ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS

PROBLEMAS NO LINEALES DE TIPO AMBROSETTI-PRODI

TÉCNICAS DE MINIMAX PARA UN PROBLEMA DE TIPO AMBROSETTI-PRODI CON CONDICIONES DE BORDE DIRICHLET HOMOGÉNEAS Y NO LINEALIDADES CON PESOS INDEFINIDOS

TRABAJO DE INTEGRACIÓN CURRICULAR PRESENTADO COMO REQUISITO PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE MATEMÁTICO

ANDRÉS FRANCISCO TORRES HARO

andrés.torres@epn.edu.ec

DIRECTOR: MARCO VINICIO CALAHORRANO RECALDE PH.D.

marco.calahorrano@epn.edu.ec

DMQ, FEBRERO 2023

CERTIFICACIONES

Yo, ANDRÉS FRANCISCO TORRES HARO, declaro que el trabajo de integración curricular aquí descrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y, que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

Andres Torres

ANDRÉS FRANCISCO TORRES HARO

Certifico que el presente trabajo de integración curricular fue desarrollado por ANDRÉS FRANCISCO TORRES HARO, bajo mi supervisión.

MARCO VINICIO CALAHORRANO RECALDE PH.D.

DIRECTOR

DECLARACIÓN DE AUTORÍA

A través de la presente declaración, afirmamos que el trabajo de integración curricular aquí descrito, así como los productos resultantes del mismo, son públicos y estarán a disposición de la comunidad a través del repositorio institucional de la Escuela Politécnica Nacional; sin embargo, la titularidad de los derechos patrimoniales nos corresponde a los autores que hemos contribuido en el desarrollo del presente trabajo; observando para el efecto las disposiciones establecidas por el órgano competente en propiedad intelectual, la normativa interna y demás normas.

ANDRÉS FRANCISCO TORRES HARO

MARCO VINICIO CALAHORRANO RECALDE PH.D.

DEDICATORIA

A todas las personas que me acompañaron a lo largo de esta sucesión de eventos que es mi vida, y en especial a las que directa o indirectamente me ayudaron a converger a este momento.

A.T.

RESUMEN

En este trabajo integramos los conocimientos adquiridos a lo largo de la carrera de Matemática, en especial los referentes a ecuaciones diferenciales parciales, análisis funcional, y sobre todo; la capacidad de investigar y resolver un problema nuevo partiendo de las bases anteriormente mencionadas. En particular en este trabajo de integración curricular buscamos solución a un problema de análisis no lineal (ecuación semilineal elíptica; la cual es una generalización no lineal de una ecuación diferencial parcial elíptica lineal) de tipo Ambrosetti-Prodi con condiciones de borde Dirichlet homogéneas y no linealidades con pesos indefinidos. A lo largo del trabajo explicaremos como hallamos las soluciones a nuestro problema y ampliaremos la información sobre los métodos variacionales usados para el hallazgo de las soluciones, que fueron:

1. Método directo del cálculo de variaciones.

2. Método Minimax

Palabras clave: análisis no lineal, Ambrosetti-Prodi, métodos variacionales, pesos inefinidos.

ABSTRACT

In this work we integrate the knowledge acquired throughout the Mathematics career, especially those referring to partial differential equations, functional analysis, and above all; the ability to investigate and solve a new problem starting from the aforementioned bases. In particular, in this work we seek a solution to a nonlinear analysis problem (elliptic semilinear equation, which is a nonlinear generalization of a linear elliptic partial differential equation) of the Ambrosetti-Prodi type with homogeneous Dirichlet boundary conditions and not linearities with undefined weights. Throughout the work we will explain how we found the solutions to our problem and we will expand the information on the variational methods used to find the solutions, which were:

1. Direct methos of the Calculus of variations.

2. Minimax method.

Keywords: nonlinear analysis, Ambrosetti-Prodi, variational methods, undefined weights.

Índice general

Índice de figuras

Capítulo 1

Descripción del componente desarrollado

En el siguiente trabajo intentamos dar los condicionamientos necesarios para que la siguiente ecuación diferencial parcial con condiciones de borde Dirichlet homogénea, con una función de peso $W(x)$ que cambia de signo, una función $q(x)$ diferenciable que satisface $q \geq 0$ casi todo punto (c.t.p) en Ω y con la parte no lineal $f(u)$ que cumple con condiciones tipo Ambrosetti-Prodi, tenga solución.

$$(*) \begin{cases} -\Delta u + q(x)u = W(x)f(u) + \lambda u + h(x) & en\ \Omega \\ u = 0 & en\ \partial\Omega \end{cases}$$

1.1. Objetivo general

Estudiar los métodos variacionales para encontrar al menos una solución distinta de cero al problema (*) enunciado anteriormente.

1.2. Objetivos específicos

1. Aplicar el método directo al problema (*) y encontrar al menos una solución distinta de cero.

2. Aplicar el método minimax al problema (*) y encontrar al menos una

solución positiva.

3. Presentar los avances y limitaciones encontradas con la aplicación del método seleccionado previamente.

1.3. Alcance

En este trabajo nos planteamos analizar y entender los métodos variacionales que se pueden aplicar al problema (*) establecido, para así poder estudiar el mismo mediante las técnicas seleccionadas de tal modo que se pueda hallar al menos una solución del problema (*), usando la mejor técnica para cada caso analizado. Los casos analizados son dos y dependen principalmente de la relación entre λ y el primer valor propio λ_1.

- **Caso 1**$(\lambda < \lambda_1)$ Para este caso usamos el método directo de cálculo de variaciones.
- **Caso 2**$(\lambda > \lambda_1)$ Para este otro caso usamos el método minimax.

1.4. Marco teórico

Las ecuaciones elípticas semilineales son la primera generalización no lineal de las ecuaciones diferenciales parciales elípticas lineales, por tanto el problema a resolver, es un problema de análisis no lineal.
Dado que este problema es relativamente nuevo en el mundo de la matemática, hemos aprovechado los conocimientos de Tarantello, Ambrosetti, De Figueiredo, Prodi, Badiale, Serra, y sobre todo del Dr. Marco Calahorrano para poder entender como se le da solución a este tipo de problemas.
Hemos usado principalmente [3] para la parte teórica, [5] [6] para el entendimiento de los problemas tipo Ambrosetti-Prodi, y [1],[4] para la parte del trabajo con pesos con cambio de signo, además de [9] [8] [10] [2], como bibliografía complementaria.

1.4.1. Nociones preliminares

En esta sección mostramos todas las definiciones, proposiciones y teoremas que se necesitan para tener un buen contexto del problema y la forma de solucionar el mismo.

Empezaremos detallando los espacios funcionales que se usarán a lo largo del trabajo, además de otras definiciones, teoremas y proposiciones relacionadas con estos espacios, con las que trabajaremos mas adelante.

Definición 1.4.1.1 (Espacios de funciones). ([3], pg:5)

- $C^k(\Omega)$, $k = 1, 2{,}3\ldots$ denota al conjunto de las funciones $u : \Omega \to \mathbb{R}$ que son k veces derivables, y su k-ésima derivada es continua.
- $C^\infty(\Omega)$ denota al conjunto de las funciones $u : \Omega \to \mathbb{R}$ que son infinitamente diferenciables en Ω.
- $C_0^\infty(\Omega)$ es un subespacio de $C^\infty(\Omega)$ y consta de todas las funciones a soporte compacto en Ω.
- $L^p(\Omega)$ denota al conjunto de todas las funciones $u : \Omega \to \mathbb{R}$ que son Lebesgue medibles, tales que

$$\int_\Omega |u|^p dt < +\infty.$$

- $L^\infty(\Omega)$ es el espacio de las funciones medibles $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $\sup_{x\in\Omega} |u(x)| < +\infty$
- $H^1(\Omega)$ es el espacio de Sobolev definido por

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \;\middle|\; \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), i = 1, \ldots, N \right\}$$

Si dotamos a $H^1(\Omega)$ con el producto escalar dado por

$$(u|v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_\Omega uv dx$$

se tiene que $H^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert. Además notemos que la norma correspondiente es

$$|u| = \sqrt{(u|u)} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega u^2\right)^{1/2}$$

- $H_0^1(\Omega)$ es la clausura de C_0^∞ en $H^1(\Omega)$, por tanto la norma de $H_0^1(\Omega)$ es inducida por la de $H^1(\Omega)$.

Definición 1.4.1.2 (Inmersión). ([3], pg:7) Un espacio de Banach X esta inmerso en un espacio de Banach Y ($X \hookrightarrow Y$) si

1. $X \subseteq Y$
2. La inyección canónica $j : X \to Y$ es un operador lineal y continuo. La inmersión es compacta si es que el operador j es un operador compacto.

Teorema 1.4.1.1 (Inmersión de Rellich). *([3], pg:7) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^N$, con $N \geq 3$. Entonces*

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \text{ para cada } q \in \left[1, \frac{2N}{N-2}\right) \text{ es compacta.}$$

Nota 1.4.1.1. Se conoce como exponente crítico de Sobolev al valor $2^* := \frac{2N}{N-2}$ con $N \geq 3$

Teorema 1.4.1.2 (Convergencia dominada de Lebesgue). *([3], pg:9) Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto y $\{u_k\}_k \subset L^1(\Omega)$ una sucesión tal que:*

1. *$u_k(x) \to u(x)$ c.t.p $\in \Omega$ cuando $k \to \infty$*
2. *Existe $v \in L^1(\Omega)$ tal que para toda k,$|u_k(x)| \leq v(x)$ c.t.p. $\in \Omega$*

Entonces $u \in L^1(\Omega)$ y $u_k \to u$ con la norma $L^1(\Omega)$ es decir $\int_\Omega |u_k - u| dx \to 0$

Teorema 1.4.1.3 (Inverso de la convergencia dominada de Lebesgue). *([3], pg:10) Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto y $\{u_k\}_k \subset L^p(\Omega), p \in [1, +\infty]$, una sucesión tal que $u_k \to u$ en $L^p(\Omega)$ cuando $k \to \infty$. Entonces existe un subsucesión $\{u_{k_j}\}_j$ y una función $v \in L^p(\Omega)$ tal que*

1. $u_{k_j} \to u(x)$ *c.t.p. en* Ω *cuando* $j \to \infty$

2. *para todo* j,$|u_{k_j}(x)| \leq v(x)$ *c.t.p. en* Ω.

