

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA

ESTUDIO DE LA ACUMULACIÓN DE ENERGÍA VIBRACIONAL EN DISPOSITIVOS PIEZOELÉCTRICOS COLOCADOS EN SISTEMAS E INFRAESTRUCTURAS FERROVIARIAS

COMPONENTE DEL TRABAJO: ANÁLISIS Y SIMULACIÓN DEL ACUMULADOR PIEZOELÉCTRICO BAJO LA ACCIÓN DE UNA CARGA SINUSOIDAL

**TRABAJO DE INTEGRACIÓN CURRICULAR PRESENTADO COMO
REQUISITO PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE INGENIERO MECÁNICO**

PAÚL SEBASTIÁN VILLAVICENCIO ANDINO

paul.villavicencio01@epn.edu.ec

DIRECTOR: ING. WASHINGTON SALVATORE REINA GUZMÁN

salvatore.reina@epn.edu.ec

DMQ, septiembre 2023

CERTIFICACIONES

Yo, PAÚL SEBASTIÁN VILLAVICENCIO ANDINO declaro que el trabajo de integración curricular aquí descrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y, que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

PAÚL SEBASTIÁN VILLAVICENCIO ANDINO

Certifico que el presente trabajo fue desarrollado por PAÚL SEBASTIÁN VILLAVICENCIO ANDINO, bajo mi supervisión.

WASHINGTON SALVATORE REINA GUZMAN
DIRECTOR DEL TRABAJO DE TITULACIÓN

DECLARACIÓN DE AUTORÍA

A través de la presente declaración, afirmamos que el trabajo de integración curricular aquí descrito, así como el (los) producto(s) resultante(s) del mismo, son públicos y estarán a disposición de la comunidad a través del repositorio institucional de la Escuela Politécnica Nacional; sin embargo, la titularidad de los derechos patrimoniales nos corresponde a los autores que hemos contribuido en el desarrollo del presente trabajo; observando para el efecto las disposiciones establecidas por el órgano competente en propiedad intelectual, la normativa interna y demás normas.

PAÚL SEBASTIÁN VILLAVICENCIO ANDINO

WASHINGTON SALVATORE REINA GUZMAN

DEDICATORIA

Dedico este trabajo a todo aquel que, yo considero, tuvo algo que ver para que se logre.

A Luis Alberto Andino Toro, mi compañero, mi padre, el mejor abuelo y guía que la vida pudo regalarme. Gracias por brindarme el don de ser especial, por forjarme como la persona que soy ahora y enseñarme cómo llevar la vida, Gracias por tu sabiduría y total desinterés. Más que este trabajo, te debo la vida y lo que me queda de ella. Sé que, desde algún rincón del universo, me observas orgulloso.

A Yaddy, mi abuela, mi confidente y madre. Gracias por nunca dejarme solo y por ser ejemplo de perseverancia y disciplina. Gracias por dejarme aprender de ti y por todas las lecciones valiosas que me has dado con tu ejemplo. Nunca desconfiaste de mi capacidad y espero nunca decepcionarte.

Y, finalmente, a Juan David, mi hermano y mejor amigo. Gracias por ser mi motivación de cada día y mi fortaleza en mis momentos de debilidad. Espero siempre poder estar para ti y que sigamos siendo almas gemelas.

AGRADECIMIENTO

Agradezco enormemente al ingeniero Washington Salvatore Reina Guzmán por su paciencia y ardua labor para guiarme en este trabajo. Sin su apoyo y constante preocupación no lo hubiese logrado.

ÍNDICE DE CONTENIDO

CERTIFICACIONES.....	I
DECLARACIÓN DE AUTORÍA	II
DEDICATORIA.....	III
AGRADECIMIENTO.....	IV
ÍNDICE DE TABLAS	VII
ÍNDICE DE FIGURAS	VIII
1. INTRODUCCIÓN	1
1.1 Objetivo general.....	2
1.2 Objetivos Específicos:.....	2
1.3 Alcance	2
1.4 Marco teórico	3
Los materiales piezoeléctricos	5
Métodos de modelamiento de piezoeléctrico	9
Comparación de formas y materiales de piezoeléctricos	12
Ecuaciones de la piezoelectricidad	12
Constantes del efecto piezoeléctrico.....	14
Estructura de una vía férrea.....	16
Benchmarking	20
Tipos de configuración de piezoeléctricos	20
Viga en voladizo.....	21
Tipo címbalo	22
Tipo pila	23
Tipos de vía férrea	24
La vía dff	24
La vía bibloque.....	25
La vía bibloque con riostra.....	25
2. METODOLOGÍA.....	26
2.1 Casa de la calidad.....	27

Voz del usuario	27
Voz del ingeniero	27
Conclusiones de la casa de la calidad	28
2.2 Especificaciones técnicas	28
2.3 Diseño modular y análisis funcional	30
Estructura funcional global.....	30
Definición de módulos.....	30
2.4 Análisis y selección de la mejor alternativa	31
Módulo 1	31
Módulo 2	37
3. MODELO MATEMÁTICO	47
3.1 Validación del modelo matemático.....	53
3.2 Parámetros para simulación.....	55
4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN	56
4.1 Voltaje y potencia en función de la frecuencia	56
4.2 Respuesta ante la variación de parámetros	59
4.3 Respuesta de la tasa de desplazamiento	65
5. CONCLUSIONES.....	68
6. RECOMENDACIONES	70
7. REFERENCIAS	71
8. ANEXOS	74

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 2.1. Especificaciones técnicas para el recolector de energía.....	29
Tabla 2.2. Análisis de alternativas de vías férreas.....	32
Tabla 2.3. Evaluación del peso específico de cada criterio a evaluar para la solución de vías férreas.....	34
Tabla 2.4. Evaluación del peso específico del criterio: Facilidad de implementación	34
Tabla 2.5. Evaluación del peso específico del criterio: Espacio disponible.	35
Tabla 2.6. Evaluación del peso específico del criterio: Propagación de vibraciones.	35
Tabla 2.7. Evaluación del peso específico del criterio: Contacto rueda carril.....	36
Tabla 2.8. Conclusiones de soluciones para vías férreas.....	36
Tabla 2.9. Análisis de alternativas para diferentes tipos de material	37
Tabla 2.10. Evaluación del peso específico de cada criterio para la solución de tipo de material piezoeléctrico	39
Tabla 2.11. Evaluación del peso específico del criterio: Disponibilidad.....	39
Tabla 2.12. Evaluación del peso específico del criterio: Flexibilidad.	40
Tabla 2.13. Evaluación del peso específico del criterio: Eficiencia en la recolección de energía.	40
Tabla 2.14. Evaluación del peso específico del criterio: Costo.	41
Tabla 2.15. Conclusiones para soluciones de tipo de material piezoeléctrico.....	41
Tabla 2.16. Análisis de alternativas para tipo de configuración de dispositivo piezoeléctrico	42
Tabla 2.17. Evaluación del peso específico de cada criterio para la solución de tipo de configuración de piezoeléctrico.....	44
Tabla 2.18. Evaluación del peso específico del criterio: Facilidad de montaje.	44
Tabla 2.19. Evaluación del peso específico del criterio: Necesidad de mantenimiento.....	44
Tabla 2.20. Evaluación del peso específico del criterio: Eficiencia en la recolección de energía.	45
Tabla 2.21. Evaluación del peso específico del criterio: Costo.	45
Tabla 2.22. Conclusiones para soluciones de tipo de configuración de piezoeléctrico.	46
Tabla 3.1 Diagrama de cuerpo libre para obtener el modelo matemático del sistema en movimiento.....	47
Tabla 3.2. Parámetros del piezoeléctrico.....	55
Tabla 3.3. Parámetros de la vía para simulación	55
Tabla 4.1. Resultados obtenidos en varias investigaciones de piezoeléctricos. Fuente: (Hosseinkhani et al., 2021)	58

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.1. Respuestas en función del tipo de excitación aplicada sobre el material piezoeléctrico. (Malmcrona, 2018)	4
Figura 1.2. Diagrama esquemático de un mecanismo típico de un colector piezoeléctrico de energía vibracional. (Rafique, 2018)	5
Figura 1.3. Modelo molecular simple. (Malmcrona, 2018).....	6
Figura 1.4. Variación de los coeficientes piezoeléctricos dependiendo de la orientación y dirección, para un mismo material. (Gómez Molina, 2018)	8
Figura 1.5. Representación del modo '31' y '33' para materiales piezoeléctricos. (Wei & Jing, 2017)	10
Figura 1.6. Modelo de colector de energía vibracional electromagnético. (Wei & Jing, 2017) ...	11
Figura 1.7. Circuito simple para un convertido electrostático.(Wei & Jing, 2017).....	11
Figura 1.8. Energía de deformación de diferentes formas de piezoeléctricos. El punto rojo indica el lugar de aplicación de la carga. (Rafique, 2018)	12
Figura 1.9. Modos de operación comunes para piezoelectricidad. Fuente: (Rafique, 2018).....	14
Figura 1.10. Estructura de una vía férrea. Fuente: (Nuevo Central Argentino S.A., 2014)	16
Figura 1.11. Vía férrea con balasto limpio. Fuente: (Nuevo Central Argentino S.A., 2014).....	17
Figura 1.12. Durmiente en vía férrea. Fuente: (Nuevo Central Argentino S.A., 2014)	18
Figura 1.13. Perfil de riel para vía férrea. Fuente: (Nuevo Central Argentino S.A., 2014)	19
Figura 1.14. Fijación en estructura de vía férrea. Fuente: (Nuevo Central Argentino S.A., 2014)	19
Figura 1.15. Juntas de riel. Fuente: (Nuevo Central Argentino S.A., 2014).....	20
Figura 1.16. Estructura tipo cantiléver Fuente: (Gómez Molina, 2018)	21
Figura 1.17. Transductor comercial DuraAct a). Fibra activa de PZT de 0.25 mm de diámetro usada en compuestos piezoeléctricos b). Transductor comercial Active Fiber Composite c) y transductor Quick Pack d). Fuente: (Aleman & Guerrero, s. f.)	22
Figura 1.18. Estructura tipo címbalo. Fuente: (Gómez Molina, 2018)	22
Figura 1.19. Configuración tipo pila Fuente: (Gómez Molina, 2018).....	23
Figura 1.20. Fijaciones DFF. Fuente: (Ayoub, 2018).....	24
Figura 1.21. Vía bloque sobre base de hormigón. Fuente: (Ayoub, 2018)	25
Figura 1.22. Traviesas bloque con riostra. Fuente: (Ayoub, 2018)	26
Figura 2.1. Metodología. Fuente: propia.	26
Figura 2.2. Diseño modular. Nivel cero.....	30
Figura 2.3. Diseño modular. Nivel 1.	31
Figura 3.1. Modelo de media vía: a. Continua con traviesas uniformemente distribuidas. b. Discontinuo con traviesas discretas.	53
Figura 3.2. Comparación de la receptancia vertical de la vía DFF determinada con los modelos numérico y analítico. Fuente: (Ayoub, 2018)	54
Figura 4.1. Voltaje en función de la frecuencia.	56
Figura 4.2. Potencia en función de la frecuencia	57
Figura 4.3. Voltaje en función de la capacitancia.....	59
Figura 4.4. Voltaje en función del factor de fuerza	60

Figura 4.5. Voltaje en función de la resistencia eléctrica.....	60
Figura 4.6. Tasa de cambio de rigidez para respuesta de potencia y eficiencia	61
Figura 4.7. Potencia generada en función de la resistencia.....	62
Figura 4.8. Potencia en función del factor de fuerza	63
Figura 4.9. Potencia en función del coeficiente de amortiguamiento del riel, con coeficiente de amortiguamiento de la traviesa constante.....	63
Figura 4.10. Variación de masa para obtener gráfica de potencia en función de la frecuencia .	64
Figura 4.11. Respuesta de potencia al variar la masa del riel.	65
Figura 4.12. Tasa de desplazamiento $X1/Y$ y $X2/Y$ en función de la frecuencia.	66
Figura 4.13. Respuesta de tasa de desplazamiento en función de la frecuencia.....	67
Figura 4.14. Respuesta de la potencia en función de la frecuencia para diferentes valores de $k1$	67

RESUMEN

Las necesidades del mundo actual en cuestiones energéticas requieren de un mejor aprovechamiento de esta. Para ello, se proponen múltiples métodos de recolección energética limpia que hace que se reciclen procesos de diferentes tipos. En este sentido, resulta apropiado proponer un método de recolección energética mediante dispositivos piezoeléctricos. Estos, representan una solución para la recolección de energía, la cual, suele disipada sin utilidad alguna.

Para este fin, se proponen alternativas de solución mediante una selección apropiada del dispositivo piezoeléctrico y cómo se lo implementará. Gracias a definir adecuadamente las necesidades y aplicar la metodología de diseño concurrente, se pueden elegir parámetros para obtener una eficiente recolección energética.

Se utiliza así un modelamiento matemático analítico basándose en el modelo de media vía con parámetros continuos, definidos por varios autores, principalmente por (X. Wang, 2016). Este autor propone un modelo matemático para dos grados de libertad, en donde se consideran simultáneamente la dinámica de la traviesa como del riel, interconectados y modelados con un sistema masa-resorte-amortiguados, con el dispositivo piezoeléctrico anclado a su estructura.

Mediante la excitación de una carga externa sinusoidal, se obtienen respuestas para salida de voltaje y de potencia. Para verificar el comportamiento del sistema se acude a una variación de parámetros para posteriormente proponer alternativas de mejoramiento y eficiencia.

Finalmente, se validan los resultados mediante la comparación de lo obtenido en esta investigación con investigaciones similares de recolección energética, propuestas por varios autores.

PALABRAS CLAVE: Energía, piezoeléctrico, colector, voltaje, potencia, vía férrea.

ABSTRACT

The needs of the current world in energy matters require a better use of it. For this, multiple methods of clean energy collection are proposed that make processes of different types are recycled. In this sense, it is appropriate to propose a method of energy harvesting using piezoelectric devices. These represent a solution for the collection of energy, which is usually dissipated without any use.

For this purpose, alternative solutions are proposed through an appropriate selection of the piezoelectric device and how it will be implemented. Thanks to adequately defining the needs and applying the concurrent design methodology, parameters can be chosen to obtain efficient energy harvesting.

Thus, an analytical mathematical modeling registered in the media model via with continuous parameters, defined by various authors, mainly by Wang (2016), is used. This author proposes a mathematical model for two degrees of freedom, where the dynamics of the sleeper and the rail are simultaneously considered, interconnected, and modeled with a mass-spring-damped system, with the piezoelectric device anchored to its structure.

By driving a sinusoidal external load, responses for voltage and power output were obtained. To verify the behavior of the system, a variation of parameters is used to later propose alternatives for improvement and efficiency.

Finally, the results are validated by comparing what was obtained in this research with similar research on energy harvesting, proposed by various authors.

KEY WORDS: Energy, piezoelectric, collector, voltage, power, railway.

1. INTRODUCCIÓN

Las energías limpias son un tema relevante en la actualidad, dado el cambio climático y las necesidades cada vez más demandantes en cuestiones de uso de energía. Muchas investigaciones se realizan alrededor del mundo para implementar nuevas tecnologías que permitan realizar un cambio significativo en el uso de recursos.

En este sentido, se proponen alternativas a problemas reales, como la disipación de energía vibracional. Esta, se puede entender como un desperdicio de energía dinámica, dada por la transmisión de movimiento continuo que puede producir un vehículo al atravesar cierto tramo de vía. Para que esta energía pueda reciclarse y aprovecharse se proponen alternativas como, por ejemplo, el uso de dispositivos piezoeléctricos.

Gracias a este tipo de dispositivos, se puede aprovechar el efecto piezoeléctrico y generar energía limpia mediante la deformación del material insertado en este. Gracias a esta deformación se puede obtener una diferencia de potencial que, al conectarse a un circuito simple, permite recolectar energía diferentes aplicaciones. Para esta investigación en cuestión, se lo enfoca a aplicaciones de sensores.

Para poder llegar a cuantificar la cantidad de energía y potencia obtenidas en este proceso, se acude a un modelo matemático adaptado en esta investigación, basado en el modelo definido por Wang (2016), en el cual considera todos los elementos de la vía en un modelo denominado “de media vía”. Este, considera las rigideces de los elementos de la vía, las masas de las traviesas y de los rieles, y el anclaje del dispositivo piezoeléctrico de manera que se genera un diagrama equivalente en un sistema masa-resorte-amortiguador.

Al obtener el modelo matemático se propone un algoritmo de solución mediante un código de programación, utilizando el software Mathworks Matlab. que permite obtener resultados al evaluar de manera analítica el modelo propuesto, definiendo rangos de valores para obtener la respuesta a la carga sinusoidal. Es así como, mediante respuestas gráficas, se puede interpretar las salidas de voltaje y potencia del sistema.

Por otra parte, se proponen gráficas que representan cambios en ciertos parámetros de la vía para poder ejemplificar el comportamiento ante un cambio de valores en constantes de materiales y elementos. Es así como se puede interpretar el comportamiento del dispositivo, su

eficiencia y, finalmente, proponer alternativas para mejorar el uso de este para futuras investigaciones.

1.1 Objetivo general

Identificar las características óptimas para la utilización de un acumulador piezoeléctrico destinado a la recolección de energía producto de las vibraciones generadas en un sistema ferroviario en operación.

1.2 Objetivos Específicos:

Seleccionar la geometría más adecuada para el piezoeléctrico de acuerdo con las condiciones de operación.

Indicar la ubicación óptima del piezoeléctrico sobre alguna ubicación específica del sistema ferroviario que permita la mayor acumulación de energía.

Seleccionar el material más adecuado para optimizar la recolección de energía.

Analizar el comportamiento dinámico del sistema ferroviario para identificar los regímenes de mayor frecuencia de resonancia.

1.3 Alcance

El presente trabajo investigativo inicia recopilando referencias bibliográficas, de donde se obtuvo la información acerca del estudio de recolectores de energía vibracional piezoeléctricos, luego se establece los modelos matemáticos tanto para el sistema vía piezoeléctrico como de la fuerza general que se aplica, con los modelos establecidos se procede

con el análisis de los diferentes parámetros, geométricos y dinámicos obtenidos, con el fin de determinar la potencia de salida del colector piezoeléctrico. Para ello, se hará uso del software Matlab para simular las distintas configuraciones del colector, y estimar la potencia de salida que

puede ser aprovechada para distintas aplicaciones como cargar baterías o alimentar a sensores propios del mismo sistema ferroviario.

1.4 Marco teórico

Esta sección permite tener un acercamiento a la teoría del efecto piezoeléctrico. Para ello, es necesario abordar el tema describiendo las razones por las cuales algunos materiales presentan propiedades apropiadas para usarse en dispositivos piezoeléctricos. En este sentido, cabe describir los tipos de materiales que existen y las ventajas de unos sobre otros.

Además, es necesario identificar otros métodos de recolección de energía, al describirlos brevemente de manera teórica. Es así como se puede identificar al efecto piezoeléctrico como el más apropiado para los fines de esta investigación.

Por último, se abordan las estructuras ferroviarias de manera teórica, describiendo las partes de las cuales debe constar esta. Es así como resulta necesario definir el Benchmarking comparativo de los diferentes tipos de vía, además de los diferentes tipos de configuración de piezoeléctrico que permitirán aprovechar de mejor manera las prestaciones de la estructura en cuestión.

El efecto piezoeléctrico

La piezoelectricidad consiste en un efecto físico en el cual se genera un campo eléctrico al someter a un material, llamado piezoeléctrico, a cierta deformación. Esto se da gracias a que este material transductor, al ser sometido a vibraciones, tiene la capacidad de producir una diferencia de potencial eléctrico, producto de su deformación. Cabe recalcar que también se puede usar este efecto para deformar un material al inducir una diferencia de voltaje proveniente de una fuerza externa, por lo que evidencia un efecto bidireccional, como evidencia la figura 1.1.

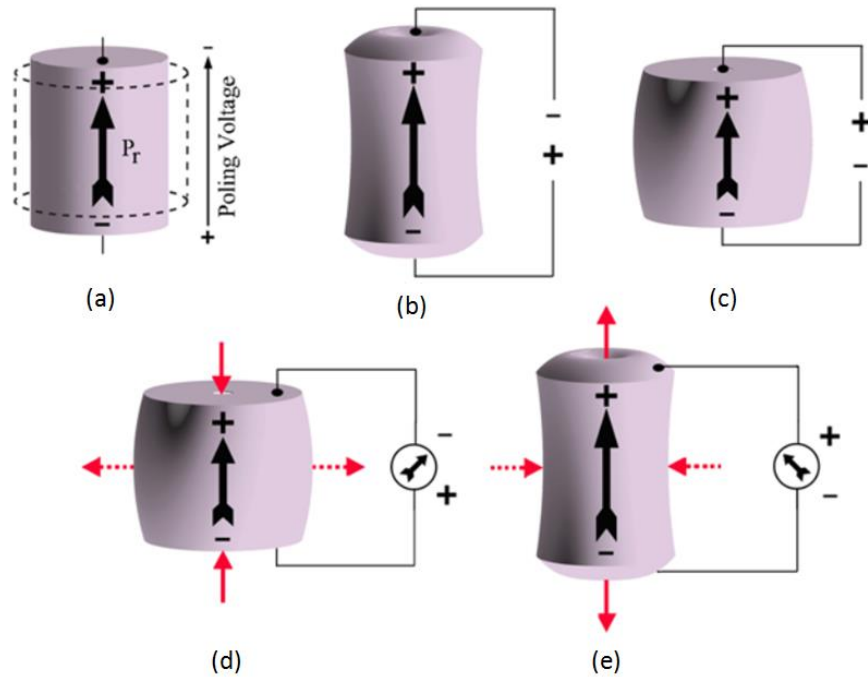


Figura 1.1. Respuestas dependientes de la forma de aplicar una excitación sobre el material piezoeléctrico. (Malmcrona, 2018)

Fundamentalmente, se utiliza la viga en voladizo como la configuración básica de un recolector piezoeléctrico de energía, con una o más capas de material piezoeléctrico adjuntas a otras capas de material no piezoeléctrico. Esta configuración se da para que, por una parte, el material piezoeléctrico tenga una resistencia adecuada para soportar las vibraciones a las que suele someterse. Al tener un material adicional, se aporte dureza y resistencia mecánica a este sistema, mientras que al final se conecta con sus terminales para poder almacenar la energía proveniente de la diferencia de voltaje generada, completando el circuito que se indica en la figura 1.2. (Rafique, 2018)

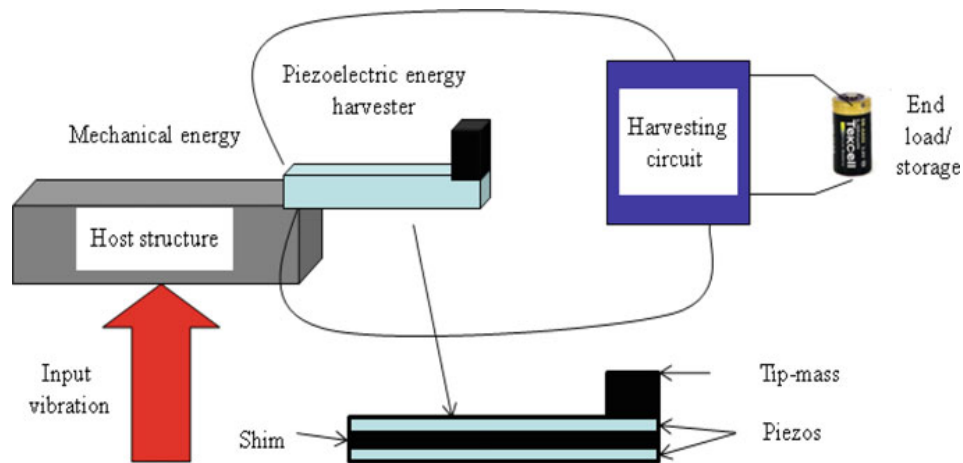


Figura 1.2. Diagrama esquemático de un mecanismo típico de un colector piezoeléctrico de energía vibracional. (Rafique, 2018)

Los materiales piezoeléctricos

Los materiales piezoeléctricos tienen el comportamiento anteriormente mencionado debido a que, a nivel molecular, carecen de un centro de simetría, por lo que pueden deformarse y regresar a su forma inicial al dejar de aplicar la carga de deformación. Existen esencialmente dos tipos de materiales piezoeléctricos según su naturaleza: los naturales y los sintéticos, siendo estos últimos los más utilizados.

