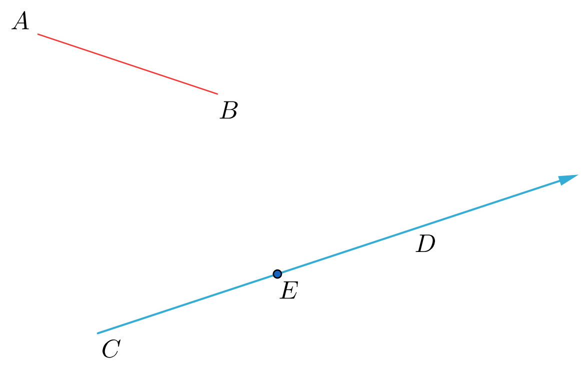
   c) $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ *y*

   d) $\overline{AC} \cong \overline{DF}$,

   entonces $\overline{BC} \cong \overline{EF}$

TEOREMA 11 (Construcción de segmentos)**:** *Dado un segmento $\overline{AB}$ y un rayo $\overrightarrow{CD}$. Existe exactamente un punto E de $\overrightarrow{CD}$ tal que $\overline{AB} \cong \overline{CE}$.*

Se ilustra a continuación el *Teorema de Construcción de segmentos*:



El teorema siguiente es equivalente al Teorema de construcción anterior.

TEOREMA 12 (Postulado de Construcción de puntos)**:** *Dados A y B dos puntos distintos y d es un número real no negativo, entonces existe un único punto C tal que C está en $\overrightarrow{AB}$ y $AC = d$.*

DEFINICIÓN 20 (Punto medio). *Dado un segmento $\overline{AB}$, un punto C es **punto medio** de $\overline{AB}$ si C está en el segmento y $\overline{AC} \cong \overline{CB}$; es decir, si:*

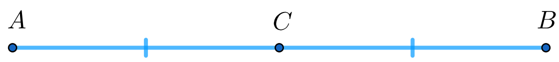
1. $A - C - B$; *y,*

2. $AC = CB$.

*En otras palabras, C es un punto medio de $\overline{AB}$ si es un punto de este segmento que **equidista** de los extremos A y B.*

El siguiente teorema expresa el hecho de que un segmento siempre tiene un punto medio y solo uno.

TEOREMA 13 (Existencia y unicidad del punto medio de un segmento)**:** *Si A y B son dos puntos distintos, entonces existe un único punto C tal que C es el punto medio de $\overline{AB}$.*



C es el punto medio de $\overline{AB}$.

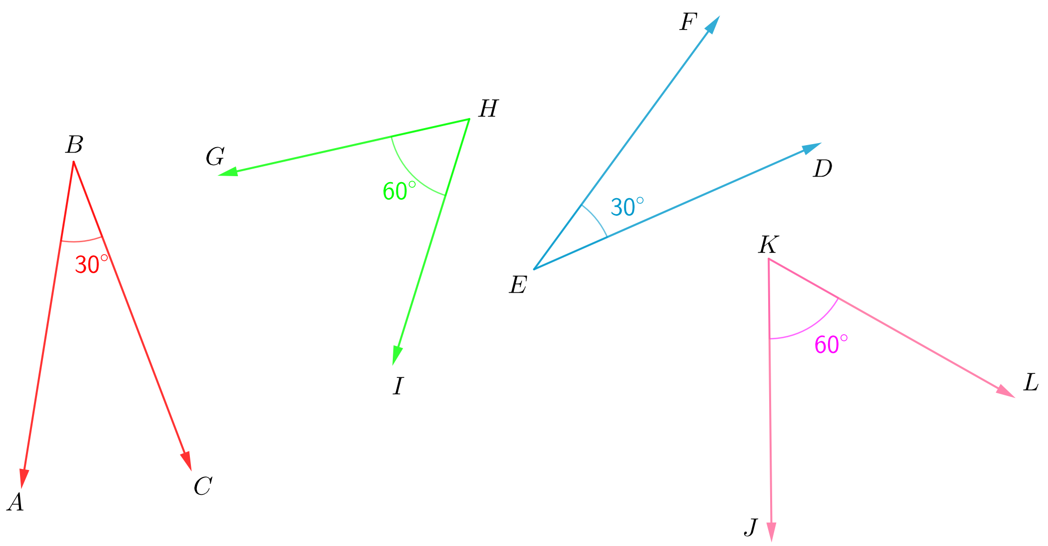
DEFINICIÓN 21 (Congruencia entre ángulos). *Dos ángulos son **congruentes** si tienen la misma medida angular. Es decir, los ángulos $\angle ABC$ y $\angle DEF$ son **congruentes** si* $\mathrm{m}\,\angle ABC = \mathrm{m}\,\angle DEF$.

Escribiremos $\angle ABC \cong \angle DEF$ para indicar que los ángulos $\angle ABC$ y $\angle DEF$ son congruentes.

TEOREMA 14 (Congruencia de ángulos es una relación de equivalencia)**:** *La congruencia entre ángulos es una relación **reflexiva**, **simétrica** y **transitiva**. Es decir:*

1. ***Reflexiva**: para todo ángulo $\angle\beta$, se tiene que $\angle\beta \cong \angle\beta$.*
2. ***Simétrica**: dados dos ángulos, si el primero es congruente con el segundo, entonces el segundo es congruente con el primero. Es decir, si $\angle\beta \cong \angle\gamma$, entonces $\angle\gamma \cong \angle\beta$.*
3. ***Transitiva**: dados tres ángulos, si el primer ángulo es congruente con el segundo, y el segundo ángulo es congruente con el tercer ángulo, entonces el primer ángulo es congruente con el tercero. De forma mas precisa, si $\angle\alpha \cong \angle\beta$ y $\angle\beta \cong \angle\gamma$, entonces $\angle\alpha \cong \angle\gamma$.*

El siguiente gráfico ilustra la congruencia de ángulos:



El siguiente teorema, cuyo nombre suele ser "adición y sustracción de ángulos", no indica que se haya definido una operación de "suma" entre ángulos.

TEOREMA 15 (Adición y substracción de ángulos)**:**

1. *Si se tiene que:*

a) *D es un punto en el interior del ángulo $\angle ABC$*

b) *H es un punto en el interior del ángulo $\angle EFG$*

c) *$\angle ABD \cong \angle GFH$ y*

d) *$\angle DBC \cong \angle HFE$,*

entonces $\angle ABC \cong \angle GFE$.

2. *Si se tiene que:*

a) *D es un punto en el interior del ángulo $\angle ABC$*

b) *H es un punto en el interior del ángulo $\angle EFG$*

c) *$\angle ABC \cong \angle EFG$ y*

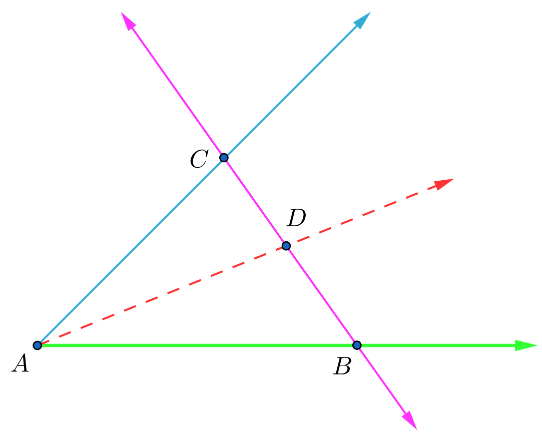
d) *$\angle DBC \cong \angle HFG$,*

entonces $\angle ABD \cong \angle EFH$

DEFINICIÓN 22 (Relación "entre" para rayos). *Diremos que el rayo $\overrightarrow{AD}$ está en **entre** los rayos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, si D está en el interior del ángulo $\angle BAC$.*

TEOREMA 16: *Dados A, B y C puntos no colineales y D un punto que está en la recta $\overleftrightarrow{BC}$. El punto D está entre los puntos B y C si y solo si el rayo $\overrightarrow{AD}$ está entre los rayos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.*

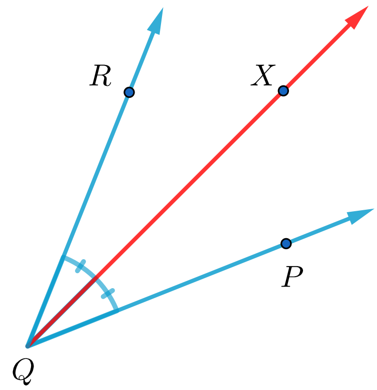
El siguiente gráfico ilustra el teorema anterior:



El siguiente teorema combina el Teorema de la barra cruzada y el Teorema 16.

TEOREMA 17: *Un punto D esta en el interior del $\angle BAC$ si y solo si el $\overrightarrow{AD}$ interseca el interior del segmento $\overline{BC}$.*

DEFINICIÓN 23 (Bisectriz). *Dado el ángulo $\angle PQR$, el rayo $\overrightarrow{QX}$ se llama **bisectriz del ángulo**, si $m\angle PQX = m\angle XQR$.*



3.2.8. Congruencia de triángulos

Ahora, presentaremos la correspondencia uno a uno entre dos triángulos pues nos será de utilidad para definir la congruencia entre triángulos.

DEFINICIÓN 24 (correspondencia uno a uno entre dos triángulos). *Dados los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ definimos los conjuntos $\mathscr{T}_1$ y $\mathscr{T}_2$ cuyos elementos son los vértices, los lados y los ángulos de cada uno de los triángulos, respectivamente, de forma mas precisa, los conjuntos son los siguientes:*

$$\mathscr{T}_1 = \left\{A, B, C, \overline{AB}, \overline{AC}, \overline{BC}, \angle A, \angle B, \angle C\right\}$$

$$\mathscr{T}_2 = \left\{D, E, F, \overline{DE}, \overline{DF}, \overline{EF}, \angle D, \angle E, \angle F\right\}$$

*Dados los triángulos antes descritos, se denomina **correspondencia uno a uno** entre los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$, a la función biyectiva:*

$$\varphi : \mathscr{T}_1 \longrightarrow \mathscr{T}_2$$

tal que:

1. $\varphi(A) = D$, $\varphi(B) = E$, $\varphi(C) = F$
2. $\varphi(\overline{AB}) = \overline{DE}$, $\varphi(\overline{AC}) = \overline{DF}$, $\varphi(\overline{BC}) = \overline{EF}$, *y*
3. $\varphi(\angle A) = \angle D$, $\varphi(\angle B) = \angle E$, $\varphi(\angle C) = \angle F$

Y se representa por $ABC \longleftrightarrow DEF$.

1. Los puntos D, E y F son los **vértices correspondientes** de A, B y C, respectivamente.

2. Los lados $\overline{DE}$, $\overline{DF}$ y $\overline{EF}$ son los **lados correspondientes** de $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ respectivamente.

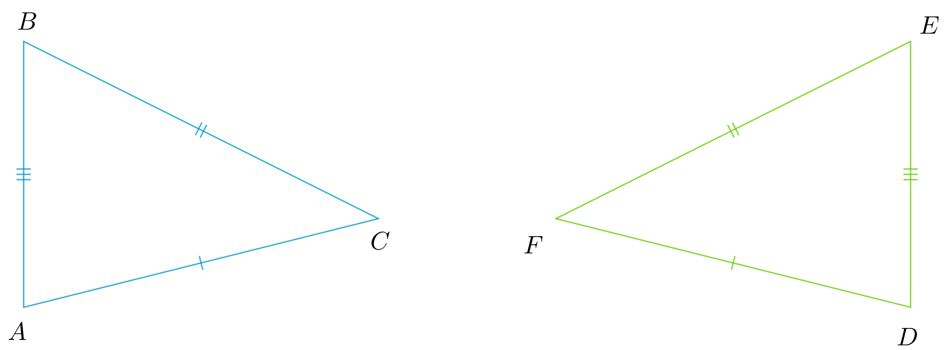
3. Los ángulos $\angle D$, $\angle E$ y $\angle F$ son los **ángulos correspondientes** de $\angle A$, $\angle B$ y $\angle C$, respectivamente.

DEFINICIÓN 25 (Congruencia de triángulos). *Dos triángulos son **congruentes** si existe una correspondencia uno a uno entre ellos tal que los lados correspondientes de los triángulos son congruentes y los ángulos correspondientes de los triángulos son congruentes.*

*En otras palabras, dados dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ y la correspondencia $ABC \longleftrightarrow DEF$, llamaremos a esta correspondencia **congruencia** entre los triángulos dados si:*

$$\overline{AB} \cong \overline{DE}; \overline{AC} \cong \overline{DF}; \overline{BC} \cong \overline{EF}; \angle A \cong \angle D; \angle B \cong \angle E; \angle C \cong \angle F$$

*Es así que los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ se denominan **congruentes** y se representará: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.*

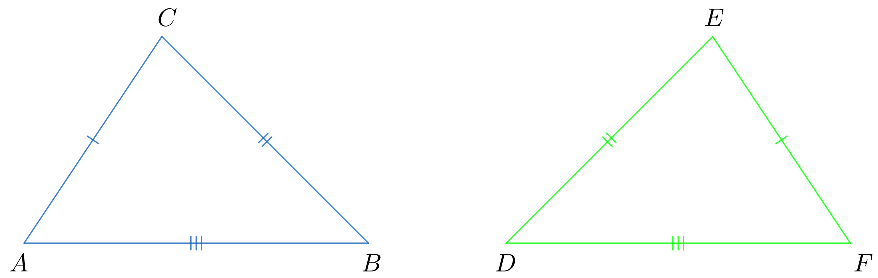


Esta relación de congruencia entre triángulos se caracteriza de la siguiente manera:

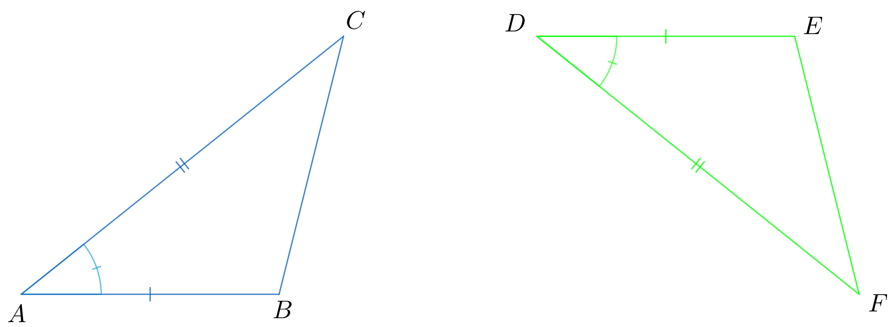
TEOREMA 18 (Condiciones para la congruencia de triángulos)**:** *Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

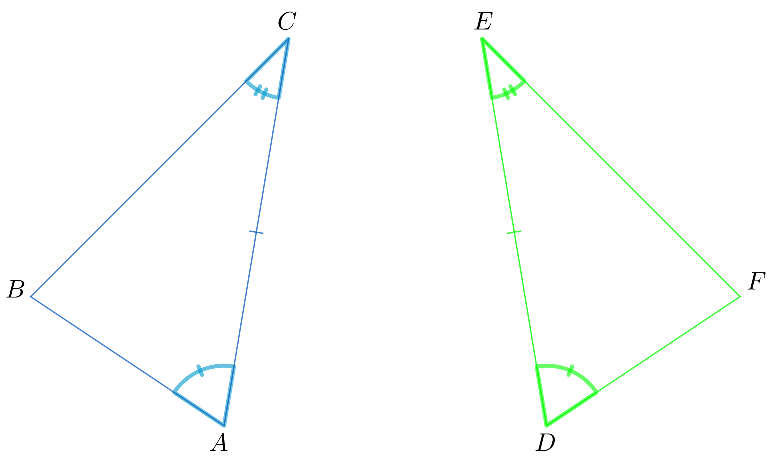
2. **Lado-Lado-Lado (LLL):** *tres lados del triángulo* $\triangle ABC$ *son congruentes a los tres lados correspondientes del triangulo* $\triangle DEF$.



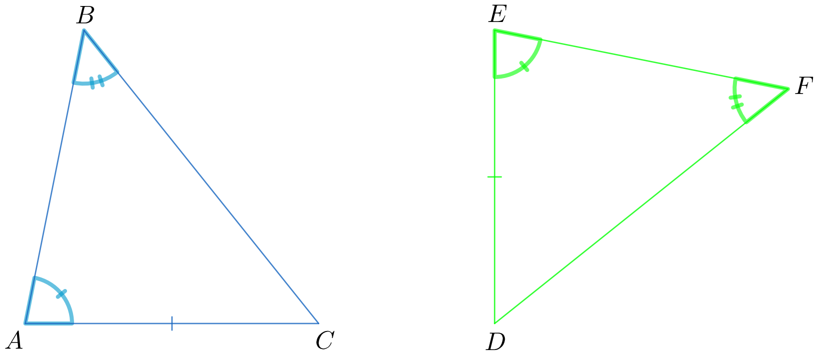
3. **Lado-Ángulo-Lado (LAL):** *dos lados del triángulo* $\triangle ABC$ *y el ángulo comprendido entre ellos son congruentes a sus correspondientes dos lados del triángulo* $\triangle DEF$ *y al ángulo comprendido entre ellos.*



4. **Ángulo-Lado-Ángulo (ALA):** *dos ángulos y su lado común del triángulo* $\triangle ABC$ *son congruentes a los dos ángulos y el lado común correspondientes del triángulo* $\triangle DEF$.



5. **Ángulo-Ángulo-Lado (AAL):** *dos ángulos y el lado opuesto a uno de ellos del triángulo* $\triangle ABC$ *son congruentes a los dos ángulos y el lado correspondientes del triángulo* $\triangle DEF$.

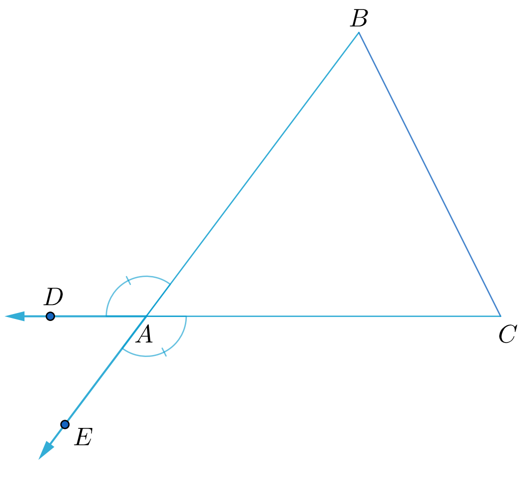


Por tanto, podemos elegir una de las cuatro últimas proposiciones como axioma. Se acostumbra tomar la segunda de ellas.

AXIOMA 9 (Postulado Lado-Ángulo-Lado (LAL))**:** *Dada una correspondencia uno a uno entre dos triángulos, si dos lados del primer triángulo y el ángulo comprendido entre ellos son congruentes a sus correspondientes dos lados del segundo triángulo y al ángulo comprendido entre ellos, entonces los triángulos son congruentes.*

DEFINICIÓN 26 (Ángulo externo del triángulo). *Dado $\triangle ABC$, un ángulo que forma un par lineal con uno de los ángulos del triángulo se llama **ángulo externo** del triángulo. Existen dos ángulos externos en cada vértice del triángulo, los cuales forman un par vertical y por tanto son congruentes. De manera precisa, dado el ángulo $\angle BAC$ del triángulo $\triangle ABC$, uno de los ángulos externos correspondientes es el formado por el rayo opuesto a $\overrightarrow{AC}$ y el rayo común $\overrightarrow{AB}$, el otro es el formado por el rayo opuesto al rayo $\overrightarrow{AB}$ y el rayo común $\overrightarrow{AC}$.*

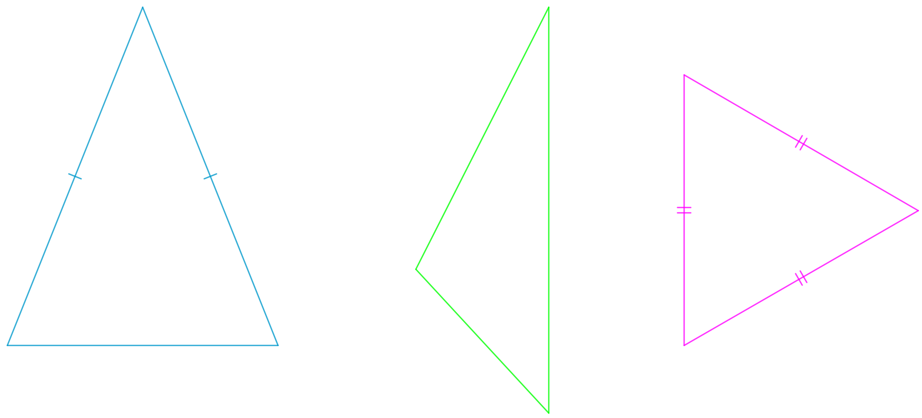
A continuación se representa de forma gráfica a la definición anterior:



El ángulo $\angle DAB$ es uno de los ángulos externos del ángulo $\angle BAC$, el otro es $\angle EAC$.

Teorema 19 (Teorema del ángulo externno): *Si $\triangle ABC$ es un triángulo y D es un punto tal que $\overrightarrow{CD}$ es opuesto a $\overrightarrow{CB}$, entonces $\mathrm{m}\,\angle DCA > \mathrm{m}\,\angle BAC$ y $\mathrm{m}\,\angle DCA > \mathrm{m}\,\angle ABC$.*

Definición 27 (Triángulos: equilátero, isósceles, y escaleno). *Un triángulo es **isósceles** si por lo menos dos de sus lados son congruentes. Si un triángulo no es isósceles, se llama **escaleno**. Además si un triángulo tiene sus tres lados congruentes, entonces lo llamaremos **equilátero**.*



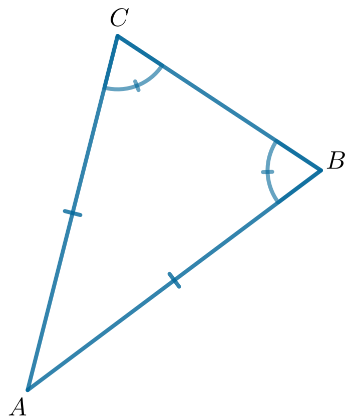
De izquierda a derecha, los dibujos anteriores son ilustraciones de los triángulos isósceles, escaleno y equilátero.

Teorema 20 (Teorema del triángulo isósceles): *Si un triángulo $\triangle ABC$ es tal que $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, entonces $\angle B \cong \angle C$.*

Un resultado inmediato del teorema anterior es que todo ángulo equilátero es **equiangular**; es decir, los tres ángulos de un triángulo equilátero son congruentes entre sí.

El recíproco al Teorema 20 se enuncia a continuación.

Teorema 21 (Recíproco del Teorema del triángulo isósceles): *Si el triángulo $\triangle ABC$ es tal que $\angle ABC \cong \angle ACB$, entonces $\overline{AB} \cong \overline{AC}$.*



DEFINICIÓN 28 (Triángulo rectángulo). *Dado un triángulo $\triangle ABC$, se dice que es un* ***triángulo rectángulo*** *si uno de sus ángulos interiores es un ángulo recto. Diremos que el lado opuesto al ángulo recto es la* ***hipotenusa*** *y los lados que lo comprenden son* ***catetos****.*

Respectivamente, llamaremos triángulo **obtusángulo** si uno de sus ángulos internos es obtuso y triángulo **acutángulo** si todos sus ángulos internos son agudos.

TEOREMA 22 (Teorema Hipotenusa Cateto)**:** *Si $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ son dos triángulos rectángulos con los ángulos rectos en los vértices C y F, respectivamente, $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ y $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, entonces $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.*

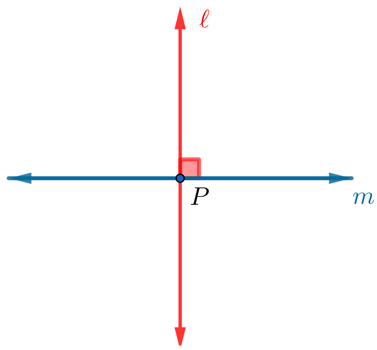
TEOREMA 23: *Dado el triángulo $\triangle ABC$, si el segmento $\overline{DE}$ tal que $\overline{DE} \cong \overline{AB}$, y S es el semiplano determinado por la recta $\overleftrightarrow{DE}$, entonces existe un único punto $F \in S$ tal que $\triangle DEF \cong \triangle ABC$.*

3.2.9. Perpendicularidad

DEFINICIÓN 29 (Rectas perpendiculares). *Dadas las rectas que se intersecan ℓ y m, se dice que son* ***perpendiculares*** *si la medida de los ángulos que forman es* 90 *y se escribe $m \perp \ell$ para denotar que las rectas mencionadas son perpendiculares.*

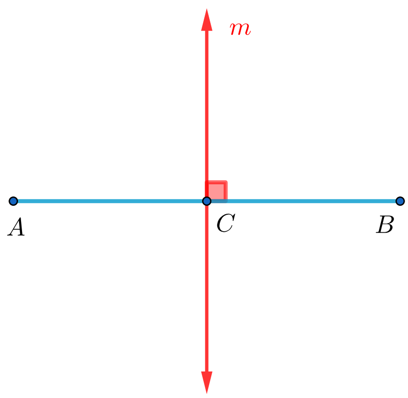
Con los resultados de las secciones anteriores, se puede probar que para toda recta ℓ y para todo punto P, existe una única recta m tal que P está en m y $m \perp \ell$. El siguiente resultado señala la existencia de una perpendicular que pase por un punto dado de una recta.

TEOREMA 24 (Existencia y unicidad de perpendiculares)**:** *Dada una recta m, para todo punto $P \in m$, existe una y solo una recta ℓ tal que $m \perp \ell$ y ℓ pasa por P.*

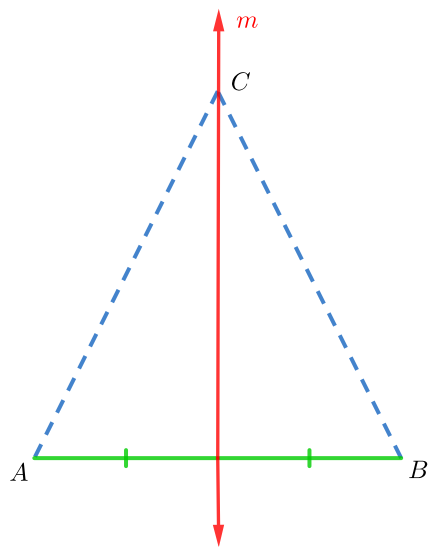


Anteriormente se dijo que todo segmento posee un único punto medio, con el resultado anterior se puede decir que existe una única recta perpendicular a la recta que contiene al segmento que pasa por el punto medio del mismo. La siguiente definición formaliza lo expuesto.

DEFINICIÓN 30 (Mediatriz de un segmento). *Dado el segmento $\overline{AB}$, se dice que la* ***mediatriz del segmento*** *es la única recta perpendicular m que pasa por el punto medio C de $\overline{AB}$.*



TEOREMA 25 (Teorema de la mediatriz)**:** *Dado el segmento $\overline{AB}$ y m su mediatriz, si C está en la recta m, entonces $\overline{AC} \cong \overline{BC}$.*



El siguiente es un resultado derivado del teorema anterior.

TEOREMA 26 (Corolario de la mediatriz)**:** *Dado el segmento* $\overline{AB}$ *y* m *una recta, si dos puntos de* m *equidistan de* A *y de* B*, entonces* m *es la mediatriz del segmento* $\overline{AB}$.

El siguiente teorema se deduce de los teoremas antes presentados en esta sección.

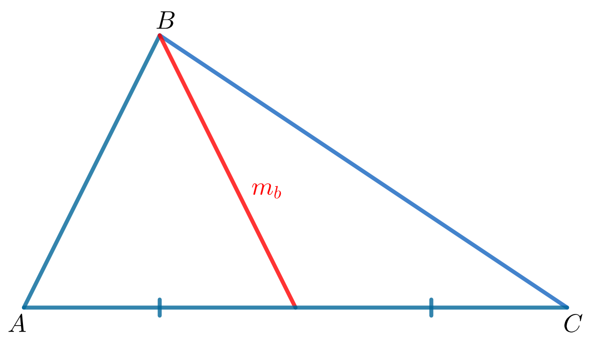
TEOREMA 27 (Teorema de los ángulos rectos)**:** *Ningún triángulo puede tener dos ángulos rectos. De manera más precisa, dado* $\triangle ABC$*, no es posible que* A *y* B *midan* 90*; ó* A *y* C *midan* 90*; ó* B *y* C *midan* 90.

Mediana, bisectriz, altura, y mediatriz del triángulo

Ahora revisaremos algunos conceptos importantes relacionados a un triángulo.

