ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS

ESTUDIO DE LOS OPERADORES DE CONTRACCIÓN Y REVISIÓN EPISTÉMICOS

MODELAMIENTO EN LAS DINÁMICAS DE ESTADOS EPISTÉMICOS

TRABAJO DE INTEGRACIÓN CURRICULAR PRESENTADO COMO REQUISITO PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE MATEMÁTICO

KEVIN WILLIAMS MARROQUÍN MORETA

kevin.marroquin@epn.edu.ec

DIRECTOR: EURO DE JESÚS LUCENA DELGADO

euro.lucena@epn.edu.ec

DMQ, ABRIL 2023

CERTIFICACIONES

Yo, KEVIN WILLIAMS MARROQUÍN MORETA, declaro que el trabajo de integración curricular aquí descrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y, que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

Kevin Williams Marroquín Moreta

Certifico que el presente trabajo de integración curricular fue desarrollado por Kevin Williams Marroquín Moreta, bajo mi supervisión.

Euro de Jesús Lucena Delgado
DIRECTOR

DECLARACIÓN DE AUTORÍA

A través de la presente declaración, afirmamos que el trabajo de integración curricular aquí descrito, así como el(los) producto(s) resultante(s) del mismo, es(son) público(s) y estará(n) a disposición de la comunidad a través del repositorio institucional de la Escuela Politécnica Nacional; sin embargo, la titularidad de los derechos patrimoniales nos corresponde a los autores que hemos contribuido en el desarrollo del presente trabajo; observando para el efecto las disposiciones establecidas por el órgano competente en propiedad intelectual, la normativa interna y demás normas.

Kevin Williams Marroquín Moreta

Euro de Jesús Lucena Delgado

AGRADECIMIENTOS

Agradezco enormemente al esfuerzo constante e incondicional de mi madre por permitirme llevar a cabo mis estudios y dejarme vivir este sueño. A cada miembro de mi familia por acompañarme a lo largo de estos años de carrera y ser esa motivación de cada día.

Un agradecimiento especial a mi amigo Santiago Pérez que, gracias a su laptop y sobre todo su incondicional ayuda, puedo redactar con libertad este trabajo.

Agradezco al Dr. Nerio Borges que gracias a su divulgación e investigación pude encontrar el componente de este trabajo como además de introducirme en el mundo de la teoría de revisión de creencias. A mi tutor, Dr. Euro de Jesús Lucena, por su invaluable cooperación en la revisión y culminación del mismo.

Un agradecimiento a cada uno de mis profesores y profesoras quienes me han forjado como profesional y en especial a aquellos quienes decidieron darme una segunda oportunidad.

Finalmente, agradezco a Cynthia Gudiño, Esteban Morillo, Roberto Escala, Franco Herrera, Alejandro Quiroga, Naraya Narváez y a todas esas amistades cultivadas dentro y fuera de la universidad, quienes con su ayuda y más importante, su indespensable acción y presencia, han hecho de este sueño una experiencia única y maravillosa.

DEDICATORIA

Cada día, hay menos de mí
en mí corrió el eje del tiempo
que deja atrás una historia inédita.
Abriéndose paso a la incertidumbre
da la bienvenida a lo nuevo
esta deconstrucción, mi viejo yo.

A través de un mestizaje de lenguajes
me muestro para la ocasión y
dedico al mundo aquello que fui
y una lejana perspectiva de lo que seré.

Mas nunca el yo del hoy
pues este vive ahora
en cada símbolo, término o fórmula;
cada conjunto, funcion o modelo;
cada definición, proposición o teorema;
cada brizna de tiempo invertido
en este trabajo constante, dedicado
a todos los que se atreven ir a mi encuentro.

RESUMEN

El modelamiento en las dinámicas de los estados epistémicos es un estudio de la relaciones y cambios que ocurren entre los estados de conocimientos de un agente epistémico frente a la presencia de nueva información del medio externo. Para este trabajo destacamos como modelo estándar el modelo AGM, nombrado así por sus principales contribuidores: Carlos Alchurrón, Peter Gärdenfors y David Makinson. El lenguaje utilizado en el marco de trabajo AGM es un lenguaje de primer orden, cuya procedencia es del área de la lógica matemática. Adicionalmente a esta elección del lenguaje, se presentan varios elementos que caracterizan el modelo AGM tales como la representación de los estados epistémicos o teorías, criterios de racionalidad, actitudes epistémicas, operaciones epistémicas, etc..

Las operaciones epistémicas son funciones que actúan sobre los estados epistémicos y la nueva información representada por fórmulas. Tenemos tres operaciones principales: expansión, contracción y revisión. Uno de los logros más destacables del trio AGM es la caracterización entre definiciones explícitas e implícitas de las operaciones epistémicas; estas aportan un conjunto de postulados a satisfacer a cada operación epistémica y una forma constructiva para la obtención de nuevas teorías, respectivamente. No obstante, en este trabajo también se incluye un apartado de criticismo de este modelo que nos permitirá abordar nuevos panoramas de estudio de modelos más realistas. Al final, se presentarán algunos resultados adicionales a lo ya expuesto en la teoría, las conclusiones y recomendaciones de trabajos futuros.

Palabras clave: marco AGM, operadores de contracción y revisión epistémica, contracción de encuentro parcial, contracción de kernel, bases epistémicas, lógicas de primer orden.

ABSTRACT

Modelling of the dynamics of epistemic states is a study of the relations and changes between knowledge states of a epistemic agent due to new information from the external world. In this work we highlight the standard AGM model, named by its principal authors: Carlos Alchurrón, Peter Gärdenfors and David Makinson. The language used in this framework is a first-order logic language which come from the research branch of mathematical logic. Along this selection of language, we present several elements that characterize AGM model like representation of epistemic states or theories, rational criteria, epistemic attitudes, epistemic operations, etc..

Epistemic operations are functions defined over the set of all theories and the new information represented by formulas. We have three main operations: expansion, contraction and revision. One of the most remarkable of AGM trio is the characterization between explicit and implicit definitions of epistemic operations; these contribute a set of postulates that each epistemic operation must satisfy and a constructive way to get new theories, respectively. However, in this work we include a criticism section of AGM model in which we extend our horizons over more realistic models. At the end, we will present some additional results from exposed theory so far, conclusions and recommendations for future researches.

Keywords: AGM framework, epistemic contraction and revision operators, partial meet contraction, kernel contraction, epistemic bases, first-order logic.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

1.1. Objetivo general

Estudiar y establecer relaciones de contenencia entre estados epistémicos bajo la acción de diferentes operadores de contracción y revisión epistémica dentro del marco AGM.

1.2. Objetivos específicos

1. Estudiar la bibliografía del modelamiento en las dinámicas de estados epistémicos del marco AGM (Alchurrón, Gärdenfors, Makinson).
2. Presentar las caracterizaciones entre las definiciones por postulados y por métodos constructivos de los operadores de cambio de conocimiento.
3. Establecer una cadena de contenencias de los estados epistémicos resultantes de la aplicación de diferentes operadores de contracción y revisión dentro del marco AGM.

1.3. Alcance

Esta componente se desarrollará de acuerdo con la siguiente metodología:

a) Primero se realizará una revisión bibliográfica del modelamiento en las dinámicas de estados epistémicos con la finalidad de elaborar el marco teórico y extraer las componentes fundamentales de este modelamiento, e.g., los operadores de cambio de conocimiento.

b) Una vez se termine el proceso de revisión de la literatura, se enunciará los teoremas de caracterización de las definiciones de los operadores de cambio epistémico, los cuales establecen un nexo entre proporcionar un conjunto de axiomas o postulados que caracterizan a cada uno de los operadores de cambio epistémico (método implícito) o definirlos a partir de la elección de los nuevos estados epistémicos resultantes luego de su aplicación (método explícito). Este escenario se desarrollará en detalle respecto a los operadores de contracción epistémica y gracias a la identidad Levi, extender este estudio a los operadores de revisión epistémica.

c) Finalmente se presentarán diferentes definiciones de operadores de contracción, e.g., operador de contracción de encuentro total. Se establecerá una cadena de contenencias de conjuntos, los cuales son el resultado de la aplicación de dichos operadores de cambio epistémico sobre un conjunto de creencias dado bajo la presencia de nueva información. Es decir, dependiendo del tipo de operador seleccionado se obtendrá un conjunto de creencias más “grande” o más “pequeño” en el sentido de la relación de contenencia de conjuntos dentro de un lenguaje formal, e.g., lenguajes de primer orden.

1.4. Marco teórico

1.4.1. El problema del cambio de creencias

Dentro del estudio del *modelamiento de la dinámica de los estados epistémicos* se presentan los fundamentos para representar los cambios producidos entre los estados de epistémicos –o estados de creencias [5]– de un cierto agente debido a la recepción de cierta información del mundo exterior, la cual es codificada e interpretada en base a un lenguaje interno que posee el agente, quien además se asume, actúa por estándares racionales.

El modelo que se considera estándar en el cambio de creencias fue propuesto por Alchourrón, Gärdenfors y Makinson o mejor conocido como el modelo o marco AGM [5, 6]. Dentro de este marco, un estado de creencias de un agente es modelado por un conjunto de creencias, i.e., un conjunto de fórmulas u oraciones cerrado lógicamente. Los autores se enfocaron en definir tres operaciones de cambio epistémico principales: expansión, contracción y revisión. La expansión consiste en agregar una proposición al estado epistémico, la contracción en remover una proposición y por último la revisión es la adición consistente de una proposición. Cada una de estas operaciones están caracterizadas por un conjunto de postulados racionales [10], lo cual se conoce como método implícito.

Un breve repaso de la historia

El cambio de creencias ha sido objeto de análisis filosófico desde la antigüedad. En el siglo XX, filósofos discutian los mecanismos por los cuales se desarrollaban ciertas teorías científicas y propusieron criterios de racionalidad para las revisiones de asignaciones de probabilidades. A partir de la década de 1970, surgió dentro de la comunidad filosófica una discusión más enfocada en los requisitos requeridos para el cambio de creencias racional [3].

Alchourrón, Gärdenfors y Makinson

Carlos Alchourroón (1931-1996) y David Makinson colaboraron en el estudio de los cambios sucitados en los códigos legales, lo cual los llevo a analizar la estructura lógica del procedimiento derogatorio en el que se suprime una norma de un código legal. Trataron de encontrar los principios que cualquier derogación debe satisfacer y definieron una familia de todas las excepciones posibles. La idea clave es, dado un código A, crear un orden parcial sobre las normas de A e inducir un orden sobre el conjunto de partes de A. A los conjuntos máximos de A que no implicaban la norma a eliminar los denominaron residuos. Luego, notaron que el problema no se limitaba sólo a conjuntos de normas, de hecho, los conjunto A podría ser conjuntos arbitrarios de fórmulas y el problema era cómo eliminar una de las fórmulas o una de sus consecuencias lógicas del conjunto [3]. Esta idea es la base de los métodos explícitos o constructivos para definir las operaciones de cambio epistémico expuestas en anteriores líneas.

Los primeros trabajos de Peter Gärdenfors se enfocaron en el estudio de las conexiones entre los cambios de creencias y oraciones condicionales. Estaba buscando un modelo de explicaciones. Gärdenfors pensó que las explicaciones pueden expresarse como diferentes tipos de oraciones condicionales. Fue influenciado por Isaac Levi (1930-2018) y Harper (1943) y esto le llevó a realizar una investigación exhaustiva de los condicionales epistémicos. Gärdenfors construyó una explicación semántica de los condicionales epistémicos que se basa sobre los estados de creencias y sus cambios. Así, definió los conjuntos de postulados que cada operación epistémica debe satisfacer [3, 6].

1.4.2. Los elementos del modelo AGM

El lenguaje: lenguajes de primer orden

Las creencias son expresadas en un lenguaje formal $\mathcal{L}$, el cual vamos a considerar como el conjunto de todas las oraciones que pueden ser expresadas en él; por tanto, $\alpha \in \mathcal{L}$ si y solo si α es una oración en $\mathcal{L}$. Este lenguaje puede ser finito o infinitamente numerable, salvo se especifique explícitamente.

Puesto que el modelo AGM utiliza un lenguaje de primer orden, los autores asumen que el lector está familiarizado con todas sus características y propiedades. En la literatura revisada para este trabajo, este aspecto se repasa de manera breve y deja de lado varios detalles sobre los fundamentos de la lógica matemática a considerar, los cuales deben estar claros para hacer un uso apropiado de ellos.

Definición 1. *[9]*

Un lenguaje de primer orden $\mathcal{L}$ se caracteriza por tener los siguientes símbolos:

- *Las conectivas lógicas usuales $\neg$ (negación), $\wedge$ (conjunción), $\vee$ (disyunción), $\rightarrow$ (implicación) y $\leftrightarrow$ (equivalencia). Además, contiene: "$\perp$", una constante que denota una contradicción arbitaria y otra constante: "$\top$", la cual denota una tautología arbitraria.*
- *Los cuantificadores universal "$\forall$" y existencial "$\exists$".*
- *Posee símbolos de agrupación como paréntesis, corchetes y llaves*[1].
- *Un conjunto numerable de variables individuales: $x_1, x_2, x_3, \ldots$.*
- *Una cantidad numerable, posiblemente vacía, de símbolos relacionales R_i de aridad a_i*[2].
- *Una cantidad numerable, posiblemente vacía, de símbolos funcionales f_j de aridad b_j.*
- *Una cantidad numerable, posiblemente vacía, de símbolos constantes c_k.*
- *Un conjunto no vacío de letras de predicado, por ejemplo el signo de igualdad "=".*

Usaremos las letras, por ejemplo, $p, p_i, q, q_i, \alpha, \beta, \phi, \psi \ldots$ para denotar oraciones o premisas de $\mathcal{L}$. Las constantes individuales, letras de funciones y letras de predicado se consideran como *objetos no lógicos* de $\mathcal{L}$.

[1]Es posible omitirlos en un futuro cuando su uso se considere ambiguo.
[2]Aridad: es el número de argumentos tomados por un operador.

Vamos a definir un **vocabulario**, el cual recoge todos los símbolos más importantes de $\mathcal{L}$. i.e., entenderemos por vocabulario a la tripleta

$$\tau := \{(R_i)_{i\in I}, (f_j)_{j\in J}, (c_k)_{k\in K}\}$$

Sobre un vocabulario se define una **estructura** $\mathcal{A}$ como se define a continuación.