A nivel microscópico, existe cierta deformación producto de la deformación macroscópica, por lo que se produce un desplazamiento de las cargas internas, dada su concepción molecular. Cada desplazamiento de carga produce un pequeño dipolo, efecto que se replica en todo el volumen del material, acumulando así dipolos que generan una diferencia de voltaje significativa. Para ejemplificar este efecto, se tiene la figura 1.3.

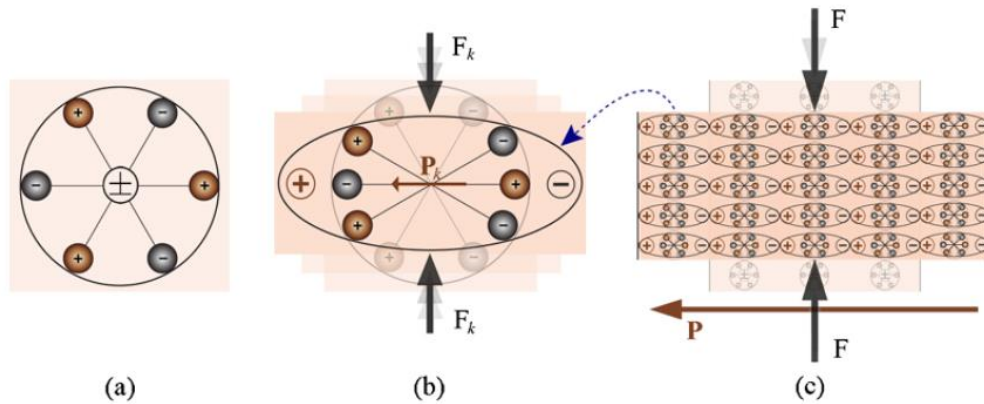


Figura 1.3. Modelo molecular simple. (Malmcrona, 2018)

En (a) se observa la disposición electrónica sin ningún tipo de excitación, notando su centro de cargas en el centro de la molécula. En (b) se muestra el efecto de desplazamiento de las cargas eléctricas tras aplicarse una carga externa, por lo que se crea una polarización, para finalmente, como se muestra en (c), este efecto sea replicado en todo el volumen del sólido. (Malmcrona, 2018)

Tipos de materiales piezoeléctricos

Este tipo de materiales pueden clasificarse, de una forma, en monocristalinos o policristalinos. Estos materiales también llamados cristales piezoeléctricos, contienen estructuras dispuestas en un patrón al agruparse de la misma manera, en una disposición tridimensional. Es así como el cristal se forma al juntar varias unidades de patrones, llamadas celdas unitarias. Para este fin, la celda unitaria es el elemento con el mínimo tamaño posible y al juntarse se obtienen diferentes geometrías que alterarán su desempeño.

También, se puede clasificar a este tipo de materiales de forma más general en: naturales y artificiales.

Materiales piezoeléctricos naturales

Se consideran piezoeléctricos naturales a los materiales que presentan propiedades piezoeléctricas, hallados en la naturaleza en minerales o cristales. Estos materiales no se consideran apropiados para aplicaciones de cosecha de energía debido a que su salida de voltaje es mínima en comparación con la deformación aplicada.

Materiales artificiales

Este tipo de materiales presentan propiedades piezoeléctricas con la posibilidad de polarizarse dependiendo la aplicación. Principalmente son: monocristalinos, policristalinos, polímeros y PZT.

Cerámica policristalina

Estos materiales están formados por uniones de celdas cristalinas unitarias, siendo un tipo de materiales se ocupan para aplicaciones con alta densidad de energía, que se cuantifica mediante el producto de la constante de voltaje y la constante de carga piezoeléctrica. Estas constantes están descritas posteriormente en las ecuaciones 1.1. y 1.2., y que son características de cada tipo de material.

Materiales monocristalinos

Este tipo de materiales, en contraste, tienen mejores prestaciones en cuestiones de acoplamiento mecánico y coeficiente de carga piezoeléctrico, además de ser simples y baratos de fabricar. A estos materiales se los puede diseñar en función de optimizar su uso variando su polarización y sus dimensiones. Por esta razón, para un mismo material se pueden obtener diferentes valores de voltaje de salida definidos por su coeficiente piezoeléctrico, como se indica en la figura 1.4.

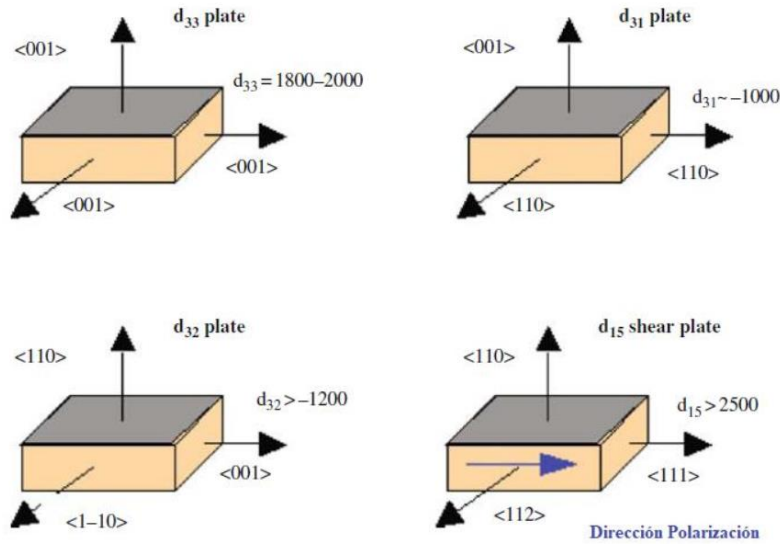


Figura 1.4. Variación de los coeficientes piezoeléctricos dependiendo de la orientación y dirección, para un mismo material. (Gómez Molina, 2018)

Polímeros piezoeléctricos (PVDF)

El PVDF o polifluoruro de vinilideno es un polímero semicristalino que son utilizados principalmente para aplicaciones de altas temperaturas, dada su temperatura de Curie cercana a 110°C. Se utilizan también en ciertos tipos de sensores ya que tienen altos valores de constante de voltaje piezoeléctrico. Este tipo de material es muy fuerte a nivel mecánico y resistente a gran cantidad de productos químicos. (Shrout & Zhang, 2007)

Cerámicas PZT

Los materiales que mejores prestaciones piezoeléctricas presentan son las cerámicas PZT, las mismas que son aprovechados mediante una polarización de sus caras al disponerlas de forma opuesta con el objetivo de producir electricidad. Para fines prácticos, se los suele modelar como un condensador plano-paralelo, permitiendo usarse en aplicaciones para poco consumo de energía.

Para la propuesta actual, es necesario enfocarse en el estudio de un material específico, el PZT. Las cerámicas PZT, también denominadas titanato de zirconato de plomo, son el tipo de piezoeléctrico más utilizado en el mundo ya que presenta muchas ventajas. Por una parte,

presenta una alta sensibilidad y un amplio rango de temperatura de funcionamiento. También, es un material físicamente fuerte, con una química inerte y que se lo puede fabricar a un bajo precio. (Gómez Molina, 2018)

Métodos de modelamiento de piezoeléctrico

Principalmente, existen tres formas de recolección de energía mediante transductores los mismos que tienen diferentes mecanismos de conversión de energía por lo que su eficiencia discrepa.

Piezolectricidad

Es un método cuya simplicidad resulta muy atractiva para diferentes aplicaciones al necesitar únicamente un transductor que transforme energía mecánica de deformación en una carga eléctrica.

Para este fin, la deformación total que se asume para la transformación proviene de la combinación de la deformación por los esfuerzos mecánicos y la deformación del voltaje aplicado, proveniente de un actuador necesario para su accionamiento.

Dos modos comunes de este efecto se pueden observar en la figura. Por una parte, existe el modo '33' en el cual la superficie del electrodo recolecta las cargas, considerando que los esfuerzos de deformación son paralelos a la ubicación de la polaridad de los terminales. Por otra parte, en el modo denominado '31', las cargas son recolectadas de manera que la deformación ocurre paralelamente a la ubicación de los polos, evidenciado en la figura 1.5. Según Wei & Jing (2017), el modo '31' presenta una mayor conversión energética bajo presiones muy bajas, mientras que el modo '33' resulta más conveniente para la mayoría de casos de materiales piezoeléctricos. (Wei & Jing, 2017)

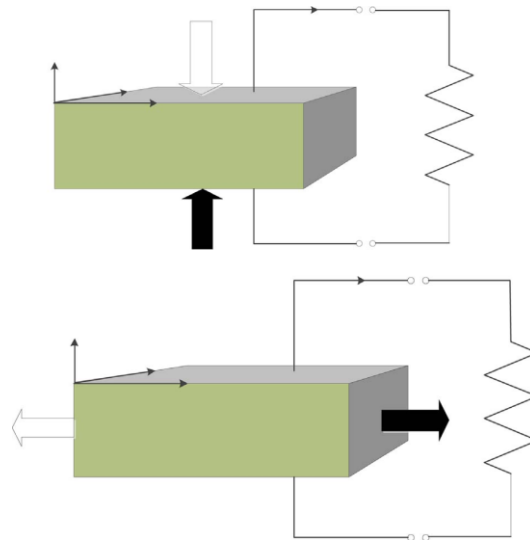


Figura 1.5. Representación del modo '31' y '33' para materiales piezoeléctricos. (Wei & Jing, 2017)

Electromagnetismo

Un recolector de energía vibracional electromagnético puede describirse por un circuito LR simple de primer orden, en el cual la resistencia se coloca en serio con la impedancia de la bobina, como indica la figura 1.6. Este efecto se produce debido al movimiento traslacional del magneto debido a la excitación por la vibración. (J. J. Wang, Penamalli, & Zuo, 2012) Esta oscilación causa una variación en el flujo magnético, por lo que se produce una diferencia de potencial, regido por la ley de Faraday. Se tiene el movimiento de un magneto de forma perpendicular a la bobina, por lo que la generación de energía depende de diferentes factores como: el número del alambre de la bobina, la longitud de esta y el desplazamiento relativo entre la bobina y el magneto, siendo la velocidad del movimiento directamente proporcional a la diferencia de potencial generada. (Wei & Jing, 2017)

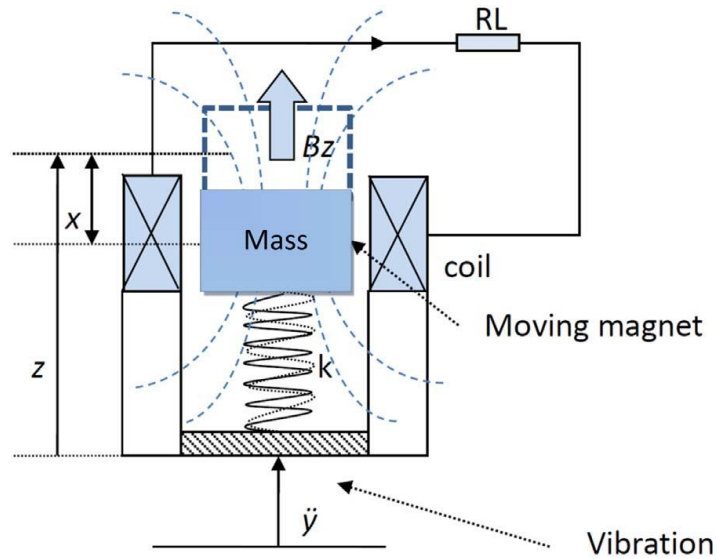


Figura 1.6. Modelo de colector de energía vibracional electromagnético. (Wei & Jing, 2017)

Electrostática

Este método utiliza la variación de la capacitancia para la conversión de energía, efecto que genera una diferencia de voltaje, dependiente de la permitividad del dieléctrico, la distancia entre las placas del capacitor y el área de estas.

Este efecto se produce al coleccionar energía extraída por el trabajo realizado por la fuerza electrostática entre las láminas. El movimiento vibracional hace que se produzca una alteración en la capacitancia, por lo que la carga eléctrica se mueve generando una diferencia de voltaje, como ejemplifica el circuito de la figura 1.7. (Wei & Jing, 2017)

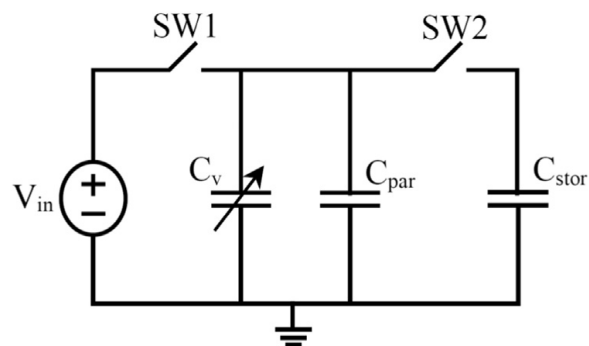


Figura 1.7. Circuito simple para un convertido electrostático. (Wei & Jing, 2017)

Comparación de formas y materiales de piezoeléctricos

Existe una gran variedad de materiales para aplicaciones piezoeléctricas con diferentes propiedades mecánicas. Investigaciones arrojan que un acoplamiento mecánico rígido y altos valores de permitividad del material incrementan la capacidad de transferir más energía mecánica para transformarla en energía eléctrica, por lo que son factores importantes que considerar para el diseño del colector. Además, se encontró que los piezoeléctricos con alta flexibilidad pueden producir mayor cantidad de energía que los flexibles, debido a la atenuación en la capacidad de absorber energía. (Rafique, 2018)

Por otra parte, la geometría es un factor que afecta el desempeño de estos dispositivos. Se tiene que los piezoeléctricos más comunes son los de forma rectangular colocados en voladizo, sin embargo, investigaciones indican que mientras más se aproxime a una forma trapezoidal mejor desempeño tendrá y podrá generar mayor energía. Esto se debe a que esta forma permite una mejor distribución de las cargas de deformación sobre la longitud del material, por lo que el movimiento es mejormente aprovechado, como se observa en la figura 1.8. (Rafique, 2018)

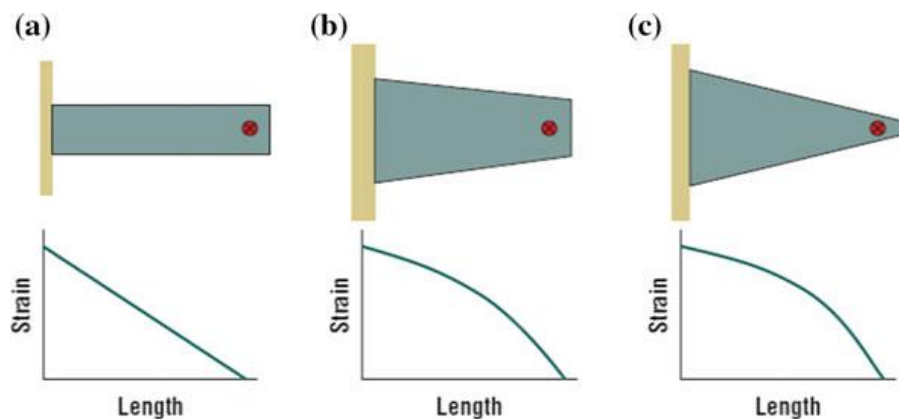


Figura 1.8. Energía de deformación de diferentes formas de piezoeléctricos. El punto rojo indica el lugar de aplicación de la carga. (Rafique, 2018)

Ecuaciones de la piezoelectricidad

Según indica (Gómez Molina, 2018), el efecto piezoeléctrico se define por la ecuación 1.1.

$$P = dT$$

Ecuación 1.1. Definición del efecto piezoeléctrico.

Donde:

P: vector de polarización piezoeléctrico.

d: constante de carga piezoeléctrica (m/V).

T: tensión sometida sobre el piezoeléctrico (N/m²).

El mismo autor menciona que el efecto piezoeléctrico se ve caracterizado por otras ecuaciones:

$$S = dE$$

$$S = gD$$

$$P = dT = dcS = eS$$

Donde:

S: deformación sufrida por el piezoeléctrico.

g: constante de voltaje piezoeléctrica (Vm/N).

E: campo eléctrico al que está sometido el piezoeléctrico (V/m).

c: constante elástica.

e: constante piezoeléctrica de tensión.

El autor, a su vez, menciona que al someterse al material a una deformación (S), se generarán dos efectos:

El primero es una tensión elástica definida como $T_e = cS$. Mientras que otro efecto se produce con una polarización piezoeléctrica definida como $P_p = eS$, que es la que genera el campo eléctrico para el efecto piezoeléctrico.

Constantes del efecto piezoeléctrico

Para interpretar las constantes de este efecto, es necesario recalcar la naturaleza anisotrópica de las cerámicas piezoeléctricas. En función de esto, es necesario ubicar 2 subíndices para indicar las direcciones de las fuerzas y la dirección de la polarización. (Gómez Molina, 2018)

Modos de operación comunes son el modo 31 y el modo 33, que consisten en diferentes disposiciones de salida de voltaje y deformación, como se observa en la figura 1.9.

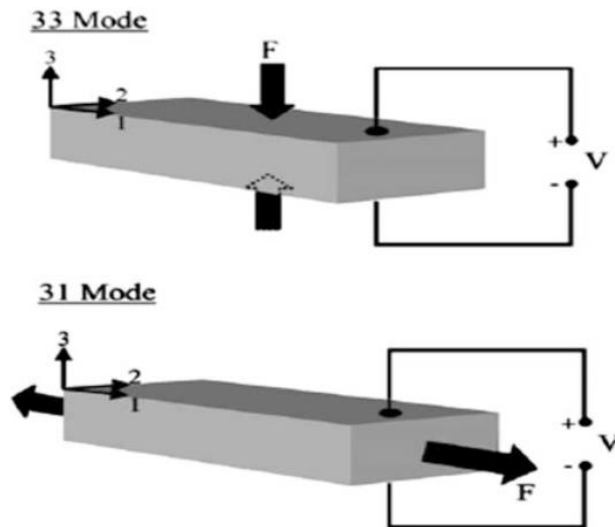


Figura 1.9. Modos de operación comunes para piezoelectricidad. Fuente: (Rafique, 2018)

Constante de carga piezoeléctrica (d)

Esta constante se puede definir, para el fin de este trabajo, como la polarización producida por unidad de tensión (T), sobre un material piezoeléctrico. Esta constante va acompañada, como se mencionó anteriormente, de dos subíndices. El primero sirve para indicar la dirección de la polarización (P) mientras que el otro describe la dirección de la presión (T) o la deformación (S). Considerando que los modos 31 y 33 son los más apropiados, se tiene que las constantes d_{31} y d_{33} van a ser las más utilizadas en estos casos. (Gómez Molina, 2018)

Constante de voltaje piezoeléctrica (g)

Esta constante consiste en el campo eléctrico generado por el piezoeléctrico, al aplicarse una presión (T). Es así, como en el caso anterior, las constantes de mayor uso serán el g_{33} y el g_{31} . La constante de carga piezoeléctrica se relaciona con la constante de voltaje piezoeléctrica con la ecuación 1.2.

$$g = \frac{d}{\epsilon T}$$

Ecuación 1.2. Relación entre la constante de carga piezoeléctrica y la constante de voltaje piezoeléctrico.

Constante dieléctrica (ϵ)

La constante dieléctrica o permitividad se define como el desplazamiento eléctrico por unidad de campo eléctrico. Se representa con los subíndices anteriormente mencionados, además de dos superíndices, T y S. El superíndice T indica una presión constante mientras que el S representa una deformación constante sobre el material.

Flexibilidad elástica (s)

Esta constante se define como la deformación producida sobre material piezoeléctrico. Se escribe con dos superíndices: D, que representa la flexibilidad a desplazamiento eléctrico constante; y E, que es la flexibilidad elástica a campo eléctrico constante.

Módulo de Young (Y)

El módulo de Young expresa la rigidez de un material cerámico, dada cierta tensión aplicada, cómo indica la ecuación 1.3.

$$Y = \frac{T}{S}$$

Ecuación 1.3. Módulo de Young

Factor de acoplamiento electromecánico (k)

Este factor permite medir la eficacia al convertir energía mecánica en eléctrica. Este, cuenta con dos subíndices similares a los casos anteriores.

Temperatura de Curie

Esta temperatura permite indicar las limitantes del piezoeléctrico. Al alcanzarse esta, el material se despolariza y pierde sus propiedades piezoeléctricas. Para el material usado en el caso actual (PZT), los valores oscilan entre 150°C y 350°C. (Gómez Molina, 2018)

Estructura de una vía férrea

En forma general, la estructura de una vía férrea divide en dos secciones: la infraestructura y la superestructura. Esta división se ve detallada en la figura 1.10.

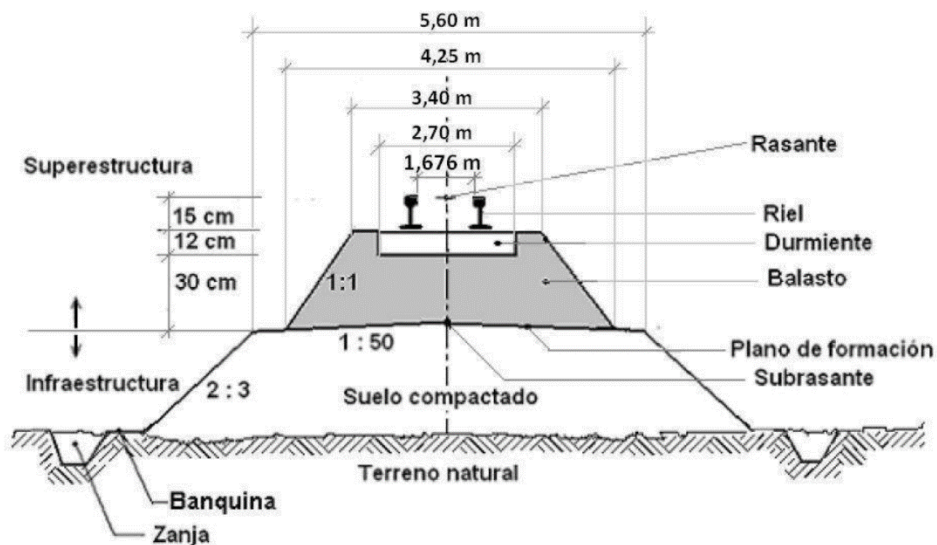


Figura 1.10. Estructura de una vía férrea. Fuente: (Nuevo Central Argentino S.A., 2014)

Infraestructura

Esta plataforma permite albergar los demás componentes de la vía y sirve como soporte de los esfuerzos sin sufrir deformaciones. Esta, debe constar de dos capas de suelo bien compactados para evitar deformación.