Teorema 1.4.1.4 (Desigualdad de Poincaré). *([3], pg:10) Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *abierto y acotado. Entonces existe una constante* $C > 0$*, que depende solamente de* Ω*, tal que*

$$\int_\Omega u^2 dx \leq C \int_\Omega |\nabla u|^2 \ \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

Nota 1.4.1.2. ([3], pg:10) Gracias a la desigualdad anterior podemos asegurar que $(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx)^{1/2}$ es una norma en $H_0^1(\Omega)$ equivalente a la norma usual.

Ahora enunciaremos las definiciones, teoremas y proposiciones necesarios para encontrar al menos una solución al problema (*) cuando $\lambda < \lambda_1$.

1.4.2. Método directo del cálculo de variaciones

Definición 1.4.2.1. (Valor propio)([3], pg:32) Decimos que $\lambda \in \mathbb{R}$ es un valor propio del operador $-\Delta q(x)$ bajo las condiciones de borde Dirichlet, si existe $\varphi \in H_0^1(\Omega) \setminus 0$ tal que

$$\begin{cases} -\Delta u + q(x)\varphi = \lambda\varphi & en\ \Omega \\ u = 0 & en\ \partial\Omega \end{cases}$$

Teorema 1.4.2.1. *([3], pg:33)* ***(Caracterización variacional de el primer valor propio)*** *Sean* Ω *un subconjunto de* $\mathbb{R}^n$ *abierto y acotado, y* $q \in L^\infty$*. Definimos un funcional* $Q : H_0^1(\Omega) \setminus \{0\} \to \Omega$ *tal que:*

$$Q(u) = \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega q(x)u^2 dx}{\int_\Omega u^2 dx}$$

Entonces:

1. $\min_{u \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} Q(u) = \lambda_1$

2. *$Q(u) = \lambda_1$ si y solo si u es una solución (débil) de:*

$$\begin{cases} -\Delta u + q(x)u = \lambda_1 u & en\ \Omega \\ u = 0 & en\ \partial\Omega \end{cases}$$

3. *Toda solución distinta de 0, tiene el mismo signo en Ω*

4. *El conjunto de soluciones tiene dimensión 1, es decir λ_1 es simple.*

Nota 1.4.2.1. ([3], pg:32) Cuando $\lambda_1(-\Delta+q) > 0$ (esto se verifica si $q(x) \geq 0$ c.t.p. en Ω, y por el teorema 1.4.2.1) se sigue que el siguiente producto escalar sobre $H_0^1(\Omega)$

$$(u|v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \; dx + \int_\Omega q(x)uv \; dx$$

Genera la siguiente norma, que es equivalente a la usual y con la que trabajaremos en adelante.

$$\|u\| = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega q(x)u^2 dx \right)^{1/2}$$

Notación 1.4.2.1. Notamos al espacio $\mathcal{H}^1(\Omega)$ como el espacio$H^1(\Omega)$ de la definición 1.4.1.1, salvo que con la norma definida en la nota 1.4.2.1.

Definición 1.4.2.2 (Punto crítico). ([3], pg:15) Sea X un espacio de Banach, $U \subseteq X$ un conjunto abierto, además supongamos que $I : U \to \mathbb{R}$ es diferenciable. Un punto crítico de I es un punto $u \in U$ tal que

$$I'(u) = 0$$

Notación 1.4.2.2. A partir de ahora usaremos el funcional energético asociado al problema (*), que lo notamos como el operador $J : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, tal que:

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega q(x)u^2 dx - \int_\Omega W(x)F(u)dx - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega u^2 dx - \int_\Omega h(x)udx \tag{1.1}$$

Cabe resaltar que la notación anterior la demostraremos mas adelante, junto con la demostración de que la derivada del funcional J es de la siguiente forma

$$J'(u)v = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_\Omega q(x)uv dx - \int_\Omega W(x)f(u)v dx - \lambda \int_\Omega uv dx - \int_\Omega h(x)v dx \tag{1.2}$$

Nota 1.4.2.2. Gracias a la nota 1.4.2.1 podemos notar al funcional J de la siguiente forma:

$$J(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_\Omega W(x)F(u)dx - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega u^2 dx - \int_\Omega h(x)u dx$$

Definición 1.4.2.3 (solución débil). La solución débil del problema (*), es una función $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_\Omega q(x)uv dx = \int_\Omega W(x)f(u)v dx + \lambda \int_\Omega uv dx + \int_\Omega h(x)v dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Nota 1.4.2.3. Gracias a la definición anterior 1.4.2.3 y lo enunciado previamente en la definición 1.4.2.2 y en la notación 1.4.2.2, podemos ver claramente que u es una solución débil del problema (*) si y solo si u es un punto crítico del funcional J.

Definición 1.4.2.4 (Caracterización de convergencia débil). ([3], pg:10) Sea X un espacio de Banach, con su dual X' escribiremos $u_k \rightharpoonup u$ si u_k converge débilmente a u, es decir en la topología débil de X, lo que significa que

$$f(u_k) \to f(u) \quad \text{cuando} \quad k \to \infty \; \forall f \in X'$$

Para lograr probar que u es un punto crítico, haremos uso de una variación del teorema de Weierstrass; a continuación enunciamos el teorema y todo lo necesario para poder aplicar el mismo.

Definición 1.4.2.5 (Operador débilmente semicontinuo inferiormente (d.s.c.i.)). ([3], pg:26) Un funcional $I : X \to \mathbb{R}$ sobre un espacio de Banach X reflexivo, se dice d.s.c.i. si para toda sucesión $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ que converge débilmente a $u \in X$,($u_k \rightharpoonup u$), se tiene que

$$I(u) \leq \liminf_{k\to\infty} I(u_k)$$

Lema 1.4.2.1. *En un espacio de Banach X, la norma es un funcional d.s.c.i.*

Definición 1.4.2.6 (Coercividad). ([3], pg:27) Un funcional $I : X \to \mathbb{R}$ sobre un espacio de Banach X se dice coercivo si, para toda sucesión $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset X$

$$\|u_k\| \to +\infty \quad \text{implica} \quad I(u_k) \to +\infty$$

Teorema 1.4.2.2 (Versión del teorema de Weierstrass). *([3], pg:27) Sea X un espacio de Banach reflexivo y sea $I : X \to \mathbb{R}$ d.s.c.i. y coercivo. Entonces I tiene un mínimo global*

A continuación enunciamos las definiciones, teoremas y proposiciones necesarios para estudiar el problema (*) para el caso $\lambda > \lambda_1$, de tal forma que podamos asegurar que (*) tiene al menos dos soluciones positivas.

1.4.3. Método Minimax

Para este método nos basamos en la resolución del problema Alama-Tarantello, que enunciamos a continuación ([1], pg:439)

$$(*_{AT_\lambda}) \begin{cases} -\Delta u = W(x)f(u) + \lambda u & \textit{en } \Omega \\ u > 0 & \textit{en } \Omega \\ u = 0 & \textit{en } \partial\Omega \end{cases}$$

Donde $W(x) \in C(\overline{\Omega})$ cambia de signo en Ω y f es una función no lineal con crecimiento super cuadrático en infinito y cero. Además $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es abierto con frontera suave.

De esta forma podemos afirmar que el problema $(*_{AT_\lambda})$ cumple el siguiente teorema.

Teorema 1.4.3.1 (Teorema Alama-Tarantello). *([1], theorem 1.6 pg:449) Asumamos que $f \in C^1(\mathbb{R})$ satisface las siguientes condiciones*

(i)	$\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{f(u)}{\vert u\vert^{q-2}u}=a>0$	$2<q<\dfrac{2N}{N-2}, N\geq 3$
(ii)	$\lim\limits_{\vert u\vert\to\infty}\dfrac{f(u)}{\vert u\vert^{p-2}u}=1$	$2<p<\dfrac{2N}{N-2}, N\geq 3$
(iii)	$\vert f(u)u-pF(u)\vert\leq C_1\vert u\vert^2+C_2$	$C_1, C_2>0$
(iv)	$\vert f'(u)\vert\leq C_3\vert u\vert^{p-2}+C_4$	$C_3, C_4>0$

Si además W cambia de signo que cumple

(v) $$\int_\Omega W(x)e_1^q<0 \qquad ; e_1 \text{ la primera función propia.}$$

Entonces existe $\Lambda>\lambda_1$ y se tiene lo siguiente:

(a) Para cada $\lambda\in(\lambda_1,\Lambda)$, $(*_{AT_\lambda})$ admite al menos dos soluciones positivas.

(b) Para $\lambda=\lambda_1$ y $\lambda=\Lambda$ el problema $*_{AT_\lambda}$ admite al menos una solución.

(c) para $\lambda>\Lambda$ el problema $(*_{AT_\lambda})$ no admite soluciones positivas.