Definición 2. *[1]*

Dado un vocabulario τ de un leguaje de primer orden $\mathcal{L}$.

*Una **estructura**[3] $\mathcal{A}$ es una $4-$tupla*

$$\mathcal{A} := \{|\mathcal{A}|, (R_i^{\mathcal{A}})_{i\in I}, (f_j^{\mathcal{A}})_{j\in J}, (c_k^{\mathcal{A}})_{k\in K}\}$$

donde $|\mathcal{A}|$ es un conjunto no vacío al que llamaremos dominio o universo de $\mathcal{A}$, $(R_i^{\mathcal{A}})_{i\in I} \subseteq |\mathcal{A}|^{a_i}$, $(f_j^{\mathcal{A}})_{j\in J}$ son funciones de $|\mathcal{A}|^{b_j}$ en $|\mathcal{A}|$ y por último a cada c_k se le asigma un elemento $c_k^{\mathcal{A}}$ de $|\mathcal{A}|$.

Antes de definir lo que es una *interpretación* de una fórmula en $\mathcal{L}$, es necesario definir lo que son los *términos* dentro del lenguaje y cómo estos nos ayudarán a denotar elementos del dominio $|\mathcal{A}|$.

Definición 3. *[9]*

Dado un vocabulario τ se define de manera inductiva los términos sobre τ:

- *Toda variable es un término.*
- *Toda constante de τ es un término.*
- *Si f es un símbolo funcional de aridad b y $t_1, \ldots, t_b$ son b términos, entonces $f(t_1, \ldots, t_b)$ es un término.*

A través del uso de términos podemos construir las fórmulas de nuestro leguaje de la siguiente manera.

[3]El autor realiza una exposición diferente de esta definición, pero equivalente a la presentada en este trabajo, la cual es una propuesta mixta entre las definiciones análogas en [1], [4] y [9].

Definición 4. *[9]*

Dado un vocabulario τ de un lenguaje de primer orden $\mathcal{L}$ se definen inductivamentes las fórmulas[4] *sobre τ:*

- *Si $t_1 = t_2$ son términos, entonces, $t_1 = t_2$ es una fórmula.*
- *Si R es un símbolo relacional de τ de aridad a y $t_1, \ldots, t_a$ son términos, entonces $R(t_1, \ldots, t_a)$ es una fórmula.*
- *Si φ y ψ son una fórmulas, entonces $\neg\varphi, \varphi \wedge \psi, \varphi \vee \psi$ y $\varphi \to \psi$ son fórmulas.*
- *Si φ es una fórmula, entonces $(\forall x)\varphi$ y $(\exists x)\varphi$ son fórmulas.*

Además, únicamente por estas reglas de formación se obtienen fórmulas. Dentro de varias literaturas es común referirse a las fórmulas obtenidas por (4) *como* ***fórmulas bien formadas****. No obstante, dentro del marco AGM solo se hace uso de ellas; por tanto, de forma simplificada, cuando nos referimos a fórmulas, estamos tratando de hecho con fórmulas bien formadas.*

Sea Σ es conjunto de todas las sucesiones numerables de elementos de $|\mathcal{A}|$. A continuación, estableceremos lo que significa que una ***interpretación*** *$s \in \Sigma$ satisfaga una fórmula α.*

Definición 5. *[9]*

Sea $s \in \Sigma$, $s = (s_n)_{n\in\mathbb{N}}$[5]*. Consideremos la función $s^* : Term(\tau_{\mathcal{L}})$*[6] *$\longrightarrow |\mathcal{A}|$*[7]*, la cual recibe el nombre de* ***valuación*** *asociada a s definida como:*

- *Si t es una variable x_j, entonces $s^*(t) = s_j$.*
- *Si t es una constante c_k, entonces $s^*(t) = c_k^{\mathcal{A}}$.*
- *Si f_j es un símbolo funcional de aridad b_j y $t_1, \ldots, t_{b_j}$ son términos, entonces*

$$s^*(f_j(t_1, \ldots, t_{b_j})) = f_j^{\mathcal{A}}(s^*(t_1), \ldots, s^*(t_{b_j})).$$

[4]Los dos primeros ítems definen las fórmulas conocidas como fórmulas atómicas.
[5]En ocasiones, estas sucesiones pueden ser finitas.
[6]$Term(\tau_{\mathcal{L}})$ es el conjunto de todos los términos del vocabulario de $\tau_{\mathcal{L}}$.
[7]No es necesario dar la imagen de s^* sobre cada término existente, sino solo de los términos que ocurren en la fórmula.

Intuitivamente, $s^*(t)$ es un elemento de $|\mathcal{A}|$ y es el resultado de haber sustituido, para cada j, s_j en todas las ocurrencias de x_j en t e inmediatamente desarrollamos las operaciones de la interpretación correspondientes a los símbolos funcionales de t.

Ahora, diremos que una interpretación s sobre la τ-estructura $\mathcal{A}$ satisface la fórmula α –denotamos esto por $\langle \mathcal{A}, s\rangle \models \alpha$– si:

- *Para todo t_1 y t_2 términos, se tiene que*

$$\langle \mathcal{A}, s\rangle \models t_1 = t_2 \iff s^*(t_1) = s^*(t_2).$$

- *Para todo símbolo relacional R_i de aridad a_i y para cada $t_1, \dots, t_{a_i}$ términos en τ:*

$$\langle \mathcal{A}, s\rangle \models R(t_1, \dots, t_{a_i}) \iff (s^*(t_1), \dots, s^*(t_{a_i})) \in R_i^{\mathcal{A}}.$$

- *Para toda fórmula φ, $\langle \mathcal{A}, s\rangle \models \neg\varphi \iff \langle \mathcal{A}, s\rangle \not\models \varphi$.*
- *Para todo par de fórmulas φ, ψ:*

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}, s\rangle \models \varphi \vee \psi &\iff \langle \mathcal{A}, s\rangle \models \varphi \text{ o } \langle \mathcal{A}, s\rangle \models \psi, \\ \langle \mathcal{A}, s\rangle \models \varphi \wedge \psi &\iff \langle \mathcal{A}, s\rangle \models \varphi \text{ y } \langle \mathcal{A}, s\rangle \models \psi, \\ \langle \mathcal{A}, s\rangle \models \varphi \to \psi &\iff \langle \mathcal{A}, s\rangle \not\models \varphi \text{ o } \langle \mathcal{A}, s\rangle \models \psi, \end{aligned}$$

- *Para cada fórmula φ, $\langle \mathcal{A}, s\rangle \models (\forall x_i)\varphi$ si y solo si para toda interpretación $\hat{s}$ que difiere en la i-ésima componente respecto a s, $\langle \mathcal{A}, \hat{s}\rangle \models \varphi$.*

En el caso de que toda $s \in \Sigma$, $\langle \mathcal{A}, s\rangle \models \alpha$; usaremos la notación: $\mathcal{A} \models \alpha$

La proposición siguiente es una observación importante de esta noción de satisfacción de una fórmula. Así, dada cualquier interpretación en una $\tau_{\mathcal{L}}$-estructura, la satisfacción de una fórmula dependerá únicamente de sus variables libres.

Proposición 1. *[9]*

Sean $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ es una fórmula y $s, s' \in \Sigma$ tales que $s^*(x_k) = (s')^*(x_k)$ para todo $k \in \{1, \dots, n\}$. Entonces, $\langle \mathcal{A}, s\rangle \models \alpha$ si y solo si $\langle \mathcal{A}, s'\rangle \models \alpha$.

Verdad, modelos y validez

La revisión epistémica dentro del marco AGM trabaja con la consistencia de un conjunto de fórmulas como se verá más adelante. Para ello, vamos a establecer la noción de verdad y falsedad y, en consecuencia, lo que entenderemos por el *modelo* de una fórmula.

Definición 6. *[9]*

- *Sea α una fórmula del lenguaje de primer orden $\mathcal{L}$ y $\mathcal{A}$ es una $\tau_{\mathcal{L}}$-estructura. Diremos que α es* ***verdadera*** *en $\mathcal{A}$ si y solo si $\mathcal{A} \models \alpha$.*
- *En consecuencia, α es* ***falsa*** *si y solo si $\mathcal{A} \not\models \alpha$.*
- *Sea $\Gamma \subseteq \mathcal{L}$, decimos que $\mathcal{A}$ es un* ***modelo*** *de Γ si y solo si cada $\alpha \in \Gamma$ es verdadera en $\mathcal{A}$. Al conjunto de todos los modelos de Γ lo denotaremos por $Mod(\Gamma)$[8].*
- *Diremos que una fórmula α es lógicamente válida si y solo si es verdadera en toda $\tau_{\mathcal{L}}$-estructura $\mathcal{A}$.*

Esta última definición nos ayudará a determinar lo que se conoce como *consecuencia lógica semántica*, para lo cual reutilizaremos el símbolo "$\models$". De esta manera, podremos establecer una relación de consecuencia y correspondencia lógica entre las premisas o fórmulas que el agente posea como creencias y la nueva información del medio exterior recibida y codificada a través del lenguaje $\mathcal{L}$. El próximo paso es definir una *operación de consecuencia lógica* (Cn).

Consecuencia lógica

Definición 7. *[9]*

Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden dotado de una relación de consecuencia lógica semántica "$\models$". Consideremos $\Gamma \subseteq \mathcal{L}$ y $\alpha \in \mathcal{L}$, diremos que Γ modela α si y solo si para todo modelo de Γ es también modelo de α. Lo denotaremos por $\Gamma \models \alpha$.

[8] En el caso de que $\Gamma = \{\alpha\}$, entonces denotaremos $Mod(\{\alpha\}) := Mod(\alpha)$.

Además, "$\models$" cumple con las siguientes propiedades. Sean $p, q \in \mathcal{L}$ y $\Gamma \subseteq \mathcal{L}$, entonces "$\models$" satisface [6]:

- **Supraclasicismo:** si p es una tautología funcional de verdad [9], entonces $\models p$.
- **Modus Ponens:** si $\Gamma \models p$ y $\Gamma \models p \to q$, entonces $\Gamma \models q$.
- **Teorema de la Deducción:** si $\Gamma \cup \{p\} \models q$, entonces $\Gamma \models p \to q$.
- **Consistencia:** $\not\models \perp$.
- **Compacidad:** si $\Gamma \models p$, entonces existe un $\Gamma' \subseteq \Gamma$ finito tal que $\Gamma' \models p$.

Luego, la *operación de consecuencia lógica* (Cn) toma un elemento de partes de $\mathcal{L}$ y nos devuelve su respectivo conjunto de consecuencias lógicas, definido formalmente así:

Definición 8. *[11]*

Sea $\Gamma \subseteq \mathcal{L}$. *El* ***conjunto de consecuencias lógicas de*** Γ *se define como*

$$Cn(\Gamma) := \{\varphi \in \mathcal{L} : \Gamma \models \varphi\}.$$

Esta operación cumple con algunas propiedades. Sea $\Gamma' \subseteq \mathcal{L}$, entonces Cn satisface [3]

- **Inclusión:** $\Gamma \subseteq Cn(\Gamma)$.
- **Monotonía:** Si $\Gamma \subseteq \Gamma'$, entonces $Cn(\Gamma) \subseteq Cn(\Gamma')$.
- **Iteración:** $Cn(Cn(\Gamma)) = Cn(\Gamma)$.

Los modelos de un conjunto también presentan algunas propiedades de interés en este estudio.

Proposición 2. *[4],[9]*

Sean $\Gamma, \Gamma' \subseteq \mathcal{L}$. *Se tiene que:*

1. *Si* $\Gamma \subseteq \Gamma'$, *entonces* $Mod(\Gamma') \subseteq Mod(\Gamma)$.

[9] Dada cualquier valuación booleana v^* definida para la $\tau_{\mathcal{L}}$-estructura $\mathcal{A}$ con dominio $\{0, 1\}$, $v^*(p) = 1$ donde 1 es el valor de verdad de *verdadero*.

2. $Mod(Cn(\Gamma)) = Mod(\Gamma)$.

3. $Mod(\Gamma \cup \Gamma') = Mod(\Gamma) \cap Mod(\Gamma')$.

4. $Mod(\mathcal{L}) = Mod(\bot) = \varnothing$.

Nos encontramos en la capacidad de introducir lo que nos permitirá representar un conjunto de creencias o estado epistémico dentro del marco AGM. La siguiente definición establece formalmente lo que es una **teoría** para el lenguaje $\mathcal{L}$.

Definición 9. *[3]*

Una ***teoría o conjunto de creencias*** *K es un subconjunto de proposiciones de $\mathcal{L}$ cerrado bajo consecuencia lógica, i.e., $K = Cn(K)$. Al conjunto de todas las teorías de $\mathcal{L}$ lo denotamos por $\mathcal{K}_{\mathcal{L}}$*

Antes de continuar con los demás elementos que componen el marco AGM, vamos a fijar la estructura booleana de dominio $\{0, 1\}$ pues el contenido de esta teoría trabaja sobre ella; así, presentemos algunas definiciones y proposiciones adicionales.

Definición 10. *[4]*

Sea $\alpha \in \mathcal{L}$. Diremos que α es ***satisfacible*** *o* ***consistente*** *si y solo si $Mod(\alpha) \neq \varnothing$[10].*

Proposición 3. *[2]*

Sea $\Gamma \subseteq \mathcal{L}$. Diremos que Γ es ***consistente*** *si y solo si $\bot \notin Cn(\Gamma)$, i.e., $\Gamma \not\models \bot$.*

Proposición 4. *[9]*

- *Sea $\alpha \in \mathcal{L}$. α es una tautología si y solo si $\neg\alpha$ es insatisfacible.*
- *Dadas $\alpha, \beta \in \mathcal{L}$, se tiene que $\alpha \to \beta$ es una tautología si y solo si $\alpha \models \beta$.*

Definición 11. *[4]*

Sea $\alpha, \beta \in \mathcal{L}$, decimos que α y β son premisas o fórmulas son ***lógicamente independientes*** *si ninguna de las dos es una implicación tautológica de la otra. i.e., $\not\models \alpha \to \beta$ y $\not\models \beta \to \alpha$. Lo cual es equivalente a $\alpha \not\models \beta$ y $\beta \not\models \alpha$.*

[10] Puesto que el dominio de $\mathcal{A}$ es booleano, entonces de la definición de $Mod(\alpha)$, basta con encontrar una interpretación para la cual su valuación asociada sea 1.

