



ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS

MODELOS INTEGRADOS DE OPTIMIZACIÓN DE TRANSPORTE PÚBLICO

MODELOS DE PROGRAMACIÓN LINEAL ENTERA PARA LA CALENDARIZACIÓN DE VIAJES Y ENRUTAMIENTO DE PASAJEROS

TRABAJO DE INTEGRACIÓN CURRICULAR PRESENTADO COMO REQUISITO PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

DORIAN LISETH RECALDE JARA

dorian.recalde@epn.edu.ec

DIRECTOR: DR. LUIS MIGUEL TORRES CARVAJAL

luis.torres@epn.edu.ec

DMQ, SEPTIEMBRE 2022

CERTIFICACIONES

Yo, DORIAN LISETH RECALDE JARA, declaro que el trabajo de integración curricular aquí descrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y, que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.



Dorian Liseth Recalde Jara

Certifico que el presente trabajo de integración curricular fue desarrollado por Dorian Liseth Recalde Jara, bajo mi supervisión.



Dr. Luis Miguel Torres Carvajal
DIRECTOR

DECLARACIÓN DE AUTORÍA

A través de la presente declaración, afirmamos que el trabajo de integración curricular aquí descrito, así como el(los) producto(s) resultante(s) del mismo, es(son) público(s) y estará(n) a disposición de la comunidad a través del repositorio institucional de la Escuela Politécnica Nacional; sin embargo, la titularidad de los derechos patrimoniales nos corresponde a los autores que hemos contribuido en el desarrollo del presente trabajo; observando para el efecto las disposiciones establecidas por el órgano competente en propiedad intelectual, la normativa interna y demás normas.

Dorian Liseth Recalde Jara

Dr. Luis Miguel Torres Carvajal

RESUMEN

La planificación de transporte público comprende varias fases cuyo objetivo optimizar el cumplimiento de las distintas tareas requeridas para el funcionamiento de un sistema de transporte. La fase de calendarización de viajes es tan importante como compleja. Su objetivo es fijar horarios para los viajes de las distintas líneas del sistema, de tal forma que se minimice el tiempo total de viaje de los pasajeros. El problema ha sido abordado de distintas maneras. Un aspecto fundamental para explicar su complejidad radica en la dependencia existente entre las etapas de calendarización de viajes y enrutamiento de pasajeros. Esto significa que si un modelo de calendarización de viajes no incluye el enrutamiento, o se realiza a partir de un enrutamiento prefijado con anterioridad, su aplicación puede producir como resultado horarios de planificación con tiempos de viaje subóptimos para los pasajeros. Por ello, en los últimos años se ha puesto énfasis en el estudio de modelos que integran estas dos fases de la planificación del sistema. En el presente trabajo se estudian un modelo clásico de calendarización de viajes y un modelo integrado para la calendarización de viajes y el enrutamiento de pasajeros. Los modelos son probados sobre instancias de diferentes tamaños, y se estudia la mejora que proporciona la retroalimentación entre ambas etapas. Además, se analiza el desempeño computacional de los modelos a medida que crece el tamaño de la instancia. Finalmente, se propone una heurística para la solución de las instancias grandes. Se presentan los resultados de los experimentos computacionales, las conclusiones correspondientes y las posibles extensiones del trabajo en el futuro.

Palabras clave: calendarización de viajes, enrutamiento, planificación de transporte público, programación lineal y entera, investigación de operaciones.

ABSTRACT

Planning of public transportation systems involves some interesting problems like line planning, timetabling, and vehicle scheduling. The output of the timetabling step is the first one that interacts directly with passengers and is prone to change because of human behaviour. The objective of timetabling is schedule arrival and departure times for the trips of the different lines at each station, with the aim to minimize the passenger's travel time. Different approaches to this problem have been reported in the literature. One of the most challenging features of this problem lies in its feedback interaction with the passenger routing step. If a model for timetabling does not take the routes of the passengers into account, or if these routes are fixed a priori, it may lead to suboptimal timetables for passengers. This consideration brought academic interest in the study of integrated models. In this work, two models for timetabling are considered: a classic model for timetabling assuming fixed routes for the passengers, and an integrated model which addresses both timetabling and passenger routing. The models were implemented and tested on five instances corresponding to different public transport systems. Furthermore, a heuristic is proposed for the solution of the largest instance. The computational results are presented, together with the corresponding conclusions and the outlook for future work.

Keywords: timetabling, passenger routing, public transportation planning, integer linear programming, Operations Research

Índice general

1. Introducción	1
2. Marco teórico	4
2.1. Planificación del transporte público	4
2.2. Calendarización de viajes	6
2.3. Enrutamiento de pasajeros	10
2.4. Integración de fases	12
3. Formulación de modelos	15
3.1. Definiciones generales	15
3.2. Modelo PESP	17
3.3. Modelo TimePass	22
3.3.1. Linealización del modelo TimePass	26
3.4. Frecuencia y retorno de líneas	27
4. Resultados computacionales	29
4.1. Descripción de instancias	29
4.1.1. Instancia <i>Juguete</i>	30
4.1.2. Instancia <i>Pequeña 1</i>	30
4.1.3. Instancia <i>Pequeña 2</i>	31
4.1.4. Instancia <i>Grilla 5x5</i>	32

4.1.5. Instancia <i>Atenas</i>	32
4.2. Resultados y análisis	33
4.2.1. Modelo PESP	35
4.2.2. Modelo TimePass	37
4.2.3. Heurísticas para reducir el tamaño del problema	39
4.2.4. Comparación de resultados entre los modelos PESP y TimePass	41
5. Conclusiones generales	43
Bibliografía	46

Índice de figuras

3.1. Ejemplo de una PTN con 4 estaciones.	16
3.2. EAN basada en la PTN de la Figura 3.1	19
3.3. EAN extendida basada en la EAN de la Figura 3.2	24
4.1. PTN de la instancia <i>Juguete</i>	30
4.2. PTN de la instancia <i>Pequeña 1</i>	31
4.3. PTN de la instancia <i>Pequeña 2</i>	32
4.4. PTN de la instancia <i>Grilla 5x5</i>	33
4.5. PTN de la instancia <i>Atenas</i>	34

Capítulo 1

Introducción

En los últimos años se ha hecho cada vez más evidente la importancia de contar con un sistema de transporte público que funcione de manera eficiente. El acelerado ritmo de crecimiento de la población, las nuevas necesidades de movilización que traen consigo, además del incremento en la concientización de problemas que involucran al medio ambiente, hacen que el correcto funcionamiento del sistema de transporte público sea una opción viable para ayudar a solventar tanto los problemas de movilidad para población, considerando tanto la perspectiva de los usuarios como de los operadores, así como alivianar algunas preocupaciones ambientales. La población puede verse motivada a usar el transporte público sobre el particular, si este trabaja de manera eficiente y evita los problemas de este último, como por ejemplo, los embotellamientos.

Generalmente, un sistema de transporte se implementa sobre infraestructuras ya establecidas. A partir de allí, la planificación se da esencialmente en la resolución de las siguientes etapas: *planificación de líneas*, *calendarización de viajes* y *asignación de conductores*. Un método común es resolver estas etapas de manera secuencial, puesto que la solución de una etapa arroja información importante que sirve como entrada para la siguiente etapa.

La *calendarización de viajes* (planificación/asignación de horarios o *timetabling*) es la etapa en la que, utilizando la información de las diferentes líneas y sus frecuencias obtenida en la fase previa de planificación

de líneas, se asignan tiempos puntuales de salida y llegada para cada una de las estaciones de cada uno de los viajes programados para las diferentes líneas de transporte. La planificación de horarios resultante servirá como entrada para la siguiente etapa de asignación de vehículos, puesto que los viajes deberán ser cubiertos por rutas de servicio de las unidades de la flota de transporte.

Entre cada una de las etapas antes mencionadas existen fases intermedias que resuelven necesidades puntuales. En principio, la utilidad de estas fases podría no verse reflejada a simple vista en el funcionamiento del sistema de transporte, pero su resolución aporta información importante que se usa para la modelación de la etapa principal. Particularmente, entre la etapa de *planificación de líneas y calendarización de viajes* se encuentra la fase intermedia de *enrutamiento de pasajeros*.

La etapa de *enrutamiento de pasajeros* consiste en el procedimiento de asignar las rutas específicas que tomarán los usuarios dentro del sistema de transporte para llegar desde su origen hasta su destino. Estas rutas consideran las diferentes estaciones y líneas por la que transitarán, así como también la posibilidad de la transferencia entre líneas dentro de una estación, desde la parada de origen hasta la de destino. El enrutamiento de pasajeros se realiza priorizando el bienestar del usuario; principalmente se eligen rutas en las que el tiempo de viaje del usuario sea el menor posible desde que ingresa hasta que sale del sistema de transporte. De esta manera, como resultado del enrutamiento de pasajeros, los datos de demanda de transporte expresados originalmente en matrices OD (origen-destino) son transformados en valores de carga sobre cada uno de los arcos de la red de transporte.

El enrutamiento se realiza para cada uno de los pasajeros, sin embargo, es común asumir que todas las personas que tienen estaciones de origen y destino iguales tomarán la misma ruta, puesto que esta y la etapa de calendarización no consideran directamente un límite en el número de pasajeros que las unidades vehiculares pueden llevar.

Se considera al enrutamiento de pasajeros y a la calendarización de viajes como pasos secuenciales. Resulta evidente, entonces, que haya una gran dependencia entre los datos que provee el enrutamiento en la formulación de la calendarización, pero esto también es cierto en sentido

contrario, es decir, que una planificación de horarios a priori podría interferir en la elección de las rutas óptimas respecto al tiempo de viaje del usuario.

El proceso tradicional de resolución secuencial de las etapas de planificación tiene algunas limitaciones. Por ejemplo, no considera la gran interdependencia que existe entre los resultados de dos o más etapas de planificación y termina por producir soluciones subóptimas para el problema. Por ello, y gracias también al desarrollo de algoritmos eficientes y a la existencia de recursos de cómputo más potentes, en años recientes, la formulación de modelos que integren dos etapas o más ha comenzado a desarrollarse de manera más amplia. Esto ha ayudado a encontrar resultados que incluyan la retroalimentación de varias etapas entre sí, mejorando la calidad de los resultados generales, aunque a su vez también, incrementando la complejidad de los modelos desarrollados y su proceso de resolución.

El presente trabajo tiene dos objetivos. El primero es estudiar dos modelos de programación lineal entera usados en la optimización de sistemas de transportación pública aplicados a las etapas de calendarización de viajes y enrutamiento de pasajeros. El primer modelo fue propuesto en [1] para la calendarización de viajes, mientras que el segundo modelo fue propuesto en [2] donde se integran las etapas de enrutamiento y calendarización. El segundo objetivo es implementar los modelos antes descritos, probarlos sobre instancias de diferentes tamaños, analizar los resultados obtenidos y establecer conclusiones de ellos.

La estructura del documento es la siguiente: El Capítulo 2 contiene el marco teórico, con una revisión de antecedentes y estudios académicos sobre la planificación del sistema de transporte público, las etapas de calendarización de viajes y enrutamiento de pasajeros, así como cuestiones sobre modelos integrados. El Capítulo 3 contiene el desarrollo formal de los dos modelos a estudiar. El capítulo 4 contiene los resultados computacionales de la aplicación de los dos modelos a las diferentes instancias, una heurística usada para abordar los modelos más complicados, así como un análisis a los mismos. Por último, el trabajo termina con el Capítulo 5, donde se encuentran las conclusiones obtenidas de los resultados computacionales.

Capítulo 2

Marco teórico

2.1. Planificación del transporte público

Desde que los primeros sistemas de transporte público empezaron a emerger y extenderse a lo largo del mundo, surgió también la necesidad de operarlos de manera eficiente, tomando en cuenta distintos aspectos concernientes tanto al nivel de servicio brindado a los pasajeros como a los costos económicos para los administradores y operadores del sistema. En la literatura técnica especializada se han identificado Varias fases dentro de la planificación de un sistema de transporte público. Estas etapas van desde la planificación de redes e infraestructura hasta la rotación del personal a cargo de la conducción de los vehículos, pasando por tareas como la planificación de líneas, la calendarización de viajes y la asignación de flota.

Los sistemas de transporte público, en su mayoría, crecen dinámicamente al ritmo del incremento demográfico de las ciudades. Debido a este constante crecimiento poblacional, y a que las rutas tienen una limitada capacidad para la circulación de vehículos, las redes de transporte se encuentran en constante alteración y expansión; la cual puede darse a través de la adición o cambio de estaciones, la inclusión de vehículos de mayor velocidad y capacidad, la construcción de vías de mayor capacidad y alcance, entre otros aspectos. Debido a esto, se torna necesaria

una permanente actualización de la planificación de las operaciones en el sistema, para buscar el aprovechamiento óptimo de los recursos disponibles.