Del teorema anterior nos interesan los casos $\lambda>\lambda_1$ y $\lambda=\Lambda$, pues para la demostración de los mismos se hace uso de los siguientes resultados, en donde destaca el teorema de "paso de montaña"de Ambrosetti-Rabinowitz.

Lema 1.4.3.1. *([1], lemma: 2.2, pg: 450) Existe $\overline{\lambda}>\lambda_1$ tal que el problema $(*_{AT_\lambda})$ no admite una solución positiva para cualquier $\lambda\geq\overline{\lambda}$*

Nota 1.4.3.1. Gracias al lema 1.4.3.1 tiene sentido definir Λ de la siguiente manera.

$$\Lambda=sup\{\lambda\geq\lambda_1:\ (*_{AT_\lambda})\text{ admite una solución positiva}\} \tag{1.3}$$

Lema 1.4.3.2. *([1], lemma: 2.6, pg: 453) Supongamos $\lambda_0\in(\lambda_1,\Lambda)$. Sea*

$$u_*\equiv\inf_{\lambda>\lambda_0}u_\lambda>0$$

Entonces u_* *es una solución para el problema* $(*_{AT_{\lambda_0}})$ *y se satisface que* $(I''_{\lambda_0}(u_*)\varphi, \varphi) \geq 0$ *para todo* $\varphi \in H_0^1(\Omega)$

Nota 1.4.3.2. El operador I del lema anterior, corresponde al funcional energético del problema $(*_{AT_\lambda})$

Definición 1.4.3.1. ([1], pg: 441) Definimos los siguientes conjuntos:

$$\Omega^+ = \{x \in \Omega : W(x) > 0\}$$
$$\Omega^- = \{x \in \Omega : W(x) < 0\}$$
$$\Omega^0 = \Omega \setminus \overline{(\Omega^+ \cup \Omega^-)}$$

Definición 1.4.3.2. ([1], pg: 448) Definimos por $\sigma(\Omega^0)$ a la colección de valores propios del $-\Delta$ en $H_0^1(\Omega^0)$ (En caso de que $\Omega^0 = \emptyset$ diremos que $\sigma(\Omega^0) = \emptyset$ también)

Definición 1.4.3.3 (Sucesión Palais-Smale). ([3], pg:147) Sea X un espacio de Banach y sea $J : X \to \mathbb{R}$ un funcional diferenciable. A la sucesión $\{u_k\}_k \subseteq X$ tal que

$$\{J(u_k)\}_k \text{ es acotado (en } \mathbb{R}) \text{ y}$$

$$J'(u_k) \to 0 \text{ (en } X') \text{ cuando } k \to \infty$$

Es llamada una sucesión Palais-Smale $(P - S)$ para J
Sea $c \in \mathbb{R}$. Si

$$J(u_k) \to c \text{ (en } \mathbb{R}) \text{ y}$$

$$J'(u_k) \to 0 \text{ (en } X') \text{ cuando } k \to \infty$$

Entonces $\{u_k\}_k$ es llamada una sucesión Palais-Smale para J a nivel c. En este caso c es llamado el nivel Palais-Smale para J

Definición 1.4.3.4 (Condiciones Palais-Smale). ([3], pg:148) Sea X un espacio de Banach y sea $J : X \to \mathbb{R}$ un funcional diferenciable. Decimos que J satisface las condiciones Palais-Smale (J satisface las condiciones PS) si cada sucesión $(P - S)$ de J tiene una subsucesión convergente en (X).
Decimos que J satisface las condiciones PS al nivel $c \in \mathbb{R}$ (J satisface $(PS)_c$ si cada sucesión $(P - S)$ de J tiene una subsucesión en (X) si cada sucesión $(P - S)$ al nivel c tiene una subsucesión convergente en (X).

Lema 1.4.3.3. *([1], lemma: 1.5, pg: 448) Supongamos $\lambda \notin \sigma(\Omega^0)$, y f satisface las condiciones **ii** y **iv**. Entonces I_λ satisface las condiciones (PS) si alguna de las siguientes condiciones se tiene:*

a) $\overline{\Omega^+} \cap \overline{\Omega^-} = \emptyset$

b) Existen las constantes C_1, C_2 y $2 < p < 2^*$ tal que para todo $u \in \mathbb{R}$

$$|f(u)u - pF(u)| \leq C_1|u|^2 + C_2$$

Nota 1.4.3.3. La condición $b)$ del lema anterior es la condición **iii** del teorema 1.4.3.1.

Definición 1.4.3.5. ([3], pg:150) Sea H un espacio de Hilbert y sea $J : H \to \mathbb{R}$ un funcional. Diremos que $J \in C^{1,1}(H)$ si $J \in C^1$ y su gradiente $\nabla J : H \to H$ es localmente Lipschitz continua en H.

Teorema 1.4.3.2 (Paso de montaña). *([3], pg:155) Sea H un espacio de Hilbert, y sea $J \in C^{1,1}$ que cumple $J(0) = 0$. Asumamos que existen los números positivos ρ y α tal que*

1. $J(u) \geq \alpha$ *si* $\|u\| = \rho$

2. *existe* $v \in H$ *tal que* $\|v\| > \rho$ *y* $J(v) < \alpha$

Entonces existe una sucesión $P-S$ para J para el nivel $c \geq \alpha$. Si J satisface las condiciones $(PS)_c$ entonces existe un punto crítico en el nivel c

Nota 1.4.3.4. Vale la pena destacar que para el caso $\lambda > \Lambda$ la demostración se sigue del lema 1.4.3.1, mientras que para el caso $\lambda = \lambda_1$; [1] hace uso del método de cálculo directo de variaciones, aunque con un nivel de dificultad mayor al aplicado por nosotros en el caso $\lambda < \lambda_1$.

Finalmente detallaremos todo lo relacionado con los condicionamientos de tipo Ambrosetti-Prodi.

1.4.4. Condiciones tipo Ambrosetti-Prodi

En esta sección daremos un breve resumen de la historia de las condiciones Ambrosetti-Prodi (A-P), basándonos en la gran explicación brindada en [9]; preferimos no ahondar mucho en la historia pues nuestro interés recae en la interpretación 'geométrica' de las condiciones A-P dada por de Figueiredo, en el artículo [6], entre otros.

Como nos indica [9] las condiciones Ambrosetti-Prodi (AP), se introducen por los matemáticos mencionados Antonio Ambrosetti y Giovanni Prodi en el año 1972, planteando las condiciones para resolver el siguiente problema:

$$(*_{AP}) \begin{cases} -\Delta u = f(x,u) + g(x) & en\ \Omega \\ u = 0 & en\ \partial\Omega \end{cases}$$

donde Ω es un conjunto abierto, acotado y con frontera lo suficientemente suave, $g \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ y $f \in (\mathbb{R})$ que satisface:

a) $f(x,0) = 0$

b) $f'' > 0, \forall t \in \mathbb{R}$

c) $0 < \lim_{s \to -\infty} \frac{f(x,s)}{s} < \lambda_1 < \lim_{s \to +\infty} \frac{f(x,s)}{s} < \lambda_2$

con λ_1 el primer valor propio asociado al operador $-\Delta$.

Luego, gracias a Kazdan y Warner [7] la condición c) se relaja, quedando de la siguiente manera:

$$\limsup_{s \to -\infty} \frac{f(x,s)}{s} < \lambda_1 < \liminf_{s \to -\infty} \frac{f(x,s)}{s} \tag{1.4}$$

Finalmente, De Figueiredo, muestra que 1.4 es equivalente a que existan $a, b \in \mathbb{R}$, $C > 0$ tal que $a < \lambda_1 < b$, y para todo $x \in \overline{\Omega}$ se tiene que

$$f(x,s) \geq as - C \quad \text{para } s \leq 0 \qquad f(x,s) \geq bs - C \quad \text{para } s \geq 0 \tag{1.5}$$

Claramente las ecuaciones de 1.5 nos indican que $f(x,s)$ esta acotada inferiormente por la recta $as - C$ en los negativos, y por la recta $bs - C$ en los positivos.

Algo importante a notar es que en los condicionamientos de Ambrosetti-Prodi f depende tanto de x como de s, donde la dependencia sobre s ."escondeüna condición de peso, es decir el peso es definido, lo cual difiere con nuestro problema $(*)$ ya que en nuestro caso el peso es indefinido.

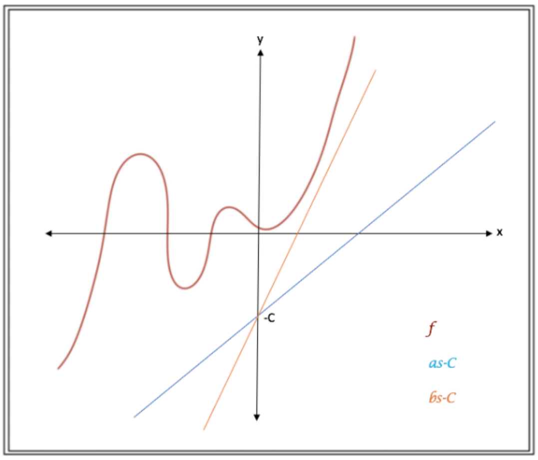

Figura 1.1: Condiciones Ambrosetti-Prodi, explicación geométrica

Por tal motivo es que en nuestro problema $(*)$, f depende solo de una variable, y se esta multiplicando por la función de peso W.