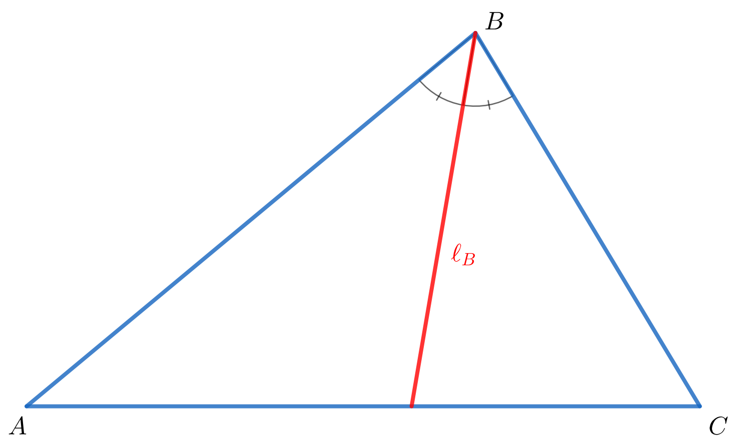
DEFINICIÓN 31 (Mediana de un triángulo). *Una **mediana** de un triángulo es un segmento que une un vértice con el punto medio del lado opuesto. Las medianas del* $\triangle ABC$ *que contienen los vértices* A*,* B *y* C *se las denota* m_a*,* m_b *y* m_c*, respectivamente.*

Con la definición presentada se deduce que todo triángulo tiene tres medianas. En el siguiente gráfico se ilustra la mediana del triángulo $\triangle ABC$ que pasa por B.



DEFINICIÓN 32 (Bisectriz de un triángulo). *Una **bisectriz** de un triángulo es un segmento que une un vértice con el punto de intersección de la bisectriz del ángulo correspondiente con lado opuesto. Las bisectrices del* $\triangle ABC$ *que contienen los vértices* A*,* B *y* C *se las denota* l_a*,* l_b *y* l_c*, respectivamente.*

Con la definición presentada se deduce que todo triángulo tiene tres bisectrices. En el siguiente dibujo se ilustra la bisectriz de $\angle B$ triángulo en $\triangle ABC$.



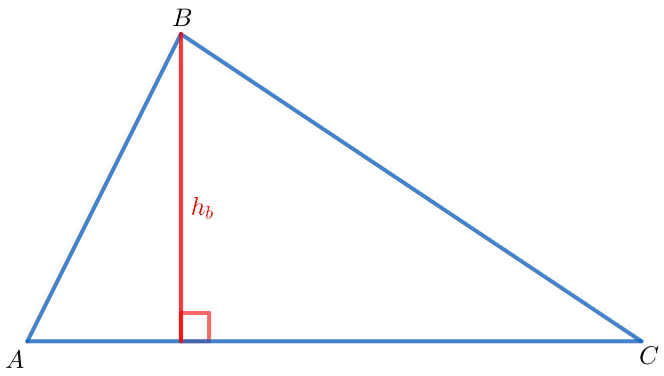
DEFINICIÓN 33 (Altura de un triángulo). *Una **altura** de un triángulo es un segmento que:*

1. *Está contenido en la perpendicular a la recta que contiene un lado del triángulo y que pasa por el vértice del triángulo opuesto al lado.*

2. *Sus extremos son el vértice del triángulo y el punto de intersección entre la perpendicular y la recta que contiene el lado opuesto al vértice.*

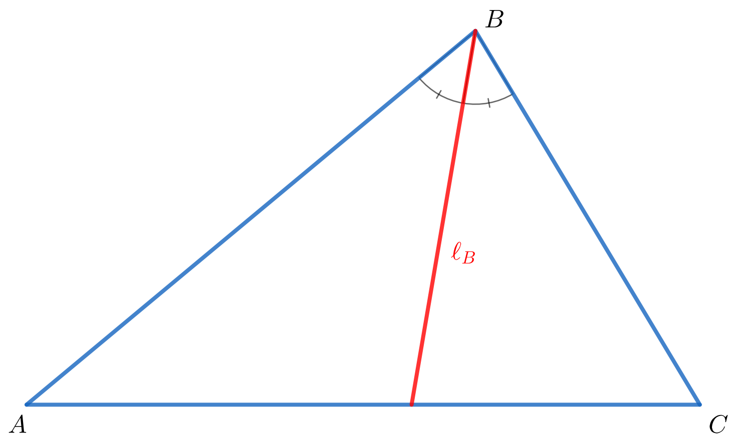
Las alturas del $\triangle ABC$ *que contienen los vértices* A*,* B *y* C *se las denota* h_a*,* h_b *y* h_c*, respectivamente.*

Con la definición presentada se deduce que todo triángulo tiene tres alturas. En el siguiente dibujo se ilustra la altura de $\angle B$ triángulo en $\triangle ABC$.



DEFINICIÓN 34 (Mediatriz de un triángulo). *Una **mediatriz** de un triángulo es cualquiera de las mediatrices de los lados del triángulo.*

Dada la definición anterior se deduce que todo triángulo tiene tres mediatrices. En el siguiente dibujo se ilustra la mediatriz del lado b del triángulo $\triangle ABC$.



Teniendo en cuenta las definiciones que acabamos de presentar y la definición de triángulo isósceles, el siguiente teorema relaciona a todas ellas.

TEOREMA 28: *Para todo triángulo $\triangle ABC$, las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. $a = c$ *(El triángulo es isósceles)*

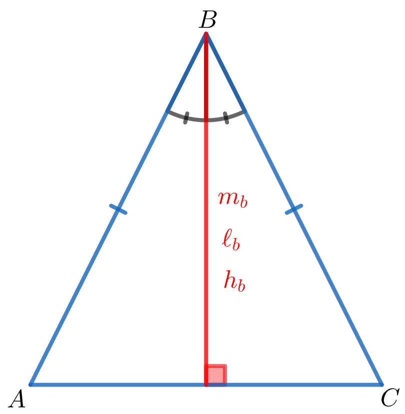
2. $\angle A = \angle C$

3. $m_a = m_c$

4. $l_a = l_c$

5. $h_a = h_c$

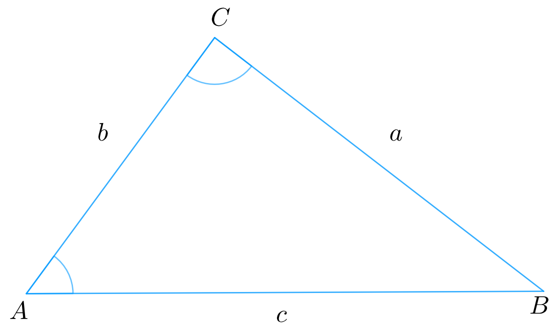
6. *La mediana, bisectriz y altura en B del triángulo coinciden y además están contenidas en la mediatriz de la base del triángulo, es decir, la mediatriz de b.*



3.2.10. Desigualdades

TEOREMA 29 (Desigualdad Escaleno)**:** *Dado el triángulo $\triangle ABC$, se tiene que $AB \geq BC$ si y solo si $\mathrm{m}\,\angle ACB > \mathrm{m}\,\angle BAC$.*

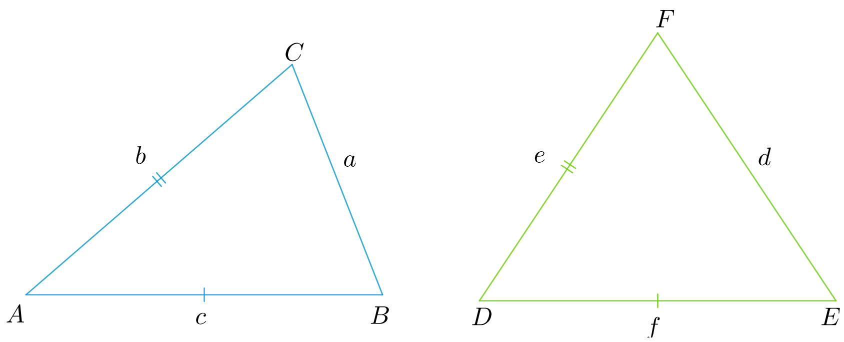
En el siguiente dibujo se ilustra que el lado de mayor longitud, se opone al ángulo de mayor medida angular:



TEOREMA 30 (Desigualdad Triangular)**:** *Si A, B y C son tres puntos no colineales, entonces $AC < AB + BC$.*

TEOREMA 31 (Teorema de la charnela)**:** *Si $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ son triángulos tales que $AB = DE$, $AC = DF$, y $\mathrm{m}\,\angle BAC < \mathrm{m}\,\angle EDF$, entonces $BC < EF$.*

A continuación se presenta un gráfico que ilustra este teorema:



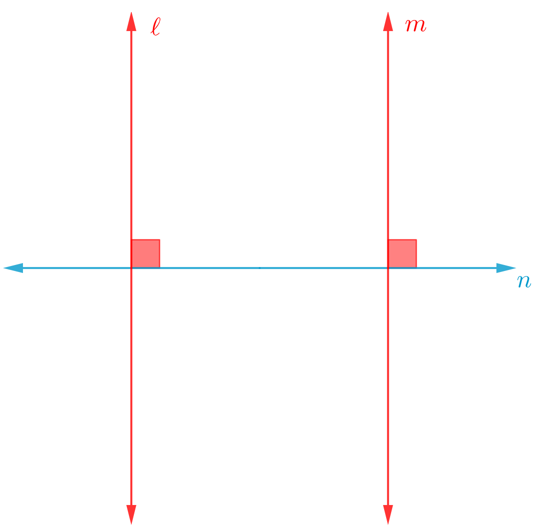
El lado a del triángulo $\triangle ABC$ tiene mayor longitud que el lado b del triángulo $\triangle DEF$.

Teorema 32 (Teorema Recíproco de la charnela)**:** *Si $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ son triángulos tales que $AB = DE$, $AC = DF$, y $BC < EF$, entonces* $\mathrm{m}\,\angle BAC < \mathrm{m}\,\angle EDF$.

3.2.11. Paralelismo

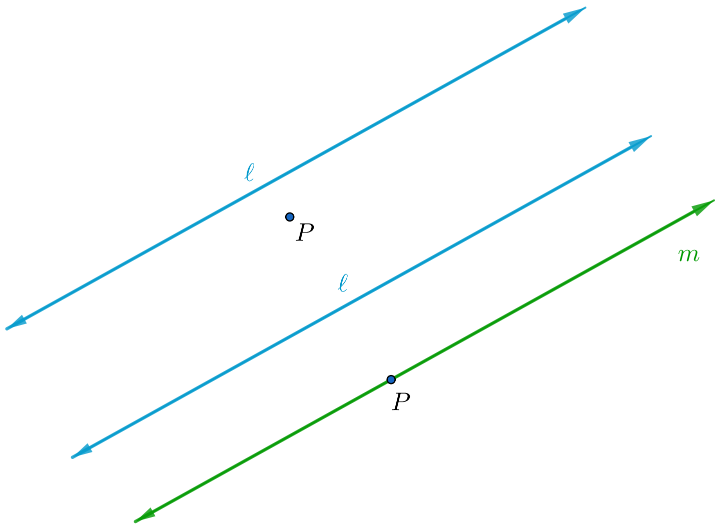
Teorema 33 (Rectas perpendiculares a una misma recta)**:** *Dadas tres rectas si dos de ellas son perpendiculares a la tercera, entonces las dos rectas son paralelas.*

Vamos a esclarecer el teorema con el siguiente gráfico: Sean m, ℓ y n tres rectas tales que $\ell \perp n$ y $m \perp n$, entonces $\ell \parallel m$.



Teorema 34 (Existencia de una recta paralela)**:** *Dados una recta y un punto cualquiera que no está en la recta, al menos existe una recta que pasa a través del punto dado y que es paralela a la recta dada.*

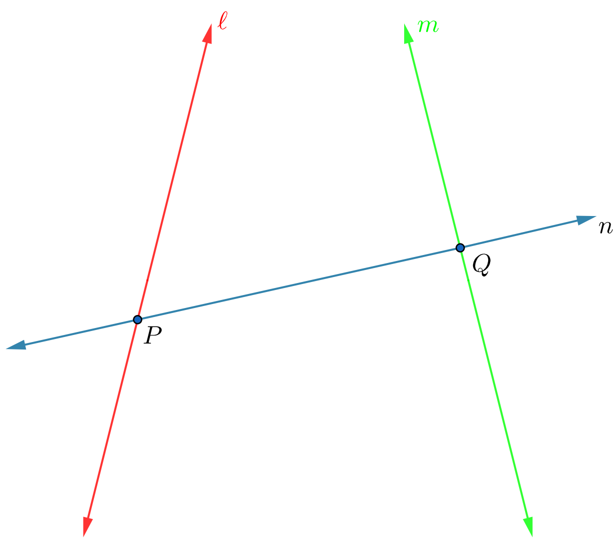
Ilustremos esto con el siguiente dibujo, dada la recta ℓ y punto P que no pertenece a la recta ℓ:



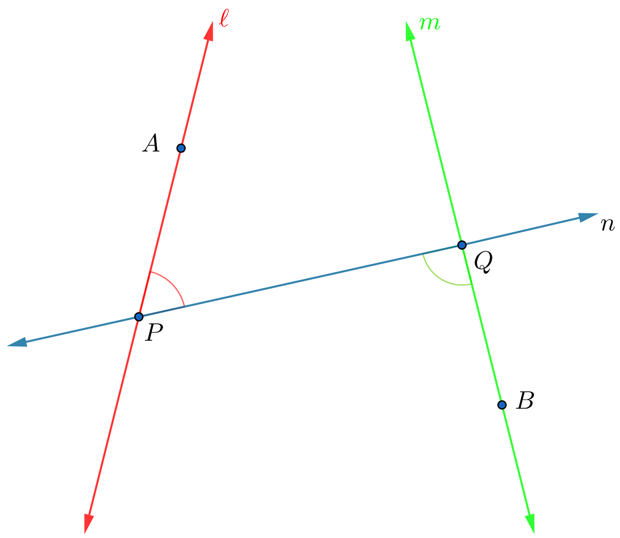
El teorema nos dice que existe una recta m que pasa por P y es paralela a ℓ:

DEFINICIÓN 35 (Recta transversal o secante). *Dadas las rectas ℓ, m y n, si n interseca a ℓ y m en dos puntos diferentes, digamos en P y Q, respectivamente, se dice que n es una **recta transversal** a ℓ y m.*

El gráfico a continuación, representa la definición anterior:

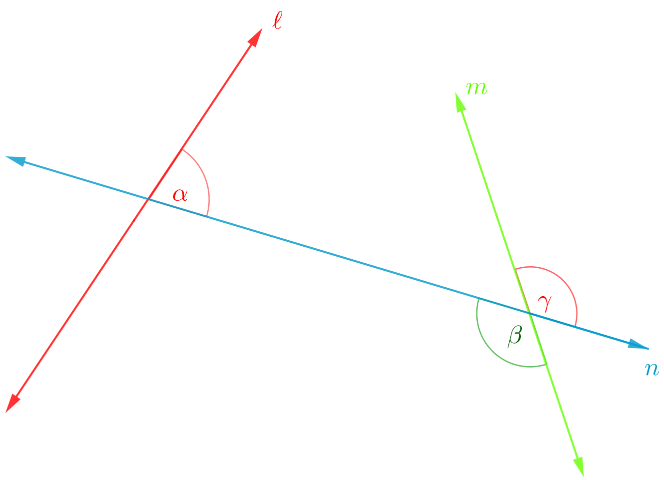


DEFINICIÓN 36 (Ángulos alternos internos). *Sea n una recta transversal a las rectas ℓ y m, que las interseca en P y Q respectivamente. Sean además, A y B puntos de ℓ y m, respectivamente, tales que están en lados opuestos de n. Los ángulos $\angle APQ$ y $\angle PQB$ son llamados ángulos alternos internos.*



Notemos que si $A{-}P{-}C$ y $B{-}Q{-}D$, los ángulos $\angle CPQ$ y $\angle DQP$ también son ángulos alternos internos.

DEFINICIÓN 37 (Ángulos correspondientes). *Sea n una recta transversal a las rectas ℓ y m. Si α, β y γ son tres ángulos tales que α y β son ángulos alternos, y β y γ forman un par vertical, entonces los ángulos α y γ se denominan ángulos correspondientes.*



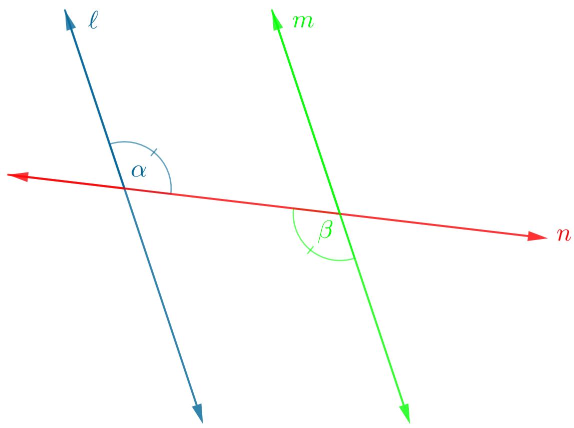
TEOREMA 35 (Congruencia de ángulos alternos internos por congruencia de ángulos correspondientes)**:** *Dadas dos rectas y una transversal, si un par de ángulos correspondientes son congruentes, entonces hay un par de ángulos alternos internos que son congruentes. Mediante un gráfico ilustraremos lo que nos dice el teorema: Sean ℓ y m dos rectas intersecadas por una transversal n. Sean, además α y β un par de ángulos correspondientes, entonces existen dos ángulos γ y δ alternos internos tales que $\gamma \cong \delta$.*

Condiciones suficientes

Teorema 36 (Rectas paralelas por congruencia de ángulos alternos internos)**:** *Una condición suficiente para que dos rectas sean paralelas es que los ángulos alternos internos determinados por una transversal a las rectas sean congruentes. [4, p. 233]*

Dicho de otra manera, dadas dos rectas y una transversal, si un par de ángulos alternos internos son congruentes, entonces las rectas son paralelas.

A continuación ilustraremos el teorema a través de un gráfico: dada una recta n, transversal a ℓ y m, si un par de ángulos alternos internos son congruentes, digamos α y β, entonces $\ell \parallel m$.

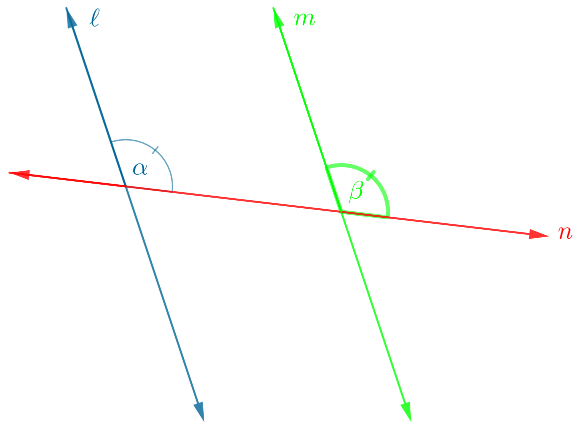


Teorema 37 (Rectas paralelas por congruencia de ángulos correspondientes)**:** *Una condición suficiente para que dos rectas sean paralelas es que los ángulos correspondientes determinados por una transversal a las rectas sean congruentes.*

En otras palabras:

Dadas dos rectas y una transversal, si un par de ángulos correspondientes son congruentes, entonces las rectas son paralelas.

Así, dada una recta n trasversal a las rectas l y m, y si los ángulos α y β son ángulos correspondientes congruentes, entonces $\ell \parallel m$.



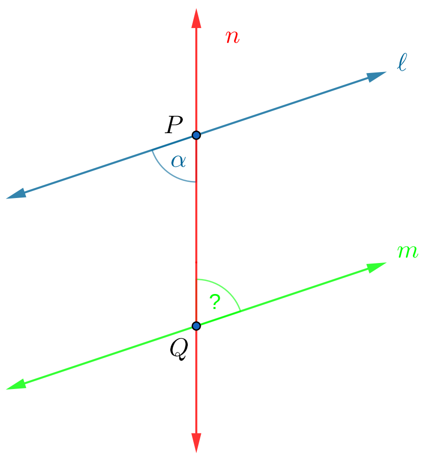
Condiciones necesarias

Establecer la unicidad de la recta paralela a una dada, se lo hará enunciándola como un axioma, este axioma es conocido como **"quinto postulado de la geometría euclídea"**.

Axioma 10 (Postulado de las rectas paralelas)**:** *Dada una recta y un punto externo a ella, existe una única recta que pasa por dicho punto y es paralela a la recta dada.*

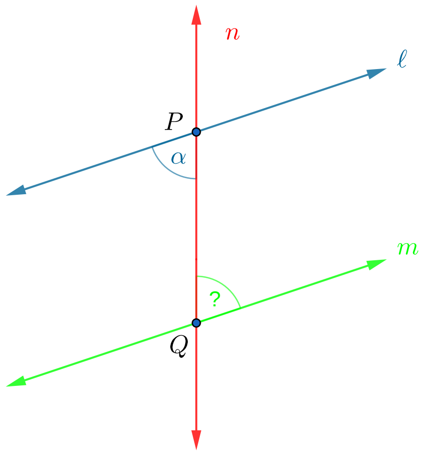
Teorema 38 (Ángulos alternos internos entre paralelas)**:** *Una condición necesaria para que dos rectas sean paralelas es que todo par de ángulos alternos internos determinados por una transversal a las rectas sean congruentes. Dicho de otro modo, dadas dos rectas y una transversal a ellas, si las rectas son paralelas, entonces los ángulos alternos internos son congruentes.*

A continuación ilustramos el teorema anterior, donde las rectas paralelas ℓ y m y n una recta transversal a ella, tienen como intersecciones a los puntos P y Q respectivamente. Los ángulos alternos internos α y β son congruentes.



TEOREMA 39 (Ángulos correspondientes entre paralelas)**:** *Una condición necesaria para que dos rectas sean paralelas es que todo par de ángulos alternos internos determinados por una transversal a las rectas sean congruentes. Dicho de otro modo, dadas dos rectas y una transversal a ellas, si las rectas son paralelas, entonces los ángulos alternos internos son congruentes.*

A continuación ilustramos el teorema anterior, donde las rectas paralelas ℓ y m y n una recta transversal a ella, tienen como intersecciones a los puntos P y Q respectivamente. Los ángulos alternos internos α y β son correspondientes.



A continuación, se presentan algunos teoremas que se deducen a partir del postulado de las paralelas.

TEOREMA 40 (Suma de las medidas de los ángulos de un triángulo)**:** *En todo triángulo, la suma de las medidas de sus ángulos es* 180*. De manera más precisa, dado el triángulo* $\triangle ABC$*, se tiene que:*

$$\mathrm{m}\angle A + \mathrm{m}\angle B + \mathrm{m}\angle C = 180$$

A partir del teorema anterior, se deduce un resultado para triángulos rectángulos, que nos dice que la suma de las medidas de sus ángulos agudos es 90.

TEOREMA 41 (Medida de un ángulo externo de un triángulo)**:** *En todo triángulo, la medida de un ángulo externo es la suma de las medidas de los ángulos internos no adyacentes al ángulo externo. En otras palabras, dado un triángulo* $\triangle ABC$ *y* D *un punto en la recta* $\overleftrightarrow{AC}$ *tal que* $D-A-C$*, entonces:*

$$\mathrm{m}\angle DAB = \mathrm{m}\angle B + \mathrm{m}\angle C$$

Los siguientes son teoremas que se deducen con el postulado de las paralelas y teoremas de congruencia de triángulos.

TEOREMA 42 (Segmentos entre paralelas)**:** *Dadas las rectas m, n, s y t, tales que $m \parallel n$, $s \parallel t$. Sean A y B los puntos de intersección de m con s y t, respectivamente; y sean C y D los puntos de intersección de n con s y t, respectivamente. Entonces $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ y $\overline{AC} \cong \overline{BD}$.*

TEOREMA 43 (Segmento de los puntos medios)**:** *El segmento cuyos extremos son los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado y su longitud es la mitad de la longitud de este lado. En otras palabras, dado el triángulo $\triangle ABC$, si D y E son los puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$, respectivamente, entonces: $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$ y $DE = \dfrac{AB}{2}$.*

TEOREMA 44 (Un recíproco del teorema del segmentos de los puntos medios.)**:** *Una recta que biseca uno de los lados de un triángulo y es paralela a otro lado biseca el tercer lado. Es decir, dado el triángulo $\triangle ABC$, si la recta m pasa por el punto medio D del lado $\overline{AC}$ y $m \parallel \overline{AB}$, entonces E es el punto medio de $\overline{BC}$, donde E es la intersección de m y BC .*

3.2.12. Semejanza de triángulos

DEFINICIÓN 38 (Segmentos proporcionales). *Dos sucesiones de segmentos*

$$(\overline{A_1B_1}, \overline{A_2B_2}, \ldots, \overline{A_nB_n}) \text{ y } (\overline{C_1D_1}, \overline{C_2D_2}, \ldots, \overline{C_nD_n})$$

*se dicen **proporcionales** si las sucesiones respectivas de sus longitudes son proporcionales; es decir, si*

$$A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n \sim C_1D_1, C_2D_2, \ldots, C_nD_n$$

TEOREMA 45 (Teorema fundamental de la proporcionalidad)**:** *Tres rectas paralelas con dos transversales comunes determinan segmentos proporcionales en las transversales. Dicho de otra forma, dadas tres rectas paralelas entre sí, ℓ, m y n, y dos rectas transversales a estas, s y t, de manera que s y t intersecan a ℓ, m y n en los puntos A, B, C y D, E y F, respectivamente. Si $A-B-C$ (por tanto, $D-E-F$), entonces*

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$$

En otras palabras, $(AB, BC) \sim (DE, EF)$.

A continuación enunciamos un teorema cuya demostración es básicamente una consecuencia inmediata del teorema anterior.

TEOREMA 46 (Teorema fundamental de la semejanza de triángulos)**:** *Si una recta paralela a un lado de un triángulo interseca en puntos diferentes a los otros dos lados, entonces determina sobre ellos segmentos proporcionales. En otras palabras, dado el triángulo* $\triangle ABC$*, sean* D *y* E *puntos tales que* $A-D-C$ *y* $B-E-C$*. Si* $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$ *, entonces:*

$$\frac{CD}{DA} = \frac{CE}{EB} \qquad\qquad \frac{AC}{DC} = \frac{BC}{EC}$$

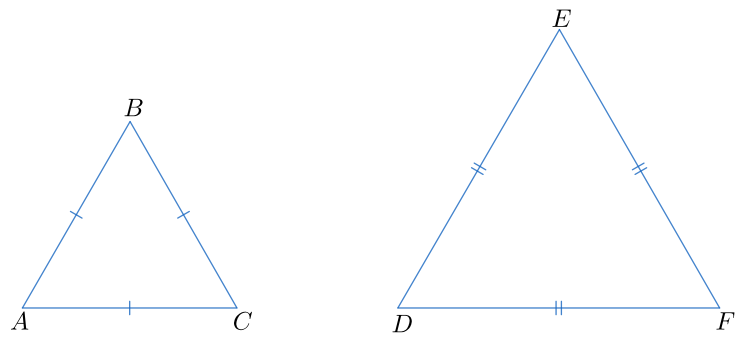
TEOREMA 47 (Recíproco del teorema fundamental de la semejanza de triángulos)**:** *Si una recta interseca a dos de los lados de un triángulo y determina segmentos proporcionales sobre ellos, entonces dicha recta es paralela al tercer lado del triángulo. En otras palabras, dado el triángulo* $\triangle ABC$*, sean* D *y* E *puntos tales que* $A-D-C$ *y* $B-E-C$ *y* $\dfrac{AC}{DC} = \dfrac{BC}{EC}$*, entonces* $\overleftrightarrow{DE} \parallel \overleftrightarrow{AB}$.

DEFINICIÓN 39 (Semejanza entre triángulos). *Dados dos triángulos* $\triangle ABC$ *y* $\triangle DEF$*, una correspondencia* $ABC \longleftrightarrow DEF$ *es una* ***semejanza*** *si los ángulos correspondientes son congruentes y los lados correspondientes son proporcionales. En este caso, se dirá que los triángulos son semejantes y se escribirá* $\triangle ABC \sim \triangle DEF$*. Dicho de otra manera, si* $\triangle ABC \sim \triangle DEF$*, entonces:*

1. $\angle A = \angle D$
2. $\angle B = \angle E$
3. $\angle C = \angle F$
4. $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF} = \dfrac{BC}{EF}$

TEOREMA 48: *Si* $\triangle ABC$ *y* $\triangle DEF$ *son equiláteros, entonces* $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

El siguiente dibujo ilustra el teorema anterior



El siguiente teorema, establece que la semejanza de triángulos es una relación de equivalencia.

