



ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS

TÉCNICAS DE SOLUCIÓN PARA MODELOS INTEGRADOS DE OPTIMIZACIÓN DE TRANSPORTE PÚBLICO PROGRAMACIÓN LINEAL ENTERA PARA LA PLANIFICACIÓN DE LÍNEAS CON ENRUTAMIENTO INTEGRADO DE PASAJEROS EN LA OPTIMIZACIÓN DE SISTEMAS DE TRANSPORTACIÓN PÚBLICA

**TRABAJO DE INTEGRACIÓN CURRICULAR PRESENTADO COMO
REQUISITO PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE INGENIERO
MATEMÁTICO**

GUILLERMO RICARDO AGUILERA HIDALGO

guillermo.aguilera@epn.edu.ec

DIRECTOR: DR. LUIS MIGUEL TORRES CARVAJAL

luis.torres@epn.edu.ec

QUITO, 28 DE AGOSTO DE 2023

CERTIFICACIONES

Yo, GUILLERMO RICARDO AGUILERA HIDALGO, declaro que el trabajo de integración curricular aquí descrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y, que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

Guillermo Ricardo Aguilera Hidalgo

Certifico que el presente trabajo de integración curricular fue desarrollado por Guillermo Ricardo Aguilera Hidalgo, bajo mi supervisión.

Dr. Luis Miguel Torres Carvajal
DIRECTOR

DECLARACIÓN DE AUTORÍA

A través de la presente declaración, afirmamos que el trabajo de integración curricular aquí descrito, así como el(los) producto(s) resultante(s) del mismo, es(son) público(s) y estará(n) a disposición de la comunidad a través del repositorio institucional de la Escuela Politécnica Nacional; sin embargo, la titularidad de los derechos patrimoniales nos corresponde a los autores que hemos contribuido en el desarrollo del presente trabajo; observando para el efecto las disposiciones establecidas por el órgano competente en propiedad intelectual, la normativa interna y demás normas.

Guillermo Ricardo Aguilera Hidalgo

Dr. Luis Miguel Torres Carvajal

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a Dios por darme un don en las matemáticas y las condiciones para cultivarlo, a mi madre por apoyarme desde mi nacimiento y por enseñarme a esforzarme cada día, a mis hermanos por darme un espacio de distracción alejado de las matemáticas. Agradezco a mis amigos, Nara ySthevven, con quienes me divertí durante estos años y que hicieron mi vida más alegre. Agradezco a mi profe Luis Miguel Torres por el tiempo y la dedicación que me brindó hasta el último momento de este proyecto.

RESUMEN

Los modelos que integran las fases de planificación de líneas y el enrutamiento de pasajeros tienen como objetivo establecer las líneas que se van a operar en un sistema de transporte público conjuntamente con sus frecuencias, de tal manera que se cubra toda la demanda de transporte, mientras se minimizan los costos de operación y a su vez se garantiza un cierto nivel de servicio, reflejado en el tiempo promedio de viaje de los pasajeros.

En este trabajo nos centraremos en el estudio de dos heurísticas, construidas sobre ideas propuestas por Scholl [18], para hallar soluciones factibles de un modelo de programación lineal entera que integra la fase de planificación de líneas junto con la fase del enrutamiento de pasajeros.

Ambas heurísticas fueron implementadas computacionalmente usando el API Python del solver Gurobi y probadas sobre cuatro instancias que fueron obtenidas del proyecto OpenLinTim [12]. Se reportan los resultados de los experimentos computacionales y las conclusiones obtenidas.

Palabras clave: optimización en el transporte público, investigación de operaciones, planificación de líneas, enrutamiento de pasajeros, modelos integrados

ABSTRACT

Models that integrate the phases of line planning and passenger routing aim to define the lines to be operated in a public transportation system, together with their frequencies, ensuring that all demand is satisfied while minimizing the operational costs and maintaining a certain level of quality of service for the passengers, which is measured in their mean travel time..

In this work, we will focus on the study of two heuristics, built upon the ideas proposed by Scholl [18], to find feasible solutions for an integer linear programming model that integrates the line planning phase with the passenger routing phase.

Both heuristics were computationally implemented using the Python API of the Gurobi integer programming solver and tested on over four instances obtained from the OpenLinTim project [12]. The results of the computational experiments and some conclusions are reported.

Key words: public transport optimization, operations research, line planning, passenger routing, integrated models

Índice general

1. Introducción	15
2. Marco Teórico	18
2.1. Planificación de líneas	20
2.2. Enrutamiento de pasajeros	22
2.3. Sobre la integración de los problemas	23
3. Planificación de líneas minimizando el tiempo de viaje promedio del pasajero	28
3.1. Definiciones preliminares	28
3.2. Modelo integrado de planificación de líneas y enrutamiento .	31
3.3. Heurísticas	38
3.3.1. Heurística Greedy	38
3.3.2. Heurística 1: Iniciando con el reservorio de líneas . .	39
3.3.3. Heurística 2: Iniciando con el conjunto vacío	41
4. Resultados Computacionales	44
4.1. Instancias	45
4.1.1. Características de las instancias	45
4.1.2. Características de la PTN	49
4.1.3. Características de la red Change and Go	49

4.2. Resultados	51
4.2.1. Heurística 1	51
4.2.2. Heurística 2	61
5. Conclusiones y Recomendaciones	63
Bibliografía	65

Índice de figuras

2.1. Fases en la planificación de un sistema de transportación pública	19
3.1. Red PTN de la instancia Toy 0	33
3.2. Nodos de la red Change and Go	33
3.3. Arcos \mathcal{E}_{go} de la red Change and Go.	34
3.4. Arcos \mathcal{E}_{change} de la red Change and Go.	34
3.5. Arcos \mathcal{E}_{OD} de la red Change and Go.	35
3.6. Red Change and Go con todos sus arcos	35
4.1. Esquema de la PTN de la instancia Grid	46
4.2. Esquema de la PTN de la instancia Atenas	47
4.3. Esquema de la PTN de la instancia Anillo	48
4.4. Esquema de la PTN de la instancia Gottingen	49
4.5. Tiempo de cada iteración de la heurística 1 para la instancia Grid	52
4.6. Presupuesto utilizado en cada iteración de la heurística 1 para la instancia Grid	53
4.7. valor de la función objetivo en cada iteración de la heurística 1 para la instancia Grid	53

4.8. Tiempo de cada iteración de la heurística 1 para la instancia Atenas	54
4.9. Presupuesto utilizado en cada iteración de la heurística 1 para la instancia Atenas	55
4.10.valor de la función objetivo en cada iteración de la heurística 1 para la instancia Atenas	56
4.11.Tiempo de cada iteración de la heurística 1 para la instancia Anillo	57
4.12.Presupuesto utilizado en cada iteración de la heurística 1 para la instancia Anillo	58
4.13.valor de la función objetivo en cada iteración de la heurística 1 para la instancia Anillo	58
4.14.Tiempo de cada iteración de la heurística 1 para la instancia Gottingen	59
4.15.Presupuesto utilizado en cada iteración de la heurística 1 para la instancia Gottingen	60
4.16.valor de la función objetivo en cada iteración de la heurística 1 para la instancia Gottingen	61

Capítulo 1

Introducción

El mundo experimenta un constante movimiento y crecimiento, fenómeno evidente en el aumento de la población y la expansión de las ciudades año tras año. Este crecimiento no solo conlleva beneficios económicos para las mismas, sino que también acarrea dificultades para sus habitantes. Uno de los problemas más importantes, con implicaciones en la salud pública y en el deterioro del medio ambiente, es la movilidad urbana. En ciudades como Quito, quienes dependen del transporte público se enfrentan a situaciones como unidades sin espacio durante las horas pico, retrasos en los viajes, esperas largas, entre otros inconvenientes. Aunque la solución ideal sería poder disponer de recursos ilimitados, para poder incrementar el número de vehículos el personal y el espacio, ésta no es una opción viable en el mundo real, y es necesario abordar el problema de utilizar eficientemente los recursos disponibles para implementar un sistema de transportación pública que satisfaga de la mejor manera posible las necesidades de movilidad de los ciudadanos y minimice los impactos negativos sobre el medio ambiente.

Al optimizar la gestión de un sistema de transportación pública, se deben abordar varios aspectos, tanto estratégicos como operativos. Por ejemplo, se deben tomar decisiones estratégicas relacionadas a la operación eficiente del sistema, tomando en cuenta las limitaciones presupuestarias. Una decisión importante consiste en determinar las rutas que deben seguir los vehículos y las frecuencias con las que deben realizar sus

recorridos. Este problema se aborda en la fase de planificación de líneas, cuyo objetivo es cubrir de transporte estimada, mientras se minimizan los costos de operación y se reducen los tiempos de viaje promedio, para proporcionar a los ciudadanos un transporte rápido y asequible que les permita desplazarse con alta calidad de servicio.

Los modelos de optimización matemática se han aplicado con éxito en casi todas las fases de la planificación del transporte. La literatura académica al respecto es abundante y comprende tanto el estudio teórico de varios problemas de optimización, como el desarrollo de algoritmos eficientes, y la aplicación de las técnicas de optimización en numerosos casos de estudio.

En este trabajo de integración curricular se abordan métodos de solución para un modelo integrado de planificación de líneas y enrutamiento de pasajeros. Más específicamente, el aporte de este trabajo consiste en la implementación de heurísticas para hallar soluciones al modelo LPMTF propuesto por Scholl [18]. Este modelo es usado para resolver las fases de planificación de líneas y enrutamiento de pasajeros de forma integrada.

Las heurísticas fueron implementadas computacionalmente empleando el API Python del solver Gurobi. Posteriormente, fueron probados en cuatro instancias obtenidas del proyecto OpenLinTim[12]. Finalmente, se analizaron las soluciones obtenidas por cada heurística y se establecieron conclusiones al respecto.

La estructura de este trabajo de integración curricular es la siguiente: en el [Capítulo 2](#), se revisan las investigaciones previas relacionadas con los modelos propuestos para abordar el problema que integra las fases de planificación de líneas y enrutamiento de pasajeros simultáneamente. Se pone énfasis en trabajos basados en la creación de la red Change and Go propuesta por Schöbel y Scholl [20]. También se incluye literatura basada en otros enfoques alternativos, por ejemplo modelos basados en machine learning, como aquellos presentados por Muller et al. en [8].

En el [Capítulo 3](#) presentamos el modelo de programación lineal entera LPMTF (Line Planning Model with Minimal Transfers and Frequencies) propuesto por Schöbel y Scholl [20] para la solución integrada de la planificación de líneas y el enrutamiento de pasajeros. También se presentan

dos heurísticas tipo greedy para encontrar soluciones al problema mencionado. Estas heurísticas se basan en heurísticas similares propuestas por Scholl [18] para resolver un modelo que no incluye frecuencias.

En el [Capítulo 4](#) se describen los experimentos computacionales realizados sobre cuatro instancias. Se reportan las características de las instancias y los resultados obtenidos al aplicar las heurísticas sobre ellas.

Para concluir, en el [Capítulo 5](#) se exponen las conclusiones acerca del comportamiento de ambas heurísticas, junto con recomendaciones para futuros trabajos que continúen abordando este tema.

Capítulo 2

Marco Teórico

El problema de planificación de un sistema de transporte público en su sentido más amplio consiste en tomar un conjunto de decisiones estratégicas, tácticas y operativas para garantizar el funcionamiento adecuado del sistema, por ejemplo, definir las estaciones de dónde salen y llegan las unidades de transporte, definir las rutas para las diferentes líneas, establecer cuántas unidades van a salir en cierto periodo del día, qué unidades se van a usar y qué trabajadores manejarán dichas unidades, entre otras. Todo esto se resuelve con el objetivo de minimizar los costos de operación y maximizar el nivel de servicio para el usuario.[6]

Tiong An Chua [4] Nos indica que este problema se resolvía en un inicio de forma manual y para instancias pequeñas de zonas urbanas. Además, por las limitaciones tecnológicas no se utilizaban computadores y los resultados dependían de la experiencia, intuición y suerte de la persona encargada de los cálculos. Luego, con la aparición de los computadores a partir de la década de los 70's se fueron desarrollando modelos computacionales que servían para la evaluación de la red de transporte. Estos cálculos eran considerados lentos además de ser útiles solamente para modificaciones pequeñas. Finalmente, con el paso de los años se emplea la matemática para formular modelos de optimización y se tiene más evidencia de la alta demanda computacional que estos modelos producen. El estudio teórico de estos modelos llevó al desarrollo de métodos de solución tanto heurísticos como exactos.

Generalmente se distinguen varias fases dentro de la planificación de un sistema de transporte público. Algunas de ellas se presentan en la Figura 1.1

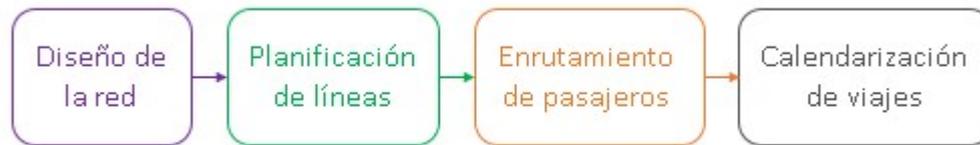


Figura 2.1: Fases en la planificación de un sistema de transportación pública

Las distintas fases abordan secuencialmente la toma de decisiones que van desde aspectos más estratégicos a cuestiones más operativas. Es importante notar que hay una fuerte interdependencia entre las fases: las decisiones tomadas en una fase determinan las alternativas disponibles en la fase siguiente.