La planificación y optimización de sistemas de transporte público empieza a desarrollarse como un área dentro de la investigación de operaciones en la década de los 60. Su continuo estudio hasta la actualidad se traduce en la gran cantidad de modelos y análisis propuestos para abordar este problema, generalmente recurriendo a algoritmos y métodos de la optimización discreta para su solución.

Cuando se habla de optimizar el transporte público, debe considerarse que existen varios actores que conforman al mismo, y que tienen intereses y perspectivas distintas. De forma general, se busca maximizar la comodidad de los usuarios del sistema mientras se trata de minimizar los costos de operación. La comodidad de los pasajeros puede medirse desde distintas perspectivas, como el tiempo de viaje empleado y/o el número de transferencias que deben realizar los usuarios para llegar a sus destinos. La minimización de costos involucra, en cambio, el uso eficiente de los recursos materiales y humanos. Todas estas consideraciones aplicadas en conjunto tienen comúnmente como objetivo hacer al transporte público más atractivo frente al transporte particular, para motivar su uso por parte de la población y atacar así otros problemas de la movilidad urbana como la congestión y la contaminación.

En [3] se identifican 5 fases dentro de la planificación del transporte público: 1) diseño de las rutas, 2) planeación de frecuencias, 3) calendarización de viajes, 4) asignación de vehículos y 5) programación del personal. [4] divide estos pasos en 3 áreas principales, cada una orientada a diferentes objetivos: estratégica, táctica y de operación. La etapa de calendarización de viajes forma parte de la planificación táctica, mientras que el área operativa incluye las etapas de asignación de vehículos y personal. En el área estratégica, el principal objetivo es maximizar la calidad de servicio al pasajero, en contraste con la minimización de los costos, que es la meta primordial del área operativa.

Debido a la gran complejidad computacional que usualmente tienen los problemas de planificación de transporte, para la optimización del sistema suele procederse con la resolución individual y secuencial de cada

una de las fases. Así, al descomponer algunas tareas en subprocesos obtenemos instancias de tamaños más manejables, algunas de las cuales pueden ser resueltas incluso con modelos relativamente simples y recursos computacionales asequibles. Sin embargo, aún después de esta descomposición, el problema de planificación de transporte sigue siendo desafiante en general. De hecho, en [5] y [6] se demuestra que incluso los subproblemas individuales son NP-difíciles desde el punto de vista computacional.

En este trabajo abordaremos la fase de la calendarización de viajes, que constituye la última tarea dentro de la planificación estratégica, después del diseño de la red y la planificación de líneas. Definimos el problema en la siguiente sección y estableceremos luego su relación con el problema de enrutamiento de pasajeros.

2.2. Calendarización de viajes

La calendarización de viajes (llamada también planificación de viajes o *timetabling*) es el proceso mediante el cual se asignan horarios puntuales de salida y llegada a cada estación para viaje de cada línea que conforma el sistema de transporte. Con ello, se establece un horario preciso de actividades que deben ser cumplidas por los diferentes vehículos que están a cargo de cubrir las líneas.

Según [7], la etapa de calendarización de viajes comprende 3 pasos; la entrada de información independiente, el desarrollo de horarios y los calendarios con los viajes de salida y llegada. El primero refiere a los datos de entrada necesarios para resolver la misma, los cuales deben ser levantados a priori: la demanda de transporte, es decir, el número de pasajeros que viajan entre las distintas estaciones del sistema, y los tiempos de recorrido, que son cotas inferiores y superiores para los tiempos en los que un vehículo debe cumplir las distintas actividades previstas (desplazamientos y esperas) durante la trayectoria entre y dentro de las estaciones.

Existe información adicional que puede ser incorporada a los modelos de acuerdo a los objetivos que se plantee alcanzar al resolver esta etapa.

En [8] se analizan planificaciones que toman en cuenta las demandas de los pasajeros a distintas horas del día. Es común también fijar a priori la hora del primer y el último viaje para ciertos tipos de planificación. Antes de pensar en aplicar esto, se debe tomar en cuenta que la información requerida (y la adicional) es extremadamente difícil de obtener para sistemas de transporte reales, lo cual constituye otro reto dentro del proceso de optimización del transporte.

La calendarización de viajes puede realizarse de dos maneras: como planificación periódica o aperiódica; cada una de estas necesita información de entrada diferente. Una calendarización aperiódica emplea un horizonte de planificación muy amplio, por lo general de un día o toda una jornada laboral. Para esta planificación es necesaria como información de entrada la demanda de los pasajeros en diferentes momentos del día. La ventaja de este tipo de planificación es la posibilidad de obtener horarios más flexibles, establecidos para responder a la evolución de la demanda de pasajeros a lo largo del día. Sin embargo, esta alternativa tienen también un costo computacional más elevado, ya que involucra la solución de modelos mucho más complejos, y requieren además de información más difícil de conseguir.

Tradicionalmente, los modelos de calendarización usados en la industria de los ferrocarriles usan una planificación periódica o cíclica. La calendarización periódica es aquella en la que se trabaja sobre un horizonte de planificación corto, por lo general de 30 o 60 minutos. Los recorridos se establecen para este periodo y son repetidos de manera uniforme a lo largo del día. De esta manera, se reduce el tamaño de las instancias, y por ende la cantidad de recursos computacionales requeridos para su solución. En [9] se lleva a cabo un análisis comparativo de los resultados obtenidos al aplicar modelos basados en estos dos tipos de planificación.

Los estudios que abordan problemas de calendarización cíclicos se basan, en su mayoría, en el *problema de calendarización de eventos periódicos* (PESP, por sus siglas en inglés), propuesto originalmente en [1] por Serafini & Ukovich en 1989. Como su nombre lo indica, se trata de un modelo general para programar (calendarizar) eventos y actividades idénticos que son repetidos de manera uniforme. El modelo considera que el periodo de planificación es un parámetro establecido a priori, y su obje-

tivo principal es encontrar horarios factibles para los eventos respecto a los intervalos límite impuestos para la duración de las actividades en las restricciones.

PESP es usado frecuentemente como base para los modelos de calendarización en la industria de transporte y algunas planificaciones ya ha sido puesto en práctica exitosamente. En [10] se detalla la calendarización del sistema de transporte subterráneo de Berlín, el primero en ser puesto en práctica y usado de manera regular. Empleando PESP se logró planificar el sistema que contaba con 9 pares de líneas y 19 estaciones de transferencia que cubrían un total de 144 kilómetros. En [11] se puede encontrar otra exitosa aplicación realizada en el subterráneo de Países Bajos. Estudios sobre modelos PESP aplicados específicamente en la calendarización de viajes en sistemas de transporte público pueden encontrarse también en [12] y [13].

PESP puede ser formulado usando programación entera mixta que incluye variables booleanas y, como se indica en [12], puede ser resuelto usando el algoritmo de *branch-and-bound*. El principal inconveniente es que se trata de un problema NP-completo, como se demuestra en [1]. En [9] se llevan a cabo experimentos computacionales relativamente simples, donde se observa que, cuando el tamaño de las instancias del problema se incrementa lo suficiente, el algoritmo es incapaz de encontrar soluciones factibles en un tiempo razonable, por lo que se requiere de técnicas para reducir el tamaño del problema. Por otra parte, en [14], se aplican algoritmos genéticos para poder hallar una solución factible.

Regresando al tema de información necesaria para la etapa de calendarización, al momento de incluir periodicidad en el modelo, debemos tomar en cuenta también las frecuencias asociadas a cada línea de transporte. En la etapa de planificación de líneas se determinan, además de las rutas para las diferentes líneas, sus frecuencias respectivas. Una frecuencia indica el número de viajes (idénticos) que deben realizarse de una línea dentro del horizonte de tiempo considerado, para cubrir la demanda estimada de pasajeros.

Según se concluye en [3], cuando las frecuencias son relativamente altas (es decir, los tiempos entre viajes consecutivos de una misma línea son pequeños), los pasajeros tienden a llegar de manera aleatoria a las

paradas de autobús, lo que hace también que su tiempo de espera por el vehículo más próximo también sea aleatorio. Esto incrementa el tiempo de viaje promedio del usuario dentro del sistema de transporte, precisamente lo que estamos tratando de minimizar en la etapa de calendariación. Por otro lado, si los tiempos de espera son mayores, el pasajero estará más pendiente del horario y llegará a la parada de autobús justo a tiempo, reduciendo los costos extra asociados a los tiempos de espera iniciales.

Por otro lado, [15] señala que cuando las frecuencias tienen tiempos muy altos y existe una falta de sincronización entre los horarios de las diferentes líneas, el perder una conexión puede desincentivar completamente a la gente a usar el transporte público, puesto que el tiempo de espera será muy amplio hasta la próxima conexión, en particular en áreas de baja densidad poblacional. Esto no sucede para líneas con frecuencias altas, donde la pérdida de una conexión se reflejará como un tiempo de espera mayor solo por algunos minutos.

Comúnmente (ver, por ejemplo, [3]) se omiten por simplicidad las frecuencias de las líneas dentro del problema. En [16], se indica como incluir las frecuencias como multiplicidad de líneas, es decir, cada viaje adicional de una línea se considera como una nueva línea con paradas de inicio, fin y rutas iguales.

Dado que los vehículos disponibles deben compartir la infraestructura del sistema, [9] estudia algunos modelos que, con el fin de prevenir que los vehículos que cubren similares rutas ocupen el mismo espacio físico en un mismo momento, introducen un “retraso” entre vehículos. Este retraso se refiere al tiempo mínimo de diferencia en la salida de dos vehículos que cubren la misma ruta para evitar aglomeración y, por tanto, una falta de sincronización en los horarios. El retraso debe tomarse en cuenta, especialmente si se requiere introducir frecuencias dentro del modelo.

Establecido el tiempo de retraso entre recorridos iguales y, asumiendo que la demanda de pasajeros será uniforme en el periodo de tiempo que se establezca para la modelación, un reto importante dentro de la calendariación es lograr una sincronización en los horarios para la transferencia efectiva de pasajeros. Dado que uno de los objetivos principales

de la calendarización es minimizar el tiempo de viaje de los pasajeros, se espera que los horarios de las líneas se establezcan de tal forma que la espera para una transferencia entre líneas se realice en el menor tiempo posible.

Por último, se debe considerar que en la práctica, dependiendo del sistema de transporte usado, puede ser difícil debido a los horarios de la calendarización de manera precisa, debido a problemas externos como congestiones vehiculares. Adicionalmente, si la coordinación de los arribos y salidas se complica, entonces las transferencias entre líneas se tornan más inseguras y por ende crece el riesgo de que aumente el tiempo de viaje de los pasajeros, debido a que se pierda alguna conexión. Para [3], en lo posible, estas consideraciones deben ser incluidas en la información de entrada para los modelos, donde las transferencias que incluyan un mayor número de pasajeros deberían tener prioridad dentro de la planificación. En [17] se trata dos problemas donde se considera el tiempo de viaje de las rutas, transferencias entre líneas y el tiempo mínimo necesario para que los pasajeros puedan realizar las transferencias.

2.3. Enrutamiento de pasajeros

En modelos PESP para la calendarización de viajes, habitualmente se necesita de la información de la demanda de pasajeros en forma de un enrutamiento. Un enrutamiento indica la cantidad de pasajeros que usan cada una de las diferentes rutas disponibles de la red de transporte dentro de un cierto horizonte de tiempo. Los datos de la demanda de transporte pasajeros usualmente son recolectados en forma de una matriz origen-destino que, como su nombre lo indica, es una matriz cuyos elementos corresponden a las cantidades de pasajeros que se desplazan entre pares ordenados de estaciones de origen y destino dentro del horizonte de tiempo. Para poder usar la información de la matriz OD (origen-destino) en el modelo PESP, se necesita resolver previamente el problema de enrutamiento de pasajeros.

El enrutamiento de pasajeros es la fase inmediatamente anterior a la calendarización de viajes. Toma como entrada la matriz OD y el plan

de líneas previamente establecido. Su objetivo es calcular la ruta que cada uno de los pasajeros tomará dentro del sistema para desplazarse desde su estación de origen hacia su estación de destino. A partir de esta información, es posible a su vez determinar el número de pasajeros que viajarán por cada uno de los caminos (y por cada uno de los arcos) de la red de transporte, dentro del horizonte de tiempo considerado. Existen varios objetivos que se pueden considerar al momento de enrutar a los pasajeros, pero esencialmente se trata de pensar en qué es lo que más le convendría al pasajero. Los usuarios deciden sus rutas no solamente pensando en minimizar su tiempo de viaje, sino también en reducir el número de transferencias, disminuir la distancia recorrida, minimizar las tarifas a pagar, entre algunos posibles criterios. Como se señala en [18], planear un sistema de transporte público “atractivo” requiere de mucha consideración sobre cómo funciona el comportamiento humano y de un buen conocimiento de los valores culturales locales.