Así aplicando las ideas del condicionamiento de Ambrosetti-Prodi se tendría que

$$f(u) \geq as - C \quad \text{para } s \leq 0 \qquad\qquad f(u) \geq bs - C \quad \text{para } s \geq 0 \tag{1.6}$$

Lo que geométricamente se interpreta como en la figura 1.1.

Gracias a esta interpretación geométrica podemos ver que al multiplicar $f(u)$ por la función W que es uniformemente continua, existe un problema en el caso $u > 0$, pues puede ocurrir que $Wf(u)$ no cumpla con el acotamiento dado en 1.6.

La forma de verificar que $Wf(u)$ cumpla con el condicionamiento A-P, la veremos en el siguiente capítulo.

Capítulo 2

Metodología

2.1. Planteamiento del problema

Nuestro objetivo es demostrar que existe al menos una solución del siguiente problema:

$$(*) \begin{cases} -\Delta u + q(x)u = W(x)f(u) + \lambda u + h(x) & en\ \Omega \\ u = 0 & en\ \partial\Omega \end{cases}$$

donde $(*)$ cumple con las siguientes condiciones generales:

$(\mathbf{h_1})$ $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es abierto, acotado y con frontera suave
$(\mathbf{h_2})$ $q \in L^\infty(\Omega)$ tal que $q(x) \geq 0$ (c.t.p) en Ω
$(\mathbf{h_3})$ $W \in C(\overline{\Omega})$ que cambia de signo
$(\mathbf{h_4})$ $f \in C^1(\Omega)$
$(\mathbf{h_5})$ $h \in L^2(\Omega)$

Pero como hemos mencionado en el capitulo anterior, demostrar que existe alguna solución al problema $(*)$ depende principalmente de la relación que tiene λ, con el primer valor propio λ_1 asociado al problema, así; lo que haremos será demostrar que existe al menos una solución para el caso $\lambda < \lambda_1$, y que existen al menos dos soluciones positivas para el caso $\lambda > \lambda_1$.

Por otro lado obviamente hay similitudes entre los casos analizados, la principal similitud es que trabajamos con el mismo funcional energético J, este hecho es importante pues a partir de este operador se trabajara en la obtención de lo planteado anteriormente, y justamente hallar el funcional energético J asociado a nuestro problema $(*)$ es la primera parte de este trabajo de titulación.

A continuación detallaremos de forma mas precisa la forma de obtener los resultados mencionados.

2.1.1. Obtención de al menos una solución para el caso $\lambda < \lambda_1$

Luego de obtener el funcional energético J, demostraremos que cumple con las condiciones del teorema **??**, pues como lo explicamos en el capitulo anterior, demostrar que J cumple este teorema es suficiente para asegurar que el problema $(*)$ admite al menos una solución; ahora bien retomando la idea de la demostración del teorema **??** vamos a probar que el funcional J es d.s.c.i. y coercivo.

Para demostrar que J es d.s.c.i., acotamos al funcional $J(u)$ por el límite inferior del funcional J evaluado en una sucesión u_k que converge débilmente a u, para ello analizamos las cuatro partes del funcional $J(u)$ (ver nota 1.4.2.2) con sus partes equivalentes del operador $J(u_k)$, para así generar el acotamiento requerido.

Al analizar las normas logramos generar la desigualdad que necesitamos pues por el lema 1.4.2.1 sabemos que la norma es d.s.c.i., luego al analizar las otras tres partes probamos que el límite de cada una de las partes evaluada en u_k converge a su parte equivalente evaluada en u, lo que nos ayudara con la conclusión que buscamos.

Por otro lado la idea para demostrar la coercividad del funcional J, es acotar al funcional por una expresión que dependa de la norma de u, para ello primero generamos la desigualdad que necesitamos usando la caracterización del primer valor propio 1.4.2.1, lo que hará que nos quede una expresión con tres términos de los cuales uno ya estará en función de la norma de u; con uno de los términos faltantes no tendremos mayor problema en asociarlo con la norma de u, pero para el término que contiene el peso W necesitaremos condicionar nuestro f de tal forma que podamos cumplir nuestro objetivo.

Nota 2.1.1.1. El condicionamiento sobre f que mencionamos, es la primera condición que necesita nuestro problema $(*)$ para asegurar que admite una solución.

Siguiendo estos pasos probaremos que $(*)$ admite al menos una solución, lo que nos falta por hacer; es comprobar que $(*)$ cumple con condiciones tipo Ambrosetti-Prodi, para ello condicionaremos a f de tal forma que esta condición implique la condición anterior que nos permitió asegurar la existencia de al menos una solución para $(*)$

2.1.2. Obtención de al menos dos soluciones positivas para el caso $\lambda > \lambda_1$

Para este caso la idea es muy sencilla, queremos aplicar el teorema 1.4.3.1 a nuestro problema $(*)$. Para ellos buscamos los condicionamientos necesarios de f de tal modo que los mismos hagan a nuestro problema $(*)$ de tipo Ambrosetti-Prodi y a la vez mantengan las condiciones del teorema de Alama-Tarantello.

Con esta idea en mente, primero analizamos las condiciones del teorema 1.4.3.1 para identificar que condiciones son compatibles con nuestro problema $(*)$, teniendo en cuenta la utilidad de las mismas en la demostración del teorema. Gracias a este análisis decidimos conservar las condiciones **i, iii, iv,** y **v** del teorema **??**, y cambiamos la condición **ii**, esta condición nos indica el crecimiento de f en el infinito, situación que justamente tiene que ver con las condiciones A-P,(ver subsección 1.4.4).

A continuación empezamos con el análisis de la condición

(ii) $$\lim_{|u|\to\infty} \frac{f(u)}{|u|^{p-2}u} = 1 \qquad 2 < p < \frac{2N}{N-2}, N \geq 3$$

para ello dividimos la condición de la siguiente manera

(ii a) $$\lim_{u\to+\infty} \frac{f(u)}{|u|^{p-2}u} = 1 \qquad 2 < p < \frac{2N}{N-2}, N \geq 3$$

(ii b) $$\lim_{u\to-\infty} \frac{f(u)}{|u|^{p-2}u} = 1 \qquad 2 < p < \frac{2N}{N-2}, N \geq 3$$

Es primordial entender que las condiciones **ii a** y **ii b**, generan los siguientes acotamientos de f para una constante $C > 0$; que llamaremos **cota a** y **cota b** respectivamente.

(cota a) $$|f(u)| \leq C|u|^{p-1} \qquad u \geq 1$$

(cota b) $$|f(u)| \leq C|u|^{p-1} \qquad u \leq -1$$

Porque al momento de reemplazar la condición **ii b**, por una que cumpla con las condiciones A-P, esta nueva condición debe seguir generando la **cota b** sobre f, para que así, la demostración del teorema 1.4.3.1 no se vea afectada.

Finalmente con el nuevo condicionamiento que llamaremos **ii b'**, se logrará probar que el problema $(*)$ admite al menos dos soluciones positivas.

Nota 2.1.2.1. Solo cambiamos la condición **ii b**, pues el problema al momento de implementar las condiciones A-P se daba con el crecimiento de f en la parte positiva, como mencionamos en la subsección 1.4.4.

Capítulo 3

Resultados, conclusiones y recomendaciones

3.1. Resultados

3.1.1. Funcional energético del problema (*)

Para empezar la búsqueda de las soluciones para el problema $(*)$, lo primero que hacemos es encontrar el operador J asociado al problema, para ello partimos de la siguiente ecuación

$$-\Delta u + q(x)u = W(x)f(u) + \lambda u + h(x) \tag{3.1}$$

a la que multiplicamos por una función $v \in C_0^1(\Omega)$, para luego aplicar la integral sobre Ω

$$-\int_\Omega (\Delta u)vdx + \int_\Omega q(x)(u)vdx = \int_\Omega W(x)f(u)vdx + \int_\Omega \lambda(u)vdx + \int_\Omega h(x)vdx$$

por la fórmula de Green sabemos que $\int_\Omega (\Delta u)vdx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial v} d\sigma - \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx$ por tanto la ecuación anterior nos queda de la siguiente manera:

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_\Omega q(x)uvdx = \int_\Omega W(x)f(u)vdx + \lambda \int_\Omega uvdx + \int_\Omega h(x)vdx \tag{3.2}$$

Notación 3.1.1.1. De la ecuación 3.2, podemos notar el siguiente operador

$$J'(u)v = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_\Omega q(x)uvdx - \int_\Omega W(x)f(u)vdx - \lambda \int_\Omega uvdx - \int_\Omega h(x)vdx \tag{3.3}$$

Nota 3.1.1.1. Notemos que el operador de la notación 3.1.1.1, es justamente la derivada del operador J que notamos en el capítulo 1, (ver notación 1.4.2.2)

Por lo hecho anteriormente podemos notar al funcional energético de la siguiente forma

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega q(x)u^2 dx - \int_\Omega W(x)F(u)dx - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega u^2 dx - \int_\Omega h(x)udx$$

Pues derivando J nos da como resultado (3.3), por tanto la nota 1.4.2.2, se sigue manteniendo y por consiguiente notaremos J de la siguiente forma

$$J(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_\Omega W(x)F(u)dx - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega u^2 dx - \int_\Omega h(x)udx \tag{3.4}$$

Nota 3.1.1.2. El operador J que acabamos de notar, es un operador diferenciable, lo que hace que tenga sentido todo lo mencionado. La demostración de este resultado se lo hace de manera similar a las desarrolladas en el libro de Badiale-Serra [3].

3.1.2. Existencia de al menos una solución para el caso $\lambda < \lambda_1$

Como lo mencionamos en la metodología lo que procede ahora es demostrar que el operador J es d.s.c.i.