En general, $\Sigma \subseteq \mathcal{L}$ se dice que es lógicamente independiente si para toda $\alpha \in \Sigma$, entonces $\Sigma \backslash \{\alpha\} \nvDash \alpha$.

Adicionalmente, diremos que dos fórmulas α, β son lógicamente equivalentes si y solo si se implican lógicamente entre ellas. Para ello, usaremos la siguiente notación: $\alpha \equiv \beta$.

Actitudes epistémicas

En general, las actitudes epistémicas pueden ser descritas como *valuaciones* de los objetos de un modelo o de un estado epistémico. Según Gärdenfors [6], *"las actitudes epistémicas son reflejadas por modismos lingüísticos que usamos para expresar actitudes, dichas expresiones se las conoce como juicios epistémicos."* En el marco AGM, la información nueva se interpreta mediante el lenguaje interno del agente, representemos entonces esta información por la letra p, la cual es una proposición en $\mathcal{L}$. Si se tiene un estado epistémico K, una teoría consistente, entonces existen tres posibilidades:

1. $p \in K$, es decir, el agente acepta p.
2. $\neg p \in K$, es decir, el agente rechaza p.
3. $p \notin K$ y $\neg p \notin K$, lo que significa que para el agente, p es información indeterminada.

Estas tres posibilidades se pueden reducir a solo dos si notamos que p *es aceptada en* K *si y solo si* $\neg p$ *es rechazada en* K.

Criterios de racionalidad

En el marco se consideran como criterios de racionalidad a los siguientes principios que determinan la acción de las operaciones epistémicas [3].

- **Clausura lógica:** las operaciones epistémicas envían teorías en teorías.

- **Éxito:** si la información requiere ser agregada, entonces pertenecerá a la nueva teoría. Si deseamos eliminarla, entonces esta no deberá pertenecer a la nueva teoría.

- **Preservación de la consistencia:** si la teoría original es consistente, entonces la nueva teoría también.

- **Conservación:** si una fórmula es agregada, ninguna otra es removida. Si una fórmula es removida, ninguna otra es agregada.

- **Economía de la información:** en la medida de lo posible, la información previa es retenida en la nueva teoría.

- **No arbitrariedad:** si existe más de un candidato para una teoría revisada que satisface estos criterios de racionalidad previos, entonces uno de ellos no debería escogerse de manera arbitraria.

Operadores de cambio epistémico: métodos implícitos

Es el turno de explicar cómo modelaremos los cambios en los estados epistémicos. Para ello, vamos a introducir formalmente lo que se conoce como *operaciones de cambio epistémico u operadores de cambio epistémico.* En esta ocasión, nos centraremos en la definición implícita, la cual se caracteriza por proporcionar un conjunto de postulados o axiomas que deben satisfacer estos nuevos tipos de operadores. Consideremos un lenguaje formal $\mathcal{L}$ con todas las características mencionadas anteriormente.

Definición 12. *[3, 11]*

Sean $\varphi, \psi \in \mathcal{L}$ y $K, K' \subseteq \mathcal{L}$. El operador expansión se define como

$$\begin{aligned} +\colon \mathcal{K}_{\mathcal{L}} \times \mathcal{L} &\longrightarrow \mathcal{K}_{\mathcal{L}} \\ (K, \varphi) &\longmapsto K + \varphi := +(K, \varphi), \end{aligned}$$

el cual cumple con los siguientes postulados:

(K+1) ***Clausura:*** *$K + \varphi$ es una teoría.*

(K+2) ***Éxito:*** *$\varphi \in K + \varphi$.*

(K+3) ***Economía:*** *$K \subseteq K + \varphi$.*

(K+4) ***Vacuidad*** *si $\varphi \in K$, entonces $K + \varphi = K$.*

(K+5) ***Monotonía:*** *si $K \subseteq K'$, entonces $K + \varphi \subseteq K' + \varphi$.*

(K+6) ***Minimalidad:*** *$K + \varphi$ es la teoría más pequeña que verifica* ***(K+1)*** *-* ***(K+5)****.*

Demos un repaso sobre cada uno de estos principios. El postulado de clausura $(K + 1)$ asegura que el operador de expansión ”+” esté bien definido. El postulado de éxito $(K+2)$ garantiza que la nueva información φ haya sido incorporada a $K + \varphi$.

El postulado de economía $(K+3)$ puede ser también renombrado como *postulado de inclusión*, pero el primer nombre posee una connotacíon importante: *"la informacíon es más valiosa que el oro"*; por lo tanto, el agente evitará perderla tras la acción de la expansión.

En el caso $(K + 4)$, puede el agente ya aceptar la información φ, por lo que la expansión resulta ser inefectiva sobre K. De manera similar, el postulado $(K + 5)$ refleja la inalterabilidad de ”+”, aunque ahora es sobre la relación de contenencia entre dos teorías dadas.

Finalmente, el postulado $(K + 6)$ incorpora este requisito de simpleza, el cual se busca la expansión refleje, pues cabe la posibilidad de escoger para $K+\varphi$ una teoría que acepte φ, pero agregue información quizás irrelevante para el agente, salvo si acaso lo requiera necesario. En adición, esta definición tiene una consecuencia especial.

Proposición 5. *[6]*

Sean un operador ” + ” definido en (12) *que satisfaga los postulados*

$(K + 1) - (K - 6)$ *si y solo si para cualquier* $(K, \alpha) \in \mathcal{K}_{\mathcal{L}} \times L$,

$$K + \alpha = Cn(K \cup \{\alpha\}).$$

Enunciemos una batería de propiedades de esta operación epistémica que resultan muy útiles.

Proposición 6. *[3]*

Sean $\alpha, \beta \in \mathcal{L}$ y $K, K' \subseteq \mathcal{L}$. La expansión epistémica cumple:

- $(K \cap K') + \alpha = (K + \alpha) \cap (K' + \alpha)$.
- $(K + \alpha) + \beta = K + (\alpha \wedge \beta)$
- $(K + \alpha) + \beta = (K + \beta) + \alpha$.

A partir de esta proposición también podemos inferir que este operador de expansión es único. Siguiendo el orden de la presentación de estos operadores, continuamos con el *operador de contracción epistémica* u *operador de contracción* para abreviar.

Definición 13. *[2]*

Sea $\varphi, \psi \in \mathcal{L}$ y $K \subseteq \mathcal{L}$. El operador de contracción se define como

$$\begin{aligned} \dot{-} : \mathcal{K}_{\mathcal{L}} \times L &\longrightarrow \mathcal{K}_{\mathcal{L}} \\ (K, \varphi) &\longmapsto K \dot{-} \varphi := \dot{-}(K, \varphi), \end{aligned}$$

el cual cumple con los siguientes postulados:

(K$\dot{-}$1) ***Clausura:*** $K \dot{-} \varphi$ *es una teoría.*

(K$\dot{-}$2) ***Inclusión:*** $K \dot{-} \varphi \subseteq K$.

(K$\dot{-}$3) ***Éxito:*** *si* $\not\models \varphi$, *entonces* $\varphi \notin K \dot{-} \varphi$.

(K$\dot{-}$4) ***Vacuidad:*** *si* $\varphi \notin K$, *entonces* $K \subseteq K \dot{-} \varphi$.

(K$\dot{-}$5) ***Recuperación:*** $K \subseteq (K \dot{-} \varphi) + \varphi$.

(K$\dot{-}$6) ***Extensionalidad:*** *si* $\models \varphi \leftrightarrow \psi$, *entonces* $K \dot{-} \varphi = K \dot{-} \psi$.

(K$\dot{-}$7) ***Superposición conjuntiva:*** $(K \dot{-} \varphi) \cap (K \dot{-} \psi) \subseteq K \dot{-} (\varphi \wedge \psi)$.

(K$\dot{-}$8) ***Inclusión conjuntiva:*** *si* $\varphi \notin K \dot{-} (\varphi \wedge \psi)$, *entonces* $K \dot{-} (\varphi \wedge \psi) \subseteq K \dot{-} \varphi$.

En este conjunto de postulados el primero siempre tendrá como objetivo de definir bien al operador en cuestión. Después, el postulado $(K \dot{-} 2)$ muestra lo que naturalmente sucedería si eliminamos una proposición φ de un conjunto de proposiciones como K, i.e., el nuevo $K \dot{-} \varphi$ es un subconjunto de K.

¿Qué sucedería si el agente no acepta la información φ como parte de su estado epistémico K y se intentara removerla? El resultado es nulo, puesto que no habría nada que hacer, lo cual refleja exactamente el postulado de vacuidad $(K \dot{-} 3)$ al dejar a $K \dot{-} \varphi$ igual a K.

Uno de los postulados más importantes de la contracción epistémica es asegurar que la proposición φ sea removida de K, el postulado del éxito $(K \dot{-} 4)$ representa esta idea e incluso aporta algo adicional. ¿Qué sucedería si φ es una tautología? El agente puede remover racionalmente información que ya no considere relevante; no obstante, las tautologías son proposiciones dentro del lenguaje $\mathcal{L}$ que independientemente de si son relevantes para el agente o no, pertenecen a cualquier estado epistémico como una especie de 'base epistémica'. Este hecho se logra entender de mejor manera si notamos que dada una tautología α $(\vDash \alpha)$ y para cualquier $K \in \mathcal{K}_{\mathcal{L}}$, sabemos que $\varnothing \subseteq K$ y, gracias a la monotonía de Cn, se tiene que $Cn(\varnothing) \subseteq Cn(K) = K$. Así, como $\alpha \in Cn(\varnothing)$, se concluye que $\alpha \in K$.

Pasamos al postulado de recuperación $(K \dot{-} 5)$ cuyo propósito es representar la acción de descartar y reincorporar la misma proposición φ a K. Según Fermé en [2], en el marco AGM se propone usar este postulado como una regla de minimalidad, i.e., es suficiente agregar la proposición eliminada φ para recuperar totalmente la teoría original. Sin embargo, este postulado ha sido mira de la crítica, pues se ha logrado definir la contracción epistémica sin usar esta regla, para más detalles se puede revisar [2, 11].

Continuamos con el postulado de extensionalidad $(K \dot{-} 6)$ o también conocido como *postulado de preservación* [2], pues la contracción epistémica debería ser independiente de la representación sintáctica de las proposiciones; en otras palabras, las proposiciones equivalentemente lógicas mantienen el mismo resultado.

Los postulados de $(K \dot{-} 1)$ a $(K \dot{-} 6)$ se los denomina como *postulados base para la contracción* en el marco AGM. Solo con los cinco primeros de ellos podemos deducir una propiedad o caso límite llamada fracaso.

Proposición 7. *[3]*

Sea "$\dot{-}$" un operador de contracción en el marco AGM que cumple $(K \dot{-} 1)$

a $(K \dot{-} 5)$, *entonces se cumple que:*

- ***Fracaso:*** *si* $\models \alpha$, *entonces* $K \dot{-} \alpha = K$.

Los dos últimos postulados son suplementarios que el trio AGM proporciona para establecer la contracción por una conjunción. De ese modo, $(K \dot{-} 7)$ afirma que si α no es removida de K por φ ni tampoco por ψ; entonces, α tampoco es removida de K por $\varphi \wedge \psi$.

Por último, el postulado de inclusión conjuntiva $(K \dot{-} 8)$ nos permitirá remover una conjunción $\varphi \wedge \psi$ de K, pero primero se debe remover φ o ψ. En el caso de que φ haya sido descartada de $K \dot{-} (\varphi \wedge \psi)$, se espera que si se contrae una proposición α de $K \dot{-} \varphi$; entonces, α también deberá ser removida de $K \dot{-} (\varphi \wedge \psi)$.

Para concluir con la lista de las operaciones epistémicas, tenemos a la revisión epistémica, la cual en palabras simples, se trata de una expansión consistente. Más que un principio, cualquier agente que actúa racionalmente desearía que la información que obtenga del munddo exterior sea incapaz de albergar contradicciones. Sin embargo, ¿cómo lograría el agente este cometido? El problema aquí se traduce de la siguiente manera: dada una información nueva φ en términos de $\mathcal{L}$, deberá el agente encontrar un método que permita *revisar* los elementos de un estado epistémico K de este, el cual desea actualizar su estado epistémico por uno nuevo que acepte φ y preserve la mayor cantidad de información del anterior estado y sea consistente con φ. Al parecer, bajo el supuesto de que la nueva información vale tal sacrificio y en el afán de alcanzar este objetivo, el agente deberá considerar perder algo de información en el peor de los casos.

Considerando lo discutido anteriormente, vamos a presentar la definición implícita del *operador de revisión epistémica* u *operador de revisión.*

Definición 14. *[2]*

Sean $\varphi, \psi \in \mathcal{L}$ *y* $K \subseteq \mathcal{L}$. *El operador de revisión se define como*

$$\begin{aligned} *\colon \mathcal{K}_{\mathcal{L}} \times L &\longrightarrow \mathcal{K}_{\mathcal{L}} \\ (K, \varphi) &\longmapsto K * \varphi := *(K, \varphi), \end{aligned}$$

el cual cumple con los siguientes postulados:

*(K*1)* ***Clausura:*** *$K * \varphi$ es una teoría.*

*(K*2)* ***Éxito:*** *$\varphi \in K * \varphi$.*

*(K*3)* ***Inclusión:*** *$K * \varphi \subseteq K + \varphi$.*

*(K*4)* ***Vacuidad:*** *si $\neg\varphi \notin K$, entonces $K + \varphi \subseteq K * \varphi$.*

*(K*5)* ***Consistencia:*** *si φ es consistente, entonces $K * \varphi$ es consistente..*

*(K*6)* ***Extensionalidad:*** *si $\varphi \equiv \psi$, entonces $K * \varphi = K * \psi$.*

*(K*7)* ***Superexpansión:*** *$K * (\varphi \wedge \psi) \subseteq (K * \varphi) + \psi$.*

*(K*8)* ***Subexpansión:*** *si $\neg\psi \notin K * \varphi$, entonces $(K * \varphi) + \psi \subseteq K * (\varphi \wedge \psi)$.*

Los postulados de $(K * 1)$ al $(K * 6)$ son los *postulados base para la revisión* en el marco AGM. Notemos que los principios $(K*1), (K*2), (K*3), (K*4)$ y $(K * 6)$ son semejantes a los del operador expansión. El postulado de inclusión también se lo conoce como *acotamiento*, pues en el mejor de los escenarios, el agente espera que al expandir K por φ, esta convierta $K + \varphi$ en una teoría consistente; caso contrario, $K * \varphi$ será un subconjunto de $K + \varphi$, al cual se requerirá que sea consistente. Esta última cualidad se asegura gracias al postulado $(K * 5)$.