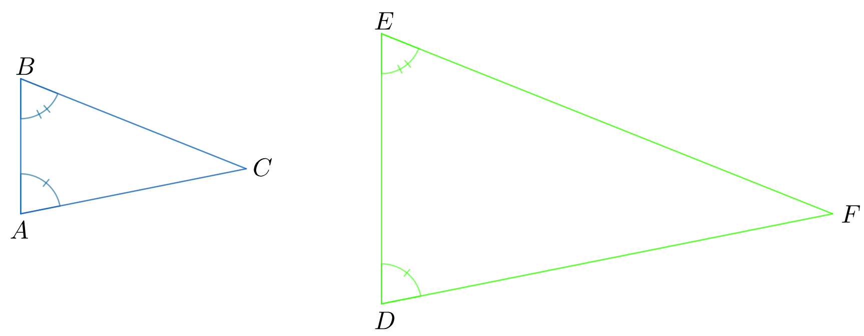
Teorema 49 (Semejanza de triángulos es una relación de equivalencia)**:** *La semejanza entre triángulos es una relación* ***reflexiva****,* ***simétrica*** *y* ***transitiva****. Es decir:*

1. ***Reflexiva****: para todo triángulo $\triangle ABC$, se tiene que $\triangle ABC \sim \triangle ABC$.*
2. ***Simétrica****: si $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, entonces $\triangle DEF \sim \triangle ABC$.*
3. ***Transitiva****: si $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ y $\triangle DEF \sim \triangle GHI$, entonces $\triangle ABC \sim \triangle GHI$.*

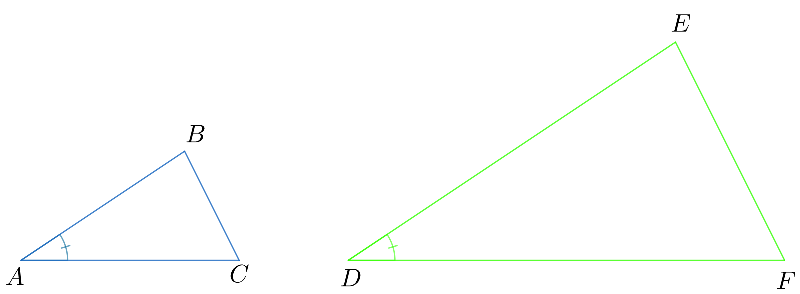
Esta relación de semejanza entre triángulos se caracteriza de la siguiente manera:

Teorema 50 (Condiciones para la semejanza de triángulos)**:** *Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

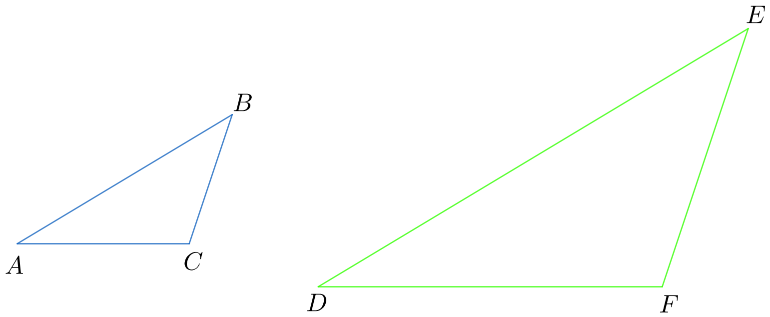
1. *$\triangle ABC \sim \triangle DEF$*
2. ***Ángulo-Ángulo (AA):*** *dos ángulos de un triángulo $\triangle ABC$ son congruentes a los dos ángulos correspondientes del triángulo $\triangle DEF$.*



3. ***Lado-Ángulo-Lado (LAL):*** *un ángulo del triángulo $\triangle ABC$ es congruente al ángulo del triángulo $\triangle DEF$ y los lados que forman al ángulo del primero son proporcionales a los lados correspondientes del otro triángulo.*



4. ***Lado-Lado-Lado (LLL):*** *tres lados del triángulo $\triangle ABC$ son proporcionales a los tres lados correspondientes del triángulo $\triangle DEF$.*



TEOREMA 51 (Congruencia preserva la semejanza)**:** *Si dos triángulos son semejantes y uno de ellos es congruente a un tercer triángulo, el otro triángulo y el tercero también son semejantes. Dicho de otra manera, si $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ y $\triangle ABC \cong \triangle GHI$, entonces $\triangle ABC \sim \triangle GHI$.*

TEOREMA 52 (Altura correspondiente a la hipotenusa en un triángulo rectángulo.)**:** *Dado el triángulo rectángulo $\triangle ABC$ donde C es el vértice del ángulo recto, sea $\overline{CD}$ la altura del triángulo correspondiente a la hipotenusa. Entonces,*

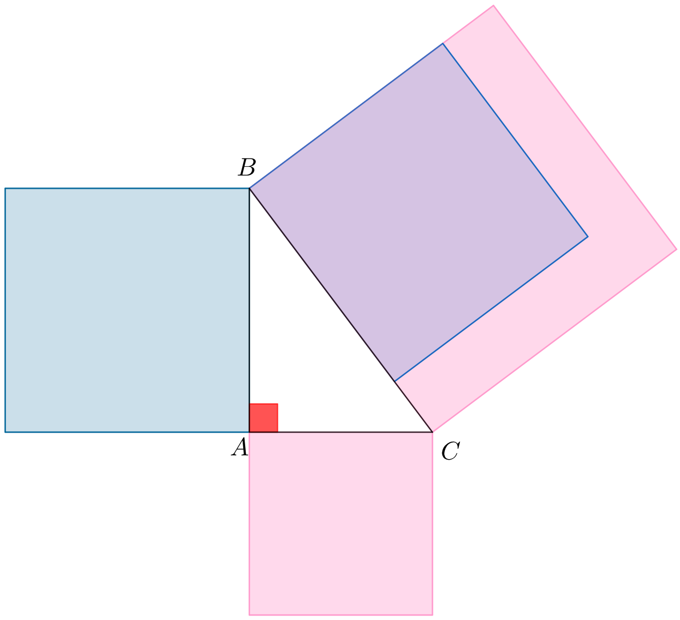
1. $\triangle ACD \sim \triangle CBD$
2. $\triangle ACD \sim \triangle ABC$
3. $\triangle BCD \sim \triangle BAC$

Teorema de Pitágoras

TEOREMA 53 (Teorema de Pitágoras)**:** *En cualquier triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos. En otras palabras, dado el triángulo rectángulo $\triangle ABC$, donde $\angle C$ es el ángulo recto, se tiene que:*

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$$

El siguiente dibujo ilustra el teorema anterior



A continuación, se presenta el recíproco del teorema anterior.

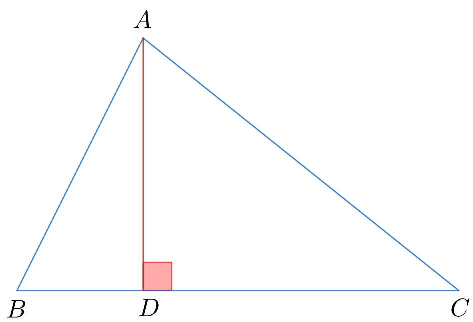
TEOREMA 54 (Recíproco del Teorema de Pitágoras)**:** *Dado un triángulo tal que el cuadrado de la longitud de uno de sus lados es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados, entonces el triángulo es rectángulo y el ángulo recto es el que se opone al lado mayor. De manera más precisa, dado el triángulo $\triangle ABC$, si*

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$$

entonces $\angle C$ es recto.

DEFINICIÓN 40. *Dado un triángulo, una* ***base del triángulo****, y su correspondiente* ***altura****, son un lado del triángulo y su altura correspondiente. Dicho de otra manera, dado el triangulo $\triangle ABC$, si $\overline{AD}$ es una altura del triángulo, entonces el lado $\overline{BC}$ es una base del triángulo y $\overline{AD}$ es la altura correspondiente.*

El siguiente dibujo ilustra la definición anterior



TEOREMA 55 (La constante base por altura)**:** *En cualquier triángulo, el producto de una base del triángulo y la altura correspondiente es independiente de la elección de la base. Dicho de otra forma, dado el triángulo $\triangle ABC$, sean $\overline{AD}$ la altura correspondiente al lado $\overline{BC}$, $\overline{BE}$ la altura correspondiente al lado $\overline{AC}$ y $\overline{CF}$ la altura correspondiente al lado $\overline{AB}$. Las siguientes proposiciones son verdaderas:*

$$BC \cdot AD = AC \cdot BE = AB \cdot CF$$

En otras palabras, el producto de una base y su altura correspondiente es constante.

TEOREMA 56 (Las alturas en triángulos semejantes)**:** *Para triángulos semejantes, la razón entre dos alturas correspondientes es igual a la razón entre dos lados correspondientes cualesquiera. De manera más precisa, si $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, si h y k son las alturas correspondientes a $\overline{BC}$ y $\overline{EF}$, respectivamente, entonces*

$$\frac{h}{k} = \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$$

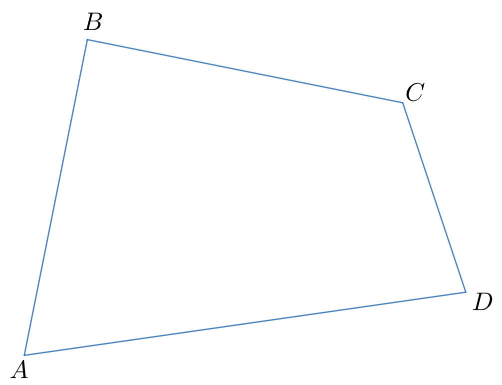
3.2.13. Cuadriláteros

DEFINICIÓN 41 (Cuadrilátero). *Dados los puntos A, B, C y D, tales que:*

1. *Tres cualesquiera de ellos no son colineales;*
2. *los segmentos se intersecan únicamente en sus extremos,*

*se denomina **cuadrilátero de vértices** A, B, C y D a la unión de los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$, a los que se les denomina **lados del cuadrilátero**. Los ángulos $\angle DAB$, $\angle ABC$, $\angle BCD$ y $\angle CDA$ son los **ángulos del cuadrilátero**.*

El siguiente dibujo representa el concepto de cuadrilátero:



Se utilizará la notación $\square ABCD$ para representar el cuadrilátero de vértices A, B, C y D.

Además, nos referiremos los elementos del cuadrilátero como sigue:

1. Dos **lados** son **opuestos** si no se intersecan.
2. Dos **lados** son **consecutivos** si tienen un extremo en común.
3. Dos **ángulos** son **opuestos** si no tienen un lado del cuadrilátero en común.
4. Dos **ángulos** son **consecutivos** si tienen un lado del cuadrilátero.
5. Dos **vértices** son **consecutivos** si son los vértices de dos ángulos consecutivos.
6. Una **diagonal** es un segmento cuyos extremos son dos vértices del cuadrilátero que no son consecutivos.

TEOREMA 57 (Lados opuestos del cuadrilátero)**:** *Los lados opuestos de un cuadrilátero no se intersecan. En otras palabras, dado el cuadrilátero $\square ABCD$, los segmentos AB y CD no se intersecan, y tampoco se intersecan los segmentos BC y DA.*

DEFINICIÓN 42 (Cuadrilátero convexo). *Un cuadrilátero es **convexo** si los extremos de cada uno de sus lados están en el mismo semiplano de la recta que contiene al lado opuesto. Dicho de otra forma, el cuadrilátero $\square ABCD$ es convexo si:*

1. *Los puntos A y B están del mismo lado de la recta $\overleftrightarrow{CD}$*
2. *Los puntos B y C están del mismo lado de la recta $\overleftrightarrow{AD}$*
3. *Los puntos C y D están del mismo lado de la recta $\overleftrightarrow{AB}$*
4. *Los puntos D y A están del mismo lado de la recta $\overleftrightarrow{BC}$*

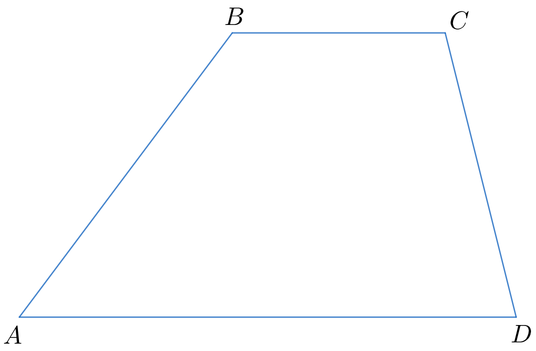
TEOREMA 58 (Las diagonales de un cuadrilátero convexo)**:** *Las diagonales de un cuadrilátero convexo siempre se intersecan. Dicho de otra forma, dado el cuadrilátero convexo $\square ABCD$, los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ se intersecan.*

TEOREMA 59 (La suma de las medidas de los ángulos de un cuadrilátero convexo)**:** *La suma de las medidas de los ángulos de un cuadrilátero convexo es igual a 360. Dicho de otra manera, dado el cuadrilátero convexo $\square ABCD$, se tiene que:*

$$\mathrm{m}\angle A + \mathrm{m}\angle B + \mathrm{m}\angle C + \mathrm{m}\angle D = 360$$

DEFINICIÓN 43 (Trapecio). *Un **trapecio** es un cuadrilátero que tiene dos lados paralelos. Los lados opuestos de un cuadrilátero son los que no se intersecan; por tanto, se tiene que: Un trapecio es un cuadrilátero que tiene un par de lados opuestos paralelos.*

El siguiente dibujo representa la definición de trapecio:

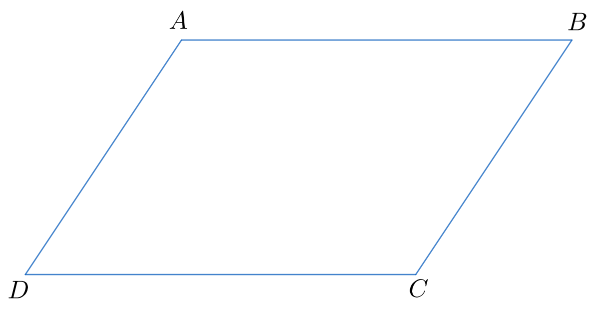


Con respecto a los trapecios mencionados, para evitar confusión cada vez que se indique que un cuadrilátero sea un trapecio, se especificará cuál de los pares de lados son paralelos.

TEOREMA 60: *Todo trapecio es un cuadrilátero convexo. En otras palabras, dado el trapecio $\square ABCD$, donde $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, el cuadrilátero $\square ABCD$ es convexo.*

DEFINICIÓN 44 (Paralelogramo). *Un **paralelogramo** es un trapecio en el cual los dos pares de lados opuestos son paralelos. Es decir que: Todo paralelogramo es un trapecio y, por tanto, es un cuadrilátero convexo.*

El siguiente dibujo representa la definición de paralelogramo:



TEOREMA 61 (Lados opuestos de un paralelogramo)**:** *Dado un paralelogramo, dos lados opuestos cualesquiera son congruentes. En otras palabras, dado el paralelogramo $\square ABCD$, se tiene que $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ y $\overline{BC} \cong \overline{DA}$.*

DEFINICIÓN 45 (Trapecio Isósceles). *Un **trapecio isósceles** es uno en el cual un par de lados opuestos son congruentes.*

TEOREMA 62 (Condiciones necesarias para ser un paralelogramo)**:** *En un paralelogramo:*

1. *Cada diagonal "divide" o "descompone" el paralelogramo en dos triángulos.*
2. *Dos ángulos opuestos cualesquiera son congruentes.*
3. *Dos ángulos consecutivos son suplementarios.*
4. *Las diagonales se bisecan.*

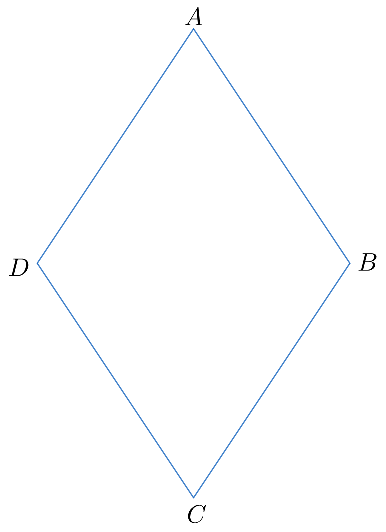
TEOREMA 63 (Condiciones suficientes para ser un paralelogramo)**:** *Un **cuadrilátero convexo** es un paralelogramo si cualesquiera de las siguientes proposiciones es verdadera:*

1. *Los dos pares de lados opuestos son congruentes.*
2. *Un par de lados opuestos son paralelos y congruentes.*
3. *Las diagonales se bisecan.*

DEFINICIÓN 46 (Rombo). *Un paralelogramo es un **rombo** si todos sus lados son congruentes entre sí. Dicho de otra forma, el paralelogramo $\square ABCD$ es un rombo si:*

1. $\overline{AB} \cong \overline{BC}$,
2. $\overline{BC} \cong \overline{CD}$,
3. $\overline{CD} \cong \overline{DA}$ *y*
4. $\overline{DA} \cong \overline{AB}$

El siguiente dibujo representa la definición de rombo:

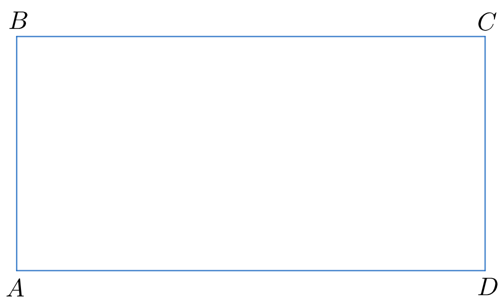


TEOREMA 64 (Caracterización de un rombo)**:** *Un cuadrilátero convexo es un rombo si y solo si sus diagonales son perpendiculares y se bisecan.*

DEFINICIÓN 47 (Rectángulo). *Un **rectángulo** es un paralelogramo cuyos cuatro ángulos son rectos. Dicho de otra forma, un paralelogramo $\square ABCD$ es un rectángulo si:*

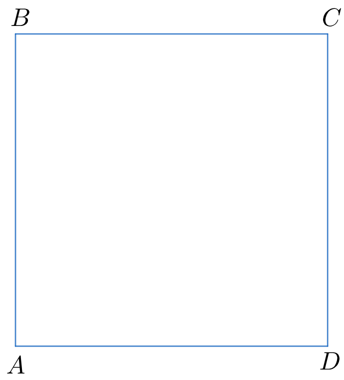
1. $\mathrm{m}\,\angle A = 90$
2. $\mathrm{m}\,\angle B = 90$
3. $\mathrm{m}\,\angle C = 90$
4. $\mathrm{m}\,\angle D = 90$

El siguiente dibujo representa la definición de rectángulo:



DEFINICIÓN 48 (Cuadrado). *Un cuadrado es un rectángulo cuyos lados son todos congruentes entre sí. De manera más precisa, un cuadrado es un paralelogramo cuyos cuatro ángulos son rectos y sus cuatro lados son congruentes entre sí.*

El siguiente dibujo representa la definición de cuadrado:



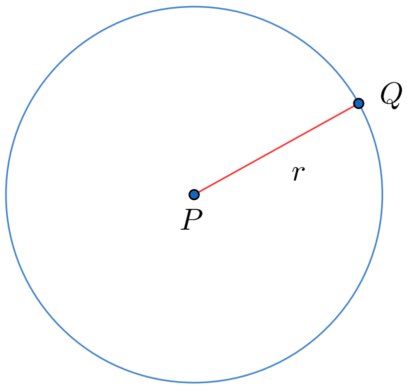
Debe estar claro que todo cuadrado es un rectángulo y es un rombo.

3.2.14. Círculos

Circunferencia y círculo

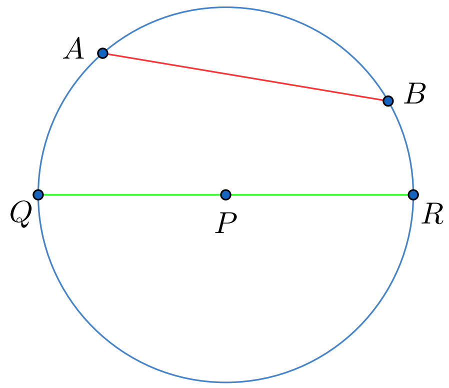
DEFINICIÓN 49 (Circunferencia). *Dados un punto P y r un número real positivo, la* ***circunferencia*** *con centro en P y de radio r, es el conjunto de todos los puntos Q del plano tales que su distancia a P es igual a r; es decir, tales que $PQ = r$. En otras palabras, si C es la circunferencia con centro en P y radio r, entonces:*

$$C = \{Q : PQ = r\}.$$



DEFINICIÓN 50 (Radio). *Un segmento cuyos extremos sean el centro de la circunferencia y un punto en ella se denomina* ***radio*** *de la circunferencia.*

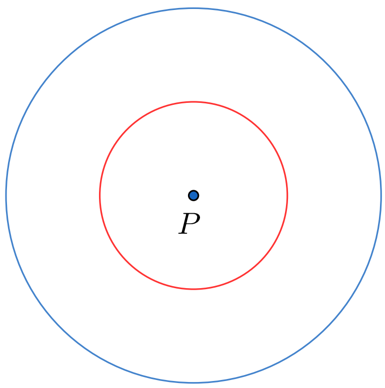
DEFINICIÓN 51 (Cuerda). *Dada una circunferencia, una* ***cuerda*** *de la circunferencia es cualquier segmento cuyos extremos sean dos puntos de la misma. Una cuerda se denomina diámetro de la circunferencia si el centro de la circunferencia está en esta cuerda. De* *manera más precisa, dada una circunferencia de centro P, si A y B son dos de sus puntos, el segmento $\overline{AB}$ es una cuerda de la circunferencia. El segmento $\overline{QR}$ es un diámetro si Q y R son puntos de la circunferencia y $P \in \overline{QR}$.*



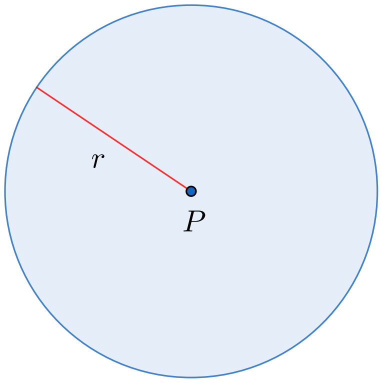
TEOREMA 65: *Dada una circunferencia, la longitud de cualquier diámetro es dos veces el radio de la circunferencia.*

Dicho de otro modo, dada una circunferencia de centro P y radio r, la longitud de cualquier diámetro es $2r$.

DEFINICIÓN 52 (Circunferencias concéntricas). *Dos o más circunferencias con el mismo centro se dicen circunferencias concéntricas.*



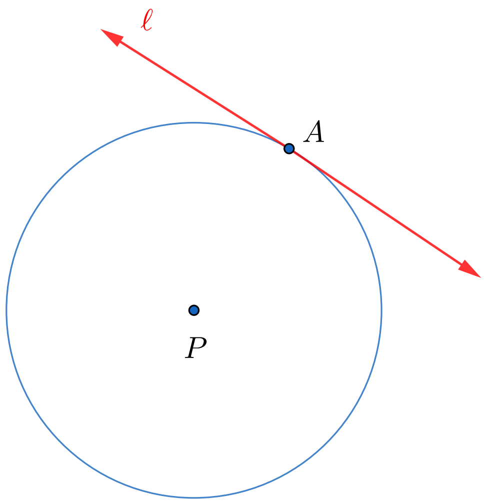
DEFINICIÓN 53 (Círculo). *Dada una circunferencia de centro P y radio r, el interior de la circunferencia es el conjunto de todos los puntos del plano cuya distancia al centro es menor que r. El interior de una circunferencia de centro P y radio r también se denomina* ***círculo*** *de centro P y radio r.*



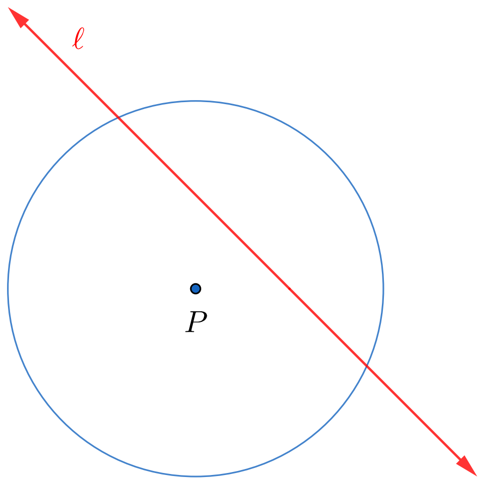
A su vez, definimos al exterior de la circunferencia de centro P y radio r como el conjunto de todos los puntos cuya distancia a P es mayor que r.

Rectas tangentes a la circunferencia

DEFINICIÓN 54 (Tangente). *Dada una circunferencia, una recta ℓ se denomina* ***tangente*** *a la circunferencia si existe un único punto A que está en la recta y en la circunferencia. El punto A se denomina punto de tangencia o de contacto.*



DEFINICIÓN 55 (Recta Secante). *Dada una circunferencia, una recta ℓ que interseca a la circunferencia en más de un punto se dice* ***recta secante*** *a la circunferencia.*



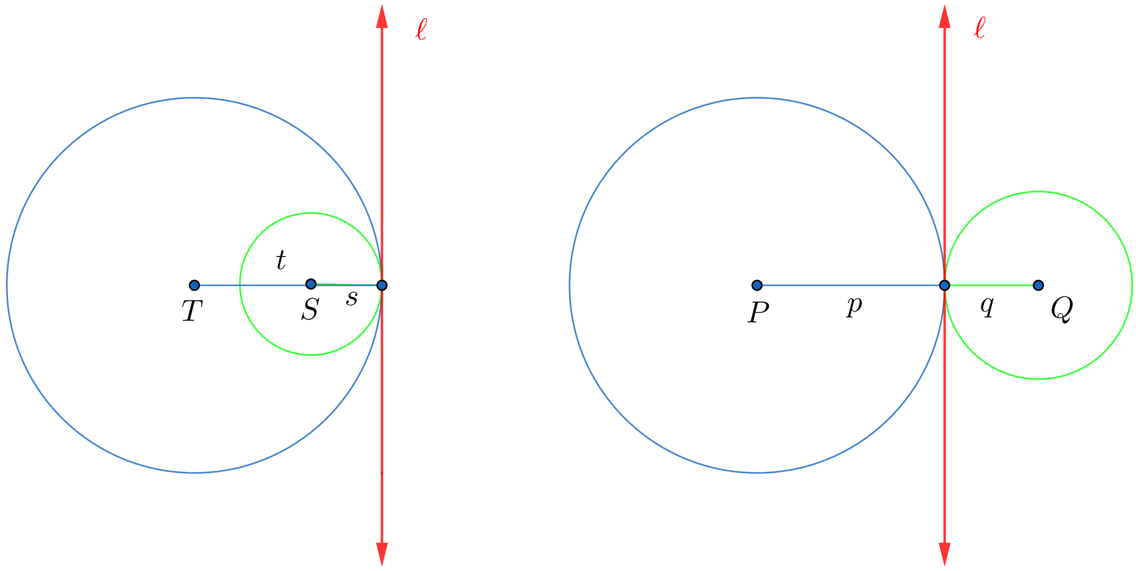
TEOREMA 66: *Dada una circunferencia y un punto en ella, existe una recta tangente a la circunferencia cuyo punto de tangencia es el punto dado de la circunferencia.*

En otras palabras, dada una circunferencia de centro P y radio r, si Q es un punto de la circunferencia, entonces una recta ℓ perpendicular al $\overline{PQ}$ es tangente a la circunferencia y Q es el punto de tangencia o contacto.

TEOREMA 67: *Una recta que es tangente a una circunferencia es perpendicular a la recta que contiene el radio de la circunferencia donde uno de sus extremos es el punto de tangencia. En otras palabras, dada la circunferencia C de centro P y radio r, si ℓ es una recta tangente a C y Q es el punto de tangencia, entonces $\overline{PQ} \in \ell$.*

TEOREMA 68: *Por cada punto de una circunferencia pasa una y solo una circunferencia.*

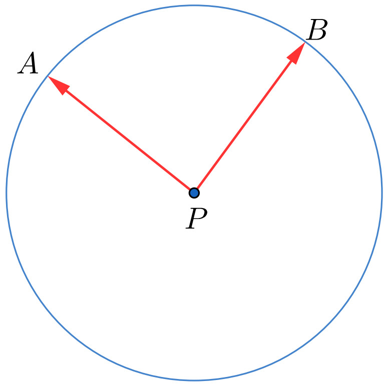
DEFINICIÓN 56 (Circunferencias tangentes). *Dos **circunferencias tangentes** son aquellas tangentes a una misma recta en un mismo punto. Si los centros de dos circunferencias tangentes están al mismo lado de su recta tangente común, se dice que las circunferencias son tangentes interiormente; por otro lado, si los centros están de lados opuestos de la tangente común, se dicen tangentes exteriormente.*



La circunferencia C_1 de centro S y radio s y la circunferencia C_2 de centro T y radio t son circunferencias tangentes interiormente y la circunferencia C_3 de centro P y radio p y la circunferencia C_3 de centro Q y radio q son circunferencias tangentes exteriormente.