Teorema 3.1.2.1. *El funcional energético J asociado al problema $(*)$, definido en (3.4); es d.s.c.i.*

Demostración Sea $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $H_0^1(\Omega)$, tal que $u_k \rightharpoonup u$, con $u \in H_0^1(\Omega)$.

Analicemos cada parte de $(3{,}4)$

I) *Sabemos que la norma por el lema* (1,4,2,1) *es d.s.c.i. por tanto se cumple que*

$$\|u\| \leq \liminf_{k\to+\infty} \|u_k\|$$

así

$$\frac{1}{2}\|u\|^2 \leq \frac{1}{2} \liminf_{k\to+\infty} \|u_k\|^2 \tag{3.5}$$

II) *Se tiene que*

$$\lim_{k\to+\infty} \int_\Omega W(x)F(u_k)dx = \int_\Omega W(x)F(u)dx \tag{3.6}$$

pues podemos demostrar que

$$\lim_{k\to+\infty} \int_\Omega |W(x)F(u_k) - W(x)F(u)|dx = 0$$

ya que

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to+\infty} \int_\Omega |W(x)F(u_k) - W(x)F(u)|dx &\leq \lim_{k\to+\infty} \int_\Omega |W(x)||F(u_k) - F(u)|dx \\
&\leq \|W(x)\|_{L^\infty} \lim_{k\to+\infty} \int_\Omega |F(u_k - u)|dx \\
&= 0
\end{aligned}$$

lo que es cierto, ya que $u_k \rightharpoonup u$ *en* $H_0^1(\Omega)$*, y por el teorema de inmersión de Rellich se tiene que* $u_k \to u$ *en* $L^p(\Omega)$ $\forall p \in [1, 2^*)$*, luego por el teorema inverso de la convergencia dominada de Lebesgue sabemos que*

- $u_k(x) \to u(x)$ *c.t.p. en* (Ω)
- *Existe* $v \in L^p$ *tal que* $\forall k \in \mathbb{N} \quad |u_k(x)| \leq v(x)$ *c.t.p en* (Ω)

Además como Ω *es acotado, se tiene que* $v \in L^1(\Omega)$.

En este punto necesitamos condicionar a F *de tal forma que podamos decir que se cumple* $F(u_k(x)) \to F(u(x))$*, para ello basta con decir que F es continua, i.e.* $F \in C^1(\Omega)$ *pero como* $F(t) = \int_o^t f(s)ds$ *se tiene que* $F \in C^2(\Omega)$*, pues* $f \in C^1(\Omega)$.

Por todo lo anterior podemos aplicar el teorema de convergencia dominada de Lebesgue y asegurar que

$$\int_\Omega |F(u_k(x)) - F(u(x))|dx \to 0 \quad \textit{i.e.} \quad \lim_{k\to+\infty} \int_\Omega F(u_k - u) = 0$$

III) *Como en el literal anterior, partimos del hecho de que* $u_k \rightharpoonup u$ *en* $H_0^1(\Omega)$ *y por el teorema de inmersión de Rellich* $u_k \to u$ *en* $L^p(\Omega)$ $\forall p \in [1, 2^*)$, *en particular se tiene la convergencia fuerte en* L^2, *lo que implica que*

$$\lim_{k\to+\infty} \int_\Omega u_k^2 dx = \int_\Omega u^2 dx \tag{3.7}$$

IV) *Para la última parte definamos el operador* $T : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, *tal que para todo* $u \in H_0^1(\Omega)$ *se tiene que* $T(u) = \int_\Omega h(x)udx$, *claramente este operador es lineal y continuo, por lo que* $T \in H^{-1}$, *por tanto por la caracterización de la convergencia débil se sigue que* $T(u_k) \to T(u)$ *lo que implica que*

$$\lim_{k\to+\infty} \int_\Omega h(x)u_k dx = \int_\Omega h(x)udx \tag{3.8}$$

Finalmente de las ecuaciones (3,5), (3,6), (3,7) *y* (3,8) *podemos asegurar que*

$$\begin{aligned}
J(u) &= \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_\Omega W(x)F(u)dx - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega u^2 dx - \int_\Omega h(x)udx \\
&\leq \frac{1}{2}\liminf_{k\to+\infty} \|u_k\|^2 - \lim_{k\to+\infty}\int_\Omega W(x)F(u_k)dx - \frac{\lambda}{2}\lim_{k\to+\infty}\int_\Omega (u_k)^2 dx \\
&\qquad - \lim_{k\to+\infty}\int_\Omega h(x)u_k dx \\
&= \frac{1}{2}\liminf_{k\to+\infty} \|u_k\|^2 - \liminf_{k\to+\infty}\int_\Omega W(x)F(u_k)dx - \frac{\lambda}{2}\liminf_{k\to+\infty}\int_\Omega (u_k)^2 dx \\
&\qquad - \liminf_{k\to+\infty}\int_\Omega h(x)u_k dx \\
&= \liminf_{k\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\|u_k\|^2 - \int_\Omega W(x)F(u_k)dx - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega (u_k)^2 dx - \int_\Omega h(x)u_k dx\right)
\end{aligned}$$

Por tanto

$$J(u) \leq \liminf_{k\to+\infty} J(u_k)$$

Es decir J *es d.s.c.i.* □

Ahora probemos que el operador J es coercivo

Teorema 3.1.2.2. *El funcional energético* J *asociado al problema* $(*)$, *definido en* (3,4) *es coercivo.*

Demostración Por la caracterización del primer valor propio sabemos que:

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &= \min_{u\in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2dx + \int_\Omega q(x)u^2dx}{\int_\Omega u^2dx}\\
&\leq \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2dx + \int_\Omega q(x)u^2dx}{\int_\Omega u^2dx} \quad \forall u\in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}\\
\Rightarrow \int_\Omega u^2dx &\leq \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2dx + \int_\Omega q(x)u^2dx}{\lambda_1}
\end{aligned}
$$

por tanto, podemos asegurar que

$$
-\frac{\lambda}{2}\int_\Omega u^2dx \geq -\frac{\lambda}{2}\frac{\int_\Omega |\nabla u|^2dx + \int_\Omega q(x)u^2dx}{\lambda_1}
$$

y por el lema (1,4,2,1)

$$
-\frac{\lambda}{2}\int_\Omega u^2dx \geq -\frac{\lambda\|u\|^2}{2\lambda_1} \tag{3.9}
$$

reemplazando (3,9) en (3,4)

$$
\begin{aligned}
J(u) &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_\Omega W(x)F(u)dx - -\frac{\lambda\|u\|^2}{2\lambda_1} - \int_\Omega h(x)udx && (3.10)\\
&= \frac{1}{2}\|u\|^2\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_1}\right) - \int_\Omega W(x)F(u)dx - \int_\Omega h(x)udx && (3.11)
\end{aligned}
$$

Analicemos cada parte de (3,11)

I) El termino $\frac{1}{2}\|u\|^2\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_1}\right) \to +\infty$ cundo $\|\cdot\| \to +\infty$, pues $1-\frac{\lambda}{\lambda_1} > 0$ ya que $\lambda < \lambda_1$.

II) Para el segundo termino notemos que

$$
W(x)F(u) \leq \max_{x\in\Omega} W(x)F(u)
$$

por tanto

$$
\int_\Omega W(x)F(u)dx \leq \int_\Omega \max_{x\in\Omega} W(x)F(u)dx
$$

y como $W \in C(\overline{\Omega})$ podemos asegurar que

$$
\int_\Omega W(x)F(u)dx \leq \|W\|_\infty \int_\Omega F(u)dx \tag{3.12}
$$

Por otro lado necesitamos controlar el crecimiento de F, por tanto suponemos la siguiente condición

F1) $F(u) \leq A + B|u|^p \quad \text{con} \quad 1 \leq p < 2, \;\; A, B > 0$

lo que implica que

$$\begin{aligned} \int_\Omega F(u) &\leq \int_\Omega A dx + \int_\Omega B|u|^p dx \\ \Rightarrow \int_\Omega F(u) &\leq \hat{A} + B \int_\Omega |u|^p dx \quad \text{con} \quad \hat{A} := A|\Omega| \end{aligned}$$

Luego como $1 \leq p < 2$, podemos usar el teorema de inmersión y asegurar que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, y que $\int_\Omega |u|^p dx \leq C\|u\|^p$, por tanto

$$\int_\Omega F(u)dx \leq \hat{A} + \hat{B}\|u\|^p \quad \text{con} \quad \hat{B} := B \cdot C \tag{3.13}$$

Así de (3,12) y (3,13) se tiene que

$$\int_\Omega W(x)F(u)dx \leq \hat{A}\|W\|_\infty + \hat{B}\|W\|_\infty\|u\|^p \tag{3.14}$$

III) Dado que $h \in L^2$ por Cauchy-Schwarz se tiene que

$$\begin{aligned} \int_\Omega h(x)udx &\leq \left(\int_\Omega h(x)^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_\Omega u^2 dx\right)^{1/2} \\ &\leq \|h\|_{L^2} \left(\int_\Omega u^2 dx\right)^{1/2} \end{aligned}$$

por la desigualdad de Poincaré y la nota 1.4.1.2 se sigue que

$$\int_\Omega h(x)u\, dx \leq C\|h\|_{L^2}\|u\| \tag{3.15}$$

Finalmente reemplazando (3,14) y (3,15) en (3,11) tenemos que el operador J cumple lo siguiente

$$J(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|^2 \left(\frac{\lambda}{\lambda_1}\right) - \hat{A}\|W\|_\infty - \hat{B}\|W\|_infty\|u\|^p - C\|h\|_{L^2}\|u\|$$

es decir, hemos logrado expresar al operador J en función de la norma de u, y para que J, sea coercivo se debería tener que $J(u) \to +\infty$, cuando

$\|u\| \to +\infty$, lo que se tiene pues el crecimiento de $\|u\|^2$ es mayor que el crecimiento de $\|u\|^p$ y $\|u\|$. $\square$

Hasta el momento hemos probado que el problema (*) admite al menos una solución, pero la única condición que establecimos para que esto suceda no implica que (*) sea un problema de tipo Ambrosetti-Prodi, por tanto necesitamos establecer una condición sobre la parte no lineal f tal que nos aseguré que problema $(*)$ sea tipo A-P y que además esta condición implique la condición que establecimos sobre F, para así seguir asegurando que el problema $(*)$ admite al menos una solución.