Según Fermé en [2] argumenta sobre el principio de vacuidad lo siguiente: *" notemos que si $\neg\varphi \in K$, entonces $K + \varphi$ es inconsistente. En el caso de que una nueva creencia φ no genere ninguna contradicción con ninguna proposición en K; por tanto, no existe razón alguna para remover nada de él ".* De acuerdo a este argumento, $K + \varphi$ sería consistente y un potencial candidato para $(K * \varphi)$; de hecho, si se cumplen $(K * 3)$ y $(K * 4)$, entonces directamente tenemos que $K * \varphi = K + \varphi$.

Además, notemos que $(K * \varphi)$ es consistente si incluso K no lo es. Luego, el principio de extensionalidad $(K * 6)$ produce el mismo efecto de independencia sintáctica de la contracción. Para finalizar este repaso, $(K * 7)$ y $(K * 8)$ son principios suplementarios que, semejantes a sus homólogos en la contracción, tienen la intención de establecer la relación entre la conjunción y la revisión.

Por un lado, el postulado superexpasión $(K * 7)$ explica que el agente aspira a obtener una teoría consistente que contenga tanto φ como ψ y, esto lo hace, primero revisando K por φ y luego expandiendo el resultado por ψ. De esta forma, revisar K por $\phi \wedge \psi$ debería tomarse como un subconjunto de $(K * \varphi) + \psi$.

Por otro lado, el postulado de subexpansión $(K * 8)$ ocurre un caso análogo a los postulados $(K*3)$ y $(K*4)$. Así, si se cumple ambos, entonces $K*(\varphi \wedge \psi) = (K*\varphi)+\psi$. Además, esta última observación refleja el cambio minimal que se busca en la revisión epistémica dentro de modelo AGM.

Operadores de cambio epistémico: métodos explícitos

Estos métodos explíctios proporcionan una alternativa para definir los operadores de cambio epistémico : **operador de contracción** y, en un futuro, el **operador de revisión**.

Un criterio central que estos métodos poseen es el **criterio de economía de la información**, el cual pretende retener la mayor información posible de una teoría K luego de la contracción. Antes de dar paso y conocer dichos métodos, es necesario considerar las siguientes definiciones.

Sean $K \in \mathcal{K}_{\mathcal{L}}$ y $\alpha \in \mathcal{L}$. Se construye el siguiente conjunto, denotado por $K \perp \alpha$ y sus elementos los llamaremos como *conjuntos residuos de K dado* α.

Definición 15. *[3]*

Diremos que $H \in K \perp \alpha$ si y solo si

1. $H \subseteq K$.
2. $H \not\models \alpha$.
3. *No existe* $H \subset H' \subseteq K$ *y* $H' \not\models \alpha$.

De esta manera, $K \perp \alpha$ es el conjunto de todos los *subconjuntos maximales de K que no modelan α*. Un caso especial es el conjunto $\mathcal{L} \perp_{\perp}$, el cual consiste en todos los subconjuntos de $\mathcal{L}$ maximales **consistentes** de $\mathcal{L}$.

A partir de esta definición tenemos las siguientes propiedades.

Proposición 8. *[2]*

Dados $H, K \in \mathcal{K}_{\mathcal{L}}$ y $\alpha \in \mathcal{L}$, se cumple:

1. $K\perp\alpha = \{K\}$ *si y solo si* $K \nvDash \alpha$.

2. $K\perp\alpha = \varnothing$ *si y solo si* $\vDash \alpha$.

3. *Si* $H \subseteq K$ *y* $H \nvDash \alpha$, *entonces existe* $H' \in K\perp\alpha$ *tal que* $H \subseteq H'$ *(propiedad de acotación superior).*

4. *Si* $\alpha \in K$ *y* $\nvDash \alpha$, *entonces para todo* $H \in K\perp\alpha$, $H + \neg\alpha \in \mathcal{L}\perp_{\perp}$.

Gracias a estas propiedades se puede definir una clase nueva de operades de contracción epistémica.

Definición 16. *[2]*

Sean $K \in \mathcal{K}_{\mathcal{L}}$ *y* $\alpha \in \mathcal{L}$. *Se define los operadores de* ***contracción de elección maximal*** *"$-$" (maxichoice contraction) tales que*

$$\begin{cases} K - \alpha \in K\perp\alpha & , \nvDash \alpha; \\ K - \alpha = K & , \text{ caso contrario.} \end{cases}$$

Para denotar a este tipo de operadores utilizamos la notación: "$\sim_{em}$".

Otro tipo especial de operador de contracción es aquel que resulta de escoger como conjunto para $K-\alpha$ a la intersección de todos los elementos de $K\perp\alpha$. De nuevo, esto es posible gracias a las primeras dos propiedades en (8).

Definición 17. *[3]*

Sean $K \in \mathcal{K}_{\mathcal{L}}$ *y* $\alpha \in \mathcal{L}$. *Consideremos el siguiente operador de contracción "$-$" tal que*

$$K - \alpha = \begin{cases} \bigcap\limits_{H \in K\perp\alpha} H & , \nvDash \alpha; \\ K & , \text{ caso contrario.} \end{cases}$$

A este operador se lo conoce como operador de ***contracción de encuentro total***. *En este caso, a este tipo de operadores utilizaremos la notación: "$\sim_{fm}$".*

Dentro de los operadores de contracción de elección maximal es de especial interés tener algún modo de escoger la 'mejor' opción para definir $K - \alpha$. Para desarrollar esta idea, es necesario presentar algunas definiciones.

Definición 18. *[2]*

Sean $K \in \mathcal{K}_{\mathcal{L}}$ y $\alpha \in L$. Una ***función de selección*** *es $K \perp \alpha \mapsto \gamma(K \perp \alpha)$ tal que*

$$\gamma(K \perp \alpha) = \begin{cases} \varnothing \neq B \subseteq K \perp \alpha & , K \perp \alpha \neq \varnothing; \\ \{K\} & , K \perp \alpha = \varnothing. \end{cases}$$

Definición 19. *[2]*

Sean $K \in \mathcal{K}_{\mathcal{L}}$, $\alpha \in \mathcal{L}$ y γ una función de selección de K. Definimos el operador de ***contracción de encuentro parcial*** *denotado por*

$$K \sim_{\gamma} \alpha := \bigcap_{H \in \gamma(K \perp \alpha)} H.$$

En algunas ocasiones se utilizará la notación: " $\sim_{pm}$" para referirnos a este tipo de operador.

Nos hacemos una pregunta: ¿cuál sería la mejor elección para $\gamma(K \perp \alpha)$?, para responder esta inquietud requeriremos de una relación de orden sobre $K \perp \alpha$.

Definición 20. *[2]*

Una función de selección de K se dice que es ***relacional*** *si y solo si existe una relación de orden "$\leq$" tal que para todo $\alpha \in \mathcal{L}$ con $K \perp \alpha \neq \varnothing$, entonces*

$$\gamma(K \perp \alpha) = \{B \in K \perp \alpha : B' \leq B, \forall B' \in K \perp \alpha\}.$$

Decimos que γ es relacional transitiva si y solo si " $\leq$ " es una relación transitiva. Una relación de orden natural es la relación de contenencia de conjuntos "$\subseteq$", la cual estará presente en los resultados de la última sección de este trabajo.

Capítulo 2

Metodología

2.1. Primeras consecuencias sobre la contracción epistémica

Previamente, se presentó tres tipos de operadores de contracción epistémica: *de elección maximal, de encuentro total y de encuentro parcial.* En este apartado se analizará cuáles son los cambios que sufren los estados epistémicos depués de la contracción epistémica por *elección maximal y por encuentro total.*

2.1.1. Saturabilidad

En consecuencia al considerar la contracción epistémica de elección maximal, se tiene la siguiente propiedad de **saturabilidad**.

Proposición 9. *[2]*

Sean $K \in \mathcal{K}_{\mathcal{L}}$ y $\alpha \in \mathcal{L}$. Dado el operador de contracción de elección maximal "$-$", se tiene que si $\alpha \in K$, entonces para toda fórmula $\beta \in \mathcal{L}$, $\alpha \vee \beta \in K - \alpha$ o $\alpha \vee \neg\beta \in K - \alpha$.

2.1.2. Devastación

Siguiendo con la a contracción epistémica de encuentro total, se obtiene como consecuencia la propiedad de **devastación**.

Proposición 10. *[2]*

Sean $K \in \mathcal{K}_{\mathcal{L}}$ y $\alpha \in \mathcal{L}$. La propiedad de devastación afirma que si $\alpha \in K$, entonces para cada fórmula $\beta \in \mathcal{L}$, $\alpha \vee \beta \notin K \sim_{fm} \alpha$ o $\models \alpha \vee \beta$.

Aun más, la contracción epistémica de encuentro total es una manera natural de generar estados epistémicos 'muy pequeños' que fungen como cotas inferiores, i.e., si existe otro operador de contracción epistémica "$-$" dentro del marco AGM, entonces $K \sim_{fm} \alpha \subseteq K - \alpha$.

Proposición 11. *[2]*

Sean $K \in \mathcal{K}_{\mathcal{L}}$ y $\alpha \in \mathcal{L}$. Si $\alpha \in K$, entonces $K \sim_{fm} \alpha = Cn(\{\neg\alpha\}) \cap K$.

Proposición 12. *[2]*

Sean $K \in \mathcal{K}_L$, $\alpha \in \mathcal{L}$ y "$-$" un operador de contracción sobre K. "$-$" satisface el postulado de recuperación $(K \dot{-} 5)$ si solo si $K \sim_{fm} \alpha \subseteq K - \alpha$.

2.2. Equivalencias entre definiciones implícitas y explícitas

En anteriores líneas se hace mención de dos acercamientos distintos para determinar un mismo objeto, i.e., determinar qué es un operador de cambio epistémico. Luego de analizar algunas consecuencias inmediatas, es natural preguntarse si existe algun tipo de relación entre definiciones implícitas y explícitas, las cuales difieren esencialmente en la exposición y contrucción del nuevo estado epistémico, en otras palabras, si optamos por la aproximación explícita (constructiva) ¿cuáles y cuántos postulados de la definición implícita se satisfacen? ¿Es necesario aumentar alguna hipótesis adicional para satisfacer todos los postulados de la contracción epistémica?

A continuación, veremos que en efecto las respuestas a estas preguntas son afirmativas y, más aun, existe una equivalencia entre ambas aproximaciones.

2.2.1. Contracción epistémica de elección maximal

Para conseguir nuestro objetivo de caracterizar un operador de contracción de elección maximal con los postulados del marco AGM vamos a considerar el siguiente postulado de **completitud**.

Definición 21. *[2]*

Sean $K \in \mathcal{K}_L$ y $\alpha, \beta \in L$. El postulado de completitud sostiene que si $\beta \in K$ y $\beta \notin K \sim_{em} \alpha$, entonces $\not\models \alpha$ y $\alpha \rightarrow \beta \in K \sim_{em} \alpha$.

Además, el *postulado de completitud* es una condición más fuerte que el *postulado de recuperación* dentro de los postulados de contracción epistémica en el marco AGM.

Gracias al postulado de completitud, tenemos el primer teorema de caracterización.

Teorema 1. *[2]*

*Sean $K \in \mathcal{K}_L$. Un operador "$-$"sobre K es un operador de contraccción de elección maximal si y solo si "$-$"satisface los postulados de contracción del marco AGM: **clausura, éxito, inclusión, vacuidad, extensionalidad** y adicionalmente el postulado de **completitud**.*

2.2.2. Contracción epistémica de encuentro total

En el caso de contracción por encuentro total, debemos introducir la **identidad del encuentro**.

Proposición 13. *[2]*

Sean $K \in \mathcal{K}_L$ y $\alpha, \beta \in L$. Sobre K definimos un operador "$-$" de contracción de encuentro total. Tenemos que

$$K - (\alpha \wedge \beta) = K - \alpha \cap K - \beta. \tag{2.1}$$

De este modo, tenemos el teorema de caracterización respectivo para este operador de encuentro total.

Teorema 2. *[2]*

*Sean $K \in \mathcal{K}_L$ y $\alpha \in L$. Un operador "$-$" sobre K es de contracción de encuentro total si y solo si satisface los postulados de contracción del marco AGM: **clausura, inclusión, vacuidad, éxito, extensionalidad y la indentidad del encuentro**.*

2.2.3. Contracción epistémica de encuentro parcial

Para este tipo de operador es sencillo enunciar su teorema de caracterización gracias a la definición explícita previa en el capítulo anterior.

Teorema 3. *[2]*

*Sean $K \in \mathcal{K}_L$. Un operador es de contracción de encuentro parcial "$-$" sobre K si y solo si "$-$" satisface los postulados de **clausura, éxito, inclusión, vacuidad, recuperación y extensionalidad**. Además, si "$-$" es relacional transitivo si y solo si cumple con los postulados de **inclusión conjuntiva y superposición conjuntiva.***

2.3. Teorema de dualidad

Uno de los logros más destacables en el estudio de la dinámica de los estados epistémicos es conseguir definir un operador de revisión epistémica a partir de un operador de contracción epistémica y viceversa. Para este efecto, vamos a considerar solo las definiciones implícitas de estos operadores.

Isaac Levi pudo definir un operador de revisión en términos de un operador de contracción de la siguiente forma: para revisar K por una fórmula φ, primero K se contrae por $\neg\varphi$ y luego se expande $K * \neg\varphi$ por φ. En nuestra notación, la *Identidad de Levi* es la siguiente:

$$K *_{\dot{-}} \varphi = (K \dot{-} \neg\varphi) + \varphi. \tag{2.2}$$

Por otro lado, existe un proceso que nos permite definir la contracción en términos de la revisión, este proceso se conoce como *identidad de Harper* (por William L Harper):

$$K \dot{-}_{*} \varphi = (K * \neg\varphi) \cap K. \tag{2.3}$$

Tanto $*_{\dot{-}}$ como $\dot{-}_{*}$ definen operadores de revisión y contracción epistémica, respectivamente [2]. Con estas dos identidades, estamos en la capacitadad de enunciar el **teorema de dualidad** dentro del marco AGM.