Superestructura

El balasto

Consiste en piedra partida colocada debajo de los durmientes, con un espesor de 10 a 30 cm, como se indica en la figura 1.11. Está conformado por material proveniente de trituración de rocas, cuya granulometría más común es de Grado A1, según la Norma IRAM FA7040. Gracias a esta constitución, se puede asegurar un buen apoyo para la estructura.

El balasto puede soportar cargas superiores a 20 Tn/eje, transmitiendo de manera homogénea las presiones de los durmientes. Una buena calidad de este material permite una evacuación adecuada del agua de lluvia y buen comportamiento de respuesta ante esfuerzos laterales y longitudinales. Además, reduce la elasticidad de la vía permitiendo mitigar las fuerzas aplicadas. (Nuevo Central Argentino S.A., 2014)



Figura 1.11. Vía férrea con balasto limpio. Fuente: (Nuevo Central Argentino S.A., 2014)

El durmiente

El durmiente consiste en una tira en forma de paralelepípedo, comúnmente de madera, colocada de manera transversal con respecto al sentido del movimiento del tren. Se coloca varios de estos elementos a una distancia y altura apropiada, de forma paralela, como se evidencia en la figura 1.12.

Los durmientes hechos con quebracho blanco tratado con sales CCA son los más apropiados para estas aplicaciones ya que presentan elevada elasticidad y gran resistencia mecánica. Estas características son necesarias ya que estos elementos cumplen con la función de distribuir las cargas sobre rieles para evitar deformaciones. Además, amortiguan los esfuerzos dinámicos y disminuyen el impacto acústico. (Nuevo Central Argentino S.A., 2014)



Figura 1.12. Durmiente en vía férrea. Fuente: (Nuevo Central Argentino S.A., 2014)

Rieles

Los rieles en un ferrocarril cumplen las funciones de: camino de rodadura, elemento portante y elemento guía. Se los diseña para soportar cargas de hasta 35 Tn/eje, con la capacidad de albergar vehículos con velocidades mayores de 300 km/h. En la figura 1.13 se muestra un ejemplo de perfil de riel.

Los rieles deben tener, en este sentido, una alta resistencia a: desgaste, compresión y fatiga; además de estar hechos de un material con elevadas propiedades de elasticidad, dureza y resistencia a la tracción.

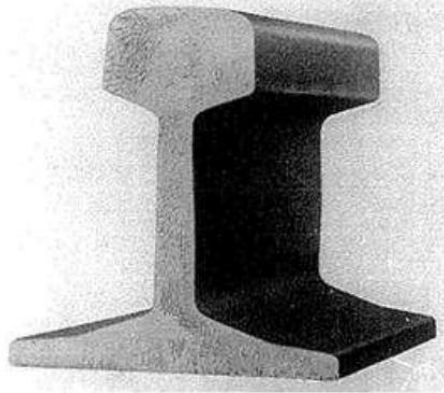


Figura 1.13. Perfil de riel para vía férrea. Fuente: (Nuevo Central Argentino S.A., 2014)

Fijaciones

Las fijaciones se utilizan para anclar los rieles a los durmientes. Gracias a estos, se asegura la invariabilidad de la trocha. Estos, deben poseer buena resistencia mecánica y alta elasticidad ya que se requiere una vida útil prolongada, evitando mantenimientos recurrentes. Un ejemplo de fijaciones se indica en la figura 1.14.



Figura 1.14. Fijación en estructura de vía férrea. Fuente: (Nuevo Central Argentino S.A., 2014)

Juntas

Las juntas consisten en las uniones entre dos rieles mediante dos piezas metálicas llamadas eclisas. Estas, además de unir los rieles y dar continuidad a la vía, permiten que el riel se dilate cuando existen cambios de temperatura.

Estos elementos deben presentar una alta resistencia a la deformación ya que están sometidos a efectos dinámicos aumentados, debido a la variación del momento de inercia. En la figura 1.15 se observa un ejemplo de junta.



Figura 1.15. Juntas de riel. Fuente: (Nuevo Central Argentino S.A., 2014)

Bulones y arandelas

Los bulones son tornillos de cuerpo cilíndrico que aseguran la composición de la junta, junto con la tuerca.

Por otra parte, las arandelas consisten en materiales elásticos, en forma de resorte, y se usan para evitar que el bulón se afloje.

Benchmarking

Tipos de configuración de piezoeléctricos

Al diseñar un dispositivo piezoeléctrico, resulta indispensable seleccionar una configuración apropiada para la aplicación en cuestión. Es así como se deben analizar diferentes configuraciones en función de escoger la que mejores prestaciones brinden para recolectar energía vibracional en aplicaciones ferroviarias.

Viga en voladizo

Este tipo de configuración es simple y permite grandes deformaciones bajo la acción de vibraciones. Consiste esencialmente en láminas de material piezoeléctrico, polarizada con electrodos en la parte superior e inferior, como se muestra en la figura 1.16. Uno de los extremos se encuentra fijo y, el otro, representa el punto donde se aplica la fuerza que produce la deformación. (Gómez Molina, 2018)

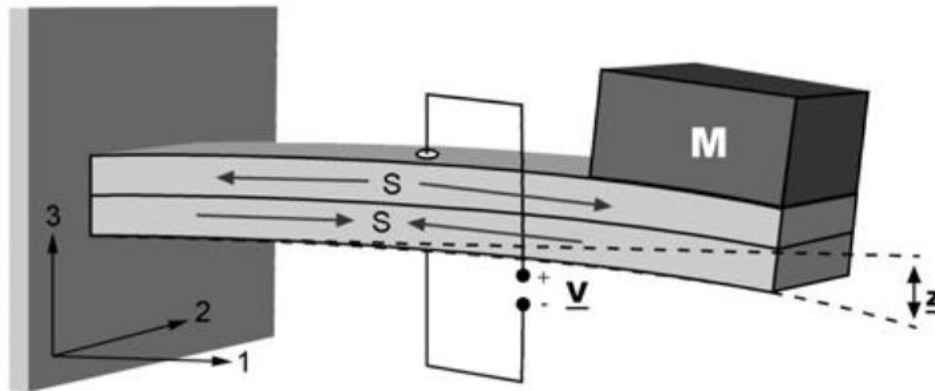


Figura 1.16. Estructura tipo cantiléver Fuente: (Gómez Molina, 2018)

Para este tipo de configuración se utilizan transductores bimorfos, generalmente, ya que estos están orientados a trabajar exclusivamente para aplicaciones vibratorias. En el mercado, existen alternativas con respecto al tipo de conectividad que se solicite. Para conexiones de configuración de modo d22 existen las marcas: DuraAct (figura 1.17.a) y el FlexPath. Para el modo d13 existen transductores de fibras activas (figura 1.17.b.), transductores comerciales como: el Active Fiber Composite (ilustración 1.17.c) o el PowerAct (figura 1.17.d). (Alemán & Guerrero, s. f.)

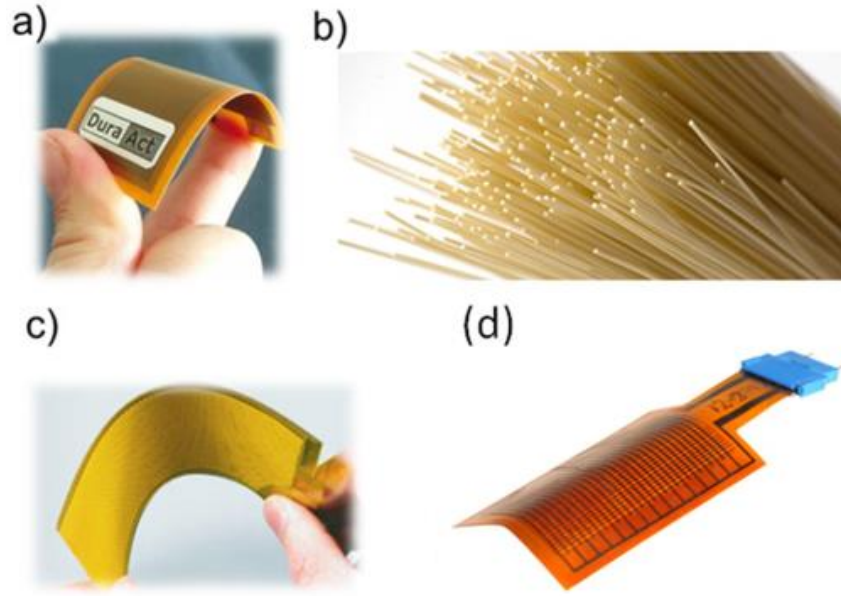


Figura 1.17. Piezoelectrico DuraAct a). Lámina de PZT activa, de 0.25 mm de diámetro b). Piezoelectrico Active Fiber Composite c) y Quick Pack d). Fuente: (Alemán & Guerrero, s. f.)

Tipo címbalo

Este tipo de configuración produce altas deformaciones bajo la acción de una fuerza externa, de forma transversal. Se usa principalmente en aplicaciones para microelectrónicos. Consiste en un material piezoelectrico entre dos platillos, como se observa en la figura 1.18.

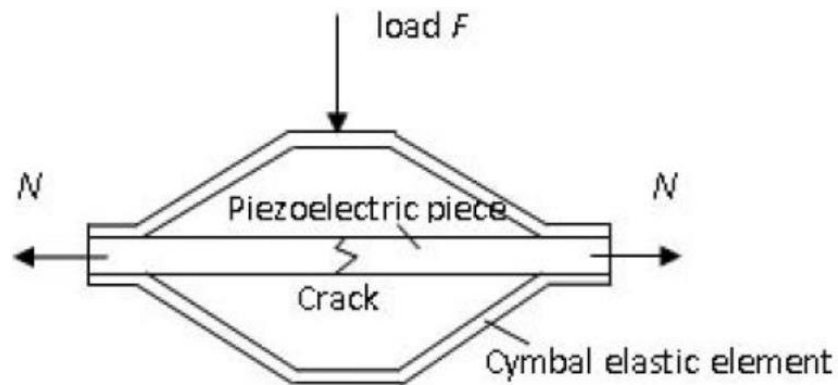


Figura 1.18. Estructura tipo címbalo. Fuente: (Gómez Molina, 2018)

Se implementa una estructura para transmitir una fuerza en modo de flexión radial. El estímulo se aplica perpendicularmente al dispositivo mientras que los extremos polarizados recolectan la carga generada. La desventaja de esta configuración es la fragilidad que pueden presentar los elementos, dada la disposición de elementos. Esto, condiciona las dimensiones y la capacidad de recibir elevadas cargas mecánicas. (Alemán & Guerrero, s. f.)

Tipo pila

Este tipo de configuración consiste en capas colocadas con polarización opuesta con respecto a cada capa adyacente, como se muestra en la figura 1.19. Son conectadas en paralelo, en el circuito eléctrico, y mientras mayor cantidad de capas se tenga mayor es la energía que puede producir. Puede dar alta respuesta de voltaje, sin embargo, ante golpes mecánicos repetitivos puede dañarse fácilmente. (Gómez Molina, 2018)

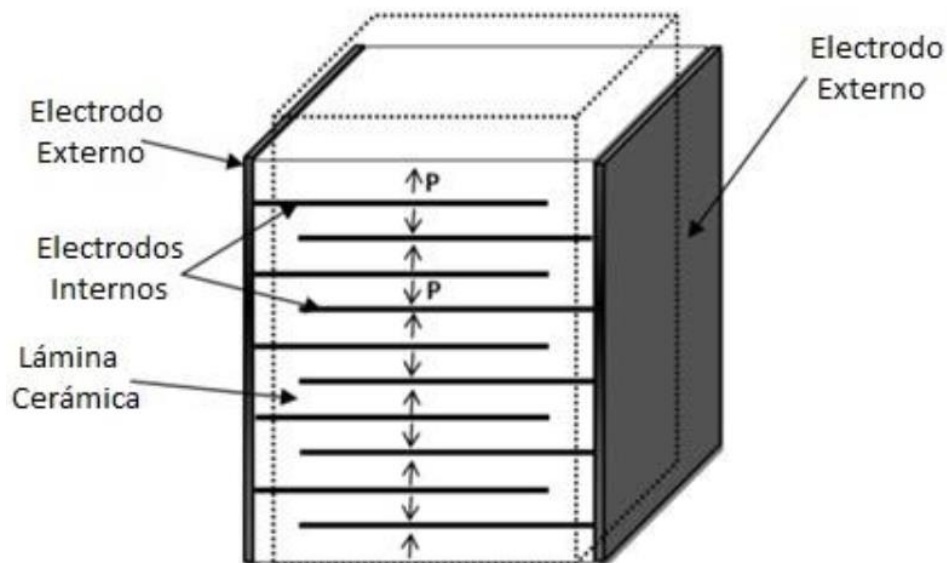


Figura 1.19. Configuración tipo pila Fuente: (Gómez Molina, 2018)

Este tipo de configuración se utiliza mayormente en aplicaciones con donde haya impulso, dada su naturaleza. Sin embargo, no resultan prácticos en aplicaciones vibratorias ya que tienen

desplazamientos relativamente pequeños con elevadas capacitancias, lo que lo hace poco eficiente en la salida de potencia. (Alemán & Guerrero, s. f.)

Tipos de vía férrea

Los tipos de vía en cuestión se proponen en función de comparar las mejores prestaciones en calidad y mantenimiento barato. Es así como se tiene:

La vía dff

La vía llamada Direct Fixation Fastening (DFF) consiste en una modificación en la sujeción convencional. Se coloca una placa metálica fijada a la base utilizando insertos metálicos. Además, se coloca un material elastómero entre la placa y la base para atenuar vibraciones. Un ejemplo de este tipo de vía se observa en la figura 1.20.

Las ventajas de esta vía consisten en facilidades de construcción y montaje, además de un mantenimiento limpio y a bajo costo. (Ayoub, 2018)

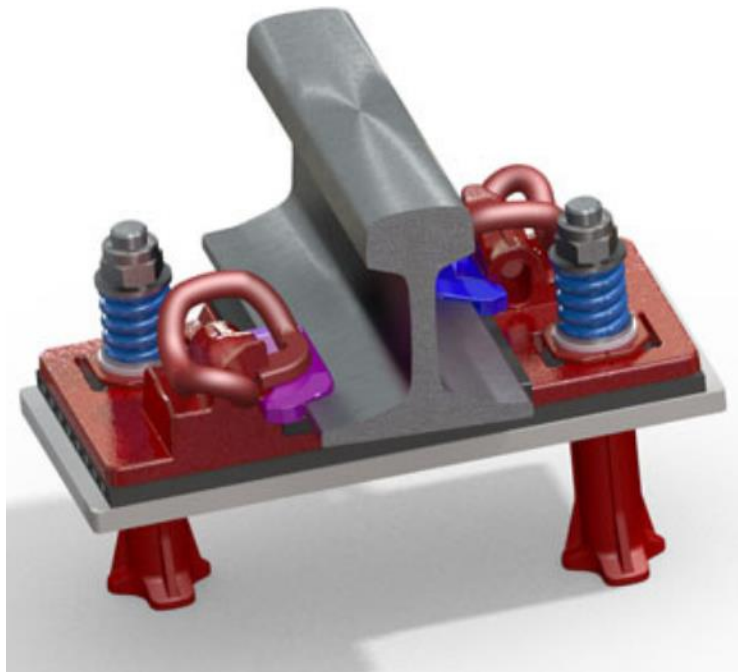


Figura 1.20. Fijaciones DFF. Fuente: (Ayoub, 2018)

La vía bibloque

Esta vía se propone como un híbrido entre la vía convencional y la vía de tipo DFF. En esta, la vía se construye con bloques de hormigón y elementos elastoméricos, como se observa en la figura 1.21. Las ventajas de estas vías son su simple montaje y el fácil mantenimiento a un bajo costo. Gracias a los elementos de la vía tipo DFF, se tiene una buena atenuación de vibraciones.



Figura 1.21. Tren con vía bibloque. Fuente: (Ayoub, 2018)

La vía bibloque con riostra

En este modelo se implementan traviesas mixtas tipo RS, con fijaciones doblemente elásticas. Los bloques de hormigón se unen mediante una riostra metálica, como se evidencia en la figura 1.22.

Las ventajas estas vías es su fácil implementación y su barato costo. Además, asegura la rigidez transversal atenuando las vibraciones en mayor medida que en otros tipos de vía. (Ayoub, 2018)

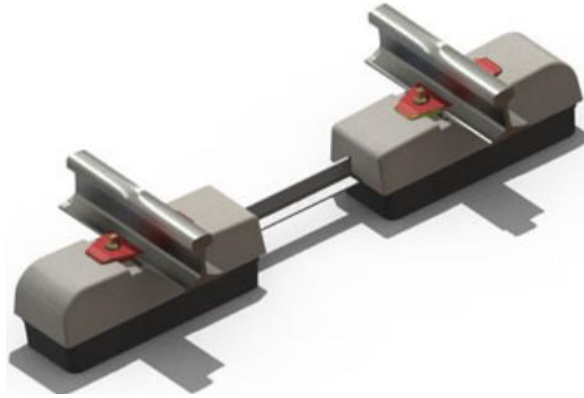


Figura 1.22. Traviesas bloque con riostra. Fuente: (Ayoub, 2018)

2. METODOLOGÍA

Se propone una metodología lógica en función de establecer cada paso del proceso de diseño del dispositivo piezoeléctrico. Como se observa en la figura 2.1, es necesaria una recopilación bibliográfica para definir las metas del benchmarking y tener así recursos para seleccionar alternativas, comparando otros productos similares al propuesto. El análisis funcional y la casa de la calidad son herramientas que permiten obtener un criterio sobre las alternativas para poder escoger, mediante criterios ponderados, la alternativa más apropiada.

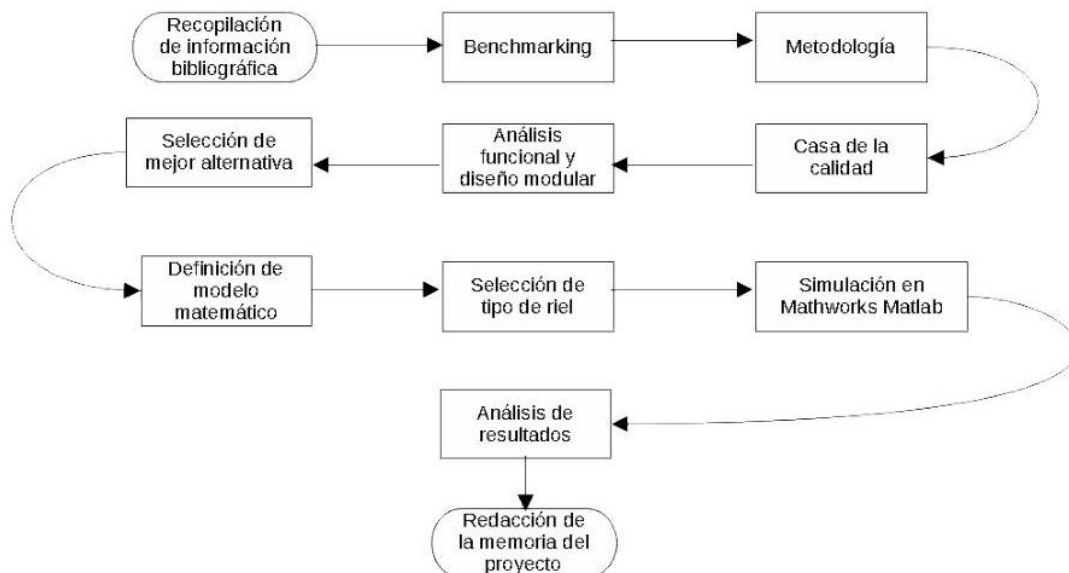


Figura 2.1. Metodología. Fuente: propia.

2.1 Casa de la calidad

Esta herramienta metodológica resulta indispensable para obtener criterios sobre cómo satisfacer las necesidades del usuario y del ingeniero. Gracias a este proceso se puede obtener un resultado que cumpla con todos los requerimientos y sea funcional.

Voz del usuario

Se identifican los requerimientos del usuario:

- Eficiencia en la respuesta mecánica
- Facilidad de montaje y buena sujeción
- Resistencia a corrosión y factores ambientales
- Material resistente a fatiga e impactos
- Fácil adquisición en el mercado
- Acople adecuado para recolección energética
- Capacidad de medición en tiempo real
- Posibilidad de fácil reparación y repuestos accesibles

Voz del ingeniero

Se proponen necesidades del ingeniero:

- Geometría del dispositivo piezoeléctrico
- Disponibilidad del material piezoeléctrico
- Propiedades del piezoeléctrico
- Capacidad de carga

- Vida útil
- Eficiencia en transformar la energía mecánica a eléctrica
- Materiales resistentes a corrosión

Conclusiones de la casa de la calidad

Tomando en cuenta los requerimientos del cliente se tienen:

- Aprovechar el ruido y vibraciones
- Dispositivo fácil de instalar
- Minimizar el uso de energías no renovables

Por lo tanto, según lo obtenido en la casa de la calidad, se definen los siguientes aspectos:

- Eficiencia en la respuesta mecánica
- Capacidad de carga
- Eficiencia en transformar la energía mecánica a eléctrica

2.2 Especificaciones técnicas

Con los resultados de la casa de la calidad, se presenta la tabla 2.1.

Tabla 2.1. Especificaciones técnicas para el recolector de energía

Empresa/ cliente: EPN	Producto: Estudio de la acumulación de energía vibracional aplicando una sinusoidal con colectores piezoeléctricos colocados en infraestructuras ferroviarias		Fecha inicial: 24/08/2022 Segunda revisión:	
Diseñador: Sebastián Villavicencio			Página: 1/1	
Especificaciones Técnicas				
Especificación	Fecha	Propone	R/D	Descripción
Dimensionamiento	24/08/2022	D+C+I	R	Geometría o forma adecuada del dispositivo transductor de energía, en función de su aplicación, el cual debe contar con un dimensionamiento que no sobrepase los 200x170x80 [mm].
Material	24/08/2022	D+C	R	Resistente a los cambios ambientales, excelentes propiedades piezoeléctricas y material comercial.
Capacidad de carga mecánica	24/08/2022	D	R	Capacidad de soportar cargas mecánicas altas, que puede ser entre 35-75 [kN] que es la fuerza de contacto entre la rueda y el riel.
Vida útil	24/08/2022	D+C	D	Una vida operativa estimada de 20 años.
Eficiencia	24/08/2022	D+I	R	Se estima una eficiencia de 0.7.
Potencia	24/08/2022	C	R	Capas de suministrar una potencia mínima de 0.053 [Mw] para alimentar sensores o cargar baterías.
Propone: M = Marketing, D = Diseño, P = Producción, F = Fabricación, I = Ingeniería, C = Cliente R/D: R = Requerimiento, D = Deseo, MR = Modificación de requerimiento				

2.3 Diseño modular y análisis funcional

Para la recolección de energía vibracional y la conversión de esta energía a eléctrica, el proceso no conlleva demasiadas funciones por lo cual simplifica el análisis.

Estructura funcional global

El diagrama funcional de este proyecto se desarrollará hasta el nivel 1. En el nivel cero se realiza la función global que representa la función del sistema de recolección de energía vibracional aplicando una carga general en un colector piezoeléctrico. El diagrama funcional global se indicav en la figura 2.2.