Notación 3.1.2.1. Llamemos **f1** a la siguiente condición

$$f(u) \leq Bp(u)^{p-1} \quad \text{con} \quad 1 < p < 2; \quad 0 < B < \frac{\lambda_1}{2M} \tag{3.16}$$

donde $M \in \mathbb{R}$ es la cota de W, la cual existe pues $W \in C(\overline{\Omega})$

Teorema 3.1.2.3. *Si f cumple la condición **f1**, entonces el problema (*) es de tipo Ambrosetti-Prodi*

Demostración Como $f(u) \leq Bp(s)^{p-1}$ se tiene que

$$\begin{aligned} &\frac{f(s)}{s^{p-1}} \leq Bp \\ \Rightarrow &\frac{Wf(s)}{s^{p-1}} \leq WBp \\ \Rightarrow &\frac{Wf(s)}{s^{p-1}} \leq 2MB \quad \forall x \in \Omega^+ \end{aligned}$$

pues $W < M$, y $p \in (1, 2)$, luego por el acotamiento de B dado en **f1** se sigue que

$$\begin{aligned} &\frac{Wf(s)}{s^{p-1}} < \lambda_1 \\ \Rightarrow \limsup_{s \to -\infty} &\frac{Wf(s)}{s^{p-1}} < \lambda_1 \end{aligned}$$

por tanto $(*)$ es de tipo A-P. $\square$

Lema 3.1.2.1. *Supongamos que f cumple con la condición **f1**, por tanto se tiene que F cumple la condición **F1***

Demostración Sea f tal que cumple **f1**, así se tiene que $f(u) \leq Bp(s)^{p-1}$ con $p \in (1,2)$, integrando ambos lados se sigue que

$$F(u) \leq A + B(u)^p$$

que es la condición **F1**, por tanto se tiene el resultado. $\square$

Para terminar esta parte, enunciemos el teorema principal de esta sección.

Teorema 3.1.2.4. *Asumiendo que $f \in C^1(\mathbb{R})$ cumple la condición **f1** entonces para $\lambda < \lambda_1$ el problema $(*)$ es de tipo Ambrosetti-Prodi y admite al menos una solución.*

Demostración Dado que f cumple con la condición **f1**, por lo demostrado en el lema $(3{,}1{,}2{,}1)$ y en el teorema $(3{,}1{,}2{,}3)$ se tiene que $(*)$ es un problema de tipo A-P, y además F cumple con la condición **F1**, gracias a este condicionamiento, sabemos que el operador J es coercivo, y además por lo demostrado en el teorema $(3{,}1{,}2{,}1)$, J es d.s.c.i. por tanto por la variación del teorema de Weierstrass $(1{,}4{,}2{,}2)$ se tiene que existe $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que es un mínimo del operador J, y por lo descrito en el marco teórico (ver:1.4.2.3), u es una solución débil del problema(*), lo que demuestra nuestro teorema. $\square$

Nota 3.1.2.1. Notemos que el teorema $(3{,}1{,}2{,}4)$ nos garantiza la existencia de al menos una solución no negativa, pues si $u = 0$ sabemos que al menos h no se anulara; pero esto se obtiene solo sobre Ω^+ gracias a nuestro condicionamiento de f, este último hecho es una limitación del método usado para el caso $\lambda < \lambda_1$

3.1.3. Existencia de al menos dos soluciones para el caso $\lambda > \lambda_1$

Para este caso, nuestro objetivo es definir que condicionamientos necesita f, para poder aplicar el teorema de Alama-Tarantello enunciado anteriormente, de tal forma que el problema $(*)$ cumpla con las condiciones A-P.

Como dijimos en la metodología, la condición **ii** del teorema $(1{,}4{,}3{,}1)$, es la que necesitamos modificar para que el problema $(*)$ sea del tipo A-P, pues al igual que la condición A-P, la condición **ii** analiza el crecimiento de la parte no lineal del problema en el infinito.

Primero, probemos que la condición **ii** genera un acotamiento sobre f.

Teorema 3.1.3.1. *Supongamos que $f \in C^1(\Omega)$ cumple la condición* ***ii****, es decir*

$$\lim_{|s|\to\infty} \frac{f(s)}{|s|^{p-2}s} = 1 \quad \textit{con} \quad 2 < p < 2^* \quad \textit{para} \quad N \geq 3$$

por tanto f cumple el siguiente acotamiento

$$|f(s)| \geq C|s|^{p-1} \quad \forall |u| \geq 1$$

Demostración Dividamos a **ii**, como se hizo en el capitulo anterior (ver **??**), y probemos que cada parte genera el mismo acotamiento para f cuando $x < -1$ y cuando $x > 1$. Sabemos

$$\lim_{s\to-\infty} \frac{f(s)}{|s|^{p-2}s} = 1 \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \; \exists A < b \text{ tal que } \forall x < A \Rightarrow \left|\frac{f(s)}{|s|^{p-2}s}\right| - 1 < \epsilon$$

Como $\left|\frac{f(s)}{|s|^{p-2}s}\right| - |1| < \epsilon$, por desigualdad triangular inversa, se sigue que

$$\frac{|f(s)|}{|s|^{p-2}|s|} < \epsilon + 1 \Rightarrow |f(s)| < (\epsilon + 1)|s|^{p-1}$$

Así, sea $\epsilon > 0$ tal que $A = -1$ entonces $\forall x < -1$ se tiene

$$|f(s) < C_A|s|^{p-1} \tag{3.17}$$

Análogamente

$$\lim_{s\to\infty} \frac{f(s)}{|s|^{p-2}s} = 1 \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists B > a \text{ tal que } \forall x > B \Rightarrow |\frac{f(s)}{|s|^{p-2}s} - 1| < \epsilon$$

Como $|\frac{f(s)}{|s|^{p-2}s}| - |1| < \epsilon$, por desigualdad triangular inversa, se sigue que

$$\frac{|f(s)|}{|s|^{p-2}|s|} < \epsilon + 1 \Rightarrow |f(s)| < (\epsilon + 1)|s|^{p-1}$$

Así, sea $\epsilon > 0$ tal que $B = 1$ entonces $\forall x > 1$ se tiene

$$|f(s) < C_B|s|^{p-1} \tag{3.18}$$

Ahora tomando $C = \min\{C_A, C_B\}$ se tiene de (3,17) y (3,18) que $\forall|x| > 1$ $|f(s)| < C|s|^{p-1}$ lo que demuestra el resultado. $\square$

Segundo, notemos la nueva condición que usaremos

Notación 3.1.3.1. Llamemos **ii b'** a $f(s) = 0$ si $\forall s < s_0 < -1$ con s_0 un valor fijo.

Tercero, probemos que la condición **ii b'**, implica las condiciones A-P

Teorema 3.1.3.2. *Supongamos que f cumple **ii b'** y probemos que cumplen la condición tipo A-P*

Demostración Sea $f(s) = 0$ $\forall s < s_0 < 0$.

Así $\frac{f(s)}{s} = 0 < \lambda_1$ pues $\lambda_1 > 0$

Luego

$$\lim_{s\to-\infty} \frac{f(s)}{s} < \lim_{s\to-\infty} \lambda_1$$
$$\Rightarrow \lim_{s\to-\infty} \frac{f(s)}{s} < \lambda_1$$

Por tanto se sigue el resultado. $\square$

Cuarto, probemos que la condición **ii b'** genera el mismo acotamiento que genera **ii b**

Teorema 3.1.3.3. *Supongamos que f cumple **ii b'** entonces* $|f(s)| < C|s|^{p-1}$ $\forall x < -1$

Demostración Sabemos que $f(s) = 0$ si $s < s_0 < -1$.

Así
$$\frac{f(s)}{s} = 0 \Rightarrow \lim_{s\to\infty} \frac{f(s)}{s} = 0$$

Es decir $\forall\epsilon > 0$ $\exists$ $A < b < s_0$ tal que $\forall x < A \Rightarrow \left|\frac{f(s)}{s}\right| < \epsilon$.