En la fase de diseño de la red se tiene como objetivo establecer cuál es la infraestructura disponible para la red de transporte. En esta fase se toman decisiones como construir nuevos tramos de la red del metro, decidir cuáles carriles de la red vial de la ciudad serán utilizados por la red de buses, construir nuevos corredores exclusivos para buses de alta capacidad, etc.

En la fase de planificación de líneas se utiliza la red establecida en la fase de anterior y se determinan cuáles líneas de la red van a ser utilizadas y cuál será su respectiva frecuencia para cubrir la demanda de transporte sin sobrepasar la capacidad de los vehículos y garantizando un buen nivel de servicio para el usuario, mientras se minimizan los costos operativos.

En la fase de enrutamiento de pasajeros se asignan las rutas que los usuarios del sistema emplearán para desplazarse desde su estación de origen hasta su estación de destino. Los modelos de enrutamiento de pasajeros toman como entradas las matrices origen-destino que indican de dónde a dónde se mueven los pasajeros y determinan el número de pasajeros que van a ser transportados por cada arco de la red, lo que

se conoce como la carga del arco. La cantidad de pasajeros de cada arco tiene que ser menor que número el total de unidades que pasan por dicho arco multiplicado por la capacidad de cada unidad.

La fase de calendarización de viajes consiste en fijar, a partir de las líneas y de las frecuencias, los horarios de entrada y salida de cada unidad de transporte en cada estación de la red.

2.1. Planificación de líneas

La fase de planificación de líneas consiste en determinar las líneas que se van a utilizar para cubrir la demanda en un sistema de transporte pública, conjuntamente con sus respectivas frecuencias, es decir, el número viajes de la línea que se van a realizar dentro del horizonte de planificación.

Para esta fase se tiene que una línea es un camino simple en la red de transporte público, y la misma debe ser cubierta por un solo operador desde el origen hasta el destino.

Para el problema de planificación de líneas se tienen dados los siguientes datos de entrada:

- **Red de transporte público:** Un grafo dirigido (o no dirigido) cuyos nodos son las paradas del sistema y cuyos arcos (o aristas) conectan estaciones consecutivas entre sí.
- **Reservorio de líneas:** Un conjunto de todas las posibles líneas que se pueden utilizar. Estas son generalmente establecidas a priori considerando ciertos criterios técnicos de la red de transporte. Existen también modelos en los cuales el reservorio de líneas es construido dinámicamente, bajo cierto criterio Borndörfer et al. [11] utilizan el método de generación de columnas para hallar un reservorio de líneas.
- **Demanda de transporte:** A través de un algoritmo de enrutamiento de pasajeros, se determinan cargas sobre los arcos (o aristas) de la red de transporte, las cuales indican la cantidad de personas que van a circular por dicho arco dentro del horizonte de planificación.

Estos valores representan la demanda de transportación existente y suelen obtenerse a partir de matrices origen-destino. La asignación usual que se utiliza es la de caminos más cortos, es decir, la demanda de cada par origen-destino es asignada a los arcos que forman el camino más corto entre la estación de origen y la estación de destino en la red.

En general, los modelos de planificación de Líneas propuestos en la literatura se pueden clasificar en dos grupos. En el primer grupo están los modelos enfocados a minimizar los costos operacionales, que se describen con mayor detalle en el párrafo siguiente. Por otra parte, en el segundo grupo están los modelos enfocados a maximizar el nivel de servicio para el pasajero. Estos modelos requieren de la solución integrada del problema de planificación de líneas y del problema de enrutamiento de pasajeros descrito en la Sección 1.2 del presente capítulo. En la Sección 1.3 se discuten otros aspectos concernientes a la integración de las fases de planificación de líneas y de enrutamiento de pasajeros.

Los modelos orientados a costos tienen como objetivo seleccionar las líneas que minimicen el costo operacional mientras se satisface la demanda y cumpliendo ciertas restricciones como capacidad de la unidad de transporte, frecuencias máximas por línea, entre otros. Los costos de operación suelen incluir tanto costos fijos como costos variables. Se detallan los más comunes a continuación:

- **Costos fijos:** costo fijos de mantenimiento (chequeos y mantenimientos regulares), costo de estacionamiento nocturno, costo de la depreciación de la unidad, etc.
- **Costos variables:** costos de limpieza, salarios de los trabajadores, costos variables de mantenimiento (comprar nuevas llantas por desgaste), etc. Estos costos van a depender de la distancia recorrida por cada unidad de transporte.

Una variante de estos modelos fue introducida por Claessens et al. [5] en donde se introduce una variable que indica el tipo de vehículo a utilizar; este modelo fue implementado en el sistema de trenes de Alemania.

2.2. Enrutamiento de pasajeros

La fase de enrutamiento de pasajeros consiste en determinar, a partir de los datos de la matriz origen-destino, la carga sobre cada uno de los arcos de la red, es decir, el número de pasajeros que requerirán ser transportados sobre cada arco. Para ello, debe asignarse a cada pasajero un camino dentro de la red de transporte, que conecte la estación del origen de su viaje con la de su destino. Notar que esta asignación depende en la práctica de las líneas disponibles en el sistema y de sus frecuencias.

Para el enrutamiento de pasajeros se tienen como datos de entrada:

- **Matriz origen destino (Matriz O-D):** Matriz cuya entrada (i, j) nos indica la cantidad de pasajeros que necesitan desplazarse desde la estación i hasta la estación j .
- **Concepto de líneas:** Conjunto que contiene las líneas que operan en el sistema con sus respectivas frecuencias.[3]

No todos los pasajeros tienen la misma preferencia al seleccionar una ruta. Por ejemplo, un pasajero puede elegir el camino que le tome el menor tiempo, mientras que otro pasajero puede preferir una ruta en la que no requiera realizar trasbordos, a pesar de demorarse más tiempo en llegar a su destino. Generalmente, los modelos que toman en cuenta a las preferencias de los pasajeros deben equilibrar distintos criterios. Según Scholl [18] un buen servicio al cliente consiste en tener un sistema rápido, barato, sin trasbordos innecesarios y con una frecuencia elevada para cada línea de la red.

Entre los distintos objetivos que se pueden tener al momento de realizar los modelos de enrutamiento de pasajeros están [17]:

1. **Minimizar el número de transferencias:** En este acercamiento se busca minimizar el número de trasbordos que los pasajeros deben realizar al desplazarse desde su origen hasta llegar su destino, es decir, se debe minimizar las veces que el pasajero cambia de línea.
2. **Maximizar el número de pasajeros directos:** Otro enfoque consiste en maximizar el número de "pasajeros directos", es decir, pasajeros

que pueden llegar desde su origen hasta su destino sin hacer trasbordos.

3. **Minimizar el tiempo promedio de viaje:** En este caso se desea minimizar la suma de todos los tiempos de viaje de cada pasajero.
4. **Maximizar el número de pasajeros que pueden ser transportados:** En este enfoque se utilizan las cotas superiores de cada línea y se plantea cuantos pasajeros pueden ser enrutados de forma máxima a través de las líneas.

Se puede pensar que los 2 primeros enfoques son similares. Sin embargo, Schöbel y Scholl [20] demostraron con un ejemplo que los criterios de maximizar el número de pasajeros directos y el de minimizar el número de transferencias no son problemas similares y tienen soluciones distintas.

Notar que los modelos anteriores tienen fijos los resultados de la fase de planificación de líneas, los cuales están expresados en el concepto de líneas. Esta es una limitante de los modelos, pues al momento de hacer el enrutamiento de pasajeros se suele poner en evidencia la necesidad de seleccionar una nueva línea del reservorio, o de aumentar la frecuencia de otra. Tradicionalmente, ambos problemas suelen resolverse de manera iterativa: a partir de un enrutamiento a priori de los pasajeros, se calcula una solución del problema de planificación de líneas, la cual a su vez se emplea para actualizar el enrutamiento. Este proceso se repite de manera iterativa hasta que las soluciones de ambos problemas se establezcan. En contraposición, en la Sección 1.3. abordamos algunos aspectos concernientes a la solución integrada de ambos problemas.

2.3. Sobre la integración de los problemas

En el problema de planificación de un sistema de transporte público existe una interdependencia muy alta entre cada una de sus fases. Esto es más fácil de ver con un ejemplo. Supongamos que en la fase de diseño de la red se opta por crear un nuevo intercambiador. Esto nos permite crear nuevas líneas, lo que afecta directamente a la fase de planificación

de líneas pues hay que considerar nuevas líneas dentro del reservorio, las cuales pueden mejorar o no el sistema de transporte público. La fase de enrutamiento también se ve afectada pues el pasajero elige una ruta diferente dependiendo de las líneas que sean ofertadas. Por último si no se hace una buena calendarización de los viajes podemos tener pasajeros que esperen mucho tiempo en una parada antes de que puedan tomar un medio de transporte público que les sirva. Lo interesante es que la interdependencia se puede ver si vamos de regreso. Es decir, suponga que mejoramos la calendarización de viajes. En este caso algunos pasajeros pueden verse beneficiados al tener una ruta alternativa más rápida, provocando que cambien su ruta. Si hay suficiente demanda se puede tener la necesidad de aumentar las frecuencias de las líneas involucradas o de crear nuevas líneas. Por último, en caso de ser necesario, se puede decidir crear una nueva conexión con el metro para mejorar el servicio al cliente. El anterior ejemplo nos muestra cómo una solución de cualquier fase puede afectar a todo el sistema.

En otras palabras podemos ver que todas las fases están ligadas entre sí. Es decir, la solución de una fase afecta en gran medida la solución de la siguiente y, por ende, la optimalidad de una solución obtenida al considerar una fase independiente no está garantizada.

Por ser nuestro tema de interés, ahondaremos más en la fuerte relación que existe entre el enrutamiento de pasajeros y la planificación de líneas. Para ello, vamos a ver cómo las soluciones de ambas fases pueden verse afectadas mutuamente. Consideremos los siguientes ejemplos:

Suponga que una persona se dirige de su casa al trabajo. Para ello, la ruta más rápida demora 15 minutos, sin embargo, la persona debería tomar 3 buses diferentes, lo cual no le conviene debido al costo. Evaluando sus opciones, la persona decide cambiar a otra ruta que demora 22 minutos y en la que solamente debe tomar un bus.

En el anterior ejemplo se tienen líneas fijas y aunque satisfagan la demanda, es muy probable que un excesivo número de intercambios entre líneas influyan para que los pasajeros decidan tomar rutas que no necesariamente corresponden a las rutas más cortas en el sistema. Esto se refleja en un aumento del tiempo promedio de viaje, pero además puede tener otros efectos negativos como la saturación en ciertas líneas, lo que

finalmente se traduce en un deterioro en la calidad del servicio al cliente.

Por otro lado, suponga que a partir del ejemplo anterior se crea una línea entre la casa de la persona y su trabajo (con algunas las paradas intermedias). Al analizar los desplazamientos de los otros usuarios, se determina que esta línea es muy demandada y, por lo tanto, se puede tomar en cuenta para la planificación de líneas.

El anterior ejemplo nos indica que al considerar simultáneamente el enrutamiento de pasajeros y la planificación de líneas, se pueden encontrar líneas que permitan incluir dentro del problema la perspectiva de cada pasajero, mejorando el servicio al cliente. Sin embargo, la demanda computacional de estos modelos es demasiado alta para instancias reales Schmidt y Schöbel [16] analizan la complejidad de los modelos integrados y demuestran que son NP-difíciles aún si se restringen a topologías de red muy simples.

En la literatura se han propuesto algunos modelos integrados que tienen como objetivo resolver de forma simultánea la planificación de líneas y el enrutamiento de pasajeros. Para ello, se plantea como función objetivo optimizar algún criterio que mide el nivel de servicio/comodidad del pasajero (ver Sección 1.2), mientras se imponen restricciones sobre el costo operativo máximo que puede tener el sistema.

Schöbel y Scholl [20] proponen un modelo en el que la función objetivo mide lo que ellas llaman la “inconveniencia” del pasajero, la cual es una combinación entre el tiempo de viaje y el número de trasbordos que tiene que hacer el pasajero para llegar a su destino.

Bull et al. [2] implementan una penalización dinámica de los trasbordos. Esta penalización está dada por:

$$t_e = p_{\text{fixed}} + \lambda * 1/f$$

Donde:

- t_e es el tiempo de usar un arco de cambio en una estación entre 2 líneas distintas.

- p_e es una constante que define un tiempo fijo para los transbordos.
- $1/f$ es el tiempo que se debe esperar entre dos unidades de transporte.
- $\lambda \in [0, 1]$ es un parámetro para penalizar el tiempo de espera entre dos unidades de transporte en el caso de perder el primero.

La idea es penalizar los cambios hacia líneas con una frecuencia menor. Esto con el objetivo de mejorar de cierta forma la solución que puede obtenerse en la fase calendarización de viajes.

Pfetsch y Borndorfer [10] implementaron tres criterios diferentes para realizar el enrutamiento de los pasajeros: rutas arbitrarias, rutas sin trasbordos y rutas de caminos más cortos. En la tercera forma de enrutar a los pasajeros se busca una única ruta más corta, es decir, se debe satisfacer toda la demanda de un par origen destino por la misma ruta.

