ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS

TEORÍA DE DECISIÓN EN LA ASIGNACIÓN DE RECURSOS PARA LOGRAR EL BIENESTAR SOCIAL.

ENFOQUE MATRICIAL EN LA ASIGNACIÓN DE RECURSOS CON EFICIENCIA Y JUSTICIA DÉBIL EN EL BIENESTAR UTILITARIO

TRABAJO DE INTEGRACIÓN CURRICULAR PRESENTADO COMO REQUISITO PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE INGENIERA MATEMÁTICA

ERIKA ELIZABETH RAMÍREZ FREIRE

erika.ramirez@epn.edu.ec

DIRECTOR: IGSIL AUGUSTO DÁVILA MONTENEGRO

igsil.davila@epn.edu.ec

QUITO, FEBRERO 2023

CERTIFICACIONES

Yo, ERIKA ELIZABETH RAMÍREZ FREIRE, declaro que el trabajo de integración curricular aquí descrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y, que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

Erika Elizabeth Ramírez Freire

Certifico que el presente trabajo de integración curricular fue desarrollado por Erika Elizabeth Ramírez Freire, bajo mi supervisión.

Igsil Augusto Dávila Montenegro
DIRECTOR

DECLARACIÓN DE AUTORÍA

A través de la presente declaración, afirmamos que el trabajo de integración curricular aquí descrito, así como el(los) producto(s) resultante(s) del mismo, es(son) público(s) y estará(n) a disposición de la comunidad a través del repositorio institucional de la Escuela Politécnica Nacional; sin embargo, la titularidad de los derechos patrimoniales nos corresponde a los autores que hemos contribuido en el desarrollo del presente trabajo; observando para el efecto las disposiciones establecidas por el órgano competente en propiedad intelectual, la normativa interna y demás normas.

Erika Elizabeth Ramírez Freire

Igsil Augusto Dávila Montenegro

RESUMEN

La teoría de asignación de recursos es un tema de relevancia que se puede aplicar a una gran diversidad de problemas, tanto teóricos como prácticos, cuya complejidad va a depender especialmente de la naturaleza del problema. Entre sus aplicaciones encontramos subastas, asignar tareas en una empresa, acuerdos de divorcio, repartir insumos en las áreas de un hospital o de actividades en situaciones cotidianas como podemos mencionar, la distribución de un pastel para un grupo de personas en una fiesta, la repartición de alimentos en escuelas públicas y privadas o la consignación de vacantes para las inscripciones de estudiantes en un curso en la universidad. La técnica que se propone en el presente trabajo es mediante funciones de utilidad aditivas, hallar asignaciones Óptimas Pareto que maximicen el Bienestar Social (Eficiencia) y sean Libres de Envidia (Justicia), considerando la satisfacción o necesidad de los agentes tanto individual como grupal. Se desarrollará, mediante un enfoque matricial, la definición de asignaciones y funciones de utilidad que establecen las preferencias individuales y mediante una base teórica se demostrará la equivalencia de las asignaciones transitorias con las que maximizan la función de Bienestar Social. Finalmente, considerando la función de bienestar social de Nach, se probará que una asignación es buena si las asignaciones transitorias maximizan globalmente el Bienestar Social Utilitario y además bajo una relajación en la justicia, son libres de envidia de hasta un recurso (justicia débil).

Palabras clave: Asignación, Recursos óptima Pareto, Asignaciones Transitorias, Justicia débil, Función de bienestar Social.

ABSTRACT

Resource allocation theory is a relevant topic which can be applied to a great diversity of problems, both theoretical and practical, whose complexity will depend especially on the nature of the problem. Among its applications we find auctions, assigning tasks in a company, divorce settlements, distributing supplies in the areas of a hospital or activities in everyday situations such as the assignment of a cake for a group of people at a party, the distribution of food in public and private schools or the allocation of vacancies for the enrollment of students in a course at the university. The proposed technique in this paper is to find Pareto Optimal allocations that maximize Social Welfare (Efficiency) and are Envy Free (Justice), considering the satisfaction or need of both individual and group agents. It will be developed, through a matrix approach, the definition of allocations and utility functions that establish individual preferences and through a theoretical basis it will be demonstrated the equivalence of transitory allocations with those that maximize the Social Welfare function. Finally, considering Nach's social welfare function, it will be proved that an allocation is good if the transitory allocations maximize globally the Utilitarian Social Welfare and furthermore under a relaxation in justice, are envy-free of even one resource (weak justice).

Keywords:Allocation, Pareto Optimal Resources, Transitional Allocations, Weak Justice, Social Welfare Function.

Índice general

Capítulo 1

Descripción del componente desarrollado

En el presente trabajo vamos a desarrollar la teoría de asignación de recursos. En la primera parte definiremos los conjuntos que se utilizarán en las asignaciones, recursos y agentes [8],[3], y además se planteará como podemos repartir bienes a los individuos o agentes involucrados tomando en cuenta las preferencias o gustos. Considerando los tipos de recursos mediante el enfoque cuantitativo, se describe las funciones de utilidad ([15], [7]) que nos ayudan a analizar cuando una asignación es mejor que otra, también llamadas preferencias individuales. Para describir la satisfacción grupal se establecen criterios definidos mediante la eficiencia de Pareto que identificará la mejor asignación que satisface a todo los individuos, pero además se busca la satisfacción individual y para ello se define la justicia, la cual proporciona un criterio llamado asignación libre de envidia (EF) [6], [9],[13].

A continuación, al considerar objetos indivisibles, no se cumple necesariamente el criterio de satisfacción, por lo tanto, se establece la propiedad libre de envidia de hasta un recurso (EF1), que nos permitirá relajar el criterio de asignación. Finalmente, determinando que asignaciones son las mejores se busca bajo el criterio de las funciones de bienestar social, escoger la mejor asignación posible que considere tanto justicia y eficiencia [5], [14].

1.1. Objetivo general

Desarrollar a detalle los resultados de asignaciones eficientes y justas de recursos no divisibles considerando la teórica basada en el bienestar social utilitario.

1.2. Objetivos específicos

1. Proporcionar una base teórica detallada para el planteamiento del problema y explicación de las definiciones.
2. Representar el problema de recursos no divisibles considerando un enfoque matricial de las asignaciones, las valuaciones y las utilidades empleadas en cada asignación.
3. Reproducir de forma detallada los resultados de [2]

1.3. Alcance

Entender y desarrollar en forma detalla las demostraciones de la teoría de asignación de recursos utilizando un enfoque matricial. Usaremos como referencia principal [4] y [6].

1.4. Marco teórico

El problema de asignación de recursos pretende conseguir la satisfacción individual la cual es medida por la justicia, donde se considera las preferencias de cada agente, las que se medirán según el grado en que un agente disfruta de cada recurso y establece cuando una asignación es mejor que otra.

Para una satisfacción grupal, definida por la eficiencia u óptima de Pareto, se busca establecer cuando una asignación beneficia al grupo de agentes, garantizando que no existe otra asignación que mejore específicamente a un agente sin perjudicar a otro. Además, restringimos nuestro estudio a dos definiciones particulares de eficiencia y libre de envidia: eficiencia de Pareto que describen la pérdida del equilibrio al aumentar recursos a un agente y disminuir a otro, y una asignación es libre de envidia si y solo si a cada agente le gusta su parte asignada tanto como la parte de cualquier otro agente. Puesto, que la segunda propiedad no se cumple para todos los agentes, se procede a relajar las restricciones aún más, y se probará que es libre de envidia hasta en un bien.

Finalmente, se clasifica las asignaciones realizadas con la función de bienestar social de Nach [5], que determina las mejores asignaciones que cumplan con la mayor satisfacción grupal.

En esta sección del proyecto se describen las ideas básicas de como se construye el problema de asignación de recursos partiendo de tres conceptos fundamentales que son: un conjunto finito de agentes, un conjunto finito de recursos y asignaciones según las preferencias de los individuos a estudiar según la naturaleza del problema [4].

Definiciones fundamentales

Definición 1.4.1. ***(Agentes)*** *Llamaremos agentes al conjunto finito de individuos, máquinas, establecimientos o organismos involucrado en el problema a tratar. Lo denotaremos por*

$$N = \{1, 2, ..., i, ..., n\}$$

donde cada elemento se lo leerá como agente i con $i \in N$. Además, tendremos que n representa la cardinalidad del conjunto N, es decir, $n = |N|$.

Ejemplo 1.4.1. *Consideremos $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, dónde $|N| = 5$ son los elementos de N que representan estudiantes de la facultad de ciencias, por ejemplo, Tomás, Victor, Erika, Liseth y Edith. Entonces,*

- *1 representa a Tomás*
- *2 representa a Victor*
- *3 representa a Erika*
- *4 representa a Liseth*

- *5 representa a Edith*

Ejemplo 1.4.2. *Consideremos* $N = \{1, 2, 3, ..., 11\}$*, dónde para cada* $i \in N$*, con* $n = |N| = 11$ *representa los jugadores de la selección de fútbol de Ecuador y a cada jugador le asignaremos un número único como en el ejemplo anterior.*

Definición 1.4.2. ***(Recursos).*** *Llamaremos recursos al conjunto finito de bienes, tareas o productos a repartir a los agentes. Lo denotaremos como*

$$M = \{1, 2, ..., j, ..., m\}$$

donde cada elemento se leerá como $j-$*ésimo recurso con* $j \in M$*. Además,* m *representa la cardinalidad del conjunto* M*, es decir,* $m = |M|$.

Los recursos se clasifican en dos grupos: $divisibles$ e $indivisibles$ y su uso dependerá en gran medida de las consideraciones que se realizan en el planteamiento y la temática del problema. Los recursos $divisibles$ son aquellos que se pueden fraccionar sin destruirse, mientras que los $indivisibles$ son aquellos que no se pueden dividir.

Ejemplo 1.4.3. *Los* ***recurso divisible*** *pueden ser:*

- *Una pizza, pues si* $M = \{pizza\}$*, y tenemos* $N = \{1, 2, ..., m\}$ *personas a las que queremos asignar los pedazos de la pizza. En consecuencia, podemos fraccionar la pizza en* $1/n$ *pedazos.*
- *Las utilidades de una empresa, que son el 15 % de las ganancias anuales de la institución y cuyo monto es repartido entre todos los trabajadores y ex trabajadores que hayan prestado servicios en el año en curso.*

Ejemplo 1.4.4. *Los* ***recursos indivisibles*** *pueden ser:*

- *La compra de una moto en un hogar. Este bien no se puede dividir pues significaría la destrucción de la moto en partes, pero podría repartirse mediante un título compartido de la propiedad.*
- *Una mascota comprada para un hogar por dos personas, ambas son dueños, pero si lo consideramos como un bien no se puede repartir.*

Preferencias y función de utilidad

Las asignaciones permiten conocer las posibles maneras de distribuir los recursos al conjunto de individuos o agentes. Este paso es muy importante, pues establece una relación entre recursos y bienes.

Definición 1.4.3. ***(Conjunto potencia)***. *Sea A un conjunto, definimos como Potencia o Partes de A a todos los subconjuntos de A, incluido el conjunto vacío. Lo denotamos como $\mathcal{P}(A)$ y la cardinalidad del conjunto A representa el número de elementos o subconjuntos que tiene A, lo notaremos como $|A|$. Además, se cumple las siguientes propiedades:*

1. $|\emptyset| = 0$
2. *Si* $|A| = n$ *entonces* $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$

Definición 1.4.4. ***(Asignación)***. *Llamaremos asignación X a la una partición del conjunto de recursos M y X_i representa la asignación de recursos al agente i para cada $i \in N$. Denotaremos a X como:*

$$X = (X_i)_{i \in N} = (X_1, X_2, ..., X_n) \tag{1.1}$$

Se leerá a X_i como la asignación al agente i, para cada $i \in N$.
Además, la cantidad combinaciones posibles de asignaciones de recursos a los agentes en un problema de asignación se calcula como: $|N|^{|M|}$.
Una asignación cumple con las siguientes propiedades:

1. Todos los recursos son repartidos a los agentes y lo podemos expresar como
$$\forall m \in M, \exists n \in N, \;\; talque \;\; m \in X_n$$
2. Los recursos son disjuntos dos a dos, es decir,
$$X_i \cap X_j \neq \varnothing, \forall i, j \in M$$

Ejemplo 1.4.5. *Consideremos el conjunto de agentes $N = \{1, 2\} = \{Ana, Jhon\}$ y al conjunto de recursos $M = \{x, y, z\} = \{tricimoto, bicicleta, patineta\}$.*
En primer lugar, notemos que $|N| = 2$ y $|M| = 3$, así tenemos que

$|N|^{|M|} = 2^3 = 8$ *es el total de combinaciones posibles que se pueden realizar y continuación detallaremos de la siguiente manera:*

$$X = (X_1, X_2) = (\varnothing, \{1,2,3\})$$

$$Y = (Y_1, Y_2) = (\{1\}, \{2,3\})$$

$$Z = (Z_1, Z_2) = (\{2\}, \{1,3\})$$

$$A = (A_1, A_2) = (\{3\}, \{1,2\})$$

$$B = (B_1, B_2) = (\{1,2,3\}, \varnothing)$$

$$C = (C_1, C_2) = (\{1,2\}, \{3\})$$

$$D = (D_1, D_2) = (\{1,3\}, \{2\})$$

$$E = (E_1, E_2) = (\{3,2\}, \{1\})$$

Por último,notemos que la asignación X establece que el agente 1, Ana, no se le asigno ningún recurso, pero al agente 2, Jhon, se le asignaron los recursos 1, 2 y 3 definidos como tricimoto, bicicleta, patineta, respectivamente. De la misma forma, en la asignación Y, Ana recibe la tricimoto y Jhon la bicicleta y la patineta. De este modo, se describen las seis asignaciones restantes.