Por tanto

$$|f(s)| < \epsilon|s| < \epsilon|s|^{p-1}$$

pues $p-1>1$ ya que $2<p<2^*$.
Tomando $\epsilon>0$ tal que $A=1$ se sigue que

$$|f(s)| < C|s|^{p-1}$$

Que es lo que queríamos probar. □

Quinto, enunciamos el teorema principal de esta sección, el cual nos garantiza la existencia de al menos dos soluciones positivas para el problema $(*)$

Teorema 3.1.3.4. *Asumamos que $f \in C^1(\mathbb{R})$ satisface:*

(i)	$\lim_{u\to 0} \dfrac{f(u)}{\|u\|^{q-2}u} = a$	$2<q<\dfrac{2N}{N-2}, N\geq 3$
(ii a)	$\lim_{u\to +\infty} \dfrac{f(u)}{\|u\|^{p-2}u} = 1$	$2<p<\dfrac{2N}{N-2}, N\geq 3$
(ii b')	$\lim_{u\to -\infty} \dfrac{f(u)}{\|u\|^{p-2}u} = 1$	$2<p<\dfrac{2N}{N-2}, N\geq 3$
(iii)	$\|f(u)u - pF(u)\| \leq C_1\|u\|^2 + C_2$	$C_1, C_2 > 0$
(iv)	$\|f'(u)\| \leq C_3\|u\|^{p-2} + C_4$	$C_3, C_4 > 0$

Si además W cambia de signo que cumple

(v) $\quad \int_\Omega W(x)e_1^q < 0 \quad$; e_1 *la primera función propia.*

Entonces existe $\Lambda > \lambda_1$ y se tiene lo siguiente:

Para cada $\lambda \in (\lambda_1, \Lambda)$, $(*)$ admite al menos dos soluciones positivas.

Demostración Gracias a los resultados obtenidos, los cuales generan el mismo acotamiento para f cuando va al infinito, y dado que la condición **ii b'** no implica ninguna contradicción con el resto de condicionamiento sobre f, se sigue con la misma demostración del teorema de Alama-Tarantello, lo cual nos garantiza que el problema $(*)$, admite al menos dos soluciones positivas. □

Nota 3.1.3.1. Dado que la demostración del teorema de Alama-Tarantello es bastante técnica, se la añadió en el anexo de este documento.

3.2. Conclusiones y recomendaciones

3.2.1. Conclusiones

- Las condiciones establecidas sobre la parte no lineal f, en cada caso analizado nos garantiza el cumplimiento de nuestro objetivo general, pues gracias a estos condicionamientos podemos enunciar los teoremas de existencia de soluciones.

- Para cada caso analizado del problema $(*)$ los métodos variacionales usados permiten garantizar la existencia de al menos una solución no nula en el caso $\lambda < \lambda_1$ y la existencia de al menos dos soluciones positivas para el caso $\lambda > \lambda_1$.

- Las propiedades geométricas de las condiciones Ambrosetti-Prodi nos dan información importante del acotamiento inferior de la parte no lineal f que esta relacionado con el primer valor propio λ_1.

- En ambos casos la mayor dificultad fue el poder condicionar a la función f de tal forma que Wf cumpla las condiciones tipo Ambrosetti-Prodi. Y por cuestiones de tiempo las soluciones encontradas no son tan generales.

3.2.2. Recomendaciones

- Se puede seguir estudiando otros métodos variacionales para el problema $(*)$, para encontrar una solución mas general para el caso $\lambda < \lambda_1$, ver (3.1.2.1).Para el caso $\lambda = \Lambda$ se recomienda entender el método de sub y súper soluciones ver anexo (demostración literal b, teorema 1.4.3.1).

- Recomendaría el buscar soluciones mas generales para este tipo de problemas.

Capítulo A

Anexo 1. Demostración teorema Alama-Tarantello

Demostración del literal a) teorema 1.4.3.1

Fijamos $\lambda \in (\lambda_1, A)$ y sea u_λ^* la solución de $(*_{AT})$ dado por 1.4.3.2 con

$$(I''(u_\lambda^*)\varphi, \varphi) \geq 0, \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

En este caso, podemos ver que $I''(u_\lambda^*)$ es definida positiva, y por tanto u_λ^* es un mínimo local estricto para I_λ, y una segunda solución puede seguirse usando un procedimiento de Paso de Montaña. Nos enfocaremos en el caso mas delicado cuando $\delta(\lambda) = 0$ es el primer valor propio para para $I''(u_\lambda^*)$, y denotaremos por $\varphi > 0$ al correspondiente valor propio. En esta situación, el teorema de continuación de [Crandall-Rabinowitz] nos da que el conjunto solución de $\mathscr{F}(u, \lambda) = 0$ en una vecindad suficientemente pequeña de (u_λ^*, λ) define una curva C^1 $(u(s), \lambda(s))$, $s \in (-\epsilon, \epsilon), \epsilon > 0$, con $u(0) = u_\lambda^*$, $\dot{u}(0) = \varphi$, $\lambda(0) = \lambda$ y $\dot{\lambda}(0) = 0$. En particular, siempre podemos asumir que $\dot{u}(s) > 0$ para $s \in (-\epsilon, \epsilon)$.
Por construcción, existen soluciones minimales para $\mathscr{F}(u, \lambda) = 0$ cerca de u_λ^* en cualquier vecindad por derecha. Es decir, $\lambda(s) < \lambda$ para $s < 0$ y podemos encontrar $s_0 \in (0, \epsilon)$ con $(\lambda(s_0)) > \lambda$. En particular, el rango de $\lambda(s)$, $s \in [0, s_0]$ debe contener el intervalo $[\lambda, \lambda(s_0)]$.

Definimos:
$$\mathscr{S} = \{\mu \in \mathbb{R} : \exists s \in [0, s_0], \lambda(s) = \mu, \dot{\lambda}(s) = 0\}$$
por el teorema de Sard, sabemos que la medida de Lebesgue de $\mathscr{S}$, $|\mathscr{S}| = 0$. Para todo $\mu \in (\lambda, \lambda(s_0)) \setminus \mathscr{S}$ define

$$s_\mu = \text{máx}\{s \in [0, s_0] : \lambda(s) = \mu\}.$$

Nótese que $0 < s_\mu < s_0$. Es mas,

$$\dot{\lambda}(s_\mu) > 0.$$

En efecto, dado que $\mu \notin \mathscr{S}$, entonces $\dot{\lambda}(s_\mu) \neq 0$. Si $\dot{\lambda}(s_\mu) < 0$, entonces existe $s_1 \in (s_\mu, s_0)$ con $\lambda(s_1) < \mu < \lambda(s_0)$. La continuidad de $\lambda(s)$ nos da entonces un s_2 tal que $s_2 > s_\mu$, con $\lambda(s_2) = \mu$ lo que contradice la maximalidad de s_μ.
Ahora $\dot{u}(s_\mu)$ satisface

$$-\Delta\dot{u}(s_\mu) - \mu\dot{u}(s_\mu) - W(x)f'(u(s_\mu))\dot{u}(s_\mu) = \dot{\lambda}(s_\mu)u(s_\mu) \tag{A.1}$$

Denotando por $(\delta_\mu, \varphi_\mu)$ al primer par propio para el problema linealizado

$$-\Delta\varphi_\mu - \mu\varphi_\mu - W(x)f'(u(s_\mu))\varphi_\mu = \delta_\mu\varphi_\mu \text{ en } H_0^1(\Omega) \tag{A.2}$$

con $\varphi_\mu > 0$ en Ω. Combinando A.1 y A.2, obtenemos

$$\delta_\mu \int_\Omega \varphi_\mu\dot{u}(s_\mu) = \dot{\lambda}(s_\mu)\int_\Omega u(s_\mu)\varphi_\mu > 0$$

esto es
$$\delta_\mu > 0 \tag{A.3}$$

Esta información nos permitirá construir una segunda solución w_μ para el problema $(*_{AT})$ evaluado en μ para todo $\mu \notin \mathscr{S}$, tal que no cae en la curva $u(s)$ para $s \in (0, s_0)$.
Para esto, fijemos $\mu \in (\lambda, \lambda(s_0)) \setminus \mathscr{S}$. Ahora buscamos una solución para $(*_{AT})$ evaluado en μ de la forma $w = \hat{u}_\mu + v$ con $v > 0$ y $\hat{u}_\mu = u(s_\mu$. Cálculos directos muestran que v puede ser caracterizado como un punto crítico

para el funcional

$$J_\mu(v) = \frac{1}{2}(||\nabla v||_2^2 - \mu||v_+||_2^2) - \int_\Omega G_\mu(x, v_+),$$

donde $v_+ = \text{máx}[v(x), 0]$ y

$$\begin{aligned} G_\mu(x,\xi) &= \int_0^\xi W(x)[f(\hat{u}_\mu(x)+v) - f(\hat{u}_\mu(x))]dv \\ &= W(x)[F(\hat{u}_\mu(x)+\xi) - F(\hat{u}_\mu(x)) - f(\hat{u}_\mu(x))\xi]. \end{aligned}$$

Ahora mostraremos que, en virtud de A.3, $v = 0$ es un mínimo local estricto para $J_\mu(v)$. En efecto

$$\begin{aligned} J_\mu(v) &= \frac{1}{2}(||\nabla v||_2^2 - \mu||v_+||_2^2) \int_\Omega W(x)[f'(\hat{u}_\mu(x)v_+^2) + o(||v||^2_{H_0^1(\Omega)}) \\ &= \frac{1}{2}||\nabla v_-||_2^2 + (I''_\mu v_+, v_+) + o(||v||^2_{H_0^1(\Omega)}) \\ &\geq \frac{1}{2}||\nabla v_-||_2^2 + \frac{1}{2}\delta_\mu||\nabla v_+||_2^2 + o(||v||^2_{H_0^1(\Omega)}) \geq C||\nabla v||_2^2 \end{aligned}$$

Para una constante C, cuando $||v||^2_{H_0^1(\Omega)}$ es pequeño. Es decir $v = 0$ es un mínimo local (estricto).
Por otro lado, sea $v_0 \in C_0^\infty(\Omega^+)$, $v_0 \geq 0$ y evaluando

$$J_\mu(tv_0) = \frac{1}{2}t^2(||\nabla v_0||_2^2/\mu||v_0||_2^2)/\int_\Omega G_\mu(x, tv_0). \tag{A.4}$$