Debido a que los modelos integrados son computacionalmente costosos se han planteado diferentes algoritmos para su solución, entre los cuales se encuentran:

En su tesis doctoral, Scholl [18] presenta heurísticas en el estilo "greedy" para resolver un modelo integrado con una función objetivo enfocada en pasajeros. El modelo utilizado en este caso incluye variables binarias y_i para cada línea, que indican si la línea es utilizada o no, en este modelo se excluye las frecuencias.

Schöbel y Scholl [20] utilizan dos distintas descomposiciones de Dantzig Wolfe para resolver un modelo que busca minimizar la suma ponderada entre el tiempo de viaje y el número de transferencias de los pasajeros (es decir, la función de inconveniencia descrita arriba). El objetivo de la descomposición es aprovechar el hecho que las restricciones de enrutamiento para cada par origen-destino están asociadas a matrices totalmente unimodulares. Se ha demostrado que un P definido por $P = \{x : Ax \leq b\}$, donde b es un vector de enteros y A una matriz unimodular, tiene vértices enteros.[19]

Nachtigall y Jerosch [9] utilizan el método de generación de columnas para resolver el modelo integrado. Para ello emplean 2 funciones pricing,

la primera es para las rutas de viaje parciales y la segunda para las variables de cada línea.

Schiewe et al. [13] Utilizan la teoría de juegos para modelar el modelo integrado. Bajo esta perspectiva, la planificación de líneas se interpreta como un juego en el cual cada pasajero busca minimizar su tiempo de viaje, el número de transferencias y el costo promedio de la solución. Además, para su solución emplean algoritmos de mejor respuesta para hallar el equilibrio del sistema.

Israeli y Ceder [7] utilizan un modelo con función multiobjetivo en la que minimizan el tiempo de viaje, el tiempo de espera, el tiempo vacío entre rutas y el tamaño de la flota para la modelización integrada de las fases planificación de líneas, enrutamiento de pasajeros y calendarización de viajes.

En la actualidad se están implementando modelos integrando tres fases o cuatro fases [15] dentro de la planificación de transporte: planificación de líneas, enrutamiento de pasajeros, calendarización de viajes y enrutamiento vehicular. Otra aproximación para solucionar estos problemas es utilizar machine learning para hallar soluciones robustas de los problemas integrados. [8]

La literatura de planificación de líneas es extensa. Chua [4] en la que nos relata cómo ha cambiado la manera de enfrentarse al problema de planificación de un sistema de transportación pública. del problema de planificación de transportación pública. Schöbel [17] realiza una recopilación de otros enfoques para resolver el modelo integrado. Shiewe [14] presenta una exhaustiva recopilación de modelos integrados para varias fases de la planificación de un sistema de transportación pública.

Capítulo 3

Planificación de líneas minimizando el tiempo de viaje promedio del pasajero

3.1. Definiciones preliminares

DEFINICIÓN 3.1. Grafo no dirigido Un grafo no dirigido $G = (V, E)$ consiste de un conjunto de nodos V y un conjunto de aristas $E = \{\{i, j\} : i \in V, j \in V\}$.

La arista $e = \{u, v\}$ representa una conexión entre el nodo u con el nodo v y a su vez una conexión en sentido contrario, es decir, una conexión entre v y u . En adelante denotaremos la arista u, v simplemente como uv .

DEFINICIÓN 3.2. Grafo dirigido Un grafo dirigido $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$ consiste de un conjunto de nodos \mathcal{V} y un conjunto de arcos $\mathcal{A} = \{(i, j) : i \in \mathcal{V}, j \in \mathcal{V}\}$.

Usualmente un arco $a = (i, j)$ se emplea para representar una conexión dirigida entre el nodo i hacia el nodo j .

DEFINICIÓN 3.3. Camino Se define un camino P en un grafo no dirigido como una sucesión alternada de nodos y aristas de la forma $P = (v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, e_{n-1}, v_n)$ tal que $e_i = \{v_i, v_{i+1}\} \forall i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. Cuando no existe riesgo de confusión, se notará $P = (e_1, e_2, \dots, e_{n-1})$. Además se expresa $v \in P, e \in P$ para notar que un nodo o una arista forman parte del camino.

DEFINICIÓN 3.4. Flujo de costo mínimo[1] Dado un grafo dirigido $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$. Para cada arco $(u, v) \in \mathcal{A}$ tiene asociado un costo c_{uv} que denota el costo por unidad de flujo que se envía por el arco (u, v) . También se asocian dos capacidades min_{uv} y max_{uv} que representan la mínima y máxima cantidad de flujo que debe ser enviado por el arco (u, v) . Asociamos a cada nodo $vin\mathcal{V}$ un entero $b(v)$ representando la demanda del nodo. Si $b(v) > 0$, el nodo v es un sumidero, si $b(v) < 0$, el nodo es una fuente y si $b(v) = 0$, el nodo es un nodo de transferencia. Se definen las variables de decisión $x_{uv} \in \mathbb{Z}$ para cada arco $(u, v) \in \mathcal{A}$ que indican la cantidad de flujo que envío por el arco (u, v) . Así se define el problema de flujo de costo mínimo

$$\text{mín } \sum_{(u,v) \in \mathcal{A}} c_{uv} x_{uv} \quad (3.1)$$

$$\text{sujeto a: } \sum_{v:(v,u) \in \mathcal{A}} x_{vu} - \sum_{v:(u,v) \in \mathcal{A}} x_{uv} = b(u) \quad \forall u \in \mathcal{V}, \quad (3.2)$$

$$min_{uv} \leq x_{uv} \leq max_{uv} \quad \forall (u, v) \in \mathcal{A}. \quad (3.3)$$

La restricción 3.2 se conoce como conservación de flujo. Se puede entender esta restricción como la suma del flujo entrante menos la suma del flujo saliente de un nodo cualquiera, lo cual debe ser igual a su demanda. Si la demanda de un nodo es cero, se igualan el flujo entrante con el flujo saliente, y nada del flujo permanece en el nodo, convirtiéndolo en un nodo de transición. Si la demanda es negativa, la única forma posible es que exista más flujo saliente que flujo entrante en el nodo, lo que significa que el flujo se origina en el nodo, de ahí el término "fuente". Si la demanda es positiva, el flujo entrante supera al flujo saliente, lo que implica que cierto flujo permanece en el nodo. Por esta razón, a este tipo de nodos se les llama sumideros.

DEFINICIÓN 3.5. Red de transporte público (PTN) Una red de transporte público (PTN) es un grafo no dirigido $G = (V, E)$, donde los nodos $u \in V$ representan las paradas o estaciones de las unidades de transporte, mientras que, las aristas $e \in E$ representan las conexiones directas entre estaciones. Una PTN puede ser representada también por medio de un grafo dirigido, si no todas las conexiones entre estaciones consecutivas son bidireccionales.

Para cada arista $uv \in E$ se notará al **tiempo de viaje sobre** uv por t_{uv} .

DEFINICIÓN 3.6. Matriz origen-destino Dada una red de transporte público $G = (V, E)$, se define a la matriz origen-destino asociada a G como la matriz $\mathbb{R}^{V \times V}$, donde $\mathbb{R}^{V \times V}$ representa el número de pasajeros que se desplazan desde la estación de origen s hacia la estación de destino t dentro del horizonte de tiempo de la planificación.

Adicionalmente, se define al conjunto de pares origen-destino como $\mathcal{R} = \{(s, t) \in V \times V : w_{(s,t)} > 0\}$.

DEFINICIÓN 3.7. Línea Una línea l es un camino en la red de transporte público, y representa una ruta por la cual unidades de transporte prestan sus servicios. La operación de cada viaje de una línea es cubierta de principio a fin por un mismo vehículo. Denotamos por c_l al **costo** de operación asociado a realizar cada viaje de la línea.

DEFINICIÓN 3.8. Reservorio de líneas Se define como reservorio de líneas (*Line pool*) al conjunto \mathcal{L}^0 que contiene todas las posibles líneas que pueden ser operadas en una determinada red de transporte público. El número de viajes que realiza la línea l se conoce como **la frecuencia de la línea** y se notará por f_l .

DEFINICIÓN 3.9. Concepto de líneas Un concepto de líneas es un par ordenado $\mathcal{L} = (\mathcal{L}^0, f)$ formado por el conjunto de las líneas de un reservorio de líneas junto con sus respectivas frecuencias. La frecuencia f_l de una línea $l \in \mathcal{L}$ es un entero no negativo que indica el número de viajes de esa línea que serán operados dentro del horizonte de tiempo de la planificación. Si una línea del reservorio tiene frecuencia igual a cero, significa que la línea no será operada.

En adelante, usaremos la notación $l \in \mathcal{L}$ para indicar simplemente que $(l, f_l) \in \mathcal{L}$ y además $f_l > 0$

DEFINICIÓN 3.10. Frecuencias acumuladas Sea $G = (V, E)$ una PTN, \mathcal{L} un concepto de líneas, se define la frecuencia acumulada de la arista $e \in E$ como el número de viajes que cubren esta arista durante el horizonte

de planificación, sin importar a qué línea pertenezcan, es decir,

$$f_e = \sum_{l \in \mathcal{L}: e \in l} f_l.$$

DEFINICIÓN 3.11. Frecuencias mínimas y máximas por arista En el modelo clásico de planificación de líneas orientado a la reducción de costos, suele asumirse que el problema de enrutamiento de pasajeros ha sido resuelto en una fase previa, es decir, que se han asignado caminos a los pasajeros para realizar sus viajes dentro del sistema. A partir de esta información de enrutamiento, se determinan valores de carga para las aristas de la PTN, los cuales indican la demanda de transporte que debe ser cubierta sobre las mismas, y se expresan por medio de un vector f^{\min} de valores mínimos para sus respectivas frecuencias acumuladas. Por otra parte, un vector f^{\max} indica los valores máximos de frecuencias acumuladas que son admisibles sobre cada arista de la red, debido a restricciones técnicas como la capacidad de las vías.

DEFINICIÓN 3.12. Concepto de líneas factible Dadas una PTN $G = (V, E)$, un concepto de línea \mathcal{L} y dos vectores $f^{\min}, f^{\max} \in \mathbb{R}^E$ con valores mínimos y máximos para las frecuencias acumuladas, se dice que \mathcal{L} es un concepto de líneas factible, si para cada arista $e \in E$ se cumple

$$f_e^{\min} \leq \sum_{l \in \mathcal{L}: e \in l} f_l \leq f_e^{\max}.$$

3.2. Modelo integrado de planificación de líneas y enrutamiento

En esta sección definiremos un modelo integrado de planificación de líneas y enrutamiento de pasajeros que permita tomar en cuenta los tiempos de viaje de los pasajeros. Para ello, necesitamos un entorno en el cual sea posible modelizar tiempos de desplazamiento y tiempos de conexión, cuando se realizan cambios de líneas. Schöbel & Scholl [20] proponen para este fin el concepto de la red Change and Go:

DEFINICIÓN 3.13. Red Change and Go Dados una red de transporte pú-

blico $G = (V, E)$ dirigido o no y un reservorio de líneas \mathcal{L}^0 , se define a la red extendida Change and Go asociada a G como el grafo dirigido $G_{CG} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, donde el conjunto de nodos $\mathcal{V} = \mathcal{V}_{CG} \cup \mathcal{V}_{OD}$ está dado por

- $\mathcal{V}_{CG} := \{(v, l) \in V \times \mathcal{L} : l \in \mathcal{L}(v)\}$ (nodos estación por línea),
- $\mathcal{V}_{OD} := \{(s, 0) : (s, t) \in \mathcal{R}\} \cup \{(t, 0) : (s, t) \in \mathcal{R}\}$ (nodos de entrada y salida),

y el conjunto de arcos tiene la forma $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{change} \cup \mathcal{E}_{go} \cup \mathcal{E}_{OD}$ con

- $\mathcal{E}_{change} := \{((v, l_1), (v, l_2)) \in \mathcal{V}_{CG} \times \mathcal{V}_{CG} : l_1 \neq l_2\}$ (arcos de transferencia),
- $\mathcal{E}^l := \{((v, l), (v', l)) \in \mathcal{V}_{CG} \times \mathcal{V}_{CG} : \{(v, v')\} \in E\}$ (arcos de conducción para la línea l),
- $\mathcal{E}_{go} := \cup_{l \in \mathcal{L}} \mathcal{E}^l$ (arcos de conducción), y
- $\mathcal{E}_{OD} := \{((s, 0), (s, l)) \in \mathcal{V}_{OD} \times \mathcal{V}_{CG} : (s, t) \in \mathbb{R} \cup \{(t, l), (t, 0)\} \in \mathcal{V}_{CG} \times \mathcal{V}_{OD} : (s, t) \in \mathcal{R}\}$ (arcos de ingreso y salida de flujo).

Los nodos \mathcal{V}_{CG} representan las líneas que pasan por cada estación.

Los nodos \mathcal{V}_{OD} representan el inicio o el fin de las rutas de los pasajeros. Estos nodos sirven como fuentes o destinos (sumideros) del flujo de pasajeros en la red.

Los arcos \mathcal{E}_{OD} representan el ingreso o la salida de un pasajero a la red de transporte.

Los arcos \mathcal{E}_{change} representan los cambios entre líneas que un pasajero puede realizar durante su viaje.

Los arcos \mathcal{E}_{go} representan el desplazamiento de los pasajeros entre dos estaciones en una misma línea sin nodos intermedios.

A continuación se presenta un ejemplo de la construcción de la red Change and Go.