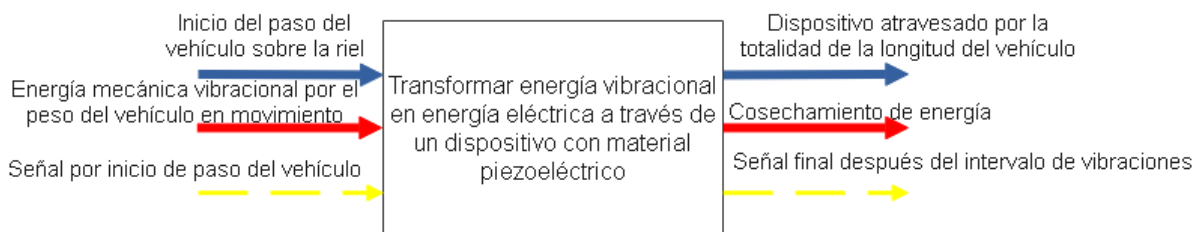


Figura 2.2. Diseño modular. Nivel cero

Definición de módulos

De la función global se desglosan dos módulos o modos de operación. En el nivel 1 se especifica las funciones de la función global la cual, para este proyecto, presenta dos módulos: el módulo 1, que consiste en transmitir la energía mecánica vibracional; y el módulo 2 que es el sistema de transformación de energía. En la figura 2.3, se tiene a los módulos de la función global.

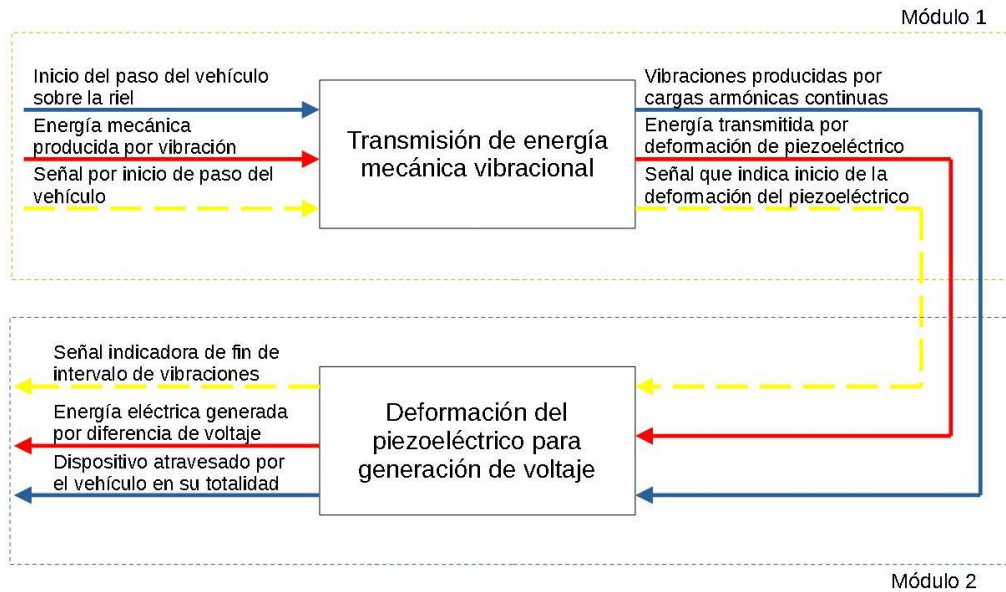


Figura 2.3. Diseño modular. Nivel 1.

2.4 Análisis y selección de la mejor alternativa

Para hallar la mejor solución es necesario definir la forma de calificación según el método ordinal corregido de criterios ponderados: 1, cuando el criterio de las filas es mejor que el de las columnas; 0.5, cuando criterio de las filas es igual de relevante que el de las columnas; y 0, cuando el criterio de las filas es peor que el de las columnas

Módulo 1



En este módulo se requiere poner énfasis en características constructivas relacionadas con la transmisión de energía mecánica vibracional. En este sentido, en primer lugar, se proponen alternativas de vías férreas para verificar la más apropiada.



Vías férreas

Como parte del sistema ferroviario las vías tienen como función el de guiar y conectar las ruedas del tren con el riel, produciendo vibraciones hacia el entorno. Para dispositivos tipo pila

(Tianchen, Jian, Ruigang, & Xiaowei, 2014) indica que la se debe tener otro tipo de sujeción para vías adecuadas de diferente forma, por lo que ese caso no se considera en este artículo. La Tabla 2.2. muestra las alternativas de solución con las ventajas y desventajas para cada tipo de vía.

Tabla 2.2. Análisis de alternativas de vías férreas

Solución 1: Vía convencional de balasto	Ventajas	Desventajas
	<ul style="list-style-type: none"> • Son el tipo de vía más utilizado, por su bajo costo de implementación. • Solo necesita balasto como amortiguador de vibraciones. • Mayor área para la ubicación del colector piezoeléctrico 	<ul style="list-style-type: none"> • Menor estabilidad en los vehículos. • Necesidad de mantenimiento más recurrente. • Disipa menos vibraciones transversales.
Solución 2: Vía en placa con sujeciones DFF	Ventajas	Desventajas
	<ul style="list-style-type: none"> • Bajo mantenimiento • Bajo costo • Atenuar las vibraciones 	<ul style="list-style-type: none"> • No hay altura entre el piso y el riel • Pocas zonas para la ubicación del piezoeléctrico
Solución 3: Vía Bloque	Ventajas	Desventajas

	<ul style="list-style-type: none"> • Bajo mantenimiento • Buena capacidad de atenuación de las vibraciones • Altura entre el durmiente y el piso 	<ul style="list-style-type: none"> • Costo elevado • Pocas zonas para la ubicación del piezoeléctrico
<p align="center">Solución 4: Vía Bibloque con riostra</p>	<p align="center">Ventajas</p>	<p align="center">Desventajas</p>
	<ul style="list-style-type: none"> • Mayor rigidez transversal a los lados de la vía. • Altura entre el durmiente y el piso • Bajo mantenimiento 	<ul style="list-style-type: none"> • Costo elevado • Pocas zonas para la ubicación del piezoeléctrico

Para el componente vías férreas, los criterios a analizar son:

- Vía más fácil de implementar el dispositivo.
- Espacio disponible.
- Mejor propagación de vibraciones.
- Mejores prestaciones en contacto rueda carril.

La tabla 2.3. representa una evaluación del peso específico para los criterios mencionados anteriormente, en donde se definen valores para que mediante un cálculo se obtenga la ponderación que se utilizará en las tablas siguientes.

Tabla 2.3. Evaluación del peso específico de cada criterio a evaluar para la solución de vías férreas

Criterio	Vía de más fácil implementación	Espacio disponible	Mejor propagación de vibraciones	Mejor contacto rueda carril	$\Sigma+1$	Ponderación
Vía de más fácil implementación		1	1	0.5	3.5	0.368
Espacio disponible	0.5		0.5	0	2	0.211
Mejor propagación de vibraciones	1	0.5		0	2.5	0.263
Mejor contacto rueda carril	0	0.5	0		1.5	0.158
				Suma	9.5	1

Como se puede observar en la tabla 2.3. el criterio con mayor relevancia en este análisis resulta ser el de la vía de más fácil implementación, con un valor de 0.368, para este método.

La tabla 2.4 indica una evaluación del peso específico del criterio de facilidad de implementación.

Tabla 2.4. Evaluación del peso específico del criterio: Facilidad de implementación

Vía de más fácil implementación	Alternativa 1	Alternativa 2	Alternativa 3	Alternativa 4	$\Sigma+1$	Ponderación
Alternativa 1		1	1	1	4	0.4
Alternativa 2	0		0.5	0.5	2	0.2
Alternativa 3	0	0.5		0.5	2	0.2
Alternativa 4	0	0.5	0.5		2	0.2
			Suma		10	1

Como se puede observar en la tabla 2.4. la mejor alternativa para este caso resulta ser la alternativa 1, con un valor de 0.4 para este método.

La tabla 2.5. indica una evaluación del peso específico del criterio de espacio disponible.

Tabla 2.5. Evaluación del peso específico del criterio: Espacio disponible.

Espacio disponible	Alternativa 1	Alternativa 2	Alternativa 3	Alternativa 4	$\Sigma+1$	Ponderación
Alternativa 1		1	1	1	4	0.4
Alternativa 2	0		0	0.5	1.5	0.15
Alternativa 3	0	1		0.5	2.5	0.25
Alternativa 4	0	0.5	0.5		2	0.2
			Suma		10	1

Como se puede observar en la tabla 2.5. la mejor alternativa para este caso resulta ser la alternativa 1, con un valor de 0.4 para este método.

La tabla 2.6. indica una evaluación del peso específico del criterio mejor propagación de vibraciones.

Tabla 2.6. Evaluación del peso específico del criterio: Propagación de vibraciones.

Mejor propagación de vibraciones	Alternativa 1	Alternativa 2	Alternativa 3	Alternativa 4	$\Sigma+1$	Ponderación
Alternativa 1		1	1	1	4	0.4
Alternativa 2	0		0.5	0.5	2	0.2
Alternativa 3	0	0.5		0.5	2	0.2
Alternativa 4	0	0.5	0.5		2	0.2
			Suma		10	1

Como se puede observar en la tabla 2.6. la mejor alternativa para este caso resulta ser la alternativa 1, con un valor de 0,4 para este método.

La tabla 2.7. indica una evaluación del peso específico del contacto rueda carril.

Tabla 2.7. Evaluación del peso específico del criterio: Contacto rueda carril.

Mejor contacto rueda carril	Alternativa 1	Alternativa 2	Alternativa 3	Alternativa 4	$\Sigma+1$	Ponderación
Alternativa 1		0.5	0.5	0.5	2.5	0.25
Alternativa 2	0.5		0.5	0.5	2.5	0.25
Alternativa 3	0.5	0.5		0.5	2.5	0.25
Alternativa 4	0.5	0.5	0.5		2.5	0.25
			Suma		10	1

Como se puede observar en la tabla 2.7. todas las alternativas resultan ser igualmente apropiadas para este criterio.

La tabla 2.8. indica las conclusiones del análisis de alternativas para las vías férreas. Al sumar todos los criterios mediante este método se obtiene el orden de prioridad mediante el cual se podrá elegir la alternativa más apropiada.

Tabla 2.8. Conclusiones de soluciones para vías férreas

Conclusión	Vía de más fácil implementación	Espacio disponible	Mejor propagación de vibraciones	Mejor contacto rueda carril	Σ	Prioridad
Alternativa 1	0.152	0.084	0.252	0.039	0.527	1
Alternativa 2	0.076	0.032	0.126	0.039	0.273	4
Alternativa 3	0.076	0.053	0.126	0.039	0.294	2
Alternativa 4	0.076	0.042	0.126	0.039	0.283	3

Tras analizar los requerimientos en este componente en la tabla 2.8, se tiene que la mejor alternativa es el riel convencional de balasto.


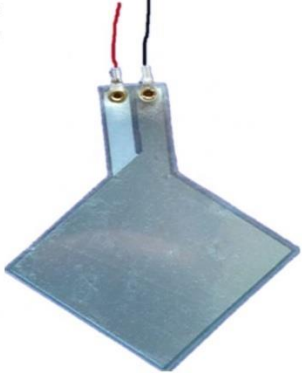
Módulo 2

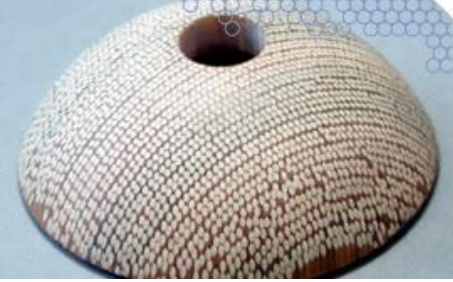
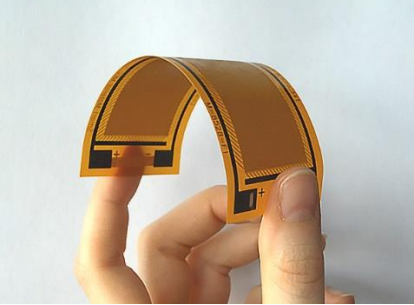
Para el módulo 2, es necesario evaluar las mejores características en cuestión de tener la mayor eficiencia dada la deformación del piezoeléctrico.

Material del dispositivo piezoeléctrico

El material con el que se va a construir el piezoeléctrico influye directamente con la eficiencia del proyecto. Es así como en la tabla 2.9 se indican alternativas para este componente:

Tabla 2.9. Análisis de alternativas para diferentes tipos de material

Solución 1: PZT	Ventajas	Desventajas
	<ul style="list-style-type: none">• Son el tipo de material más utilizado para aplicaciones ferroviarias.• Flexibilidad.• Mejor eficiencia en cosecha de energía.	<ul style="list-style-type: none">• No soportan grandes cargas.
Solución 2: PVDF	Ventajas	Desventajas
	<ul style="list-style-type: none">• Bajo mantenimiento• Bajo costo• Resistentes a fractura por fatiga.	<ul style="list-style-type: none">• No son muy flexibles.• Menor eficiencia.

Solución 3: Piezofibra	Ventajas	Desventajas
	<ul style="list-style-type: none"> • Flexibilidad superior • Amplio rango de frecuencia de resonancias. 	<ul style="list-style-type: none"> • Costo elevado • Geometría inapropiada. • Menor eficiencia a la esperada.
Solución 4: MFC (Macro Fiber Composite)	Ventajas	Desventajas
	<ul style="list-style-type: none"> • Alta flexibilidad. • Resistente a cargas cíclicas. • Buena adaptabilidad geométrica. 	<ul style="list-style-type: none"> • Costo elevado • Poco tiempo útil.

Para el componente material del piezoeléctrico, los criterios a analizar son:

- Disponibilidad en el mercado.
- Flexibilidad (vida útil).
- Eficiencia en la recolección de energía.
- Costo

Para estos componentes, se procede a analizar mediante el método ordinal corregido de criterios ponderados.

La tabla 2.10. indica una evaluación del peso específico de cada criterio anteriormente mencionado, en donde se definen valores para que mediante un cálculo se obtenga la ponderación que se utilizará en las tablas siguientes.

Tabla 2.10. Evaluación del peso específico de cada criterio para la solución de tipo de material piezoeléctrico

Criterio	Disponibilidad en el mercado	Flexibilidad (vida útil)	Eficiencia en la recolección de energía	Costo	$\Sigma+1$	Ponderación
Disponibilidad en el mercado		0.5	0	0.5	2	0.2
Flexibilidad (vida útil)	0.5		0	0.5	2	0.2
Eficiencia en la recolección de energía	1	1		1	4	0.4
Costo	0.5	0.5	0		2	0.2
				Suma	10	1

Como se puede observar en la tabla 2.10. el criterio con mayor relevancia en este análisis resulta ser el de eficiencia en la recolección de energía, con un valor de 0.368, para este método.

La tabla 2.11 indica una evaluación del peso específico del criterio de disponibilidad en el mercado.

Tabla 2.11. Evaluación del peso específico del criterio: Disponibilidad.

Disponibilidad en el mercado	Alternativa 1	Alternativa 2	Alternativa 3	Alternativa 4	$\Sigma+1$	Ponderación
Alternativa 1		0.5	1	1	3.5	0.35
Alternativa 2	0.5		1	1	3.5	0.35
Alternativa 3	0	0		0.5	1.5	0.15
Alternativa 4	0	0	0.5		1.5	0.15
			Suma		10	1

Como se puede observar en la tabla 2.11. las mejores alternativas para este caso resultan ser las alternativas 1 y 2, con un valor de 0.35 para este método.

La tabla 2.12. indica una evaluación del peso específico de flexibilidad.

Tabla 2.12. Evaluación del peso específico del criterio: Flexibilidad.

Flexibilidad (vida útil)	Alternativa 1	Alternativa 2	Alternativa 3	Alternativa 4	$\Sigma+1$	Ponderación
Alternativa 1		1	1	1	4	0.4
Alternativa 2	0		1	1	3	0.3
Alternativa 3	0	0		0.5	1.5	0.15
Alternativa 4	0	0	0.5		1.5	0.15
			Suma		10	1

Como se puede observar en la tabla 2.12. la mejor alternativa para este caso resulta ser la alternativa 1, con un valor de 0.4 para este método.

La tabla 2.13. indica una evaluación del peso específico de la eficiencia en la recolección de energía.

Tabla 2.13. Evaluación del peso específico del criterio: Eficiencia en la recolección de energía.

Eficiencia en la recolección de energía	Alternativa 1	Alternativa 2	Alternativa 3	Alternativa 4	$\Sigma+1$	Ponderación
Alternativa 1		1	1	0.5	3.5	0.35
Alternativa 2	0		0.5	0	3.5	0.35
Alternativa 3	0	0.5		0	1.5	0.15
Alternativa 4	0.5	1	1		1.5	0.15
			Suma		10	1

Como se puede observar en la tabla 2.13. las mejores alternativas para este caso resultan ser las alternativas 1 y 2, con un valor de 0.35 para este método.

La tabla 2.14. indica una evaluación del peso específico de costo.

Tabla 2.14. Evaluación del peso específico del criterio: Costo.

Costo	Alternativa 1	Alternativa 2	Alternativa 3	Alternativa 4	$\Sigma+1$	Ponderación
Alternativa 1		0.5	1	1	3.5	0.35
Alternativa 2	0.5		1	1	3.5	0.35
Alternativa 3	0	0		0.5	1.5	0.15
Alternativa 4	0	0	0.5		1.5	0.15
			Suma		10	1

Como se puede observar en la tabla 2.14. las alternativas con mejores resultados son la 1 y 2.

La tabla 2.15. indica las conclusiones del análisis de alternativas para el material piezoeléctrico. Al sumar todos los criterios mediante este método se obtiene el orden de prioridad mediante el cual se podrá elegir la alternativa más apropiada.

Tabla 2.15. Conclusiones para soluciones de tipo de material piezoeléctrico.

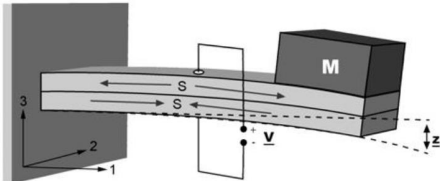
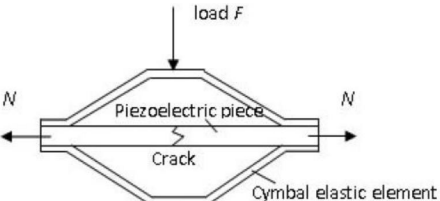
Conclusión	Disponibilidad en el mercado	Flexibilidad (vida útil)	Eficiencia en la recolección de energía	Costo	Σ	Prioridad
Alternativa 1	0.07	0.08	0.14	0.14	0.43	1
Alternativa 2	0.07	0.06	0.14	0.14	0.41	2
Alternativa 3	0.03	0.03	0.03	0.03	0.12	4
Alternativa 4	0.03	0.03	0.03	0.03	0.12	3

Según el método de criterios ponderados. la mejor alternativa para este componente fue el PZT o titanato de zirconato de plomo, con un valor de 0.43.

Tipos de configuración de piezoeléctrico

Para poner a comparar la configuración de cada material se considera la investigación de Anton & Sodano (2007), en la cual hace una revisión del desempeño de diferentes materiales al aplicárseles diferentes condiciones de carga, con diferentes disposiciones de elementos. (Erturk & Inman, 2008), indican de manera detallada las ventajas de utilizar la configuración cantiléver en esta aplicación específica. Para la configuración tipo pila, se analizaron los resultados obtenidos en la investigación de (Khan & Ahmad, 2016) y (J. Wang, Shi, Xiang, & Song, 2015), mientras que (Wischke, Fehrenbach, Abbas, Biancuzzi, & Woias, 2010) detalla las ventajas de la configuración tipo címbalo. La comparación se puede evidenciar en la tabla 2.16.

Tabla 2.16. Análisis de alternativas para tipo de configuración de dispositivo piezoeléctrico

Solución 1: Cantiliver	Ventajas	Desventajas
	<ul style="list-style-type: none"> • Son el tipo de configuración más utilizado para aplicaciones ferroviarias. • Fácil implementación. • Eficiencia en cosecha de energía. 	<ul style="list-style-type: none"> • Requiere de mantenimiento recurrente.
Solución 2: Tipo címbalo	Ventajas	Desventajas
	<ul style="list-style-type: none"> • Construcción sencilla • Bajo costo • Buena eficiencia en control de vibraciones. 	<ul style="list-style-type: none"> • No son muy flexibles. • Para aplicaciones muy específicas.

Solución 3: Tipo pila	Ventajas	Desventajas
	<ul style="list-style-type: none"> • Muy resistentes. • Fácil implementación y construcción. • Barato. • Alta eficiencia en bajas frecuencias. 	<ul style="list-style-type: none"> • Poca eficiencia en la recolección de energía, para este caso. • Se utiliza mayormente en aplicaciones de telecomunicaciones. • Se aprovecha de mejor manera bajo impactos múltiples en lugar de vibraciones.

Para el componente de tipo de configuración del piezoeléctrico, los criterios a analizar son:

- Facilidad de montaje.
- Necesidad de mantenimiento.
- Eficiencia en la recolección de energía.
- Costo.

La tabla 2.17. muestra una evaluación del peso específico de cada criterio anteriormente mencionado, en donde se definen valores para que mediante un cálculo se obtenga la ponderación que se utilizará en las tablas siguientes.

Tabla 2.17. Evaluación del peso específico de cada criterio para la solución de tipo de configuración de piezoeléctrico.

Criterio	Facilidad de montaje	Necesidad de mantenimiento	Eficiencia en la recolección de energía	Costo	E+1	Ponderación
Facilidad de montaje		0.5	0	0.5	2	0.2
Necesidad de mantenimiento	0.5		0	0.5	2	0.2
Eficiencia en la recolección de energía	1	1		1	4	0.4
Costo	0.5	0.5	0		2	0.2
				Suma	10	1

Como se puede observar en la tabla 2.17. el criterio con mayor relevancia en este análisis resulta ser el de eficiencia en la recolección de energía, con un valor de 0.4, para este método.

La tabla 2.18 indica una evaluación del peso específico del criterio de facilidad de montaje.

Tabla 2.18. Evaluación del peso específico del criterio: Facilidad de montaje.

Facilidad de montaje	Alternativa 1	Alternativa 2	Alternativa 3	$\Sigma+1$	Ponderación
Alternativa 1		1	0.5	2.5	0.42
Alternativa 2	0		0	1	0.16
Alternativa 3	0.5	1		2.5	0.42
			Suma	6	1

Como se puede observar en la tabla 2.18. las mejores alternativas para este caso resultan ser la alternativa 1 y 3, con un valor de 0.42 para este método.

La tabla 2.19. indica una evaluación del peso específico de necesidad de mantenimiento.

Tabla 2.19. Evaluación del peso específico del criterio: Necesidad de mantenimiento

Necesidad	Alternativa 1	Alternativa 2	Alternativa 3	E+1	Ponderación
-----------	---------------	---------------	---------------	-----	-------------

de mantenimiento					
Alternativa 1		1	0.5	2.5	0.42
Alternativa 2	0		0	1	0.16
Alternativa 3	0.5	1		2.5	0.42
			Suma	6	1

Como se puede observar en la tabla 2.19. las mejores alternativas para este caso resultan ser la alternativa 1 y 3, con un valor de 0.42 para este método.

La tabla 2.20. indica una evaluación del peso específico del criterio eficiencia en la recolección de energía.

Tabla 2.20. Evaluación del peso específico del criterio: Eficiencia en la recolección de energía.

Eficiencia en la recolección de energía	Alternativa 1	Alternativa 2	Alternativa 3	E+1	Ponderación
Alternativa 1		0.5	1	2.5	0.42
Alternativa 2	0.5		1	2.5	0.42
Alternativa 3	0	0		1	0.16
			Suma	6	1

Como se puede observar en la tabla 2.20. las mejores alternativas para este caso resultan ser la alternativa 1 y 2, con un valor de 0.42 para este método.