El criterio empleado para el enrutamiento de pasajeros es esencial para el buen desempeño de la calendarización, puesto que el flujo de pasajeros a lo largo del sistema determina cuáles son las estaciones con más afluencia, las mismas que durante la calendarización serán priorizadas al momento de asignar los horarios más convenientes. Generalmente, se acostumbra utilizar el enrutamiento a lo largo de caminos más cortos, aunque en [19] se presenta un análisis de diferentes tipos de enrutamiento y cómo estos afectan a las subsecuentes etapas de la planificación. Es aquí donde interviene otro factor; debe considerarse cuál podría ser el comportamiento del pasajero en la práctica. Es posible que al tener conocimiento de los horarios establecidos en la fase de calendarización, los pasajeros decidan usar caminos distintos a aquellos que se determinaron en el enrutamiento, haciendo que la función objetivo de la calendarización pierda su valor práctico. Esta interacción y retroalimentación entre fases consecutivas de la planificación del transporte ocurre con frecuencia y explica la complejidad inherente a este problema.

2.4. Integración de fases

A pesar de la relativa facilidad computacional que puede brindar el método de resoluciones individuales y secuenciales para la planificación del transporte, lo cierto es que lo ideal sería todas las etapas sean tratadas de manera simultánea con el fin de obtener mejores resultados para todo el sistema. En el proceso de resolución secuencial, la solución óptima de una etapa sirve como entrada para la fase siguiente, la resolución óptima de esta será la entrada de una siguiente y así hasta completar el proceso. Obtenemos entonces varias soluciones óptimas por fase, eso en caso de que se pueda calcular un óptimo en cada fase. Sin embargo, esto no necesariamente resultará en la solución óptima para todo el sistema.

El último argumento motiva la necesidad de considerar la integración de las fases: de enrutamiento y calendarización. Esta integración permitiría obtener elaborados al considerar las rutas que los pasajeros realmente querrían tomar dentro del sistema. Algunos estudios previos han abordado la integración de estas dos etapas. Por ejemplo, en [2] se añade el enrutamiento a un modelo de calendarización periódico usando restricciones de flujo, y en [18] se muestra un enrutamiento fijado a priori que lleva a resultados arbitrariamente malos si se compara con un modelo que integra el enrutamiento.

En [2] se presenta el modelo *TimePass*, que integra el enrutamiento de pasajeros y la calendarización de viajes, usando como base al modelo PESP para la planificación periódica. Añade el enrutamiento usando restricciones de flujo para enviar a los pasajeros a través de la red del sistema de transporte. Este modelo, que puede ser formulado usando programación entera, permitió encontrar mejores soluciones en instancias pequeñas y medianas del problema de calendarización, en comparación al modelo PESP aplicado sobre las mismas instancias con las rutas de los pasajeros fijadas previamente.

La consideración simultánea de información hace posible la retroalimentación entre varias fases, lo que explica los mejores resultados obtenidos globalmente para el sistema, por los modelos integrados de planificación de transporte. Sin el elevado costo computacional que demanda la solución de los modelos integrados ha dificultado su amplia difusión co-

mo herramientas prácticas. De hecho, hasta hace algunos años, muchos modelos eran aún imposibles de resolver para instancias reales. Gracias al avance tecnológico en las últimas dos décadas, algunos esquemas de solución que integran dos fases consecutivas de la planificación se han vuelto más accesibles, a menudo combinados con técnicas heurísticas para disminuir el tamaño del problema.

Esta observación es particularmente cierta para el modelo presentado en [2]. A diferencia del modelo PESP en [13], que tiene una función objetivo lineal, el modelo TimePass aumenta la complejidad del modelo PESP y lo convierte en un programa entero cuadrático. A esto se suma la enorme cantidad de variables y restricciones que se deben incluir para solucionar el enrutamiento en instancias reales, incluso de tamaño mediano. Por estas razones, no es posible resolver estas instancias con la aplicación directa de algún algoritmo exacto tipo *branch-and-cut*, lo que lleva a los autores a desarrollar heurísticas que ayuden a alivianar el tamaño del problema.

Una primera forma de abordar la complejidad adicional del modelo TimePass es mediante la linealización de la función objetivo. Esto conlleva sus propios problemas, sin embargo, es una forma rápida y sencilla para agilizar la obtención de una solución factible. Respecto a las heurísticas, en [20] y [16] se sugiere la recalendarización, la cual consiste en resolver de manera iterativa las etapas de enrutamiento y calendarización, utilizando como datos de entrada la solución obtenida en la iteración anterior. Esta es una heurística de fácil comprensión e implementación aunque, como se muestra en [16], la recalendarización puede empeorar el tiempo de viaje promedio en algunas ocasiones.

En [2] se propone disminuir el número de variables involucradas en el modelo. Esto se hace calculando de antemano cuáles son las rutas menos probables de ser elegidas por los pasajeros, sea cual fuere el resultado de la calendarización, con el objetivo de eliminar las variables correspondientes del modelo. Esta podría parecer una idea sencilla, pero su aplicación implica la utilización de conceptos más complejos como el manejo de peores y mejores casos. Otra heurística similar se describe en [20], donde para afrontar la inmensa cantidad de variables se reduce

el número de pares origen-destino a ser considerados en el enrutamiento, utilizando solamente algunos pares cuyos caminos de salida-llegada se consideren los más relevantes (de acuerdo a la cantidad esperada de pasajeros) y fijando de antemano algunos enrutamientos entre pares. Al aplicar el modelo y las respectivas heurísticas de solución a 3 instancias reales, se obtuvo una reducción de hasta el 87.8% en el tiempo de viaje promedio, en comparación con anteriores resultados.

En los capítulos siguientes del presente trabajo de integración curricular, se estudiará la aplicación de dos modelos para la resolución de las etapas de enrutamiento de pasajeros y calendarización de viajes. El modelo PESP propuesto en [1] y recogido en [13] aborda exclusivamente la calendarización de viajes. El modelo TimePass propuesto en [2], en cambio, contempla la integración de las etapas de enrutamiento y calendarización, y a pesar de tener una formulación sencilla, nos permite entender el beneficio de la integración de fases y a la vez la complejidad que se encuentra detrás de su resolución así como la necesidad del desarrollo de heurísticas para encontrar soluciones factibles.

Capítulo 3

Formulación de modelos

En este capítulo se abordarán de manera más detallada y formal dos modelos usados para la calendarización de viajes y el enrutamiento de pasajeros. El primer modelo, PESP, es usado para la resolución de la etapa de calendarización de viajes. El segundo modelo, TimePass, se aplica en la integración del enrutamiento de pasajeros y la calendarización. Se presentan primero algunas definiciones generales y específicas que servirán para formular los modelos. Finalmente, se dará un vistazo a dos heurísticas propuestas para el modelo TimePass, que por su complejidad computacional, requiere de trabajo adicional para poder hallar soluciones factibles en instancias de tamaño mediano y grande.

3.1. Definiciones generales

DEFINICIÓN 3.1. *Un grafo $G = (V, E)$ consiste de un conjunto de nodos V y uno de aristas $E \subset \{\{i, j\} : i, j \in V\}$, donde una arista $a = \{i, j\}$ conecta a un nodo i e j , los cuales se conocen como extremos de a .*

DEFINICIÓN 3.2. *Un grafo dirigido $G = (V, A)$ consiste de un conjunto de nodos V y uno de arcos dirigidos $A \subset V \times V$, donde un arco $a = (i, j)$ conecta a un nodo i e j . Adicionalmente, decimos que i es el extremo inicial de a , y que j es su extremo final.*

DEFINICIÓN 3.3. *Un camino P es una sucesión alternada de nodos y aris-*

tas (o arcos) de un grafo (o grafo dirigido), es decir, $P = (v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, e_{n-1}, v_n)$, donde $v_i \in V, \forall 1 \leq i \leq n$, $e_i \in E, \forall 1 \leq i \leq n - 1$ (o $e_i \in A, \forall 1 \leq i \leq n - 1$), y $e_i = \{v_i, v_{i+1}\}$ (o $e_i = (v_i, v_{i+1})$) se cumple para todo $i \in \{1, \dots, n - 1\}$. Cuando no hay lugar a confusión, es común denotar a un camino únicamente por medio de la sucesión de sus aristas (o arcos) e_i o por sus nodos v_i .

Adicionalmente, emplearemos la notación $v \in P$ o $e \in P$ para indicar que un nodo v o una arista (arco) e pertenece a un camino P , respectivamente.

En algunos casos, las aristas (o arcos) de un grafo tienen asociadas longitudes o costos, que pueden usarse para definir la longitud o el costo de un camino.

DEFINICIÓN 3.4. Longitud de un camino. Si la longitud de una arista o arco e es long_e entonces la longitud de un camino P se define como

$$\text{long}_P = \sum_{e \in P} \text{long}_e$$

DEFINICIÓN 3.5. Red de transporte público (Public Transportation Network o PTN) Una red de transporte público es un grafo (V, E) cuyos nodos $v \in V$ corresponden a las estaciones o paradas de un sistema de transporte, mientras que las aristas $e \in E$ representan las conexiones directas que existen entre las paradas. Dependiendo de la aplicación, una PTN puede ser representada también por un grafo dirigido, cuando es importante modelizar el sentido de los viajes entre las paradas.

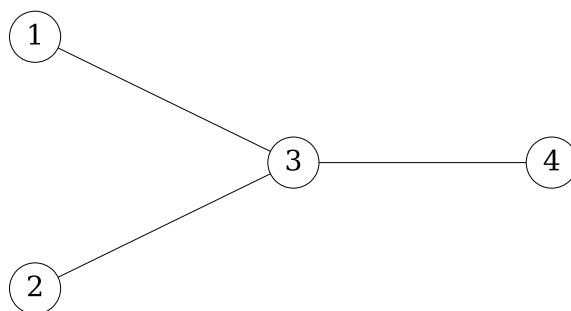


Figura 3.1: Ejemplo de una PTN con 4 estaciones.

DEFINICIÓN 3.6. Matriz Origen-Destino Una matriz origen-destino, también designada comúnmente como matriz OD, es una matriz cuadrada $C = (C_{u,v})_{u,v \in V}$ cuyas entradas indican el número de pasajeros $C_{u,v}$ que viajan desde una estación de origen u hasta una estación de destino v dentro de la red de transporte público en un horizonte de tiempo determinado. El conjunto \mathcal{R} de pares origen-destino contiene todos los pares ordenados de estaciones entre las cuales hay un número positivo de viajeros dentro del horizonte de tiempo, es decir:

$$\mathcal{R} = \{(u, v) \in V \times V : C_{u,v} > 0\}.$$

DEFINICIÓN 3.7. Línea y conjunto de líneas Una línea l es un camino dentro de una PTN operada de principio a fin por un solo vehículo. El símbolo \mathcal{L} representa un conjunto de líneas operadas dentro del sistema ^{1 2}.

3.2. Modelo PESP

El modelo PESP descrito a continuación para calendarización de viajes periódicos en el sistema de transporte público, fue obtenido de [13] que está basado en la formulación propuesta originalmente en [1]. Este modelo de programación lineal entera toma como datos de entrada una PTN, un conjunto \mathcal{L} de líneas en operación, las cuales fueron seleccionadas en la etapa anterior de planificación de líneas y un conjunto de valores de carga sobre los arcos de la PTN, los cuales corresponden al número de pasajeros que se desplazan sobre cada arco y fueron determinados a partir de la matriz OD en la fase previa de enrutamiento de pasajeros. Con

¹La notación empleada en este documento difiere un poco de la notación utilizada en la literatura de planificación de líneas, donde es común emplear \mathcal{L} para designar al reservorio de líneas (*line pool*), es decir, al conjunto universo de todas las líneas que técnicamente pueden ser implementadas en una PTN, de entre las cuales deben seleccionarse aquellas que efectivamente serán operadas. Debido a que no trataremos el problema de planificación de líneas, esta simplificación de la notación no tiene implicaciones para la claridad del documento.