Se va a construir la red Change and Go de la instancia Toy 0 propuesta en [12]. Para esta instancia, la PTN consiste del conjunto de nodos es $V = \{1, 2, 3\}$ y el conjunto de aristas es $E = \{12, 23\}$. Se consideran tres líneas en el reservorio $\mathcal{L}^0 = \{11 = \{1, 2\}, 12 = \{2, 3\}, 13 = \{1, 2, 3\}\}$ y la matriz

$\mathcal{R} = \{(1, 2) = 250, (1, 3) = 100, (2, 1) = 100, (2, 3) = 40, (3, 1) = 150, (3, 2) = 140\}$ de la que se puede recuperar el conjunto de pares origen-destino. La PTN está representada en la [Figura 3.1](#)



Figura 3.1: Red PTN de la instancia Toy 0

Para cada nodo v en la PTN se crea un nodo CG en la red Change and Go por cada línea que pasa por v . Adicionalmente se agregan nodos OD por cada estación que aparezca como origen o destino de un par en \mathbb{R} . En la [Figura 3.2](#) se identifican los nodos de \mathcal{V}_{CG} asociados a las distintas líneas con distintos colores. Los nodos origen-destino (nodos de \mathcal{V}_{OD}) están pintados de gris.

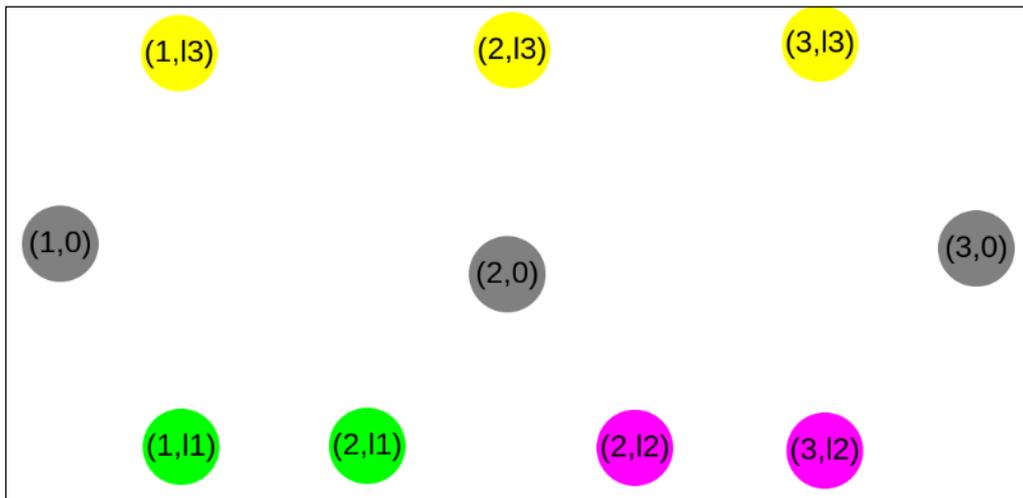


Figura 3.2: Nodos de la red Change and Go

En la [Figura 3.3](#) se muestran los arcos \mathcal{E}_{go} , estos arcos unen nodos de la red Change and Go que corresponden a extremos de aristas de la PTN cubiertas por una línea, tomando en cuenta los dos posibles sentidos de circulación. Por ejemplo, como la línea 11 cubre la arista $\{1,2\}$, en la red Change and Go se definen los arcos $((1, l1), (2, l1))$ y $((2, l1), (1, l1))$. Estas conexiones muestran cuando la unidad de transporte está en movimiento.

Los arcos \mathcal{E}_{change} conectan todos los nodos de diferentes líneas en la misma estación, para indicar las posibles transferencias, como se muestra en la [Figura 3.4](#).

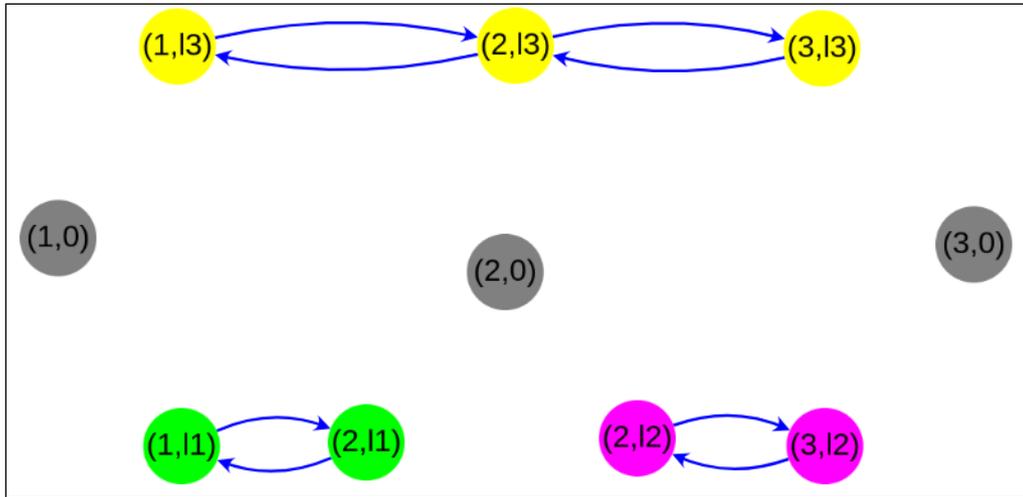


Figura 3.3: Arcos \mathcal{E}_{go} de la red Change and Go.

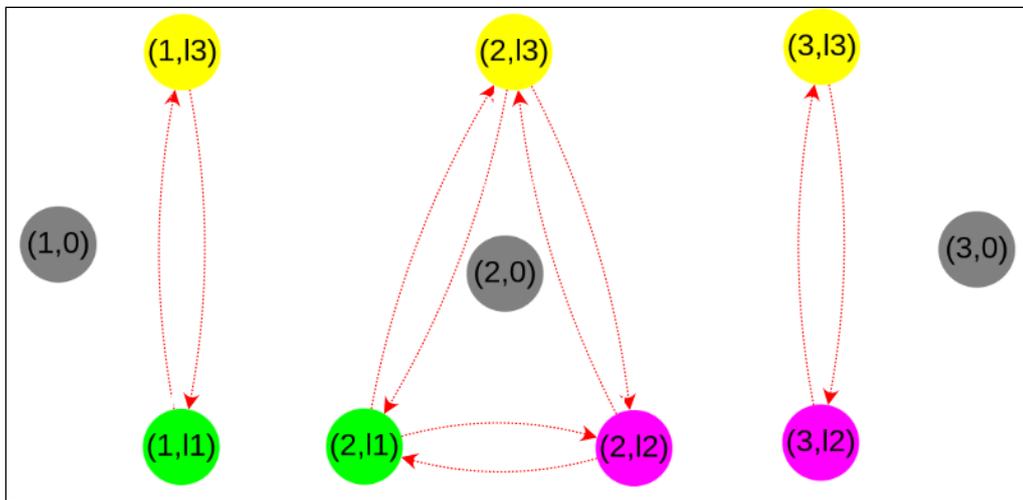


Figura 3.4: Arcos \mathcal{E}_{change} de la red Change and Go.

En el nodo 2 se tienen los siguientes arcos $\mathcal{E}_{change}^2 = \{((2, l1), (2, l2)), ((2, l1), (2, l3)), ((2, l2), (2, l1)), ((2, l2), (2, l3)), ((2, l3), (2, l1)), ((2, l3), (2, l2))\}$. Estos arcos indican los posibles cambios entre líneas que puede realizar un pasajero al llegar a la estación 2.

En la Figura 3.5 se muestran los arcos \mathcal{E}_{OD} que permiten el ingreso y la salida del flujo de pasajeros en la red desde o hacia los nodos de \mathcal{V}_{OD} según sea el caso.

Finalmente, en la Figura 3.6 se muestra la red Change and Go completa para la instancia Toy 0.

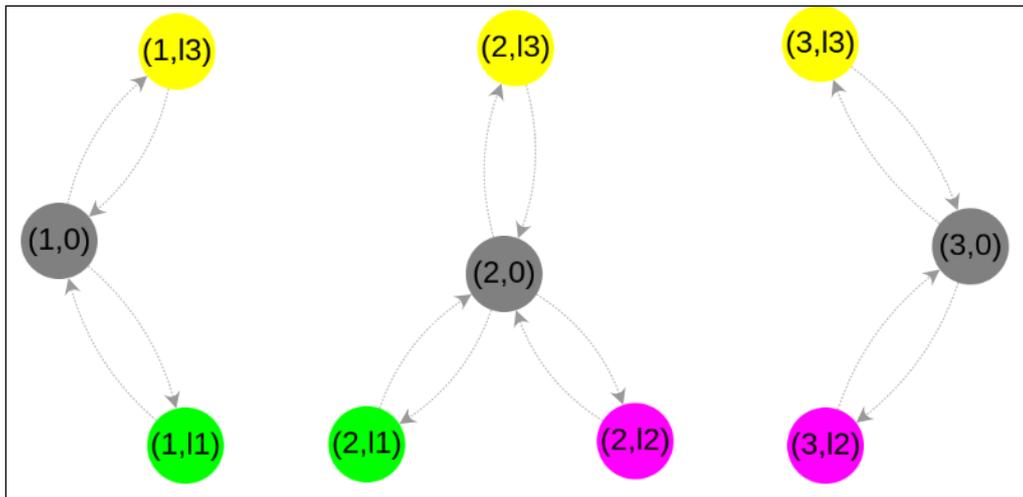


Figura 3.5: Arcos \mathcal{E}_{OD} de la red Change and Go.

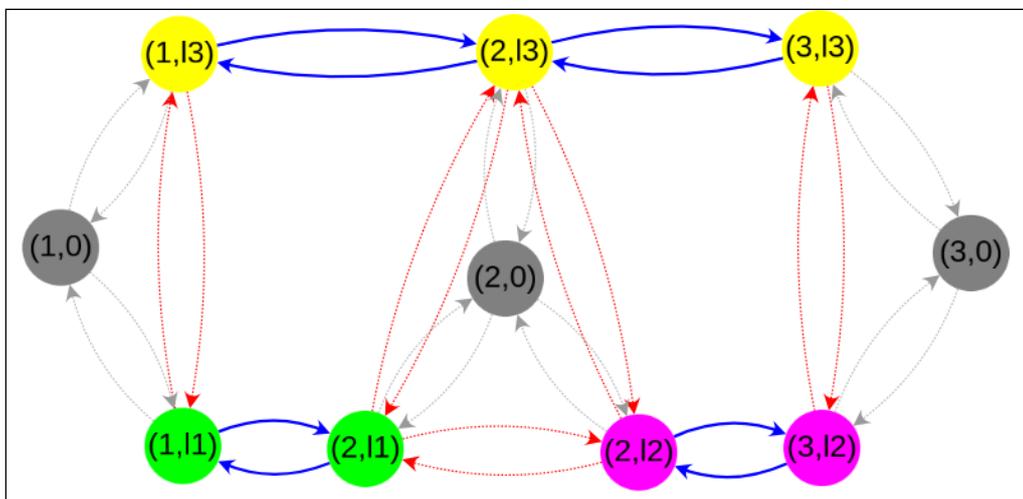


Figura 3.6: Red Change and Go con todos sus arcos

En este trabajo se intentan encontrar soluciones factibles de buena calidad para un modelo de programación lineal entera que integra las fases de planificación de líneas y el enrutamiento vehicular. Las restricciones del modelo establecen que el plan de líneas debe satisfacer toda la demanda de viajes, y que su costo no debe superar un presupuesto pre-establecido. El objetivo a minimizar mide la inconveniencia total de los pasajeros.

Para formular el modelo se crean copias de los arcos $e \in \mathcal{E}$ de la red Change and Go para cada par $(s, t) \in R$, y se definen variables $x_{st}^e \in \mathbb{Z}^+$ que indican el flujo de pasajeros sobre el arco $e \in \mathcal{E}$ en la copia correspondiente al par (s, t) . Adicionalmente, se definen variables $f_l \in \mathbb{N}$, con $l \in \mathcal{L}$

que indican la frecuencia de la línea l . Dada una solución factible de este modelo, las líneas a operar en el sistema son aquellas para las cuales se cumple que $f_l > 0$.

Se definen costos sobre los arcos c_e sobre los arcos de la red Change and Go que representan la **inconveniencia de los pasajeros** de incluir la actividad correspondiente dentro de su viaje:

$$c_e = \begin{cases} k_1 * t_e, & \text{si } e \in \mathcal{E}_{go}, \\ k_2 & , \text{si } e \in \mathcal{E}_{change}, \\ 0 & , \text{si } e \in \mathcal{E}_{OD}. \end{cases} \quad (3.4)$$

La constante k_1 es un factor de penalización por unidad de tiempo de viaje, t_e es el tiempo promedio de viaje por el arco e , y la constante k_2 es una penalización para los transbordos de los pasajeros. Si el valor de k_2 es muy elevado, los pasajeros preferirán rutas más largas con menos cambios. Mientras que, si el valor de k_2 es pequeño, los pasajeros preferirán rutas cortas a pesar que deban realizar varios cambios.