Teorema 4. *[3]*

Sean $*$ un operador de revisión y $\dot{-}$ un operador de contracción sobre $\mathcal{K}_L \times L$ en $\mathcal{K}_L$ dentro del marco AGM. Gracias a las identidades de Levi y Harper se tiene que

$$* = *_{\dot{-}_{*}}. \tag{2.4a}$$

$$\dot{-} = \dot{-}_{*_{\dot{-}}}. \tag{2.4b}$$

Demostración. Sean $K \in \mathcal{K}_{\mathcal{L}}$ y $\alpha \in \mathcal{L}$, arbitrarios. Vamos a probar que

$$K * \alpha = K *_{\dot{-}_{*}} \alpha \tag{2.5}$$

$$K \dot{-} \alpha = K \dot{-}_{*_{\dot{-}}} \alpha. \tag{2.6}$$

Notemos que por definición de las identidades de Levi y Harper se tiene de (2.5) que

$$\begin{aligned} K *_{\dot{-}_{*}} \alpha &= (K \dot{-}_{*} \neg\alpha) + \alpha \\ &= (K * \neg\neg\alpha \cap K) + \alpha \end{aligned}$$

y gracias a las propiedades de (6) y $\neg\neg\alpha \equiv \alpha$, se obtiene que

$$K *_{\dot{-}_{*}} \alpha = (K * \alpha) + \alpha \cap K + \alpha,$$

lo cual por $(K * 2), (K * 3)$ y $(K + 4)$, se deduce (2.5).

Desarrollando el lado derecho de (2.6) vemos que

$$\begin{aligned} K \dot{-}_{*_{\dot{-}}} \alpha &= (K *_{\dot{-}} \neg\alpha) \cap K \\ &= ((K \dot{-} \neg\neg\alpha) + \neg\alpha) \cap K \\ &= ((K \dot{-} \alpha) + \neg\alpha) \cap K \\ &\supseteq K \dot{-} \alpha \cap K \\ &= K \dot{-} \alpha, \end{aligned}$$

por $(K+3)$ y $(K \dot{-} 2)$. Basta mostrar que $(K \dot{-} \alpha) + \neg\alpha \subseteq K \dot{-} \alpha$. En primer lugar, vamos a suponer que $\models \alpha$. Entonces, por la propiedad del fracaso de "$\dot{-}$", se tiene que $K \dot{-} \alpha = K$. Así, concluímos que $K \dot{-}_{*_{\dot{-}}} \alpha = K \dot{-} \alpha$. Por el contrario, supongamos que $\not\models \alpha$ y tomemos $\beta \in (K \dot{-} \alpha) + \neg\alpha$, arbitraria. Luego, por $(K \dot{-} 3)$, se sigue que $K \dot{-} \alpha \models \beta$. Por tanto, como β es arbitraria, se concluye (2.6). $\square$

¿Por qué este teorema es especial? Pensemos por ejemplo que tenemos a disposición un operador de contracción epistémica $\dot{-}$. Luego, la identidad de Levi nos permite definir un nuevo operador de revisión $*_{\dot{-}}$ y con ayuda de la identidad de Harper obtenemos un nuevo operador de contracción $\dot{-}_{*_{\dot{-}}}$. Tenemos dos operadores de contracción epistémica que podrían cambiar un estado epistémico de dos maneras completamente diferentes, pero el teorema de dualidad desecha esta posibilidad ya que estos dos operadores son de hecho iguales.

2.4. Primeras consecuencias sobre la revisión epistémica

La identidad de Levi es una forma sencilla de obtener un operador de revisión epistémica. Gracias a ella, ahora es el turno de analizar lo que sucede con los estados epistémicos al ser revisados por operadores de revisión: *de elección maximal, de encuentro total y de encuentro parcial.* Así, tenemos los siguientes resultados.

Teorema 5. *[2]*

Sean $K \in \mathcal{K}_{\mathcal{L}}$, $\alpha \in \mathcal{L}$ y "$\dot{-}$" un operador de contracción epistémica para

*K. Tenemos para K que "$*$" es un **operador de revisión**:*

- ***de elección maximal** si "$-$" es de contracción maximal.*
- ***de encuentro total** si "$-$" es de contracción de encuentro total.*
- ***de encuentro parcial** si "$-$" es de contracción de encuentro parcial.*

Teorema 6. *[2]*

Sean $K \in \mathcal{K}_L$, $\alpha \in L$ y "$*$" un operador de revisión epistémica para K.

- *Si "$*$" es un operador de **revisión maximal** y $\neg\alpha \in K$ se tiene que $K * \alpha \in L\perp_{\perp}$.*
- *Si "$*$" es un operador de **revisión de encuentro total** y $\neg\alpha \in K$ se tiene que $K * \alpha = Cn(\alpha)$.*

2.5. Criticismo al modelo AGM y sus implicaciones.

Con el material expuesto hasta ahora es posible satisfacer el tercer objetivo específico. Sin embargo, se tenía planeado incorporar definiciones propias o definiciones ya existentes de operadores de contracción en el marco AGM, lo cual no fue posible debido a dos puntos: la inexistencia de artículos que explorarán nuevos operadores de contracción que satisfagan los postulados del modelo AGM y la dificultad de trabajar con aquellos estados epistémicos cuya estructura no es explícita o es infinita. Es decir, todas las teorías dentro del marco AGM cumplen con propiedades generales, e.g., la consistencia o la clausura; lo cual, no nos ayuda realmente a establecer una comparación entre los elementos que las componen. Una idea natural para superar esta dificultad es mediante una estructura finita que genere toda la teoría, ya que de ese modo, usando la clausura lógica y sus propiedades se podría comparar dos teorías diferentes.

En [3, 2] existen algunos apartados para analizar algunos cuestionamientos que surgieron en el desarrollo de los fundamentos del modelo AGM. Así, ¿son acaso los estados epistémicos demasiados extensos?

Desde el punto de vista del realismo cognitivo tenemos dos aspectos importantes: su clausura lógica y su estructura infinita.

En este trabajo no profundizaremos en las implicaciones del uso de la clausura lógica para representar un conjunto de creencias. Mas, cabe recalcar que, dicha crítica yace en la suposición que idealiza las capacidades lógicas del agente epistémico, viéndose en la obligación de aceptar todas las consecuencias lógicas de sus creencias iniciales como además de su capacidad de verificar rigurosamente su consistencia. En resumen, esta suposición vuelve al modelo AGM una propuesta poco realista. [3]

En el caso de la estructura infinita, tenemos el problema de que el agente o quizás un ordenador no posee una capacidad de memoria infinita. Entonces, lo más natural es trabajar con estados epistémicos finitos, tanto los originales como los que resultan luego de la acción de las operaciones epistémicas.

En esta oportunidad, trabajaremos en aquellos estados epistémicos que son generados, bajo clausura lógica, por una *base epistémica finita*. Trabajar con estas bases trae consigo una ventaja en términos prácticos; no obstante, el precio a pagar suma al modelamiento nuevos desafíos que resolver.

2.6. Contracción de base generadora

Definición 22. *[8]*

Sea $B \subseteq \mathcal{L}$ y sea $K \in \mathcal{K}_{\mathcal{L}}$. Decimos que B es una ***base de creencias o base epistémica*** *para K si y solo si $K = Cn(B)$.*

Previamente, habíamos presentado la definición de un *operador de contracción de encuentro parcial*. Vamos a presentar una definición análoga usando ahora la base epistémica y no la teoría como tal.

2.6.1. Contracción de encuentro parcial básico

Definición 23. *[8]*

Sean $A \subseteq \mathcal{L}$, $K \in \mathcal{K}_{\mathcal{L}}$, $\alpha \in \mathcal{L}$. γ una función de selección para A y A es una *base epistémica para K. Análogo a (18), un* ***operador de contracción de encuentro parcial básico*** *es*

$$A \sim_\gamma \alpha := \bigcap_{B \in \gamma(A \perp \alpha)} B.$$

Además, este operador de contracción es de:

- ***elección maximal básico*** *si $\gamma(A \perp \alpha)$ posee un solo elemento.*
- ***encuentro total básico*** *si $A \perp \alpha \subseteq \gamma(A \perp \alpha)$.*

Teorema 7. *[3]*

Sean A una base de creencias y $\varphi, \psi \in \mathcal{L}$. Un operador "$-$" sobre A es de contracción de encuentro parcial básico para A si y solo si satisface:

1. ***Éxito:*** *si $\not\models \varphi$, entonces $A - \varphi \not\models \varphi$.*
2. ***Inclusión:*** *$A - \varphi \subseteq A$.*
3. ***Relevancia:*** *si $\psi \in A$ y $\psi \notin A - \varphi$, entonces existe $A' \subseteq \mathcal{A}$ tal que $A' \not\models \varphi$ y $A' \cup \{\psi\} \models \varphi$.*
4. ***Uniformidad:*** *si para todo $A' \subseteq A$, $A' \models \varphi$ si y solo si $A' \models \psi$; entonces, $A - \varphi = A - \psi$.*

El postulado de *relevancia* tiene una función similar que el postulado de *recuperación* para los conjuntos de creencias, es decir, para evitar pérdidas de creencias innecesarias. Esta propiedad requiere de una premisa excluida ψ que contribuya de algún modo al hecho de que A modela φ.

El postulado de *uniformidad* sostiene que si dos premisas φ y ψ tienen el mismo efecto sobre una base A, es decir, si son modelados por los mismos subconjuntos de A; entonces, el resultado al contraer A por φ o por ψ debería ser idéntico. En resumen, el postulado de uniformidad hace la función análoga del postulado de extensionalidad de la contracción aplicada a los estados epistémicos.

Una observación inmediata de este teorema es la siguiente.

Corolario 1. *[3]*

Para $\varphi, \psi \in \mathcal{L}$ y $A \subseteq \mathcal{L}$ una base epistémica. Si "$-$" satisface los postulados de inclusión y relevancia, entonces satisface

- ***Fracaso:*** *si* $\models \varphi$, *entonces* $A - \varphi = A$.

- ***Vacuidad:*** *si* $A \not\models \varphi$, *entonces* $A - \varphi = A$.

Adicionalmente y de manera independiente. si "$-$" satisface el postulado de uniformidad, entonces satisface

- ***Extensionalidad:*** *si* $\models \varphi \leftrightarrow \psi$, *entonces* $A - \varphi = A - \psi$.

2.6.2. Contracción de kernel básico

Definición 24. *[3]*

Sean K un conjunto de creencias y $p \in \mathcal{L}$. El ***conjunto de kernels*** *de K dado p denotado por $K \perp\!\!\!\perp p$ es el conjunto de todos los conjuntos A que satisfacen:*

- $A \subseteq K$

- $A \models p$

- $B \subset A$, *entonces* $B \not\models p$.

A los conjuntos A se los denomina p-kernels de K.

Los kernels también son conocidos como *conjuntos implicadores (entailment sets)* y análogamente a los *conjuntos residuos*, los p-kernels son los conjuntos minimales que modelan p. Esta aproximación fue utilizada por Carlos Alchurrón y David Makinson en 1985 en un artículo en el que introdujeron el operador de *contracción segura*[1] [3]. La función que selecciona una premisa a ser removida es llamada una *función de incisión*, puesto que produce una incisión en cada p-kernel.

Definición 25. *[8]*

Sea $A \subseteq \mathcal{L}$. Una ***función de incisión*** *para A es una función σ tal que para toda fórmula $\alpha \in \mathcal{L}$:*

1. $\sigma(A \perp\!\!\!\perp \alpha) \subseteq \bigcup_{B \in A \perp\!\!\!\perp \alpha} B$.

[1]Un caso particular de la contracción de kernel.

2. *Si* $\emptyset \neq B \in A \perp\!\!\!\perp \alpha$, *entonces* $B \cap \sigma(A \perp\!\!\!\perp \alpha) \neq \emptyset$.

De esta manera, es posible definir el *operador de contracción de kernel*, el cual devuelve el conjunto de los elementos de conjunto original A que no son seleccionados para eliminación por la función de incisión.

Definición 26. *[8]*

Sea $A \subseteq \mathcal{L}$ y σ una función de incisión para A. La ***contracción de kernel*** *sobre A que es generada por σ es la operación $\approx_\sigma$ tal que para toda premisa $\varphi \in \mathcal{L}$:*

$$A \approx_\sigma \varphi = A \backslash \sigma(A \perp\!\!\!\perp \varphi),$$

donde "$\backslash$" denotada la diferencia entre dos conjuntos.

Análogamente al operador de encuentro parcial básico, existe una definición implícita equivalente para el operador de contracción de kernel básico.

Teorema 8. *[3]*

Para $\varphi, \psi \in \mathcal{L}$ y $A \subseteq \mathcal{L}$ una base epistémica. Un operador "$-$" sobre A es un ***operador de kernel básico*** *si y solo si satisface los postulados de:* ***éxito, inclusión, uniformidad y***

- ***Preservación de núcleo*** (core-retainment)*: si $\psi \in A$ y $\psi \notin A - \varphi$, entonces existe algún $A' \subseteq A$ tal que $A' \nvDash \varphi$ y $A' \cup \{\psi\} \vDash \varphi$.*

Diremos que $\approx_\sigma$ es una contracción de kernel *suave* (smooth) si y solo para todo $A' \subseteq A$ y $\psi \in \mathcal{L}$: si $A' \vDash \psi$ y $\psi \in \sigma(A \perp\!\!\!\perp \varphi)$, entonces $A' \cap \sigma(A \perp\!\!\!\perp \varphi) \neq \emptyset$. Esta propiedad tiene una condición equivalente que resulta ser muy útil.

Proposición 14. *[3]*

Sean $A \subseteq \mathcal{L}$ una base de creencias, $\varphi \in \mathcal{L}$ y "$-$" un operador de contracción de kernel para A. Entonces,

- ***Clausura relativa:*** *"$-$" es suave si y solo si satisface*

$$A \cap Cn(A - \varphi) \subseteq A - \varphi.$$

Inmediatamente, tenemos un resultado que relaciona la contracción de encuentro parcial con esta nueva contracción de kernel.

Proposición 15. *[8]*

Todo operador de contracción de encuentro parcial básico es un operador de contracción de kernel básico.