²Durante la fase de planificación de líneas, además de seleccionar las líneas a ser operadas dentro de la PTN, se determinan frecuencias para las mismas. La frecuencia de una línea es el número de viajes de la misma que se realizarán dentro del horizonte de tiempo. Como es usual en la literatura de calendarización de viajes, asumiremos en este documento que todas las líneas tienen frecuencias iguales a 1, reemplazando dentro de \mathcal{L} una línea con frecuencia igual a k por k líneas idénticas de frecuencia unitaria.

esta información, el modelo PESP devuelve un horario de salida y llegada para cada línea, en cada una de las estaciones visitadas por esta, de tal forma que se minimice el tiempo total de viaje de los pasajeros dentro del sistema de transporte. Esta planificación es periódica, es decir, se establece para un período fijo que en la práctica suele ser 60 o 30 minutos, y luego es replicada de manera uniforme a lo largo de un horizonte de tiempo mayor.

El modelo PESP está formulado sobre una red auxiliar conocida como red evento-actividad (Event-Activity Network, EAN), la que se define en detalle a continuación.

DEFINICIÓN 3.8. Red evento-actividad (EAN) Una red evento-actividad (Event-Activity Network, EAN) $\mathcal{N}^0 = (\mathcal{E}^0, \mathcal{A}^0)$ es un grafo dirigido construido a partir de una PTN (V, E) y de un conjunto de líneas \mathcal{L} . Sus nodos corresponden a un conjunto de eventos, \mathcal{E}^0 , mientras que sus aristas corresponden a un conjunto de actividades, \mathcal{A}^0 . Un evento representa la llegada o salida de un vehículo a una determinada estación, mientras que las actividades modelizan acciones que realiza el pasajero durante su viaje, que pueden ser de tres tipos dependiendo que eventos une la actividad. Estas pueden ser: actividades de conducción o desplazamiento, de espera y de transferencia.

Formalmente, $\mathcal{N}^0 = (\mathcal{E}^0, \mathcal{A}^0)$, se constituye de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^0 &= \mathcal{E}_{\text{arr}} \cup \mathcal{E}_{\text{dep}} \text{ con} \\ \mathcal{E}_{\text{arr}} &= \{(v, \text{arr}, l) : v \in l \cap V, l \in \mathcal{L}\}, \\ \mathcal{E}_{\text{dep}} &= \{(v, \text{dep}, l) : v \in l \cap V, l \in \mathcal{L}\}, \\ \mathcal{A}^0 &= \mathcal{A}_{\text{drive}} \cup \mathcal{A}_{\text{wait}} \cup \mathcal{A}_{\text{trans}} \text{ con} \\ \mathcal{A}_{\text{drive}} &= \{((v_1, \text{dep}, l), (v_2, \text{arr}, l)) : e = (v_1, v_2) \in E(l), l \in \mathcal{L}\}, \\ \mathcal{A}_{\text{wait}} &= \{((v, \text{arr}, l), (v, \text{dep}, l)) : v \in V(l), l \in \mathcal{L}\}, \\ \mathcal{A}_{\text{trans}} &= \{((v, \text{arr}, l_1), (v, \text{dep}, l_2)) : v \in V(l_1) \cap V(l_2), l_1, l_2 \in \mathcal{L}, l_1 \neq l_2\}, \end{aligned}$$

donde, conforme a la notación de la definición 3.3, $V(l)$ y $E(l)$ denotan al conjunto de nodos y aristas de l , respectivamente.

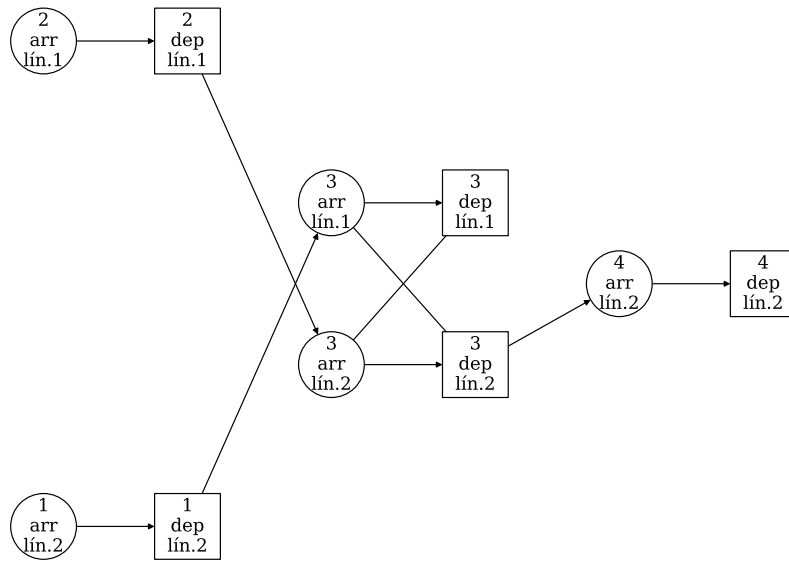


Figura 3.2: EAN basada en la PTN de la Figura 3.1, con dos líneas.

La línea 1 recorre las estaciones 2 y 3 mientras que la línea 2 recorre las estaciones 1, 3 y 4.

El conjunto de eventos \mathcal{E}^0 está conformado por dos subconjuntos; \mathcal{E}_{arr} que representa a los eventos de llegada y \mathcal{E}_{dep} que representa los eventos de la salida de las líneas en las estaciones de la PTN. Cada evento se denota por una tripleta (v, etq, l) donde $v \in V$ indica una estación, $l \in \mathcal{L}$ es una línea que pasa por esa estación y, “etq” es una etiqueta que indica si el evento corresponde a la salida (dep) o la llegada (arr) de la línea l a la estación v . En el conjunto de actividades, \mathcal{A}^0 , tenemos tres subconjuntos:

1. Actividades de conducción, \mathcal{A}_{drive} : Corresponden a los desplazamientos que realizan los pasajeros dentro de vehículos del sistema de transporte público. Cada actividad de conducción se representa en la EAN por medio de un arco $((v_1, dep, l), (v_2, arr, l))$ que conecta el evento correspondiente a la salida de un vehículo de la línea l de la estación $v_1 \in V(l)$ con el evento que indica la llegada del vehículo a la siguiente estación v_2 de la misma línea.
2. Actividades de espera, \mathcal{A}_{wait} : Corresponden a las esperas que reali-

zan los pasajeros dentro de los vehículos en las paradas intermedias de su viaje. Cada actividad de espera se representa por un arco $((v, arr, l), (v, dep, l))$ que conecta el evento de llegada de un vehículo de la línea l a la estación $v \in V(l)$ con el evento de salida de este vehículo desde la misma estación.

3. Actividades de transferencia, \mathcal{A}_{trans} : Corresponden a los cambios de vehículo (y de línea) que realizan los pasajeros durante sus viajes. Cada actividad de transferencia se representa por un arco $((v, arr, l_1), (v, dep, l_2))$ que conecta el evento de llegada de un vehículo de la línea l_1 a la estación $v \in V(l_1)$ con el evento de salida de un vehículo de otra línea l_2 desde la misma estación, para lo cual debe tenerse que $v \in V(l_2)$.

La Figura 3.3 muestra el ejemplo de una EAN, construida a partir de la PTN de la Figura 3.2. y de un conjunto \mathcal{L} que incluye dos líneas.

Cada una de las actividades $a = (i, j) \in \mathcal{A}^0$, conecta un evento inicial $i \in \mathcal{E}^0$ con un evento final $j \in \mathcal{E}^0$. Si se asignan horarios (esto es, instantes en el tiempo) para la ocurrencia de cada evento, entonces esta asignación induce una duración para cada actividad, que corresponde al tiempo transcurrido desde el momento de ocurrencia de su evento inicial i hasta el momento en que ocurre su evento final j .

DEFINICIÓN 3.9. Duración de una actividad Para una actividad $a = (i, j) \in \mathcal{A}^0$, su duración con respecto a un horario periódico π se nota como $d_a(\pi)$ y se calcula como:

$$d_a(\pi) = (\pi_j - \pi_i - L_a) \quad \text{mód } T + L_a$$

En el problema de calendarización de viajes se busca una asignación de horarios que garantice que la duración de cada actividad se encuentre entre dos límites preestablecidos. Estos límites se notarán como L_a y $U_a \in \mathbb{N}$ para el límite inferior y superior respectivamente, con $0 \leq L_a \leq U_a$.

DEFINICIÓN 3.10. Horario periódico factible Sea \mathcal{N}^0 una EAN con límites L_a, U_a para cada actividad $a \in \mathcal{A}^0$ y sea $T \in \mathbb{N}$. Un horario periódico factible $\pi = (\pi_i)_{i \in \mathcal{E}^0} \in \{0, \dots, T-1\}^{|\mathcal{E}^0|}$ es una tupla donde cada elemento π_i se corresponde con un evento i en el conjunto de eventos \mathcal{E}^0 . El valor

π_i indica el momento en el que evento i debe realizarse, de tal forma que la duración de cada una de las actividades $a = (i, j) \in \mathcal{A}^0$ permanezca dentro de los límites fijados. Se asume que los valores de π_i están dados en módulo T (por ejemplo, minutos dentro de una hora). Formalmente, un horario periódico factible satisface:

$$L_a \leq d_a(\pi) \leq U_a.$$

El objetivo de la calendarización de viajes es fijar horarios para los eventos de la EAN de tal forma que se minimice el tiempo agregado de viaje de todos los pasajeros del sistema. Desde luego, este tiempo depende de los caminos que tomen los pasajeros desde sus orígenes a sus destinos. Esta información se conoce como el enrutamiento de pasajeros.

DEFINICIÓN 3.11. Enrutamiento de pasajeros Dados una EAN \mathcal{N}^0 y una matriz origen-destino C , un enrutamiento de pasajeros \mathcal{R} es un conjunto de caminos en la EAN tales que a cada uno de los pasajeros le corresponde un camino desde su estación de origen hasta su estación de destino. Este camino se denomina ruta del pasajero.

Las rutas de los pasajeros inducen cargas sobre los arcos de la EAN, que corresponden al número de pasajeros que comparten una misma actividad dentro de sus trayectos.

DEFINICIÓN 3.12. Carga por pasajeros Dados una EAN $\mathcal{N}^0 = (\mathcal{E}^0, \mathcal{A}^0)$ y un enrutamiento \mathcal{R} , la carga de pasajeros inducida por \mathcal{R} sobre \mathcal{N}^0 , $w = (w_a)_{a \in \mathcal{A}^0}$ es una tupla que indica el número de pasajeros, $w_a \geq 0$ que comparten cada actividad $a \in \mathcal{A}^0$ dentro de sus rutas. Esta tupla está dada por:

$$w_a = |\{P \in \mathcal{R} : a \in P\}|, \quad \forall a \in \mathcal{A}^0$$

Con estas definiciones se puede introducir el *problema de calendarización periódica*.

PROBLEMA 3.2.1. Problema de calendarización periódica (PESP)

Dados una EAN \mathcal{N}^0 con límites inferior y superior L_a y U_a , para la duración de cada actividad $a \in \mathcal{A}^0$, una tupla de carga de pasajeros $w = (w_a)_{a \in \mathcal{A}^0}$, y una longitud del periodo de planificación $T \in \mathbb{Z}$, el problema de

calendarización periódica (*Periodic Event Scheduling Problem, PESP*) consiste en encontrar un horario periódico factible $\pi = (\pi_i)_{i \in \mathcal{E}^0} \in \{0, \dots, T-1\}^{|\mathcal{E}^0|}$ tal que el tiempo total de viaje de todos los pasajeros del sistema

$$\sum_{a=(i,j) \in \mathcal{A}^0} w_a \cdot d_a(\pi)$$

se minimice.

La formulación estándar para PESP propuesta en [1] es la siguiente:

$$\text{mín} \quad \sum_{a=(i,j) \in \mathcal{A}^0} w_a \cdot (\pi_j - \pi_i + z_a \cdot T)$$

$$\begin{aligned} \text{s. a} \quad & \pi_j - \pi_i + z_a \cdot T \geq L_a, & a = (i, j) \in \mathcal{A}^0, \\ & \pi_j - \pi_i + z_a \cdot T \leq U_a, & a = (i, j) \in \mathcal{A}^0, \\ & \pi_i \in \{0, \dots, T-1\}, & i \in \mathcal{E}^0, \\ & z_a \in \mathbb{Z}, & a \in \mathcal{A}^0. \end{aligned}$$

En esta formulación, $\pi_i \in \{0, \dots, T-1\}, i \in \mathcal{E}^0$ son las variables de decisión que indican el horario de cada uno de los eventos. Las variables $z_a \in \mathbb{Z}, a \in \mathcal{A}^0$, llamadas *parámetros módulo*, ayudan a calcular la periodicidad de los horarios; tienen el valor de 0 si la actividad alcanza a realizarse dentro del periodo T , y el valor de 1 si la actividad se realiza entre la culminación y el inicio de un nuevo periodo.