Ejemplo 1.4.6. *En un hospital infantil se desea asignar insumos a los médicos que trabajan en la zona de emergencia. Sea $M = \{1,2,3\}$ el conjunto de insumos que representan jeringas, guantes y mascarillas, respectivamente. Por otro lado, $N = \{1,2,3\}$ es el conjunto de médicos del área de emergencia del hospital que son {Andrés, David y Patricia}, respectivamente.*
Primeramente, podemos identificar que existe $|N|^{|M|} = 3^3 = 27$ es el total de asignaciones que se pueden realizar. Una posible asignación es:

$$X_1 = \{\{1,2\}, \{3\}, \{\varnothing\}\}$$

el cual representa que el agente 1, Andrés, se le a asignado los insumos 1 y 2 que son jeringas y guantes; el agente 2, David, se le ha asignado el insumo 3 que son mascarillas, pero al agente 3, Patricia, no se le ha asignado ningún insumo.

Observación: Por la propiedad 1 de las asignaciones, notar que en ambos ejemplos es posible no asignar recursos a una persona del conjunto de agentes, pero todos los recursos deben ser repartidos al resto de personas del conjunto.

El concepto de preferencia parte de la idea de seleccionar un recurso de nuestro gusto o necesidad. Las afirmaciones como "prefiero X a Y", "necesito mucho más X que Y", son formas de describir una preferencia. La forma mas adecuada para realizar una asignación se la representa con una relación de preferencia.

Definición 1.4.5. ***(Relación de preferencia)*** *Sea X un conjunto finito, llamaremos relación de preferencia al subconjunto R del producto cartesiano de $X \times X$ donde cada $(x, y) \in R$, se leerá x es preferido a y. Además, denotaremos a R como $x \succeq y$.*

Una relación de preferencia, se cumplen las siguientes propiedades:

- **Completa:** Si para todo $x, y \in X$, tenemos $x \succeq y$ o $y \succeq x$
- **Reflexiva:** $\forall x \in X, x \succeq x$
- **Transitiva:** Si para todo $x_1, x_2, x_3 \in X$, si $x_1 \succeq x_2$ y $x_2 \succeq x_3$ entonces $x_1 \succeq x_3$.

Notemos que analizando las relaciones de preferencias con nuestros conjuntos de agentes y recursos podemos concluir lo siguiente: por la propiedad de Completitud, al comparar dos recursos, el agente expone que recurso necesita o prefiere. La transitividad tiene un enfoque fuerte en ordenar los recursos según su preferencia.

Observación 1.4.1. *En el contexto de nuestro problema, utilizaremos la notación " $\succeq_i$ " que representará la preferencia del agente i, para cada $i \in N$ y si $x_1 \succeq_i x_2$ con $x_1, x_2 \in X$ se leerá que el agente i prefiere el recurso x_1 ante el recurso x_2.*

Ejemplo 1.4.7. *Sea $X = \mathbb{R}$, y R una relación de preferencia, es decir, $(x, y) \in R$, si y sólo si, $x \succeq y$ para todo $x, y \in X$.*

Ejemplo 1.4.8. *Supongamos que Edith desea adquirir el auto más rápido en un concesionario que le ofrece tres vehículos de las marcas Kia, Mercedes y Chevrolet. Así, Edith será el agente, es decir, $N = \{1\} = \{Edith\}$ y los*

carros, los recursos, definido como $M = (x, y, z) = (Kia, Chevrolet, Mercedes)$. *Supongamos que el auto más veloz es el Chevrolet y que el Kia posee la misma velocidad, pero el Mercedes es el auto más lento. Si la elección del auto se basa en la velocidad de los vehículos entonces notemos que se cumple lo siguiente:*
Las preferencias son completas puesto que $x \succeq_1 y$ *o* $y \succeq_1 x$ *que significa que, o bien el Kia es mas rápido el auto Chevrolet o el Chevrolet más rápido que el Kia. Por otro lado, se cumple que si* $x \succeq_1 y$ *y* $y \succeq_1 z$ *entonces* $x \succeq_1 z$, *si el Kia es más rápido que el Chevrolet y este es más rápido que el Mercedes, entonces Kia es más rápido que Mercedes. En conclusión, Edith puede elegir según su preferencia comprar el Kia.*

Clasificación de las preferencias

Las preferencias las podemos clasificar como:

1. Preferencia débil: $x \succeq y$ significa que el agente prefiere débilmente el recurso x a y, es decir, que prefiere estrictamente x a y o es indiferente entre los dos.

2. Preferencia estricta: $x \succ y$ significa que el agente prefiere estrictamente el recurso x a y.

3. Indiferencia: $x \sim y$ significa que el agente es indiferente entre x e y. Esto se define como $x \succeq y$ y $y \succeq x$

Observación 1.4.2. *En conjuntos, notemos que* "$\geq$" *es una desigualdad que representa una relación de orden entre conjuntos mientras que* "$\succeq$" *es una relación de preferencia. Al igual que la relación de preferencias, dos conjuntos tienen una relación de orden si se verifica las propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva.*

Definición 1.4.6. ***(Preorden total)***
Dado X *un conjunto no vacío y* "$\succeq$" *una relación de preferencia sobre el conjunto* X, *diremos que* $\succeq$ *es un Preorden total si se cumple las propiedades:*

- *Es total,* $\quad \forall a, b \in X : \quad a \succeq b \vee b \succeq a$

- *Es transitiva* $\quad \forall a, b, c \in X : a \succeq b \wedge b \succeq c \Rightarrow a \succeq c$

En otras palabras, un preorden es una relación que establece jerarquías entre los elementos que pertenecen al conjunto.

La Utilidad o preferencia de un recurso es un concepto un tanto subjetivo o difícil de cuantificar ya que influye mucho la opinión sobre un recurso. Es por ello, que para nuestro estudio utilizaremos un enfoque cuantitativo que nos permitirá junto a las funciones de utilidad asignar un valor numérico a un conjunto de recursos que el agente necesita o prefiera. Así, cuanto mayor sea ese valor, mejor será la preferencia o necesidad.

Definición 1.4.7. ***(Función de Utilidad).*** *Sea $X \in \mathcal{P}(M)$, una función definida como $\mu : P(M) \to \mathbb{R}^+$, es una función de Utilidad, si se verifica las siguientes propiedades:*

1. *No negatividad, es decir, $\mu(X) \geq 0$*
2. *Aditividad, es decir, $\mu(\varnothing) = 0$ y*

$$\mu(X) = \sum_{j \in X} \mu(j)$$

3. *Es positiva, es decir, $\mu(X) > 0$, $X \in \mathcal{P}(M)$*
4. *Tiene presupuesto K sí y solo si, $\mu(M) = k$, $K \in \mathbb{R}, K \geq 0$*

$\mu(X)$ es el valor o la utilidad total de un conjunto X. Bajo el marco de las asignaciones, diremos que $\mu_i(X)$ es el valor o utilidad que el agente i otorga a cada elemento en X del conjunto de recursos, clasificando los elementos de X de acuerdo con el preferencias del individuo.

Ejemplo 1.4.9. *El profesor de la clase de cálculo ha designado un trabajo grupal para ser entregado en una semana. La tarea consta de 3 ejercicios a grupos de 3 estudiantes. El conjunto agentes $N = \{1, 2, 3\}$ que en esta ocasión son los alumnos y los recursos $M = \{a, b, c\}$ será los ejercicios a realizar. Para nuestro ejemplo, consideraremos el grupo 1 el cual realizó las siguientes asignaciones de ejercicios entre los integrantes del grupo:*

$$X = (X_1, X_2, X_3) = \{\{a, b\}, \{c\}, \{\varnothing\}\}$$

donde X_1, X_2, X_3 son las asignaciones de los ejercicios a los estudiantes $1, 2, 3$ respectivamente. Supongamos que cada estudiante valora su preferencia de los ejercicios:

$$\begin{array}{lll} \mu_1(a) = 1 & \mu_1(b) = 2 & \mu_1(c) = 3 \\ \mu_2(a) = 0 & \mu_2(b) = 3 & \mu_2(c) = 3 \\ \mu_3(a) = 2 & \mu_3(b) = 3 & \mu_3(c) = 1 \end{array}$$

Se interpretará que el estudiante 1 valora al recurso 1 conformado por el ejercicio a con 1, al ejercicio b con 2 y al ejercicio c en 3. Por otro lado, el estudiante 2 valora al recurso 1 conformado por el ejercicio a con 0, al ejercicio b con 3 y al ejercicio c es 3. De forma intuitiva, podemos interpretarlo para el agente 3.
Luego, considerando la asignación se tiene que:

$$\begin{array}{lll} \mu_1(X_1) = \{a, b\} = 1 + 2 = 3 & \mu_1(X_2) = \{c\} = 2 & \mu_1(X_3) = \{\varnothing\} = 0 \\ \mu_2(X_1) = \{a, b\} = 0 + 2 = 3 & \mu_2(X_2) = \{c\} = 3 & \mu_2(X_3) = \{\varnothing\} = 0 \\ \mu_3(X_1) = \{a, b\} = 2 + 3 = 5 & \mu_3(X_2) = \{c\} = 1 & \mu_3(X_3) = \{\varnothing\} = 0 \end{array}$$

Podemos concluir lo siguiente:
El estudiante 1 valora su asignación X_1 con 3, el estudiante 2 valora su asignación X_2 con 3 y el estudiante 3 valora su asignación X_3 con $= 0$.
Además, vemos que el estudiante 1 de la más utilidad a su asignación que a lo asignado a los otros dos estudiantes, pues $\mu_1(X_1) > \mu_1(X_2) > \mu_1(X_3)$.
El estudiante 2 le da la misma utilidad a su asignación que a la asignación del estudiante 1, es decir, $\mu_2(X_1) = \mu_2(X_2)$.
Finalmente, el estudiante 3 al igual que sus otros compañeros la utilidad de cero a su asignación y mas utilidad a la asignación del estudiante 1, es decir, $\mu_3(X_1) > \mu_3(X_2) > \mu_3(X_3)$.

Lema 1.4.1. *Sea $i \in N$ un agente y su función de utilidad u_i. Sea $\succeq_i$ una relación de preferencia del agente sobre $\mathcal{P}(M)$ y dados $X, Y \in \mathcal{P}(M)$, que cumple que*

$$X \succeq_i Y \Leftrightarrow \mu_i(X) \geq \mu_i(Y) \tag{1.2}$$

Mostrar que $\succeq_i$ es un preorden total.

Demostración Sea X, Y conjuntos cualesquiera, mostraremos que $\succeq_i$

es un preorden total.

1. PD. $\succeq_i$ es total.
   Notemos que como $X, Y \in \mathcal{P}(M)$ entonces $\mu_i(X), \mu_i(Y) \in \mathbb{R}$, así, de la teoría del orden, por el axioma de tricotomía, es decir que el conjunto de los número reales esta totalmente ordenado, se tiene que:

   $$\mu_i(X) \geq \mu_i(Y) \vee \mu_i(Y) \geq \mu_i(X)$$

   Por hipótesis tenemos que:

   $$A \succeq_i B \Leftrightarrow \mu_i(X) \geq \mu_i(Y)$$

   entonces, se tiene que

   $$X \succeq_i Y \vee Y \succeq_i X$$

   Por lo tanto, podemos concluir que $(\succeq_i)$ es total.