TEOREMA 69: *Los centros y el punto de tangencia de dos circunferencias tangentes son colineales.*

DEFINICIÓN 57 (Ángulo Central). *Si el vértice de un ángulo está en el centro de un círculo, entonces el ángulo se llama* ***ángulo central****.*



TEOREMA 70:

1. *Dados dos puntos distintos, A y B, un punto P está en la bisectriz perpendicular de $\overline{AB}$ si y solo si P es equidistante de A y B.*

2. *Dado un ángulo* $\angle ABC$, $0 < \mathrm{m}\,\angle ABC < 180$, *un punto* P *esta en la bisectriz de* $\angle ABC$ *si y solo si* P *es equidistante de los rayos* $\overrightarrow{BA}$ *y* $\overrightarrow{BC}$.

TEOREMA 71: *Dados tres puntos no colineales, existe un único círculo que pasa por ellos. Tres puntos colineales distintos no pueden estar en el mismo círculo.*

TEOREMA 72: *Sean los segmentos* $\overline{AB}$ *y* $\overline{CD}$ *dos cuerdas de un círculo* C *de centro* P *y radio* r*. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

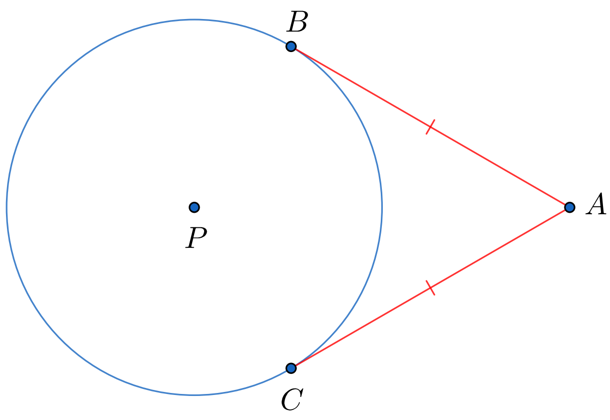
1. $\overline{AB} \cong \overline{CD}$
2. $\mathrm{m}\,\angle APB \cong \mathrm{m}\,\angle CPD$
3. $\widehat{AB} \cong \widehat{CD}$
4. $d\left(P, \overline{AB}\right) = d\left(P, \overline{CD}\right)$

TEOREMA 73: *Sean los segmentos* $\overline{AB}$ *y* $\overline{CD}$ *dos cuerdas de un círculo* C *de centro* P *y radio* r*. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. $\overline{AB} > \overline{CD}$
2. $\mathrm{m}\,\angle APB > \mathrm{m}\,\angle CPD$
3. $\widehat{AB} > \widehat{CD}$
4. *La distancia de* P *a* $\overline{AB}$ *es mas pequeña que la distancia de* P *a* $\overline{CD}$

TEOREMA 74: *Sea* C *un círculo con centro* P*, sea* $\overline{AB}$ *una cuerda de* C *que no es un diámetro y sea* $\overline{PQ}$ *un diámetro de* C*, entonces* $\overline{PQ}$ *es perpendicular a* $\overline{AB}$ *si y solo si* $\overline{PQ}$ *pasa a través del punto medio de* $\overline{AB}$.

TEOREMA 75: *Dos segmentos tangentes a un círculo desde un punto exterior común son congruentes.*



Teorema 76: *Dos círculos distintos se intersecan exactamente en un punto si y solo si son tangentes.*

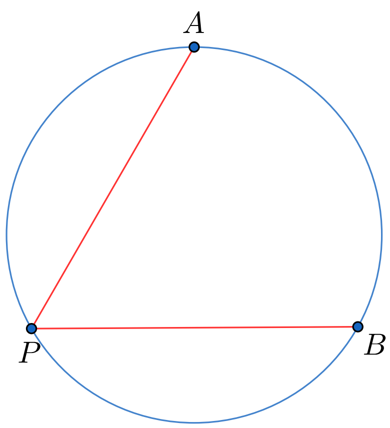
Teorema 77: *Sean C_1 de centro P_1 y radio r_1 y C_2 de centro P_2 y radio r_2 dos círculos distintos en el plano. Nombraremos a la distancia entre los centros P_1P_2 como d, entonces:*

1. *Los círculos no se intersecan si y solo si el máximo de $\{r_1, r_2, d\}$ es mayor que la suma de los otros dos valores.*

2. *Los círculos se intersecan en un punto si y solo si el máximo de $\{r_1, r_2, d\}$ es igual a la suma de los otros dos valores.*

3. *Los círculos se intersecan en dos puntos si y solo si el máximo de $\{r_1, r_2, d\}$ es menor a la suma de los otros dos valores.*

Definición 58 (Ángulo Inscrito). *Dados los puntos P, A y B en un círculo C, decimos que $\angle APB$ está **inscrito** en C.*



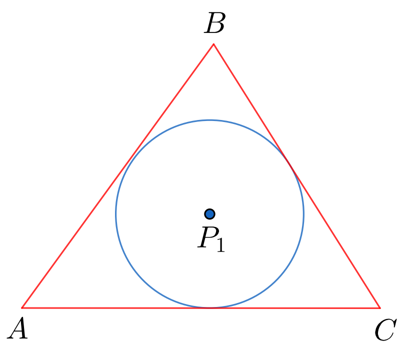
Teorema 78: *La medida de un ángulo inscrito es la mitad de la medida del arco que interseca. En otras palabras, es la mitad de la medida del ángulo central correspondiente al arco intersecado.*

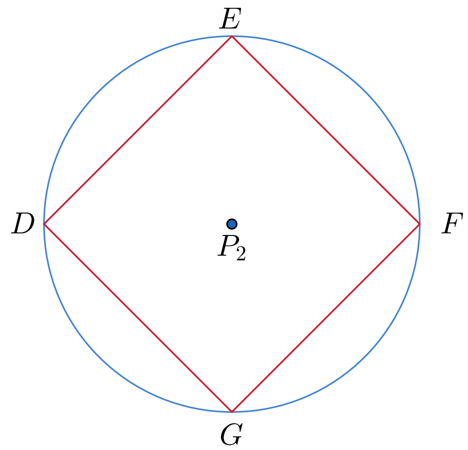
Teorema 79: *Consideremos un círculo, C de centro P y radio r, la medida del ángulo vertical formado por dos cuerdas de C que se intersecan, es la mitad de la suma de las medidas de los dos arcos intersecados.*

Teorema 80: *Sea C de centro P y radio r, un círculo y sea A un punto que no está en C. Consideremos dos rectas secantes, ℓ y m, a C en A; sean los puntos de intersección de estas rectas con el círculo B y C y D y E, respectivamente. Entonces:*

$$AB \cdot AC = AD \cdot AE$$

DEFINICIÓN 59 (Polígono Inscrito y Circunscrito). *Si existe un círculo C tal que es tangente a todos los lados de un polígono P, entonces se puede decir que C está* ***inscrito*** *en P y P está* ***circunscrito*** *alrededor de C. De igual manera, si todos los vértices de P están en el círculo C, entonces P está* ***inscrito*** *en C y C está* ***circunscrito*** *alrededor de P.*





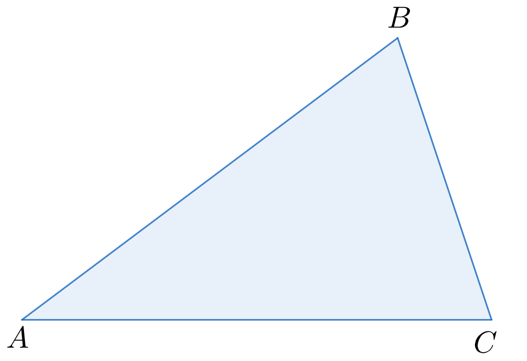
TEOREMA 81: *Sea P un polígono:*

1. *Existe un punto Q que es equidistante a todos los vértices de P si y solo si las bisectrices de todos los lados de P son concurrentes. Si existe dicho punto, este es único y es el* ***circuncentro*** *de P.*

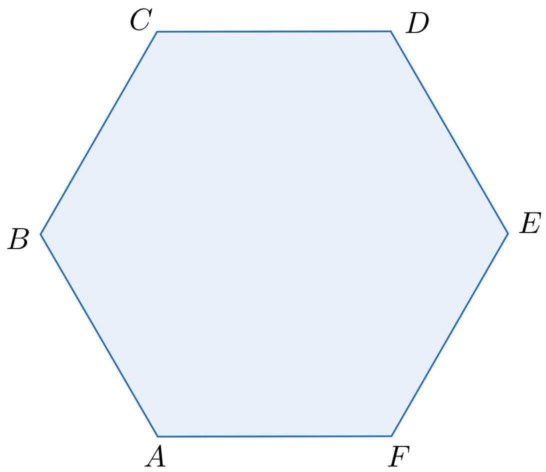
2. *Existe un punto O que es equidistante a todos los vértices de P si y solo si las bisectrices de todos los ángulos interiores de P son concurrentes. Si existe dicho punto, este es único y es el* ***incentro*** *de P.*

3.2.15. Áreas

DEFINICIÓN 60 (Región Triangular). *Dado un triángulo cualquiera, una* ***región triangular*** *es la unión del triángulo con su interior.*



Definición 61 (Región Poligonal). *Una **región poligonal** es la unión de una cantidad finita de regiones triangulares tales que, si dos de estas regiones se intersecan, lo hacen únicamente en sus aristas o en sus vértices.*



Axioma 11 (Área)**:** *A cada región poligonal le corresponde un único número real positivo llamado **área**.*

Axioma 12 (Área de triángulos congruentes)**:** *Si dos triángulos son congruentes, entonces las regiones triangulares tienen la misma área.*

Axioma 13 (Suma de áreas)**:** *Supongamos que la región R es la unión de dos regiones R_1 y R_2. Si R_1 y R_2 se intersecan a lo más en un número finito de segmentos y puntos, entonces el área de R es la suma de las áreas de R_1 y R_2.*

Axioma 14 (Área Rectángulo)**:** *El área de un rectángulo es el producto de la longitud de su base y la longitud de su altura.*

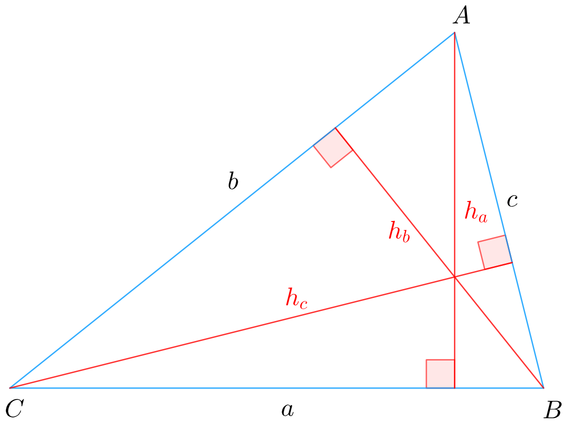
Los conceptos de región cuadrada, región rectangular, etcétera, se definen de manera análoga a región triangular.

DEFINICIÓN 62 (Base y altura de un trapecio). *Dado un trapecio, tanto los lados paralelos como sus longitudes se denominan **bases** del trapecio. Cualquier segmento perpendicular desde un punto del lado paralelo al otro lado paralelo (lado opuesto) y su longitud se denominan **altura** del trapecio.*

TEOREMA 82 (Áreas de regiones poligonales)**:**

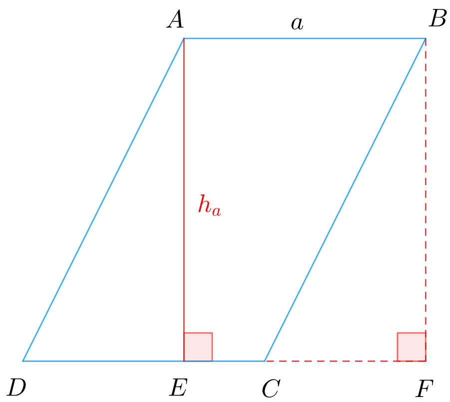
1. *El área de un triángulo $\triangle ABC$ es igual al producto de la longitud de cualquiera de sus lados y su correspondiente altura, dividido para dos.*

$$\textit{Área}\ (\triangle ABC) = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$$



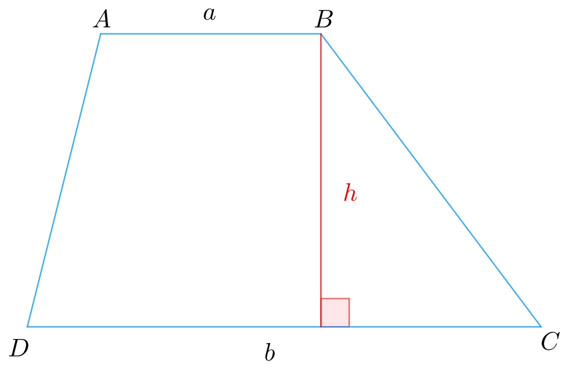
2. *El área de un paralelogramo $ABCD$ es igual al producto de la longitud de cualquiera de sus lados y su correspondiente altura.*

$$\textit{Área}\ (ABCD) = ah_a$$



3. *El área de un trapecio $ABCD$ es igual al semiproducto de la suma de las longitudes de las bases y su correspondiente altura.*

$$\acute{A}rea\ (ABCD) = \frac{1}{2}(a+b)h$$



TEOREMA 83 (Fórmula de área de un triángulo rectángulo)**:** *Dado el triángulo rectángulo $\triangle ABC$ de catetos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$, entonces su área es:* $\dfrac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{2}$

TEOREMA 84 (Propiedad de la bisectriz de un triángulo)**:** *Dado $\triangle ABC$, Sea B_1 un punto interior de $\overline{AC}$. Entonces $\overline{BB}_1$ es una bisectriz de $\angle B$ si y solo si* $\dfrac{AB_1}{B_1C} = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{c}{a}$

TEOREMA 85 (Área cuadrilátero convexo)**:** *Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo con diagonales perpendiculares $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$, entonces*

$$\acute{A}rea\ (ABCD) = \frac{1}{2}AC\cdot BD$$

En particular, el área de un rombo es igual al semiproducto de la longitud de sus diagonales.

TEOREMA 86 (Área de un círculo)**:** *La circunferencia de un círculo de radio r es $2\pi r$, y su área es πr^2.*

3.3. Resultados de aprendizaje

Los resultados de aprendizaje propuestos a continuación se corresponden únicamente a los tres niveles inferiores:

1. **Conocimiento**: determinar lo que un estudiante **conoce** ("enuncie", "escriba" o "identifique") sobre las definiciones de conceptos, enunciados de axiomas y teoremas, representaciones simbólicas y gráficas.

2. **Comprensión**: determinar si un estudiante usa correctamente un concepto, la notación simbólica, la representación gráfica, aplica un axioma o un teorema, en la solución de un problema específico, o en la deducción de un teorema particular.

3. **Aplicación**: determinar si un estudiante aplica un concepto, un axioma o un teorema en la solución de un problema o en la deducción de una propiedad.

4. **Aplicación**: determinar si un estudiante reconoce la corrección o no de la deducción de un teorema, o la solución de un problema.

3.3.1. Axiomas de incidencia, conexión y distancia

Estos axiomas y teoremas definen implícitamente los conceptos primitivos **punto**, **recta** y **plano**.

1. *Enunciar los **axiomas de conexión**.*

   Ejemplos de evaluación de este resultado de aprendizaje:

   I. ¿Qué axiomas definen implícitamente la relación entre **punto** y **recta**?

   Respuesta esperada. Son dos:

   > *En una recta, existen al menos dos puntos.*

   y el denominado *postulado de la recta*:

   > *Dados dos puntos distintos, existe una y solo una recta que pasa por ellas.* □

   II. ¿Cuál enunciado corresponde al postulado de la regla? Justifique su respuesta.

   1) Para toda recta ℓ, existe una función σ de ℓ sobre $\mathbb{R}$, biyectiva, tal que para cierto punto A en ℓ y todo punto B en ℓ, la distancia entre A y B es $AB = |\sigma(A) - \sigma(B)|$.
   2) Para toda recta ℓ, existe una función σ de ℓ sobre $\mathbb{R}$, tal que para todo punto A en ℓ y todo punto B en ℓ, la distancia entre A y B es $AB = |\sigma(A) - \sigma(B)|$.
   3) Para toda recta ℓ, existe una función σ de ℓ sobre $\mathbb{R}$, biyectiva, tal que para todo punto A en ℓ y todo punto B en ℓ, la distancia entre A y B es $AB = |\sigma(A) - \sigma(B)|$.

Respuesta esperada. Se tiene que:

1) El primer enunciado indica que para un punto A, y todo punto B en ℓ, la distancia entre A y B es $AB = |\sigma(A) - \sigma(B)|$, sin embargo, el postulado de la regla asegura que para todo punto A y todo punto B, la distancia entre esos puntos es esa, no solo para un punto en particular, por lo que el enunciado no representa al postulado de la regla.
2) El segundo enunciado, expresa la existencia de la función σ, sin embargo, no indica que sea biyectiva, lo cual representa un problema, pues no asegura la correspondencia uno a uno entre los puntos de la recta y los números reales, por tanto este enunciado tampoco representa al postulado de la regla.
3) Finalmente, el último enunciado expresa que la función distancia es biyectiva, lo que asegura la correspondencia uno a uno requerida entre los puntos de la recta y los números reales, además de definir dicha función para cualesquier par de puntos de la recta, por lo que en efecto este enunciado es el postulado de regla. □

2. *Identificar los* ***axiomas de conexión****.*

Ejemplos de evaluación de este resultado de aprendizaje:

I. Dado el problema:

Sean A, B y C tres puntos, tales que ℓ pasa por A y B, m pasa por A y C y además ℓ pasa por C, ¿qué se concluye sobre ℓ y m?

coloque en la solución del problema anterior, las justificaciones correspondientes:

Dadas las hipótesis que aseguran que ℓ pasa por A, B y C, y gracias al ________________________, sabemos que esta recta es única, en particular, ℓ es la única recta que pasa por A y C, pero además se conoce que m pasa por A y C, por lo que ℓ y m son la misma, debido a la unicidad de la recta aseverada por ________________________.

Respuesta esperada. Dadas las hipótesis que aseguran que ℓ pasa por A, B y C, y gracias **al postulado de la recta** sabemos que esta recta es única, en particular, ℓ es la única recta que pasa por A y C, pero además se conoce que m pasa por A y C, por lo que ℓ y m son la misma debido a la unicidad de la recta aseverada por **el postulado de la recta**. □

II. Si A y B son puntos, ¿existe $\overleftrightarrow{AB}$?

Respuesta esperada: No necesariamente; si A y B son distintos, gracias al postulado de la regla, se puede asegurar la existencia de $\overleftrightarrow{AB}$. $\square$

3. *Diferenciar la* ***definición*** *de un concepto de su* ***representación simbólica.***

   Ejemplos de evaluación de este resultado de aprendizaje:

   I. ¿Cómo se lee el signo $\overleftrightarrow{AB}$? ¿Qué es $\overleftrightarrow{AB}$?

   Respuesta esperada. Se lee: "la recta que pasa por los puntos A y B", y es la única recta que pasa por los puntos A y B, cuya existencia está garantizada por el postulado de la regla. $\square$

   II. ¿Qué es AB? ¿Qué representa AB?

   Respuesta esperada. Se lee: "la distancia entre los puntos A y B" y es el único número real mayor igual que 0, asociado a los puntos A y B, tal que es 0 únicamente si $A = B$, y $AB = BA$. El número AB se denomina **distancia entre** A **y** B. $\square$

   III. Dado el símbolo $\overleftrightarrow{AB}$, ¿cuál de los siguientes enunciados lo describe de manera correcta y completa? Justifique su respuesta.

   1) La recta AB.
   2) A y B son puntos.
   3) A y B son puntos distintos.
   4) La recta que pasa por A y por B.
   5) La única recta que pasa por A y por B.

   Respuesta esperada.

   1) No describe a la representación simbólica de $\overleftrightarrow{AB}$ ya que el símbolo AB hace referencia a la distancia entre A y B.
   2) Notemos que si A y B son iguales, no es posible utilizar el postulado de la recta para asegurar la existencia de $\overleftrightarrow{AB}$, por tanto, al no asegurar en el enunciado que son distintos, no corresponde al símbolo.
   3) Notemos que el símbolo que describe el tercer enunciado es $A \neq B$, lo cual describe en parte al símbolo $\overleftrightarrow{AB}$, pero no completamente.
   4) Este enunciado omite la unicidad de la recta que asegura el postulado de la recta.
   5) Este enunciado describe de forma correcta y completa al símbolo $\overleftrightarrow{AB}$, pues representa el postulado de la recta, que define implícitamente $\overleftrightarrow{AB}$. $\square$

4. *Aplicar los **axiomas de conexión**.*

Ejemplos de evaluación de este resultado de aprendizaje:

I. Dados A, B, C y D, puntos distintos y que no son colineales, indique cuántas rectas pasan por cada par de puntos.

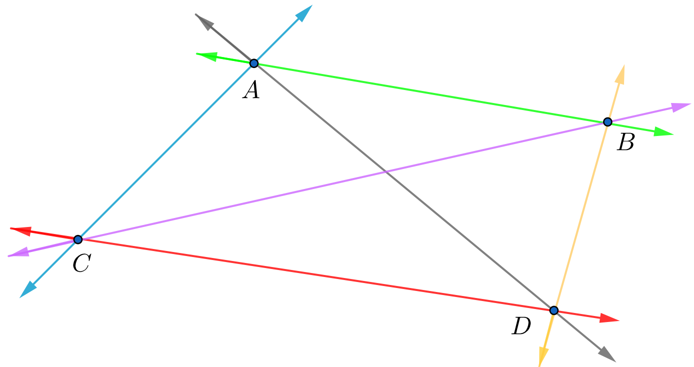
Respuesta esperada.

1) Para responder esta pregunta, utilizaremos el *postulado de la recta*, que asegura la existencia de las rectas: $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{BD}$, $\overleftrightarrow{BC}$ y $\overleftrightarrow{CD}$.
2) Estas seis rectas son distintas entre sí. En efecto: si $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{AC}$, entonces existiría una recta que pasa por los puntos A, B y C que es contrario al hecho de que los puntos no son colineales. Se concluye, entonces, que $\overleftrightarrow{AB} \neq \overleftrightarrow{AC}$
3) Mediante un razonamiento similar al anterior, se concluye que todas las rectas son diferentes.
4) Entonces, por lo menos hay seis rectas que pasan por cuatro puntos distintos que no son colineales.
5) Ahora veamos que no hay más de seis. En efecto: cualquier recta m que pase por dos de esos puntos, necesariamente será igual a una de las seis rectas

$$\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{AC}, \overleftrightarrow{AD}, \overleftrightarrow{BD}, \overleftrightarrow{BC} \text{ y } \overleftrightarrow{CD},$$

gracias al *postulado de la recta*. Es decir, no hay más rectas que estas seis.
6) Se concluye que existen exactamente seis rectas que pasan por cuatro puntos distintos que no son colineales.

El siguiente dibujo ilustra la situación:



□

II. Dadas las rectas ℓ y m distintas, si el punto A está en ℓ y m, y el punto B también está en ℓ y m, ¿qué se puede concluir sobre las rectas ℓ y m? Justifique su respuesta.

Respuesta esperada. Como A y B están en una misma recta ℓ, en otras otras palabras, ℓ pasa por A y B, entonces por el postulado de la recta, ℓ es la única recta que pasa por esos puntos, con un razonamiento similar, se tiene que m es la única recta que pasa por A y B, es decir que necesariamente las rectas ℓ y m son iguales. □

5. *Identificar cuándo una función representa un* ***sistema de coordenadas*** *mediante su definición.*

Ejemplos de evaluación de este resultado de aprendizaje:

I. Si σ es un sistema de coordenadas para una recta ℓ, ¿cuál de las siguientes funciones son sistemas de coordenadas para ℓ? Justifique su respuesta.

1) $f = \sigma^2$
2) $g = |\sigma|$
3) $h = \sigma + 2$

Respuesta esperada. Vamos a analizar el primer y tercer numeral a continuación:

1) La función $f = \sigma^2$ no es un sistema de coordenadas, en efecto, supongamos que dos puntos A y B son tales que $\sigma(B) = -\sigma(A)$, luego $f(A) = \sigma^2(A)$ y $f(B) = \sigma^2(B) = \sigma^2(A)$, en otras palabras los puntos A y B tendrían la misma coordenada, por lo que la función no representa una correspondencia uno a uno entre la recta y los números reales, por lo que no es un sistema de coordenadas.
2) La función $h = \sigma + 2$ sí es un sistema de coordenadas. En efecto, se verifica que al ser una traslación de una función biyectiva conserva la biyectividad, por lo que sí representa un sistema de coordenadas, es claro que preserva la distancia entre dos puntos cualesquiera, dicho de otra manera dados los puntos A y B, la distancia entre esos puntos es:

$$\begin{aligned}|h(A) - h(B)| =& |(\sigma(A) + 2) - (\sigma(B) + 2)| \\ =& |\sigma(A) - \sigma(B)|.\end{aligned}$$

□

II. Dado un sistema de coordenadas sobre una recta, suponga que se le resta 5 a la coordenada de cada punto sobre la recta y que el resultado de esto será el nuevo número otorgado a cada punto. Demostrar que

|*(nuevo número otorgado a un punto) - (nuevo número otorgado a otro punto)*|

representa a la distancia entre los puntos.

Respuesta esperada. Sea σ el sistema de coordenadas dado, el nuevo sistema de coordenadas es $\alpha = \sigma - 5$, en efecto, preserva la distancia entre dos puntos cualesquiera A y B:

$$\begin{aligned}|\alpha(A) - \alpha(B)| =& |(\sigma(A) - 5) - (\sigma(B) - 5)| \\ =& |\sigma(A) - \sigma(B)|\end{aligned}$$

por tanto, la formula antes propuesta, sí representa a la distancia entre dos puntos. □

6. *Determinar la* ***distancia*** *entre dos puntos utilizando el* ***axioma de la colocación de la regla****.*

   Ejemplos de evaluación de este resultado de aprendizaje:

   I. Mediante el axioma de la regla, encontrar la distancia entre los puntos A y B, cuyas coordenadas son las siguientes:

      1) 0 y 12
      2) 0 y x
      3) x y $y - x$

      Respuesta esperada.

      1) $AB = 12$, ya que $AB = |0 - 12| = |-12| = 12$.
      2) $AB = |x|$, pues $AB = |0 - x| = |-x| = |x|$.
      3) $AB = |2x - y|$, puesto que $AB = |x - (y - x)| = |2x - y|$. □

   II. Si se emplea un flexómetro para medir la distancia entre dos puntos marcados en la pared, ¿es necesario colocar el 0 del flexómetro en uno de los puntos?

      Respuesta esperada. El axioma de la recta nos asegura la existencia de una única recta que pasa por dos puntos, en este caso nombraremos a los puntos A y B, luego por el postulado de la regla existe un sistema de coordenadas para esta recta, en efecto, el flexómetro establece un sistema de coordenadas, y debido a que a partir de él es posible establecer infinitos sistemas de coordenadas, y una de las formas de hacerlo es por traslación, entonces, podemos elegir cualquier coordenada del flexómetro como cero en el nuevo sistema de coordenadas. □

3.3.2. Orden de la recta

1. *Identificar la definición de* ***puntos colineales.***

   Ejemplos de evaluación de este resultado de aprendizaje:

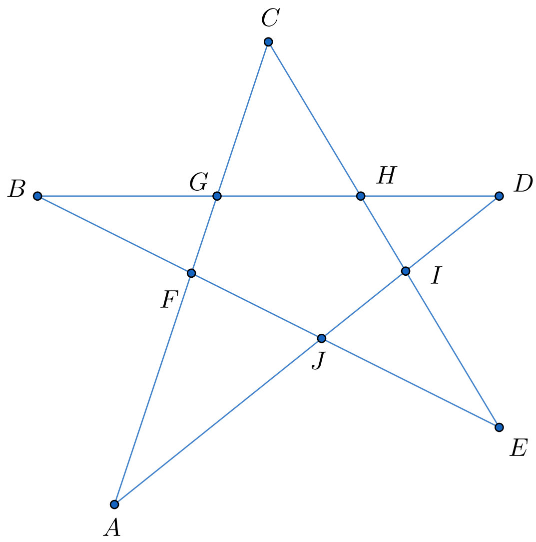
   I. ¿Cuál de los siguientes enunciados describe de forma correcta y completa a la definición de puntos colineales? Justifique su respuesta.