Las dos familias de restricciones establecen la factibilidad del horario, al requerir que la duración de cada actividad se encuentre dentro de sus respectivos límites.

3.3. Modelo TimePass

El modelo TimePass aborda de manera integrada la calendarización de viajes y el enrutamiento de pasajeros. El modelo fue propuesto en [2] y está basado en PESP, pero añade restricciones de flujo sobre una EAN extendida para integrar el enrutamiento.

Previo a formular el modelo, requerimos introducir el concepto de red evento actividad extendida.

DEFINICIÓN 3.13. Red evento actividad extendida Una red evento actividad extendida es un grafo dirigido $\mathcal{N} = (\mathcal{E}, \mathcal{A})$, construido a partir de una EAN $\mathcal{N}^0 = (\mathcal{E}^0, \mathcal{A}^0)$, a la que se añaden dos nuevos conjuntos de eventos, “origen” (source) y “destino” (target) vinculados a cada una de las estaciones de la red de transporte. Adicionalmente, se crean dos nuevos conjuntos de actividades, “desde” (from) y “hacia” (to), que unen eventos fuente con eventos salida y eventos llegada con eventos destino dentro de cada estación.

De manera formal:

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \mathcal{E}^0 \cup \mathcal{E}_{\text{source}} \cup \mathcal{E}_{\text{target}} \text{ con:} \\ \mathcal{E}_{\text{source}} &= \{(v, \text{source}) : v \in V\}, \\ \mathcal{E}_{\text{target}} &= \{(v, \text{target}) : v \in V\}, \\ \mathcal{A} &= \mathcal{A}^0 \cup \mathcal{A}_{\text{to}} \cup \mathcal{A}_{\text{from}} \text{ con:} \\ \mathcal{A}_{\text{to}} &= \{((v, \text{source}), (v, \text{dep}, l)) : v \in V(l), l \in \mathcal{L}\}, \\ \mathcal{A}_{\text{from}} &= \{((v, \text{arr}, l), (v, \text{target})) : v \in V(l), l \in \mathcal{L}\}.\end{aligned}$$

La Figura 3.3 muestra un ejemplo de una EAN extendida.

Llamamos a estos nuevos conjuntos como “auxiliares”:

- Eventos auxiliares: $\mathcal{E}_{\text{aux}} = \mathcal{E}_{\text{source}} \cup \mathcal{E}_{\text{target}}$,
- Actividades auxiliares: $\mathcal{A}_{\text{aux}} = \mathcal{A}_{\text{to}} \cup \mathcal{A}_{\text{from}}$.

El enrutamiento de pasajeros se formula como un flujo multiproducto, donde cada producto simboliza el desplazamiento de pasajeros a lo largo de una ruta desde un origen hasta un destino. Para ello se construye un vector de demanda por cada par origen-destino:

DEFINICIÓN 3.14. Vector demanda de transporte Dado un par origen-destino $(u, v) \in \mathcal{R}$, el vector de demanda de transporte $b^{u,v} \in \{0, 1, -1\}^{|\mathcal{E}|}$ es un vector de dimensión $|\mathcal{E}|$ que tiene el valor de 1 en la componente identificada con el evento origen de la estación u , -1 en la componente que corresponde al evento destino de la estación v , y 0 en el resto de

componentes. Formalmente,

$$b_i^{u,v} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = (u, \text{source}), \\ -1, & \text{si } v = (v, \text{target}), \\ 0, & \text{en los demás casos.} \end{cases}$$

Es posible ampliar el concepto de vector de duración de las actividades $d(\pi)$ (ver Definición 3.9) a la EAN extendida, fijando la duración de las actividades auxiliares $a \in \mathcal{A}_{\text{aux}}$ a $d_a(\pi) = 0$ para cualquier horario π .

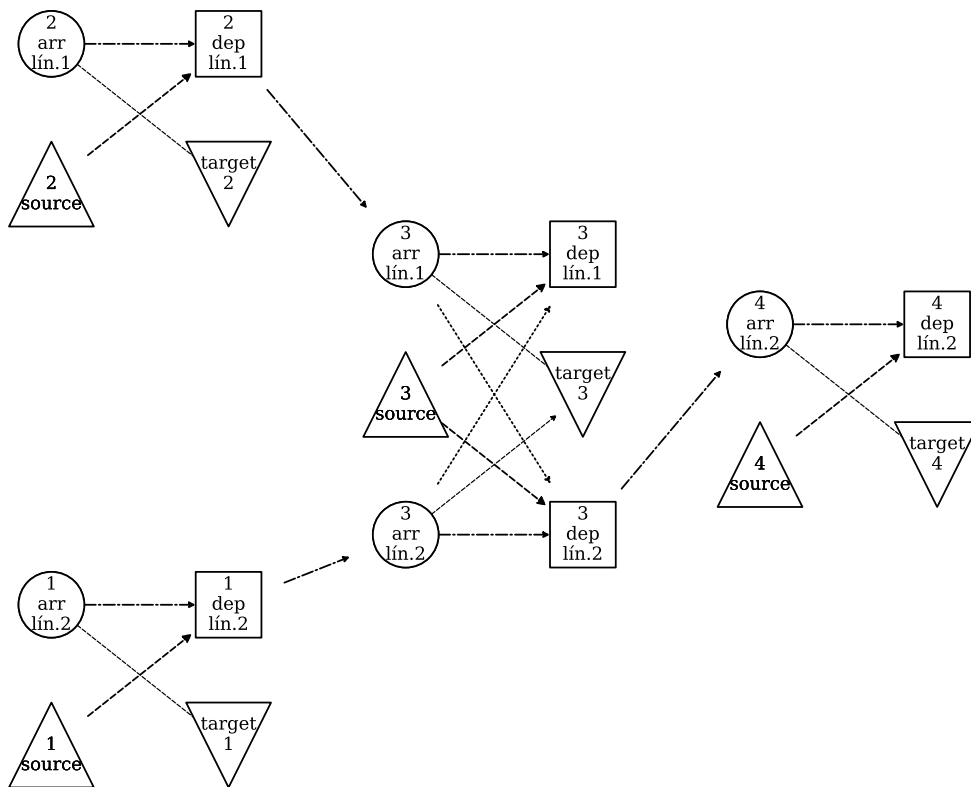


Figura 3.3: EAN extendida basada en la EAN de la Figura 3.2

Por otra parte, la duración de un camino sobre la EAN extendida se

define a partir de la duración de las actividades (arcos) de esta red.

DEFINICIÓN 3.15. Duración de un camino Sean \mathcal{N} una EAN extendida, π un horario periódico para los eventos de \mathcal{N} y $d(\pi) = (d_a(\pi))_{a \in \mathcal{A}}$ el vector correspondiente de duración de las actividades. Sea un vector $k = (k_a)_{a \in \mathcal{A}}$ cualquiera, la duración de un camino P en \mathcal{N} se define como

$$d_P(\pi) = \sum_{d_a(\pi)} d_a(\pi)$$

DEFINICIÓN 3.16. Camino más corto para el par origen-destino (u, v) Dadas dos estaciones u, v en una red de transporte $SP_{u,v,\pi}$ denota un camino más corto dentro de la EAN extendida correspondiente desde el evento $(u, source)$ hasta $(v, target)$ según el vector de duraciones $d(\pi)$, es decir, un camino para el cual $d_P(\pi)$ es mínima.

Con estas definiciones introducimos el problema integrado de calendarización y enrutamiento.

PROBLEMA 3.3.1. Problema integrado de calendarización de viajes y enrutamiento de pasajeros (TimePass).

Sean $\mathcal{N} = (\mathcal{E}, \mathcal{A})$ una red evento-actividad extendida, con límites para la duración de actividades L_a y $U_a, a \in \mathcal{A}^0$, T la duración del periodo de planificación y C una matriz origen-destino. En el problema integrado de calendarización de viajes y enrutamiento de pasajeros se pide encontrar un horario periódico factible π con una duración de periodo T , tal que se minimice el tiempo total de viaje de todos los pasajeros, bajo la suposición de que cada pasajero empleará el camino más corto para su desplazamiento, es decir, se busca minimizar la siguiente función objetivo:

$$\sum_{(u,v) \in OD} C_{u,v} \cdot d_{SP_{u,v,\pi}}(\pi).$$

Una posible formulación para este problema como un programa entero se describe a continuación:

$$\text{mín} \quad \sum_{(u,v) \in C} C_{(u,v)} \cdot \sum_{a=(i,j) \in \mathcal{A}^0} p_a^{u,v} \cdot (\pi_j - \pi_i + z_a \cdot T)$$

$$\begin{array}{ll}
\text{s. a} & \pi_j - \pi_i + z_a \cdot T \geq L_a, & a = (i, j) \in \mathcal{A}^0, \\
& \pi_j - \pi_i + z_a \cdot T \leq U_a, & a = (i, j) \in \mathcal{A}^0, \\
& A \cdot (p_a^{u,v})_{a \in \mathcal{A}} = b^{u,v}, & (u, v) \in C, \\
& \pi_i \in \{0, \dots, T - 1\}, & i \in \mathcal{E}^0, \\
& z_a \in \mathbb{Z}, & a \in \mathcal{A}^0, \\
& p_a^{u,v} \in \{0, 1\}, & (u, v) \in C, a \in \mathcal{A}.
\end{array}$$

El horario periódico factible se modela con las siguientes variables de decisión:

- Variables enteras $\pi_i \in \{0, \dots, T - 1\}, i \in \mathcal{E}^0$ que indican los horarios en los que se deben realizar los eventos.
- Variables enteras positivas $z_a, a \in \mathcal{A}^0$ que modelan la periodicidad del horario.
- Variables binarias $p_a^{u,v}, a \in \mathcal{A}, (u, v) \in C$ que indican, para cada par origen-destino $(u, v) \in \mathcal{R}$ el camino dentro de la EAN extendida que tomarán los pasajeros para su desplazamiento en la red.

Al igual que en el modelo PESP, las dos primeras familias de restricciones requieren que la duración de las actividades se mantenga dentro de los límites establecidos, es decir, que el horario π sea factible. La tercera familia de restricciones caracteriza al flujo de pasajeros, asegurándose que, para cada par origen-destino (u, v) , el conjunto de arcos seleccionados (arcos con $p_a^{u,v} = 1$) forme un camino desde u hasta v .

3.3.1. Linealización del modelo TimePass

El modelo TimePass, a diferencia del PESP, tiene una función cuadrática, lo que puede resultar en múltiples inconvenientes al tratar de resolver grandes instancias. Además, las variables y restricciones que modelan al flujo de pasajeros en modelo TimePass crean una inmensa cantidad de información, lo que hace que sea un problema incluso más difícil de abordar. Para facilitar la solución computacional del problema, se linealizará la función objetivo de TimePass empleando la estrategia que se propone en [13]:

La multiplicación de variables $p_a^{u,v} \cdot (\pi_j - \pi_i + z_a \cdot T)$ en la función objetivo será sustituida por la variable $d_a^{u,v}$, con $a = (i, j) \in \mathcal{A}^0$, $(u, v) \in \mathcal{R}$.

Al crear las variables d , deben añadirse las siguientes restricciones:

$$\begin{aligned} d_a^{u,v} &\geq 0, & a &= (i, j) \in \mathcal{A}^0, (u, v) \in \mathcal{R} \\ d_a^{u,v} &\geq \pi_j - \pi_i + z_a \cdot T - (1 - p_a^{u,v}) \cdot M, & a &= (i, j) \in \mathcal{A}^0, (u, v) \in \mathcal{R} \end{aligned}$$

donde M es un valor suficientemente grande, para que las restricciones segunda familia sean redundantes cada vez que $p_a^{u,v} = 0$. Basta elegir $M \geq \max_{a \in \mathcal{A}^0} \{U_a\}$.

3.4. Frecuencia y retorno de líneas

Como ya se indicó antes, a pesar de no contemplarlo explícitamente, los modelos PESP y TimePass pueden considerar en la modelización la frecuencia de las líneas. La frecuencia indica el número de viajes previstos de una línea, para cubrir la demanda de pasajeros dentro del horizonte de tiempo T . Estas frecuencias pueden ser introducidas al modelo identificándolas como líneas independientes unas de otras, es decir, se puede sustituir una línea l_b con frecuencia n con una familia $l_{b_1}, l_{b_2}, \dots, l_{b_n}$ de líneas independientes que comparten la misma ruta, y que usualmente se denominan “copias” de la l_b . Algo similar se realiza con las líneas de retorno, que comparten ruta con las originales, pero cubren el recorrido de forma inversa, i.e representan el viaje de regreso. Esto, por supuesto, aumentará considerablemente el tamaño de la EAN y con ello la dimensión del problema.