2. PD. $\succeq_i$ es transitiva.
   Sea Z un conjunto. Supongamos que $X \succeq_i Y$ Y $Y \succeq_i Z$, mostraremos que $X \succeq_i Z$ Por hipótesis tenemos que

   $$\mu_i(X) \geq \mu_i(Y)$$
   $$\mu_i(Y) \geq \mu_i(Z)$$

   como $X, Y, Z \in \mathcal{P}(M)$, por transitividad de $\mathbb{R}$ de "$\geq$" se tiene que

   $$\mu_i(X) \geq \mu_i(Z)$$

   Así, por hipótesis se tiene que $X \succeq_i Z$
   por lo tanto, se concluye que $(\succeq_i)$ es transitiva.

Finalmente, como $\succeq_i$ es total y transitiva, concluimos que $(\succeq_i)$ es un preorden total $\square$

Eficiencia y justicia

Las preferencias individuales de los agentes miden el grado de satisfacción individual para una asignación. Un propósito principal en este tema es hallar la máxima satisfacción tanto individual como grupal de los agentes. Es así que el siguiente paso es clasificar las asignaciones y determinar cuáles son las mejores. Para ello se utilizará el criterio de eficiencia de Pareto, que es una herramienta que permite identificar el bienestar general de un conjunto de agentes, cuyo propósito propone que no hay forma mejorar su situación de un agente sin reducir el bienestar de cualquier otro agente.
El concepto de eficiencia de Pareto debe su origen al matemático italiano del siglo XIX Vilfredo Pareto (1848 - 1923), fue un economista y sociólogo italiano. Su enfoque de la noción sustenta el equilibrio del bienestar social. Por otro lado, Pareto también es conocido por su contribución al campo de la estadística, con el conocido diagrama de Pareto, que permite clasificar los fenómenos por orden de importancia. Además, su estudio sociológico de la distribución de la riqueza en Italia, conocida como ley de Pareto, principio de Pareto o distribución de Pareto, es muy útil para establecer estrategias empresariales.

Definición 1.4.8. ***(Pareto dominado).*** *Dados $X, Y \in \mathcal{P}(M)$ asignaciones y $i, j \in N$, y μ_i función de utilidad, llamaremos a X dominado en el sentido de Pareto por Y si se cumple:*

$$\mu_i(X_i) \leq \mu_i(Y_i)$$

y existe al menos un agente j tal que $u_j(X_j) \leq u_j(Y_j)$ para algún $j \in N$

Ejemplo 1.4.10. *Supongamos que en una entidad de gobierno tenemos 3 trabajadores y 3 tareas a asignarse y se define la función de utilidad μi para cada agente, como se detalla:*
Sea $N = \{1, 2, 3\}$ $M = \{a, b, c\}$. Se define X asociando a la función de utilidad como se menciona, a continuación:

$$\begin{array}{ccc} \mu_1(a) = 10 & \mu_1(b) = 15 & \mu_1(c) = 25 \\ \mu_2(a) = 9 & \mu_2(b) = 25 & \mu_2(c) = 16 \\ \mu_3(a) = 30 & \mu_3(b) = 0 & \mu_3(c) = 20 \end{array}$$

En primer lugar, notemos que el presupuesto para cada recurso se tiene que $K = 50$ *pues la suma de las utilidad de cada agente es* 50*. Además, existe* $|N|^{|M|} = 3^3 = 27$ *posibles asignaciones.*

Consideremos las siguientes dos asignaciones:

$$X = (X_1, X_2, X_3) = (\{a, c\}, \{b\}, \{\varnothing\})$$

$$Y = (Y_1, Y_2, Y_3) = (\{c\}, \{a\}, \{b\})$$

El valor de la utilidad que le da cada agente i *con* $i \in \{1, 2, 3\}$ *a la asignación* X *es:*

$$\mu_1(X_1) = \mu_1(a) + \mu_1(b) = 35$$

$$\mu_2(X_2) = \mu_2(b) = 25$$

$$\mu_3(X_3) = \{\varnothing\} = 0$$

Y el valor de la utilidad que le da cada agente a la asignación Y *es:*

$$\mu_1(Y_1) = \mu_1(c) = 25$$

$$\mu_2(Y_2) = \mu_2(a) = 9$$

$$\mu_3(Y_3) = \mu_3(b) = 0$$

Ahora note que:

$$\mu_1(Y_1) < \mu_1(X_1)$$

$$\mu_2(Y_2) < \mu_2(X_2)$$

$$\mu_3(Y_3) = \mu_3(X_3)$$

Al comparar las asignaciones X *y* Y*:*
Para el agente 1 *y* 2*, la asignación* X *mejora la utilidad de la asignación* Y*, pues la valoración es mayor.*
Para el agente 3*, ambas asignaciones tienen la misma utilidad.*
Finalmente, podemos concluir que Y *es Pareto Dominada de* X

Definición 1.4.9. ***(Òptima Pareto)*** *Dados X, Y son asignaciones, diremos que Y es Optima Pareto o Pareto eficiente, denotado por* ***"PO"****, sí y solo Y no es Pareto dominada por X y denotaremos al conjunto* PO *al conjunto de todas las asignaciones que son óptimas Pareto.*

Ejemplo 1.4.11. *Continuando con el ejemplo anterior, consideremos ahora una nueva posible asignación:*

$$Z = (Z_1, Z_2, Z_3) = \{\{a, b, c\}, \varnothing, \varnothing\}$$

En este caso la utilidad asociada a esta asignación es:

$$\mu_1(Z_1) = \mu_1(a) + \mu_1(b) + \mu_1(c) = 50$$

$$\mu_2(Z_2) = \{\varnothing\} = 0$$

$$\mu_3(Z_3) = \{\varnothing\} = 0$$

Note que como la función de utilidad del agente 1 es positiva, cualquier otra asignación que intente mejorar la utilidad de los otros dos agentes que en esta asignación es cero, perjudicaría al agente uno, por lo tanto Z es una asignación Pareto Óptima.

Del ejercicio anterior, que A es Pareto Dominada de B, por lo que para demostrar que B es Pareto Óptima, debemos comprar con Z y las otras 26 posibles asignaciones. Por lo que a priori, podemos concluir que A no es Pareto Óptima.

Ejemplo 1.4.12. *Consideremos dos agentes $N = \{1, 2\}$ y dos recursos, $M = \{manzana, pltanos\}$. Al agente 1 le gustan las manzanas y no le gustan las bananas (cuantas más bananas tiene, peor está), y al agente 2 le gustan las bananas y no le gustan las manzanas. Hay 100 manzanas y 100 plátanos disponibles.*
La única asignación que es eficiente en el sentido de Pareto es aquella en la que el agente 1 tiene todas las manzanas, es decir $X = \{manzanas = 100\}$ y el agente 2 tiene todas las bananas $X_2 = \{bananas = 1000\}$, con $X = (X_1, X_2)$ la asignación.
Para cualquier otra asignación, uno de los agentes tiene algunas unidades del bien que no le gustan, y estaría mejor si la otra persona tuviera esas

unidades. Por lo tanto, esta asignación es Pareto Óptima.

Notemos que, las funciones de utilidad nos ayudan a asignar los recursos según las preferencias y luego de realizar las asignaciones podemos encontrar varias soluciones que sea óptima de Pareto dentro de un mismo problema, que a priori nos garantizan asignaciones buenas que satisfacen de forma grupal. El siguiente tema a abordar será cómo elegir la mejor asignación posible de todas que determine la satisfacción individual de los agentes y para ello nos conviene realizar una categorización de todas las asignaciones y de ellas seleccionar la más adecuada. Para ello se estudia la propiedad de libre envidia entre agentes.

Definición 1.4.10. ***(Libre de envidia)*** *Dada una asignación X, se dice que es libre de envidia bajo la utilidad asociada si $\forall i, j \in N$, se cumple que*

$$u_i(X_i) \leq u_i(X_j)$$

Es decir, para cada recurso ningún agente $i \in N$ valore más el recurso de otro agente j. Representaremos a la propiedad como EF

Ejemplo 1.4.13. *Sea N y M el conjunto de agentes y recursos definidos como $N = \{1, 2\}$ y $M = \{x, y, z\}$ y se consideran las siguientes funciones de utilidad aditiva:*

$$\begin{array}{lll} \mu_1(x) = 10 & \mu_1(y) = 25 & \mu_1(z) = 25 \\ \mu_2(x) = 5 & \mu_2(y) = 25 & \mu_2(z) = 30 \end{array}$$

Consideremos la asignación A de recursos a los agentes:

$$A = (A_1, A_2) = (\{x, y\}, \{z\})$$

calculamos la utilidad en las asignaciones A

$$\begin{array}{ll} \mu_1(A_1) = \mu_1(\{x, y\}) = 10 + 25 = 35 & \mu_1(A_2) = \mu_1(\{z\}) = 25 \\ \mu_2(A_1) = \mu_2(\{x, y\}) = 25 + 5 = 30 & \mu_2(A_2) = \mu_2(\{z\}) = 30 \end{array}$$

Notemos que $\mu_1(A_1) > \mu_1(A_2)$ y $\mu_2(A_1) = \mu_2(A_2)$ por lo tanto podemos concluir que cumple con el criterio, libre de envidia.

Ahora, si consideramos la asignación B:

$$B = (B_1, B_2) = (\{y\}, \{x, z\})$$

y calculamos la utilidad asociada a esta asignación tenemos:

$$\begin{array}{ll} \mu_1(B_1) = \mu_1(\{y\}) = 25 & \mu_1(B_2) = \mu_1(\{x, z\}) = 35 \\ \mu_2(B_1) = \mu_2(\{y\}) = 25 & \mu_2(B_2) = \mu_2(\{x, z\}) = 35 \end{array}$$

de donde se tiene que: $\mu_1(B_1) < \mu_1(B_2)$, es decir, el agente 1 le da mayor utilidad a lo asignado al agente 2 que a su asignación y $\mu_2(B_1) < \mu_2(B_2)$, que significa que el agente 2 le da mayor utilidad a su asignación que a lo asignado al agente 1. Por lo tanto, B no es EF.

Definición 1.4.11. *Dada una asignación X, decimos que es* ***Libre de envidia hasta en un bien*** *si para todo $i, j \in N$, el conjunto de agentes, existe un elemento y X_j tal que se cumple que*

$$u_i(X_i) \leq u_i(X_j \setminus y)$$

Es decir, existe un agente j que valora más el recurso asignado al agente i que lo que se le asigno a el. Denotaremos a la propiedad como EFO

Ejemplo 1.4.14. *Consideremos los conjuntos $N = \{1, 2, 3\}$ y $M = \{a, b, c, d\}$ de agentes y recursos, respectivamente. la siguientes utilidades asignadas a cada recurso por los agentes:*

$$\begin{array}{cccc} \mu_1(a) = 5 & \mu_1(b) = 2 & \mu_1(c) = 8 & \mu_1(d) = 25 \\ \mu_2(a) = 15 & \mu_5(b) = 2 & \mu_2(c) = 12 & \mu_2(d) = 8 \\ \mu_3(a) = 6 & \mu_3(b) = 15 & \mu_3(c) = 6 & \mu_3(d) = 13 \end{array}$$

Dada la asignación $X = (X_1, X_2, X_3) = (\{1\}, \{2, 3\}, \{4\})$ se observa que las utilidades de las asignaciones son:

$$\mu_1(X_1) = 5 \quad \mu_1(X_2) = 10 \quad \mu_1(X_3) = 25$$

$$\mu_2(X_1) = 15 \quad \mu_2(X_2) = 14 \quad \mu_2(X_3) = 8$$

$$\mu_3(X_1) = 6 \quad \mu_3(X_2) = 21 \quad \mu_3(X_3) = 13$$

Notemos que el agente 1 envidia al agente 3

$$\mu_1(X_1) = 5 < \mu_1(X_3) = 25$$

el agente 2 envidia al agente 1

$$\mu_2(X_2) = 14 < \mu_2(X_1) = 15$$

y el agente 3 envidia al agente 2

$$\mu_3(X_3) = 13 < \mu_3(X_2) = 21$$

Así, podemos concluir que X no es libre de envidia. Ahora notemos que,

$$\mu_1(X_1) > \mu_1(X_3 \setminus \{d\})$$

$$\mu_2(X_2) > \mu_2(X_1 \setminus \{a\})$$

$$\mu_3(X_3) > \mu_3(X_2 \setminus \{c\})$$

Por lo tanto, es libre de envidia hasta en un recurso, EFO.