      1) Dos o más puntos distintos son colineales si existe una recta que pasa por ellos.
      2) Si A, B y C son puntos, estos son colineales si existe una recta que pasa por todos ellos.
      3) Tres o más puntos distintos son colineales si existe una recta que pasa por todos ellos.

      Respuesta esperada.

      1) El primer enunciado no describe a la definición de puntos colineales pues, no hay nada en particular en que una recta pase por dos puntos distintos, pues el postulado de la recta ya asegura que eso ocurre para dos puntos cualesquiera distintos.
      2) El enunciado tampoco describe a la definición de puntos colineales de forma completa, pues cabe la posibilidad de que los puntos no sean diferentes.
      3) El tercer enunciado describe completamente a los puntos colineales, pues aclara que deben ser al menos tres puntos y distintos por los que pasa una misma recta, a diferencia de los enuciados anteriores. □

   II. Dado el siguiente gráfico con puntos determinados, identifique qué puntos son colineales.



Respuesta esperada. Por la definición de puntos colineales, identificamos que:

1) $A-F-G-C$
2) $C-H-I-E$
3) $B-G-H-D$
4) $B-F-J-E$
5) $A-J-I-D$ □

2. *Aplicar la definición de* ***puntos colineales****.*

   Ejemplos de evaluación de este resultado de aprendizaje:

   I. Sean A, B y C tres puntos que no son colineales. Si ℓ es la recta que pasa por A y C ¿Es posible que B esté en ℓ?

   Respuesta esperada. No, B no puede estar en ℓ. En efecto: si B estuviera en ℓ, entonces la recta ℓ pasaría por los tres puntos A, B y C, lo que significaría que dichos puntos son colineales, lo que contradice con la hipótesis sobre los puntos. □

   II. Dados tres puntos A, B y C en una recta. Si se tiene que A está entre B y C. ¿Qué relación existe entre AB, BC y AC?

   Respuesta esperada. Aplicando la definición de puntos colineales, se dice que los puntos A, B y C son colineales, es decir $B-A-C$ y por la definición de relación entre, se tiene que $BA + AC = BC$, y como $BA = AB$, entonces tenemos que $AB + AC = BC$. □

3. *Reconocer la definición de relación* ***entre*** *puntos.*

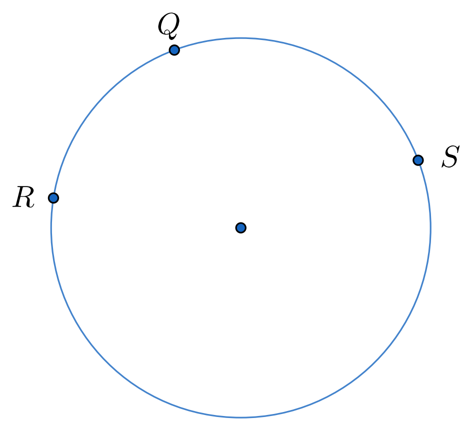
   Ejemplos de evaluación de este resultado de aprendizaje:

I. Dados los puntos A, B y C distintos tales que B está entre A y C, ¿cuál de los siguientes enunciados describe de manera correcta y completa la definición de la relación **entre**? Justifique su respuesta.

1) $AB + BC = AC$.
2) A, B y C son colineales.
3) Los puntos A, B y C son colineales y se tiene que: $AB + BC = AC$.

Respuesta esperada. El primer y segundo literal corresponden por sí solas a condiciones necesarias para que el punto B esté entre A y C, sin embargo se requiere que ambas se cumplan para determinar que B está entre A y C, por ello el tercer literal es el que describe de manera correcta y completa la relación entre. □

II. Dados los puntos R, Q y S en una circunferencia como se muestra en la figura, ¿se puede decir qué punto se encuentra entre los otros dos puntos? Argumente su respuesta.



Repuesta esperada. Debido a que los puntos no son colineales, por la definición de relación entre, no es posible decir qué punto se encuentra entre los otros dos, de hecho al ser puntos de la circunferencia, se tiene que existe una única recta que pasa por cualesquier par de puntos, como se verá más adelante en la sección de circunferencias esta recta se denomina secante. □

4. *Aplicar la definición de relación* ***entre****.*

Ejemplos de evaluación de este resultado de aprendizaje:

I. Dados los puntos A, B, C de la recta ℓ cuyas coordenadas son -7, -3 y 4, respectivamente, determine qué punto se encuentra entre los otros dos.

Respuesta esperada. En primer lugar, los puntos son colineales. Por el postulado de la regla, se tiene que:

1) $AB = |(-7) - (-3)| = | - 7 + 3| = 4$

2) $BC = |(-3) - (4)| = | - 3 - 4| = 7$

3) $AC = |(-7) - (4)| = | - 7 - 4| = 11$

por lo que se concluye que $AB + BC = AC$, en otras palabras, es el punto B el que está entre A y C. $\square$

II. Dados tres puntos A, B y C en una recta, si se tiene que $AC > AB$, ¿se puede concluir que B está entre A y C?

Respuesta esperada. No necesariamente. En efecto: si $BA = 2$, $AC = 3$ y $BC = 5$, A está entre B y C y $AC > AB$. $\square$

5. *Utilizar el concepto de la relación* ***entre*** *en la deducción de un teorema.*

Ejemplos de evaluación de este resultado de aprendizaje:

I. Demuestre el teorema: la relación "entre" es simétrica.

Si A está entre B y C, entonces A está entre C y B

Respuesta esperada. De manera más precisa, lo que se quiere mostrar es que si $B - A - C$, entonces $C - A - B$; es decir, se quiere mostrar que los puntos C, A y B son colineales y $CB = CA + AB$.

Ahora bien, si $B - A - C$, por la **definición de la relación entre**, se tiene que A, B y C son colineales, y $BC = BA + AC$. Así, C, A y B son colineales; además, por el postulado de la distancia, se tiene que:

$$BC = CB, \quad BA = AB \quad \text{y} \quad AC = CA,$$

de donde, se obtiene que:

$$\begin{aligned} CB =& BC \\ =& BA + AC \\ =& AB + CA = CA + AB; \end{aligned}$$

por tanto, se tiene que $C - A - B$. $\square$

II. Demostrar que: *Todo segmento tiene un punto medio.*

Demostración. Se quiere mostrar que dado un segmento cualesquiera $\overline{AC}$, existe un punto B entre A y C, es decir, $AB + BC = AC$ y además que $AB = BC$, en otras palabras:

$$\begin{aligned} AB + AB &= AC \\ 2AB &= AC \\ AB &= \frac{AC}{2} \end{aligned}$$

Gracias al postulado de la colocación de la regla, se tiene que existe exactamente un punto B a una distancia $\dfrac{AC}{2}$ en el rayo $\overrightarrow{AC}$, es decir, $\overline{AC}$ posee un único punto medio. $\square$

3.3.3. Segmentos, rayos, ángulos y polígonos

1. *Explicar la diferencia entre una* ***recta****, un* ***segmento*** *y un* ***rayo***

   Ejemplos de evaluación de este resultado de aprendizaje:

   I. Dados los puntos B y C, indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones. Justifique su respuesta.

   1) $\overleftrightarrow{BC} = \overleftrightarrow{CB}$
   2) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CB}$
   3) $\overline{BC} = \overline{CB}$

   Respuesta esperada. El valor de verdad de cada proposición es:

   1) El primer enunciado es verdadero, gracias al axioma de la recta que asegura la unicidad de la recta que pasa por los puntos B y C, independientemente del orden en el que se escriba simbólicamente.
   2) El segundo enunciado es falso, debido a que por la definición de rayo y su representación simbólica, el extremo de $\overrightarrow{BC}$ es B y el extremo del $\overrightarrow{CB}$ es C, entonces, al tener extremos distintos, los rayos son distintos.
   3) El tercer enunciado es verdadero, debido a que la representación simbólica del segmento no distingue el orden de los extremos, por tanto $\overline{BC} = \overline{CB}$. $\square$

   II. Dados los puntos B y C, identifique la relación entre: $\overleftrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BC}$ y $\overline{BC}$.

   Respuesta esperada.

   1) Para comenzar, por la definición de rayo:

   $$\overrightarrow{BC} = \overline{BC} \cup \{D : A-B-D\}$$

Es decir, $\overline{BC} \subset \overrightarrow{BC}$; pero, $\overline{BC} \neq \overrightarrow{BC}$, pues un punto X tal que $B-C-X$ está en el rayo pero no en el segmento.

2) Ahora, recordemos que la unión de un rayo con su opuesto, forman la recta con los puntos de ambos rayos, es decir que:

$$\overleftrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC} \cup \overrightarrow{AB},$$

con $\overrightarrow{AB}$ rayo opuesto a $\overrightarrow{BC}$. Entonces, se tiene que $\overrightarrow{BC} \subset \overleftrightarrow{BC}$. Pero, como $\overrightarrow{CB} \neq \emptyset$, se concluye que $\overrightarrow{BC} \neq \overleftrightarrow{BC}$.

Finalmente; se puede concluir que

$$\overline{BC} \subset \overrightarrow{BC} \subset \overleftrightarrow{BC}$$

y las inclusiones son estrictas. □

2. *Aplicar la definición de* ***rayos opuestos***

Ejemplos de evaluación de este resultado de aprendizaje:

I. Si $\overrightarrow{BA}$ es opuesto a $\overrightarrow{BC}$, determine cuál de los puntos A, B y C está entre los otros dos.

Respuesta esperada. El punto B está entre A y C, en efecto, gracias a la definición de rayos opuestos, se tiene que $A-B-C$. □

II. Dados A, B y C, puntos colineales distintos, tales que $A-B-C$, demostrar que:

$$\overrightarrow{BA} \cap \overrightarrow{BC} = \{B\}$$

Respuesta esperada. Para empezar, aplicando la definición de rayos opuestos, se tiene que $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{BA}$ son rayos opuestos por las hipótesis del problema, luego tienen en común un único punto que es el extremo común de ambos rayos, en este caso $\{B\}$, en efecto:

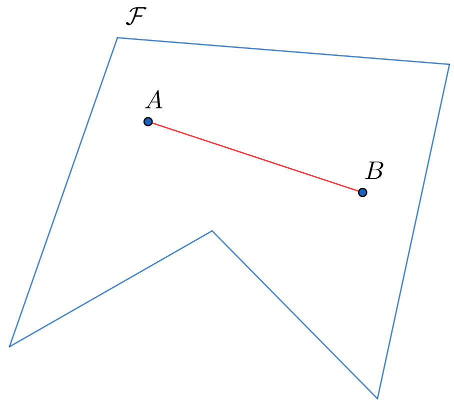
$$\begin{aligned} \overrightarrow{BA} \cap \overrightarrow{BC} &= \{\overline{BA} \cup \{D : D-A-B\}\} \cap \{\overline{BC} \cup \{D : B-C-D\}\} \\ &= \overline{BA} \cap \overline{BC} \\ &= \{B\}. \end{aligned}$$

□

3. *Reconocer la definición de* ***figura convexa***

Ejemplos de evaluación de este resultado de aprendizaje:

a) Dado un segmento $\overline{AB}$ tal que todo punto de $\overline{AB}$ está en la figura $\mathcal{F}$. ¿Esto significa que la $\mathcal{F}$ es convexa?



Respuesta esperada. No necesariamente, para que una figura sea convexa esto debe ocurrir con todos los segmentos cuyos extremos estén en la figura, en otras palabras, para todo A, B puntos contenidos en la figura, el segmento $\overline{AB}$ está completamente contenido en la figura. $\square$

b) ¿Es un triángulo una figura convexa?

Respuesta esperada. No, debido a que un segmento, por ejemplo, una de las medianas del triángulo, tiene como uno de sus extremos a uno de los vértices del triángulo y el otro extremo el punto medio del lado opuesto al vértice, dicho de otra forma, dado una $\triangle ABC$, con mediana $\overline{AD}$ siendo D punto medio de $\overline{BC}$, los extremos están contenidos en el triángulo, pero los puntos interiores del segmento no lo están. Por tanto, un triángulo no es una figura convexa. $\square$

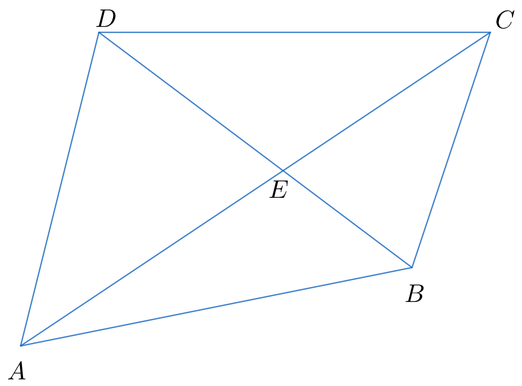
4. *Aplicar la definición de* ***triángulo***

Ejemplos de evaluación de este resultado de aprendizaje:

a) Dado el triángulo $\triangle ABC$, ¿alguno de sus vértices está entre los otros dos?

Respuesta esperada. No, ningún vértice del triángulo $\triangle ABC$ está entre los otros dos, gracias a la definición de triángulo que establece que los vértices no son colineales y luego por la definición de relación "entre", que exige la colinealidad, ningún vértice A, B o C se encuentran entre los otros dos. $\square$

b) En el siguiente dibujo, identifique todos los triángulos presentes y enlístelos con sus elementos.



Respuesta esperada. Aplicando la definición de triángulo, se tiene que el dibujo representa los siguientes triángulos:

1) $\triangle ABC = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{AC}$
2) $\triangle ACD = \overline{AC} \cup \overline{CD} \cup \overline{AD}$
3) $\triangle ABD = \overline{AB} \cup \overline{BD} \cup \overline{AD}$
4) $\triangle ABE = \overline{AB} \cup \overline{BE} \cup \overline{AE}$
5) $\triangle AED = \overline{AE} \cup \overline{ED} \cup \overline{AD}$
6) $\triangle BCE = \overline{BC} \cup \overline{CE} \cup \overline{BE}$
7) $\triangle BCD = \overline{BC} \cup \overline{CD} \cup \overline{BD}$
8) $\triangle CDE = \overline{CD} \cup \overline{DE} \cup \overline{CE}$

□

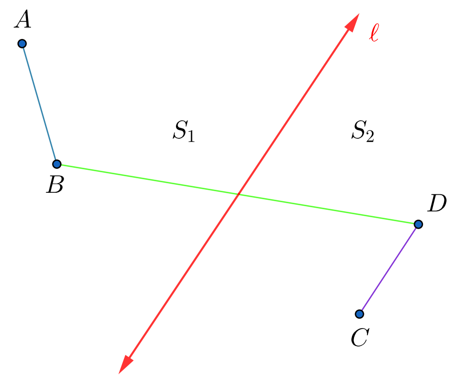
3.3.4. Axioma de Separación

1. *Identificar el **axioma de separación***

   Ejemplos de evaluación de este resultado de aprendizaje:

   I. Completar los siguientes enunciados acerca de la siguiente ilustración:

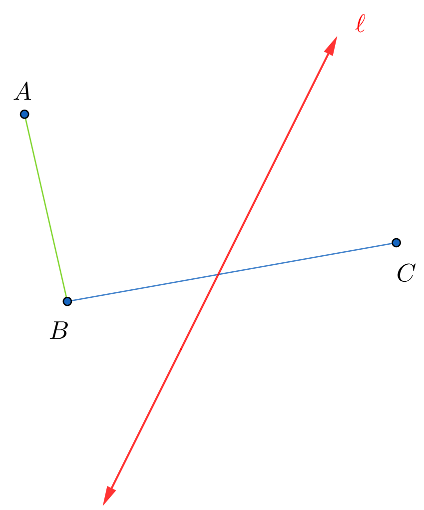
      En la figura, la __________ ℓ separa al plano en __________ S_1 y _____. Sabemos que A y B están del __________ lado de la recta, puesto que __________ no interseca a la recta ℓ; sabemos también B y D están en lados opuestos de la recta ℓ, puesto que _________________________. Podemos demostrar que $\overline{AC}$ _________________________ mostrando que A y _____ están __________ de la recta ℓ.



Respuesta esperada. En la figura, la **recta** ℓ separa al plano en **semiplanos** S_1 y S_2. Sabemos que A y B están del **mismo** lado de la recta, puesto que $\overline{AB}$ no interseca a la recta ℓ; sabemos también B y D están en lados opuestos de la recta ℓ, puesto que $\overline{BD}$ **interseca a la recta** ℓ. Podemos demostrar que $\overline{AC}$ **interseca a la recta** ℓ mostrando que A y **C** están **en lados opuestos de la recta** ℓ de la recta ℓ. □

II. Grafique una recta ℓ y los semiplanos S_1 y S_2 que define. Dados los puntos A, B en S_1 y el punto C en S_2, responda las siguientes preguntas:

1) ¿Cuál es la intersección de $\overline{AB}$ y ℓ? Justifique su respuesta.
2) ¿Cuál es la intersección de $\overline{BC}$ y ℓ? Justifique su respuesta.



Respuesta esperada.

1) Debido a que tanto A como B están del mismo lado de ℓ, entonces por el axioma de separación se tiene que $\overline{AB}$ no interseca a ℓ.
2) Dado que B y C se encuentran en lados opuestos de la recta ℓ, gracias al axioma de separación se tiene que $\overline{BC}$ se interseca con ℓ, por supuesto, en un único punto. □

2. *Aplicar el* ***axioma de separación*** *en la deducción de un Teorema*

   Ejemplos de evaluación de este resultado de aprendizaje:

   I. Demuestre el Teorema de Pasch.

      Dado el triángulo $\triangle ABC$ y la recta ℓ tal que A,B y C no están en la recta ℓ. Si ℓ interseca a $\overline{AB}$, entonces también interseca a $\overline{AC}$ o $\overline{BC}$.

      Demostración. Sean $\triangle ABC$ y ℓ una recta que interseca al segmento $\overline{AB}$ y tal que ℓ no pase por ninguno de los puntos A, B y C por hipótesis. Llamemos S_1 y S_2 a los semiplanos determinados por ℓ por el axioma de separación, entonces los puntos A y B están en lados opuestos de ℓ por hipótesis. Sin perdida de generalidad, supongamos que A está en S_1 y B en S_2. Se sigue que, C está en S_1 o en S_2 por el axioma de separación. Si C está en S_2, entonces el segmento $\overline{AC}$ no se interseca con ℓ gracias al axioma de separación, mientras que si C está en S_1, entonces BC no se interseca con ℓ debido al axioma de separación. $\square$

   II. Demuestre el siguiente teorema.

      Si $C-A-B$ y D está en el interior de $\angle BAE$, entonces E

      Demostración. Sean A, B, C, D y E cinco puntos tales que $C-A-B$ y D está en el interior del ángulo $\angle BAE$ por hipótesis. Para demostrar que E está en el interior de $\angle DAC$, debemos mostrar que E y D están al mismo lado de $\overleftrightarrow{AC}$ y al mismo lado de $\overleftrightarrow{AD}$ por la definición de ángulo interior.

      Dado que D está en en interior de $\angle BAE$, se sigue que E y D están al mismo lado de $\overleftrightarrow{AB}$ gracias a la definición de ángulo interior. Sin embargo, $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{AC}$, por lo que E y D están al mismo lado de $\overleftrightarrow{AC}$. Aún más, la recta $\overleftrightarrow{AD}$ debe intersecar a $\overline{BE}$ por el teorema de la barra cruzada. Por lo tanto, E y B están en lados opuestos de $\overleftrightarrow{AD}$ por el axioma de separación.

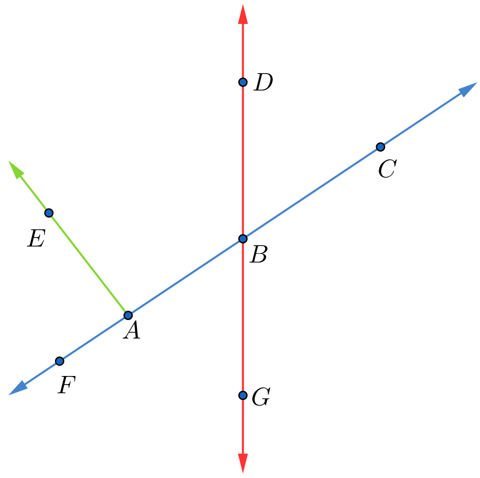
      Ahora, el hecho de que A está entre C y B implica que C y B están en lados opuestos de $\overleftrightarrow{AD}$ y podemos concluir que C y E están al mismo lado de $\overleftrightarrow{AD}$ por el axioma de separación. $\square$

3.3.5. Axioma de Medida Angular

1. *Establecer la diferencia entre* ***ángulo*** *y su* ***medida angular****.*

   Ejemplos de evaluación de este resultado de aprendizaje:

I. En el siguiente gráfico, identifique las partes que componen a cada ángulo representado.



Respuesta esperada. La definición de ángulo, establece que es la unión de rayos con extremo común, haciendo uso de esa definición, se tiene que los ángulos y los elementos que los componen son los siguientes:

1) $\angle FAE = \overrightarrow{AF} \cup \overrightarrow{AE}$
2) $\angle CAE = \overrightarrow{AC} \cup \overrightarrow{AE}$
3) $\angle ABD = \overrightarrow{BA} \cup \overrightarrow{BD}$
4) $\angle DBC = \overrightarrow{BD} \cup \overrightarrow{BC}$
5) $\angle CBG = \overrightarrow{BC} \cup \overrightarrow{BG}$
6) $\angle ABG = \overrightarrow{BA} \cup \overrightarrow{BG}$ □

II. Dados los ángulos m $\angle BAD = 50$ y m $\angle DAG = 18$, ¿cuál es la medida de $\angle BAG$? Identifique los elementos que componen al ángulo $\angle BAG$.

Respuesta esperada. Como D es un punto en el interior del ángulo m $\angle BAG$, podemos usar el Postulado de suma de ángulos, así tenemos que la medida de $\angle BAG$ es:

$$\begin{aligned} m\angle BAG &= m\angle BAD + m\angle DAG, \\ &= 50 + 18, \\ &= 68. \end{aligned}$$ □

Además, por la definición de ángulo $\angle BAG = \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{AG}$.

2. *Determinar la medida de un ángulo mediante la definición de **ángulos suplementarios**.*

Ejemplos de evaluación de este resultado de aprendizaje:

I. Determinar la medida del suplemento del ángulo α cuya medida es x.

Respuesta esperada. Por la definición de ángulos suplementarios, la suma de las medidas de dichos ángulos es 180, luego se tiene lo siguiente:

$$\mathrm{m}\,\alpha + \mathrm{m}\,\beta = 180$$

siendo β el ángulo suplementario de α, es decir:

$$\mathrm{m}\,\beta = 180 - x. \qquad \square$$

II. Si dos ángulos suplementarios tienen medidas iguales, ¿cuánto mide cada ángulo?

Respuesta esperada. Sean α, β ángulos suplementarios, por definición se tiene que forman un par lineal, en otras palabras

$$\mathrm{m}\,\alpha + \mathrm{m}\,\beta = 180$$

pero la hipótesis establece que $\mathrm{m}\,\alpha = \mathrm{m}\,\beta$, entonces se tiene que

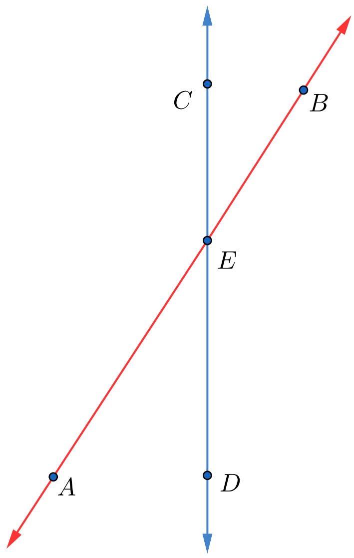
$$\begin{aligned} \mathrm{m}\,\alpha + \mathrm{m}\,\alpha &= 180 \\ \mathrm{m}\,\alpha &= 90 \end{aligned}$$

Es decir, $\mathrm{m}\,\alpha = \mathrm{m}\,\beta = 90$. $\square$

3. *Diferenciar el concepto de **par lineal** y **par vertical**.*

Ejemplos de evaluación de este resultado de aprendizaje:

I. Dadas dos rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ que se cortan en un punto, ¿cuántos pares lineales y verticales se forman? A continuación, se muestra una ilustración de la situación.



Respuesta esperada. Como se indica en el dibujo, la intersección de las rectas es el punto E, se debe tener en mente las definiciones de par lineal y par vertical respectivamente, forman un par lineal dos ángulos cuya suma de medidas angulares es 180, en cambio un par vertical se forma por los ángulos opuestos formados cuando se intersecan dos rectas, además dichos ángulos son congruentes. Por ello, los siguientes pares de ángulos son pares lineales:

1) $\angle AEC$ y $\angle CEB$
2) $\angle CEB$ y $\angle BED$
3) $\angle BED$ y $\angle DEA$
4) $\angle DEA$ y $\angle AEC$

Por otro lado, los siguientes pares de ángulos son pares verticales:

1) $\angle AEC$ y $\angle BED$
2) $\angle CEB$ y $\angle DEA$ $\square$

II. Suponga que $\angle ABC$ y $\angle CBD$ son pares lineales, y $\mathrm{m}\,\angle ABC = \dfrac{1}{5}\,\mathrm{m}\,\angle CBD$. Calcule la medida de $\angle CBD$.

Respuesta esperada. Dado que los ángulos $\angle ABC$ y $\angle CBD$ forman un par lineal, se tiene que:

$$\mathrm{m}\,\angle ABC + \mathrm{m}\,\angle CBD = 180$$

luego, por la hipótesis se obtine

$$\frac{1}{5}\,\mathrm{m}\,\angle CBD + \mathrm{m}\,\angle CBD = 180$$

Por lo que la medida del ángulo $\angle CBD = 150$. $\square$

4. *Utilizar la definición de* ***ángulos complementarios*** *en la resolución de un problema.*

   Ejemplos de evaluación de este resultado de aprendizaje:

   I. Determinar la medida del complemento del ángulo cuya medida es y.

      Respuesta esperada. Por la definición de ángulos complementarios, la suma de las medidas de dichos ángulos es 90, luego se tiene lo siguiente:

      $$\mathrm{m}\,\alpha + \mathrm{m}\,\beta = 90$$

      siendo β el ángulo suplementario de α, es decir:

      $$\mathrm{m}\,\beta = 90 - y. \qquad \square$$

   II. Si la medida de un ángulo es el doble de la medida de su complemento, ¿cuánto mide el ángulo?

      Respuesta esperada. Se denomina α y β a los ángulos complementarios, luego por definición

      $$\mathrm{m}\,\beta + \mathrm{m}\,\gamma = 90$$

      Sin perdida de generalidad, supongamos que

      $$\mathrm{m}\,\beta = 2\,\mathrm{m}\,\gamma$$

      Entonces se tiene lo siguiente:

      $$2\,\mathrm{m}\,\gamma + \mathrm{m}\,\gamma = 90$$

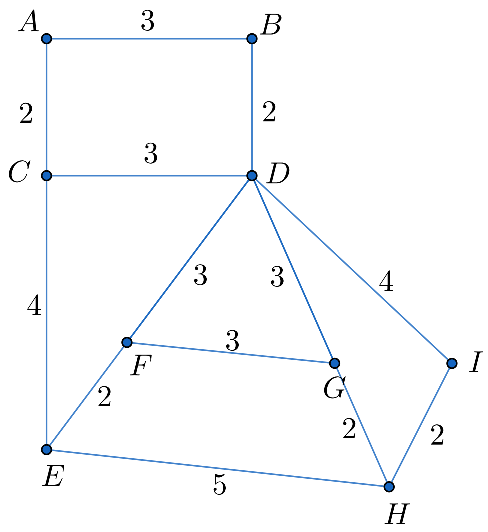
      Es decir, que $\mathrm{m}\,\gamma = 30$ y $\mathrm{m}\,\beta = 60$. $\square$

3.3.6. Congruencia de segmentos y ángulos

1. *Determinar si dos segmentos son congruentes mediante la definición de* ***congruencia de segmentos****.*

   Ejemplos de evaluación de este resultado de aprendizaje:

   I. La siguiente figura muestra las longitudes de todos los segmentos ¿Cuáles de los segmentos son congruentes?



Respuesta esperada. Utilizando la definición de congruencia de segmentos y la información que proporciona el dibujo sobre la medida de todos los segmentos, se tiene las siguientes congruencias.