La tabla 2.21. indica una evaluación del peso específico del criterio costo.

Tabla 2.21. Evaluación del peso específico del criterio: Costo.

Costo	Alternativa 1	Alternativa 2	Alternativa 3	E+1	Ponderación
Alternativa 1		0.5	0.5	2	0.33
Alternativa 2	0.5		0.5	2	0.33
Alternativa 3	0.5	0.5		2	0.33
			Suma	6	1

Como se puede observar en la tabla 2.21. las 3 alternativas tienen la misma relevancia.

La tabla 2.22. indica las conclusiones del análisis de alternativas para el material piezoeléctrico. Al sumar todos los criterios mediante este método se obtiene el orden de prioridad mediante el cual se podrá elegir la alternativa más apropiada.

Tabla 2.22. Conclusiones para soluciones de tipo de configuración de piezoeléctrico.

Conclusión	Facilidad de montaje	Necesidad de mantenimiento	Eficiencia en el cosechamiento de energía	Costo	E	Prioridad
Alternativa 1	0.084	0.084	1.68	0.66	2.508	1
Alternativa 2	0.032	0.032	1.68	0.66	2.404	2
Alternativa 3	0.084	0.084	0.64	0.66	1.468	3

Según el método de criterios ponderados, la mejor alternativa para este componente fue el PZT o titanato de zirconato de plomo con un valor de 2.508.

3. MODELO MATEMÁTICO

Para definir el modelo matemático del caso de estudio actual, es necesario evaluarlo de manera que sea un sistema con dos grados de libertad, con dos cuerpos de análisis. En este sentido, se propone un modelo con excitación externa forzada en forma de senoide. Para este fin, es necesario recurrir a un diagrama de cuerpo libre del modelo a tratar, detallado de la siguiente forma:

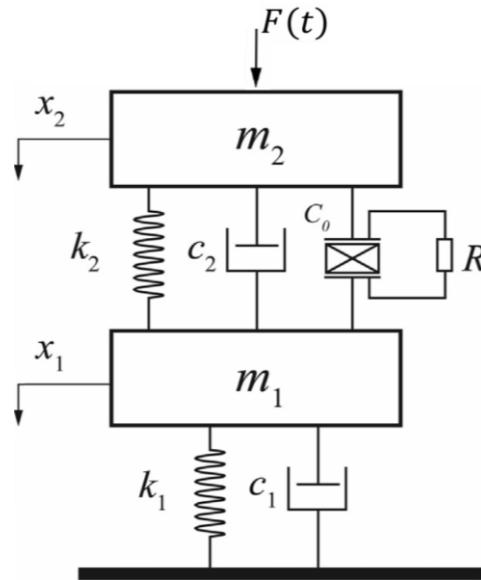


Tabla 3.1 Diagrama de cuerpo libre del sistema.

Simbología para el modelo matemático:

x_1 : desplazamiento de la traviesa

x_2 : desplazamiento del carril

m_1 : masa de la traviesa

m_2 : masa del riel

C_1 : coeficiente de amortiguamiento del balasto

C_2 : coeficiente de amortiguamiento de las sujeciones

C_0 : capacitancia de bloqueo del piezoeléctrico

R: resistencia total del piezoeléctrico

k_1 : rigidez del balasto

k_2 : rigidez de las sujeciones

V: voltaje generado por el piezoeléctrico

R: resistencia del piezoeléctrico

α : factor de fuerza

Para definir el movimiento del sistema, se proponen las ecuaciones 3.1 y 3.2 al realizar sumatoria de fuerzas para cada masa.

$$m_1 \cdot \ddot{x}_1(t) = -\alpha \cdot V(t) - k_2 \cdot [x_2(t) - x_1(t)] - C_2[\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)] + k_1 x_1(t) + c_1 \dot{x}_1(t)$$

Ecuación 3.1. Sumatoria de fuerzas para la traviesa.

$$m_2 \cdot \ddot{x}_2(t) = k_2 \cdot [x_2(t) - x_1(t)] + C_2[\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)] + \alpha \cdot V(t) + F(t)$$

Ecuación 3.2. Sumatoria de fuerzas para el riel.

Para definir el sistema eléctrico, es necesario referirse a la ecuación 3.3, dada por (X. Wang, 2016). En esta, la energía eléctrica generada por el piezoeléctrico se define como la suma del flujo de energía hacia el circuito eléctrico con la energía electrostática almacenada en la capacitancia del material piezoeléctrico:

$$\alpha[\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)] = \frac{V(t)}{R} + C_0 \cdot \dot{V}(t)$$

Ecuación 3.3. Modelo eléctrico para el dispositivo piezoeléctrico

$$\alpha = -\frac{e_{33} \cdot S_0}{H}$$

Ecuación 3.4. Definición del factor de fuerza

$$C_0 = -\frac{\epsilon^S \cdot S_0}{H}$$

Ecuación 3.5. Definición de la capacitancia de bloqueo del piezoeléctrico.

De la ecuación 3.1 y 3.2 se obtienen ecuaciones equivalentes aplicando la transformada de Laplace. Con esto, se obtienen las ecuaciones 3.6 y 3.7.

$$m_1 \cdot x_1 \cdot s^2 = -\alpha \cdot \bar{V} - k_2 \cdot [x_2 - x_1] - C_2 \cdot s[x_2 - x_1(t)] + k_1 x_1(t) + c_1 \cdot s \cdot x_1$$

Ecuación 3.6. Sumatorio de fuerzas para la traviesa, en el dominio de la frecuencia.

$$m_2 \cdot x_2 \cdot s^2 = k_2 \cdot [x_2 - x_1] + C_2 \cdot s \cdot [x_2 - x_1] + \alpha \cdot \bar{V}(t) + F(t)$$

Ecuación 3.7. Sumatorio de fuerzas para el riel, en el dominio de la frecuencia.

$$\frac{\bar{V}}{x_1 - x_2} = \frac{\alpha \cdot R \cdot s}{1 + R \cdot C_0 \cdot s}$$

Ecuación 3.8. Diferencia de voltaje en el dispositivo piezoeléctrico.

Reemplazando la ecuación 3.8 en las ecuaciones 3.6 y 3.7 se obtiene:

$$m_1 \cdot x_1 \cdot s^2 + \alpha \cdot \bar{V} + k_2 \cdot [x_2 - x_1] + C_2 \cdot s[x_2 - x_1(t)] - k_1 x_1(t) - c_1 \cdot s \cdot x_1 = 0$$

$$m_2 \cdot x_2 \cdot s^2 - k_2 \cdot [x_2 - x_1] - C_2 \cdot s \cdot [x_2 - x_1] - \alpha \cdot \bar{V}(t) = F(t)$$

Al obtener estas ecuaciones, es necesario definir las condiciones de borde, de donde se obtiene:

$$\text{si } t = 0$$

$$\rightarrow x_1(0) = x_1(0) = 0; \quad x_2(0) = \dot{x}_2(0) = 0; \quad V(0) = \dot{V}(0) = 0$$

$$m_1 \cdot x_1 \cdot s^2 = -\alpha \cdot \bar{V} - k_2 \cdot [x_2 - x_1] - C_2 \cdot s[x_2 - x_1(t)] + k_1 x_1(t) + c_1 \cdot s \cdot x_1$$

$$m_2 \cdot x_2 \cdot s^2 = k_2 \cdot [x_2 - x_1] + C_2 \cdot s \cdot [x_2 - x_1] + \alpha \cdot \bar{V}(t) + F(t)$$

$$x_2 \left[m_2 \cdot s^2 - k_2 - C_2 \cdot s - \frac{\alpha^2 \cdot R \cdot s}{1 + R \cdot C_0 \cdot s} \right] + x_1 \left[k_2 + C_2 \cdot s + \frac{\alpha^2 \cdot R \cdot s}{1 + R \cdot C_0 \cdot s} \right] = F$$

$$x_2 \left[k_2 + C_2 \cdot s - \frac{\alpha^2 \cdot R \cdot s}{1 + R \cdot C_0 \cdot s} \right] + x_1 \left[m_1 \cdot s^2 - k_2 - C_2 \cdot s - k_1 - C_1 \cdot s + \frac{\alpha^2 \cdot R \cdot s}{1 + R \cdot C_0 \cdot s} \right] = 0$$

$$\begin{bmatrix} k_2 + C_2 \cdot s + \frac{\alpha^2 \cdot R \cdot s}{1 + R \cdot C_0 \cdot s} & m_2 \cdot s^2 - k_2 - C_2 \cdot s - \frac{\alpha^2 \cdot R \cdot s}{1 + R \cdot C_0 \cdot s} \\ m_1 \cdot s^2 - k_2 - C_2 \cdot s - k_1 - C_1 \cdot s + \frac{\alpha^2 \cdot R \cdot s}{1 + R \cdot C_0 \cdot s} & k_2 + C_2 \cdot s - \frac{\alpha^2 \cdot R \cdot s}{1 + R \cdot C_0 \cdot s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se hace un cambio de variable para poder operar más fácilmente y obtener el determinante que permita hallar las soluciones del sistema.

$$a = \alpha^2 \cdot R \cdot s$$

$$b = 1 + R \cdot C_0 \cdot s$$

$$c = m_2 \cdot s^2 - k_2 - C_2 \cdot s$$

$$d = k_2 + C_2 \cdot s$$

$$e = m_1 \cdot s^2 - k_1 - C_1 \cdot s$$

$$\begin{bmatrix} d + \frac{a}{b} & c - \frac{a}{b} \\ e + d + \frac{a}{b} & d - \frac{a}{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

A partir de la matriz de la ecuación 12 se obtiene el determinante de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} & \left(d + \frac{a}{b} \right) \left(d - \frac{a}{b} \right) - \left[(e + d) + \frac{a}{b} \right] \left(c - \frac{a}{b} \right) \\ &= \left(d^2 - \frac{a^2}{b^2} \right) - \left[(e + d) \cdot c + \frac{(e + d)a}{b} + \frac{ac}{b} + \frac{a^2}{b^2} \right] \\ &= d^2 - \frac{a^2}{b^2} - ec - dc + \frac{ae}{b} + \frac{ad}{b} - \frac{ac}{b} + \frac{a^2}{b^2} \\ &= d^2 - c(e + d) + \frac{a}{b}(e + d - c) \\ &= (k_2 + C_2 \cdot s)^2 - m_2 \cdot s^2 - k_2 - C_2 \cdot s \cdot (m_1 \cdot s^2 - k_1 - C_1 \cdot s + k_2 + C_2 \cdot s) \\ &+ \frac{\alpha^2 \cdot R \cdot s}{1 + R \cdot C_0 \cdot s} \cdot (m_1 \cdot s^2 - k_1 - C_1 \cdot s + k_2 + C_2 \cdot s - (m_2 \cdot s^2 - k_2 - C_2 \cdot s)) \end{aligned}$$

Una vez obtenido el determinante se pueden obtener las soluciones aplicando la regla de Cramer:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\begin{bmatrix} F & b \\ 0 & d \end{bmatrix}}{D} = F \cdot \frac{d}{D} \rightarrow \frac{x_1}{F} = \frac{d}{D}$$

$$\rightarrow \frac{x_1}{F} = \frac{d}{D}$$

$$x_2 = \frac{\begin{bmatrix} a & F \\ c & 0 \end{bmatrix}}{D} = -F \cdot \frac{c}{D} \rightarrow \frac{x_2}{F} = -\frac{c}{D}$$

Y, a partir de estas, se obtienen las ecuaciones 3.9 y 3.10 que definen las respuestas del desplazamiento.

$$\frac{x_1}{F} = \frac{-\frac{\alpha^2 \cdot R \cdot s}{1+R \cdot C_0 \cdot s} + k_2 + C_2 \cdot s}{(k_2 + C_2 \cdot s)^2 - m_2 \cdot s^2 - k_2 - C_2 \cdot s \cdot (m_1 \cdot s^2 - k_1 - C_1 \cdot s + k_2 + C_2 \cdot s) + \frac{\alpha^2 \cdot R \cdot s}{1+R \cdot C_0 \cdot s} \cdot (m_1 \cdot s^2 - k_1 - C_1 \cdot s + k_2 + C_2 \cdot s - (m_2 \cdot s^2 - k_2 - C_2 \cdot s))}$$

Ecuación 3.9. Respuesta de desplazamiento para la traviesa.

$$\frac{x_2}{F} = -\frac{\frac{\alpha^2 \cdot R \cdot s}{1+R \cdot C_0 \cdot s} + m_1 \cdot s^2 - k_2 - C_2 \cdot s - k_1 - C_1 \cdot s}{(k_2 + C_2 \cdot s)^2 - m_2 \cdot s^2 - k_2 - C_2 \cdot s \cdot (m_1 \cdot s^2 - k_1 - C_1 \cdot s + k_2 + C_2 \cdot s) + \frac{\alpha^2 \cdot R \cdot s}{1+R \cdot C_0 \cdot s} \cdot (m_1 \cdot s^2 - k_1 - C_1 \cdot s + k_2 + C_2 \cdot s - (m_2 \cdot s^2 - k_2 - C_2 \cdot s))}$$

Ecuación 3.10. Respuesta de desplazamiento para el riel.

Para obtener la salida de voltaje, se debe recurrir a un artificio matemático de la siguiente forma:

$$\frac{x_1}{F} - \frac{x_2}{F} = \frac{d}{D} - \left(-\frac{c}{D}\right) = \frac{d+c}{D} = \frac{x_1 - x_2}{F}$$

$$\frac{x_1 - x_2}{F} = \frac{k_2 + C_2 \cdot s - \frac{\alpha^2 \cdot R \cdot s}{1+R \cdot C_0 \cdot s} + m_1 \cdot s^2 - k_2 - C_2 \cdot s - k_1 - C_1 \cdot s + \frac{\alpha^2 \cdot R \cdot s}{1+R \cdot C_0 \cdot s}}{F}$$

$$\frac{\bar{V}}{F} = \frac{\bar{V}}{x_1 - x_2} \cdot \frac{x_1 - x_2}{F}$$

Obteniéndose así la salida de voltaje del sistema, como muestra la ecuación 3.11:

$$\frac{\bar{V}}{F} = \frac{\alpha \cdot R \cdot s}{1+R \cdot C_0 \cdot s} \cdot \frac{k_2 + C_2 \cdot s - \frac{\alpha^2 \cdot R \cdot s}{1+R \cdot C_0 \cdot s} + m_1 \cdot s^2 - k_2 - C_2 \cdot s - k_1 - C_1 \cdot s + \frac{\alpha^2 \cdot R \cdot s}{1+R \cdot C_0 \cdot s}}{F}$$

Ecuación 3.11. Respuesta de voltaje para la salida del sistema.

La potencia obtenida se define como indica la ecuación 3.12:

$$\frac{P_h}{F} = \frac{1}{2R} \cdot \left(\frac{\bar{V}}{F} \right)^2$$

Ecuación 3.12. Salida de potencia para el sistema.

$$\frac{P_h}{F} = \frac{1}{2R} \cdot \left(\frac{\alpha \cdot R \cdot s}{1 + R \cdot C_0 \cdot s} \cdot \frac{k_2 + C_2 \cdot s - \frac{\alpha^2 \cdot R \cdot s}{1 + R \cdot C_0 \cdot s} + m_1 \cdot s^2 - k_2 - C_2 \cdot s - k_1 - C_1 \cdot s + \frac{\alpha^2 \cdot R \cdot s}{1 + R \cdot C_0 \cdot s}}{F} \right)^2$$

Ecuación 3.13. Ecuación equivalente para salida de potencia.

Al reemplazar la ecuación 3.11 en la ecuación 3.12 se obtiene la ecuación 3.13. Operando esta última se obtiene la ecuación 3.14, la misma que se utilizará para simulación.

$$\frac{P_h}{F} = \frac{\alpha^2 \cdot R \cdot s^2}{(1 + R \cdot C_0 \cdot s)^2} \cdot \frac{\left(k_2 + C_2 \cdot s - \frac{\alpha^2 \cdot R \cdot s}{1 + R \cdot C_0 \cdot s} + m_1 \cdot s^2 - k_2 - C_2 \cdot s - k_1 - C_1 \cdot s + \frac{\alpha^2 \cdot R \cdot s}{1 + R \cdot C_0 \cdot s} \right)^2}{2F^2}$$

Ecuación 3.14. Ecuación equivalente para salida de potencia, utilizada en la simulación.

Para obtener la eficiencia del proceso de transformación de energía vibracional, es necesario recurrir a la potencia de entrada, como muestra la ecuación 3.15.

$$P_{in} = \frac{1}{2} (-m_1 \ddot{x}_1 \dot{y}) + \frac{1}{2} (-m_2 \ddot{x}_2 \dot{y})$$

Ecuación 3.15. Potencia de entrada del sistema.

De esta forma se define la eficiencia que será utilizada en la simulación, como muestra la ecuación 3.16.

$$n = \frac{P_h}{P_{in}}$$

Ecuación 3.16. Eficiencia en la obtención de potencia para el sistema.

3.1 Validación del modelo matemático

Existen varias teorías y modelos para definir el comportamiento vibracional de las vías férreas al pasar un tren sobre estas. Es así como, para el modelo definido por (X. Wang, 2016), se acoge al definirlo mediante la transformada de Laplace como método de cálculo obtener una solución de sistemas lineales. Este método provee así de una solución para sistemas lineales de coeficientes constantes.

Se han propuesto de esta forma, principalmente, dos formas de modelar el estudio de vibraciones: el modelo continuo y el modelo discreto, como se observa en la figura 3.1.

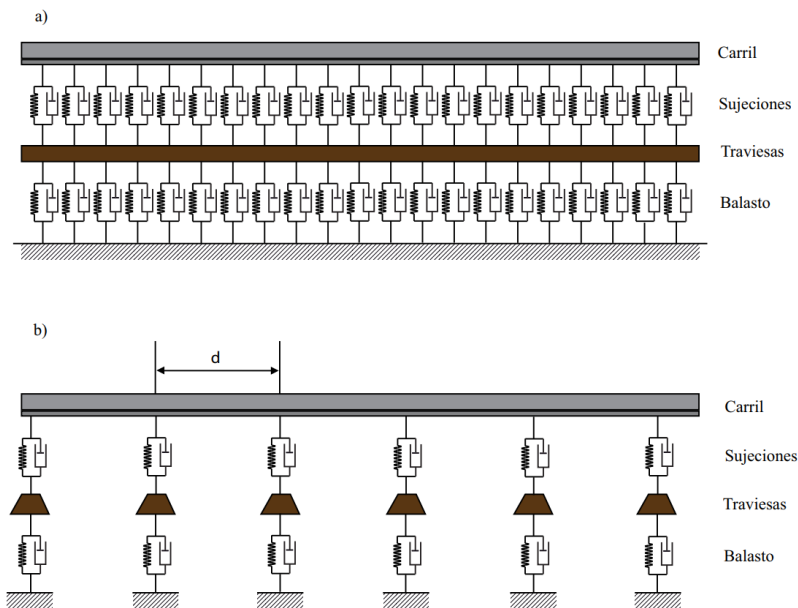


Figura 3.1. Modelo de media vía: a. Continua con traviesas uniformemente distribuidas. b. Discontinuo con traviesas discretas.

En el modelo continuo se tiene: rigidez, amortiguamiento, masa de las traviesas, y otros factores. Estos, están distribuidos uniformemente a lo largo de la vía, mientras que en el modelo discreto considera valores puntuales individuales dada cierta distancia a lo largo de la vía.

Para ambos casos se utiliza el modelo de viga infinita definida por Euler, considerando únicamente la mitad de la vía, y en ambos casos se pueden obtener resultados similares al no exceder el límite de frecuencia de 800 Hz. A partir de este valor, ambos métodos divergen significativamente. (Ayoub, 2018).

En el modelo discreto se utilizan métodos numéricos para definir el comportamiento vibracional, parametrizando geometría y materiales y obtenido una respuesta a partir de estos. Se considera que las masas están concentradas y que las fijaciones y el balasto son elementos elásticos y amortiguados, con una separación entre las fijaciones.

Para comparar ambos métodos, se propone una respuesta dinámica mediante la receptancia vertical del carril. Esta comparación, propuesta por (Ayoub, 2018), representa la amplitud del desplazamiento vertical del carril en el dominio de la frecuencia. Propone así esta comparativa considerando un límite de 100 km/h. Para el fin del estudio actual, cabe mencionar la figura 3.2, que compara los resultados para una vía DFF con parámetros de vía y dispositivo similares a los propuestos en esta investigación.

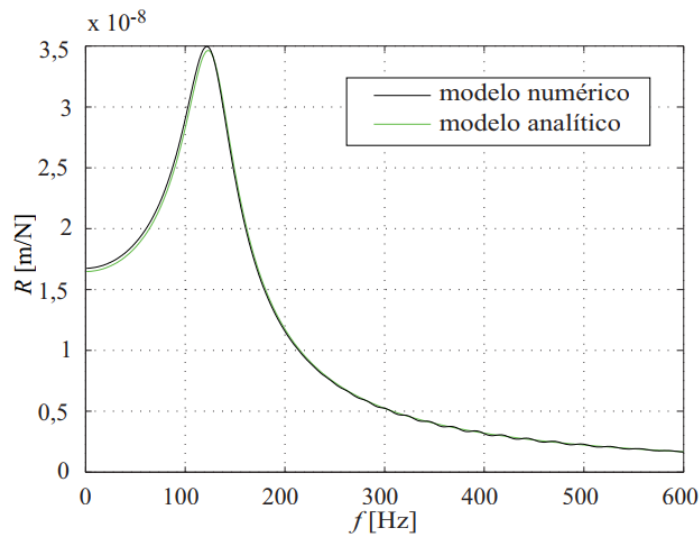


Figura 3.2. Comparación de los modelos numérico y analítico, para la vía DFF. Fuente: (Ayoub, 2018)

En la figura 3.2 se observa que en un dominio de 0 a 600 Hz de frecuencia los resultados de desplazamiento obtenidos son similares y con un porcentaje de error despreciable, por lo que para este fin ambos métodos se validan mutuamente. (Otero, 2009) corrobora que los resultados para el rango de frecuencias anterior mencionado, el método analítico tiene una buena confiabilidad por lo que resulta apropiado para esta investigación.

3.2 Parámetros para simulación

Para la simulación, se utilizó el PZT P-33, validado para aplicaciones ferroviarias de recolección de energía vibracional por (Gao, Wang, Cao, Chen, & Liu, 2016), cuyos parámetros de interés se detallan en la tabla. Estos mismos parámetro, para el mismo material, se validan en la investigación de (Guyomar, Sebald, & Kuwano, 2011), quien propone su uso bajo condiciones similares de configuración pero para aplicaciones en microelectrónicos. Los parámetros se indican en la tabla 3.2.

Tabla 3.2. Parámetros del piezoeléctrico

Parámetros	PZT
α [N/V]	1.52×10^{-3}
C_0 [F]	1.89×10^{-8}
R [Ω]	30455.3

La masa del tren aproximada se toma considerando un tren promedio, dada la investigación de (Cumbreras & Barrera, s. f.) y (Malmcrona, 2018). En estas, se detallan las condiciones de funcionamiento de un tren AVE S103, que funciona a una velocidad de 50 km/h con una masa de 15470 kg.

En la tabla 3.3, se muestran los parámetros de la vía ferroviaria, considerando el tipo de rieles UIC 50 con sujeciones en los mismos, durmientes de hormigón pretensado y balasto. Los datos fueron tomados de (Romero Ordóñez, 2012) y (Villamarín Arcos, 2011).