Función de bienestar social

El bienestar social parte de la idea de clasificar las asignaciones que dependiendo del los conjuntos de agentes y recursos puedes ser un numero considerable de analizar. Para ello, se utiliza las funciones de utilidad aditiva que determina la satisfacción individual de los agentes.

Definición 1.4.12. ***(Función de bienestar social)*** *Sea X una asignación dada, llamaremos la función de bienestar social sobre $\mathcal{P}(M)$, a la función definida*

$$SW : N^M \mapsto \mathbb{R}$$

se cumple que

$$X \succeq Y \Leftrightarrow SW(X) \geq SW(Y)$$

donde, $SW(X)$ representa la cantidad o valor del bienestar social de la asignación X. Se leerá que si X es más preferido que Y sí y solo si, la cantidad del bienestar social de X es mayor o igual a la cantidad de bienestar social de Y

Definición 1.4.13. ***(Función de bienestar social utilitario)***
Sea $X \in N^M$ una asignación dada, μ_i la función de utilidad, definiremos la función de bienestar social utilitario SW_U como:

$$SW_U(X) = \sum_{i \in N} \mu_i(X_i)$$

con i elementos del conjunto de agentes.

Ejemplo 1.4.15. *Consideremos el conjunto de agentes, recursos y funciones aditivas del ejemplo 1.4.13, por lo tanto, obtenemos,*

$$SW_U(A) = 35 + 30 = 65$$

$$SW_U(B) = 25 + 35 = 70$$

y se concluye que $SW_U(B) > SW_U(A) \Rightarrow B \succ A$ por tanto, la asignación B es más preferido que A.

Para los propósitos de nuestro trabajo las funciones de bienestar social de Nach nos permitirán analizar como las asignaciones maximizan esta función de bienestar, pues cumplen con las propiedades de eficiencia, es decir, son óptimas Pareto y libres de envidia.

Lema 1.4.2. *Sea X y Y asignaciones y sea SW función de bienestar social, decimos que $\succ$ es una relación de bienestar social si cumple que:*

$$X \succeq_i Y \Leftrightarrow \mu_i(X) \geq \mu_i(Y)$$

es decir, la asignación X es preferida o necesitada comparado con la asignación Y sí y solo si la asignación X tiene mayor bienestar social que la Y

Demostración Sea $X, Y \in \mathcal{P}(M)$ asignaciones, mostraremos que $\succeq_i$ es un preorden total.

1. PD. $\succeq_i$ es total.
   Notemos que como $X, Y \in \mathcal{P}(M)$ entonces $SW(X), SW(Y) \in \mathbb{R}$, así, de

la teoría del orden, por el axioma de tricotomía, es decir que el conjunto de los número reales esta totalmente ordenado, se tiene que:

$$SW(X) \geq SW(Y) \vee SW(X) \geq SW(Y)$$

Por hipótesis tenemos que:

$$X \succeq_i Y \Leftrightarrow SW(X) \geq SW(Y)$$

entonces, se tiene que

$$X \succeq_i Y \vee Y \succeq_i X$$

Por lo tanto, podemos concluir que $(\succeq_i)$ es total.

2. PD. $\succeq_i$ es transitiva.
Supongamos que $X \succeq_i Y$ Y $Y \succeq_i Z$, mostraremos que $X \succeq_i Z$ Por hipótesis tenemos que

$$SW(X) \geq SW(Y)$$

$$SW(Y) \geq SW(Z)$$

Como $X, Y, Z \in \mathcal{P}(M)$, por transitividad de $\mathbb{R}$ de $" \geq "$ se tiene que

$$SW(X) \geq SW(Y)$$

Así, por hipótesis se tiene que $X \succeq_i Z$, por lo tanto, es transitiva.

como $\succeq_i$ es total y transitiva, concluimos que $(\succeq_i)$ es un preorden total $\square$

Definición 1.4.14. ***(Bienestar social de Nach)*** *Sea $X \in N^M$, μ_i la función de utilidad para $i \in N$ donde N es conjunto de agentes, definiremos la función Bienestar social de Nach SW_N como:*

$$SW_N(X) = \prod_{i \in N} \mu_i(A_i)$$

Ejemplo 1.4.16. *Sea N y M el conjunto de agentes y recursos definidos como* $N = (1, 2)$ *y* $M = (x, y, z)$ *y se consideran las siguientes funciones de utilidad aditiva:*

$$u_1(x) = 2 \quad u_1(y) = 3 \quad u_1(z) = 5$$
$$u_2(x) = 4 \quad u_2(y) = 2 \quad u_2(z) = 4$$

y consideremos dos asignaciones A *y* B *de recursos a los agentes:*

$$A = (A_1, A_2) = (\{x\}, \{y, z\})$$

$$B = (B_1, B_2) = (\{x, y\}, \{z\})$$

calculando la utilidad de cada una de las asignaciones tenemos:

$$\mu_1(A_1) = 2 \quad \mu_2(A_2) = 6$$
$$\mu_1(B_1) = 5 \quad \mu_2(B_2) = 4$$

Por lo tanto, el bienestar social para las asignaciones A, B

$$SW_N(A) = 2 * 6 = 12$$
$$SW_N(B) = 5 * 4 = 20$$

Nótese que $SW_N(B) > SW_N(A) \Rightarrow B \succ A$*.*
En conclusión, bajo el bienestar social de Nach, la asignación B *es preferida a la asignación* A*.*

Capítulo 2

Metodología

Para esta sección, formalizaremos el problema de asignación de recursos indivisibles bajo un enfoque matricial y cuantitativo que cumplan con los criterios de eficiencia de Pareto y que sean libres de envidia. En primera instancia se describen las matrices de asignaciones y utilidades que permiten desarrollar los teoremas principales del problema de asignación de recursos.

Definición 2.0.1. ***(Matriz Agente - Recurso)*** *Sea N el conjunto de agentes y M el conjunto de recursos no divisible, con $|N| = n$ y $|M| = m$ respectivamente. Definimos la matriz agente recurso K de dimensión $\mathcal{M}_{nxm}$ cuyas entradas están formadas por N en sus filas y M en sus columnas. La matriz la denotamos por*

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{1r} & ... & k_{1m} \\ k_{21} & k_{22} & k_{2r} & ... & k_{2m} \\ k_{i1} & k_{i2} & k_{ir} & ... & k_{im} \\ \vdots & \vdots & \vdots & ... & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & k_{nr} & ... & k_{nm} \end{bmatrix}$$

$\forall i = \{1, 2, ..., n\}$ y $\forall r = \{1, 2, ..., m\}$ donde (i, r) representa la posición del agente i y el recurso r. Por lo tanto, si $X \in \mathcal{M}_{nxm}(K)$ se denota como $[X]_{ir}$ al agente i y recurso r de la matriz X.

Ejemplo 2.0.1. *Datos $N = \{1, 2, 3\}$ y $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ los conjuntos de* *agentes y recursos, respectivamente. Entonces la matriz K será:*

$$\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{22} & k_{25} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} \end{pmatrix}$$

donde $k_{ij} \in \mathcal{M}_{3x5}(K)$, es la posición del agente i y el recurso j

Definición 2.0.2. ***(Matriz de asignación)*** *Sea $B = \{0, 1\}$ un conjunto binario y $X \subseteq M$ una asignación. Se define la matriz de asignación $\boldsymbol{F} \in \mathcal{M}_{nxm}(B)$ tal que:*
$\forall r \in M$,$\exists i \in N$ entonces $[\boldsymbol{F}]_{ir} = 1$ y $[\boldsymbol{F}]_{jr} = 0$ si $j \neq i$, con $1 \leq r \leq m$, $1 \leq i, j \leq n$ y $j \in N$.

Es decir, para cada recurso $r \in M$, existe un solo agente al cual se le ha asignado el recurso.

También lo podemos representar como:

$$[F]_{ir} = \begin{cases} 1 & si \quad r \in X_i \\ 0 & caso \quad contrario \end{cases}$$

Ejemplo 2.0.2. *Sea los conjuntos $N = \{1, 2, 3\}$ y $M = \{1, 2, 3\}$, el conjunto de agentes y recursos respectivamente, a los cuales se les a realizado la siguiente asignación:*

$$X = (\{1\}, \{3\}, \{2\})$$

por lo tanto, de forma matricial, tenemos que:

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Notemos que $\boldsymbol{F} \in \mathcal{M}_{3x3}(B)$, donde $[F]_{11} = 1$ que representa que el recurso 1 esta asignado al agente 1, mientras que $[F]_{12} = 0$ y $[F]_{13} = 0$, se interpreta que el recurso 2 no esta asignado al agente 1 y el recurso 3 no es asignado al agente 1. De la misma forma, $[F]_{23} = 1$, que quiere decir que el recurso 3 fue asignado al agente 2.

Observación 2.0.1. *El conjunto de todos las matrices de asignación posibles se denotará como $\boldsymbol{A}$, con $\boldsymbol{A} \subseteq \mathcal{M}_{nxm}(B)$*

Ejemplo 2.0.3. *Supongamos que tenemos $N = \{1, 2\}$ y $M = \{1, 2, 3\}$. Así, el conjunto $\boldsymbol{A}$ está formado por $2^3 = 8$ matrices de asignación posibles que son:*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} F_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & F_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & F_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ F_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} & F_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & F_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ F_7 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & F_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \end{pmatrix}$$

En F_1 podemos notar que, $[F]11 = [F]12 = 1$, significa que los recursos 1 y 2 fueron asignados al agente 1 y $[F]31 = 1$, es decir que el recurso 3 fue asignado al agente 2. De forma similar, se describen el resto de matrices. Por otro lado, notemos que cada matriz binaria $F_k \in \boldsymbol{A}$, con $k = 1, 2, ..., 8$ es única, en otras palabras, las asignaciones no se repiten.

Definición 2.0.3. ***(matriz de valuación)*** *Dado $\boldsymbol{\mu}_i$ una función de utilidad de un agente $i \in N$. Se define la matriz de valuación como $V \in \mathcal{M}_{nxm}(\mathbb{R}^*)$, tal que cumple que*

$$\forall i \in N, \forall j \in M, [V]_{ij} = \boldsymbol{\mu}_i(j)$$

La matriz de valuación V cumple con las siguientes propiedades:

1. $\sum_{j=1}^{m} [V]_{ij} = \sum_{j=1}^{m} \mu_i(j) = K_i$, *donde K_i, es el presupuesto de la utilidad que asigna cada agente $i \in N$ a los recursos.*

2. $\sum_{j=1}^{n} [V]_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \mu_i(j) = C_i$, *donde C_i, es el costo estimado de cada recurso $j \in M$.*

Ejemplo 2.0.4. *Consideremos ahora los conjuntos $N = \{1, 2, 3\}$ $M = \{a, b, c\}$. de agentes y recursos, respectivamente. Cada agente fija la función de utilidad aditiva mencionada a continuación:*

$$\begin{array}{lll} \mu_1(a) = 10 & \mu_1(b) = 15 & \mu_1(c) = 25 \\ \mu_2(a) = 9 & \mu_2(b) = 25 & \mu_2(c) = 16 \\ \mu_3(a) = 30 & \mu_3(b) = 10 & \mu_3(c) = 10 \end{array}$$

por lo tanto, la matriz de valuación será:

$$V = \begin{pmatrix} 10 & 15 & 25 \\ 9 & 25 & 16 \\ 30 & 10 & 10 \end{pmatrix}$$

Notemos que la posiciones:
$[V]_{11} = 10 = \mu_1(a)$ *representa que agente* 1 *valora recurso* a *con* 10
$[V]_{12} = 15 = \mu_1(b)$ *que representa que el agente* 1 *valora al recurso* b *con* 15
$[V]_{13} = 25 = \mu_1(c)$ *que representa que el agente* 1 *valora al recurso* c *con* 25*.*
Intuitivamente, se interpreta para los agentes 2 *y* 3 *de las filas restantes de la matriz.*

Por otro lado, si calculamos el presupuesto de la utilidad que cada agente a los recursos tenemos:

$$\sum_{j=1}^{m}[V]_{ij} = \sum_{j=1}^{3}[V]_{1j} = \sum_{j=1}^{3}\mu_1(j) = 10 + 15 + 25 = 50$$

$$\sum_{j=1}^{m}[V]_{ij} = \sum_{j=1}^{3}[V]_{2j} = \sum_{j=1}^{3}\mu_2(j) = 9 + 25 + 16 = 50$$

$$\sum_{j=1}^{m}[V]_{ij} = \sum_{j=1}^{3}[V]_{3j} = \sum_{j=1}^{3}\mu_3(j) = 30 + 10 + 10 = 50$$

Y finalmente, el costo estimado de cada recurso es:

$$\sum_{j=1}^{m}[V]_{ij} = \sum_{j=1}^{3}[V]_{i1} = \sum_{j=1}^{3}\mu_i(1) = 10 + 9 + 30 = 49$$

$$\sum_{j=1}^{m}[V]_{ij} = \sum_{j=1}^{3}[V]_{i2} = \sum_{j=1}^{3}\mu_i(2) = 15 + 25 + 10 = 50$$

$$\sum_{j=1}^{m}[V]_{ij} = \sum_{j=1}^{3}[V]_{i3} = \sum_{j=1}^{3}\mu_i(3) = 25 + 16 + 10 = 51$$

Como vimos en el capitulo anterior, una vez definido las asignaciones, es necesario determinar las utilidades asociadas. Por lo tanto, el siguiente paso es definir la matriz de utilidad asociada a la matriz de asignación con ayuda de la matriz de valuación.