La función objetivo a minimizar mide la suma de la inconveniencia de los pasajeros.

$$\sum_{(s,t) \in \mathcal{R}} \sum_{e \in \mathcal{E}} c_e x_{st}^e$$

Por otro lado, se asume que cada pasajero utilizará para su movilización dentro del sistema la ruta que menos tiempo le demore desde su estación de origen hasta su estación de destino, es decir, la ruta de costo mínimo en la red Change and Go respecto a los coeficientes de inconveniencia indicados arriba. De manera más precisa, las rutas de los pasajeros serán representadas por un flujo multiproducto en la red Change and Go, con un producto para cada par $(s, t) \in \mathcal{R}$. Este flujo debe minimizar la función de la inconveniencia del pasajero mientras respeta las capacidades de los arcos, las cuales dependen de las líneas seleccionadas para operar y de sus respectivas frecuencias. Las condiciones de demanda de flujo para cada par fijo $(s, t) \in \mathcal{R}$ se expresan matricialmente por medio del sistema:

$$\theta x_{st} = b_{st}$$

donde $\theta \in \mathbb{Z}^{|\mathcal{V}| \times |\mathcal{E}|}$ es la matriz de incidencia, cuyas las filas representan los nodos y las columnas representan los arcos de la red Change and Go. El elemento θ_{ie} toma el valor de 1 si el arco e sale del nodo i , el valor de -1 si el arco e entra al nodo i y cero caso contrario.

$$\theta_{ie} = \begin{cases} 1, & \text{si } e = (i, j) \in \mathcal{E}, \\ -1, & \text{si } e = (j, i) \in \mathcal{E}, \\ 0, & \text{en los demás casos.} \end{cases} \quad (3.5)$$

Además, $b_{st} \in \mathbb{Z}^{|\mathcal{V}|}$ es el vector de demandas para todos los nodos $v \in \mathcal{V}$, con respecto al producto que representa del par $(s, t) \in R$ y se define por:

$$b_{st}^v = \begin{cases} w_{st}, & \text{si } v = (s, 0), \\ -w_{st}, & \text{si } v = (t, 0), \\ 0, & \text{en los demás casos.} \end{cases} \quad (3.6)$$

x_{st} representa el vector de las variables de flujo asociadas a los arcos en la copia de la red Change and Go correspondiente al par (s, t) .

A partir de las ideas anteriores, Schöbel y Scholl [20] proponen el siguiente modelo de programación lineal entera LPMTF (Line Planning Model with minimal Transfers and Frequencies).

$$\min \sum_{(s,t) \in \mathcal{R}} \sum_{e \in \mathcal{E}} c_e x_{st}^e \quad (3.7)$$

$$\text{s.t. } \frac{1}{N} \sum_{(s,t) \in \mathcal{R}} x_{st}^e \leq f_l \quad \forall l \in \mathcal{L}, \forall e \in \mathcal{E}_l \quad (3.8)$$

$$\theta x_{st} = b_{st} \quad \forall (s, t) \in \mathcal{R} \quad (3.9)$$

$$\sum_{l \in \mathcal{L}} C_l f_l \leq B \quad (3.10)$$

$$\sum_{l \in \mathcal{L}: k \in \mathcal{E}_l} f_l \leq f_k^{\max} \quad \forall k \in E \quad (3.11)$$

$$x_{st}^e \in \{0, 1\}, f_l \in \mathbb{N} \quad \forall (s, t) \in \mathcal{R}, e \in \mathcal{E}, l \in \mathcal{L} \quad (3.12)$$

La restricción (3.8) nos asegura que que las frecuencias de las líneas son suficientemente altas como para satisfacer el flujo de pasajeros en todos los arcos de la red; N denota la capacidad de cada unidad de transporte. La restricción (3.9) se encarga de la conservación de flujo multiproducto en cada nodo. La restricción (3.10) establece que el costo del plan de líneas no puede superar nuestro presupuesto B . Finalmente, la restricción (3.11) expresa que no se deben exceder las capacidades físicas de cada arista en la PTN.

(3.9) contiene una desigualdad por cada par origen-destino y por cada arco de la red. Por lo tanto, este modelo tiene un tamaño muy grande para el caso de instancias reales.

3.3. Heurísticas

Resolver el modelo LPMTF es complicado por tratarse de un problema lineal entero y a su vez por su gran tamaño. Considerando lo anterior se plantean dos heurísticas para intentar encontrar soluciones factibles de buena calidad, las cuales están basadas en ideas propuestas por Scholl [18] para un modelo similar a LPMTF, aunque más simple.

3.3.1. Heurística Greedy

Las heurísticas tipo greedy tratan de obtener una solución factible para un problema de optimización al tomar en cada iteración la mejor decisión local, es decir, aquella que produce la "mejor recompensa" en la función objetivo. En nuestro caso, emplearemos tres criterios alternativos para cuantificar las recompensas asociadas las posibles decisiones a tomar en cada iteración. Estos valores se expresarán por medio de una **función de relevancia de línea**, denotada por $r_l(f_l)$, con $l \in \mathcal{L}$.

3.3.2. Heurística 1: Iniciando con el reservorio de líneas

En esta heurística se empieza suponiendo que todas las líneas del reservorio serán operadas y se calculan, de manera independiente para cada par origen-destino, las rutas óptimas de desplazamiento (respecto a la función objetivo de minimizar el tiempo de viaje de los pasajeros) al resolver el correspondiente problema de flujo de costo mínimo. Luego estos flujos son agregados sobre la red Change and Go y a partir de ellos se construye un plan de líneas que cubre toda la demanda. Notar que este plan puede ser infactible, debido a que su costo puede superar el presupuesto. Finalmente, se calculan los valores de relevancia para las diferentes líneas, se elimina de las líneas disponibles en el reservorio aquella con el menor valor de $r_l(f_l)$, y se repite una nueva iteración con las líneas restantes. El algoritmo termina cuando ya no es posible cubrir la demanda de transporte con las líneas disponibles, y retorna, de entre los planes de línea encontrados en cada iteración, aquel que tenga el mejor valor en la función objetivo (tiempo de viaje total de los pasajeros) y cuyo costo no supere al presupuesto disponible. Si todos los planes encontrados tienen costos superiores al presupuesto, la heurística falla y no retorna ninguna solución.

El pseudo código de este algoritmo está descrito a continuación

ALGORITMO 3.3.1. Heurística 1

Entrada: Una red PTN y su respectiva red Change and Go, un reservorio de líneas \mathcal{L}^0 .

- 1: Inicializar el conjunto de líneas disponibles $\mathcal{L}_{actual} := \mathcal{L}$
- 2: **mientras** $\mathcal{L}_{actual} \neq \emptyset$ **hacer**
- 3: Calcular para cada par $(s, t) \in \mathcal{R}$ se calcula el flujo de costo mínimo correspondiente a enviar la demanda w_{st} desde s hasta t sobre la red Change and Go que contiene únicamente los arcos asociados a las líneas en \mathcal{L}_{actual} . Agregar todos los flujos obtenidos.
- 4: Calcular el concepto de líneas. Para ello, fijar la frecuencia de cada línea $l \in \mathcal{L}_{actual}$ en el menor valor que permita satisfacer la demanda correspondiente a los flujos agregados sobre cada uno de sus arcos en la red Change and Go.
- 5: Calcular el costo del concepto de líneas y su valor en la función ob-

jetivo (3.7) almacenar el concepto de líneas conjuntamente con estos valores de costo y función objetivo.

- 6: Calcular la relevancia $r_l(f_i)$ de cada línea $l \in \mathcal{L}_{actual}$ con $f_l > 0$, para las otras líneas fijar $r_l(f_i) = 0$.
- 7: **si** todas las relevancias de las líneas son cero **entonces**
- 8: Terminar el lazo “mientras” (2-11)
- 9: **fin si**
- 10: Eliminar de \mathcal{L}_{actual} la línea con mayor relevancia.
- 11: **fin mientras**
- 12: Retornar, de entre los conceptos de líneas almacenados en cada iteración y cuyo costo sea menor o igual al presupuesto, aquel que tenga el mejor valor en la función objetivo. Si todos los conceptos de líneas almacenados tienen costos que superan al presupuesto, retornar “FALLA”. (En este caso, la heurística no pudo construir un plan factible).

Para esta heurística, un mayor valor en la función de relevancia significa que se trata de una línea menos atractiva para la solución.

En el Algoritmo 3.3.1 estamos suponiendo que la frecuencia máxima acumulada admisible sobre cada arista de la PTN no es una limitante (lo que se observó en los experimentos computacionales). Caso contrario, debería considerarse también esta condición al seleccionar la respuesta en el último paso.

El cálculo de los flujos de costo mínimo en el paso 3 del algoritmo la que toma más tiempo de cálculo, debido a que se tiene que resolver un problema de flujo para cada par OD . Para resolver esta fase de manera más rápida lo que se realizó fue: en la primera iteración resolver los flujos para todos los pares OD en \mathcal{R} , en el resto de iteraciones recalculer el flujo de costo mínimo únicamente para aquellos pares OD que utilizaban en su flujo uno o más arcos de la línea que se eliminó en la iteración anterior. Esto permitió mejorar significativamente los tiempos de ejecución de la heurística.

Los resultados obtenidos por el algoritmo dependen en gran medida de la función de relevancia que se utilice en el paso 6, puesto que, si utilizamos diferentes funciones de relevancia se van a eliminar las líneas de distintas formas y esto afectará a la calidad y factibilidad de las solucio-

nes construidas.

Se describen a continuación las tres funciones de relevancia examinadas en el presente trabajo.

La primera función de relevancia mide el costo de operación de una línea sobre el total de flujo que satisface.

$$r_l(f_l) = \frac{f_l c_l}{\sum_{j \in \mathcal{E}^l} x_{st}^e} \quad (3.13)$$

La segunda función mide el costo unitario (es decir, por cada viaje) de una línea dividido para su frecuencia, con esto se quiere reducir la inconveniencia de las líneas más usadas, así como de las líneas que inicialmente son más económicas.

$$r_l(f_l) = \frac{c_l}{f_l} \quad (3.14)$$

La tercera función de relevancia consiste del costo total de la línea dividido para el número de pares OD que la utilizan.

$$r_l(f_l) = \frac{c_l * f_l}{|\{(s, t) \in \mathbb{R} : x_{st}^e > 0 \text{ para algún } e \in \mathcal{E}_l\}|} \quad (3.15)$$

3.3.3. Heurística 2: Iniciando con el conjunto vacío

En esta heurística se empieza calculando el flujo de costo mínimo para cada par OD, asumiendo que todas las líneas del reservorio están disponibles. Estos valores de flujo son agregados entre pares OD y luego entre líneas, hasta obtener finalmente valores de carga sobre las aristas de la PTN, que expresan la demanda de transporte enrutada de forma óptima si todas las líneas estuvieran disponibles. La heurística consiste en construir progresivamente un conjunto \mathcal{L}_{actual} : de líneas del reservorio seleccionadas para la operación. Al inicio, se tiene $\mathcal{L}_{actual} := \emptyset$ Luego se inicia con un conjunto vacío y en cada iteración se aumenta la frecuencia de la línea que tiene el mayor valor en una función de relevancia. El proceso continúa hasta lograr satisfacer toda la demanda de transporte, expresada como carga en las aristas de la PTN.

ALGORITMO 3.3.2. Heurística 2:

Entrada: Una red PTN y su respectiva red Change and Go, un vector de carga sobre las aristas de la PTN $carga \in \mathbb{Z}^{|E|}$ que expresa la demanda de transporte y que es calculado por el flujo de costo mínimo sobre la red Change and Go con todas las líneas disponibles.

- 1: Inicializar $\mathcal{L}_{actual} := \emptyset$
- 2: **mientras** $\sum_{e \in E} carga_e \neq 0$ **hacer**
- 3: Para cada línea $l \in \mathcal{L}$ cada valor $\Delta_l \in \{1, \dots, \Delta_{m\acute{a}x}\}$ en el que tiene sentido aumentar la frecuencia la l , calcular el valor de la función de relevancia $r_l(\Delta_l)$.
- 4: Seleccionar el par (l, Δ_l) que tenga mayor valor en la función de relevancia, luego sumar Δ_l a la frecuencia de l en el concepto de líneas \mathcal{L}_{actual} .
- 5: Restar de los valores de carga en las aristas de la PTN el flujo de pasajeros que se logra satisfacer con el aumento de frecuencia de la línea
- 6: **fin mientras**
- 7: Si \mathcal{L}_{actual} con las frecuencias asociadas satisface la restricción de presupuesto, retornar este concepto de líneas. Caso contrario, retornar "FALLO", pues la heurística no consiguió construir un concepto de líneas factible.

En esta heurística un mayor valor de la relevancia para un par (l, Δ_l) indica que es conveniente aumentar la frecuencia de la línea en el valor de Δ_l .

Para, el cálculo de la relevancia se emplea la siguiente fórmula:

$$r_l(\Delta_l) = \frac{\sum_{e \in E} \min\{N\Delta_l, x^e\}}{c_l\Delta_l} \quad (3.16)$$

Básicamente, este concepto de relevancia busca priorizar aquellas líneas que transporten más pasajeros y que tengan un menor costo por viaje. Observar que el flujo de un pasajero que utiliza varios arcos de la línea va a ser sumado varias veces. Esto es conveniente, pues la relevancia de la línea será mayor para líneas cuyos pasajeros la utilicen por más tiempo.