Pero para t grande se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{t^2}\int_\Omega G_\mu(x,tv_0) &= \int_\Omega W(x)\frac{F(\hat{u}_\mu + tv_0)}{t^2} + o(1) \\ &= t^{p-2}\int_\Omega W^+(x)\frac{F(t[v_0 + \hat{u}_\mu/t])}{t^p} + \int_\Omega W^-(x)\frac{F(\hat{u}_\mu(x)}{t^2} + o(1) \end{aligned}$$

Lo que implica que

$$= \frac{t^{p-2}}{p}\int_\Omega W^+(x)v_0^p + o(t^{p-2}) \tag{A.5}$$

Por las condiciones de f I y II y el teorema de convergencia dominada. Juntando A.4 y A.5 se deriva

$$J_\mu(tv_0) = -\frac{t^p}{p}\int_\Omega W^+(x)v_0^p + o(t^p) \to -\infty$$

cuando $t \to \infty$.
Así, el lema del paso de montaña implica que $J_\mu(v)$, y nos da un candidato para valor critico

$$c = \inf_{\gamma \in \mathscr{P}} \max_{0 \le t \le 1} J_\mu(\gamma(t)) > 0$$
$$\mathscr{P} = \{\gamma \in C([0,1]; H_0^1(\Omega)) : \gamma(0) = 0, J_\mu(\gamma(1)) < 0\}$$

Dado que para cualquier $\gamma \in \mathscr{P}$ se tiene $J_\mu(\gamma_+) \le J_\mu(\gamma)$, se sigue que $\gamma_+ \in \mathscr{P}$, y se deduce la existencia de la sucesión v_k con

$$J_n(v_k) \to > 0, \quad ||J'(v_k)|| \to 0, \quad v_k \ge 0.$$

Además tenemos que $w_k = \hat{u}_\mu v_k$ satisface:
$$\begin{cases} I_\mu(w_k) = I_\mu(\hat{u}_\mu) + J_\mu(v_k) \to c_\mu + c \\ ||I'_\mu(w_k)|| = ||I'_\mu(\hat{u}_\mu)|| + ||J'_\mu(v_k)|| = ||J'_\mu(v_k)|| \to 0 \end{cases}$$
cuando $k \to \infty$. De aquí en adelante denotaremos $c_\mu = I_\mu(\hat{u}_\mu)$. Se puede ver que w_k es una sucesión Palais-Smale del funcional original I_μ. Por otro lado, gracias a 1.4.3.1 y por el lema 1.4.3.3 $\{w_k\}$ posee una subsucesión fuertemente convergente, $v_k \to v_\mu$ en $H_0^1(\Omega)$. Dado que $J_\mu(v_\mu) = c > 0$, v_μ es un punto crítico no trivial de J_μ y $v_\mu \ge 0$. en particular,

$$\int_\Omega \nabla v_\mu \dot{\nabla} \varphi - \lambda_n v_n \varphi - W(x)[f(\hat{u}_\mu + v_\mu) - f(\hat{u}_\mu)]\varphi = 0$$

para todo $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. Entonces, por el principio fuerte del máximo, se debe tener $v_\mu > 0$ en Ω y $w_\mu = \hat{u}_\mu + v_\mu > \hat{u}_\mu$ es una segunda solución positiva para $(*_{AT})$ evaluado en μ.
Ahora, la maximalidad de s_μ y el hecho que $\hat{u}_\mu < w_\mu$ garantiza que w_μ no pertenece a la curva solución $\{u(s) : s \in [-s_0, s_0]\}$. En particular, para una pequeña vecindad U de u^*_λ se tiene $w_\mu \notin U$. Así concluimos por un argumento de aproximación. En efecto, dado que la medida de Lebesgue de $\mathscr{P}$, $|\mathscr{P}| = 0$, podemos elegir una sucesión $\mu_n \in (\lambda, \lambda(s_0)) \setminus \mathscr{P}$ con $\mu_n \to \lambda$. Denotamos por $w_n = w_{\mu_n}$, $u_n = \hat{u}_{\mu_n}$, $v_n = v_{\mu_n}$ y $J_n = J_{\mu_n}$. La construcción del pase de montaña para J_n nos da que $I_{\mu_n}(w_n)$ es uniformemente acotado.

En efecto, tomando v_0 como en A.4 se tiene:

$$\begin{aligned}
J_n(v_n) &\leq \max_{t>0} J_n(tv_0) \\
&= \frac{1}{2}t^2(||\nabla v_0||_2^2 - \mu_n||v_0||_2^2) - \frac{t^p}{p}\int_\Omega W(x)v_0^p + O(t) \\
&\leq C
\end{aligned}$$

Y dado que $u_\lambda^* \leq u_n \leq u(s_0)$ deducimos $||\nabla u_n||_2 \leq C$ y

$$\begin{aligned}
I_\lambda(w_n) &= I_{\mu_n}(u_n) + J_n(v_n) + (\mu_n - \lambda)||w_n||_2^2 \\
&\leq C + (\mu_n - \lambda)||w_n||_2^2 + O(1)
\end{aligned} \tag{A.6}$$

Similarmente,

$$(I'_\lambda(w_n), \varphi) = (I'_{\mu_n}(w_n), \varphi) + (\mu_n - \lambda)\int_\Omega w_n\varphi = (\mu_n - \lambda)\int_\Omega w_n\varphi. \tag{A.7}$$

Entonces, como $\mu_n \to \lambda$, w_n es casi una sucesión de Palais-Smale para I_λ. Como, por el lema 1.4.3.3, podemos ver que A.7 y A.6 son suficientes para concluir que $w_n \to w_\lambda$ fuertemente en $H_0^1(\Omega)$. Claramente, w_λ es una solución positiva para $(*_{AT})$ con $w_\lambda \geq u_\lambda^* > 0$. Es más, ya que $w_n \notin U$ tenemos que $w_\lambda \notin U$ y $w_\lambda > u_\lambda^*$.
Notar que en el caso $u_\lambda^* > u_\lambda$ (ie, λ es un punto de discontinuidad para el mapa $\lambda \to u_\lambda$), esta cae como una tercera solución positiva para $(*_{AT})$.

Demostración del literal b) teorema 1.4.3.1

Para el caso $\lambda = \Lambda$, tomamos una sucesión $\lambda_n \nearrow \Lambda$ y construimos una sucesión de soluciones para $(*_{AT})$, con subsolución $u_- = te_1$ y supersolución u_μ con $\lambda_n < \mu < \Lambda$. Usando una función de prueba para la subsolución $u_- = te_1$ para $t > 0$ tomándola suficientemente pequeña, podemos ver que

$$I_{\lambda_n}(u_n) \leq I_{\lambda_n}(te_1) < 0$$

Y por tanto

$$I_\Lambda(u_n) \leq 0 \tag{A.8}$$

Y también tenemos

$$
\begin{aligned}
(I'_\Lambda(u_n), \varphi) &= (I'_{\lambda_n}(u_n), \varphi) - (\Lambda - \lambda_n) \int_\Omega u_n \varphi \\
&= -(\Lambda - \lambda_n) \int_\Omega u_n \varphi. \qquad \text{(A.9)}
\end{aligned}
$$

De nuevo, u_n es casi una sucesión Palais-Smale para I_Λ, en el sentido que las condiciones A.8 y A.9 son suficientes para seguir el argumento del lema 1.4.3.3 y obtener una subsucesión convergente cuyo limite u_Λ sera solución de $(*_{AT})$ para Λ con $u_\Lambda > u_\lambda$ para todo $\lambda_1 \leq \lambda < \Lambda$.

Referencias bibliográficas

[1] Stanley Alama and Gabriella Tarantello. *On semilinear elliptic equations with indefinite nonlinearities. Calc. Var 1*. Springer, 1993; Calc. Var. 1: 439-475.

[2] Antoniao Ambrosetti and Gonvanni Prodi. *A primer of Nonlinear Analysis*. Cambridge University Press, 1993.

[3] Marino Badiale and Enrico Serra. *Semilinear Elliptic Equations for Begginners: Existence Results via Variational Approach*. Springer Science & Business Media, 2010.

[4] Marco Calahorrano and Israel Cevallos. *Existencia de Soluciones Radiales para Problemas Semilineales Elípticos Indefinidos*. Selecciones matemáticas; vol.7(1): 42-51, 2020.

[5] Djairo De Figueiredo. *On the superlinear Ambrosetti-Prodi problem*. Pergamon Press; vol.8 No 6 : 655-665, 1983.

[6] Djairo De Figueiredo and Boyan Sirakov. *On the Ambrosetti-Prodi problem for non-variational elliptic systems*. Elsevier; Diferential Equations 240 : 357-374, 2007.

[7] Jerry Kazdan and Frank Warner. *Remarks on some quasilinear elliptic equations*. Communications on Pure and Applied Mathematics, 28(5):567-597, 1975.

[8] Paúl Real. *Teoremas clásicos minimax, aplicaciones en problemas de ecuaciones diferencales parciales no lineales con peso y condiciones de frontera Dirichlet homogéneas*. Epn, 2022.

[9] Gabriela Revelo. *Un problema de tipo Ambrosetti-Prodi con condiciones de frontera Dirichlet no homogéneas.* Epn, 2022.

[10] Jhoel Torres. *Un problema de tipo Ambrosetti-Prodi con condición de frontera Dirichlet homogénea con el p-laplaciano.* Epn, 2022.