Definición 2.0.4. ***Matriz de utilidades*** *Sea $F \in \mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}_{nxm}$ una matriz de asignación y V la matriz de valuación. La Matriz de Utilidades de F se define como:*

$$U_F = V * F^T \tag{2.1}$$

es decir, el producto entre la matriz de valuación con la transpuesta de F. Además, sus elementos de la matriz U_F son de la forma:

$$[U_F]_{ij} = \sum_{k=1}^{m} [V]_{ik} * [F^T]_{kj}$$

Donde $[U_F]_{ij}$ representa la valuación que le da el agente i a asignación que le corresponde al agente j asignado por medio de la matriz de asignación F. Y si $i = j$, es decir, $[U_F]_{ii}$ representa la valuación que le da el agente i a su asignación por medio de F.

Ejemplo 2.0.5. *Consideremos un grupo formado por 5 profesores de la facultad de Ciencias $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ a quienes se les asignará el conjunto de recursos $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ para dictar un seminario y la matriz de valuación dada:*

$$V = \begin{pmatrix} 15 & 10 & 12 & 17 & 5 \\ 10 & 20 & 10 & 15 & 5 \\ 15 & 15 & 15 & 5 & 10 \\ 18 & 12 & 13 & 13 & 4 \\ 2 & 17 & 11 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

Además, se considera la asignación $X = (\{4\}, \{2\}, \{3\}, \{1\}, \{5\})$.
Por lo tanto, tenemos la matriz de asignación:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la matriz de utilidad U_F se calcula como:

$$U_F = V * F^T = \begin{pmatrix} 15 & 10 & 12 & 17 & 5 \\ 10 & 20 & 10 & 15 & 5 \\ 15 & 15 & 15 & 5 & 10 \\ 18 & 12 & 13 & 13 & 4 \\ 2 & 17 & 11 & 10 & 20 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$$

$$U_F = \begin{pmatrix} 15 & 10 & 12 & 17 & 5 \\ 10 & 20 & 10 & 15 & 5 \\ 15 & 15 & 15 & 5 & 10 \\ 18 & 12 & 13 & 13 & 4 \\ 2 & 17 & 11 & 10 & 20 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U_F = \begin{pmatrix} 17 & 10 & 12 & 15 & 5 \\ 15 & 20 & 10 & 10 & 5 \\ 5 & 15 & 15 & 15 & 10 \\ 13 & 12 & 13 & 18 & 4 \\ 10 & 17 & 11 & 2 & 20 \end{pmatrix}$$

Notemos que de la matriz U_F podemos concluir:
$[U_F]_{11} = 17$*, representa la valuación que le da el agente* 1 *a su asignación por medio de* F*. De igual manera de interpreta para el resto de los elementos de la diagonal de la matriz* U_F*.*
$[U_F]_{31} = 5$ *representa la valuación que le da el agente* 3 *a asignación que le corresponde al agente* 1 *asignado por medio de la matriz de asignación* F*. De la misma forma se interpreta para todo* $[U_F]_{ij}$ *con* $i \neq j$*.*

Definición 2.0.5. ***Matriz de Bienestar Social Utilitario***
Sea $F \in \mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}_{nxm}$ una matriz de, definimos el Bienestar social utilitario de F como:

$$SW_U(F) = traz(U_F) = \sum_{i \in N} [U_F]_{ii} \tag{2.2}$$

es decir, la suma de los elementos de la diagonal de la matriz de utilidad U_F

Ejemplo 2.0.6. *Consideremos los conjuntos $N = \{1, 2, 3\}$ y $M = \{1, 2, 3\}$ de agentes y recursos, respectivamente. Sabemos que existen $3^3 = 27$ posibles* *asignaciones de las cuales de consideran las dos siguientes:*

$$X = (\{3\}, \{2\}, \{1\})$$

$$Y = (\{1, 2\}, \{3\}, \varnothing)$$

Por lo tanto, las matrices de asignación son:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde F es la matriz de asignación de X y G es la de Y

Además, las matriz de valuación dada es:

$$V = \begin{pmatrix} 10 & 15 & 25 \\ 5 & 25 & 20 \\ 30 & 12 & 8 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, las matrices de utilidades son:

$$U_F = \begin{pmatrix} 25 & 15 & 10 \\ 20 & 25 & 5 \\ 8 & 12 & 30 \end{pmatrix} \quad y \quad U_G = \begin{pmatrix} 25 & 26 & 0 \\ 30 & 20 & 0 \\ 42 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

Finalmente, calculamos el bienestar social utilitario de F y G:

$$SW_U(F) = \sum_{i \in N} [U_F]_{ii} = 25 + 25 + 30 = 80$$

$$SW_U(G) = \sum_{i \in N} [U_G]_{ii} = 25 + 20 + 0 = 45$$

De la misma manera se define el Bienestar social de Nach, como se describe a continuación.

Definición 2.0.6. ***Bienestar Social de Nach***
Sea $F \in \mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}_{nxm}$ una matriz asignación, definimos el Bienestar Social de Nach de F como:

$$SW_N(F) = \prod_{i \in N} [U_F]_{ii} \tag{2.3}$$

Ejemplo 2.0.7. *Continuando con el ejemplo anterior, calculamos el bienestar social de Nach para las dos matrices de asignaciones:*

$$SW_N(F) = \prod_{i \in N} [U_F]_{ii} = 25 * 25 * 30 = 18750$$

$$SW_N(G) = \prod_{i \in N} [U_G]_{ii} = 25 * 20 * 0 = 0$$

Una vez calculado el bienestar social, ya sea utilitario o de Nach, el siguiente paso es clasificar las asignaciones, es decir determinar cual es la mejor y para ello se utiliza el concepto de preferencias $\succeq$ definido en el **Lema 1.4.2**.

Lema 2.0.1. *Sea $F, G \in \mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}_{nxm}$ matrices de asignaciones de M en N, sea $SW(F)$ y $SW(G)$ el bienestar social de las matrices F y G, respectivamente, y $\succeq$ la relación de preferencia, se cumple que:*

$$F \succeq G \Leftrightarrow SW(F) \geq SW(G) \tag{2.4}$$

es decir, que la matriz F posee mayor o igual bienestar social que G

Ejemplo 2.0.8. *Continuando los mismos conjuntos del **Ejemplo 2.0.6**, ya hemos calculado el Bienestar Social Utilitario:*

$$SW_U(F) = 80$$

$$SW_U(G) = 45$$

Como $SW_U(F) > SW_U(G)$ se concluye que $X \succ_U Y$, es decir que X tiene mejor bienestar social utilitario que Y.

De forma similar, con el Bienestar Social de Nach, obtuvimos:

$$SW_U(F) = 18750$$

$$SW_U(G) = 0$$

Como $SW_N(F) > SW_N(G)$ se concluye que $X \succ_N Y$, es decir que X tiene mejor bienestar social de Nach que Y.

Finalmente, podemos observar que tanto el Bienestar Social Utilitario como el Bienestar Social de Nach, son mejores en la asignación X representada en la matriz F.

Una vez que clasifiquemos el Bienestar Social de las matrices de asignación, debemos hallar la asignación que maximiza el Bienestar Social del conjunto de asignaciones. [1].

Definición 2.0.7. ***Máximo de Bienestar*** *Dadas $F_i \in \mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}_{nxm}$ una matriz de asignación, con $i = 1, 2, ..., N^M$. El Máximo Bienestar se define como:*

$$MSW = \{F \in \mathcal{A} : F \succeq G, \forall G \in \mathcal{A}\} \tag{2.5}$$

2.0.1. Eficiencia y justicia

Una vez hallado las asignaciones que maximizan el Bienestar Social, nos corresponde determinar si dichas asignaciones elegidas son eficientes [2]. Para ello, se describirá de manera formal el Óptimo Pareto.

Definición 2.0.8. *(**Pareto Dominado**) Sean $F, G \in \mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}_{nxm}$ dos matrices de asignaciones. F es Pareto Dominado por G si se cumple:*

$$\forall i \in N, [U_F]_{ii} \leq [U_G]_{ii} \tag{2.6}$$

y al menos para un agente j, se cumple $[U_F]_{jj} < [U_G]_{jj}$, para algún $j \in N$

Ejemplo 2.0.9. *Continuando con el ejemplo anterior, tenemos:*

$$U_F = \begin{pmatrix} 25 & 15 & 10 \\ 20 & 25 & 5 \\ 8 & 12 & 30 \end{pmatrix} \quad y \quad U_G = \begin{pmatrix} 25 & 26 & 0 \\ 30 & 20 & 0 \\ 42 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

notemos que:

$[U_F]_{11} = [U_G]_{11} = 25$

$[U_F]_{22} = 25 > [U_G]_{22} = 22$

$[U_F]_{33} = 30 > [U_G]_{33} = 0$

Por lo tanto, podemos concluir que G es Pareto Dominada por F

Del capitulo anterior, sabemos que una asignación es Pareto Óptima, si no es Pareto Dominada por otra asignación, A continuación, definimos este concepto de manera formal desde el punto de vista matricial.

Definición 2.0.9. ***Óptima pareto*** *Sea* $F \in \mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}_{nxm}$*, entonces* F *es Óptima pareto* $"PO"$ *si, para cada* $F^{'} \in \mathcal{A}$*:*

$$[\exists i \in N, [U_{F'}]_{ii} > [U_F]_{ii}] \Rightarrow [\exists j \in N, [U_{F'}]_{jj} < [U_F]_{jj}] \tag{2.7}$$

Ejemplo 2.0.10. *Siguiendo con el ejemplo, tenemos que* $N = \{1, 2, 3\}$ *y* $M = \{1, 2, 3\}$ *son los conjunto de agentes y recursos con los que estamos trabajando. Por lo tanto,* $|N|^{|M|} = 3^3 = 27$ *asignaciones posibles. Por definición, para determinar si una matriz es óptima Pareto debemos comparar las 27 posibles matrices. Con fines demostrativos, consideremos la siguiente asignación:*

$$Z = (\{1, 2\}, \varnothing, \{3\})$$

Por, lo tanto su matriz de asignación es:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y su matriz de utilidad es:

$$U_H = \begin{pmatrix} 10 & 15 & 25 \\ 5 & 25 & 20 \\ 30 & 12 & 8 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$$

$$U_H = \begin{pmatrix} 25 & 0 & 25 \\ 30 & 0 & 20 \\ 42 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

luego notemos que:
$[U_H]_{11} = [U_G]_{11} = 25$
$[U_H]_{22} = 0 < [U_G]_{22} = 22$
$[U_H]_{33} = 8 > [U_G]_{33} = 0$

Por lo tanto, H *no es pareto Dominado de* G*. Ahora si la comparamos con* F*, se tiene que:*

$[U_H]_{11} = [U_F]_{11} = 25$
$[U_H]_{22} = 0 < [U_F]_{22} = 25$
$[U_H]_{33} = 8 < [U_F]_{33} = 30$

En este caso, H es Pareto Dominada por F. Así, concluimos que H no es Pareto Óptima.