Una gran desventaja que presenta esta heurística es que no reporta el valor de la función objetivo del concepto de líneas encontrado, puesto que no se calcula el flujo de pasajeros sobre la red Change and Go asociado al enrutamiento. Para abordar este inconveniente se intentaron dos ideas:

- Se resolvió el modelo LPMTF pero construyendo únicamente los arcos de la red Change and Go asociados a las líneas dentro del concepto de líneas obtenido por la heurística. Adicionalmente, se fijaron sus frecuencias a los valores obtenidos por la heurística.
- Se procedió LPMTF de forma similar, pero se borraron de la red Change and Go asociada a cada par $(s, t) \in \mathcal{R}$ todos los arcos que no fueron utilizados dentro del calculado al inicio del algoritmo.

La desventaja de la primera opción, es que requiere demasiado tiempo de cómputo para algunas instancias. En cuanto a la segunda opción requiere de menos esfuerzo computacional, pero la eliminación de los arcos puede ocasionar que la solución encontrada empeore o se vuelva infactible.

Capítulo 4

Resultados Computacionales

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos al aplicar la heurística 1 con sus tres criterios y la heurística 2, con ambos métodos para encontrar el valor de la función objetivo, sobre cuatro instancias que son descritas en la siguiente sección de este capítulo.

La implementación y la verificación de estos algoritmos fue realizada en dos fases.

La primera fase consta de la creación de la red Change and Go y las heurísticas 1 y 2. Lo anterior fue implementado utilizando cuadernillos de Jupyter notebook, los cuales para sus versiones finales fueron transformados a archivos Python.

En la segunda fase se realizaron las pruebas computacionales de forma secuencial de las cuatro instancias en una máquina virtual del supercomputador “Quinde” del centro de Modelización Matemática en Áreas clave para el desarrollo (MODEMAT). Las características de la máquina virtual son: un sistema operativo Linux CentOS 6 o 7, una arquitectura x86_64 con 8 procesadores Intel (R) Xeon (R) 2.60 GHz y una memoria de 32 GB de memoria RAM. En esta fase se pudieron detectar errores y encontrar estrategias para mejorar los algoritmos ya creados.

4.1. Instancias

En esta sección se describen las 5 instancias que fueron utilizadas para las pruebas computacionales. La primera instancia, la hemos llamado “Toy 0” y fue utilizada a modo de ejemplo en la construcción de la red Change and Go en el Capítulo 3.

Las otras cuatro instancias fueron extraídas del proyecto OpenLinTim. En el proyecto estas instancias son conocidas como “Grid”, “Athens Metro”, “Ring 8x11” y “GoeVB”, a las cuales nos referiremos como Grid, Atenas, Anillo y Gottingen, respectivamente.

4.1.1. Características de las instancias

Toy 0

Esta es la instancia más pequeña de todas y fue utilizada en el [Capítulo 3](#). No se realizan las pruebas computacionales para esta instancia.

Grid

La segunda instancia la denominaremos “Grid”. Esta instancia pertenece al conjunto de instancias simuladas dentro de OpenLinTim.

La red de transporte público de esta instancia es no dirigida y se considera de tamaño mediano. La PTN contiene 25 nodos, 40 arcos, 64 líneas en el reservorio de líneas y 567 pares origen-destino. Un esquema de la red de transporte público de esta instancia se puede ver en la [Figura 4.1](#).

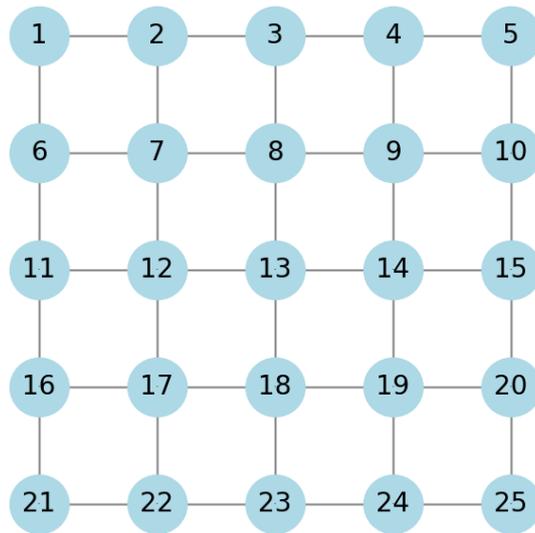


Figura 4.1: Esquema de la PTN de la instancia Grid

Atenas

La tercera instancia la denominaremos “Atenas” y corresponde a una instancia basada en el metro de la ciudad de Atenas.

La red de transporte público de esta instancia es no dirigida y se considera de tamaño grande. La red de transporte público contiene 51 nodos, 52 arcos, 59 líneas en el reservorio de líneas y 2385 pares origen-destino. Un esquema de la red de transporte público de esta instancia se puede ver en la [Figura 4.2](#).

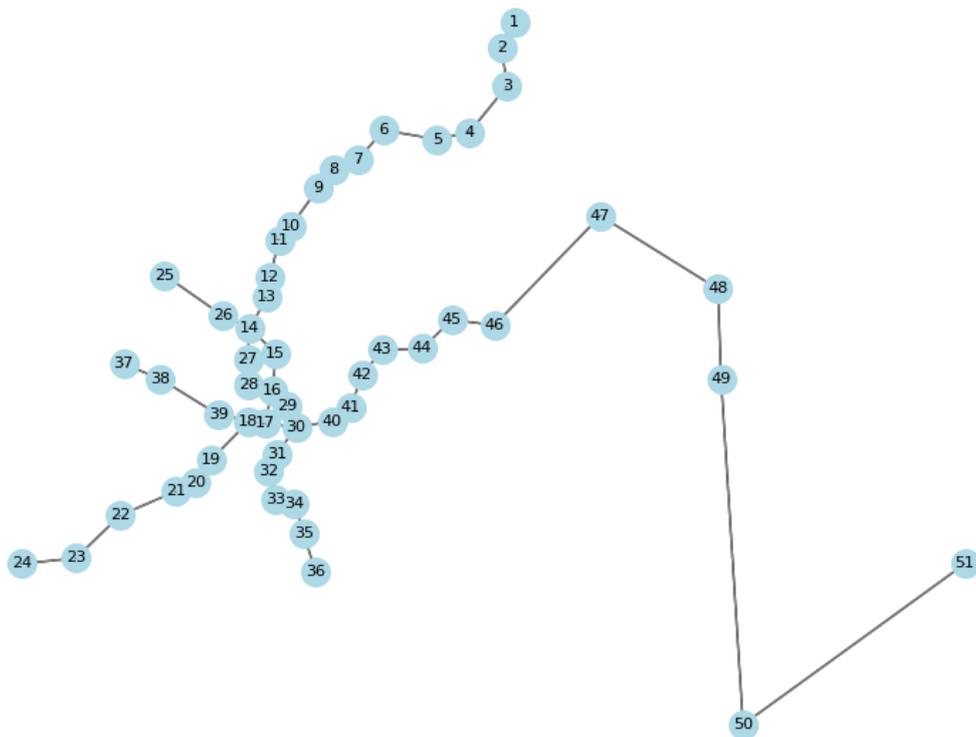


Figura 4.2: Esquema de la PTN de la instancia Atenas

Anillo

La cuarta instancia la denominaremos “Anillo”. Esta instancia pertenece al conjunto de instancias simuladas dentro de OpenLinTim bajo el nombre de “Ring”. En cada par origen-destino se tiene una demanda fraccionaria, esta demanda fue redondeada al inmediato superior para dar sentido de llevar personas completas.

La red de transporte público de esta instancia es no dirigida y se considera de tamaño grande. La red de transporte público contiene 161 nodos, 320 arcos, 62 líneas en el reservorio de líneas y 25760 pares origen-destino. Un esquema de la red de transporte público de esta instancia se puede ver en la [Figura 4.3](#).

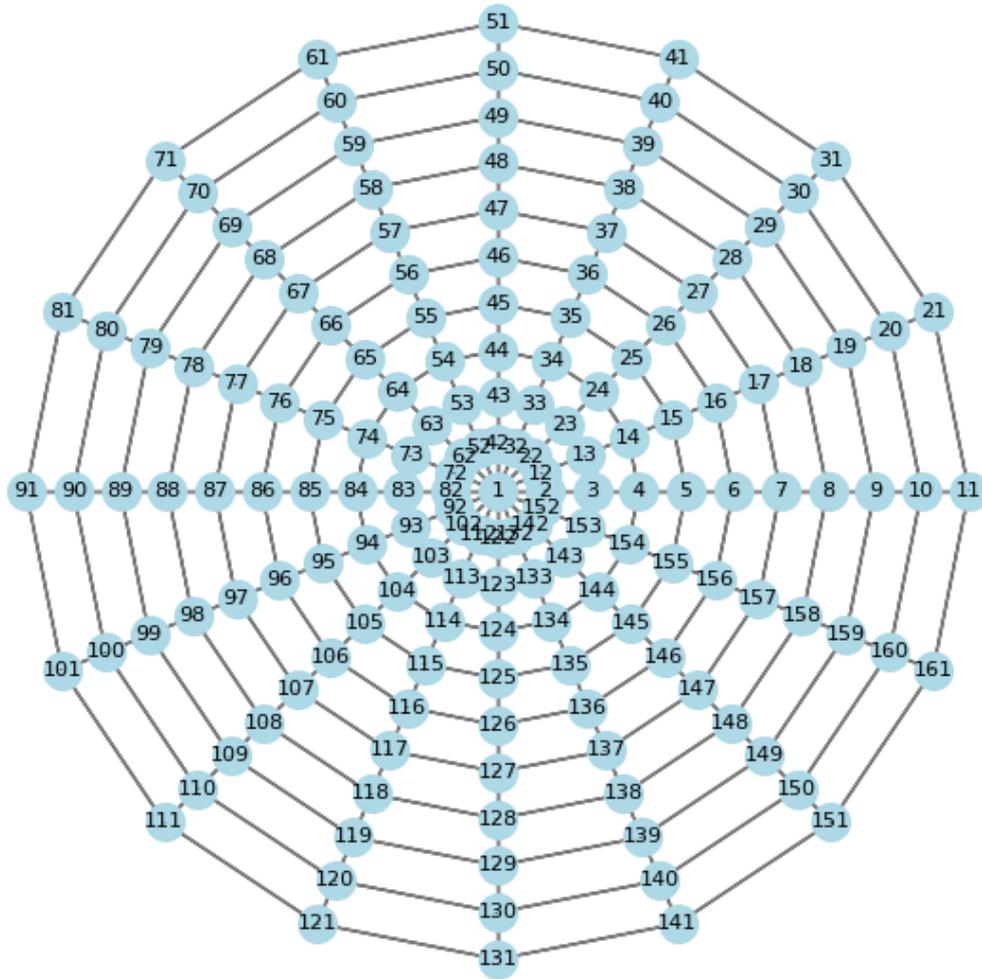


Figura 4.3: Esquema de la PTN de la instancia Anillo

Gottingen

La última instancia denominaremos “Gottingen”. Esta instancia representa la red de buses de Gottingen, Ciudad Alemana en donde se originó el proyecto OpenLinTim.

La red de transporte público de esta instancia es dirigida y se considera de tamaño grande, siendo la más grande de todas instancias utilizadas en este trabajo. La red de transporte público contiene 257 nodos, 548 arcos, 170 líneas en el reservorio de líneas y 58226 pares origen-destino. Un esquema de la red de transporte público de esta instancia se puede ver en la [Figura 4.4](#).

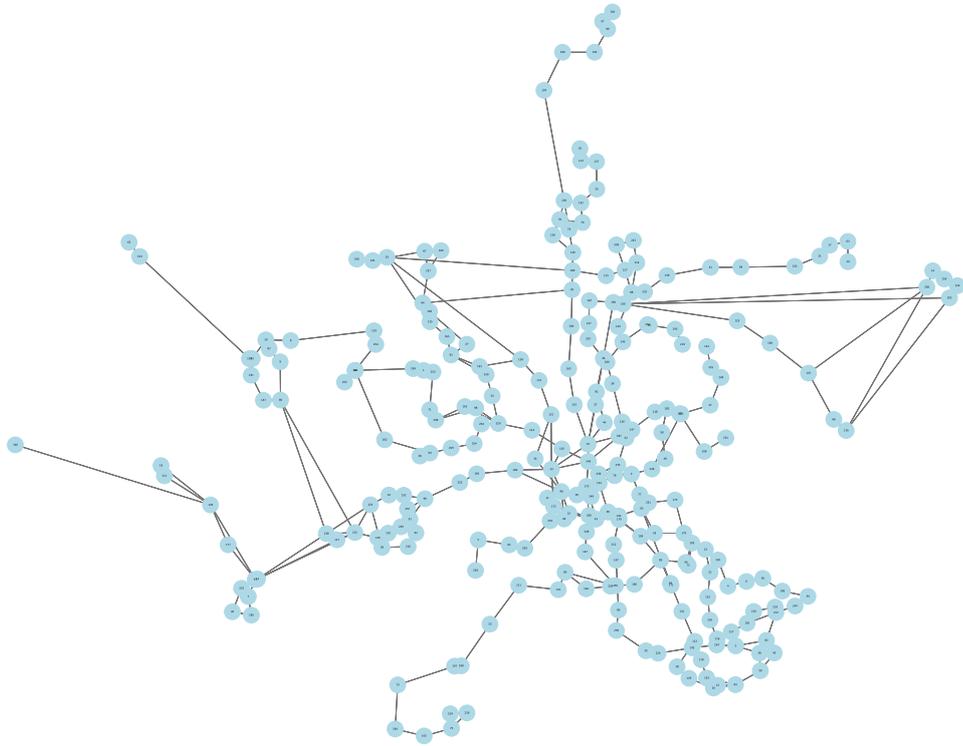


Figura 4.4: Esquema de la PTN de la instancia Gottingen

4.1.2. Características de la PTN

En la [Tabla 4.1](#) se tiene un resumen de las características de la PTN de cada instancia. Adicionalmente, se incluyó el tiempo que se demoró en crear la PTN.