Sin embargo, el recíproco no es cierto [8]. Para ello, vamos a escoger $p, q, r \in \mathcal{L}$, lógicamente independientes. Así, formamos el conjunto $A = \{p, q, r\}$. Tenemos que

$$A \perp\!\!\!\perp (p \wedge (q \vee r)) = \{\{p.q\}, \{p, r\}\}.$$

Por un lado, sea σ tal que

$$\sigma(A \perp\!\!\!\perp (p \wedge (q \vee r))) = \{p, r\}$$

la cual cumple con las condiciones que se exige para que sea considerada una función de incisión para A. Entonces,

$$A \approx_{\sigma} (p \wedge (q \vee r)) = \{q\}.$$

Por otro lado, tenemos que

$$A\perp(p \wedge (q \vee r)) = \{\{p\}, \{q, r\}\},$$

por lo tanto, una función de selección γ para A debe tomar un subconjunto no vacío de $A\perp(p \wedge (q \vee r))$. Estas posibilidades son: {{p}}, {{q,r}} y $A\perp(p \wedge (q \vee r))$. Así, obtenemos que $A \sim_{\gamma} (p \wedge (q \vee r))$ pueden ser $\{p\}$, $\{q, r\}$ o $\varnothing$. Por tanto, nunca puede ser $\{q\}$ [2].

Esto muestra que la contracción de kernel es un tipo de contracción más general que la contracción de encuentro parcial cuando estas se aplican sobre bases epistémicas. Sin embargo, ¿qué sucedería si dichos operadores se aplicaran sobre los conjuntos de creencias en sí? Pues resulta que las definiciones de estos dos tipos operadores son equivalentes.

[2]Se presenta este ejemplo tal y como el autor lo hace sin mayor alteración salvo notaciones. Sin embargo, no se proporciona un análisis previo. En la sección de resultados se hará un análisis de este ejemplo con mayor profundidad

Trabajar sobre los estados epistémicos significa aumentar la hipótesis de clausura lógica sobre las bases y también que el operador de contracción cumpla con la condición de clausura. Así, tenemos el siguiente teorema que resume este hecho.

Teorema 9. *[8]*

Sea $K \in \mathcal{K}_{\mathcal{L}}$ y sea "$\dot{-}$" una operación epistémica sobre K que satisfaga el postulado de clausura $(K \dot{-} 1)$, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

1. *"$\dot{-}$" es una contracción de kernel sobre K.*
2. *"$\dot{-}$" es una contracción de encuentro parcial sobre K.*

En el anterior resultado podemos relajar la hipótesis $(K \dot{-} 1)$ por la hipótesis de *clausura relativa* ya que $(K \dot{-} 1)$ implica *clausura relativa*. Además, si cambiamos K por un conjunto lógicamente cerrado A, de esta forma, (9) afirmaría que: "$\dot{-}$" es una contracción de kernel suave sobre A si y solo si "$\dot{-}$" es una contracción parcial sobre A [7].

2.6.3. Operaciones de base generadora sobre estados epistémicos

Gracias al estudio preliminar de la contracción sobre las bases epistémicas, ahora nos encontramos en la capacidad de determinar una nueva operación de contración sobre estados epistémicos apoyados en la naturaleza finita de las bases epistémicas.

Definición 27. *[3]*

*Sean $K \in \mathcal{K}_{\mathcal{L}}$, $\varphi \in \mathcal{L}$ y "$-$" es un **operador de contracción de base generada** si y solo si existen una base epistémica A para K y una operación "$\dot{-}$" de contracción epistémica básica para A tal que $K - \varphi = Cn(A \dot{-} \varphi)$.*

Además, se dice que el operador "$-$" es la clausura u operador clausurado de "$\dot{-}$".

Existen algunas propiedades o postulados que los operadores de contracción epistémica de base generadora pueden heredar de sus homógolos básicos a través de clausura lógica como en la definición previa.

Definición 28. *[3]*

Decimos que P es una propiedad o postulado ***invariante por clausura*** *para "$\dot{-}$" si y solo si P se cumple también para su operador clausurado.*

Proposición 16. *[8]*

A continuación, algunas propiedades invariantes por clausura: ***inclusión, vacuidad, éxito, extensionalidad y fracaso*** *.*

Las operaciones de contracción de kernel y de encuentro parcial de base generada también poseen caracterizaciones por medio de conjuntos de postulados.

Teorema 10. *[3]*

Sean $K \in \mathcal{K}_{\mathcal{L}}$ consistente y "$-$" sobre K es generada por una operación de contracción de kernel para una base finita para K si y solo si "$-$" satisface: ***clausura, inclusión, vacuidad, éxito y:***

- ***Finitud:*** *existe un conjunto A finito tal que para cada $\varphi \in \mathcal{L}$:*

  $K - \varphi = Cn(A')$ para algún $A' \subseteq A$.

- ***Simetría:*** *para todo $\omega \in \mathcal{L}$, $\varphi \in K - \omega$ si y solo si $\psi \in K - \omega$; entonces, $K - \varphi = K - \psi$.*

- ***Conservación débil:*** *para $\varphi, \psi \in \mathcal{L}$ tales que si $K - \psi \nsubseteq K - \varphi$, entonces existe un $\omega \in \mathcal{L}$ tal que $K - \omega \nvDash \varphi$ y $(K - \omega) \cup (K - \psi) \vDash \varphi$.*

Adicionalmente, si reforzamos la condición de conservación débil a ***conservación****:*

- ***Conservación:*** *para $\varphi, \psi \in \mathcal{L}$ tales que si $K - \psi \nsubseteq K - \varphi$, entonces existe un $\omega \in \mathcal{L}$ tal que $K - \varphi \subseteq K - \omega \nvDash \varphi$ y $(K - \omega) \cup (K - \psi) \vDash \varphi$.*

Se obtiene la caracterización para el operador de contracción de encuentro parcial de base generada.

La propiedad de *simetría* nos sugiere que si dos creencias se quedan o se derogan ambas, entonces producen la misma contracción. La propiedad de *conservación débil* y *conservación* son dos manera para expresar las condiciones que se requieren para ser descartadas tras la contracción por ω [3]. La relación entre estas dos propiedades es similar a la que se encuentra en las propiedades de *relevancia* y *retención de núcleo*.

Gracias a la proposición (16), notemos que un operador de contracción de base generada cumple con los postulados: *clausura, inclusión, éxito, vacuidad y extensionalidad*. Estos cinco postulados son los postulados de la contracción epistémica en el marco AGM que fueron presentados dentro de la definición implícita, las cuales conforman los postulados estándar para la contracción a excepción del postulado de recuperación, i.e., ninguna de las operaciones de base generadora presentadas en este trabajo cumplen con este postulado del marco AGM [8].

Adicionalmente a la proposición (16), las propiedades de: **simetría, conservación débil y conservación** son propiedades invariantes por clausura [8].

2.6.4. Revisión de base de creencias

A diferencia de la expansión epistémica con teorías, la expansión con bases de creencias no necesita que la base expandida sea una teoría. Además, la acción de solo agregar una nueva premisa es de todas las agregaciones la que cumple con el criterio de minimalidad. No obstante, esta nueva definición implica variaciones en la revisión de base de creencias.

Definición 29. *[3]*

La operación de expansión para una base de creencias A es definido por $A + p = A \cup \{p\}$.

Una de las características más interesantes que se obtiene al introducir las bases epistémicas en conjunto con la operación de revisión es la distinción entre distintos estados epistémicos inconsistentes, pues en el marco AGM solo existe un solo estado epistémico inconsistente, es decir, todo el lenguaje $\mathcal{L}$.

En [8], Hasson ilustra esta idea a través de un ejemplo mental sencillo. Imaginemos a dos personas con sus respectivos conjuntos de creencias, los cuales son inconsistentes. Entonces, no tiene mucho sentido asumir que estos conjuntos deberían ser los mismos.

Otra desventaja del marco AGM, es que una vez hayamos conseguido un conjunto de creencias inconsistente a partir de la expansión, todas las distinciones se pierden por completo y son difíciles de recuperar por medio de operaciones definidas sobre conjuntos epistémicos.

Esta nueva definición puede ser usada para contruir nuevas operaciones de revisión inspiradas nuevamente por la identidad de Levi de la siguiente manera.

Definición 30. *[3]*

Sean $A \subseteq \mathcal{L}$, $\varphi \in \mathcal{L}$ y ”$-$” una operación de contracción epistémica sobre A. Definimos

- ***Revisión interna:*** $A *_i \varphi = (A - \neg\varphi) + \varphi$ *(identidad de Levi).*
- ***Revisión externa:*** $A *_e \varphi = (A + \varphi) - \neg\varphi$ *(identidad de Levi revertida).*

Notemos que la identidad de Levi revertida no es una elección para la revisión aplicada a una teoría ya que si K es una teoría y $\neg\varphi \in K$; entonces, $(K + \varphi)$ es todo el lenguaje. Además, tal y como se mencionó con anterioridad, hemos perdido todo rastro de la teoría original.

Teorema 11. *[3]*

Sean $\varphi, \psi \in \mathcal{L}$ y ”$*$” un operador de revisión interno de encuentro parcial para una base epistémica A si y solo si satisface:

- ***Éxito:*** $A * \varphi \models \varphi$.
- ***Inclusión:*** $A * \varphi \subseteq A + \varphi$.
- ***Consistencia:*** *si φ es consistente, entonces $A * \varphi$ es consistente.*
- ***Relevancia:*** *si $\psi \in A$ y $\psi \notin A * \varphi$, entonces existe A' tal que $A * \varphi \subseteq A' \subseteq A$, A' es consistente pero $A' + \{\psi\}$ es inconsistente.*
- ***Uniformidad:*** *para todo $A' \subseteq A$, $A' + \varphi$ es inconsistente si y solo si $A' + \psi$ es inconsistente, entonces $A \cap (A * \varphi) = A \cap (A * \psi)$.*

Por otra parte, "$*$" es un operador de revisión externo de encuentro parcial para una base epistémica A si y solo si satisface: ***éxito, inclusión, consistencia, relevancia*** *y*

- ***Uniformidad débil:*** *si $\varphi, \psi \in A$ y para todo $A' \subseteq A$, $A' + \{\varphi\}$ es inconsistente si y solo si $A + \{\psi\}$ es inconsistente, entonces $A \cap (A * \varphi) = A \cap (A * \psi)$.*

- ***Pre-expansión:*** $(A + \{\varphi\}) * \{\varphi\} = A * \varphi$.

Similar a la contracción de base generadora, existen también propiedades invariantes bajo clausura para la revisión de base generadora con la diferencia de que ahora existe más de una sola operación de expansión para un conjunto de fórmulas dado. Destacamos en particular dos de ellas [8]:

- $A + \alpha = A \cup \alpha$ (expansión inclausurada).

- $A \hat{+} \alpha = Cn(A \cup \{\alpha\})$ (expasión clausurada).

Debido a esto, la definición (28) sufre una modificación.

Definición 31. *[8]*

Un postulado P es invariante bajo clausura si y solo si cierta substitución de la instancia S de P se satisface; entonces, también se satisface la sustitución de la instancia S' que se obtiene de S al reemplazar cada conjunto en S por su clausura y cada operador en S por su clausura.

Un ejemplo de la anterior definición se puede observar en el postulado de inclusión. Supongamos que se cumple: $B \circ \alpha \subseteq B + \alpha$ donde "$\circ$" es una operación epistémica sobre B y consideremos que $K = Cn(B)$ y "$*$" es la clausura de "$\circ$"; entonces, tenemos que $K * \alpha \subseteq K \hat{+} \alpha$.

Proposición 17. *[8]*

A partir de la definición (31), las propiedades de la revisión epistémica de base generadora invariantes bajo clausura son: ***éxito, inclusión, vacuidad, consistencia, extensionalidad, superexpansión conjuntiva y subexpansión conjuntiva.***

Finalmente, existe una especie de invarianza bajo clausura entre las identidades de Levi interna en bases epistémicas y la definida sobre estados epistémicos.

Teorema 12. *[8]*

Sean "-" y "$\circ$" operaciones epistémicas sobre $B \subseteq \mathcal{L}$ tales que para toda $\alpha \in \mathcal{L}$:

$$B \circ \alpha = (B - \neg\alpha) + \alpha.$$

Considerando que $K = Cn(B)$ y "$*$" y "$\dot{-}$" son las clausuras de "$\circ$" y "$-$", respectivamente. Se tiene que

$$K * \alpha = (K \dot{-} \neg\alpha)\hat{+}\alpha.$$

En particular, cuando $\circ$ es $*_i$.

Capítulo 3

Resultados, conclusiones y recomendaciones

3.1. Resultados

3.1.1. Contracción y revisión en el marco AGM

En base a los anteriores capítulos vamos a presentar si existen relaciones de contenencia entre los estados epistémicos de un agente luego de se aplicasen los operadores de contracción: de elección maximal, de encuentro total y de encuentro parcial.

Así pues, sean $\alpha \in \mathcal{L}$ y $K \in \mathcal{K}_{\mathcal{L}}$ arbitrarios. Vamos a analizar los casos extremos cuando $\models \alpha$ o $\alpha \notin K$. En todas las instancias, se tiene de las definiciones de cada operador y (8) que

$$K \sim_{fm} \alpha = K \sim_{pm} \alpha = K \sim_{em} \alpha = K, \tag{3.1}$$

donde se ha tomado $\gamma(K \perp \alpha) = K$.

Ahora, supongamos que $\not\models \alpha$ y $\alpha \in K$. Entonces, por un lado, las propiedades (11), (12) y el teorema de caracterización del operador de encuentro parcial (3), vemos que para cualquier elección de $\gamma(K \perp \alpha)$: $K \sim_{fm} \alpha \subseteq K \sim_{pm} \alpha$. Por otro lado, por la propiedad de completitud (21), "$\sim_{em}$" cumple con el postulado de recuperación y de nuevo por (12), se sigue que $K \sim_{fm} \alpha \subseteq K \sim_{em} \alpha$.

Notemos que si tomamos $\gamma_{em}(K \perp \alpha) \in \gamma_{pm}(K \perp \alpha)$ como elección para definir el operador "$\sim_{em}$". Obtenemos que

$$K \sim_{fm} \alpha \subseteq K \sim_{pm} \alpha \subseteq K \sim_{em} \alpha. \tag{3.2}$$

En el caso de que $K \perp \alpha$ posea un solo elemento, entonces en (3.2) se alcanza en cada instancia la igualdad. A continuación, usando la identidad de Levi (2.2) y (3.2) tenemos que para $\nvDash \neg\alpha$ y $\neg\alpha \in K$ que

$$K *_{fm} \alpha \subseteq K *_{pm} \alpha \subseteq K *_{em} \alpha. \tag{3.3}$$

Teniendo en cuenta el teorema (6), de (3.3) obtenemos

$$Cn(\alpha) = K *_{fm} \alpha \subseteq K *_{pm} \alpha \subseteq K *_{em} \alpha \tag{3.4}$$

donde $K *_{em} \alpha \in \mathcal{L}\perp_{\perp}$.