1) $\overline{AC} \cong \overline{BD} \cong \overline{EF} \cong \overline{GH} \cong \overline{HI}$
2) $\overline{AB} \cong \overline{CD} \cong \overline{DF} \cong \overline{DG} \cong \overline{FG}$
3) $\overline{CE} \cong \overline{DI}$
4) $\overline{DE} \cong \overline{EH} \cong \overline{DH}$

En efecto, pues las longitudes de dichos segmentos son:

1) $AC = BD = EF = GH = HI = 2$
2) $AB = CD = DF = DG = FG = 3$
3) $CE = DI = 4$
4) $DE = EH = DH = 5.$ □

II. Se tienen cuatro puntos en una recta, A, B, C y D. El punto B está entre A y C, y el punto C está entre B y D. Si $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$ son congruentes, $\overline{AD}$ mide 12 unidades, $\overline{AB}$ mide 2 unidades, ¿cuál es la longitud de $\overline{CD}$? ¿Cuál es la longitud de $\overline{BC}$?

Respuesta esperada. Por las hipótesis presentadas en el enunciado y la definición de relación entre, se tiene que $A-B-C-D$ y

$$AB + BC + CD = AD$$

Además, como $\overline{BC} \cong \overline{CD}$ por la definición de congruencia de segmentos, sus longitudes son iguales $BC = CD$, entonces conociendo los datos de las longitudes de los otros segmentos, se tiene que

$$\begin{aligned} 2 + BC + BC &= 12 \\ BC &= 5 \end{aligned}$$

Por lo tanto $BC = CD = 5$. □

2. *Aplicar la definición de* ***punto medio*** *en la resolución de un problema.*

   Ejemplos de evaluación de este resultado de aprendizaje:

   I. Si dividimos un segmento de longitud 20 en dos segmentos iguales, ¿cuánto mide el segmento que une los puntos medios de estos segmentos?

      Respuesta esperada. Dado el segmento $\overline{AE}$, tal que $AE = 20$, el punto medio C de dicho segmento, por definición, es tal que $A-C-E$ y $AC = CE$, entonces se tiene que

      $$\begin{aligned} AC + CE =& AE \\ AC + AC =& 20 \\ AC =& 10 \end{aligned}$$

      Además, los puntos medios de los segmentos AC y CE son B y D, respectivamente. Por la definición de punto medio, se tiene por un lado que

      $$\begin{aligned} AB + BC =& AC \\ BC + BC =& 10 \\ BC =& 5 \end{aligned}$$

      Con un proceso similar en el otro segmento, se tiene que $CD = 5$. Por otro lado, por la definición de relación entre se tiene que $A-B-C-D$, por tanto el segmento que une a los puntos medio B y D es $\overline{BD}$ y $BD = BC + CD$. Por tanto:

      $$\begin{aligned} BD =& BC + CD \\ BD =& 5 + 5 \\ BD =& 10. \end{aligned}$$ □

II. Si el punto B biseca al segmento $\overline{AC}$ y D biseca al segmento $\overline{BC}$, ¿cuál es la longitud del segmento $\overline{DC}$?

Respuesta esperada. Dado que B biseca al segmento $\overline{AC}$, se tiene que $AB = BC$, además al estar en el segmento, por la definición de punto medio se tiene que

$$AB = BC = \frac{AC}{2}$$

Con un razonamiento similar, se tiene que D es punto medio de $\overline{BC}$ y por tanto

$$BD = DC = \frac{BC}{2}$$

Entonces, por lo antes dicho, se tiene que

$$DC = \frac{\frac{AC}{2}}{2} = \frac{AC}{4}. \qquad \square$$

3. *Reconocer si dos ángulos son congruentes mediante la definición de* ***congruencia de ángulos****.*

Ejemplos de evaluación de este resultado de aprendizaje:

I. Si $\angle A$ es el suplemento de $\angle B$, $\angle C$ es el suplemento de $\angle D$ y $\angle D \cong \angle A$, ¿cuál es la relación entre $\angle B$ y $\angle C$?

Respuesta esperada. Aplicando la definición de ángulo suplementario, se tiene que

$$\mathrm{m}\,\angle A + \mathrm{m}\,\angle B = 180$$
$$\mathrm{m}\,\angle C + \mathrm{m}\,\angle D = 180$$

Además, por la definición de congruencia de ángulos, se tiene que

$$\mathrm{m}\,\angle A = \mathrm{m}\,\angle D$$

Por tanto, tenemos que

$$\mathrm{m}\,\angle C + \mathrm{m}\,\angle A = 180$$

Junto con la ecuacion presentada antes, se obtiene que

$$\mathrm{m}\,\angle C + 180 - \mathrm{m}\,\angle B = 180$$

Es decir que $\mathrm{m}\,\angle C = \mathrm{m}\,\angle B$, que por la definicion de congruencia de angulos, nos dice que $\angle B \cong \angle C$. $\square$

II. Si un ángulo es congruente a su complemento, ¿cuánto mide el ángulo?

Respuesta esperada. Dado el ángulo $\angle\alpha$ y su ángulo complemento $\angle\beta$, por definición de ángulo complementario, se tiene que

$$\mathrm{m}\,\angle\alpha + \mathrm{m}\,\angle\beta = 90$$

Por la hipótesis del problema, se tiene que $\mathrm{m}\,\angle\alpha = \mathrm{m}\,\angle\beta$, por tanto

$$\begin{aligned} \mathrm{m}\,\angle\alpha + \mathrm{m}\,\angle\alpha &= 90 \\ \mathrm{m}\,\angle\alpha &= 45. \end{aligned}$$ $\square$

4. *Utilizar la definición de* ***bisectriz*** *de un ángulo para determinar la medida angular.*

   Ejemplos de evaluación de este resultado de aprendizaje:

I. Si $\mathrm{m}\,\angle ABC = 33$ y $\overrightarrow{BC}$ biseca el ángulo $\angle ABD$, ¿cuál es la medida del ángulo $\angle ABD$?

Respuesta esperada. Dado que el rayo $\overrightarrow{BC}$ biseca al ángulo $\angle ABD$, por definición es la bisectriz de $\angle ABD$, y $\mathrm{m}\,\angle ABC = \mathrm{m}\,\angle CBD$, entonces $\mathrm{m}\,\angle CBD = 33$ y por el teorema de la suma de ángulos, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathrm{m}\,\angle ABD &= \mathrm{m}\,\angle ABC + \mathrm{m}\,\angle CBD \\ \mathrm{m}\,\angle ABD &= 66. \end{aligned}$$ $\square$

II. Suponga que se biseca al ángulo β cuya medida es 128, y a los dos ángulos congruentes obtenidos se los biseca de nuevo, ¿cuál es la medida de cada uno los nuevos ángulos congruentes obtenidos mediante la última bisección?

Respuesta esperada. Sea α uno de los ángulos resultantes de bisecar por primera vez al ángulo β, entonces por la definición de bisectriz se tiene que

$$\mathrm{m}\,\angle\alpha = \frac{128}{2} = 64.$$

Luego, sea $\angle\gamma$ uno de los ángulos obtenidos al bisecar a $\angle\alpha$, por definición de bisectriz se tiene que

$$\mathrm{m}\,\angle\alpha = \frac{64}{2} = 32.$$

Es decir, cada uno de los ángulos que se obtienen al realizar dos bisecciones consecutivas del ángulo $\angle\beta$, tiene medida 32. $\square$

3.3.7. Congruencia de triángulos

1. *Aplicar la definición de* ***congruencia de triángulos****.*

   Ejemplos de evaluación de este resultado de aprendizaje:

   I. Dado el triángulo $\triangle PQR$. Si $\triangle PQR \cong \triangle QPR$ y $\triangle PQR \cong \triangle PRQ$. ¿Qué se puede concluir de $\triangle PQR$? Justifique su respuesta.

   Respuesta esperada. Dado que $\triangle PQR \cong \triangle QPR$, gracias a la definición de congruencia de triángulos y su caracterización, se tiene que:

1) $\overline{PQ} \cong \overline{QP}$	3) $\overline{PR} \cong \overline{QR}$	5) $\angle Q \cong \angle P$
2) $\overline{QR} \cong \overline{PR}$	4) $\angle P \cong \angle Q$	6) $\angle R \cong \angle R$

   Ademas, dado que $\triangle PQR \cong \triangle PRQ$, tiene que:

1) $\overline{PQ} \cong \overline{PR}$	3) $\overline{PR} \cong \overline{PQ}$	5) $\angle Q \cong \angle R$
2) $\overline{QR} \cong \overline{RQ}$	4) $\angle P \cong \angle P$	6) $\angle R \cong \angle Q$

   Por tanto, se tiene que $\overline{PQ} \cong \overline{PR}$ y $\overline{PR} \cong \overline{QR}$, y junto a la transitividad de la relación de congruencia de segmentos, tenemos que $\overline{PQ} \cong \overline{QR}$. Con un razonamiento similar, a partir de que $\angle P \cong \angle Q$ y $\angle Q \cong \angle R$, junto a la transitividad de la relación congruencia de ángulos, se tiene que $\angle P \cong \angle R$. Entonces, se tiene que todos los lados y ángulos del triángulo $\triangle PQR$ son congruentes entre sí, es decir, es un triángulo equilátero y claramente equiangular. $\square$

   II. Dados $\triangle ABC$, $\triangle DEF$ y $\triangle GHK$. Si $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ y $\triangle DEF \cong \triangle GHK$ ¿Qué se puede concluir de $\triangle ABC$? Justifique su respuesta.

   Respuesta esperada. Podemos demostrar que $\triangle ABC \cong \triangle GHI$ usando la definición de congruencia de triángulos, que establece que dos triángulos son congruentes si y solo si sus tres lados tienen la misma longitud de hecho sus tres ángulos también tienen la misma medida angular.

Por lo tanto, si $\triangle ABC \cong \triangle DEF$, entonces sabemos que:

$$AB = DE$$
$$BC = EF$$
$$AC = DF$$

Y si $\triangle DEF \cong \triangle GHI$, entonces sabemos que:

$$DE = GH$$
$$EF = HI$$
$$DF = GI$$

Entonces, usando la transitividad de la igualdad, podemos decir que:

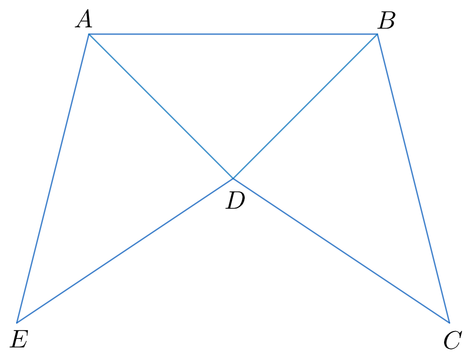
$$AB = GH$$
$$BC = HI$$
$$AC = GI$$

Lo que nos lleva a concluir que $\triangle ABC \cong \triangle GHI$, ya que ambos triángulos tienen los tres lados con igual longitud respectivamente y los tres ángulos con igual medida angular, respectivamente. Por lo tanto, la congruencia de triángulos es transitiva. $\square$

2. *Utilizar el* ***Teorema de condiciones para la congruencia de triángulos*** *para resolver un problema.*

   Ejemplos de evaluación de este resultado de aprendizaje:

   I. Dada la siguiente ilustración, Si $AE = BC$, $AD = BD$ y $\angle EAD \cong \angle CBD$. ¿Se puede demostrar que $\angle BDE \cong \angle ADC$? Justifique su respuesta.



Respuesta esperada. Con la información proporcionada y el teorema de condiciones para la congruencia de triángulos (LAL) se tiene que $\triangle EAD \cong \triangle CBD$, por lo que $\text{m}\,\angle EDA = \text{m}\,\angle BDC$. Por otro lado, aplicando el teorema de suma de ángulos, se tiene que:

$$\text{m}\,\angle BDE = \text{m}\,\angle EDA + \text{m}\,\angle ADB$$

Por lo antes mencionado, se tiene que:

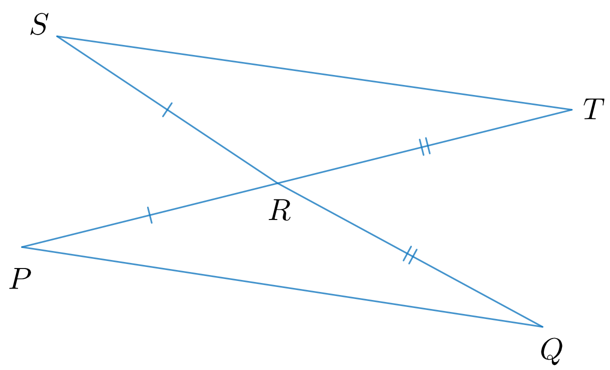
$$\text{m}\,\angle BDE = \text{m}\,\angle BDC + \text{m}\,\angle ADB$$

Además, aplicando de nuevo el teorema de suma de ángulos al ángulo

$$\text{m}\,\angle ADC = \text{m}\,\angle ADB + \text{m}\,\angle BDC$$

Por tanto, $\text{m}\,\angle BDE = \text{m}\,\angle ADC$, en otras palabras $\angle BDE \cong \angle ADC$. □

II. Dado el siguiente dibujo, donde $\overline{PT}$ interseca a $\overline{QS}$ en el punto R, tal que $PR = SR$ y $QR = TR$. Demuestre que $\angle P \cong \angle S$ Justifique su respuesta.

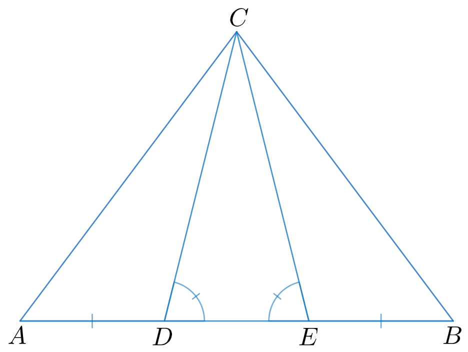


Respuesta esperada. Para empezar, se tiene que $\angle PRQ \cong \angle SRT$ pues forman un par vertical, con esto y a las hipótesis se puede utilizar el teorema de condiciones para la congruencia de triángulos (LAL), de lo que se concluye $\triangle PRQ \cong \triangle SRT$, luego por definición de congruencia de triángulos se tiene que $\angle P \cong \angle S$. □

3. *Utilizar el* ***Teorema del triángulo isósceles*** *para resolver un problema.*

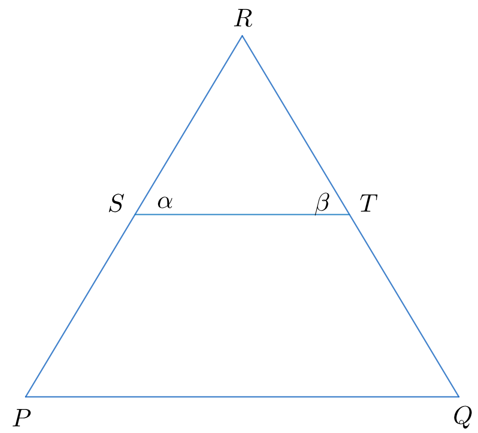
   Ejemplos de evaluación de este resultado de aprendizaje:

   I. Dado el siguiente dibujo con las marcas indicadas. ¿El triángulo $\triangle ABC$ es isósceles? Justifique su respuesta.



Respuesta esperada. Como se indica en el dibujo $\angle CDE \cong \angle CED$, luego por el teorema reciproco del triangulo isósceles, se tiene que $\overline{CD} \cong \overline{CE}$, además $\angle CDA \cong \angle CEB$ pues los ángulos suplementarios de ángulos congruentes son congruentes. Luego, por el teorema de Teorema de condiciones para la congruencia de triángulos (LAL) y lo antes expuesto, se tiene que $\triangle ADC \cong \triangle BEC$, entonces por la definición de congruencia de triángulos una de las congruencias es $\overline{AC} \cong \overline{BC}$, que por la definición de triángulo isósceles nos dice que $\triangle ABC$ en efecto es un triángulo isósceles. $\square$

II. En la ilustración a continuación, se tiene que : $PR = QR$, $\angle P \cong \angle \beta$, y $\angle Q \cong \angle \alpha$. Demostrar que el triangulo $\triangle RST$ es isósceles.

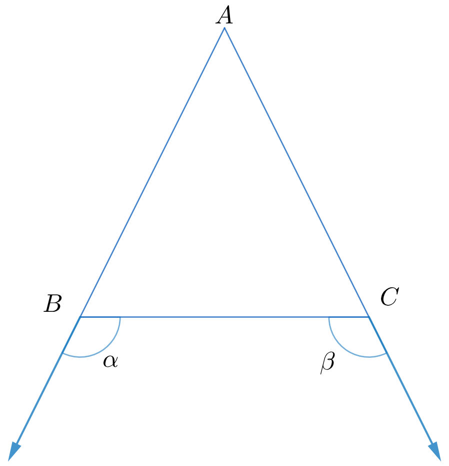


Respuesta esperada. Dado que $PR = QR$, por la definición de triángulo isósceles se tiene que $\triangle PRQ$ es isósceles, luego $\angle P \cong \angle Q$ por el Teorema del triángulo isósceles, luego por lo anterior y la hipótesis junto a la transitividad de la congruencia de ángulos $\angle \alpha \cong \angle \beta$. Con lo anterior y el Teorema reciproco del teorema del triángulo isósceles, se tiene que $\overline{RS} \cong \overline{RT}$, luego por definición, el triángulo $\triangle RST$ es isósceles. $\square$

4. *Identificar la definición de* ***ángulo externo de un triángulo****.*

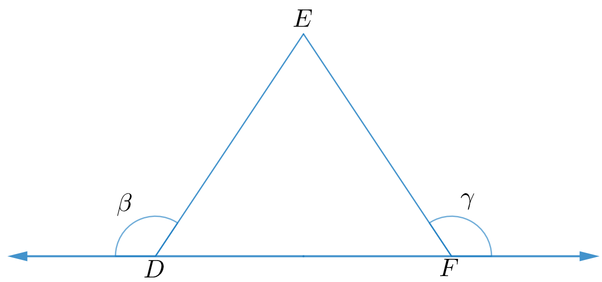
   Ejemplos de evaluación de este resultado de aprendizaje:

I. Dada la siguiente ilustración, el triángulo $\triangle ABC$ es isósceles, con $AB = AC$. Demuestre que $\angle\alpha \cong \angle\beta$.



Respuesta esperada. Dado que $\triangle ABC$ es isósceles y $AB = AC$, entonces por el teorema del triángulo isósceles, $\angle ABC \cong \angle ACB$. Ahora, según la ilustración y la definición de ángulo externo el $\angle\alpha$ es ángulo externo de $\angle ABC$, por lo que forman un par lineal, es decir, que $\angle\alpha$ es suplementario de $\angle ABC$, un análisis similar se hace para el ángulo $\angle ACB$ cuyo suplementario es β, luego $\angle\alpha \cong \angle\beta$, en efecto, sus medidas angulares son iguales, pues los suplementarios de ángulos congruentes son congruentes. $\square$

II. En el dibujo que se presenta a continuación, si $\angle\beta \cong \angle\gamma$, ¿se puede decir que $\triangle DEF$ es isósceles? Justifique su respuesta.



Respuesta esperada. Por la definición de ángulo externo de un triangulo y la ilustración presentada, se tiene que los ángulos $\angle\beta$ y $\angle\gamma$ son ángulos externos del triángulo $\triangle DEF$, entonces se conoce que son suplementarios de $\angle EDF$ y $\angle EFD$ respectivamente. Luego, como por hipótesis $\angle\beta \cong \angle\gamma$ y los ángulos suplementarios de ángulos congruentes también son congruentes, entonces $\angle EDF \cong \angle EFD$. Por lo antes dicho y aplicando el teorema rec'iproco del triángulo isósceles, se tiene que $ED = EF$, lo que indica que $\triangle DEF$ es isósceles. $\square$

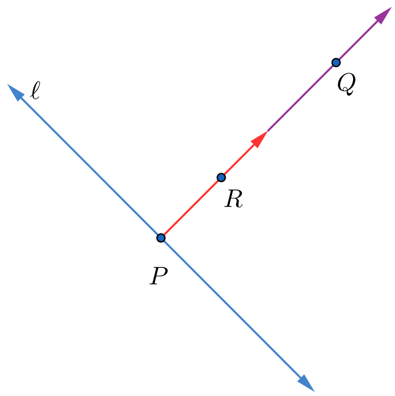
3.3.8. Perpendicularidad

1. *Aplicar el **Teorema de existencia y unicidad de la recta perpendicular** en la resolución de un problema*

   Ejemplos de evaluación de este resultado de aprendizaje:

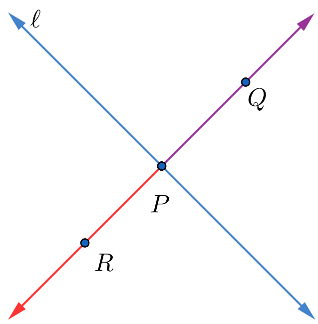
   I. Dado un un punto P en la recta ℓ, además $\overrightarrow{PQ} \perp \ell$ y $\overrightarrow{PR} \perp \ell$. ¿Cuál es la relación entre $\overleftrightarrow{PQ}$ y $\overleftrightarrow{PR}$? Justifique su respuesta.

   Respuesta esperada. Dadas las hipótesis, tenemos dos casos posibles, el primero en el que tanto Q como R estén del mismo lado de la recta ℓ, a continuación se presenta un dibujo de esta situación.



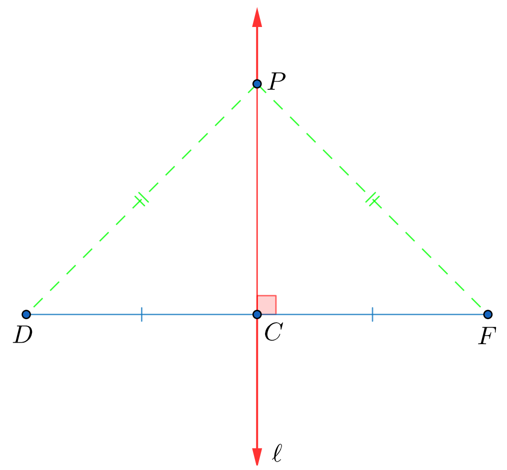
   Los rayos $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ}$, en efecto, tienen el mismo extremo y tanto R como Q pertenecen al otro rayo. Luego, ambos rayos están en la misma recta perpendicular $\overleftrightarrow{PQ} = \overleftrightarrow{PR}$, pues el teorema de existencia y unicidad de la recta perpendicular asegura su unicidad.

   Por otro lado, el segundo caso es cuando Q y R están en lados opuestos de la recta ℓ. El siguiente es un gráfico que ilustra la situación.

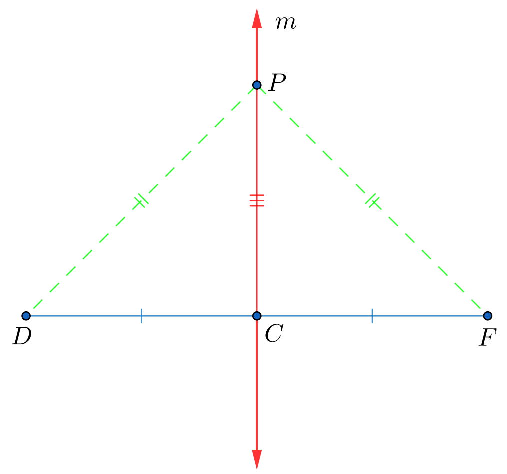


   En este caso $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ son rayos opuestos por definición, que además sabemos que están sobre una misma recta $\overleftrightarrow{PQ} = \overleftrightarrow{PR}$ pues el teorema de existencia y unicidad de la recta perpendicular asegura su unicidad. □

II. En la siguiente ilustración se tiene que ℓ es la mediatriz del segmento $\overline{DF}$. Demuestre que si $QD = QF$, entonces Q está en ℓ.



Respuesta esperada. Dado que $QD = QF$, si Q está en la recta $\overleftrightarrow{DF}$, entonces $Q = C$ pues el punto medio de $\overline{DF}$ es único. Por otro lado si Q no está en $\overleftrightarrow{DF}$, entonces denominemos m la recta que pasa por Q y C.



Además que $\triangle DCQ \cong \triangle FCQ$ pues tienen el lado común QC, $CD = CF$ y $QD = QF$, esto junto al teorema de condiciones de congruencia de triángulos (LLL), verifican la congruencia anterior. Es asi que $\angle DCQ \cong \angle FCQ$ y son ademas suplementarios, luego $\mathrm{m}\,\angle FCQ = 90$, por lo que $m \perp \overline{DF}$ en C. Entonces por el teorema de existencia y unicidad de la recta perpendicular, se tiene que $\ell = m$, por tanto Q está en ℓ. $\square$

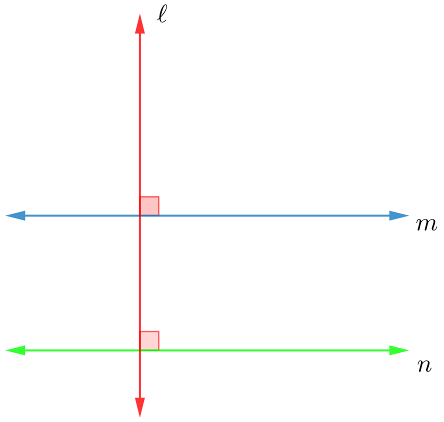
2. *Utilizar el **Teorema de ángulos rectos** para demostrar un teorema.*

   Ejemplos de evaluación de este resultado de aprendizaje:

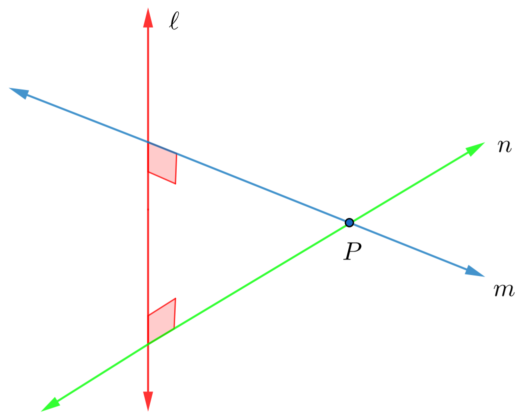
   I. Demuestre el siguiente Teorema:

Si una recta perpendicular a una de dos rectas es perpendicular a la otra, entonces las dos rectas son paralelas.

Demostración. Sea ℓ la recta perpendicular a la recta m y que también es perpendicular a la recta n. A continuación un dibujo que representa el problema.



Supongamos que m y n no son paralelas. Entonces, las dos rectas se cruzan en un punto P. Como ℓ es perpendicular a m, el ángulo formado por ℓ y m es recto. De manera similar, el ángulo formado por ℓ y n es recto.



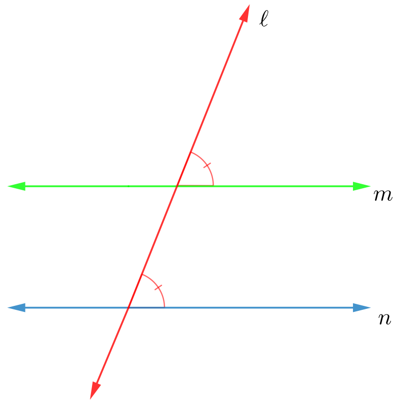
Pero esto contradice el teorema de ángulos rectos, ya que no puede haber más de un ángulo recto en un triángulo. Por lo tanto, nuestra suposición inicial de que m y n no son paralelas es incorrecta, lo que significa que m y n son paralelas.

Por lo tanto, hemos demostrado que si una recta perpendicular a una de dos rectas paralelas es perpendicular a la otra, entonces las dos rectas son paralelas. $\square$

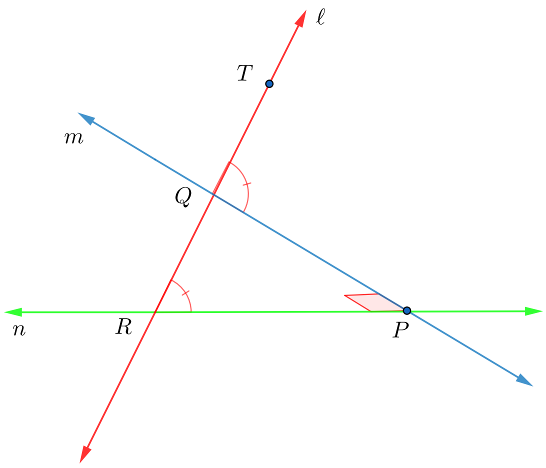
II. Demuestre el siguiente teorema:

Si dos rectas son cortadas por una recta transversal de manera que los ángulos correspondientes son congruentes, entonces las dos rectas son paralelas.