4.1.3. Características de la red Change and Go

Para la implementación de nuestras heurísticas es necesario construir, para cada una de las instancias, la correspondiente red Change and Go. Adicionalmente, las instancias cuyas PTN's sean no dirigidas de-

Cuadro 4.1: Características de las PTN's

Característica	Grid	Atenas	Anillo	Gottingen
Nº de nodos	25	51	161	257
Nº de arcos	40	52	320	548
Nº de líneas en el reservorio	64	59	62	170
Nº de pares origen-destino	567	2385	25760	58226
Tiempo de construcción ptn	0.1357	0.3653	4.7351	7.4952

ben ser transformadas de antemano a su versión dirigida. Con el fin de modelar de forma correcta el flujo sobre un arco, puesto que, el flujo de un arco no siempre va a ser igual al flujo de su arco reverso.

En el [Tabla 4.2](#) se resumen las características principales de la redes Change and Go asociadas a cada instancia:

Cuadro 4.2: Características de las redes Change and Go

Características	Grid	Atenas	Anillo	Gottingen
Nº de nodos ptn	25	51	161	257
Nº de arcos ptn	40	52	320	548
Nº de líneas en el reservorio	64	59	62	170
Nº de pares OD	567	2385	25760	58226
Nodos totales	388	741	830	3365
Nodos change	363	690	669	3108
Nodos OD	25	51	161	257
Arcos totales	6942	17476	6456	75008
Arcos change	5618	14834	3904	65844
Arcos go	598	1262	1214	2948
Arcos OD	726	1380	1338	6216
Capacidad de los vehículos	70	1086	70	50
Budget	1172.16	448.98	—	3792.8
Constante k_1	1	1	1	1
Constante k_2	5	50	5	5
Tiempo de construcción	0.0303	0.0385	0.1921	0.4976

Donde:

- k_1 es un factor que penaliza cada unidad de tiempo de viaje.
- k_2 es un factor que penaliza los trasbordos entre líneas.

4.2. Resultados

4.2.1. Heurística 1

En cada instancia se presentan tres gráficos distintos. En el primer gráfico se representa el tiempo empleado en cada iteración de la heurística. El segundo gráfico ilustra la variación del presupuesto según el concepto de líneas encontrado en cada iteración. Por último, el tercer gráfico exhibe el aumento del valor de la función objetivo en cada iteración.

Para efectuar una comparación, el primer gráfico incorpora una línea roja que representa una fracción del tiempo total empleado en resolver el primer problema de flujo de costo mínimo.

La distinción entre el tiempo de la primera iteración y el tiempo de las iteraciones posteriores radica en que, en el paso 3 del algoritmo 3.3.1, en lugar de calcular el flujo de costo mínimo en su totalidad, únicamente se actualiza el flujo de los pares origen-destino que hacían uso de la línea que fue eliminada.

En el tercer gráfico se representa el presupuesto máximo permitido ("Budget") para la instancia en cuestión. Este presupuesto se obtuvo en una fase posterior a la obtención de las instancias. En esta etapa, se calculó el concepto de líneas de costo mínimo, considerando un enrutamiento inicial. A dicho presupuesto se le incrementó un 10% su valor.

El tiempo máximo de ejecución de cada heurística con su respectivo criterio es de dos horas. Este tiempo no toma en cuenta el tiempo utilizado en calcular el flujo de costo mínimo inicial.

Se aclara que los criterios uno, dos y tres hacen referencia a utilizar las funciones de relevancia 1, 2 y 3 presentadas en [Subsección 3.3.2](#).

Grid

El tiempo empleado para calcular el flujo de costo mínimo en la primera iteración fue de 57.54 segundos. El tiempo indicado en la [Figura 4.5](#) corresponde al 40% del tiempo anterior.

En la [Figura 4.5](#), a primera vista, se observa que los tiempos emplea-

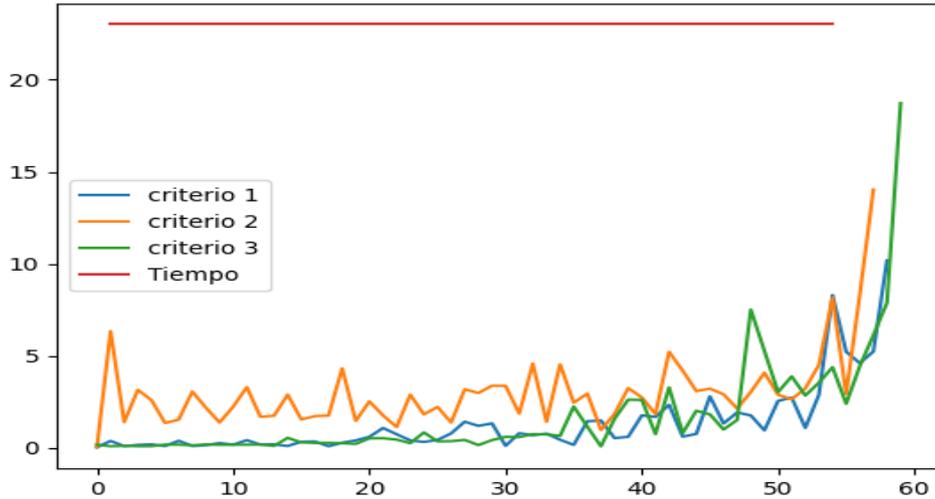


Figura 4.5: Tiempo de cada iteración de la heurística 1 para la instancia Grid

dos aumentan de manera gradual. Esta tendencia se debe al hecho de que en iteraciones más avanzadas contamos con menos líneas disponibles. En consecuencia, se produce una concentración de pasajeros de distintos pares origen-destino en cada línea. Lo que a su vez repercute al momento de recalculer del flujo de costo mínimo para los pares que utilizaban la línea, resultando en un aumento progresivo de los tiempos. Es importante señalar que en el criterio 2 se observa que utiliza mucho tiempo para las iteraciones iniciales. Este incremento sugiere que se está eliminando una línea que es considerablemente costosa en términos monetarios, pero que al mismo tiempo es utilizada por una cantidad moderada de pares origen-destino.

En la figura [Figura 4.6](#) se reporta un presupuesto máximo de 1172.16 unidades monetarias.

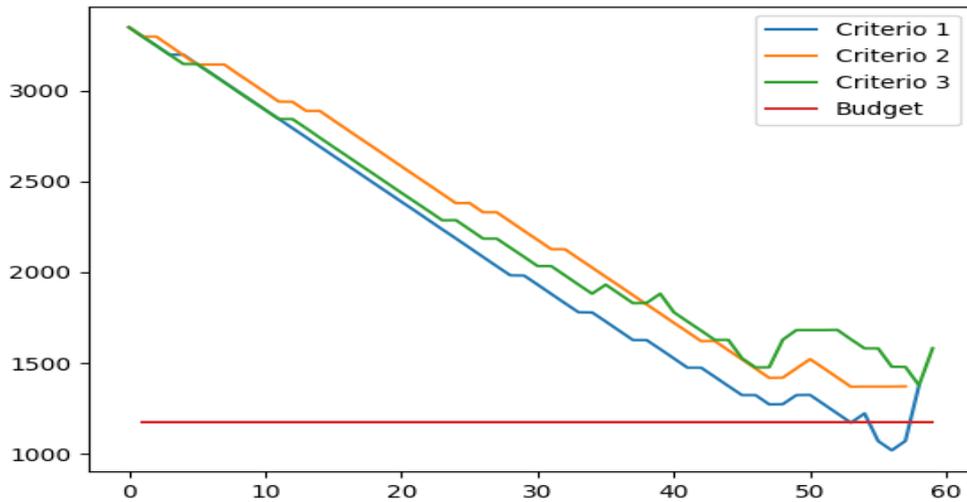


Figura 4.6: Presupuesto utilizado en cada iteración de la heurística 1 para la instancia Grid

En la [Figura 4.7](#), se aprecia un aumento gradual en el valor de la función objetivo. Este fenómeno es coherente, ya que al prohibir una líneas, estamos introduciendo más restricciones en nuestro modelo, lo que conlleva a que el valor óptimo sea igual o mayor al de la iteración anterior. Por otro lado, observamos que el criterio 1 es el que aumenta el valor de función objetivo más lentamente a comparación de los otros dos criterios.

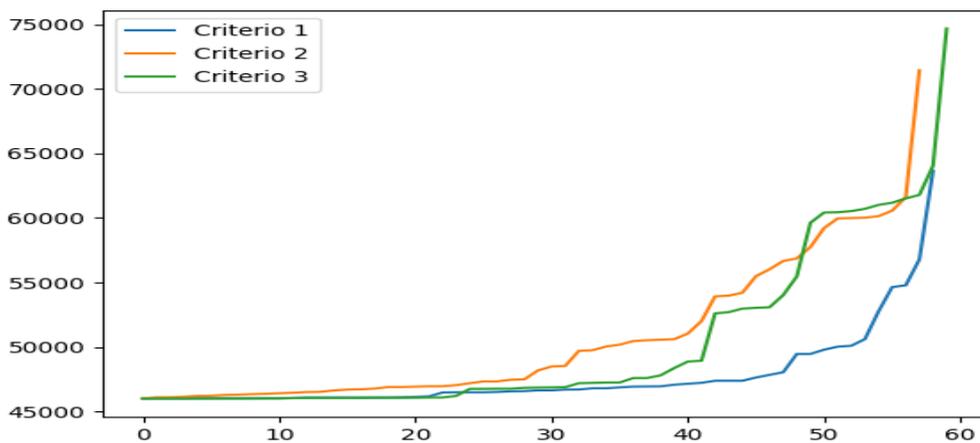


Figura 4.7: valor de la función objetivo en cada iteración de la heurística 1 para la instancia Grid

Los resultados se resumen en la [Tabla 4.3](#). El color verde hace referencia a que se encontró una solución factible y se reporta la mejor solución encontrada respecto al valor de la función objetivo considerando que debe ser factible. El color rojo indica que no se obtuvo una solución factible y se reporta la última solución encontrada.

Cuadro 4.3: Resultados de la heurística 1 para la instancia Grid

	Buget	Objetivo	Tiempo
Criterio 1	1071	54642	135.33
Criterio 2	1372	71435	174.82
Criterio 3	1582	74670	102.40

Atenas

El tiempo empleado para calcular el flujo de costo mínimo en la primera iteración fue de 924.70 segundos. El tiempo indicado en la [Figura 4.8](#) corresponde al 40% del tiempo anterior.

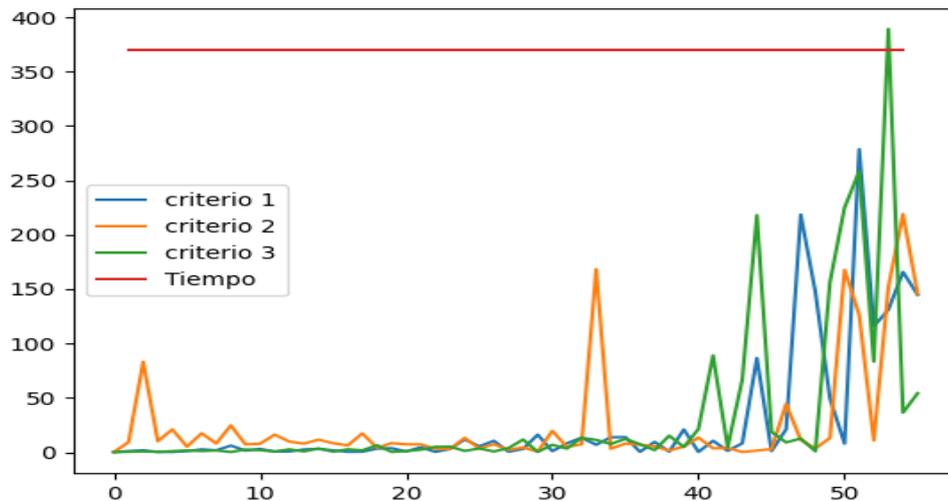


Figura 4.8: Tiempo de cada iteración de la heurística 1 para la instancia Atenas

El comportamiento del criterio 2 sigue siendo interesante. En este caso presenta 2 picos al inicio a la mitad de las iteraciones.

En la figura [Figura 4.9](#) se reporta un presupuesto máximo de 448.987

unidades monetarias. Este presupuesto es tan restrictivo que la heurística no logra encontrar soluciones factibles.