Como vemos, en el caso de que nuestros conjuntos de recursos y agentes contengan n y m elementos, respectivamente, tendremos que las matrices de asignaciones posibles sera N^M, que dependiendo de la información del problema, puede ser complicado analizar todas estas posibilidades, por la dimensión de la matriz. Una probable mejora será demostrar que si una asignación maximiza el bienestar Social, entonces es Óptima Pareto [5].

Lema 2.0.2. *Toda asignación F que maximiza el bienestar social utilitario es óptima Pareto.*

Demostración Sean N y M dos conjuntos de agentes y recursos cualquiera. Sea $F \in \mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}_{nxm}(B)$ una matriz de asignación de M a N, mostraremos que F es Óptima Pareto.

Por el absurdo, supongamos que F no es Óptima Pareto, por lo tanto por definición, F es Pareto Dominada por alguna asignación $G \in \mathcal{A}$.
Es decir,

$$\forall i \in N, [U_F]_{ii} \leq [U_G]_{ii} \tag{2.8}$$

y al menos para un agente j, se cumple $[U_F]jj < [U_G]_{jj}$, para algún $j \in N$. Como la matriz de utilidad es positiva y aditiva, entonces si calculamos el Bienestar Social de las asignaciones F y G, tenemos:

$$SW_U(F) = traz(U_F) = \sum_{i \in N} [U_F]_{ii}$$

$$SW_U(G) = traz(U_G) = \sum_{i \in N} [U_G]_{ii}$$

y por (2.8) tenemos que:

$$\sum_{i \in N} [U_G]_{ii} \geq \sum_{i \in N} [U_F]_{ii}$$

Por lo tanto,

$$SW_U(G) \geq SW_U(F) \tag{2.9}$$

Pero, por hipótesis, sabemos que $SW_U(F)$ es una asignación que maximiza el bienestar Social Utilitario, es decir,

$$MSW = \{F \in \mathcal{A} : F \succeq G, \forall G \in \mathcal{A}\}$$

lo que contradice a (2.9), En consecuencia, podemos concluir que F es Óptima Pareto PO.

Ejemplo 2.0.11. *Dos trabajadores de una empresa de alimentos definida por el $N = \{Erika, Edith\} = \{1, 2\}$ desean conocer cual es la mejor asignación de un conjunto de recursos $M = \{1, 2\}$. De acuerdo, a sus preferencia se considera la siguiente matriz de valuación:*

$$V = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$$

Primero, determinemos el conjunto de las posibles asignaciones que se pueden realizar que son $2^2 = 4$.

$$A = \begin{pmatrix} F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \\ H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Luego, calculamos las matries de utilidad de cada asignación:

$$U_F = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 10 & 0 \end{pmatrix} \quad U_G = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$$

$$U_H = \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \quad U_I = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculando el bienestar Social Utilitario de cada asignación tenemos:

$$SW_U(F) = 10 + 0 = 10$$

$$SW_U(G) = 2 + 3 = 5$$

$$SW_U(H) = 0 + 10 = 10$$

$$SW_U(I) = 8 + 3 = 11$$

Con estos resultados vemos que:

$$SW_U(G) < SW_U(H) \leq SW_U(F) < SW_U(I)$$

$SW_U(I)$ *es una asignación que maximiza el bienestar Social Utilitario, es decir,*

$$MSW = \{I \in \mathcal{A} : I \succeq J, \forall J \in \mathcal{A}\}$$

Por lo tanto, I es PO y lo podemos comprobar demostrando que es la única asignación que no es pareto dominada por es resto de matrices de asignación. Por lo tanto,
$[U_G]_{11} = 2 < [U_I]_{11} = 8$
$[U_G]_{22} = [U_I]_{22} = 3$
Así, concluimos que I *no es Pareto dominada por* G
$[U_H]_{11} = 0 < [U_I]_{11} = 8$
$[U_H]_{22} = 10 > [U_I]_{22} = 3$
Así, I *no es Pareto Dominada por* H
$[U_F]_{11} = 10 > [U_I]_{11} = 8$
$[U_F]_{22} = 0 < [U_I]_{22} = 3$
Así, I *no es Pareto Dominada por* F *De esta manera, podemos ver que* I *no es Pareto Dominada de ninguna asignación, por lo tanto,* I *es PO.*

Observación 2.0.2. *El* ***Lema 2.0.2*** *también se cumple si consideramos el Bienestar Social de Nach* (MSW_N)*, es decir, que si una asignación dada es* MSW_N*, entonces es* PO*.*

Observación 2.0.3. *Si una asignación* F *es* PO *no podemos asegurar no se puede asegurar que la asignación maximiza el bienestar Social [9]*

Luego de clasificar y encontrar las asignaciones máximas y eficientes se busca establecer si son justas, en otras palabras, que cumpla con el criterio libre de envidia. Esto nos permite determinar que el agente recibe al menos un recurso tomando en cuenta sus preferencias.

Definición 2.0.10. ***Libre de Envidia*** *Sea $F \in \mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}_{nxm}(B)$ una matriz de asignación. F es Libre de Envidia EF si:*

$$\forall i, j \in N, [U_F]_{ii} \geq [U_F]_{ij} \tag{2.10}$$

es decir, que los elementos de la diagonal son los valores mayores de cada fila a la que corresponden.

Ejemplo 2.0.12. *Continuando con el ejemplo anterior, tenemos que:*

$$U_F = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 10 & 0 \end{pmatrix}$$

U_F no es libre de envidia pues $[U_F]_{22} = 0 < [U_F]_{21} = 10$

$$U_G = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$$

U_G no es libre de envidia pues $[U_G]_{11} = 2 < [U_G]_{12} = 8$ y $[U_G]_{22} = 3 < [U_G]_{21} = 7$

$$U_H = \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$

U_H no es libre de envidia pues $[U_H]_{11} = 0 < [U_H]_{12} = 10$

$$U_I = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$$

U_I no es libre de envidia pues $[U_I]_{22} = 3 < [U_F]_{21} = 7$

Ejemplo 2.0.13. *Ahora, consideremos la matriz de asignación U_F del* ***Ejemplo 2.0.6****:*

$$U_F = \begin{pmatrix} 25 & 15 & 10 \\ 20 & 25 & 5 \\ 8 & 12 & 30 \end{pmatrix}$$

Podemos que:

$$[U_F]_{11} = 25 > [U_F]_{12} > [U_F]_{13}$$

$$[U_F]_{22} = 25 > [U_F]_{21} > [U_F]_{23}$$

$$[U_F]_{33} = 30 > [U_F]_{31} > [U_F]_{32}$$

Por lo tanto, esta asignación U_F es EF.

Definición 2.0.11. *Sea $F \in \mathcal{A}$ una asignación libre de envidia en al menos un recurso ($EF1$) si se cumple que:*

$$\forall i, j \in N, \exists k \in M, [F]_{jk} = 1 \wedge [U_F]_{ii} > [U_F]_{ij} - [V]_{ik} \tag{2.11}$$

Ejemplo 2.0.14. *Considerando la matriz de valuación del*

Teorema 2.0.1. *Supongamos que los agentes tienes valuaciones aditivas sobre bienes indivisibles. Toda asignación que maximiza el Bienestar Social de Nach MSW_N es libre de envidia hasta un bien "$(EF1)$ y óptima de Pareto (PO) [5], [11].*

Demostración

Sea $F \in \mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}_{nxm}(B)$ una asignación que es MSW_N, mostraremos que F es PO y $EF1$

Caso 1. $SW_N(F) > 0$

- PD. F es PO

  Por Absurdo, Supongamos que F no es PO, por lo tanto existe otra asignación G tal que F es Pareto dominada por G, es decir que existe un $G \in \mathcal{A}$. Es decir,

  $$\forall i \in N, [U_F]_{ii} \leq [U_G]_{ii} \tag{2.12}$$

  y al menos para un agente j, se cumple $[U_F]jj < [U_G]_{jj}$, para algún $j \in N$. Como la matriz de utilidad es positiva y aditiva, entonces si calculamos el Bienestar Social de las asignaciones F y G, tenemos:

  $$SW_N(F) = \prod_{i \in N} [U_F]_{ii}$$

  $$SW_N(G) = \prod_{i \in N} [U_G]_{ii}$$

  y por la ecuación (2.12) se tiene:

  $$0 < \prod_{i \in N} [U_F]_{ii} < \prod_{i \in N} [U_G]_{ii}$$

$$0 < SW_N(F) < SW_N(G) \tag{2.13}$$

Por definición de MSW_N

$$MSW_N = \{F \in \mathcal{A} : F \succeq G, \forall G \in \mathcal{A}\} \tag{2.14}$$

lo cual contradice a la ecuación (2.13), por consiguiente, concluimos que F es PO.

- PD. F es $EF1$

  Supongamos, por absurdo, que F no es $EF1$, y que el agente i envidia al agente j incluso después de eliminar cualquier recurso de la asignación del agente j.

  Sea X de la matriz Fde recursos a los agentes, y definimos

$$g^{'} = argmin_{g \in X_j, \mu_i(g)>0}\{\mu_j(g)/\mu_i(g)\} \tag{2.15}$$

  Obsérvese que $g^{'}$ está bien definido porque el agente i que envidia al jugador j implica que el jugador i tiene un valor positivo para al menos un recurso en X_j .

  Sea Y la asignación obtenida desplazando $g^{'}$ del agente j al agente i en X, lo que implica que:

$$SW_N(Y) > SW_N(X)$$

  lo que da la contradicción, X es la asignación de F que maximiza el bienestar social de Nach.

  Ahora, si demostramos que $SW_N(Y) > SW_N(X) > 1$.

  La relación está bien definida porque asumimos que $SW_N(F) > 0$. Notemos que $\mu_k(Y_k) = \mu_k(X_k)$ para todo $k \in N\ i, j$

  $\mu_i(Y_i) = \mu_i(X_i) + \mu_i(g^{'})$ y $\mu_j(Y_j) = \mu_j(X_j) - \mu_j(g^{'})$

  Entonces,

$$\frac{SW_N(Y)}{SW_N(X)} > 1 \Leftrightarrow \left[1 - \frac{\mu_j(g^{'})}{\mu_j(X_j)}\right] * \left[1 - \frac{\mu_i(g^{'})}{\mu_i(X_i)}\right] > 1 \Leftrightarrow \frac{\mu_j(g^{'})}{\mu_i(g^{'})} * \left[\mu_i(X_i) + \mu_i(g^{'})\right] < \mu_j(X_j)$$

  luego, tenemos que:

$$\frac{\mu_j(g^{'})}{\mu_i(g^{'})} \leq \frac{\sum_{g \in X_j} \mu_j(g)}{\sum_{g \in X_j} \mu_i(g)} = \frac{\mu_j(X_j)}{\mu_i(X_j)} \tag{2.16}$$

Como el agente i envidia al agente j incluso después de eliminar $g^{'}$ de la asigancíon X del agente j, tenemos

$$\mu_i(X_i) + \mu_i(g^{'}) < \mu_i(X_j) \tag{2.17}$$

Si multiplicamos $(2.16) * (2.17)$ obtenemos: $SW_N(Y) > SW_N(X) > 1$

Caso 2. $SW_N(F) = 0$

Sea N el conjunto de agentes a los que la solución proporciona una utilidad positiva. Entonces, por la definición de la solución MSW_N, S es el mayor conjunto de agentes a los que se puede proporcionar utilidad positiva. Una asignación alternativa que no reduzca la utilidad de ningún agente (y que, por tanto, proporcione utilidad positiva a cada agente de S no puede proporcionar utilidad positiva a ningún agente de $N \setminus S$. Tampoco puede aumentar la utilidad de un agente en S porque eso aumentaría el producto de utilidades a los agentes en S, que F ya maximiza.

De la demostración del caso de $NSW_N(F) > 0$, ya sabemos que no hay envidia hasta un recurso entre los agentes en la asignación S porque F es MSW_N, es decir, maximiza el bienestar social de Nach y por tanto, $SW_N > 0$. Además, como los agentes en $N \setminus S$ no reciben ningún recurso, sólo necesitamos demostrar que el agente $i \in N \setminus S$ no envidia al agente $j \in S$ hasta un recurso.