Tabla 3.3. Parámetros de la vía para simulación

Parámetros	Valor
m_1 [kg/m]	270
k_1 [N. s/m ²]	22.89×10^6
C_1 [N/m ²]	42.98
m_2 [kg/m]	54
k_2 [N/m ²]	192.6×10^6
C_2 [N. s/m ²]	98.26×10^3

4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Se realizó una simulación mediante el uso de Mathworks Matlab, al aplicar un código de programación, detallado en el Anexo B. Este permite obtener resultados gráficos a partir del modelo matemático detallado en el Capítulo 4.

Es necesario indicar que la carga aplicada al sistema de manera sinusoidal se la inserta en el código para poder obtener valores numéricos intrínsecos en la gráfica de cada función derivada del modelo matemático. Se consideró un rango de frecuencias desde 0 hasta 100 [Hz] para fines de análisis, dadas las condiciones del caso de estudio.

4.1 Voltaje y potencia

Al graficar el voltaje en función de la frecuencia con una fuerza sinusoidal se obtiene la figura 4.1. En esta, se puede encontrar que el voltaje máximo que se puede obtener es de 738.27 [V] a una frecuencia de 42.21 [Hz].

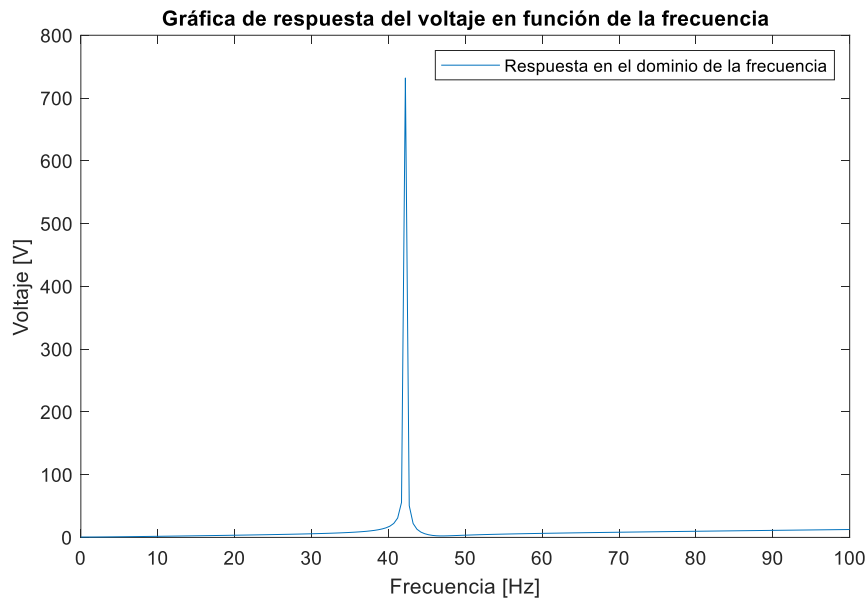


Figura 4.1. Voltaje en función de la frecuencia.

La respuesta obtenida para la potencia indica que se produce un pico máximo de 0.817 [mW] cuando el sistema opera a 42.41 [Hz] de frecuencia, como indica la figura 4.2.

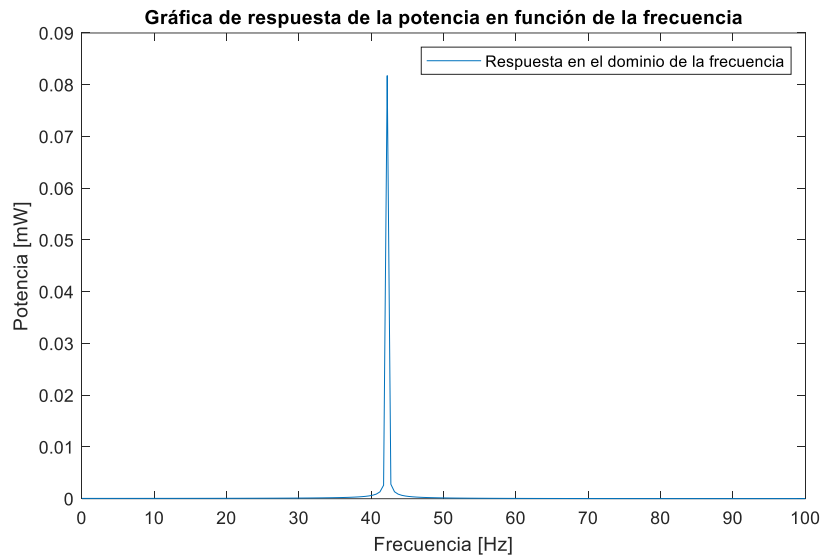


Figura 4.2. Potencia en función de la frecuencia

Para validar los resultados, se acude a una investigación comparativa de diferentes métodos y aplicaciones realizada por (Hosseinkhani, Younesian, Eghbali, Moayedizadeh, & Fassih, 2021) en donde se observan salidas de potencia similares, detalladas en la tabla 4.1. En esta, se identifican valores similares a los 0.0817 [V] obtenidos en este artículo, corroborando que la simulación arroja valores reales y que las aplicaciones ferroviarias para sensores son factibles mediante los parámetros de vía y piezoeléctrico propuestos.

Tabla 4.1. Resultados obtenidos en varias investigaciones de piezoeléctricos. Fuente: (Hosseinkhani et al., 2021)

Referencia	Mecanismo	Tipo de dispositivo	Dimensiones	Potencia
Nelson et al. (2008) Wischke et al. (2011) Pourghodrat and Nelson (2012)	Sobre la vía Sobre la vía Sobre la vía	Electromagnético Piezoeléctrico Electromagnético rotativo	40 × 80 × 20 mm ³	0.146mW 0.38mW 11.8W
DePasquale et al. (2012a)	Sobre el vehículo	Piezoeléctrico	55 × 35 × 53 mm ³	100 μW
DePasquale et al. (2012b) Wang et al. (2012) Lin and Wang (2014)	Sobre el vehículo Sobre la vía Sobre la vía	Electromagnético lineal Electromagnético Electromagnético rotativo	150 × 125 × 95 mm ³	100mW(Pmax) 1400mW 28W
Tianchen et al. (2014)	Sobre la vía	Piezoeléctrico	250 × 250 mm ²	0.081mW
Gao et al. (2016) Amoroso et al. (2015) Zhang et al. (2016)	Sobre la vía Sobre el vehículo Sobre la vía	Piezoeléctrico Piezoeléctrico Electromagnético	200 × 170 × 80 mm ³	4.9mW 26.6mW 36.5mW
Gao et al. (2017b)	Sobre la vía	Electromagnético lineal	150 × 125 × 95 mm ³	119mW
Jin et al. (2017)	Sobre el vehículo	Triboeléctrico		0.12mW/g
Lin et al. (2018a)	Sobre la vía	Electromagnético		6900mW
Bradai et al. (2018)	Sobre el vehículo	Electromagnético		10mW
Dehghan Hamani et al. (2020)	Sobre la vía	Piezoeléctrico		0.282 μW
Lopes et al. (2020)	Sobre el vehículo	Piezoeléctrico		20.93mW(Pmax)
Pan et al. (2019a)	Sobre el vehículo	Electromagnético	378 × 102 × 88 mm ³	1300mW
Perez et al. (2020)	Sobre el vehículo	Electromagnético	π × 2.92 × 7.8 cm ³	6.5mW
Gao et al. (2020)	Sobre el vehículo	Electromagnético	Ø80 × 55	250mW

Hou etal. (2020a)	Sobre la vía	Electromagnético	$3.16 \times 10^5 \text{ cm}^3$	1.41W
-------------------	--------------	------------------	---------------------------------	-------

4.2 Respuesta ante la variación de parámetros

La figura 4.3 muestra la respuesta del voltaje ante la variación del valor de capacitancia. Es decir, se proponen diferentes valores de capacitancia de bloqueo del piezoeléctrico desde 0 hasta 2×10^{-5} ohmios para verificar su tendencia. Se puede observar que, de forma general, a mayor valor de capacitancia menor va a ser el valor de voltaje generado.

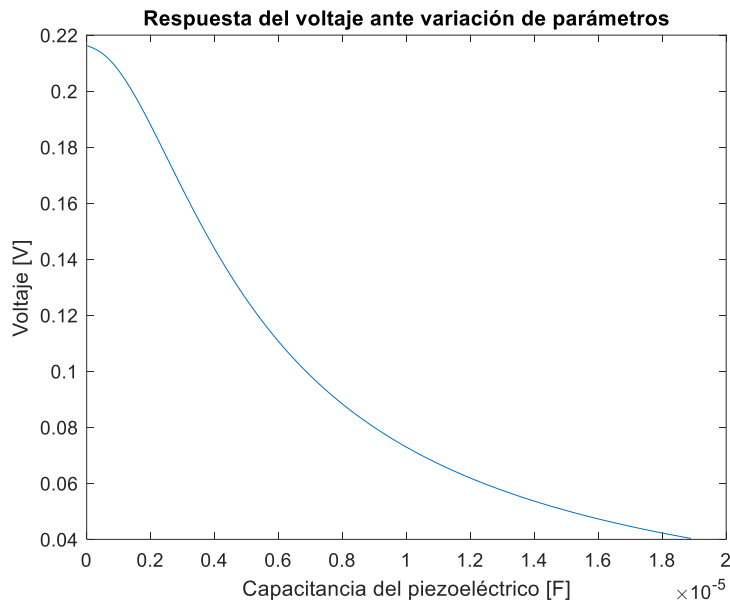


Figura 4.3. Voltaje en función de la capacitancia

La figura 4.4 indica una tendencia lineal en donde, a mayor valor de factor de fuerza, mayor va a ser el voltaje generado por el piezoeléctrico. Se proponen valores para este factor desde 0 hasta 0.16.

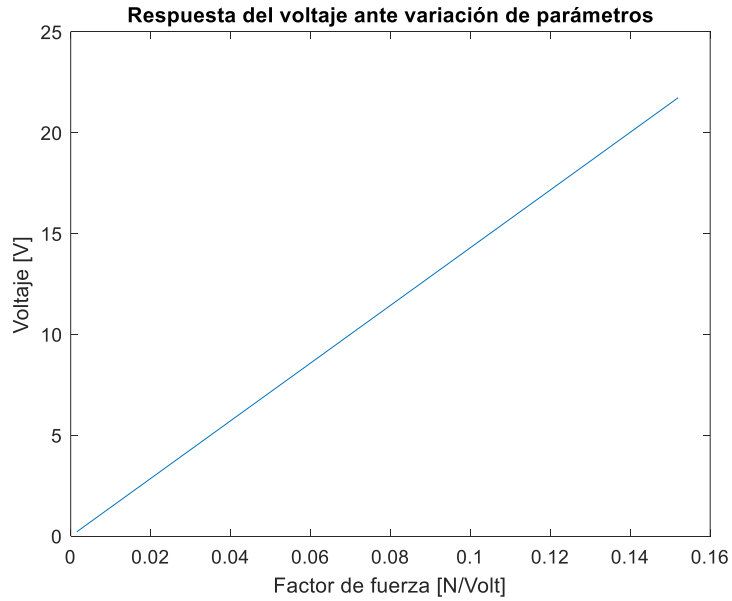


Figura 4.4. Voltaje en función del factor de fuerza

La figura 4.5, al igual que en la figura 4.4, muestra una tendencia lineal creciente en donde, a mayor valor de resistencia mayor será el voltaje obtenido. Se proponen valores de resistencia desde 0 hasta 10×10^4 ohmios.

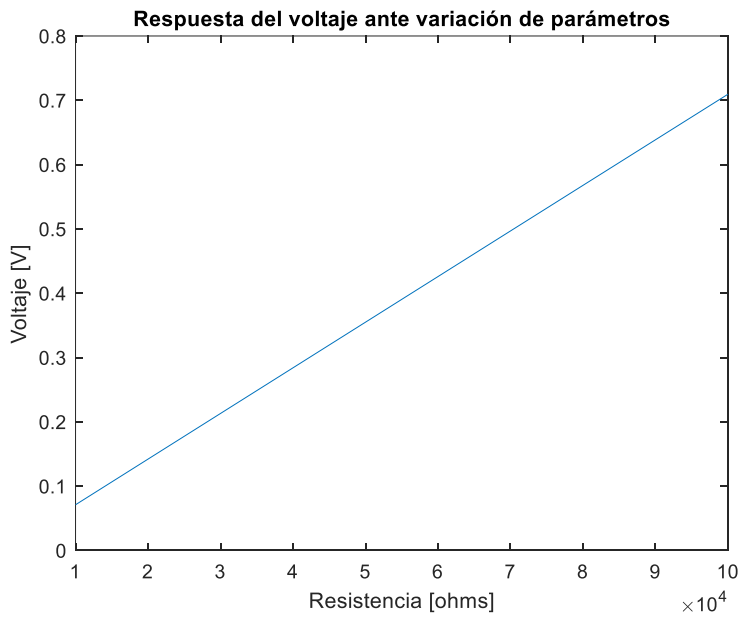


Figura 4.5. Voltaje en función de la resistencia eléctrica.

Con la finalidad de mejorar los parámetros de funcionamiento, se proponen gráficas que ilustran el comportamiento del sistema en función de una variación de la rigidez de la traviesa (m_1) y del balasto (m_2), detalladas en la figura 4.6.

Es así como, en primer lugar, se observa que cuando se mantiene constante la rigidez de k_2 con un valor de 192.60×10^6 [N/m²] y se cambia la rigidez k_1 se tienen valores de potencia decrecientes, es decir, a mayor valor de k_1 se obtiene menor potencia. Esto solamente en el dominio desde 0 hasta 1,88. A partir de este valor, se puede considerar una potencia constante con un valor de 2.152×10^{-5} mW. Con esta misma forma de variación, se obtiene una respuesta de eficiencia en donde se evidencia que a mayor valor de k_1 se tiene una eficiencia cada vez mayor hasta el límite en donde esta tasa de 25, aproximadamente, en donde la eficiencia toma una tendencia constante de 1.51×10^{-8} .

También puede observarse, para el caso cuando se mantiene constante la rigidez de k_1 con un valor de 22.89×10^6 [N/m²] y se cambia la rigidez k_2 , que se tienen valores de potencia ascendentes, es decir, a mayor valor de k_2 se obtiene mayor potencia. Esto ocurre a través de todo el dominio. Con esta misma forma de variación, se obtiene una respuesta de eficiencia en donde se evidencia que a mayor valor de k_2 se tiene una eficiencia cada vez mayor.

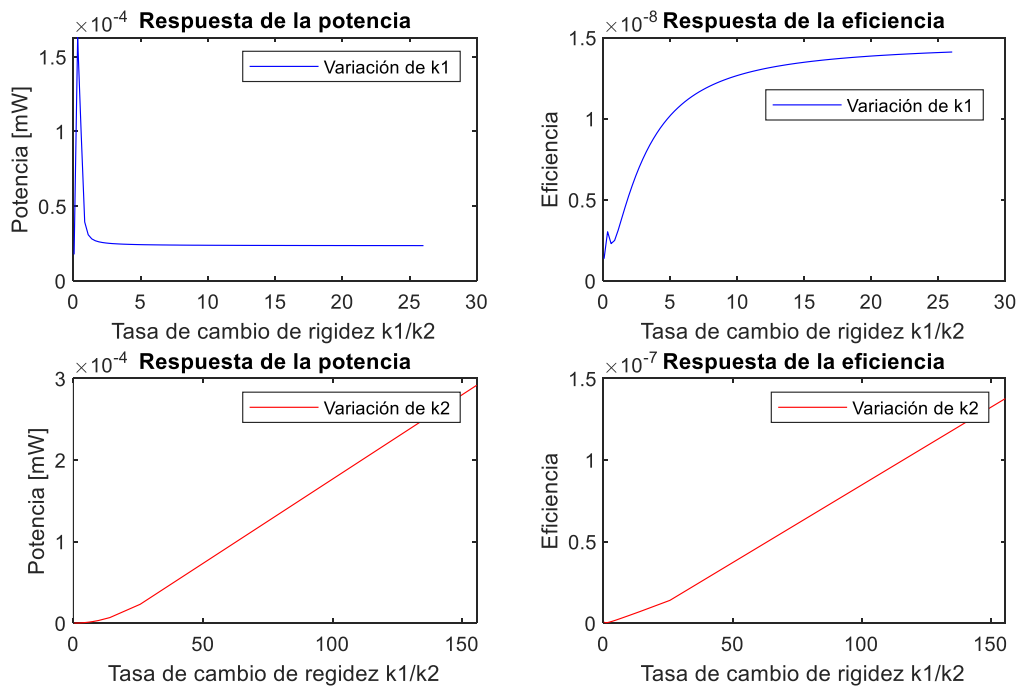


Figura 4.6. Tasa de cambio de rigidez para respuesta de potencia y eficiencia

En la figura 4.7 se detalla una tendencia creciente en potencia a medida que se aumenta la resistencia, desde el valor de 0 hasta llegar al pico de potencia cuando la resistencia del piezoeléctrico es de 1.98×10^5 ohmios, con un valor de 1.46×10^{-4} mW. A partir de este valor, empieza una tendenciadecreciente.

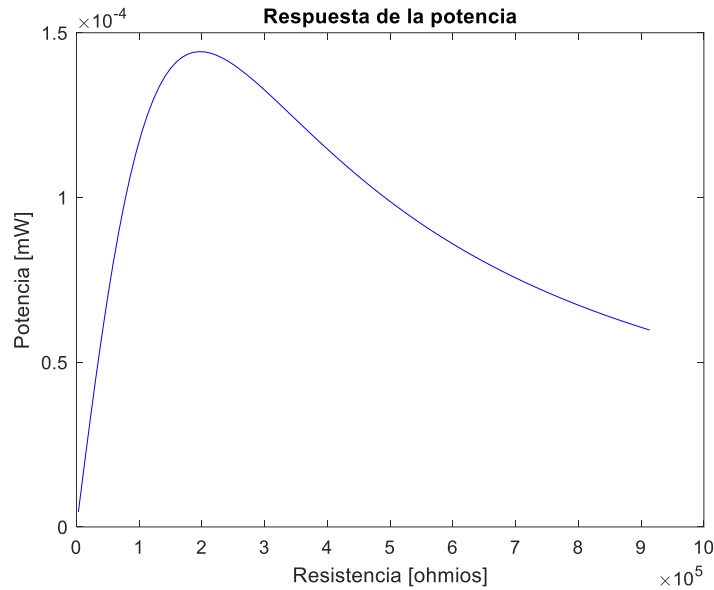


Figura 4.7. Potencia generada en función de la resistencia

En la figura 4.8 se observa un comportamiento similar, con la misma tendencia creciente en un inicio y decreciente al llegar a un pico. El pico para esta función se da con un factor de fuerza de 0.42×10^4 , obteniendo una potencia máxima de 86.34 mW. Por ello, resulta óptimo bordear este valor de resistencia para obtener la máxima potencia posible y aprovechar al máximo las capacidades del material.

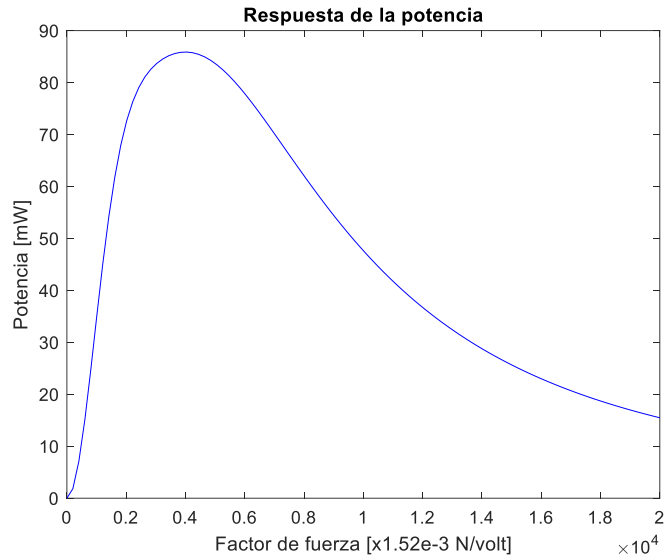


Figura 4.8. Potencia en función del factor de fuerza

Dado un coeficiente de amortiguamiento C1 de valor constante 42.9 [N.s/m], se procede a verificar la salida de potencia del dispositivo si se variase el coeficiente C2, correspondiente a las rieles, detallada en la figura 4.9. Es así como se obtiene un valor máximo de 9×10^{-5} cuando C2 tiene un valor cercano a cero. Desde cero hasta que el coeficiente C2 tiene un valor de 6.7 [N.s/m], se tiene una tendencia decreciente y a partir de este valor se tiene un punto de inflexión con un valor constante de potencia correspondiente a 1.34 mW.

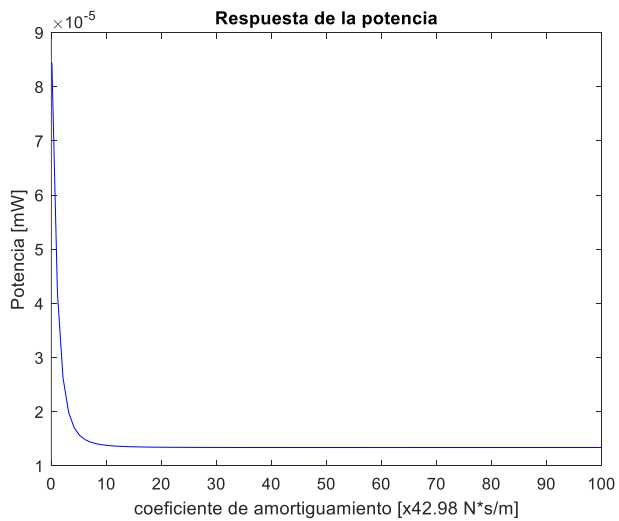


Figura 4.9. Potencia en función del coeficiente de amortiguamiento del riel, con coeficiente de amortiguamiento de la traviesa constante.

Al analizarse el sistema con una variación de la masa de la traviesa m_1 , se obtiene la figura 4.10 a partir de diferentes valores: 120 kg, 157.6 kg, 200 kg y 270 kg. Estos valores sirven para interpretar el comportamiento del sistema en su salida de potencia, obteniéndose que a mayor masa mayor frecuencia de trabajo se tiene. Para los primeros tres valores, se tienen salidas de potencia similares con valores que oscilan alrededor de 0.36 mW, sin embargo, cuando la masa de la traviesa tiene 270 kg se tiene una salida de potencia significativamente más alta, correspondiente a 0.53 mW. Esto se debe a la posibilidad de independencia de este elemento al tener mayor masa y, por consiguiente, influir de mayor forma en el comportamiento del sistema. Es decir, si la masa llega a bordear este valor se produce un efecto de movimiento independiente, incrementando la frecuencia y aumentando la vibración y la producción de energía.