Luego de introducidas las frecuencias y retornos (también con sus respectivas frecuencias), queda el inconveniente de que las familias de líneas compartirán un mismo espacio físico, por lo que es necesario organizar a la flota para evitar el inconveniente de que dos o más vehículos tengan que realizar la misma actividad en el mismo espacio físico al mismo tiempo. Con esta finalidad, podemos añadir restricciones que mantengan un distanciamiento entre los horarios correspondientes a copias de una misma línea. Para ello, dentro de cada familia de líneas, se fija el tiempo mínimo que cada vehículo debe esperar para hacer el recorrido después

de que otra haya salido. Generalmente, se establece un tiempo uniformemente distribuido para la salida de la primera estación de cada una de las copias de una línea.

Capítulo 4

Resultados computacionales

4.1. Descripción de instancias

En esta sección se darán descripciones de las instancias que se usaron para los experimentos computacionales con los modelos PESP y TimePass. Tres de las 5 instancias usadas provienen del software de código abierto *LinTim* [21], y fueron obtenidas directamente de [22]. Los detalles originales de las instancias pueden encontrarse en [23]. Las 2 instancias restantes son de creación propia. Para las instancias escogidas se cuenta con información de la red de transporte (estaciones y aristas), la matriz OD correspondiente, límites superiores e inferiores para cada una de las actividades de la red EAN y el horizonte de planificación T . Para 4 de las 5 instancias, la información del conjunto de líneas con sus respectivas frecuencias se obtuvo de otra componente del proyecto “Modelos integrados de optimización de transporte público” en la que se estudia la planificación del transporte público [24].

El enrutamiento de pasajeros requerido como entrada para los experimentos con PESP se obtuvo a partir de la matriz OD empleando una versión simplificada del modelo TimePass que únicamente incluye las variables y las restricciones correspondientes al flujo de pasajeros, para cada una de las instancias.

Los archivos de todas las instancias, así como todos los datos auxi-

liares generados durante las pruebas computacionales y el código fuente correspondiente a la implementación de los modelos son parte integrante de este trabajo y se entregan en soporte magnético.

4.1.1. Instancia *Juguete*

Esta instancia de creación propia es la más pequeña de todas las instancias. Fue empleada con el propósito principal de probar y entender los algoritmos de los modelos. Cuenta con 8 estaciones y dos líneas, ambas con una frecuencia de 1. El gráfico de la PTN se encuentra en la Figura 4.1

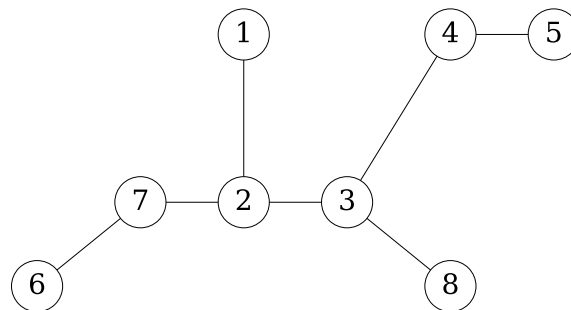


Figura 4.1: PTN de la instancia *Juguete*

La Tabla 4.1 muestra las líneas que circulan por la PTN con sus respectivas frecuencias.

Línea	Estaciones	Frecuencia
l_1	1,2,3,4,5	1
l_2	6,7,2,3,8	1

Cuadro 4.1

4.1.2. Instancia *Pequeña 1*

Esta instancia es la primera de las instancias pequeñas, obtenida de [22]. Consta de 8 estaciones, 8 aristas, un conjunto de 6 líneas con sus respectivas frecuencias, y 46 pares OD. Su representación gráfica se encuentra en la Figura 4.2

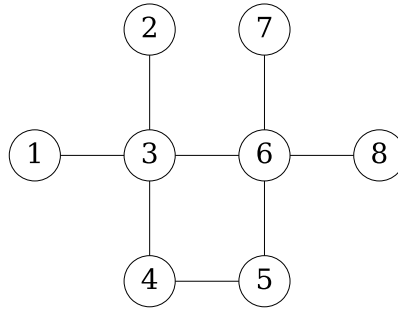


Figura 4.2: PTN de la instancia *Pequeña 1*

La Tabla 4.2 muestra las líneas que circulan por la PTN con sus respectivas frecuencias.

Línea	Estaciones	Frecuencia
l_1	2,3,6,8	3
l_2	6,5	2
l_3	3,6,5	4
l_4	2,3,4	1
l_5	4,5,6,3	1
l_6	1,3,4,5,6,7	3

Cuadro 4.2

4.1.3. Instancia *Pequeña 2*

Esta instancia es la segunda considerada pequeña, de creación propia. Consta de 10 estaciones, un conjunto de 7 líneas con sus respectivas frecuencias, y 79 pares OD. Una representación gráfica de la PTN se encuentra en la Figura 4.3.

La Tabla 4.3 muestra las líneas que circulan por la PTN con sus respectivas frecuencias.

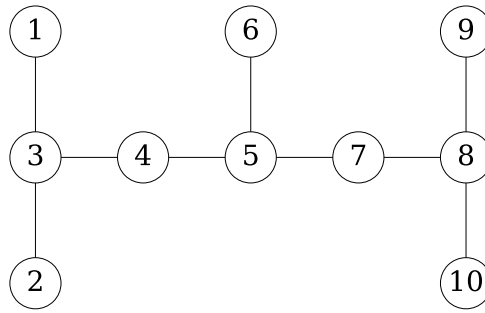


Figura 4.3: PTN de la instancia *Pequeña 2*

Línea	Estaciones	Frecuencia
l_1	1,3,4,5,6	4
l_2	10,8,7,5,6	1
l_3	6,5	7
l_4	1,3,2	3
l_5	9,8,10	5
l_6	3,4,5,7,8	11

Cuadro 4.3

4.1.4. Instancia *Grilla 5x5*

Esta instancia se considera de tamaño mediano y se obtuvo de [22]. Consta de 25 estaciones, 40 aristas, 11 líneas y 567 pares OD. Fue introducida por primera vez en [25] y ha sido utilizada como un punto de referencia en varios estudios como, por ejemplo, en [13]. La instancia es lo suficientemente compleja como para producir complicaciones desde el punto de vista computacional, y a la vez lo suficientemente pequeña como para poder llevar un seguimiento gráfico de las soluciones. La PTN se encuentra representada en la Figura 4.4

La Tabla 4.4 muestra las líneas que circulan por la PTN con sus respectivas frecuencias.

4.1.5. Instancia *Atenas*

Esta instancia de tamaño grande fue obtenida de [22]. Está basada en información real del sistema del metro de la ciudad de Atenas. Consta de 51 estaciones dispuestas como en la Figura 4.5, 20 líneas y 2385 pares

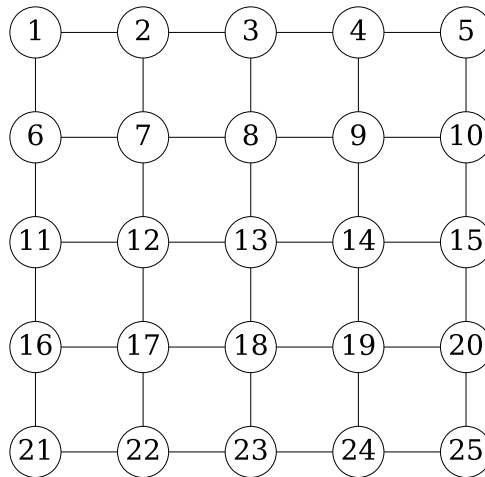


Figura 4.4: PTN de la instancia *Grilla 5x5*

OD.

La Tabla 4.5 muestra las líneas que circulan por la PTN con sus respectivas frecuencias.

Un resumen comparativo de todas las instancias respecto a sus PTN, conjuntos de líneas y otros parámetros se encuentra en la Tabla 4.13

4.2. Resultados y análisis

En esta sección se describen los resultados computacionales obtenidos al aplicar los modelos PESP y TimePass en las 5 instancias detalladas anteriormente. Para la implementación computacional de los modelos se utilizó como herramienta la API Python del software comercial de programación entera Gurobi versión 9.5.1. Los experimentos se ejecutaron sobre una computadora con sistema operativo Linux CentOS 6 de 4 procesadores Xeon de 2.6 GHz, 32 GB de RAM. Para todas las instancias se estableció un tiempo límite de cómputo de 2 horas (7200 segundos) y un valor del 1% para la tolerancia aceptable de la brecha de optimalidad (parámetros, TimeLimit y MIPGap del solver Gurobi, respectivamente).

Línea	Estaciones	Frecuencia
l_1	20,19,18,13,12,11,6,1,2,3,4,5	1
l_2	25,24,23,22,21,16,17,18,13,14,15	1
l_3	20,19,18,13,12,11,6,7,8,9,10	1
l_4	11,12,13,8,3,4,5	1
l_5	10,9,8,13,12,7,6	3
l_6	25,24,23,18,19,20	1
l_7	25,24,23,18,17,16	2
l_8	16,17,12,13,14,15	1
l_9	1,2,3,8,13	3
l_{10}	18,13	2
l_{11}	17,12	1

Cuadro 4.4

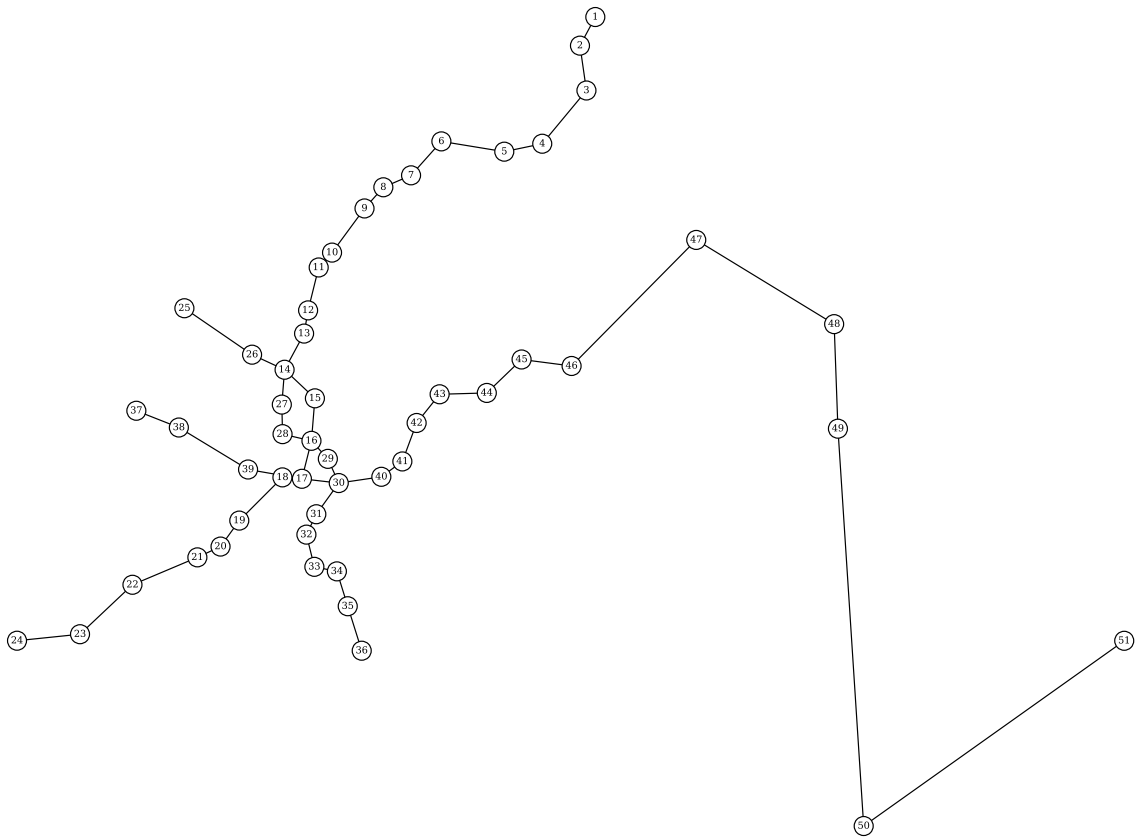


Figura 4.5: PTN de la instancia *Atenas*.