Supongamos por absurdo, que sí lo hace, así tomando $g_j \in X_j$ tal que $\mu_j(g_j) > 0$. Tal recurso existe porque sabemos que $\mu_j(Fj) > 0$. Como el agente i envidia al agente j hasta un recurso, tenemos

$$\mu_i(X_j \ g_j) > \mu_i(F_i) = 0$$

Por lo tanto, existe un recurso $g_i \in Aj \ g_j$ tal que $\mu_i(g_i) > 0$. Sin embargo, en ese caso, mover el recurso g_i del agente j al agente i proveerá utilidad positiva al agente i mientras que retiene utilidad positiva al agente j, pues el agente j todavía tiene el recurso g_j con $\mu_j(g_j) > 0$. Esto contradice el hecho de que S es el mayor conjunto de agentes a los que se puede proporcionar utilidad positiva. Por lo tanto, la asignación $MSW_N(F)$ es tanto $EF1$ y PO. $\square$

Hasta el momento podemos observar que al utilizar el punto de vista matricial, el coste de introducir operaciones matriciales, nos demanda un uso de recursos importante a nivel computacional, por lo que se pretende disminuir los constes computaciones

2.0.2. El Máximo Bienestar Social Utilitario con matrices Transitorias

En esta sección se pretende determinar una asignación que maximice SW_U la función de bienestar social de utilidad, encontrando asignaciones transitorias asociadas a las matriz de valuación. misma que se construye seleccionando el recurso con maximiza la utilidad.

Para representar las preferencias de los agentes definiremos las matrices de transición.

Definición 2.0.12. ***(Matriz de Transición)*** *Sea $T \in \mathcal{M}_{nxm}(B)$ una matriz de asignación. T es Transitoria si para todo $i \in N$ y para todo $j \in M$ se tiene que*

$$[T]_{ij} = \begin{cases} 1 & si \quad [V]_{ij} \in max\{[V]_{kj} : 1 \leq k \leq n\} \\ 0 & otro\ caso \end{cases} \tag{2.18}$$

Es decir, si el agente i tiene valor de utilidad máxima al recurso j entonces $[T]_{ij} = 1$ y será igual a cero, caso contrario. En otras palabras, se puede interpretar como el gusto o la necesidad de cada recurso para cada agente.

Ejemplo 2.0.15. *Consideremos la siguiente matriz de valuación del* ***Ejemplo 2.0.4*** *que representa las preferencias de tres agentes sobre un conjunto de 3 recursos:*

$$V = \begin{pmatrix} 10 & 15 & 25 \\ 9 & 25 & 16 \\ 30 & 10 & 10 \end{pmatrix}$$

Construyendo la matriz de transición, a partir de la matriz de valuación, se tiene que:

$$[V]_{31} = 30 > [V]_{11} = 10 > [v]_{21} = 9$$

así, el agente 3 *maximiza el recurso* 1*, por lo tanto,* $[T]_{31} = 1$

$$[V]_{22} = 25 > [V]_{12} = 15 > [v]_{32} = 10$$

así, el agente 2 *maximiza el recurso* 2*, así,* $[T]_{22} = 1$

$$[V]_{13} = 25 > [V]_{23} = 16 > [v]_{33} = 10$$

así, el agente 3 *maximiza el recurso* 3*, por lo tanto,*$[T]_{33} = 1$*.*
Así, la matriz de transición nos queda:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2.0.16. *Supongamos la siguiente matriz de valuación de 3 agentes sobre 4 recursos:*

$$V = \begin{pmatrix} 10 & 40 & 15 & 30 \\ 20 & 40 & 12 & 30 \\ 5 & 40 & 50 & 25 \end{pmatrix}$$

Construyendo la matriz de transición, a partir de la matriz de valuación, se tiene que:

$$[V]_{21} = 20 > [V]_{11} = 10 > [v]_{31} = 5$$

así, el agente 1 *maximiza el recurso* 1*, por lo tanto,*$[T]_{11} = 1$*.*

$$[V]_{12} = [V]_{22} = [v]_{32} = 40$$

En este caso, todos los agentes maximizan el recurso 2*, así,* $[T]_{12} = [T]_{22} = [T]_{32} = 1$*.*

$$[V]_{33} = 50 > [V]_{33} = 15 > [v]_{13} = 12$$

así, el agente 3 *maximiza el recurso* 3*, por lo tanto,*$[T]_{33} = 1$*.*

$$[V]_{14} = [V]_{24} = 30 > [v]_{34} = 25$$

así, el agente 1 *y* 2 *maximizan el recurso* 4*, por lo tanto,*$[T]_{14} = [T]_{24} = 1$*.*

Finalmente, obtenemos la matriz de transición:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Observación 2.0.4. *La matriz de valuación definida es igual a la de transición siempre y cuando sea binarias, es decir, definida en B.*

Definición 2.0.13. ***Asignación transitoria***. *Sea T una matriz de transición y $F \in \mathcal{M}_{nxm}(B)$. F es una asignación transitoria si,*

$$\forall j \in M, \exists i \in N \ \ tal \ \ que \ ([F]_{ij} = 1 \Rightarrow [T]_{ij} = 1) \tag{2.19}$$

Ejemplo 2.0.17. *Consideremos la matriz T del ejercicio anterior:*

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

De la matriz podemos notar que existen 4 recursos y 3 agentes representados por los conjuntos $M = \{1, 2, 3, 4\}$, $N = \{1, 2, 3\}$, respectivamente.
Por definición de matriz de asignación, sabemos que para cada recurso $j \in M$, existe un solo agente al que se le asigna el recurso. Como vemos en la matriz T el recurso 2 es maximizado por todos los agentes, por lo que debemos construir una matriz de asignación por cada agente i, es decir 3 diferentes asignaciones. De igual manera, el recurso 4, el agente 1 y 2 maximizan la utilidad, por lo que se deben construir dos matrices, que representen cada asignación. Así, obtenemos las siguientes matrices:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Cada matriz es única, y cada recurso es asignado a un sólo agente por lo que están bien definidas.

Observación 2.0.5. *Puesto que la matriz de Transición se construye con el recurso que maximiza la utilidad, es decir T es MSW_U. De manera formal, el siguiente teorema se garantiza que cualquier matriz de asignación maximiza el bienestar social está en si y solo si es transitoria.*

Teorema 2.0.2. *Sea $F \in \mathcal{M}_{nxm}(B)$ una matriz de asignación. F es transitoria, si y solo si, maximiza el Bienestar Social Utilitario .*

Demostración

$(\Rightarrow)$ Sea $F \in \mathcal{M}_{nxm}(B) \subset \mathcal{A}$ una matriz de asignación.
Consideremos una asignación $G \in \mathcal{A}$. Supongamos que F es transitoria, mostraremos que F maximiza el Bienestar Social Utilitario, es decir:

$$SW_U(F) \geq SW_U(G)$$

para cualquier $G \in \mathcal{A}$

De la definición Bienestar Social Utilitario se tiene que

$$SW_U(F) = traz(U_F) = \sum_{i \in N} [U_F]_{ii}$$

Por lo tanto, se debe probar que, para cualquier $G \in \mathcal{A}$

$$traz(U_F) \geq traz(U_G)$$

Notemos que $U_F = V * F^T$, por lo tanto, podemos expresar la matriz de asignación en términos que la matriz de valuación, es decir:

$$traz(U_F) = \sum_{i \in N} [U_F]_{ii} = \sum_{k \in M} \sum_{i \in N} [V]_{ik} * [F^T]_{ki}$$

$$traz(U_G) = \sum_{i \in N} [U_G]_{ii} = \sum_{k \in M} \sum_{i \in N} [V]_{ik} * [G^T]_{ki}$$

Por inducción sobre $m = |M|$ probaremos que:

$$SW_U(F) = \sum_{k \in M} \sum_{i \in N} [V]_{ik} * [F^T]_{ki} \geq \sum_{k \in M} \sum_{i \in N} [V]_{ik} * [G^T]_{ki} = SW_U(G) \tag{2.20}$$

- Para $|M| = m = 1$ Construyendo la matriz de asignación, se tiene que existe un elemento $i_1 \in N$ tal que $[F]_{i_1 1} = 1$, además, para $j \neq i_1$, se tiene que $[F]_{j1} = 0$.
  Como F es una matriz transitoria, entonces $\forall j \in N$

  $$[V]_{i_1 1} \geq [V]_{j1} \tag{2.21}$$

  Ahora para G, notemos que hay un $i^{'} \in N$ tal que $[G]_{i^{'} 1} = 1$, y para todo $j \neq i^{'}$, se tiene que $[G]_{j1} = 0$. Así, de (2.21) se tiene

  $$[V]_{i_1 1}[F^T]_{1 i_1} \geq [V]_{j1}[G]_{1i'}$$

  y por lo tanto, se tiene que para F

  $$\sum_{j \in M, j \neq i_1} [V]_{j1} * [F^T]_{1j} = O$$

  y para G

  $$\sum_{j \in M, j \neq i'} [V]_{j1} * [G^T]_{1j} = O$$

  luego,

  $$\sum_{j \in N} [V]_{j1}[F^T]_{1j} \geq \sum_{j \in N} [V]_{j1}[G^T]_{1j}$$

  que es igual a (2.20), y por definición de Bienestar Social Utilitario, se tiene:

  $$SW_U(F) \geq SW_U(G)$$

- Supongamos que (2.20) por hipótesis inductiva, se cumple para $|M| = m-1$, mostraremos que se cumple cumple para $|M| = m$.
  Notemos que,

$$\begin{aligned}
traz(U_F) \quad &= \textstyle\sum_{k\in M}\sum_{i\in N}[V]_{ik}[F^T]_{ki} \\
&= \textstyle\sum_{i\in N}[V]_{i1}[F^T]_{1i} + \sum_{k=2}^{m}\sum_{i\in N}[V]_{ik}[F^T]_{ki} \\
&\geq \textstyle\sum_{i\in N}[V]_{i1}[F^T]_{1i} + \sum_{k=2}^{m}\sum_{i\in N}[V]_{ik}[G^T]_{ki} \\
&= [V]_{i_1 1}[F^T]_{1i_1} + \textstyle\sum_{k=2}^{m}\sum_{i\in N}[V]_{ik}[G^T]_{ki} \\
&\geq \textstyle\sum_{i\in N}[V]_{i_1' 1}[G^T]_{1i_1'} + \sum_{k=2}^{m}\sum_{i\in N}[V]_{ik}[G^T]_{ki} \\
&\geq \textstyle\sum_{i\in N}[V]_{i1}[G^T]_{1i} + \sum_{k=2}^{m}\sum_{i\in N}[V]_{ik}[G^T]_{ik} \\
&\geq \textstyle\sum_{k\in M}\sum_{i\in N}[V]_{ik}[G^T]_{ki} = traz(U_G)
\end{aligned}$$

  Por lo tanto, por (2.20), se cumple que para todo m

$$SW_U(F) \geq SW_U(G)$$

  Así, podemos concluir que F maximiza el Bienestar Social Utilitario.

$(\Leftarrow)$ Sea T una matriz de transición y F maximiza el Bienestar Social Utilitario, es decir, $F \in MSW_U$. Mostraremos que F es transitoria.

Por el absurdo, Supongamos que F no es transitoria. Por definición de matriz de transición, se sabe que:

$$\forall r \in M \quad \exists i_r \in N \ \ tal \ \ que \ [F]_{i_r r} = 1 \ \ y \ \ [T]_{i_r r=0}$$

En consecuencia, existe un agente j_r diferente a i_r que maximiza r, es decir, que existe un $j_r \in N$, con $j_r \neq i_r$ tal que $[T]_{j_r r} = 1$.
Ahora, debemos encontrar una matriz de asignación G tal que

$$traz(U_G) \geq traz(U_F)$$

Consideremos una matriz G tal que $G = F$ excepto en la columna r es decir, que la asignación del recurso r cambia y la definimos como:

$$[G]_{j_r r} = 1 \;\; y \;\; [G]_{jr} = 0 \qquad\qquad \forall j \neq j_r$$

Claramente, se puede notar que G es una matriz de asignación, pues cada recurso, pues cada columna posee un único 1. Así pues, como j_r maximiza r, se tiene que:

$$[V]_{j_r r} > [V]_{i_r r}$$

por lo tanto, multiplicando por la matriz de asignación

$$[V]_{j_r r}[G^T]_{j r_r} > [V]_{i_r r}[F^T]_{r i_r}$$

Por lo tanto,

$$\sum_{k \in M} \sum_{i \in MN} [V]_{j_r r}[G^T]_{j r_r} > \sum_{k \in M} \sum_{i \in MN} [V]_{i_r r}[F^T]_{r i_r}$$

por definición de bienestar Social Utilitario,

$$SW_U(G) > SW_U(F) \tag{2.22}$$

Pero, por hipótesis teníamos que $F \in MSW_U$, es decir, F es la matriz que maximiza le bienestar social Utilitario, lo que contradice a (2.22).
Por lo tanto, podemos concluir que F es transitoria.