3.1.2. Contracción y revisión sobre bases epistémicas

Recordemos el ejemplo que muestra que existen operadores de contracción de kernel básico que no son de contracción de encuentro parcial básico. En este ejemplo, únicamente se exige que el conjunto $A = \{p, q, r\}$ sea lógicamente independiente.

Deseamos contraer A por $\alpha = p \wedge (q \vee r)$, para ello surgen dos preguntas importantes: ¿es α una tautología? y ¿son p, q o r tautologías?. Si las respuestas fuesen afirmativas, entonces se debería concluir por la propiedad del fracaso que existe una función incisión σ tal que $A \approx_{\sigma} \alpha = \{\varnothing\}$, lo cual difiere del conjunto obtenido: $A \perp\!\!\!\perp \alpha = \{\{p, q\}, \{p, r\}\}$. Además, como p, q y r son tautologías entonces ninguna de ellas es lógicamente independiente, i.e., obtenemos una contradicción.

De hecho, el asumir desde el principio que el conjunto A es lógicamente independiente, nos permite concluir que ninguna de sus premisas son tautologías, así como tampoco sus respectivas negaciones. Incluso cada una de estas premisas y sus negaciones son consistentes. Enunciemos el siguiente lema que compende este hecho.

Lema 1. *Sea $A \subseteq \mathcal{L}$ finito y lógicamente independiente con más de un elemento*[1]*. Entonces se satisface:*

- *Para toda $\varphi \in A$, φ y $\neg\varphi$ no son tautologías.*
- *Para toda $\varphi \in A$, φ y $\neg\varphi$ son consistentes.*

Este lema es muy importante, pero no suficiente. En el momento de determinar qué conjuntos conforman $A \approx_\sigma \alpha$ o $A \sim_\gamma \alpha$ –que pueden llegar a ser conjuntos vacíos–. En base a sus definiciones, surge otra pregunta: ¿ A modela α o no ? Esta pregunta es valiosa pues tal y como pasa con las contracciones sobre estados epistémicos, existen propiedades como en (8) sobre bases epistémicas o, en general, sobre subconjuntos de $\mathcal{L}$.

Lema 2. *Sean $A \subseteq \mathcal{L}$ y $\alpha \in \mathcal{L}$. Entonces se tiene que:*

1. $A\perp\alpha = \{A\}$ *si y solo si* $A \not\models \alpha$.
2. $A\perp\alpha = \varnothing$ *si y solo si* $\models \alpha$.
3. $A \perp\!\!\!\perp \alpha = \{\varnothing\}$ *si y solo si* $\models \alpha$.
4. $A \perp\!\!\!\perp \alpha = \varnothing$ *si y solo si* $A \not\models \alpha$.

Para este estudio existe una expresión que relaciona el operador de contracción de encuentro total básico con el de kernel básico. Con ella solo basta determinar los conjuntos residuales de A dado α o los α-kernels.

Proposición 18. *[7]*

Sea $A \subseteq \mathcal{L}$ y $\alpha \in \mathcal{L}$. Tomando $\gamma(A\perp\alpha) = A\perp\alpha$ y $\sigma(A \perp\!\!\!\perp \alpha) = \bigcup(A \perp\!\!\!\perp \alpha)$, entonces

$$A \sim_{fm} \alpha = \bigcap(A\perp\alpha) = A \backslash \bigcup(A \perp\!\!\!\perp \alpha) = A \approx_\sigma \alpha \tag{3.5}$$

Consideremos una base epistémica finita $A \subseteq \mathcal{L}$ lógicamente independiente. Denotemos este conjunto como $A = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$. En el siguiente cuadro se resumirá cómo se contrae esta base epistémica A bajo diferentes premisas α notables.

[1] El el caso de que A contenga un solo elemento entonces es necesario agregar que dicho elemento es consistente y, gracias a (4), se sigue los resultados

α	$\mathbf{A} \perp\!\!\!\perp \alpha$	$\mathbf{A} \perp \alpha$	$\mathbf{A} \approx_\sigma \alpha$	$\mathbf{A} \sim_\gamma \alpha$
φ_i	$\{\{\varphi_i\}\}$	$\{A\backslash\{\varphi_i\}\}$	$A\backslash\{\varphi_i\}$	$A\backslash\{\varphi_i\}$
$\neg\varphi_i$	$\varnothing$	$\{A\}$	$\mathbf{A}$	$\mathbf{A}$
$\varphi_i \vee \varphi_j$	$\{\{\varphi_i\}, \{\varphi_j\}\}$	$\{A\backslash\{\varphi_i, \varphi_j\}\}$	$A\backslash\{\varphi_i, \varphi_j\}$	$A\backslash\{\varphi_i, \varphi_j\}$
$\varphi_i \wedge \varphi_j$	$\{\{\varphi_i, \varphi_j\}\}$	$\{A\backslash\{\varphi_i\}, A\backslash\{\varphi_j\}\}$	$A\backslash\{\varphi_i, \varphi_j\}$	$A\backslash\{\varphi_i\}$, $A\backslash\{\varphi_j\}$, $A\backslash\{\varphi_i, \varphi_j\}$
$\varphi_i \to \varphi_j$	$\{\{\varphi_j\}\}$	$\{A\backslash\{\varphi_j\}\}$	$A\backslash\{\varphi_j\}$	$A\backslash\{\varphi_j\}$
$\bigvee_{i=1}^{n} \varphi_i$	$\{\{\varphi_1\}, \ldots, \{\varphi_n\}\}$	$\{\varnothing\}$	$\varnothing$	$\varnothing$
$\bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i$	$\{\ \mathbf{A}\ \}$	$\{A\backslash\{\varphi_1\}, \ldots, A\backslash\{\varphi_n\}\}$	$\varnothing$	$A\backslash\{\varphi_1\}, \ldots, A\backslash\{\varphi_n\}$, $\{\{A\backslash B_k^l\}_{l=1}^{n\mathbf{C}k}\}_{k=1}^{n-1}$, $\varnothing$

Cuadro 3.1: comparación de la acción de operadores de contracción de kernel y de encuentro parcial básicos sobre una base epistémica A finita dada una premisa α, la cual satisface que $\nvDash \alpha$.

En la última celda del cuadro (3.1) tenemos la colección de conjuntos $\{\{A\backslash B_k^l\}_{l=1}^{n\mathbf{C}k}\}_{k=1}^{n-1}$, donde B_k^l es uno de los posibles subconjuntos de k elementos tomados de A para determinar $\gamma(A\perp\alpha)$ y $n\mathbf{C}k$ es el número total de combinaciones de k elementos tomandos de n elementos. Debido a la definición (23), $\gamma(A\perp\alpha) \neq \varnothing$; así, existen $\{A\backslash\{\varphi_i\}\}_{i=1}^{n}$ posibles subconjuntos de $A\perp\alpha$ que definen contracciones epistémicas de elección maximal básico, pues $\gamma(A\perp\alpha)$ solo posee un elemento. Luego, en el caso que $\gamma(A\perp\alpha) = A\perp\alpha$, entonces la contracción epistémica "$\sim_\gamma$" es de encuentro total básico y, por ende, $A \sim_\gamma = \varnothing$. Finalmente, como $\sum_{k=0}^{n} n\mathbf{C}k = 2^n$ y con estas dos anteriores observaciones tenemos que $\left|\{\{A\backslash B_k^l\}_{l=1}^{n\mathbf{C}k}\}_{k=1}^{n-1}\right| = 2^n - (n+2)$, i.e., existen $2^n - (n+2)$ diferentes operadores de contracción epistémica de encuentro parcial básico para A dado que $\alpha = \bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i$.

Pasamos a la revisión epistémica básica, para ello usaremos los ejemplos expuestos en la tabla (3.1). Tenemos que para $\alpha = \neg\varphi_i$: $A \sim_\gamma \alpha = A \approx_\sigma \alpha = A\backslash\{\varphi_i\}$ y en consecuencia

$$A *_i \alpha = (A \sim_\gamma \neg\alpha) + \alpha = A\backslash\{\varphi_i\} + \neg\varphi_i = (A + \alpha) \sim_\gamma \neg\alpha = A *_e \alpha$$

El resto de opciones para α en (3.1) resultan por (2) en $A \sim_\gamma \alpha = A \approx_\sigma \alpha = A$ pues $A \nvDash \alpha$. Con estos últimos ejemplos, i.e., $\alpha \neq \neg\varphi_i$, vamos a aplicar la revisión interna y externa, los cuales quedan

$$A *_i \alpha = (A \sim_\gamma \neg\alpha) + \alpha = A + \alpha$$
$$A *_e \alpha = (A + \alpha) \sim_\gamma \neg\alpha = A + \alpha,$$

en particular para $\alpha = \varphi_i$, $A *_i \alpha = A *_e \alpha = A$.

3.2. Conclusiones y recomendaciones

3.2.1. Conclusiones

1. Al analizar los resultados obtenidos en (3.1) y (3.2) podemos concluir que al trabajar con un estado epistémico $K \in \mathcal{K}_\mathcal{L}$ arbitrario, la contracción epistémica en el marco AGM depende del tipo de información α. Si α es una tautología o $\alpha \in K$, el estado epistémico resultante bajo la contracción ya sea: de encuentro total, parcial o de elección maximal, es el mismo estado epistémico K. Por el contrario y en adición de la hipótesis: $\gamma_{pm}(K \perp \alpha) \in \gamma_{em}(K \perp \alpha)$, se puede observar que la contracción epistémica de encuentro parcial está acotada inferiormente por la contracción de encuentro total y superiormente por la contracción de elección maximal (respecto a la contenencia de conjuntos).

2. Continuando con la revisión epistémica, vemos que al considerar $\not\models \neg\alpha$ y $\neg\alpha \notin K$ y $\gamma_{pm}(K \perp \neg\alpha) \in \gamma_{em}(K \perp \neg\alpha)$, tenemos (3.4), i.e., un escenario de la revisión epistémica es análogo a la contracción. Esto se debe a la identidad de Levi, más precisamente, a la propiedad de monotonía de la expansión. Además, gracias a esta cadena de desigualdades también nos permite descartar teorías que no provengan de la acción de este tipo de operadores de contracción.

3. En base al cuadrado (3.1) podemos apreciar que $A \approx_\sigma \alpha = A \sim_\gamma \alpha$ salvo cuando α es una conjunción de elementos de A. Lo cual resulta interesante, ya que esta diferencia yace en la elección para $\gamma(A \perp \alpha)$ que, a diferencia de su contraparte $\sigma(A \perp\!\!\!\perp \alpha)$, posee menos restricciones en su definición. Además, la elección de $\gamma(A \perp \alpha)$ dependerá

de la postura o comportamiento del agente frente a una conjunción de una o varias fórmulas de A.

Para ilustrar esta afirmación, supongamos que un conductor tiene problemas con el sistema de refrigeración de su auto. Consigue llevárselo hasta un taller disponible y el técnico, luego de la revisión, le informa que el radiador posee grietas y los carbones del electroventilador están desgastados. Le aconseja que debe cambiarlos por unos nuevos.

Por suerte, el taller posee respuestos de su modelo y el conductor decide comprar las refacciones. Mientras el auto está en reparación su dueño se ausenta. Al regresar tras un par de horas, el técnico le afirma que ambas averías han sido reparadas. Es momento de pagar, no sin antes comprobar los cambios realizados. Para ello, denotemos por A al conjunto de las averías que posee el auto, donde p y q pertenecen a A y representan: radiador con grietas y electroventilador con carbones desgastados, respectivamente. Entonces tenemos los siguientes casos:

a) En el primer caso, tenemos que el conductor comprueba que el radiador haya sido cambiado; pero, no escucha que el electroventilador encienda, esto es, tomando $\gamma(A\perp\alpha) = \{A\backslash\{p\}\}$, entonces A se actualiza por $A\backslash\{p\}$.

b) En el segundo caso, el técnico le entrega los carbones desgastados que extrajo. Enciende el auto y espera hasta que el electroventilador funcione. Al escucharlo, da crédito del trabajo realizado, esto es, tomando $\gamma(A\perp\alpha) = \{A\backslash\{q\}\}$, entonces A se actualiza por $A\backslash\{q\}$.

c) Por último, el conductor recibe las piezas antiguas y además verifica que el radiador es nuevo y el electroventilador se active. Con satisfacción aprueba el trabajo del técnico, esto es, tomando $\gamma(A\perp\alpha) = \{A\backslash\{p\}, A\backslash\{q\}\}$, entonces A se actualiza por $A\backslash\{p, q\}$.

En todos los casos, siendo un conductor experimentado, este debe verificar que las reparaciones se hayan llevado a cabo. La función γ recoge las comprobaciones del conductor dado que $\alpha = p \wedge q$ ha sido resulta.

4. En la revisión de base generadora, solo podemos destacar el caso cuando $\alpha = \neg\varphi_i$, pues el agente intercambia la fórmula φ_i por $\neg\varphi_i$, ya sea por por medio de la identidad de Levi interna o externa.

3.2.2. Recomendaciones

1. En futuros trabajos se puede explorar más a profundidad en las ideas de los operadores epistémicos de base generadora y buscar condiciones suficientes y necesarias para asegurar la finitud de los estados epistémicos de un agente, de modo que, el modelamiento de la dinámica de dichos estados sea más realista.

2. El cuadro (3.1) sugiere que es posible buscar una relación entre de los estados epistémicos contraídos por fórmulas notables y aquellos estados productos de la contracción por fórmulas más complejas en las que ocurren estas fórmulas notables.

3. El postulado de recuperación como vimos no se cumple para las operaciones de base generadora; sin embargo su concepción resulta ser intuitiva y pareciera que debería cumplirse. Un futuro trabajo podría explorar más a fondo este postulado y sus implicaciones respecto a las operaciones epistémicas estudiadas.