Línea	Estaciones	Frecuencia
l_1	1, 2, 3, 4, 5, 6	2
l_2	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7	1
l_3	5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14	1
l_4	6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14	2
l_5	7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14	3
l_6	10, 11, 12, 13, 14, 15, 16	1
l_7	10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20	1
l_8	16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23	2
l_9	16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24	1
l_{10}	25, 26, 14, 27, 28, 16	2
l_{11}	26, 14, 27, 28, 16, 29, 30	1
l_{12}	14, 27, 28, 16, 29, 30	6
l_{13}	14, 27, 28, 16, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35	3
l_{14}	16, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35	2
l_{15}	30, 31, 32, 33, 34, 35	1
l_{16}	30, 31, 32, 33, 34, 35, 36	2
l_{17}	37, 38, 39, 17, 30, 40, 41, 42, 43, 44, 45	7
l_{18}	30, 40, 41, 42, 43, 44, 45	1
l_{19}	30, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47	7
l_{20}	47, 48, 49, 50, 51	2

Cuadro 4.5

4.2.1. Modelo PESP

Se muestra primero, en el Cuadro 4.7, un resumen de los parámetros relacionados con el tamaño de la red evento-actividad, y por ende con el tamaño del modelo, obtenidos para instancia. Se indican el número de elementos de los conjuntos de eventos y actividades de la EAN, \mathcal{E}^0 y \mathcal{A}^0 , así como el número de variables del modelo PESP.

Vemos que el número de variables depende no solamente del número de estaciones y aristas de la PTN, sino también de los valores de frecuencias de las líneas, los que se consideran al definir la EAN. Por ejemplo, las instancias *Juguete* y *Pequeña 1* tienen números de estaciones y aristas similares, sin embargo, el número de variables creadas para cada una de ellas es significativamente diferente. Así mismo, la instancia *Grilla 5x5* tiene un número de estaciones y aristas mayor a la instancia *Pequeña 2*, pero el número de variables creadas para esta última es tres veces mayor. Aquí también, el número de frecuencias presente en la instancia *Pequeña 2* es casi el doble que en *Grilla 5x5*.

Instancia	Juguete	Pequeña 1	Pequeña 2	Grilla 5x5	Atenas
PTN: V 	8	8	10	25	51
PTN: E 	7	8	9	40	52
Pares OD	25	46	79	567	2 385
Líneas	2	6	7	11	20
Frecuencias	2	14	33	17	48
Periodo T	30	60	60	60	600
Unidad/min.	1	1	1	1	10
Pasajeros	286	2 622	4 091	2 546	63 323

Cuadro 4.6

Instancia	Juguete	Pequeña 1	Pequeña 2	Grilla 5x5	Atenas
Líneas	2	14	33	17	48
PTN: V 	8	8	10	25	51
PTN: E 	7	8	9	40	52
EAN: \mathcal{E}^0 :Vars. π	40	212	528	428	1 580
EAN: \mathcal{A}^0 :Vars. z_a	72	2 002	8 894	2 680	19 650
Variables	112	2 214	9 422	3 108	21 230

Cuadro 4.7

Los resultados computacionales de la aplicación del modelo PESP se muestran en el Cuadro 4.8. Para cada instancia se registran algunos indicadores; número de restricciones del modelo (*# Restr*), número de variables (*# Vars*), número de nodos del árbol *branch-and-cut* explorados (*# Nod*), brecha de optimalidad obtenida al final del tiempo de cálculo (*GAP*), el valor de la función objetivo de la mejor solución encontrada (*FunObj*), la mejor cota inferior para la función objetivo (*CotInf*) y el tiempo de cómputo (*Tim*) en segundos.

Instancia	# Restr	# Vars	# Nod	GAP	FunObj	CotInf	Tim
<i>Juguete</i>	144	112	514	0.7%	5010	5 043	0.22
<i>Peque. 1</i>	4 028	2 214	468	0%	30 143	30 143	3.52
<i>Peque. 2</i>	17 852	9 422	17 661	1%	177 418	179 182	816
<i>Grilla 5x5</i>	5 380	3 108	70 113	23%	78 490	102 382	7 200
<i>Atenas</i>	39 380	21 230	7 117	18%	6.88×10^7	8.38×10^7	7 200

Cuadro 4.8

Para las primeras 3 instancias se obtienen soluciones con una brecha de optimalidad menor al 1% en un tiempo de cálculo muy inferior al límite de 2 horas impuesto. De hecho, para estas instancias se encuentran soluciones óptimas de manera rápida cuando no se especifica una

tolerancia para la brecha de optimalidad (parámetro MIPGap). Para las dos últimas instancias, de tamaño mediano y grande, se logra encontrar soluciones factibles dentro del tiempo de cómputo permitido, con un gap de 23% y 17% para *Grilla 5x5* y *Atenas* respectivamente. El hecho de que la instancia mediana tenga una brecha de optimalidad mayor a la instancia más grande puede deberse a la estructura de *Grilla 5x5*; caminos de igual longitud y múltiples conexiones entre estaciones pueden conducir a varias soluciones factibles con iguales valores en la función objetivo.

4.2.2. Modelo TimePass

El modelo TimePass tiene un tamaño considerablemente mayor que PESP, introduciendo una gran cantidad de variables en cada instancia. El Cuadro 4.9 muestra el detalle del número de variables necesarias para la formulación de este modelo.

Instancia	Juguete	Peque. 1	Peque. 2	Grilla 5x5	Atenas
PTN: $ V $	8	8	10	25	51
PTN: $ E $	7	8	9	40	52
EAN: $ \mathcal{E} $	56	228	548	478	1 682
EAN: $ \mathcal{A} $	112	2 214	9 422	3 108	2 1230
Pares OD	25	46	79	567	2 385
Vars. π	40	212	528	428	1580
Vars. $p_a^{u,v}$	2 800	101 844	744 338	1 762 236	50 633 550
Vars. $d_a^{u,v}$	2 800	101 844	744 338	1 762 236	50 633 550
Vars. z_a	72	2 002	8 894	2 680	1 9650
Variables	5 712	205 902	1 498 098	3 527 580	101 288 330

Cuadro 4.9

Al igual que en el modelo PESP, el valor de las frecuencias es un factor que influye sobre el número de variables al modelo. El gran tamaño del modelo TimePass, sin embargo, se debe las variables de flujo, $p_a^{u,v}$, que crecen dependiendo del número de pares OD a ser enrutados. Cada par OD añade un número de variables igual al número de arcos de la EAN estándar, y el número de pares OD a enrutar puede ser del orden del cuadrado del número de las estaciones de la instancia. A esto hay que añadirle que la linealización del modelo TimePass crea las variables $d_a^{u,v}$, cuya cantidad es igual al de las variables de flujo, $p_a^{u,v}$.

La extensión de la EAN no afecta en gran medida al tamaño del mo-

delo, puesto que el número de variables creadas por los eventos y actividades auxiliares crece de forma lineal con el número de estaciones de la red de transporte.

Los resultados computacionales se detallan en el Cuadro 4.10 donde para cada instancia se incluyen los mismos indicadores que en la Tabla 4.8. En resumen; 3 de las 5 instancias, las pequeñas, se logra encontrar una solución factible con una brecha de optimalidad probada, mientras que para las otras dos instancias, mediana y grande, se presentan problemas para encontrar soluciones o cotas.

Instancia	# Restr	# Vars	# Nod	GAP	FunObj	CotInf	Tim
<i>Juguete</i>	3 344	5 712	1	0 %	4 067	4 067	0.45
<i>Peque. 1</i>	106 608	205 902	2 167	0.2 %	15 924	15 964	2 285
<i>Peque. 2</i>	763 770	1 498 098	1	48 %	25 301	48 632	7 200
<i>Grilla 5x5</i>	1 795 966	3 527 580	1	inf	25527	inf	7 200
<i>Atenas</i>	-	101 288 330	-	-	-	-	-

Cuadro 4.10

En la instancia *Juguete* se logra alcanzar el óptimo rápidamente. La instancia *Pequeña 1* termina con una brecha de optimalidad del 0,25 % luego de cerca de 40 minutos, de cálculo (esta instancia puede resolverse a la optimalidad si no se establece una tolerancia del 1 % para la brecha). Para la instancia *Pequeña 2* se alcanzó un gap del 47 % usando todo el tiempo de cómputo establecido. Vemos marcadas diferencias entre las tres instancias, tanto en el gap como en el tiempo requerido; claramente, esto se debe a la diferencia en los números de variables y restricciones del modelo.

El modelo de tamaño mediano emplea todo el tiempo límite establecido sin obtener una solución factible. Posteriormente, se realizaron otras pruebas con esta última instancia variando los parámetros del solver Gurobi con el fin de encontrar alguna solución factible. Los ajustes en los parámetros se detallan más abajo. Ninguno de los ajustes intentados permitió encontrar una solución factible, por lo que se recurrió a un método heurístico, que se explica en la siguiente sección. La última instancia, *Atenas*, es la más compleja. En el Cuadro 4.10, vemos que el número de las variables del modelo supera los 100 millones. La memoria requerida por el modelo para almacenar las variables estuvo por encima de la capacidad del hardware utilizado; las variables π, z y p , que son alrededor de 50

millones de variables, lograron ser almacenadas, no así los 50 millones de variables restantes, correspondientes a las variables de linealización d . Para resolver esta instancia fue necesario aplicar un método heurístico, que se describe en la siguiente sección.

Ajuste de parámetros para la instancia *Grilla 5x5*

El solver Gurobi admite el uso de varios parámetros para controlar los algoritmos de solución de los modelos. Dos de ellos fueron de nuestro interés para resolver la instancia Grilla 5x5: El primer parámetro *Heuristics* es la proporción del tiempo total de cómputo dedicado en heurísticas, valores más grandes pueden aumentar la posibilidad de encontrar soluciones factibles. El valor por defecto es 5%. El otro parámetro es *MIPFocus*, que permite modificar el balance general entre la búsqueda de soluciones factibles y la mejora de las cotas (para probar la optimalidad de las soluciones encontradas).

Con el objetivo de encontrar soluciones factibles para la instancia Grilla 5x5, se asignó al parámetro *MIPFocus* el valor de 1, que corresponde a una estrategia más orientada a la búsqueda de soluciones que a la demostración de optimalidad. Adicionalmente, se incrementó gradualmente el porcentaje de tiempo de cálculo dedicado a heurísticas, ajustando para ello el valor del parámetro *Heuristics*.

Se mantuvo el tiempo límite de 2 horas para realizar una comparación en condiciones iguales. La Tabla 4.11. Ninguna de las combinaciones usadas logra encontrar una solución factible en el tiempo límite, por lo que se emplearon las heurísticas que se describen en la próxima sección para trabajar con esta instancia.

4.2.3. Heurísticas para reducir el tamaño del problema

Debido al gran número de variables y restricciones requeridas para las instancias mediana y grande, no es posible resolver el modelo Time-Pass de manera directa. De esto surge la necesidad de crear métodos heurísticos que permitan obtener al menos una solución factible para el problema.

Grilla 5x5	MIPFocus	Heuristics	Sol. Factible
<i>Original</i>	0	0.05	No
<i>Comb. 1</i>	1	0.05	No
<i>Comb. 2</i>	1	0.3	No
<i>Comb. 3</i>	1	0.5	No
<i>Comb. 4</i>	1	0.7	No
<i>Comb. 5</i>	1	0.8	No
<i>Comb. 6</i>	1	0.9	No
<i>Comb. 7</i>	1	1	No

Cuadro 4.11: Ajuste de los parámetros *MIPFocus* y *Heuristics* del solver para la búsqueda de soluciones factibles en la instancia Grilla 5x5.

Recalendarización

La heurística más sencilla que se puede poner en práctica es la recalendarización, esto es, realizar una resolución iterativa y cíclica de las fases de enrutamiento y calendarización, lo que permite una retroalimentación entre las soluciones de ambas fases.

Para el caso del modelo TimePass, el primer paso es usar un enrutamiento definido a priori, a partir del cual se fija el valor de las variables $p_a^{u,v}$. Con estas variables fijadas se puede a correr el modelo TimePass y obtener posiblemente una calendarización. Posteriormente, fijando los horarios de viajes obtenidos en el paso anterior, se usa TimePass nuevamente para obtener un enrutamiento que minimizará el tiempo de viaje de los pasajeros. Este procedimiento se repite, buscando mejorar la calendarización y el enrutamiento de manera iterativa.