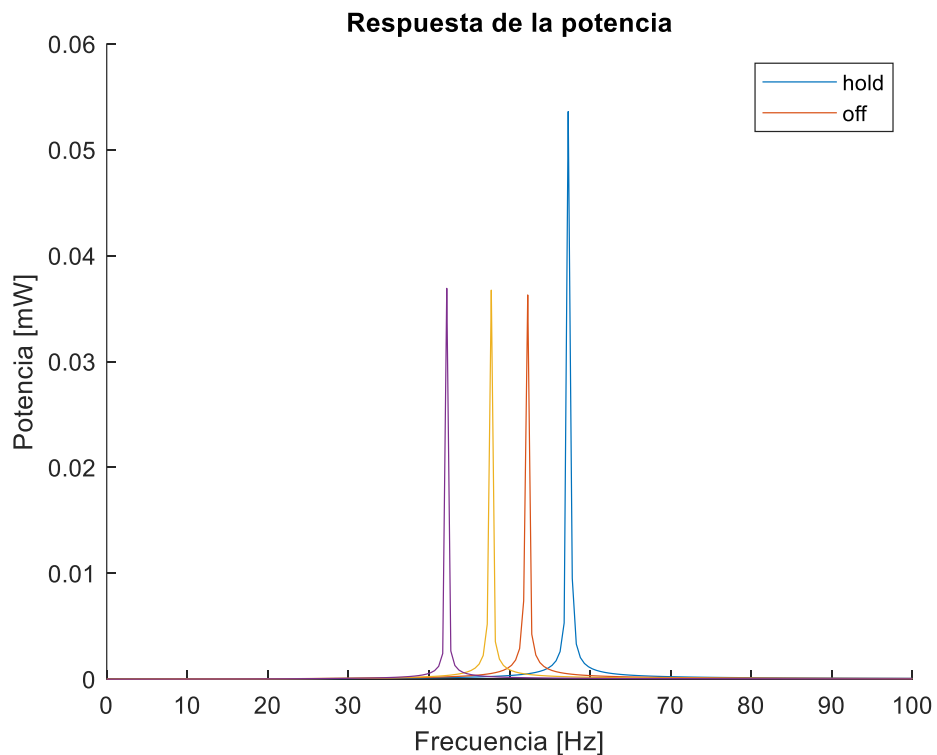


Figura 4.10. Variación de masa para obtener gráfica de potencia en función de la frecuencia

Al definir diferentes masas para verificar la salida de potencia, se tienen los resultados dados los valores de 54 kg y 60 kg, como muestra la figura. Es así como se evidencia la influencia de variar la masa de la riel para mejorar la salida de potencia. Es decir, mientras menor sea esta mayor potencia se tendrá a una misma frecuencia de operación.

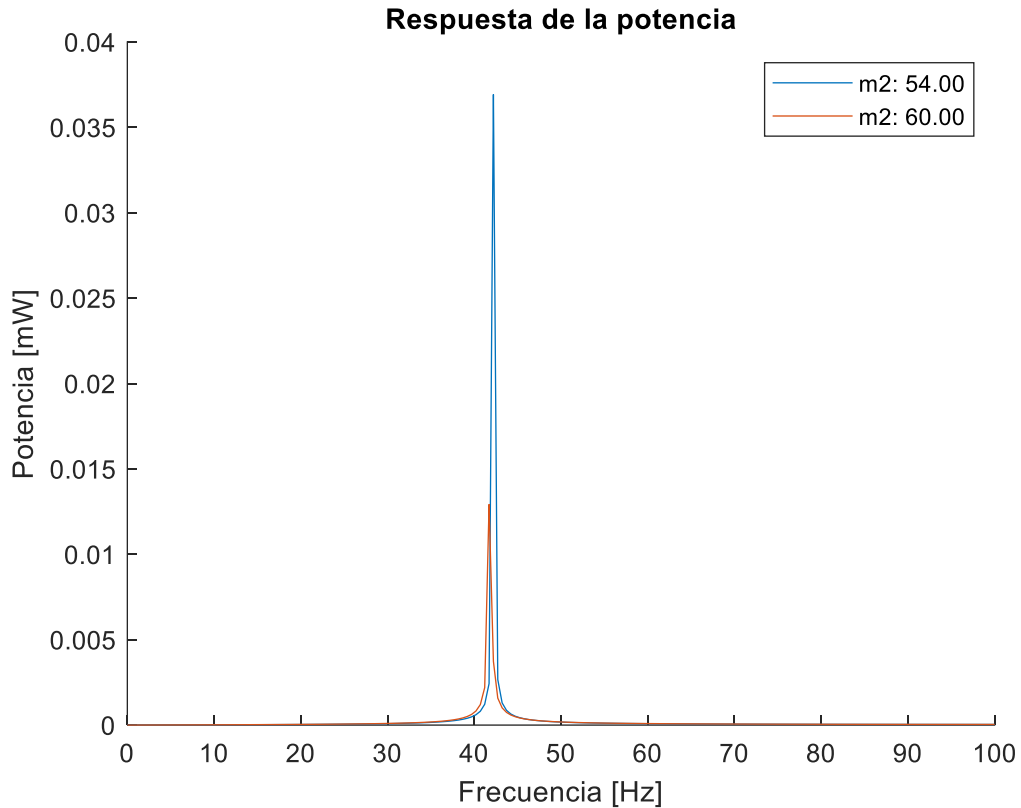


Figura 4.11. Respuesta de potencia al variar la masa del riel.

4.3 Respuesta de la tasa de desplazamiento

La tasa de desplazamiento permite interpretar la cantidad de espacio que se ha desplazado la traviesa, con $X1/Y$; y la riel, cuando se refiere a $X2/Y$, considerando como Y al valor de la fuerza de entrada aplicada, en este caso, sinusoidal. Es así como, en la figura 35, se tiene que los valores pico de tasa de desplazamiento coinciden en el valor de 2.35×10^5 [m], para la frecuencia de 42.21 [Hz]. Esto se debe a que, el sistema se mueve en conjunto, por lo que se desplazan a la par cada parte del mismo. Al tener esta sincronización, se puede entender que las juntas y la

configuración de los componentes no alteran la separación de estos, haciendo que actúen como un solo cuerpo rígido.

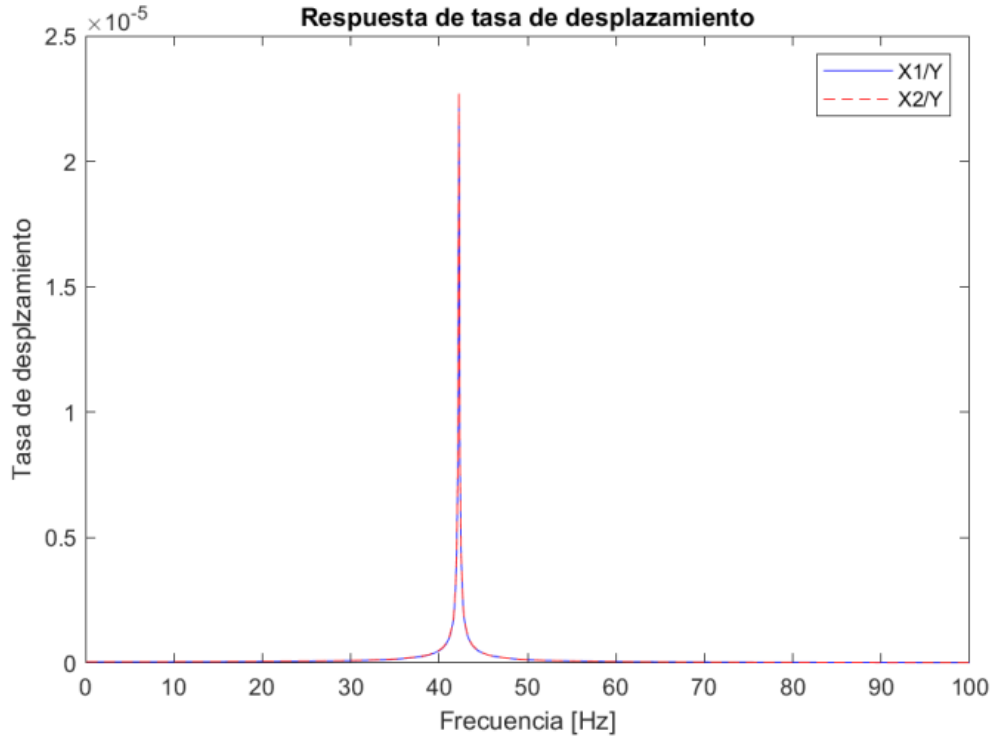


Figura 4.12. Tasa de desplazamiento X1/Y y X2/Y en función de la frecuencia.

En la figura 36 se presenta la tasa de desplazamiento entre X1 y X2 en función de la frecuencia, es decir, cuanto se mueve la masa 1 con respecto a la masa 2 a cierta frecuencia. Es así como esta gráfica indica una tendencia creciente en donde, mientras mayor sea el valor de x1 con respecto a x2, mayor va a ser la frecuencia crítica de funcionamiento del sistema. Esto implica que mientras más se desplace la traviesa con respecto a la riel mayor va a ser la frecuencia por lo que las vibraciones van a ser más repetitivas y, posiblemente, con mayor respuesta de voltaje.

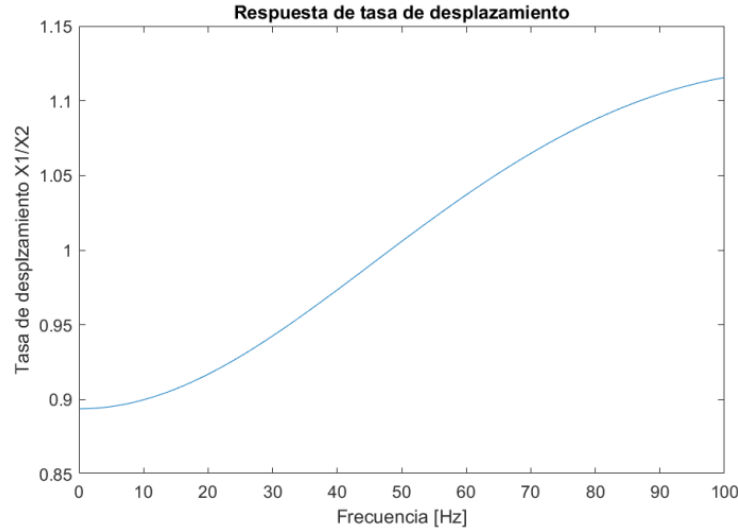


Figura 4.13. Respuesta de tasa de desplazamiento en función de la frecuencia

En la figura 4.1 se tiene la salida de potencia dados diferentes valores de k_1 , correspondiente a la rigidez de la traviesa. Es así como se tiene que mientras mayor sea el valor de esta constante, mayor es la frecuencia de operación del sistema. Esto se produce al alterar la transmisión vibracional hacia los demás elementos del sistema. Sin embargo, no se tiene una tendencia clara en la salida de potencia ya que esta dependerá de los efectos dinámicos de la vibración en conjunto con los demás elementos del sistema.

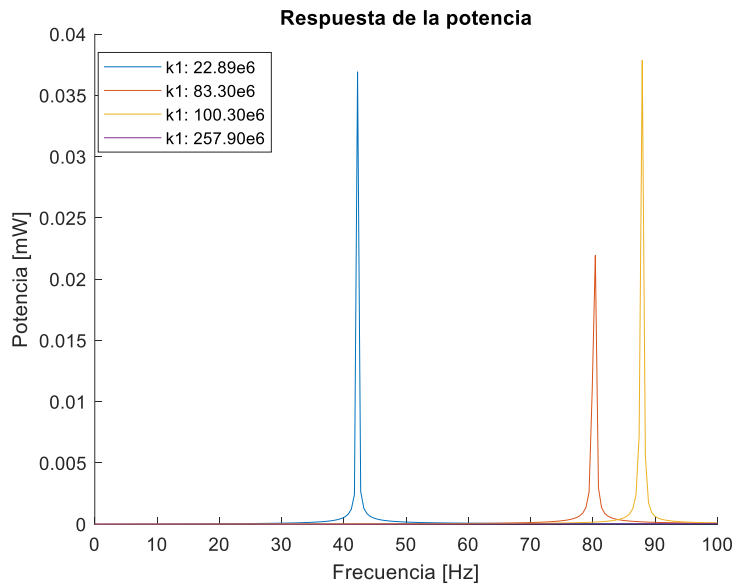


Figura 4.14. Respuesta de la potencia en función de la frecuencia para diferentes valores de k_1 .

5. CONCLUSIONES

El efecto piezoeléctrico puede aprovecharse si se considera un material y aplicación apropiados. Para ello, es necesario obtener criterios sobre los factores que pueden intervenir en un diseño de dispositivo recolector, con este tipo de material. Se pueden tener diferentes resultados dependiendo de factores como: la forma de aplicación de la carga, los modos de operación del material, la configuración del dispositivo, entre otros.

Es así como también, al modelar un dispositivo piezoeléctrico, se debe planificar su implementación en función del tipo de vía al cual se lo vaya a colocar. Dependiendo del tipo de vía y de los objetivos del proyecto a proponerse, se pueden seleccionar diferentes alternativas. Considerando los objetivos de este proyecto, se puede concluir que resulta apropiado y eficiente la aplicación de el dispositivo y toda su concepción dada el tipo de vía propuesta.

El modelo matemático implementado permite introducir una función sinusoidal de manera intrínseca ya que, al acogerse al modelo continuo mediante la transformada de Laplace, hace que el código sea apropiado para este fin.

Para entender cómo mejorar el proceso de cosechamiento de energía vibracional, es apropiado proponer una variación de los diferentes parámetros que constituyen el piezoeléctrico y la vía.

Con los resultados obtenidos se puede concluir que si se requiere variar el voltaje de salida del sistema se puede intentar variar la capacitancia del material. Esta está directamente relacionada con el tipo de material, por lo que se muestra claramente que cada material dara una respuesta de voltaje diferente. El aporte de esta investigación consiste en definir que a mayor capacitancia menor voltaje se producirá. De igual manera ocurre con el factor de fuerza y la resistencia del material, pero con una tendencia creciente, por lo que se deben considerar los resultados para poder seleccionar materiales apropiadamente.

También, se propone variar parámetros de la vía como la rigidez, tanto de la traviesa como del riel. Es así como se tiene que para tener mayor eficiencia en la recolección de energía se debe aumentar la rigidez, para ambos elementos. Gracias a esto, se tiene una mejor propagación vibracional y mejor aprovechamiento del movimiento que recae en el dispositivo.

La respuesta de potencia obtenida al variar los parámetros de resistencia, factor de fuerza y coeficiente de amortiguamiento, indican que existe un pico en el cual la potencia es máxima. Es

decir, el diseñador en cuestión debe intentar apegarse a este valor pico de funcionamiento dependiendo del tipo de aplicación al que se acoja, por lo que bajo estas condiciones se puede aprovechar de mejor manera la recolección energética.

6. RECOMENDACIONES

Es recomendable, para investigaciones futuras, optimizar el funcionamiento del piezoeléctrico mediante un reconocimiento más profundo de las características que lo definen. Por ejemplo, se puede mejorar el proceso de cosechamiento de energía al tener perfiles diferentes al rectangular común, en el caso del PZT. También, se podría analizar este dispositivo comparando sus dimensiones para diferentes aplicaciones. Es decir, variar su grosor, longitud y ancho y verificar si existe una tendencia al aumentar o disminuir estos valores.

Se recomienda utilizar una validación de resultados comparando investigaciones similares bajo condiciones similares.

También es recomendable considerar tener una investigación más precisa mediante la definición de las cargas de contacto entre la riel y las ruedas del ferrocarril. Esto puede representar pérdidas por rozamiento no contempladas en esta investigación y para fines de precisión podría representar una mejora notable.

7. REFERENCIAS

- Alemán, D. I., & Guerrero, D. O. (s. f.). *Sistemas electromecánicos piezoeléctricos para la recolección ecológica de energía*.
- Anton, S. R., & Sodano, H. A. (2007). A review of power harvesting using piezoelectric materials (2003–2006). *Smart Materials and Structures*, 16(3), R1-R21.
<https://doi.org/10.1088/0964-1726/16/3/R01>
- Ayoub, Z. (2018). *Estudio del comportamiento vibratorio de vías ferroviarias mediante simulación numérica*. Madrid: Fundación de los Ferrocarriles Españoles.
- Cumbreras, M. J. C., & Barrera, P. G. (s. f.). *Análisis estadístico de las vibraciones producidas por el paso de trenes en diferentes líneas ferroviarias*.
- Erturk, A., & Inman, D. J. (2008). Issues in mathematical modeling of piezoelectric energy harvesters. *Smart Materials and Structures*, 17(6), 065016. <https://doi.org/10.1088/0964-1726/17/6/065016>
- Gao, M. Y., Wang, P., Cao, Y., Chen, R., & Liu, C. (2016). A rail-borne piezoelectric transducer for energy harvesting of railway vibration. *Journal of Vibroengineering*, 18(7), 4647-4663.
<https://doi.org/10.21595/jve.2016.16938>
- Gómez Molina, Á. (2018). *Diseño de un Sistema de energy harvesting basado en piezoeléctricos*. Universidad de Alcalá.
- Guyomar, D., Sebald, G., & Kuwano, H. (2011). Energy Harvester of 1.5 cm³ Giving Output Power of 2.6 mW with Only 1 G Acceleration. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 22(5), 415-420. <https://doi.org/10.1177/1045389X10389205>
- Hosseinkhani, A., Younesian, D., Eghbali, P., Moayedizadeh, A., & Fassih, A. (2021). Sound and vibration energy harvesting for railway applications: A review on linear and nonlinear techniques. *Energy Reports*, 7, 852-874. <https://doi.org/10.1016/j.egy.2021.01.087>

- Khan, F. U., & Ahmad, I. (2016). Review of Energy Harvesters Utilizing Bridge Vibrations. *Shock and Vibration*, 2016, 1-21. <https://doi.org/10.1155/2016/1340402>
- Malmcrona, A. (2018). *Aplicaciones del efecto piezoeléctrico para la generación de energía* (Trabajo de titulación). Universidad Carlos III de Madrid, Leganés.
- Nuevo Central Argentino S.A. (2014). *Manual Integral de Vías*.
- Otero, J. (2009). *Contribución al estudio de las vibraciones producidas por el contacto rueda-carril y su transmisión al entorno* (Doctoral). Universitat Politècnica de Catalunya.
- Rafique, S. (2018). *Piezoelectric Vibration Energy Harvesting*. Cham: Springer International Publishing. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-69442-9>
- Tianchen, Y., Jian, Y., Ruigang, S., & Xiaowei, L. (2014). Vibration energy harvesting system for railroad safety based on running vehicles. *Smart Materials and Structures*, 23(12), 125046. <https://doi.org/10.1088/0964-1726/23/12/125046>
- Wang, J. J., Penamalli, G. P., & Zuo, L. (2012). Electromagnetic energy harvesting from train induced railway track vibrations. *Proceedings of 2012 IEEE/ASME 8th IEEE/ASME International Conference on Mechatronic and Embedded Systems and Applications*, 29-34. Suzhou, China: IEEE. <https://doi.org/10.1109/MESA.2012.6275532>
- Wang, J., Shi, Z., Xiang, H., & Song, G. (2015). Modeling on energy harvesting from a railway system using piezoelectric transducers. *Smart Materials and Structures*, 24(10), 105017. <https://doi.org/10.1088/0964-1726/24/10/105017>
- Wang, X. (2016). *Frequency Analysis of Vibration Energy Harvesting Systems*. Elsevier. <https://doi.org/10.1016/C2014-0-02879-1>
- Wei, C., & Jing, X. (2017). A comprehensive review on vibration energy harvesting: Modelling and realization. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 74, 1-18. <https://doi.org/10.1016/j.rser.2017.01.073>

Wischke, M., Fehrenbach, G., Abbas, Y., Biancuzzi, G., & Woias, P. (2010). *Vibration harvesting in railway tunnels.*

8. ANEXOS

ANEXO (A): Casa de la calidad

QFD: Casa de la calidad

Project: Estudio de la acumulación de energía vibracional aplicando una carga general en colectores piezoeléctricos colocados en sistemas e infraestructuras ferroviarias

Revision: 1

Date: 23/08/2022

Básico	B
Unidimensional	O
Estimulante	E

Correlaciones	
Positive	+
Negative	-
No Correlation	

Relaciones	
Fuerte	9 ●
Medio	3 ○
Débil	1 ▽

Factor de venta	
Fuere	1,5 ●
Posible	1,2 ○
Ningun	1 ▽

Número de fila	Demandas	Número de columna								Evaluación competitiva del cliente									
		1	2	3	4	5	6	7	8	Materiales Cerámicos	Materiales Poliméricos	Materiales semicompuestos	Indice de mejora	Factor de venta	Importancia	Ponderación	Ponderación en %		
		Voz del ingeniero (Características técnicas)																	
		Voz del usuario (necesidades y deseos del usuario)																	
1	O	Eficiencia en la respuesta mecánica	○	●	●	●	○	●				5	4	4	4	1	4	16	20,2532
2	O	Facilidad de montaje y buena sujeción	●				▽			●		5	5	5	2	1	2	4	5,06329
3	B	Resistencia a corrosión y factores ambientales						●		●	○	5	4	4	2	1	3	6	7,59494
4	B	Material resistente a fatiga y a impactos		○								5	5	5	3	1	4	12	15,1899
5	E	Costo accesible considerando el aprovechamiento energético	○	○	●		○					4	4	4	4	1	5	20	25,3165
6	O	Fácil adquisición en el mercado		●			○				▽	4	5	4	2	1	3	6	7,59494
7	O	Acople adecuado para recolección energética	●	○		●					○	4	3	4	1		3	3	3,79747
8	O	Capacidad de medición en tiempo real				▽		●		●		4	4	4	3		1	3	3,79747
9	B	Posibilidad de fácil reparación y repuestos accesibles	▽	●			●		●			4	4	5	3		3	9	11,3924
		Materiales Cerámicos	3	3	2	2	2	4	5	4								79	100
		Materiales Poliméricos	4	0	0	5	4	4	4	3									
		Materiales semicompuestos	5	0	0	5	4	4	4	4									
		Incidencia	180	384	324	174	265	225	135	96	1783								
		Incidencia en %	10,1	21,5	18,2	9,76	14,9	12,6	7,57	5,38	100								

ANEXO (B): Código de Matlab para simulaciones

```
% Voltaje y potencia

clear
clc
mt=270; %masa de la traviesa
mr=54; %masa del riel
cb=42.98; %coeficiente del balasto
cs=98.26e3; %coeficiente de las sujeciones
c0=1.89e-8; %coeficiente del piezoeléctrico
kb=22.89e6; %rigidez balasto
ks=192.60e6; %rigidez sujeciones
alpha=1.52e-3;
R=30455.3;
M=15470;
g=9.81;

Am=M*g;%amplitud de la carga sinusoidal

s=tf('s');
Vol=(-
alpha*R*s*(mt*s^2+kb+cb*s))/((mt*s^2+kb+cb*s)*((ks+cb*s+mr*s^2)*(1+R*c0*s)+alpha^2*R*
s)+((ks+cb*s)*(1+R*c0*s)+alpha^2*R*s)*mr*s^2);
Pot=(-
alpha^2*R*s^2*(mt*s^2+kb+cb*s)^2)/(2*((mt*s^2+kb+cb*s)*((ks+cb*s+mr*s^2)*(1+R*c0*s)+a
lpha^2*R*s)+((ks+cb*s)*(1+R*c0*s)+alpha^2*R*s)*mr*s^2)^2);

Fs=linspace(0,100,200);
Vrms = zeros(size(Fs));

for i=1:length(Fs)
    t=linspace(0,20,200000);
    u=Am*cos(2*pi*Fs(i)*t);
    y=lsim(Vol,u,t);
    Vrms(i)=sqrt(trapz(t,y.^2)/t(end));
end

figure

plot(Fs,Vrms)
title("Variación de voltaje en función de frecuencia");
xlabel('Frecuencia del sistema[Hz]');
ylabel('Variación de voltaje [V]');
legend('Respuesta en frecuencia');

figure

Fs=linspace(0,100,200);
P = zeros(size(Fs));
```

```

for i=1:length(Fs)
    t=linspace(0,20,200000);
    u=Am*cos(2*pi*Fs(i)*t);
    y=lsim(Pot,u,t);
    P(i)=sqrt(trapz(t,y.^2)/t(end));
end

plot(Fs,1000.*P)
title('Potencia del sistema en función de la frecuencia');
xlabel('Frecuencia del sistema [Hz]');
ylabel('Potencia [mW]');
legend('Respuesta en frecuencia');

% Resultados de variar los parámetros

% Factor de fuerza

alpha=linspace(1.52e-3,1.52e-1,200);
Am=M*g;
c0=1.89e-8;

s=tf('s');
Vrms = zeros(size(alpha));

for i=1:length(alpha)

    Vol=(-
alpha(i)*R*s*(m*t*s^2+kb+cb*s))/((m*t*s^2+kb+cb*s)*((ks+cb*s+mr*s^2)*(1+R*c0*s)+alpha(i)
)^2*R*s)+((ks+cb*s)*(1+R*c0*s)+alpha(i)^2*R*s)*mr*s^2);
    t=linspace(0,20,200000);
    u=Am*sin(2*pi*1.45*t);
    y=lsim(Vol,u,t);
    Vrms(i)=sqrt(trapz(t,y.^2)/t(end));
end

figure
plot(alpha,Vrms)
title('Variación de voltaje frente a variación de parámetros');
xlabel('Factor de fuerza [N/V]');
ylabel('Voltaje [V]');

% Resistencia

alpha=1.52e-3;
R=linspace(10e3,100e3,400);

Am=M*g;

s=tf('s');
Vrms = zeros(size(R));

for i=1:length(R)