4. Finalmente, las funciones de incisión como de selección cumplen un rol fundamental en estos modelos, pues nos indican cómo el agente desecha información frente a nueva información ya sea como parte de una decisión o meramente por instinto. Estudiar estas funciones nos ayudaría a representar las actitudes del agente con respecto a eliminar o incorporar nueva información y, de ese modo, determinar cuáles podrían ser los conjuntos maximales y minimales que modelan o no, respectivamente, ciertas fórmulas dentro del lenguaje interno del agente.

Capítulo A

Demostraciones de la sección de resultados

En estos anexos colocaremos las demostraciones de los lemas y proposiciones presentes en la sección de resultados.

Demostración. [Lema (1)]

Vamos a proceder por inducción sobre los elementos de A. Cuando $A = \{\varphi_1, \varphi_2\}$, entonces tenemos que $\varphi_1 \not\models \varphi_2$ y $\varphi_2 \not\models \varphi_1$. Por las definiciones de consecuencia lógica (7) y consistencia (10) deducimos que $\varphi_1, \neg\varphi_1, \varphi_2$ y $\neg\varphi_2$ son consistentes y no son tautologías.

Ahora, supongamos que para todo $A \subseteq \mathcal{L}$ con $k \geqslant 2$ elementos cumple con los enunciados del lema (1). Vamos a probar que también se satisfacen para un conjunto A con $k+1$ elementos.

Sea $A \subseteq \mathcal{L}$ con $k+1$ elementos, esto es

$$A := \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k, \varphi_{k+1}\} = A' \cup \{\varphi_{k+1}\},$$

. donde A' posee k elementos. Veamos por qué A' es lógicamenre independiente. De hecho, cualquier subconjunto de un conjunto de fórmulas lógicamente independiente es también lógicamente independiente. Probemos este resultado por contradicción.

Sea $H \subseteq \mathcal{L}$ lógicamente independiente y supongamos que existe un $K \subset H$ que no es lógicamente independiente, i.e., existe $\varphi \in K$ y $K \backslash \{\varphi\} \models \varphi$. Vemos que $\varphi \subset H$ y $H \backslash \{\varphi\} \subset K \backslash \{\varphi\}$, entonces $K \backslash \{\varphi\} \models \varphi$. Pero, puesto que

H es lógicamente independiente, $K \backslash \{\varphi\} \not\models \varphi$, una contradicción.

Así, A' es lógicamente independiente y gracias a nuestra hipótesis inductiva obtenemos que

- Para toda $\psi \in A'$, ψ y $\neg\psi$ no son tautologías.
- Para toda $\psi \in A'$, ψ y $\neg\psi$ son consistentes.

Falta por demostrar que φ_{k+1} como su negación no son tautologías y son consistentes. Puesto que A es lógicamente independiente, en particular, para φ_{k+1} y cosiderando que $A' = A \backslash \{\varphi_{k+1}\}$ tenemos que $A' \not\models \varphi_{k+1}$, lo cual implica que existe una interpretación booleana s tal que $s^*(\varphi_{k+1}) = 0$. Por tanto, φ_{k+1} no es una tautología que, por (4), lo es si y solo si $\neg\varphi_{k+1}$ es satisfactible o consistente.

Finalmente, tomando $\{\varphi_1, \varphi_{k+1}\} \subset A$, sabemos por el resultado que probamos que $\varphi_{k+1} \not\models \varphi_1$, lo que implica que $Mod(\varphi_{k+1}) \neq \varnothing$. Esto muestra que φ_{k+1} es consistente si y solo si $\neg\varphi_{k+1}$ no es una tautología. □

Demostración. Lema (2)

Sean $A \subseteq \mathcal{L}$ no vacío[1] y $\alpha \in \mathcal{L}$, cualesquiera.

1. Supongamos que $A \perp \alpha = \{A\}$; entonces, comprobamos directamente que $A \not\models \alpha$. Recíprocamente, supongamos que $A \not\models \alpha$. Puesto que A es subconjunto más grande de sí mismo que no modela α, entonces $A \in A \perp \alpha$. Supongamos por contradicción que existe $B \subset A$ maximal que no modela α distinto de A. Pero, por la maximalidad de B, $A \models \alpha$, lo cual es una contradicción.

2. Supongamos que $\models \alpha$. Razonemos por el absurdo suponiendo que $A \perp \alpha \neq \varnothing$. Así, existe $B \subseteq A$ maximal que no modela α, esto es, $B \not\models \alpha$, lo que implica que existe una interpretación $s \in \Sigma$ tal que $s^*(\alpha) = 0$. Pero, α es una tautología, por tanto $s^*(\alpha) = 1$, una contradicción.

   Recíprocamente, volvemos a razonar por contradicción. Supongamos que $A \perp \alpha = \varnothing$ y $\not\models \alpha$. Por la propiedad de acotación superior aplicada a $\varnothing$ [7][2], existe $B' \in A \perp \alpha$ tal que $\varnothing \subseteq B'$, i.e., $A \perp \alpha \neq \varnothing$, un absurdo.

[1] Cuando A es vacío el resultado también se satisface.
[2] Propiedad del mismo nombre que se encuentra para teorías en (8)

3. Supongamos que $A \perp\!\!\!\perp \alpha = \{\varnothing\}$. Entonces, $\models \alpha$. Supongamos que $\models \alpha$, razonemos por el absurdo, esto es, existe $B \in A \perp\!\!\!\perp \alpha$ minimal distinto del vacío que modela α. Pero, siempre se tiene que $\varnothing \subset B$, lo cual contradice la minimalidad de B.

4. Supongamos que $A \not\models \alpha$. Razonando al absurdo, también asumamos que $A \perp\!\!\!\perp \alpha \neq \varnothing$, i.e., existe un $B \subseteq A$ minimal que modela α. Pero, esto implica que, $A \models \alpha$.

   Finalmente, supongamos que $A \perp\!\!\!\perp \alpha = \varnothing$. Vamos a demostrar que $A \not\models \alpha$. Razonando al absurdo, supongamos que $A \models \alpha$. Por definición, nuestra hipótesis $A \perp\!\!\!\perp \alpha = \varnothing$ equivale a afirmar que para todo $B \subseteq A$ se cumple que: $B \not\models \alpha$ o existe $B' \subset B$ y $B' \models \alpha$.

   Por un lado, si asumimos que para todo $B \subseteq A$, $B \not\models \alpha$. Concluimos en particular que $A \not\models \alpha$, lo cual es un absurdo. Ahora, si asumimos que para cada $B \subseteq A$ existe $B' \subset B$ y $B' \models \alpha$, en particular, puesto que $\varnothing \subseteq A$, entonces existe $B' \subset \varnothing$ tal que $B' \models \alpha$. Pero, solo nos queda $B' = \varnothing$ y, en consecuencia, $\varnothing \in A \perp\!\!\!\perp \alpha$, una contradicción.

$\square$

Demostración. Proposición (18)

Hansson en [7] deja al lector como ejercicio la demostración de esta igualdad. Realizaremos los detalles de dicha demostración.

Sean $A \subseteq \mathcal{L}$ no vacío[3] y $\alpha \in \mathcal{L}$, cualesquiera. Usando el lema (2) y la definición (23) podemos tratar con los casos extremos o triviales: $\vDash \alpha$ o $A \nvDash \alpha$. De este modo, tenemos que

$$A \sim_{fm} \alpha = \bigcap (A \bot \alpha) = A = A \backslash \bigcup (A \perp\!\!\!\perp \alpha) = A \approx_{\sigma} \alpha.$$

Supongamos ahora $\nvDash \alpha$ y $A \vDash \alpha$. Notemos que $\varnothing \notin A \bot \alpha$; ya que de lo contrario, tenemos que para todo $B \subseteq A$ distinto del vacío, $B \vDash \alpha$. Así, concluimos que $A \perp\!\!\!\perp \alpha = \varnothing$; pero, del lema (2), sabemos $A \perp\!\!\!\perp \alpha \neq \varnothing$, una contradicción.

Para el primer caso, supongamos que $\bigcap (A \bot \alpha) = \varnothing$. Entonces, probemos que $A \subseteq \bigcup (A \perp\!\!\!\perp \alpha)$. Sea $\beta \in A$, arbitrario. Probemos que $\beta \in \bigcup (A \perp\!\!\!\perp \alpha)$. Por lo discutido en el anterior párrafo, existen $H, H' \in A \bot \alpha$ disjuntos, no vacíos y distintos de A. Luego, notemos que $H \cup H' \vDash \alpha$, puesto que $H \in A \bot \alpha$. Además, $H \cup H'$ es un subconjunto minimal que modela α, pues de lo contrario, existe $H_1 \subset H \cup H'$ tal que $H_1 \vDash \alpha$. Pero, como H y H' son disjuntos, tenemos que o bien $H_1 \subset H$ o bien $H_1 \subset H'$; sin embargo, esto implica que, por un lado $H \vDash \alpha$ y, por otro lado, $H' \vDash \alpha$, las cuales son ambas contradicciones. Además, vemos que $A \perp\!\!\!\perp \alpha = \{H \cup H'\}$. Debido a que $\bigcap (A \bot \alpha) = \varnothing$, forza a $\beta \in H$ o bien $\beta \in H'$. Puesto que β es arbitrario, se sigue que $A = H \cup H'$.

Continuamos con el segundo caso cuando $\bigcap (A \bot \alpha) \neq \varnothing$. Notemos que, por complementos de conjuntos, probar $\bigcap (A \bot \alpha) \subseteq A \backslash \bigcup (A \perp\!\!\!\perp \alpha)$ es equivalente a demostrar que para todo $B \in A \perp\!\!\!\perp \alpha$, $A \backslash \bigcap (A \bot \alpha) \supseteq B$. Vamos a probar que es imposible que exista $B \in A \perp\!\!\!\perp \alpha$, $A \backslash \bigcap (A \bot \alpha) \subset B$. Suponiendo lo contrario, tenemos que $A \backslash \bigcap (A \bot \alpha) \nvDash \alpha$ por la minimalidad de B. Luego, por la propiedad de acotación superior, existe $H' \in A \bot \alpha$ distinto de A tal que $A \backslash \bigcap (A \bot \alpha) \subseteq H'$. Así, vemos que $\bigcap (A \bot \alpha) \supseteq A \backslash H'$. Pero, puesto que $A \backslash H' \neq \varnothing$, por tanto, existe $\varphi \in A \backslash H'$ y, de esta contenencia en particular, $\varphi \in H'$; lo cual es un absurdo.

Finalmente, probemos la otra contenencia $\bigcap (A \bot \alpha) \supseteq A \backslash \bigcup (A \perp\!\!\!\perp \alpha)$.

[3] En el caso de que A sea vacío, la igualdad se alcanza por el lema (2).

Para ello, vamos a probar la contenencia por complementos equivalente: $\bigcup(A \perp\!\!\!\perp \alpha) \supseteq A\backslash\bigcap(A\perp \alpha)$. Supongamos que $\beta \in A\backslash\bigcap(A\perp\alpha)$. Vamos a probar que $A\backslash\bigcap(A \perp\!\!\!\perp \alpha) \in A \perp\!\!\!\perp \alpha$.

Razonando al absurdo, supongamos que $A\backslash\bigcap(A\perp\alpha) \not\models \alpha$. Por la propiedad de acotación superior, existe $H \in A\perp \alpha$ tal que $A\backslash\bigcap(A\perp\alpha) \subseteq H$. Como $\beta \in A\backslash\bigcap(A\perp\alpha)$, existe $H' \in A\perp \alpha$ tal que a $\beta \in A\backslash H'$. Las posibilidades $H \subset H'$ o $H' \subset H$, llevan a contradicciones. Nos queda únicamente la opción de que $H = H'$; sin embargo, esto implica que, $A\backslash H \cap H \neq \emptyset$, un absurdo. Por lo tanto, $A\backslash\bigcap(A\perp\alpha) \models \alpha$.

Ahora, probemos que $A\backslash\bigcap(A\perp\alpha)$ no posee subconjuntos propios que modelan α. Por lo contario, supongamos que existe $K \subset A\backslash\bigcap(A\perp\alpha)$ tal que $K \models \alpha$. Notemos que $H \subset K$ para todo $H \in A\perp \alpha$. Por lo tanto, $\bigcap(A\perp\alpha) \subset K \subset \left(\bigcap(A\perp\alpha)\right)^C$, esto es, $\bigcap(A\perp \alpha) = \emptyset$, una contradicción. Por ende, $A\backslash\bigcap(A\perp \alpha)$ no posee subconjuntos propios que modelan α, i.e., $A\backslash\bigcap(A \perp\!\!\!\perp \alpha) \in A\perp\alpha$. Como β es arbitrario, se tiene que

$$\bigcup(A \perp\!\!\!\perp \alpha) \supseteq A\backslash\bigcap(A\perp \alpha).$$

$\square$

Referencias bibliográficas

[1] R.A. Dos Santos Fajardo. *Lógica Matemática*. EDUSP, 2017.

[2] Fermé Eduardo. Revising the AGM Postulates. http://www.cee.uma.pt/ferme/Papers/thesisFerme-CS.pdf, 1999.

[3] Fermé Eduardo and Oven Hansson Sven. *Belief Change. Introduction and Overview*. Springer International Publishing AG, 2018.

[4] Herbert Enderton and Herbert B. Enderton. A mathematical introduction to logic, Jan 2001.

[5] Eduardo Fermé, Marco Garapa, and Maurício D. L. Reis. On ensconcement and contraction. *Journal of Logic and Computation*, 27(7):2011–2042, 03 2017.

[6] Peter Gärdenfors. *Knowledge in flux: Modeling the dynamics of epistemic states*. The MIT Press, 1988.

[7] Sven Ove Hansson. Kernel contraction. *Journal of Symbolic Logic*, 59(3):845–859, 1994.

[8] Sven Ove Hansson. *Closure-Invariant Rationality Postulates*. Springer Netherlands, Dordrecht, 1997.

[9] Elliott Mendelson. *Introduction to Mathematical Logic*. Princeton: Van Nostrand, 1964.

[10] Y.D. Santos, M.M. Ribeiro, and Renata Wassermann. Between belief bases and belief sets: Partial meet contraction. *CEUR Workshop Proceedings*, 1423, 01 2015.

[11] Frank van Harmelen, Vladimir Lifschitz, and Bruce Porter, editors. *Handbook of Knowledge Representation*, volume 3 of *Foundations of Artificial Intelligence*. Elsevier, Amsterdam, 2008.