Se aplicó el algoritmo de recalendarización para las instancias de Grilla 5x5 y Atenas con el fin de obtener una solución integrada. Utilizando un enrutamiento \mathcal{R} , obtenido con un algoritmo que usa restricciones de flujo para encontrar los caminos usados, se fijó a priori el valor de las variables $p_a^{u,v}$ y se dejó correr el modelo TimePass. Los resultados para las dos instancias se detallan en la Tabla 4.12.

Inst.	# Restr	# Vars	# Nod	GAP	FunObj	CotInf	Tim
<i>Grilla 5x5</i>	3 558 202	3 527 580	121 845	30 %	74 842	106 788	7209
<i>Atenas</i>	39 380	21 230	7 182	18 %	68 768 386	83 833 030	7200

Cuadro 4.12

Debido a que se fijaron los valores de las variables p , la dimensión del problema disminuyó y fue posible encontrar soluciones factibles para ambos modelos dentro del tiempo límite. Nótese que el número de variables y restricciones en la instancia *Atenas* es menor que en *Grilla 5x5*. Esto se debe a que el modelo correspondiente a *Atenas* no fue ingresado directamente en el solver pues, como se observó en la sección anterior, su tamaño supera la memoria disponible en el computador. Por el contrario, la fijación de variables y la consecuente simplificación del modelo se realizaron en una fase de preprocesamiento, previa a la construcción del modelo con la API Python.

4.2.4. Comparación de resultados entre los modelos PESP y TimePass

El Cuadro 4.13 muestra la comparación de los resultados obtenidos para la función objetivo entre el modelo PESP, TimePass y la heurística utilizada para los dos últimas instancias. Recordemos que, en ambos modelos, la función objetivo mide el tiempo total empleado por todos los pasajeros al usar el sistema de transporte.

Instancia	FunObj PESP	FunObj TimePass	FunObj Heurística
<i>Juguete</i>	5 010.0	4 067.0	-
<i>Pequeña 1</i>	30 143.0	15 924.0	-
<i>Pequeña 2</i>	177 418.0	25 301.0	-
<i>Grilla 5x5</i>	78 490.0	-	74 842.0
<i>Atenas</i>	68 768 386.2	-	68 768 386.2

Cuadro 4.13

Para las 3 primeras instancias se ve que, en efecto, el modelo integrado TimePass da como resultado un valor para función objetivo mucho menor que el modelo PESP. Hubo una reducción del 18%, 47% y 85% en el tiempo de viaje del usuario para las instancias *Juguete*, *Pequeña 1* y *Pequeña 2* respectivamente. Esto implica que el enrutamiento calculado dentro del modelo integrado produce soluciones de mejor calidad, si se comparan con las soluciones obtenidas con un enrutamiento calculado en una fase previa individual. Se debe considerar, además, que empleando un mayor tiempo de cómputo se podrían obtener todavía me-

jores valores en la función objetivo.

En la instancia *Grilla 5x5* se necesitó de una heurística para encontrar una solución factible, la misma que también presenta una disminución del 4.6% en el valor en la función objetivo comparada con la del modelo PESP. Para el caso de la instancia *Atenas*, la solución del modelo PESP y la solución heurística para el modelo TimePass tienen valores idénticos en la función objetivo. Esto puede deberse a la estructura de la EAN, que determina que el enrutamiento fijado para ambos casos sea el mismo, y, por tanto, que el problema final sea idéntico en ambos modelos.

Capítulo 5

Conclusiones generales

En este trabajo se ha considerado la implementación de dos modelos para abordar la calendarización de viajes en un sistema de transpor-tación pública: un modelo que resuelve el problema como una fase de planificación individual, y un modelo que presenta un enfoque integrado de calendarización de viajes y enrutamiento de pasajeros. Ambos mode-los fueron probados sobre instancias de varios tamaños. Con ello se pudo realizar una evaluación del desempeño de los modelos en varios aspectos y aplicar heurísticas algunos casos. En la implementación de los modelos se incluyeron también características adicionales del problema como la frecuencia de las líneas y su retorno. Ambos modelos cuentan con sus respectivos beneficios y desventajas que se hicieron evidentes a lo largo de este trabajo.

El modelo PESP tiene una implementación muy sencilla debido a la naturaleza de su formulación y a que los datos de entrada necesarios “procesan” directamente cierta información. Esto hace obviamente que la dificultad recaiga en la calidad de los datos que debemos proporcionar al modelo PESP, a saber, el enrutamiento. El enrutamiento de pasajeros es una fase bastante problemática, de por sí, por los varios enfoques que existen para encontrar uno, y la falta de garantías de que este enruta-miento sea el que produzca mejores resultados para la calendarización. Así que la sencillez de implementación viene a costa de una buena in-versión de tiempo para determinar un buen enrutamiento en una fase

previa.

El modelo TimePass definitivamente soluciona el problema de calidad de información que se tiene con PESP; la matriz OD es suficiente en lugar del enrutamiento, la cual es información disponible incluso para fases anteriores como la planificación de líneas. Los resultados computacionales para las instancias obtenidos para TimePass mostraron, en todos los casos, que dejar el cálculo del enrutamiento al modelo integrado da mejores o iguales resultados en la función objetivo que para el modelo PESP, así una resolución separada de estas dos fases conlleva al riesgo de un cálculo desafortunado para el enrutamiento que se transfiere directamente a la fase táctica más importante; la calendarización. Ello muestra que la mejor opción para la resolución de estas dos fases es optar por el modelo integrado.

Por otra parte, si bien el modelo TimePass produce mejores resultados, la cuestión está en decidir hasta qué punto se puede optar por usar este modelo directamente, puesto que como se vio en los resultados computacionales, instancias de tamaño mediano y grande no pueden ser procesadas directamente debido a su complejidad computacional y necesitan de la aplicación de técnicas heurísticas. La instancia *Grilla 5x5*, a pesar de ser de tamaño mediano, fue lo suficientemente grande como para que el solver no pudiera encontrar una solución factible dentro del tiempo límite de cálculo. Para la instancia *Atenas*, el número de frecuencias, repeticiones y estaciones fueron suficientes como para el número de variables y restricciones requeridos por el modelo, alcance niveles que sobrepasaron la memoria disponible del computador. El modelo TimePass no pudo ser siquiera construido en este caso.

Con este antecedente para el modelo integrado, resultó inevitable el uso de una heurística para encontrar una solución factible en las instancias más grandes. A pesar de la sencillez de la heurística de recalendarización, la solución encontrada fue mejor que la del modelo PESP para la instancia mediana, y la misma para la instancia grande, por lo que es recomendable aplicarla como un primer acercamiento a una solución. En la literatura se describen heurísticas más complejas y prometedoras, cuyo estudio podrá abordarse en un futuro trabajo.

Ahora, a pesar del tamaño de la instancia *Atenas*, esta tiene una red

de transporte bastante simple, 51 nodos y 52 aristas dispuestos como en la Figura 4.5. La heurística aplicada produjo los mismos resultados que el modelo PESP, lo que puede deberse a la disposición de este sistema. En la mayoría de pares OD, existe una sola ruta a elegir para llegar hasta algún destino, haciendo que los distintos enrutamientos posibles sean muy similares, casi únicos. En este tipo de casos, instancias grandes y redes simples, puede ser más práctico no optar por la integración de fases si no se tiene la suficiente capacidad computacional para resolver los modelos correspondientes. En cambio, con un enrutamiento prácticamente fijado de antemano, gracias a la infraestructura física, las soluciones de fases individuales pueden ser una alternativa más práctica y producir resultados similares.

El transporte público es un servicio que afecta directamente a miles de millones de personas en un sin número de ciudades alrededor de todo el mundo. Su operación emplea valiosos recursos económicos y tiene un impacto crítico sobre el medio ambiente. Debido a su importancia en el sector económico, ecológico, y debido al valioso tiempo que millones y millones de personas pasan en un vehículo público, es extremadamente importante estudiar y analizar de manera sistemática los problemas de optimización de sistemas de transporte, y desarrollar métodos que nos permitan encontrar las mejores soluciones posibles.

Referencias bibliográficas

- [1] P. Serafini and W. Ukovich, “A mathematical model for periodic scheduling problems,” *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, vol. 2, no. 4, pp. 550–581, 1989.
- [2] P. Schiewe and A. Schöbel, “Periodic timetabling with integrated routing: Toward applicable approaches,” *Transportation Science*, vol. 54, no. 6, pp. 1714–1731, 2020.
- [3] V. Guihaire and J.-K. Hao, “Transit network design and scheduling: A global review,” *Transportation Research Part A: Policy and Practice*, vol. 42, no. 10, pp. 1251–1273, 2008.
- [4] D. Huisman, L. G. Kroon, R. M. Lentink, and M. J. Vromans, “Operations research in passenger railway transportation,” *Statistica Neerlandica*, vol. 59, no. 4, pp. 467–497, 2005.
- [5] T. L. Magnanti and R. T. Wong, “Network design and transportation planning: Models and algorithms,” *Transportation science*, vol. 18, no. 1, pp. 1–55, 1984.
- [6] C. Quak, “Bus line planning,” *A passenger-oriented approach of the construction of a global line network and an efficient timetable. Master’s thesis, Delft University, Delft, Netherlands, 2003.*
- [7] A. Ceder and N. H. Wilson, “Bus network design,” *Transportation Research Part B: Methodological*, vol. 20, no. 4, pp. 331–344, 1986.
- [8] T. Robenek, S. S. Azadeh, Y. Maknoon, and M. Bierlaire, “Hybrid cyclicity: Combining the benefits of cyclic and non-cyclic ti-

- metables,” *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, vol. 75, pp. 228–253, 2017.
- [9] R. M. Lusby, J. Larsen, M. Ehrgott, and D. Ryan, “Railway track allocation: models and methods,” *OR spectrum*, vol. 33, no. 4, pp. 843–883, 2011.
- [10] C. Liebchen, “The first optimized railway timetable in practice,” *Transportation Science*, vol. 42, no. 4, pp. 420–435, 2008.
- [11] L. Kroon, D. Huisman, E. Abbink, P.-J. Fioole, M. Fischetti, G. Maróti, A. Schrijver, A. Steenbeek, and R. Ybema, “The new dutch timetable: The or revolution,” *Interfaces*, vol. 39, no. 1, pp. 6–17, 2009.
- [12] M. A. Odijk, “A constraint generation algorithm for the construction of periodic railway timetables,” *Transportation Research Part B: Methodological*, vol. 30, no. 6, pp. 455–464, 1996.
- [13] P. Schiewe *et al.*, *Integrated optimization in public transport planning*. Springer, 2020.
- [14] K. Nachtigall and S. Voget, “A genetic algorithm approach to periodic railway synchronization,” *Computers & Operations Research*, vol. 23, no. 5, pp. 453–463, 1996.
- [15] S. Yan and H.-L. Chen, “A scheduling model and a solution algorithm for inter-city bus carriers,” *Transportation Research Part A: Policy and Practice*, vol. 36, no. 9, pp. 805–825, 2002.
- [16] M. Siebert and M. Goerigk, “An experimental comparison of periodic timetabling models,” *Computers & Operations Research*, vol. 40, no. 10, pp. 2251–2259, 2013.
- [17] F. Salzborn, “Scheduling bus systems with interchanges,” *Transportation Science*, vol. 14, no. 3, pp. 211–231, 1980.
- [18] R. Borndörfer, H. Hoppmann, and M. Karbstein, “Passenger routing for periodic timetable optimization,” *Public Transport*, vol. 9, no. 1, pp. 115–135, 2017.

- [19] M. E. Pfetsch and R. Borndörfer, “Routing in line planning for public transport,” in *Operations research proceedings 2005*, pp. 405–410, Springer, 2006.
- [20] A. Schöbel, “Integration of routing and timetabling in public transportation,” Master’s thesis, Georg-August-Universität Göttingen, 2011.
- [21] Schiewe, A and Albert, S and Grafe, V and Schiewe, P and Schöbel, A and Spühler, F, “Integrated optimization in public transportation. homepage.” <https://www.lintim.net>, 2022.
- [22] Schiewe, A, “Openlintim.” <https://gitlab.rlp.net/lintim/OpenLinTim>, 2022.
- [23] A. Schiewe, S. Albert, V. Grafe, P. Schiewe, A. Schöbel, and F. Spühler, *LinTim: An integrated environment for mathematical public transport optimization*. Fraunhofer-Institut für Techno- und Wirtschaftsmathematik, 2021.
- [24] D. Ludeña, “Modelos integrados de optimización de transporte público: Problema de planificación de líneas de transporte.” 2022.
- [25] M. Friedrich, M. Hartl, A. Schiewe, and A. Schöbel, “Angebotsplanung im öffentlichen verkehr-planerische und algorithmische lösungen,” *Heureka’17*, vol. 9, 2017.