Corolario 2.0.1. *Toda asignación transitoria, es óptima pareto*

Notemos que el resultado anterior no especifica si al buscar asignaciones eficientes reduce el conjunto de búsqueda para encontrar todas las asignaciones transitorias.

Ejemplo 2.0.18. *Consideremos la siguiente matriz de Valuación que establece las preferencias de cuatro agentes,* $N = \{1, 2, 3, 4\}$ *sobre un conjunto de recursos* $M = \{1, 2, 3, 4\}$

$$V = \begin{pmatrix} 40 & 40 & 40 & 40 \\ 50 & 20 & 50 & 40 \\ 50 & 70 & 0 & 40 \\ 50 & 30 & 40 & 40 \end{pmatrix}$$

En primer lugar, notemos que tenemos $|N|^{|M|} = 4^4 = 256$ *posibles matrices de asignación de recursos. Supongamos que todas las asignaciones transitorias son PO.*
Primero calculamos la matriz de transición de V

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Notemos que, para el recurso 1*, el agente* $2, 3, 4$ *maximizan la utilidad, ya que* $[T]_{21} = [T]_{31} = [T]_{41} = 1$*. Por definición de matriz de asignación, para crear las matrices de asignación cada recurso* j *solo debe ser asignado a un solo agente* i*. Por lo tanto, considerando este recurso, existen* 3 *posibles matrices de asignación.*

De igual manera, para el recurso 4*, todos los agentes maximizan la utilidad, es decir* $[T]_{14} = [T]_{24} = [T]_{34} = [T]_{44} = 1$ *Así, existen* 4 *posibles posibles matrices de asignación,*
En total, tomando en cuenta todos los recursos, tenemos que existen $3 * 1 * 1 * 4 = 12$ *posibles matrices de asignación. Consideremos,*

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esta asignación Pareto Óptima; sin embargo, no es libre de envidia ya que los agentes 1 *y* 4 *no reciben ningún recurso; mientras que el agente* 3 *recibe tres recursos y el agente* 2 *recibe* 1*.*

2.0.3. Asignaciones transitorias y libres de envidia hasta en un recurso (EF_1)

En esta sección proponemos otras condiciones para determinar buenas asignaciones que maximicen el bienestar social utilitario, de forma global y que localmente son libres de envidia hasta un recurso. para ello, definiremos a los agentes “oligarcas”, es decir, agentes a los cuales se les asignan la mayor parte de los recursos [12].

Definición 2.0.14. *(**Agente Oligarca**). Sea V una matriz de valoración y T la matriz de transición asociada. El agente $i \in N$ es oligárquico si existe $r \in M$ tal que $[T]_{ir} = 1$.*
El conjunto de todos los agentes oligarcas se denota por S y está definido como:

$$\left\{S = \quad i \in N : [T]_{ir} = 1, \;\; para \;\; algún \quad r \in M\right\} \tag{2.23}$$

Observación 2.0.6. *Notemos que si consideramos que los agentes poseen un presupuesto igual K, esto permite que todos los agentes posean las mismas condiciones para maximizar más recursos; así, todos los agentes pueden ser oligarcas.*

Ejemplo 2.0.19. *Consideremos la siguiente matriz de Valoración de 5 recursos a 5 agentes:*

$$V = \begin{pmatrix} 15 & 20 & 20 & 25 & 20 \\ 10 & 25 & 25 & 020 & 20 \\ 50 & 20 & 10 & 10 & 10 \\ 20 & 30 & 10 & 30 & 10 \\ 10 & 5 & 40 & 5 & 40 \end{pmatrix}$$

La matriz de transición asociada a V es:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Notemos que todos los agentes poseen el mismo presupuesto $K = 100$, pero las asignación solo les corresponden a los agentes 4 y 5, por lo tanto, $S = \{4, 5\}$

Definición 2.0.15. *(**Parcialmente libre de Envidia hasta en un recurso**. Sea $V \in \mathcal{M}_{nxm}$ y $F \in \mathcal{M}_{nxm}(B)$ una matriz de asignación asociada a una asignación X. Se dice que X es parcialmente libre de Envidia hasta en un recurso si:* $\forall i, j \in S, \exists r \in M$ *tal que,*

$$[F]_{jr} = 1 \wedge [U_F]_{ii} \geq [U_F]_{jr} - [V^*]_{ir} \tag{2.24}$$

donde S es el conjunto de agentes oligárquicos y V^* se define como

$$[V^*] = \begin{cases} [V]_{ir} & si \quad [V]_{ir} \in max[V]_{jr} : j \in N \\ 0 & \qquad otro \;\; caso \end{cases} \tag{2.25}$$

Teorema 2.0.3. *Existe una asignación $F \in \mathcal{M}_{nxm}(B) \subset \mathcal{A}$ que maximiza el bienestar Social Utilitario y es Libre de envidia hasta el un recurso*

Demostración

Sea $V \in \mathcal{M}_{nxm}$ una matriz de valuación asociada a las preferencia de un conjunto de $N = \{1, 2, ..., n\}$ agentes a un conjunto $M = \{1, 2, ..., m\}$ de recursos. Consideremos la siguiente matriz de valuación V^*, definida como la matriz tal que $\forall i \in M, \forall r \in M$,

$$[V^*] = \begin{cases} [V]_{ir} & si \quad [V]_{ir} \in max[V]_{jr} : j \in N \\ 0 & \qquad otro \;\; caso \end{cases}$$

Es decir, que V^* será igual a la matriz V, es las posiciones de la matriz donde el agente maximiza el recurso y cero, caso contrario.
Notemos que, las asignaciones transitorias en V y V^* son iguales. Además, por el **teorema 2.0.2**, ambas maximizan el Bienestar Social Utilitario.
Definamos $\mathcal{B}$ como el conjunto es el conjunto de todas las matrices transitorias y S el conjunto de todos los agentes oligarcas.
Usando V, clasificamos a $\mathcal{B}$ mediante $\succeq_N$, restringido a los agentes en S. Como $\mathcal{B}$ es finito, existe una matriz de asignación de G en $\mathcal{B}$ que maximiza el Bienestar Social de Nach, restringido a S.
Por el **teorema 2.0.1**, G es $EF1$ restringida a S; así se tiene que es localmente libre, por la definición. Así, podemos concluir que G maximiza el bienestar social de la utilidad y es parcialmente justo .

Capítulo 3

Conclusiones y recomendaciones

3.1. Conclusiones y recomendaciones

El objetivo del trabajo es desarrollar una base teórica autocontenida desde un enfoque matricial del problema de asignación de recursos no divisibles que maximicen el Bienestar Social Utilitario bajo propiedades de eficiencia y justicia, considerando funciones de utilidad aditivas. Para ello, partimos desde las definiciones básicas de la teoría de conjuntos que contribuya en la construcción del problema de forma general considerando conjuntos finitos de agentes, recursos y asignaciones. Debido a que las preferencias es un concepto abstracto que depende mucho de los gustos o necesidades de los individuos, las funciones de utilidad nos permite calcular y clasificarlas de acuerdo al grado de satisfacción utilizando los conceptos de Bienestar Social y Justicia. Adicionalmente, puesto que las preferencias afectan tanto el bienestar individual y colectivo; la aplicación de la teoría del bienestar y el Óptimo de Pareto junto al concepto de libre de envidia hasta en un bien, determina un beneficio al momento de asignar los recursos de forma eficiente.

A partir de la teoría matricial, desarrollada en el capítulo 2, se analiza la posibilidad de proveer al problema de asignación las siguientes ventajas:

- La matriz de Agente - Recurso nos permite identificar de forma ordenada la información principal del problema y la cantidad de información con la que se va a trabajar.

- Las matriz binaria de asignación, establece una visión más sencilla devque recursos le corresponde a cada agente. Por otro lado, Al utilizar matrices de valuación y utilidades, nos permiten usar las propiedades de las matrices para calcular de forma más eficiente El Bienestar Social y la Justicia.

- Considerar una posible implementación computacional del problema de asignación de recursos no divisibles. En programación, es muy frecuentemente, la implementación de matrices, especialmente, la multiplicación. Sin embargo, crear una matriz que produzca resultados computacionales útiles puede ser difícil, ya que mientras más grande sea el problema a tratar, más tiempo le llevará a la computadora en determinar, la asignación óptima que cumpla con los criterios de criterios de eficiencia y justicia (libre de envidia) en las asignaciones.

- Las matrices transitorias priorizan las mayores utilidades y con ello determinan la asignación que maximicen el bienestar Social de Nach. Es así que se definen los agentes oligarcas que son aquellos que abarcan la mayoría de los recursos y realizando una relajación de la justicia se determina una asignación parcialmente libre de envidia hasta en un bien.

Un aplicación particular es el problema de asignación de recursos desde el punto de vista de la investigación Operativa. El problema de asignación de recursos, es un caso particular del problema de transporte, que se basa en determinar una solución factible, que identifique como realizar asignación obteniendo un costo mínimo. El Método Húngaro, es un algoritmo diseñado para resolver este problema, bajo cierto condiciones encuentra la asignación óptima, pero sin considerar recursos indivisibles ni preferencias[10].

Se recomienda para una futuro avance, determinar las propiedades que permita identificar una asignación Óptima pareto que asegure una asignación que maximice el bienestar Social.

Referencias bibliográficas

[1] Péter Biró and Jens Gudmundsson. Complexity of finding pareto-efficient allocations of highest welfare. *European Journal of Operational Research*, 291(2):614–628, 2021.

[2] Otilio Reyes Blanco and Oslund Rains Franklin Sam. Teoría del bienestar y el óptimo de pareto como problemas microeconómicos. *REICE: Revista Electrónica de Investigación en Ciencias Económicas*, 2(3):217–234, 2014.

[3] Simon Board. Preferences and utility. *UCLA, Oct*, 2009.

[4] Franklin Camacho, Cristopher Zhunio, Rigoberto Fonseca, and Zenaida Castillo. Asignación de recursos con eficiencia y justicia débil en el bienestar social utilitario. *Revista Ibérica de Sistemas e Tecnologias de Informação*, (E32):583–595, 2020.

[5] Ioannis Caragiannis, David Kurokawa, Hervé Moulin, Ariel D Procaccia, Nisarg Shah, and Junxing Wang. The unreasonable fairness of maximum nash welfare. *ACM Transactions on Economics and Computation (TEAC)*, 7(3):1–32, 2019.

[6] Ulle Endriss. Lecture notes on fair division. *arXiv preprint arXiv:1806.04234*, 2018.

[7] Peter C Fishburn. Utility theory. *Management science*, 14(5):335–378, 1968.

[8] José Ibarra. Asignación de recursos, programación lineal y teoría económica. 1967.

[9] Bart de Keijzer, Sylvain Bouveret, Tomas Klos, and Yingqian Zhang. On the complexity of efficiency and envy-freeness in fair division of indivisible goods with additive preferences. In *International Conference on Algorithmic Decision Theory*, pages 98–110. Springer, 2009.

[10] Harold W Kuhn. The hungarian method for the assignment problem. *Naval research logistics quarterly*, 2(1-2):83–97, 1955.

[11] Aniket Murhekar and Jugal Garg. On fair and efficient allocations of indivisible goods. In *Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence*, volume 35, pages 5595–5602, 2021.

[12] Zhunio Ochoa and Cristopher Julián. Resource allocation and social welfare. B.S. thesis, Universidad de Investigación de Tecnología Experimental Yachay, 2020.

[13] Benjamin Plaut and Tim Roughgarden. Almost envy-freeness with general valuations. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 34(2):1039–1068, 2020.

[14] Alexander Rubchinsky. Fair division with divisible and indivisible items. *arXiv preprint arXiv:1607.02423*, 2016.

[15] John Von Neumann and Oskar Morgenstern. Theory of games and economic behavior, 2nd rev. 1947.