```



```

    Vol=(-
alpha*R(i)*s*(mt*s^2+kb+cb*s))/((mt*s^2+kb+cb*s)*((ks+cb*s+mr*s^2)*(1+R(i)*c0*s)+alph
a^2*R(i)*s)+((ks+cb*s)*(1+R(i)*c0*s)+alpha^2*R(i)*s)*mr*s^2);
    t=linspace(0,20,200000);
    u=Am*sin(2*pi*1.45*t);
    y=lsim(Vol,u,t);
    Vrms(i)=sqrt(trapz(t,y.^2)/t(end));
end

figure
plot(R,Vrms)
title('Respuesta del voltaje ante variación de parámetros');
xlabel('Resistencia [ohms]');
ylabel('Voltaje [V]');

% Capacitancia del piezoeléctrico

mt=270;
mr=54;
cb=42.98;
cb=98.26e3;
c0=linspace(1.89e-8,1.89e-5,200);
kb=22.89e6;
ks=192.60e6;
alpha=1.52e-3;
R=30455.3;
M= 15470;
g=9,81;

Am=M*g;%amplitud de la carga sinusoidal
s=tf('s');
Vrms = zeros(size(c0));

for i=1:length(c0)
    Vol=(-
alpha*R*s*(mt*s^2+kb+cb*s))/((mt*s^2+kb+cb*s)*((ks+cb*s+mr*s^2)*(1+R*c0(i)*s)+alpha^2
*R*s)+((ks+cb*s)*(1+R*c0(i)*s)+alpha^2*R*s)*mr*s^2);
    t=linspace(0,20,200000);
    u=Am*sin(2*pi*1.45*t);
    y=lsim(Vol,u,t);
    Vrms(i)=sqrt(trapz(t,y.^2)/t(end));
end

figure
plot(c0,Vrms)
title('Voltaje frente a variación de parámetros');
xlabel('Capacitancia del piezoeléctrico [F]');
ylabel('Voltaje [V]');

%% tasa de masas

mt=linspace(0.1*157.6,500*157.6,100);

```

```

mr=54;
cb=42.98;
cb=98.26e3;
c0=1.89e-8;
kb=22.89e6;
ks=192.60e6;
alpha=1.52e-3;
R=30455.3;
M= 15470;
g=9,81;

Am=M*g;%amplitud de la carga sinusoidal

s=tf('s');
Fs=80;
P = zeros(size(mt));
Pin = zeros(size(mt));

for i=1:length(mt)
    A=[0 1 0 0 0; -(kb+ks)/mt(i) -(cb+cb)/mt(i) ks/mt(i) cb/mt(i) -alpha/mt(i); 0 0 0 1
0; ks/mr cb/mr -ks/mr -cb/m2 alpha/mr; 0 -alpha/c0 0 alpha/c0 -1/(R*c0)];
    B=[0;0;0;1/mr;0];
    C=[0 1 0 0 0; 0 0 0 1 0];
    D=0;

    sys_V=ss(A,B,C,D);

    t=linspace(0,20,200000);
    u=Am*sin(2*pi*Fs*t);
    up=2*pi*Fs*Am*cos(2*pi*Fs*t);
    Y=lsim(sys_V,u,t);

    y1 = Y(:,1);
    dy1 = y1(2:end)-y1(1:end-1);
    y2 = Y(:,2);
    dy2 = y2(2:end)-y2(1:end-1);
    dt = t(2:end)-t(1:end-1);
    Pi=0.5*(-mt(i).*(dy1'/dt).*up(1:end-1)')+0.5*(mr*(dy2'/dt).*up(1,end- 1)');
    Pin(i)=sqrt(trapz(t(1,end-1),Pi.^2)/t(end-1));

    Pot=(-
alpha^2*R*s^2*(mt(i)*s^2+kb+cb*s)^2)/(2*((mt(i)*s^2+kb+cb*s)*((ks+cb*s+mr*s^2
)*(1+R*c0*s)+alpha^2*R*s)+((ks+cb*s)*(1+R*c0*s)+alpha^2*R*s)*mr*s^2)^2);
    t=linspace(0,20,200000);
    u=Am*sin(2*pi*Fs*t); y=lsim(Pot,u,t); P(i)=sqrt(trapz(t,y.^2)/t(end));
end

% se multiplca por la amplitud al cuadrado porque la función de traferencia
% de la potencia de salida es P/F^2 faltando una amplitud de Am^2 que es la
% amplitud de la armónica

efic = ((Am)^2.*P)./Pin;

```

```

figure
subplot(2,2,1)
plot(mt./mr,1000.*P,'b')
title('Potencia')
xlabel('Tasa de cambio de masas mt/mr')
ylabel('Potencia [mW]')
legend('Variación de mt')

subplot(2,2,2)
plot(mt./mr,efic,'b')
title('Eficiencia')
xlabel('Tasa de cambio de masas mt/mr')
ylabel('Eficiencia')
legend('Variación de mt')

mr= linspace(0.1*54,5*54,100);
mt=mt(end);

Fs=80;
P = zeros(size(mr));
Pin = zeros(size(mr));

for i=1:length(mr)
    A=[0 1 0 0 0;-(kb+ks)/mt -(cb+cb)/mt ks/mt cb/mt -alpha/mt;0 0 0 1 0;ks/mr(i)
cb/mr(i) -ks/mr(i) -cb/mr(i) alpha/mr(i);0 -alpha/c0 0 alpha/c0 -1/(R*c0)];
    B=[0;0;0;1/mr(i);0];
    C=[0 1 0 0 0;0 0 0 1 0];
    D=0;

    sys_V=ss(A,B,C,D);

    t=linspace(0,20,200000);
    u=Am*sin(2*pi*Fs*t);
    up=2*pi*Fs*Am*cos(2*pi*Fs*t);
    Y=lsim(sys_V,u,t);
    y1 = Y(:,1);
    dy1 = y1(2:end)-y1(1:end-1);
    y2 = Y(:,2);
    dy2 = y2(2:end)-y2(1:end-1);
    dt = t(2:end)-t(1:end-1);
    Pi=0.5*(-mt.*(dy1'/dt).*up(1:end-1)')+0.5*(mr(i)*(dy2'/dt).*up(1,end- 1)');
    Pin(i)=sqrt(trapz(t(1,end-1),Pi.^2)/t(end-1));

    Pot=(-alpha^2*R*s^2*(mt*s^2+kb+cb*s)^2)/(2*((mt*s^2+kb+cb*s)*((ks+cb*s+mr(i))*s^2
)*(1+R*c0*s)+alpha^2*R*s)+((ks+cb*s)*(1+R*c0*s)+alpha^2*R*s)*mr(i)*s^2)^2);
    t=linspace(0,20,200000);
    u=Am*sin(2*pi*Fs*t);
    y=lsim(Pot,u,t);
    P(i)=sqrt(trapz(t,y.^2)/t(end));
end

efic = ((Am)^2.*P)./Pin;
subplot(2,2,3)

```

```

plot(mt./mr,1000.*P,'r')
title('Potencia')
xlabel('Tasa de cambio de masas mt/mr')
ylabel('Potencia [mW]')
legend('Variación de mr')

subplot(2,2,4)
plot(mt./mr,efic,'r')
title('Eficiencia')
xlabel('Tasa de cambio de masas mt/mr')
ylabel('Eficiencia')
legend('Variación de mr')

%% tasa de rigidez
mt=270;
mr=54;
cb=42.98;
cb=98.26e3;
c0=1.89e-8;
kb=linspace(0.1*100.3e6,50*100.3e6,100);
ks=192.60e6;
alpha=1.52e-3;
R=30455.3;
M= 15470;
g=9,81;

Am=M*g;%amplitud de la carga sinusoidal

s=tf('s');

Fs=80;
P = zeros(size(kb));
Pin = zeros(size(kb));

for i=1:length(kb)
    A=[0 1 0 0 0;-(kb(i)+ks)/mt -(cb+cb)/mt ks/mt cb/mt -alpha/mt;0 0 0 1 0;ks/mr
cb/mr -ks/mr -cb/mr alpha/mr;0 -alpha/c0 0 alpha/c0 -1/(R*c0)];
    B=[0;0;0;1/mr;0];
    C=[0 1 0 0 0;0 0 0 1 0];
    D=0;

    sys_V=ss(A,B,C,D);

    t=linspace(0,10,200000);
    u=Am*sin(2*pi*Fs*t);
    up=2*pi*Fs*Am*cos(2*pi*Fs*t);
    Y=lsim(sys_V,u,t);
    y1 = Y(:,1);
    dy1 = y1(2:end)-y1(1:end-1);
    y2 = Y(:,2);
    dy2 = y2(2:end)-y2(1:end-1);
    dt = t(2:end)-t(1:end-1);

```

```

Pi=0.5*(-mt.*(dy1'/dt).*up(1:end-1)')+0.5*(mr*(dy2'/dt).*up(1,end- 1)');
Pin(i)=sqrt(trapz(t(1,end-1),Pi.^2)/t(end-1));

Pot=(-
alpha^2*R*s^2*(mt*s^2+kb(i)+cb*s)^2)/(2*((mt*s^2+kb(i)+cb*s)*((ks+cb*s+mr*s^2
)*(1+R*c0*s)+alpha^2*R*s)+((ks+cb*s)*(1+R*c0*s)+alpha^2*R*s)*mr*s^2)^2);
t=linspace(0,10,200000);
u=Am*sin(2*pi*Fs*t);
y=lsim(Pot,u,t);
P(i)=sqrt(trapz(t,y.^2)/t(end));
end

efic = ((Am)^2.*P)./Pin;
figure
subplot(2,2,1)
plot(kb./ks,1000.*P,'b')
title('Potencia')
xlabel('Tasa de cambio de rigidez kb/ks')
ylabel('Potencia [mW]')
legend('Variación de kb')

subplot(2,2,2)
plot(kb./ks,efic,'b')
title('Eficiencia')
xlabel('Tasa de cambio de rigidez kb/ks')
ylabel('Eficiencia')
legend('Variación de kb')

kb=kb(end);
ks=linspace(0.1*322.3e6,50*322.3e6,100);

Fs=80;
P = zeros(size(ks));
Pin = zeros(size(ks));

for i=1:length(ks)
A=[0 1 0 0 0;-(kb+ks(i))/mt -(cb+cb)/mt ks(i)/mt cb/mt -alpha/mt;0 0 0 1 0;
ks(i)/mr cb/mr -ks(i)/mr -cb/mr alpha/mr;0 -alpha/c0 0 alpha/c0 -1/(R*c0)];
B=[0;0;0;1/mr;0];
C=[0 1 0 0 0;0 0 0 1 0];
D=0;

sys_V=ss(A,B,C,D);

t=linspace(0,10,200000);
u=Am*sin(2*pi*Fs*t);
up=2*pi*Fs*Am*cos(2*pi*Fs*t);
Y=lsim(sys_V,u,t);
y1 = Y(:,1);
dy1 = y1(2:end)-y1(1:end-1);
y2 = Y(:,2);

```

```

dy2 = y2(2:end)-y2(1:end-1);
dt = t(2:end)-t(1:end-1);
Pi=0.5*(-mt.*(dy1'/dt).*up(1:end-1)')+0.5*(mr*(dy2'/dt).*up(1,end- 1)');
Pin(i)=sqrt(trapz(t(1,end-1),Pi.^2)/t(end-1));

Pot=(-
alpha^2*R*s^2*(mt*s^2+kb+cb*s)^2)/(2*((mt*s^2+kb+cb*s)*((ks(i)+cb*s+mr*s^2)*(1+R*c0*s
)+alpha^2*R*s)+((ks(i)+cb*s)*(1+R*c0*s)+alpha^2*R*s)*mr*s^2)^2);
t=linspace(0,10,200000);
u=Am*sin(2*pi*Fs*t);
y=lsim(Pot,u,t);
P(i)=sqrt(trapz(t,y.^2)/t(end));
end

efic = ((Am)^2.*P)./Pin;
subplot(2,2,3)
plot(kb./ks,1000.*P,'r')
title('Potencia')
xlabel('Tasa de cambio de rigidez kb/ks')
ylabel('Potencia [mW]')
legend('Variación de ks')

subplot(2,2,4)
plot(kb./ks,efic,'r')
title('Eficiencia')
xlabel('Tasa de cambio de rigidez kb/ks')
ylabel('Eficiencia')
legend('Variación de ks')

%% tasa de desplazamiento

mt=270;
mr=54;
cb=42.98;
cb=98.26e3;

c0=1.89e-8;
kb=22.89e6;
ks=192.60e6;
alpha=1.52e-3;
M= 15470;
g=9,81;

Am=M*g;%amplitud de la carga sinusoidal

Fs=linspace(0.1,200,800);
x1=zeros(size(Fs));
x2=zeros(size(Fs));
Y1=zeros(size(Fs));
Y2=zeros(size(Fs));

for i=1:length(Fs)

```

```

    A=[0 1 0 0 0; -(kb+ks)/mt -(cb+cb)/mt ks/mt cb/mt -alpha/mt; 0 0 0 1 0; ks/mr cb/mr
    -ks/mr -cb/mr alpha/mr; 0 -alpha/c0 0 alpha/c0 -1/(R*c0)];
    B=[0;0;0;1/mr;0];
    C=[1 0 0 0 0; 0 0 1 0 0];
    D=0;

    sys_V=ss(A,B,C,D);
end

t=linspace(0,200,200);
u=Am*sin(2*pi*Fs(i)*t);
Y=lsim(sys_V,u,t);
Y1(i)=sqrt(trapz(t,Y(:,1).^2)/t(end));
Y2(i)=sqrt(trapz(t,Y(:,2).^2)/t(end));
x1(i) = sqrt(2)*Y1(i)./Am;
x2(i) = sqrt(2)*Y2(i)./Am;

figure
plot(Fs,x1,'b');
hold on
plot(Fs,x2,'--r');
title('Tasa de desplazamiento');
xlabel('Frecuencia [Hz]')
ylabel('Tasa de desplazamiento');
legend('X1/Y','X2/Y');
hold off
figure
plot(Fs,Y1./Y2);
title('Tasa de desplazamiento');
xlabel('Frecuencia [Hz]')
ylabel('Tasa de desplazamiento X1/X2');

%% coeficiente de amortiguamiento cb

mt=270;
mr=54; cb=42.98;
cb=linspace(0.1*40.11e3,1e2*40.11e3,100);
c0=1.89e-8;
kb=22.89e6;
ks=192.60e6;
alpha=1.52e-3;
R=30455.3;
M= 15470;
g=9,81;

Am=M*g;%amplitud de la carga sinusoidal
s=tf('s');
Fs=80;
P = zeros(size(cb));
for i=1:length(cb)

```

```

Pot=(-alpha^2*R*s^2*(mt*s^2+kb+cb*s)^2)/(2*((mt*s^2+kb+cb*s)*((ks+cb(i)*s+mr*s^2
)*(1+R*c0*s)+alpha^2*R*s)+((ks+cb(i)*s)*(1+R*c0*s)+alpha^2*R*s)*mr*s^2)^2);
t=linspace(0,20,200000);
u=Am*sin(2*pi*Fs*t);
y=lsim(Pot,u,t);
P(i)=sqrt(trapz(t,y.^2)/t(end));
end

figure
plot(cb./40.11e3,1000.*P,'b')
title('Potencia')
xlabel('coeficiente de amortiguamiento [x40.11e3 N*s/m]')
ylabel('Potencia [mW]')

%% factor de fuerza
mt=270;
mr=54;
cb=42.98;
cb=98.26e3;
c0=1.89e-8;
kb=22.89e6;
ks=192.60e6;
alpha=linspace(0.1*1.52e-3,2e4*1.52e-3,100);
R=30455.3;
M= 15470;
g=9,81;

Am=M*g;%amplitud de la carga sinusoidal
s=tf('s');
Fs=80;
P = zeros(size(alpha));

for i=1:length(alpha)
Pot=(-
alpha(i)^2*R*s^2*(mt*s^2+kb+cb*s)^2)/(2*((mt*s^2+kb+cb*s)*((ks+cb*s+mr*s^2)*(1+R*c0*s
)+alpha(i)^2*R*s)+((ks+cb*s)*(1+R*c0*s)+alpha(i)^2*R*s)*mr*s^2)^2);
t=linspace(0,10,200000);
u=Am*sin(2*pi*Fs*t);
y=lsim(Pot,u,t);
P(i)=sqrt(trapz(t,y.^2)/t(end));

end

figure
plot(alpha./1.52e-3,1000.*P,'b')
title('Potencia')
xlabel('Factor de fuerza [x1.52e-3 N/volt]')
ylabel('Potencia [mW]')

%% variacion de masa 1
mt=[120 157.6 200 270];
mr=54;
cb=42.98;

```



```

cb=98.26e3;
c0=1.89e-8;
kb=22.89e6;
ks=192.60e6;
alpha=1.52e-3;
R=30455.3;
M= 15470;
g=9,81;

Am=M*g;%amplitud de la carga sinusoidal
s=tf('s');
Fs=linspace(0,100,200);
P = zeros(size(Fs));

figure
hold on

for j=1:length(mt)
    for i=1:length(Fs)
        Pot=(-
alpha^2*R*s^2*(mt(j)*s^2+kb+cb*s)^2)/(2*((mt(j)*s^2+kb+cb*s)*((ks+cb*s+mr*s^2
)*(1+R*c0*s)+alpha^2*R*s)+((ks+cb*s)*(1+R*c0*s)+alpha^2*R*s)*mr*s^2)^2);
        t=linspace(0,10,2000000);
        u=Am*sin(2*pi*Fs(i)*t);
        y=lsim(Pot,u,t);
        P(i)=sqrt(trapz(t,y.^2)/t(end));
    end

    msg=sprintf("mt: %.2f",mt(j));
    plot(Fs,1000.*P,'DisplayName',msg)
end

title('Potencia')
xlabel('Frecuencia [Hz]')
ylabel('Potencia [mW]')
legend hold off

%% Variación masa 2
mt=270;
mr=[54 60];
cb=42.98;
cb=98.26e3;
c0=1.89e-8;
kb=22.89e6;
ks=192.60e6;
alpha=1.52e-3;
R=30455.3;
M= 15470;
g=9,81;

Am=M*g;%amplitud de la carga sinusoidal
s=tf('s');
Fs=linspace(0,100,200);

```

```

P = zeros(size(Fs));
figure
hold on

for j=1:length(mr)
    for i=1:length(Fs)
        Pot=(-
alpha^2*R*s^2*(mt*s^2+kb+cb*s)^2)/(2*((mt*s^2+kb+cb*s)*((ks+cb*s+mr(j))*s^2
)*(1+R*c0*s)+alpha^2*R*s)+((ks+cb*s)*(1+R*c0*s)+alpha^2*R*s)*mr(j)*s^2)^2);
        t=linspace(0,10,2000000);
        u=Am*sin(2*pi*Fs(i)*t);
        y=lsim(Pot,u,t);
        P(i)=sqrt(trapz(t,y.^2)/t(end));
    end

    msg=sprintf("mr: %.2f",mr(j));
    plot(Fs,1000.*P,'DisplayName',msg)
end

title('Potencia')
xlabel('Frecuencia [Hz]')
ylabel('Potencia [mW]')
legend
hold off

%% Variación de kb

mt=270;
mr=54;
cb=42.98;
cb=98.26e3;
c0=1.89e-8;
kb=[22.89e6 83.3e6 100.3e6 257.9e6];
ks=192.60e6;
alpha=1.52e-3;
R=30455.3;
M= 15470;
g=9,81;

Am=M*g;%amplitud de la carga sinusoidal
s=tf('s');
Fs=linspace(0,100,200);
P = zeros(size(Fs));
figure
hold on

for j=1:length(kb)
    for i=1:length(Fs)
        Pot=(-
alpha^2*R*s^2*(mt*s^2+kb(j)+cb*s)^2)/(2*((mt*s^2+kb(j)+cb*s)*((ks+cb*s+mr*s^2
)*(1+R*c0*s)+alpha^2*R*s)+((ks+cb*s)*(1+R*c0*s)+alpha^2*R*s)*mr*s^2)^2);
        t=linspace(0,10,2000000);
        u=Am*sin(2*pi*Fs(i)*t);

```

```

        y=lsim(Pot,u,t);
        P(i)=sqrt(trapz(t,y.^2)/t(end));
    end

    msg=sprintf("kb: %.2fe6",kb(j)/1e6);
    plot(Fs,1000.*P,'DisplayName',msg)
end

title('Potencia')
xlabel('Frecuencia [Hz]')
ylabel('Potencia [mW]')
legend
hold off

%% Variación de ks
mr=54;
cb=42.98;
cb=98.26e3;
c0=1.89e-8;
kb=22.89e6;
ks=[192.6e6 322.3e6 401.1e6 583.3e6];
alpha=1.52e-3;
R=30455.3;
M= 15470;
g=9,81;

Am=M*g;%amplitud de la carga sinusoidal
s=tf('s');
Fs=linspace(0,100,200);
P = zeros(size(Fs));

figure
hold on
for j=1:length(ks)
    for i=1:length(Fs)
        Pot=(-
alpha^2*R*s^2*(mt*s^2+kb+cb*s)^2)/(2*((mt*s^2+kb+cb*s)*((ks(j)+cb*s+mr*s^2
)*(1+R*c0*s)+alpha^2*R*s)+((ks(j)+cb*s)*(1+R*c0*s)+alpha^2*R*s)*mr*s^2)^2);
        t=linspace(0,10,2000000);
        u=Am*sin(2*pi*Fs(i)*t);
        y=lsim(Pot,u,t);
        P(i)=sqrt(trapz(t,y.^2)/t(end));
    end
    msg=sprintf("ks: %.2fe6",ks(j)/1e6);
    plot(Fs,1000.*P,'DisplayName',msg)
end

title('Potencia')
xlabel('Frecuencia [Hz]')
ylabel('Potencia [mW]')
legend
hold off

```