Demostración. Sea m y n dos rectas cortadas por una recta transversal ℓ de manera que los ángulos correspondientes son congruentes. A continuación un dibujo que representa el problema.



Supongamos que m y n no son paralelas. Entonces, las dos rectas se cruzan en un punto P. Sea Q el punto donde ℓ corta a m, y sea R el punto donde ℓ corta a n.



Como los ángulos correspondientes son congruentes, entonces $\angle QPR$ es recto. Pero esto contradice el teorema de ángulos rectos, ya que no puede haber más de un ángulo recto en un triángulo. Por lo tanto, nuestra suposición inicial de que m y n no son paralelas es incorrecta, lo que significa que m y n son paralelas.

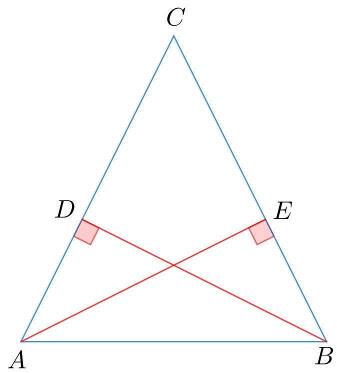
Por lo tanto, hemos demostrado que si dos rectas son cortadas por una recta transversal de manera que los ángulos correspondientes son congruentes, entonces las dos rectas son paralelas. $\square$

3. *Aplicar la* ***definición de altura del triángulo*** *para demostrar un teorema*

Ejemplos de evaluación de este resultado de aprendizaje:

I. Demostrar el teorema a continuación:

Dado un triangulo isósceles, las alturas correspondientes a los lados congruentes son congruentes. El siguiente dibujo ilustra el teorema anterior.



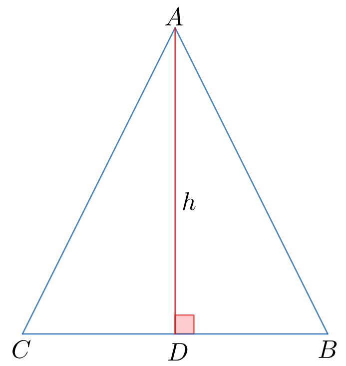
Demostración. Sea $\triangle ABC$ un triángulo isósceles con $CB = CA$. Sean BD y AE las alturas correspondientes a los lados congruentes CA y CB, respectivamente.

Por definición, la altura BD es perpendicular al lado CA y la altura AE es perpendicular al lado CB. Como $CB = CA$, entonces los ángulos $\angle BCA$ y $\angle ABC$ son congruentes. Además, como BD es perpendicular a CA y AE es perpendicular a AB, entonces $\angle BDA$ y $\angle BEA$ también son congruentes.

Por lo tanto, los triángulos $\triangle BDA$ y $\triangle BEA$ son congruentes por el criterio (LAL) ya que $BD = AE$ (ambos son alturas del triángulo) y $\angle BDA = \angle BEA$ (ambos son congruentes). En consecuencia, los lados correspondientes son congruentes, es decir, $DA = EB$.

Finalmente, como $EB = BD$, entonces $DA = BD$, lo que significa que las alturas correspondientes a los lados congruentes CA y CB también son congruentes, como se quería demostrar. □

II. Demostrar el siguiente Teorema: *Dado un triangulo isósceles, la altura correspondiente a su base es también una mediana* A continuación se ilustra el teorema anterior.



Demostración. Sea $\triangle ABC$ un triángulo isósceles con $AB = AC$. Sea AD la altura correspondiente a la base BC y sea M el punto medio de BC. Queremos demostrar que AD es también una mediana del triángulo $\triangle ABC$, es decir, que $AM = AD$.

Como M es el punto medio de BC, entonces $BM = MC$. Como $\triangle ABC$ es isósceles, tenemos que $\angle ACB = \angle ABC$, y por lo tanto $\angle BAM = \angle CAM$. Además, como AD es perpendicular a BC, entonces $\angle BAD = \angle CAD$.

Por lo tanto, los triángulos $\triangle ABD$ y $\triangle ACD$ son congruentes por el criterio (LAL), ya que $AB = AC$, $\angle BAD = \angle CAD$, y AD es común a ambos triángulos. En consecuencia, los lados correspondientes son congruentes, es decir, $BD = DC$.

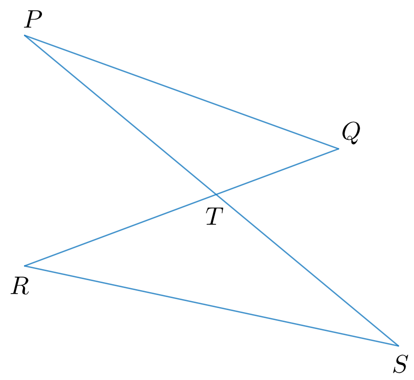
Como M es el punto medio de BC, entonces $BM = MC$ y $MD = MC - BD$. Pero como $BD = DC$, entonces $MD = MC - DC = MB$. Por lo tanto, $AM = AB - BM = AC - MC = MD$, lo que significa que AD es también una mediana del triángulo $\triangle ABC$. $\square$

3.3.9. Desigualdades

1. *Utilizar el* ***Teorema de la Desigualdad Escaleno*** *en la resolución de un problema*

   Ejemplos de evaluación de este resultado de aprendizaje:

   I. Dada la siguiente ilustración, en donde $\overline{SP}$ y $\overline{RQ}$ se intersecan en el punto T, $\angle R > \angle S$ y $\angle Q > \angle P$. ¿Es cierto que $SP > RQ$? Justifique su respuesta.

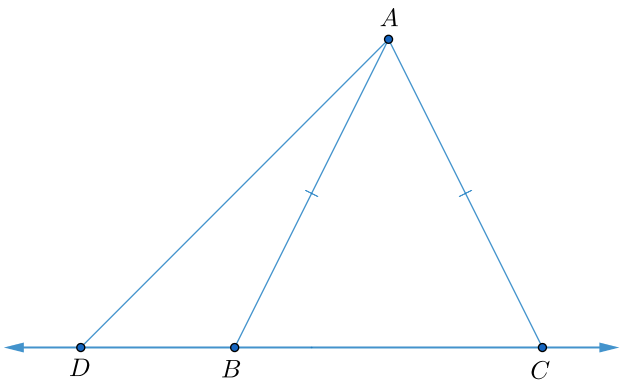


Respuesta esperada. Se conoce que $\angle R > \angle S$, luego aplicando el teorema de desigualdad Escaleno al triángulo $\triangle RST$, se tiene que $ST > RT$, por otro lado se conoce que $\angle Q > \angle P$ y aplicando el teorema de desigualdad Escaleno al triángulo $\triangle PQT$, se tiene que $TP > TQ$. Ahora bien, dado que las longitudes de los segmentos son positivas y haciendo uso de las propiedades de las desigualdades en los numeros reales, y en base a lo antes expuesto, se tiene que:

$$ST + TP > RT + TQ$$

Por lo que se concluye que $SP > RQ$. $\square$

II. Dado el triángulo isósceles $\triangle ABC$, $AB = AC$; sea D un punto de $\overleftrightarrow{BC}$, pero que no está en $\overline{BC}$. Demuestre que $DA > AC$.



Respuesta esperada. Para empezar apliquemos el teorema de la suma de los ángulos de un triángulo tanto a $\triangle ABC$, como $\triangle ACD$, entonces se tiene:

$$\begin{aligned} 180 &= 2\,\mathrm{m}\,\angle ACB + \mathrm{m}\,\angle CAB \\ 180 &= \mathrm{m}\,\angle ADC + \mathrm{m}\,\angle ACB + \mathrm{m}\,\angle CAD. \end{aligned}$$

Por otro lado, por el teorema de suma de ángulos aplicado a $\angle CAD$, se tiene que: $\mathrm{m}\,\angle CAD = \mathrm{m}\,\angle CAB + \mathrm{m}\,\angle BAD$ reemplazando esto en ecuación en la segunda, se obtiene lo siguiente:

$$180 = \mathrm{m}\,\angle ADC + \mathrm{m}\,ACB + \mathrm{m}\,\angle CAB + \mathrm{m}\,\angle BAD$$

Luego, restando la primera ecuación de lo anterior se tiene lo siguiente:

$$\mathrm{m}\,\angle ACB = \mathrm{m}\,\angle ADC + \mathrm{m}\,\angle BAD$$

Dado que en los numeros reales tenemos la propiedad de que el todo es mayor que las partes, entonces aplicado a lo anterior resulta en:

$$\mathrm{m}\,\angle ACB > \mathrm{m}\,\angle ADC$$

Ademas, $\mathrm{m}\,\angle ACB = \mathrm{m}\,\angle ACD$, lo cual es reemplazado en la desigualdad anterior, entonces:

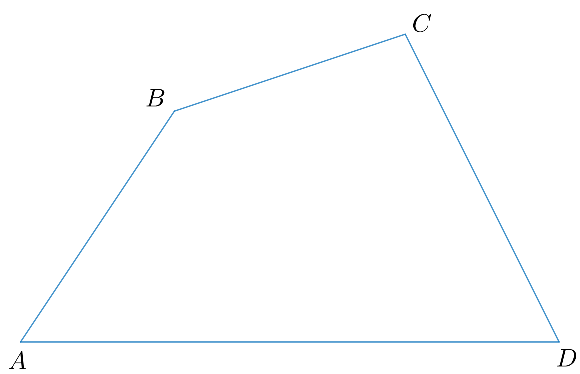
$$\mathrm{m}\,\angle ACD > \mathrm{m}\,\angle ADC$$

Con ello y el teorema del triángulo escaleno, aplicado a $\triangle ACD$, see concluye que $DA > AC$. □

2. *Aplicar el* ***Teorema de la Desigualdad Triangular*** *en la resolución de un problema*

   Ejemplos de evaluación de este resultado de aprendizaje:

   I. Dado el siguiente gráfico, ¿se verifica que $AD < AB + BC + CD$? Justifique su respuesta.



Respuesta esperada. Si se traza $\overline{BD}$ es claro que tenemos dos triángulos $\triangle ABD$ y $\triangle BCD$, utilizando la desigualdad triangular para cada triángulo , se obtiene lo siguiente: $AD < AB + BD$ y $BD < BC + CD$.

Dado que todas las longitudes son positivas y usando las propiedades de las desigualdades en los números reales, se adiciona AB a cada lado de la ultima desigualdad y se tiene

$$AB + BD < AB + BC + CD$$

Esto junto a la primera desigualdad y la transitividad que preserva la desigualdad, se tiene que:

$$AD < AB + BC + CD. \qquad \square$$

II. Dados los puntos A, B y C no necesariamente distintos. ¿Se verifica que $AB + BC \geq AC$? Justifique su respuesta.

Respuesta esperada. Para contestar esta pregunta, se divide en casos el problema. El primer caso es trivial, suponiendo que todos los puntos son iguales, entonces la distancia entre ellos es cero, por tanto se verifica la desigualdad.

El segundo caso es donde un par de puntos son iguales y el otro es distinto, sin perdida de generalidad, supongamos $A = B$ y $A \neq C$ por tanto $AB = 0$ y $AC = BC$, es decir que $AC = AB + BC$, por ello se verifica la desigualdad.

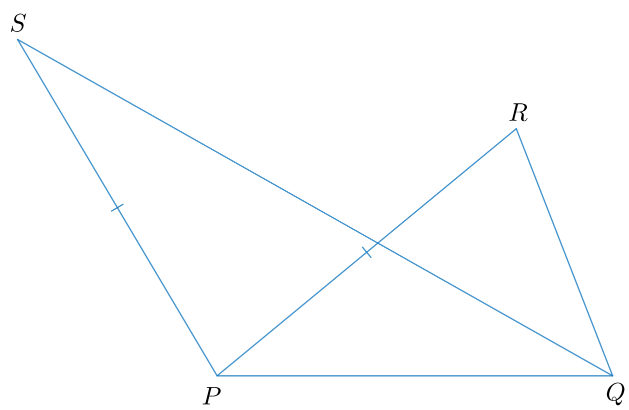
Luego, el ultimo caso es cuando A, B y C son distintos, este caso se divide en dos, el primero cuando los puntos son colineales, que por la definición de la relación "entre" se tiene que $AB + BC = Ac$, por ultimo si los puntos no son colineales, gracias a la desigualdad triangular, se tiene que $AB + BC > AC$.

Se concluye que se verifica la desigualdad $AB + BC \geq AC$ en todos los casos. $\square$

3. *Utilizar el **Teorema de la Charnela** en la demostración de un teorema*

Ejemplos de evaluación de este resultado de aprendizaje:

I. Dados los triángulos $\triangle PQR$ y $\triangle PQS$ cuyo lado común es PQ, y $PR = PS$. Si R está en el interior de $\angle SPQ$. ¿Es posible verificar que $QS > QR$? Justifique su respuesta.



Respuesta esperada. Dado que R está en el interior de $\angle SPQ$, podemos aplicar el teorema de la suma de ángulos, entonces $\text{m}\,\angle SPQ = \text{m}\,\angle SPR + \text{m}\,\angle RPQ$, luego $\text{m}\,\angle SPQ > \text{m}\,\angle RPQ$. Dado que $PR = PS$ y el hecho de que los triángulos $\triangle PSQ$ y $\triangle PRQ$ comparten el lado PQ, entonces es posible usar el teorema de la charnela, por tanto se concluye que $QS > QR$. □

3.3.10. Paralelismo

1. *Aplicar el* ***postulado de las rectas paralelas*** *para demostrar un teorema*

   Ejemplos de evaluación de este resultado de aprendizaje:

   I. Demuestre el siguiente teorema:

   Sea $\triangle ABC$ un triángulo y P un punto en la extensión de uno de los lados, digamos $\overline{AB}$. Entonces, la bisectriz del ángulo exterior en C es paralela a $\overleftrightarrow{AB}$.

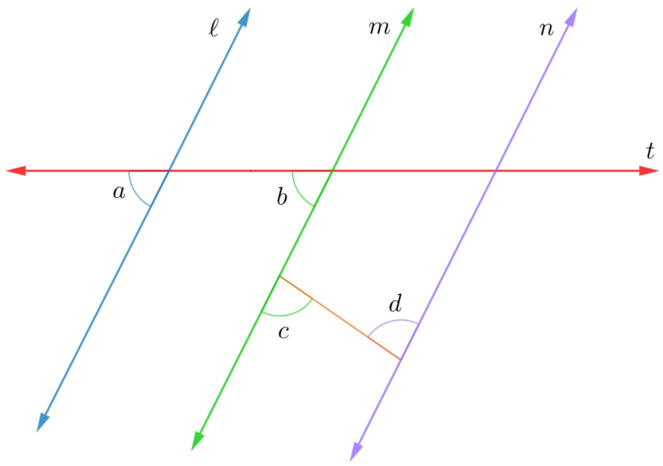
   Demostración. Sea Q el punto en la extensión de $\overline{BC}$ tal que $\triangle PQC$ es un triángulo isósceles. Por el postulado de las rectas paralelas, sabemos que hay una paralela a $\overleftrightarrow{AB}$ que pasa por P. Llamemos D a la intersección de esta paralela con $\overline{AC}$. Como $\triangle PCQ$ es isósceles, tenemos que $\text{m}\,\angle CQP = \text{m}\,\angle QCP = \text{m}\,\angle ACD$. Como $\angle ACD$ y $\angle ACB$ son ángulos alternos internos, se tiene que $\overleftrightarrow{AC}$ es una transversal de las rectas paralelas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$.

   Por lo tanto, $\text{m}\,\angle ACB = \text{m}\,\angle ACD$ y, como $\text{m}\,\angle ACB + \text{m}\,\angle BCA = 180$, se sigue que $\text{m}\,\angle ACD = \dfrac{1}{2}\,\text{m}\,\angle BCA$. Así, la bisectriz del ángulo exterior en C es paralela a $\overleftrightarrow{AB}$. □

2. *Utilizar los* ***teoremas de condiciones suficientes para paralelas*** *para resolver un problema*

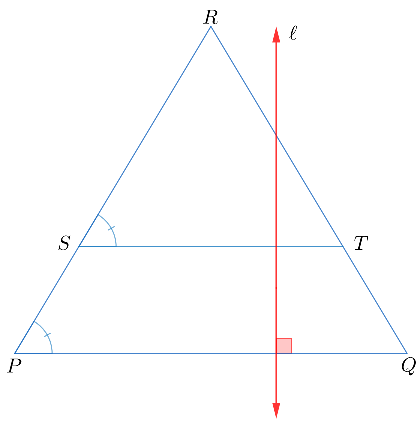
   Ejemplos de evaluación de este resultado de aprendizaje:

   I. Dada la siguiente figura, donde $\angle a \cong \angle b$ y $\angle c \cong \angle d$, determine si $\ell \parallel m$. Justifique su respuesta.



Respuesta esperada. Los ángulos $\angle a$ y $\angle b$ son correspondientes por definición, entonces dada la hipótesis $\angle a \cong \angle b$ y aplicando el Teorema de condiciones suficientes para paralelas (ángulos correspondientes), se tiene que $\ell \parallel m$. Por otro lado, dado que los ángulos $\angle c$ y $\angle d$ son alternos internos y aplicando el Teorema de condiciones suficientes para paralelas (ángulos alternos internos), se tiene que $m \parallel n$, luego por la transitividad, se tiene que $\ell \parallel n$. $\square$

II. Dado el siguiente dibujo, donde $\angle RST \cong \angle P$ y $\ell \perp \overleftrightarrow{PQ}$. ¿Se puede verificar que $\ell \perp \overleftrightarrow{ST}$? Justifique su respuesta.



Respuesta esperada. Los ángulos $\angle RST$ y $\angle P$ al ser correspondientes y congruentes cumplen las hipótesis necesarias para aplicar el teorema de condiciones suficientes para que dos rectas sean paralelas, por lo que $\overleftrightarrow{PQ} \parallel \overleftrightarrow{ST}$, además al ℓ ser una transversal a dichas paralelas, gracias al teorema de condiciones necesarias para paralelas y que ℓ es perpendicular a $\overleftrightarrow{PQ}$, los ángulos interiores a cada lado de la transversal son rectos, por lo que $\ell \perp \overleftrightarrow{ST}$. $\square$

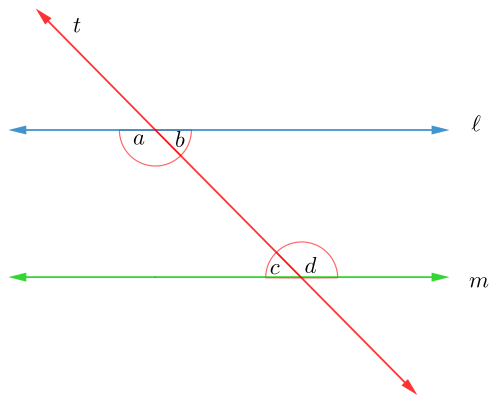
3. *Utilizar los **teoremas de condiciones necesarias para paralelas** para resolver un problema*

Ejemplos de evaluación de este resultado de aprendizaje:

I. Demuestre que:

Dadas dos rectas paralelas y una recta transversal a ellas, los ángulos internos de un mismo lado de la transversal son suplementarios.

A continuación un gráfico que ilustra el teorema:

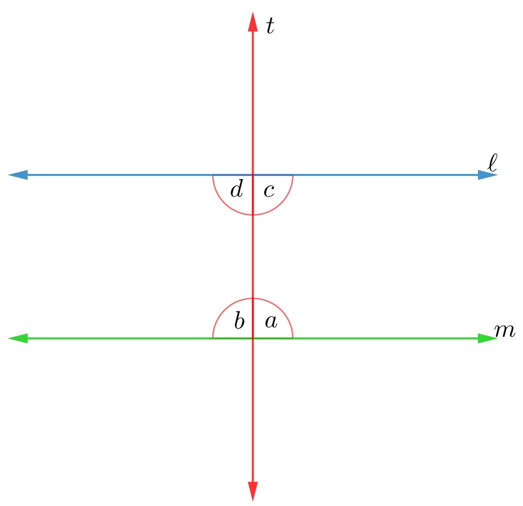


Respuesta esperada. Dados los ángulos alternos internos $\angle a$ y $\angle d$, $\angle b$ y $\angle c$ y dado que las rectas ℓ y m son paralelas, entonces por el teorema de condiciones necesarias para paralelas, se tiene que $\mathrm{m}\,\angle a = \mathrm{m}\,\angle d$ y $\mathrm{m}\,\angle b = \mathrm{m}\,\angle c$, además, los ángulos $\angle a$ y $\angle b$, $\angle c$ y $\angle d$ son suplementarios respectivamente, por tanto se concluye que los ángulos $\angle a$ y $\angle c$, $\angle b$ y $\angle d$ son suplementarios respectivamente. $\square$

II. Demuestre que:

Dada una recta perpendicular a una de dos paralelas, entonces es perpendicular a la otra.

A continuación un dibujo que ilustra el teorema:



Respuesta esperada. Dadas las rectas ℓ y m paralelas, aplicando el teorema de condiciones necesarias para paralelas se tiene que los ángulos alternos internos son congruentes, además dado que t es perpendicular a ℓ, entonces los ángulos internos de cada lado de la transversal t son todos rectos, luego aplicando la definición de recta perpendicular, se tiene que $t \perp m$. □

3.3.11. Semejanza de triángulos

1. *Diferenciar los **conceptos de semejanza y congruencia** de triángulos*

   Ejemplos de evaluación de este resultado de aprendizaje:

   I. Demostrar que si el $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ entonces $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

   Respuesta esperada. Para demostrar que dos triángulos son semejantes, debemos mostrar que tienen los mismos ángulos y que sus lados correspondientes son proporcionales.

   Dado que $\triangle ABC \cong \triangle DEF$, sabemos que sus lados correspondientes son congruentes. Es decir, $AB = DE$, $BC = EF$ y $AC = DF$.

   Ahora, para demostrar que los triángulos son semejantes, debemos mostrar que tienen los mismos ángulos. Sabemos que los ángulos opuestos a los lados congruentes son iguales en ambos triángulos. Es decir, $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$ y $\angle C \cong \angle F$.

   Por lo tanto, podemos concluir que $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ por el criterio de semejanza de ángulos, ya que tienen los mismos ángulos y sus lados correspondientes son proporcionales. □

   II. Demuestre que: *Si $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ y $\triangle DEF \cong \triangle GHI$, entonces $\triangle ABC \sim \triangle GHI$.*

   Respuesta esperada. Dado que $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ y $\triangle DEF \cong \triangle GHI$, podemos utilizar la transitividad de la semejanza para concluir que $\triangle ABC \sim \triangle GHI$.

   La transitividad de la semejanza establece que si dos figuras son semejantes a una tercera figura, entonces son semejantes entre sí. Es decir, si $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ y $\triangle DEF \sim \triangle GHI$, entonces $\triangle ABC \sim \triangle GHI$.

   Para aplicar la transitividad en este caso, debemos mostrar que los ángulos correspondientes de los dos triángulos son iguales y que los lados correspondientes son proporcionales.

Sabemos que $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, lo que significa que los ángulos correspondientes son iguales y los lados correspondientes son proporcionales. Es decir,

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}, \quad \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} \quad \text{y} \quad \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$$
$$\angle A \cong \angle D, \quad \angle B \cong \angle E, \quad \angle C \cong \angle F$$

También se nos dice que $\triangle DEF \cong \triangle GHI$, lo que significa que los ángulos correspondientes son iguales y los lados correspondientes son congruentes. Es decir,

$$DE = GH, \quad EF = HI, \quad DF = GI$$

$$\angle D \cong \angle G, \quad \angle E \cong \angle H, \quad \angle F \cong \angle I$$

Para demostrar que $\triangle ABC \sim \triangle GHI$, debemos mostrar que los ángulos correspondientes son iguales y los lados correspondientes son proporcionales.

Empezando con los ángulos, podemos ver que:

$$\angle A \cong \angle D \cong \angle G$$

$$\angle B \cong \angle E \cong \angle H$$

$$\angle C \cong \angle F \cong \angle I$$

Esto se debe a que los ángulos correspondientes de dos triángulos semejantes son iguales.

Ahora, consideremos los lados correspondientes:

$$\frac{AB}{GH} = \frac{AB}{DE} \cdot \frac{DE}{GH} = \frac{BC}{EF} \cdot \frac{EF}{HI} \cdot \frac{HI}{GH} = \frac{AC}{DF} \cdot \frac{DF}{GI} = \frac{AC}{GI}$$

Como podemos ver, los lados correspondientes son proporcionales. Entonces, podemos concluir que $\triangle ABC \sim \triangle GHI$ por la transitividad de la semejanza que se demostr'o en el ejercicio previo. $\square$

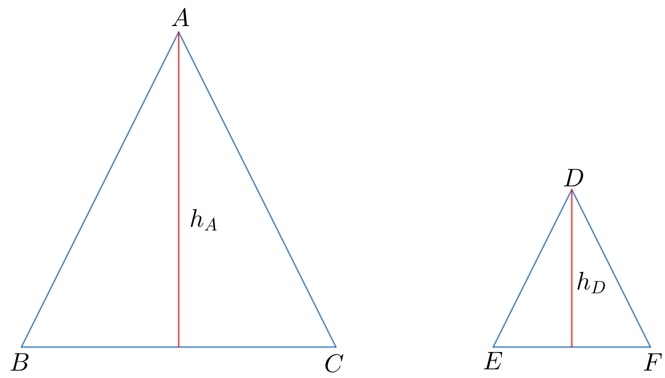
2. *Utilizar el* ***teorema de condiciones de semejanza de triángulos*** *para demostrar un teorema*

   Ejemplos de evaluación de este resultado de aprendizaje:

   I. Demuestre el siguiente teorema:

Dos alturas correspondientes cualesquiera de dos triángulos semejantes están en la misma razón que los lados correspondientes

Respuesta esperada. Sea $\triangle ABC$ semejante a $\triangle DEF$ y sean h_A y h_D las alturas correspondientes a los vértices A y D respectivamente. También sean BC, AC y AB los lados correspondientes a los ángulos $\angle B$, $\angle A$ y $\angle C$ en $\triangle ABC$, y sean EF, DF y DE los lados correspondientes a los ángulos $\angle E$, $\angle D$ y $\angle F$ en $\triangle DEF$.



Como $\triangle ABC$ es semejante a $\triangle DEF$, sabemos que los lados correspondientes son proporcionales, es decir:

$$\frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} = \frac{AB}{DE}$$

Consideremos la altura h_A de $\triangle ABC$ trazada desde el vértice A y su altura correspondiente h_D en $\triangle DEF$ trazada desde el vértice D. Sabemos que estas alturas son perpendiculares a los lados correspondientes $\overline{BC}$ y $\overline{EF}$ respectivamente.

Entonces, podemos expresar la longitud de estas alturas en términos de los lados correspondientes:

$$h_A = BC \cdot \sin\angle B \quad = BC \cdot \sin\angle E \quad = \frac{BC}{EF} \cdot EF \cdot \sin\angle E \quad = \frac{BC}{EF} \cdot h_D$$

Donde hemos utilizado teorema de condiciones de semejanza de triángulos (AA).

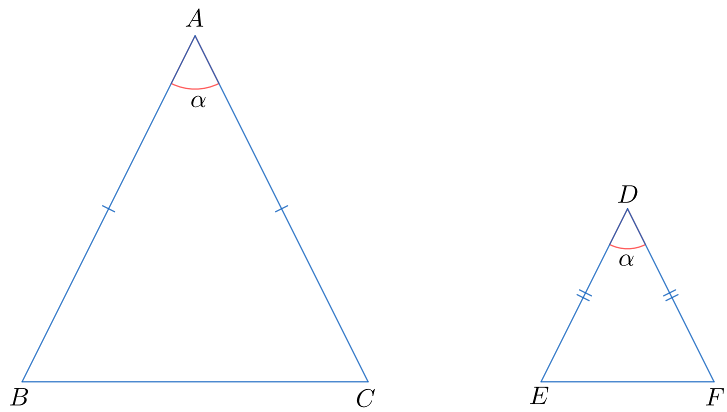
Luego, como $\frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} = \frac{AB}{DE}$, podemos sustituir en la expresión anterior y obtener:

$$h_A = \frac{AB}{DE} \cdot h_D$$

Con lo que se demuestra que las alturas mencionadas están en proporción a la misma razón. $\square$

II. Demuestre lo siguiente:

Dados dos triángulos isósceles $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$, si los ángulos opuestos a sus respectivas bases son congruentes, entonces los triángulos son semejantes.



Respuesta esperada. Sea $\triangle ABC$ un triángulo isósceles con base $\overline{BC}$ y ángulo en A igual a α y sea $\triangle DEF$ un triángulo isósceles con base EF y ángulo en D igual a α.

Como $\triangle ABC$ es isósceles, sabemos que la altura $\overline{AH}$ biseca la base $\overline{BC}$. Análogamente, la altura $\overline{DK}$ del triángulo $\triangle DEF$ biseca la base $\overline{EF}$.

Como $\triangle ABC$ es isósceles, entonces los ángulos $\mathrm{m}\angle B = \mathrm{m}\angle C$, y por el teorema de la suma de la suma de los ángulos internos de un triángulo se tiene que:

$$\mathrm{m}\angle\alpha + 2\,\mathrm{m}\angle B = 180$$

De manera similar, $\mathrm{m}\angle E = \mathrm{m}\angle F$ y

$$\mathrm{m}\angle\alpha + 2\,\mathrm{m}\angle E = 180$$

Por tanto, se tiene que $\mathrm{m}\angle B = \mathrm{m}\angle E$, luego utilizando el teorema de condiciones de semejanza de triángulos (AA) se concluye que los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ son semejantes. $\square$

3. *Utilizar el **teorema de pitágoras** en la resolución de un problema*

   Ejemplos de evaluación de este resultado de aprendizaje:

I. Demuestre que: *Si a y b son números naturales tales que $a > b$, entonces dado un triángulo rectángulo con catetos de longitud $a^2 - b^2$ y $2ab$, la longitud de la hipotenusa es $a^2 + b^2$.*

Respuesta esperada. Consideremos un triángulo rectángulo con catetos de longitud $a^2 - b^2$ y $2ab$. Denotemos por c la longitud de la hipotenusa del triángulo.

Por el teorema de Pitágoras, sabemos que $c^2 = (a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2$. Expandiendo los términos dentro de los paréntesis y simplificando, obtenemos:

$$c^2 = a^4 - 2a^2b^2 + b^4 + 4a^2b^2 = a^4 + 2a^2b^2 + b^4 = (a^2 + b^2)^2$$

Donde hemos utilizado el hecho de que $2a^2b^2$ y $-2a^2b^2$ se cancelan mutuamente. Entonces, hemos demostrado que $c = a^2 + b^2$. $\square$

II. Dados los catetos de un triángulo rectángulo, sus longitudes son m y n respectivamente y h la longitud de su hipotenusa. Demuestre que para cualesquier número positivo a los números am, ab y ah son longitudes de los lados de otro triángulo rectángulo.

Respuesta esperada. Sea $\triangle ABC$ un triángulo rectángulo con catetos de longitud m y n, y sea h la longitud de la hipotenusa de $\triangle ABC$. Sabemos por el teorema de Pitágoras que $h^2 = m^2 + n^2$.

Consideremos ahora un número positivo a cualquiera. Construimos un triángulo rectángulo $\triangle DEF$ con catetos de longitud am y an, respectivamente. La hipotenusa de este triángulo es ah debido a la propiedad de que los lados de un triángulo rectángulo forman una proporción constante con los lados de cualquier otro triángulo rectángulo semejante.

Para demostrar que ab también es la longitud de uno de los lados del triángulo $\triangle DEF$, podemos usar el hecho de que los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ son semejantes, ya que tienen ángulos congruentes y una proporción constante entre sus lados. Entonces, podemos escribir:

$$\frac{ab}{m} = \frac{a \cdot an}{am} = \frac{an}{m}$$

Como $n/m = \sin(\angle ABC)$, entonces $an/m = a \cdot \sin(\angle ABC)$. Por lo tanto, tenemos que:

$$\frac{ab}{m} = a \cdot \sin(\angle ABC)$$

De esta manera, si llamamos $BF = ab$, podemos ver que $BF = a \cdot \sin(\angle ABC) \cdot AF$. Como $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ son semejantes, podemos escribir

$$\frac{BF}{AF} = \frac{BC}{AC} = \tan(\angle ABC)$$

, y por lo tanto:

$$BF = AF \cdot \tan(\angle ABC) = mn \cdot \tan(\angle ABC)$$

Luego, hemos demostrado que ab es la longitud de uno de los lados del triángulo $\triangle DEF$. Por lo tanto, hemos demostrado que para cualquier número positivo a, los números am, ab y ah son las longitudes de los lados de otro triángulo rectángulo $\triangle DEF$, lo cual completa la demostración. □

3.3.12. Cuadriláteros

1. *Identificar la definición* ***cuadrilátero***

   Ejemplos de evaluación de este resultado de aprendizaje:

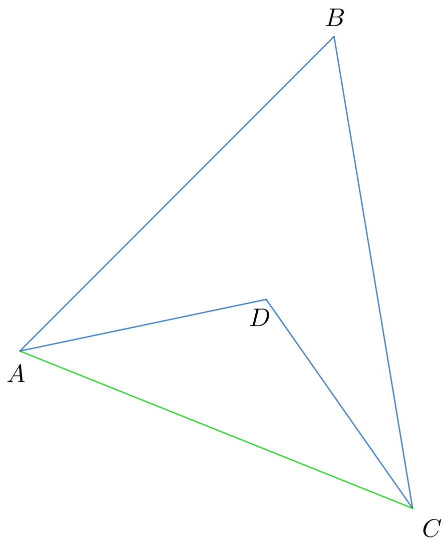
   I. Responda las siguientes preguntas, argumentando sus respuestas:

      1) ¿Las diagonales de un cuadrilátero siempre se intersecan?

         Respuesta esperada. No necesariamente, pues esto solo ocurre con toda seguridad si el cuadrilátero es convexo. □

      2) ¿Es posible graficar un cuadrilátero $\square DEFG$ tal que E y G estén del mismo lado de la diagonal DF? Si la respuesta es afirmativa, dibuje el cuadrilátero, caso contrario justifique su respuesta.

         Respuesta esperada. Como se mencionó en la pregunta anterior, es posible que no se intersequen las diagonales, el siguiente dibujo ilustra a un cuadrilátero no convexo:

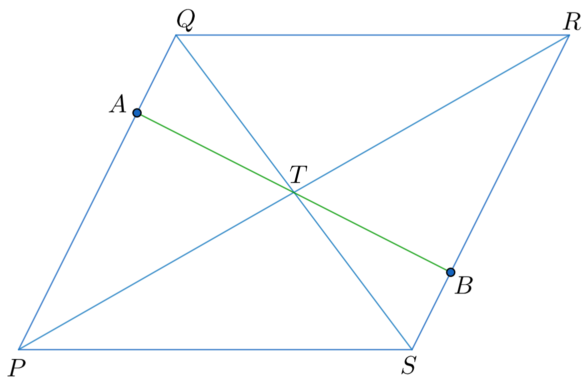


Donde tanto B como D estan del mismo lado de $\overline{AC}$. $\square$

2. *Aplicar el teorema de condiciones necesarias para hacer un paralelogramo*

   Ejemplos de evaluación de este resultado de aprendizaje:

   I. Dado el paralelogramo $\square PQRS$ con diagonales $\overline{QS}$ y $\overline{PR}$, tales que se intersecan en T, demuestre que si dos puntos A y B de lados opuestos del paralelogramo tales que T est en $\overline{AB}$, entonces $AT = TB$. A continuación se ilustra el ejercicio con un dibujo:

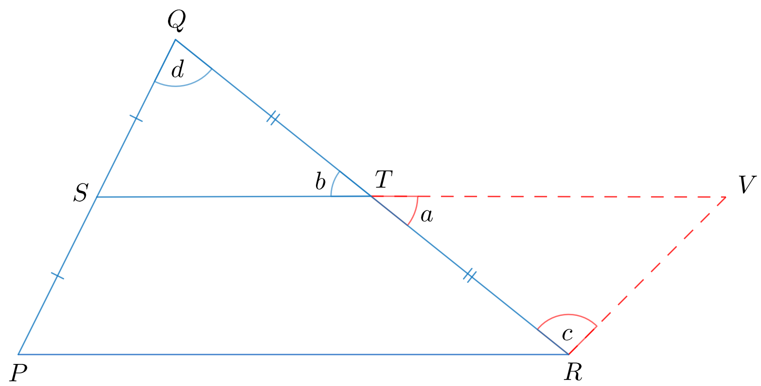


Respuesta esperada. Dado que $PQRS$ es un paralelogramo, gracias al teorema de condiciones necesarias del paralelogramo, se tiene que las diagonales se bisecan, por tanto $PT = TR$ y $QT = TS$. Además, $\angle ATP \cong \angle BTR$ pues son opuestos por el vértice. Por otro lado, dado que $\overline{PQ} \parallel \overline{RS}$ y $\overline{PR}$ es una transversal, se puede aplicar el teorema de condiciones necesarias de paralelas, entonces $\angle APT \cong \angle BRT$. Es decir, que $\triangle TPA \cong \triangle TRB$ por el teorema de condiciones de congruencia de los triángulos (ALA), por lo que concluimos que sus lados correspondientes son congruentes, en particular $AT = TB$. $\square$

3. *Utilizar el teorema de condiciones suficientes para hacer un paralelogramo*

Ejemplos de evaluación de este resultado de aprendizaje:

I. Dado el siguiente teorema: *Sea $\triangle PQR$, si el segmento $\overline{ST}$ une a los puntos medios S y T de los lados $\overline{PQ}$ y $\overline{QR}$, respectivamente, entonces $\overline{ST} \parallel \overline{PR}$ y $ST = \dfrac{PR}{2}$.*



Argumente con el axioma, teorema o definición que justifica cada paso de la siguiente demostración.

Sea V un punto en la recta $\overleftrightarrow{ST}$ tal que S y V están en lados opuestos de $\overleftrightarrow{QR}$ y $ST = TV$. Además, se tiene por (1) __________ que $TQ = TR$, por otro lado $\angle a \cong \angle b$ por (2)__________. Por lo anterior y aplicando (3)__________ se dice que $\triangle TVR \cong \triangle TSQ$ por tanto $\angle c \cong \angle d$, lo que indica que cumple la hipótesis necesaria para utilizar (4)__________ y con lo que se tiene $\overleftrightarrow{PQ} \parallel \overleftrightarrow{RV}$. Por otro lado $PS = VR$, pues $SQ = VR$ por la congruencia de triángulos antes expuesta y porque $PS = SQ$ por definición de punto medio, luego $\square PSVR$ es un paralelogramo por (5)__________, es asi que $\overline{ST} \parallel \overline{PR}$ y $ST = \dfrac{PR}{2}$.

Respuesta esperada. Las siguientes son los teoremas y definiciones que justifican los pasos de la demostración:

1) Definición de punto medio
2) Definición de ángulos opuestos por el vértice
3) Teorema de condiciones de congruencia de triángulos (LAL)
4) Teorema de condiciones suficientes para las paralelas
5) Teorema de condiciones suficientes del paralelogramo □

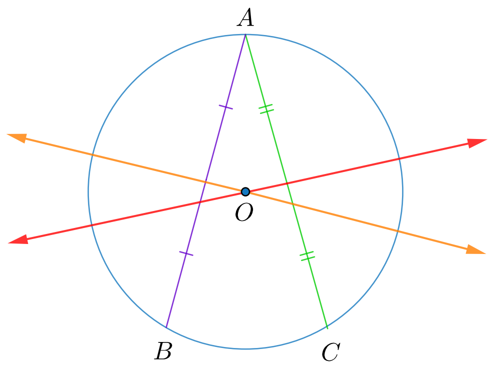
3.3.13. Círculos

1. *Diferenciar entre el concepto de* ***círculo*** *y* ***circunferencia****.*

   Ejemplos de evaluación de este resultado de aprendizaje:

   I. Dados A, B y C puntos no colineales cualesquiera estos están en una circunferencia.

   Respuesta esperada. Para demostrar que A, B y C están en una circunferencia, debemos encontrar el centro y el radio de una circunferencia que pase por estos tres puntos. Para ello, trazamos las dos mediatrices de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$:



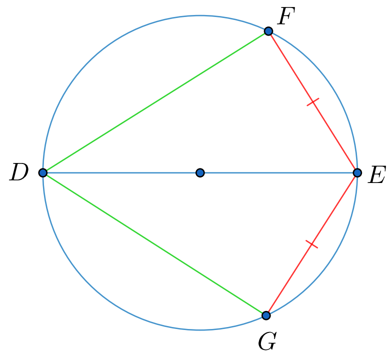
   Las mediatrices se intersectan en el punto O, que es el centro de la circunferencia circunscrita a los puntos A, B y C. Para demostrar que la circunferencia circunscrita pasa por los tres puntos, observemos que $\overline{OA} = \overline{OB}$ y $\overline{OC} = \overline{OB}$, ya que O está equidistante de los puntos A y B y de los puntos B y C, respectivamente. Por lo tanto, $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$, lo que significa que la distancia entre cualquier par de puntos es igual al radio de la circunferencia circunscrita. Como A, B y C están a la misma distancia de O, deben estar en la circunferencia circunscrita. Por lo tanto, A, B y C están en una circunferencia cuyo centro es el punto O, que es la intersección de las mediatrices de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$. $\square$

2. *Utilizar la definición de* ***ángulo inscrito*** *para la resolución de un problema*

   Ejemplos de evaluación de este resultado de aprendizaje:

   I. Dado el diámetro $\overline{DE}$ de una circunferencia y F y G puntos de la circunferencia en lados opuestos de $\overline{DE}$ tales que $EF = EG$. Demuestre que $\triangle DEF \cong \triangle DEG$

Respuesta esperada. Para demostrar que $\triangle DEF$ y $\triangle DEG$ son congruentes, debemos mostrar que tienen la misma longitud en sus lados correspondientes y la misma medida en sus ángulos correspondientes.



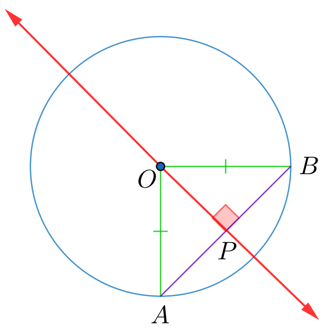
Primero, observemos que $\overline{DE}$ es común a ambos triángulos. Además, $EF = EG$ por hipótesis. Entonces, los lados $\overline{DE}$ y $\overline{EF}$ de $\triangle DEF$ tienen la misma longitud que los lados $\overline{DE}$ y $\overline{EG}$ de $\triangle DEG$. Ahora, notemos que los ángulos $\angle DEF$ y $\angle DEG$ son opuestos por el diámetro $\overline{DE}$, por lo que tienen la misma medida. Además, el ángulo $\angle DFE$ de $\triangle DEF$ es igual al ángulo $\angle DGE$ de $\triangle DEG$ porque ambos son ángulos inscritos en la misma circunferencia. Por lo tanto, $\triangle DEF$ y $\triangle DEG$ tienen los mismos lados y ángulos correspondientes, lo que implica que son congruentes. $\square$

3. *Aplicar la definición de* ***cuerda*** *en la resolución de un problema*

   Ejemplos de evaluación de este resultado de aprendizaje:

   I. Dada una circunferencia, demuestre que una cuerda que es bisecada por una perpendicular que pasa por el centro de la circunferencia.

   Respuesta esperada. Sea O el centro de la circunferencia y $\overline{AB}$ una cuerda que es intersecada por la perpendicular $\overleftrightarrow{OP}$, como se muestra en la siguiente figura:



Dado que los extremos de una cuerda por definición están en la circunferencia, se tiene que la distancia del centro a dichos extremos es la misma, pues todo punto de la circunferencia equidista del centro, en otras palabras, $OA = 0B$. Además, denominemos P al punto de intersección entre la perpendicular y la cuerda, luego reconocemos los triángulos $\triangle AOP$ y $\triangle BOP$, los cuales comparten el lado $\overline{OP}$ y tienen hipotenusas congruentes $\overline{OA} \cong \overline{OB}$, por tanto los triángulos son congruentes gracias al teorema de congruencia de triángulos rectángulos o la caracterización hipotenusa-cateto.

Entonces, dada dicha congruencia de triángulos, se tiene la correspondencia $AP = PB$, lo que demuestra que la perpendicular $\overleftrightarrow{OP}$, biseca a la cuerda $\overline{AB}$ □

4. *Aplicar la definición de* ***tangente a una circunferencia*** *en la resolución de un problema*

Ejemplos de evaluación de este resultado de aprendizaje:

I. Dada una circunferencia, $\overline{SQ}$ es un diámetro de la misma. Una tangente que pasa por S y una secante que pasa por Q se intersecan en un punto P, además la secante se interseca con la circunferencia en R. Demuestre que $SQ^2 = PQ \cdot QR$

Respuesta esperada. Primero, observemos que $m\angle PSQ = 90$, ya que $\overline{SQ}$ es un diámetro de la circunferencia. Además, como la tangente y la secante son perpendiculares en S, tenemos que $\angle PSR = \angle QSR$ (ángulos opuestos por el vértice). Luego, como $m\angle PSQ = 90$, tenemos que $\angle QSP = \angle QSR$ (ángulos opuestos por el vértice). Ahora, consideremos el triángulo $\triangle PQS$. Por el teorema de Pitágoras, tenemos:

$$SQ^2 = PQ^2 + PS^2$$

Pero PS es la longitud de la tangente desde P a la circunferencia, por lo que $PS^2 = PQ \cdot QR$ (tangentes desde un punto tienen igual longitud). Sustituyendo en la ecuación anterior, obtenemos:

$$SQ^2 = PQ^2 + PQ \cdot QR$$

"Factorizando" PQ en el segundo término, obtenemos:

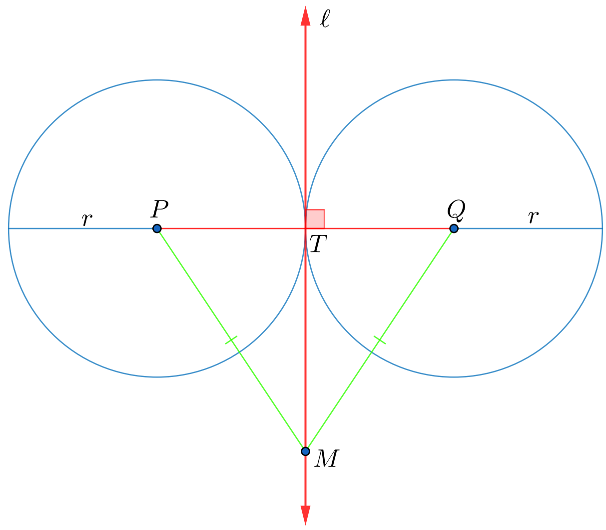
$$SQ^2 = PQ \cdot (PQ + QR).$$

Y, como $PQ + QR = PR$ (la longitud de la secante), tenemos:

$$SQ^2 = PQ \cdot PR. \quad \square$$

II. Demostrar que si dos circunferencias con radios congruentes son tangentes exteriormente, un punto cualquiera equidistante de sus centros está en su tangente común

Respuesta esperada. Sea P el centro de la primera circunferencia y Q el centro de la segunda circunferencia, y sea r el radio común de ambas circunferencias y M un punto cualquiera equidistante de P y Q. Por construcción, los puntos P, Q y M forman un triángulo isósceles con $PM = QM$. Dado que las dos circunferencias son tangentes exteriormente, podemos trazar la recta tangente común ℓ en el punto T, donde T es el punto de tangencia.



Ahora consideremos $\triangle PQT$. Por construcción, $PT = QT = r$. Además, $PM = QM$, por lo que el $\triangle PQM$ es isósceles. Por lo tanto, $\overline{PM}$ es perpendicular a la recta ℓ en T, ya que $\overline{PT}$ y $\overline{QT}$ son perpendiculares a la recta ℓ en T. Por lo tanto, M se encuentra en la recta ℓ, la tangente común a las dos circunferencias, ya que $\overline{PM}$ es perpendicular a la recta ℓ en el punto de tangencia T. $\square$

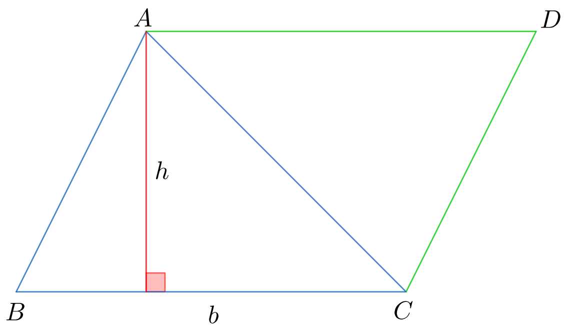
3.3.14. Áreas

1. *Aplicar el* ***teorema de suma de áreas***

   Ejemplos de evaluación de este resultado de aprendizaje:

   I. El área de un triángulo es la mitad del producto de cualquiera de sus bases y la altura correspondiente.

   Demostración. Consideremos un triángulo cualquiera $\triangle ABC$con base $BC = b$ y altura h. Dibujemos una recta paralela a la base que pase por el vértice opuesto del triángulo, es decir que pase por A, ahora tomaremos este vértice como extremo de un segmento en la recta paralela trazada, que denominaremos $\overline{AD}$ con la longitud de la base, es decir, $AD = b$.

   El resultado es un paralelogramo, cuya área podemos calcular gracias al teorema de la suma de las áreas, en este caso de sus dos triángulos. La base es igual a la base b del triángulo, y la altura del triángulo es también igual a h. Por lo tanto, el área del paralelogramo es bh. Pero la mitad de este área es el área del triángulo original, es decir, $\frac{1}{2}bh$, lo que demuestra que el área de un triángulo es la mitad del producto de cualquiera de sus bases y la altura correspondiente. $\square$

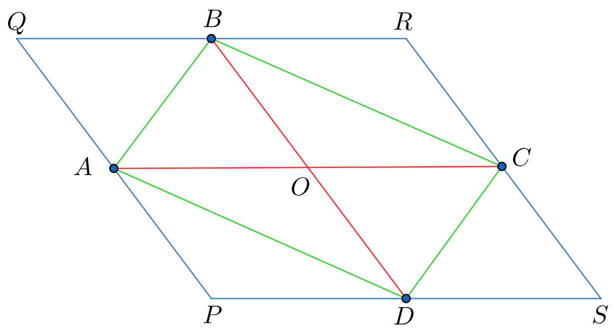
   II. Dado el paralelogramo $\square PQRS$ y dados los puntos medios de los lados A, B, C y D. Demuestre que el área del cuadrilátero $\square ABCD$ es igual a la mitad del área del paralelogramo $\square PQRS$

   Respuesta esperada. Como A y C son puntos medios de los lados PQ y SR, respectivamente, se tiene que AC es paralelo a PQ y SR, y su longitud es la mitad de la longitud de PQ y SR. Por lo tanto, AC es paralelo a la base $PQSR$ del paralelogramo $\square PQRS$ y su longitud es la mitad del área del paralelogramo.

   Análogamente, como B y D son puntos medios de los lados QR y PS, respectivamente, se tiene que BD es paralelo a QR y PS, y su longitud es la mitad de la longitud de QR y PS. Por lo tanto, BD es paralelo a la base $PQSR$ del paralelogramo $\square PQRS$ y su longitud es la mitad del área del paralelogramo.

Ahora, trazamos las diagonales AC y BD del cuadrilátero $\square ABCD$. Como las diagonales de un paralelogramo se dividen en partes iguales, se tiene que AC y BD se cortan en el punto O, que es el punto medio de ambas. Entonces, AO y CO son medianas del triángulo $\triangle ABC$, y BO y DO son medianas del triángulo $\triangle CDA$.

Por lo tanto, el cuadrilátero $\square ABCD$ se divide en cuatro triángulos congruentes $\triangle AOD$, $\triangle COD$, $\triangle COB$ y $\triangle BOA$.



Así, el área de $\square ABCD$ es igual a la suma de las áreas de estos cuatro triángulos, es decir, el área de $\square ABCD$ es igual a dos veces el área de $\triangle ACD$.

Finalmente, como AC es paralelo a la base $PQSR$ del paralelogramo $\square PQRS$ y su longitud es la mitad del área del paralelogramo, se tiene que el área de $\triangle ACD$ es la mitad del área del paralelogramo $\square PQRS$. Entonces, el área de $\square ABCD$ es igual a la mitad del área del paralelogramo $\square PQRS$. $\square$

2. *Utilizar el **teorema de áreas de regiones poligonales***

   Ejemplos de evaluación de este resultado de aprendizaje:

   I. Dados un triángulo y un paralelogramo con áreas iguales y bases iguales. ¿Cuál es la relación entre sus alturas?

   Respuesta esperada. Sea h_t la altura del triángulo y h_p la altura del paralelogramo, ambas medidas desde la base común. Sea b la base común a ambos. Sabemos que el área del triángulo es $\frac{1}{2}bh_t$ y el área del paralelogramo es bh_p, y como se nos da que las áreas son iguales, podemos igualar estas expresiones:

$$\frac{1}{2}bh_t = bh_p$$

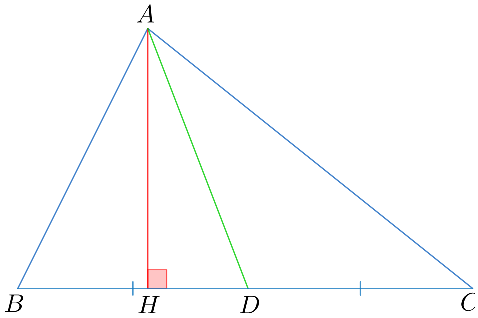
   Simplificando:

$$h_t = 2h_p$$

Por lo tanto, la altura del triángulo es el doble de la altura del paralelogramo correspondiente, medida desde la misma base común. $\square$

II. Demuestre que dado un triángulo, una mediana divide a la región triangular en dos regiones con áreas iguales.

Respuesta esperada. Sea $\triangle ABC$ un triángulo con mediana $\overline{AD}$ que intersecta al lado $\overline{BC}$ en D, por lo que sabemos que $\overline{BD} = \overline{DC}$. Esta mediana divide al triángulo en dos triángulos más pequeños, $\triangle ABD$ y $\triangle ACD$.



Dibujemos la altura $\overline{AH}$ desde el vértice A al lado $\overline{BC}$, como $\overline{BD}$ y $\overline{DC}$ están sobre la misma recta que $\overline{BC}$, entonces esta altura es la misma para los dos triángulo $\triangle ABD$ y $\triangle ACD$, por tanto dado que su base y altura son las mismas, por el teorema del área de regiones poligonales, se tiene que ambas áreas son iguales, por lo que se concluye que la mediana efectivamente divide al área triangular en dos regiones de igual área. $\square$

3.4. Conclusiones

El presente trabajo de integración curricular tuvo los siguientes resultados importantes:

1. Se elaboró una propuesta de contenidos sobre los temas de *Axiomas de incidencia, conexión y distancia*, *Segmentos, rayos, ángulos y polígonos*, *Axioma de separación*, *Axioma de Medida Angular*, *Congruencia de segmentos y ángulos*, *Congruencia de triángulos*, *Perpendicularidad*, *Desigualdades*, *Paralelismo*, *Semejanza de triángulos*, *Cuadriláteros*, *Círculos* y *Áreas*.

2. Se enunció resultados de aprendizaje para los contenidos, los cuales expresan las destrezas necesarias que debe desarrollar el estudiante de Nivelación al cursar la materia de Geometría.

3. Se ilustró la evaluación de los resultados de aprendizaje a través de ejemplos o problemas resueltos, los cuales evalúan las competencias específicas del resultado y no son complicados por razones ajenas a este.

3.5. Recomendaciones

1. Este trabajo puede servir de guía para rediseñar el programa de estudio por asignatura (PEA) de la materia de Geometría de Nivelación.

2. Los ejemplos de evaluación de los resultados de aprendizaje, pueden ayudar a formular otras preguntas, ejercicios o problemas de evaluación que se enmarquen solo dentro de las capacidades y destrezas específicas que debe alcanzar el estudiante.

3. Se recomienda que se haga un proceso similar al realizado para obtener la propuesta de contenidos, con las materias de alto componente matemático de la Unidad Básica de las carreras de la EPN, como Física o Probabilidad y Estadística, así como la elaboración de resultados de aprendizaje, tomando como guía lo expuestos en este trabajo.

Referencias bibliográficas

[1] Owen Byer, Felix Lazebnik, and Deirdre L. Smeltzer. *Methods for Euclidean geometry*, volume 37. American Mathematical Soc., 2010.

[2] Stephen F. West Edward C. Wallace. *Roads to Geometry*. Waveland Press, Inc., 2004.

[3] Declan Kennedy. *Writing and using learning outcomes: a practical guide*. University College Cork, 2006.

[4] Edwin E Moise and Floyd L Downs. *Geometría*. Fondo Educativo Interamericano, 1972.

[5] Gerard Venema. *Foundations of geometry*. Pearson Higher Ed, 2011.