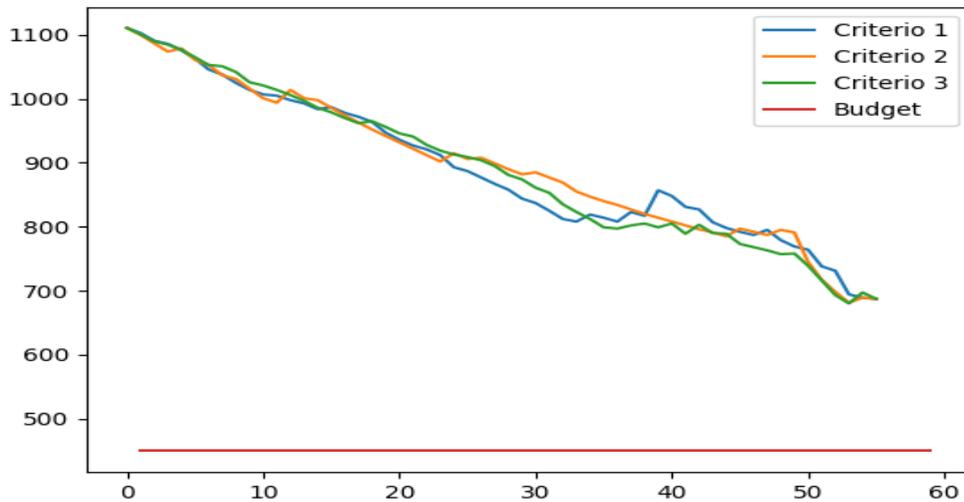


Figura 4.9: Presupuesto utilizado en cada iteración de la heurística 1 para la instancia Atenas

En este caso, en la [Figura 4.10](#) se ve que el valor de la función objetivo permanece constante, con un valor igual a 11694185.0, durante todas las iteraciones. El motivo de esto puede darse porque en la mayoría de nodos tienen una gran cantidad de líneas haciendo que los pasajeros no cambien el camino que utilizan en la PTN para trasladarse, sino que, se mantienen en el mismo camino pero cambian las líneas que utilizan.

A continuación se tiene un conjunto de pares ordenados $(v, n) \in V \times \mathbb{N}$ que simboliza el nodo y el número de líneas que pasan por dicho nodo. En este conjunto se ve que más de la mitad de los nodos tienen más de 9 líneas a disposición para elegir. $\{(48;1), (49;1), (50;1), (51;1), (37;2), (38;2), (39;2), (46;2), (47;3), (25;4), (40;4), (41;4), (42;4), (43;4), (44;4), (45;4), (36;5), (26;7), (24;8), (1;9), (2;9), (3;9), (4;9), (27;10), (28;10), (31;10), (32;10), (33;10), (34;10), (35;10), (29;11), (5;16), (21;16), (22;16), (23;16), (30;17), (6;22), (19;22), (20;22), (8;26), (9;26), (7;27), (17;27), (18;27), (15;28), (11;29), (12;29), (13;29), (10;31), (14;42), (16;42)\}$

En la [Tabla 4.4](#) se ve tienen los resultados de la heurística. En este caso no se obtuvo ninguna solución factible.

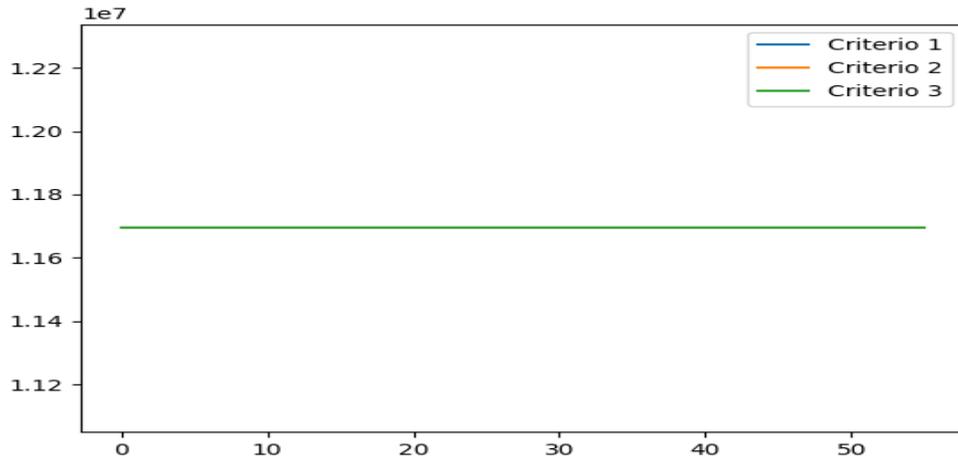


Figura 4.10: valor de la función objetivo en cada iteración de la heurística 1 para la instancia Atenas

Cuadro 4.4: Resultados de la heurística 1 para la instancia Atenas

	Buget	Objetivo	Tiempo
Criterio 1	687	11694185	1568.29
Criterio 2	687	11694185	1484.70
Criterio 3	687	11694185	1793.44

Anillo

El tiempo empleado para calcular el flujo de costo mínimo en la primera iteración fue de 3984.67 segundos. El tiempo indicado en la [Figura 4.11](#) corresponde al 30% del tiempo anterior.

En la [Figura 4.11](#) se ven los mismos patrones para cada criterio.

Se resalta que en esta instancia en la [Figura 4.12](#) no se muestra el presupuesto. El motivo es que se tenía un presupuesto de 2743.18 pero fue calculado cuando la instancia tenía los valores de la demanda fraccionadas y no al momento de elevarlos al inmediato superior.

En la [Figura 4.12](#) criterio 2 tiene el comportamiento más irregular de los 3 criterios.

En la [Figura 4.13](#) se muestra como el Criterio 3 empieza a tener valores superiores en la función objetivo con respecto al criterio 1, se ve como el abaratar los costos operativos reduciendo el presupuesto eleva la inconformidad del pasajero.

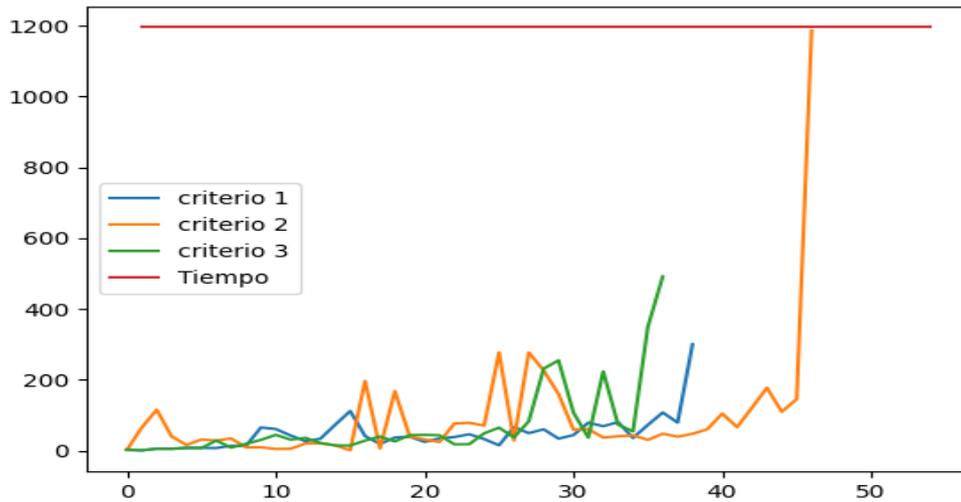


Figura 4.11: Tiempo de cada iteración de la heurística 1 para la instancia Anillo

La [Tabla 4.5](#) muestra los mejores resultados encontrados respecto al budget.

Cuadro 4.5: Resultados de la heurística 1 para la instancia Anillo

	Buget	Objetivo	Tiempo
Criterio 1	11959	703393	1873.76
Criterio 2	12913	738707	4446.38
Criterio 3	11151	732587.5	2589.03

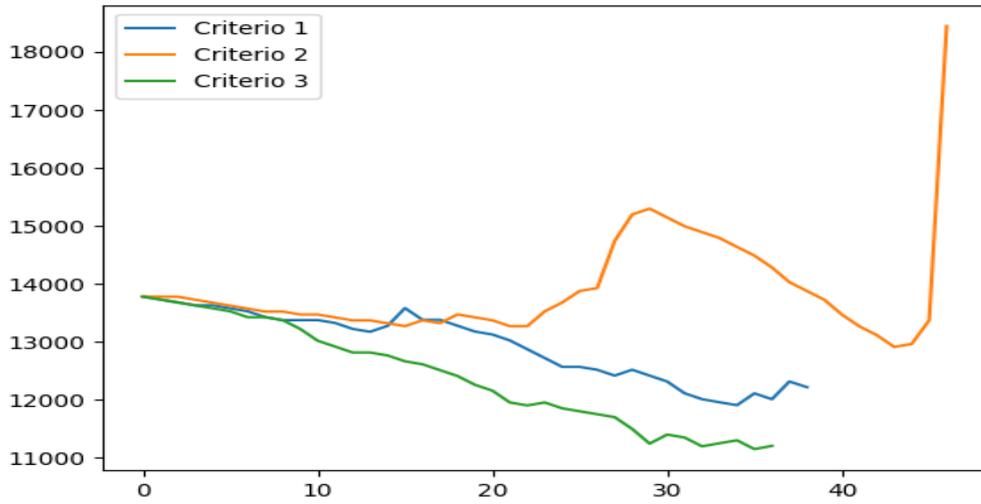


Figura 4.12: Presupuesto utilizado en cada iteración de la heurística 1 para la instancia Anillo

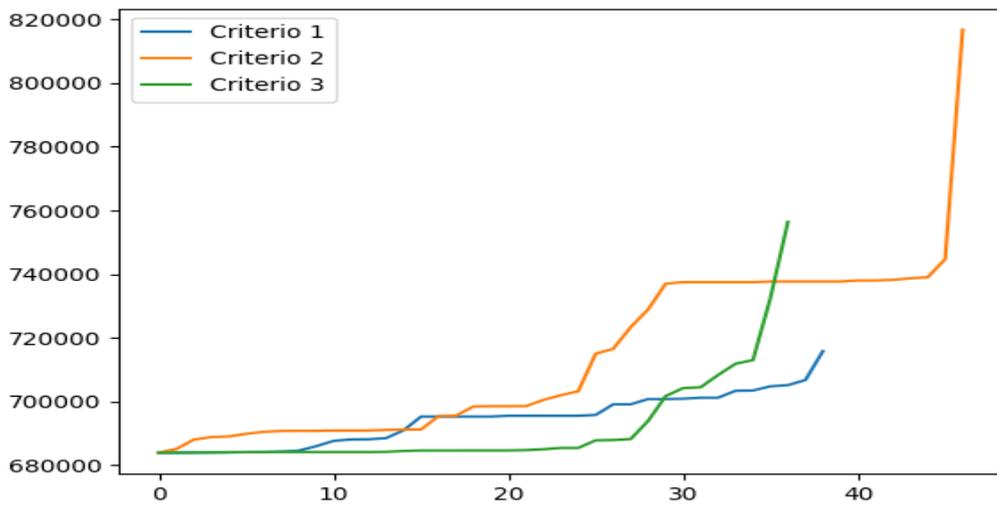


Figura 4.13: valor de la función objetivo en cada iteración de la heurística 1 para la instancia Anillo

Gottingen

El tiempo empleado para calcular el flujo de costo mínimo en la primera iteración fue de 133954.504587 segundos un poco más de 37.2 horas. Este comportamiento era esperado por la gran cantidad de pares origen-destino presentes en la instancia. El tiempo indicado en la [Figura 4.14](#) corresponde al 1 % del tiempo anterior.

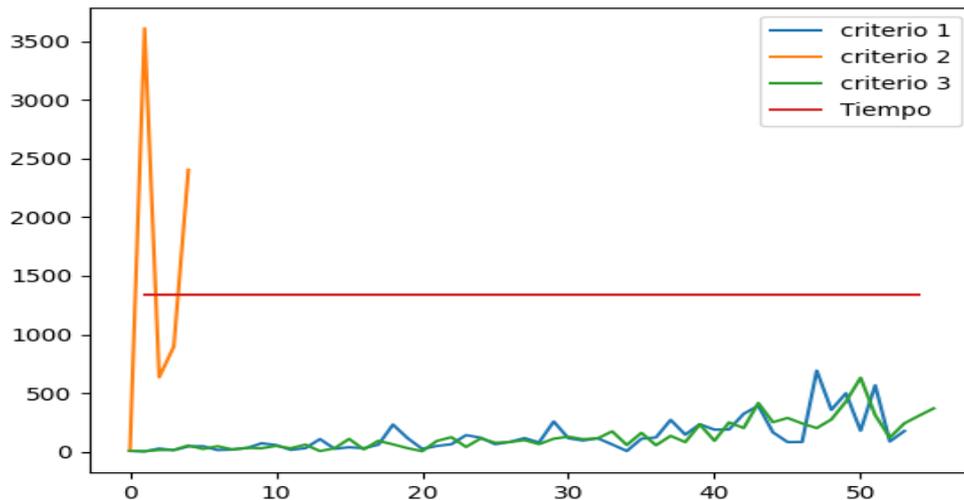


Figura 4.14: Tiempo de cada iteración de la heurística 1 para la instancia Gottingen

Si nos fijamos únicamente en el comportamiento del criterio 2 vemos que es muy malo, las razones son porque en la primera iteración se toma más de la mitad del tiempo en recalcular el flujo debido a que elimina una línea con muchos pares origen-destino. La segunda razón es el incremento de la función objetivo que es muy elevado. Por lo anterior podemos decir que esta heurística está sacando líneas que benefician al pasajero.

En la figura [Figura 4.15](#) se reporta un presupuesto máximo de 3792.80 unidades monetarias. No hay que dejarse engañar por la entre los resultados y el presupuesto máximo, el motivo es que la heurística eliminó al rededor de 45 líneas de 170, es decir, aún se tenían líneas posibles para eliminar.

El comportamiento de las otras dos heurísticas concuerda con las instancias anteriores, ya que se observa un aumento gradual en el tiempo

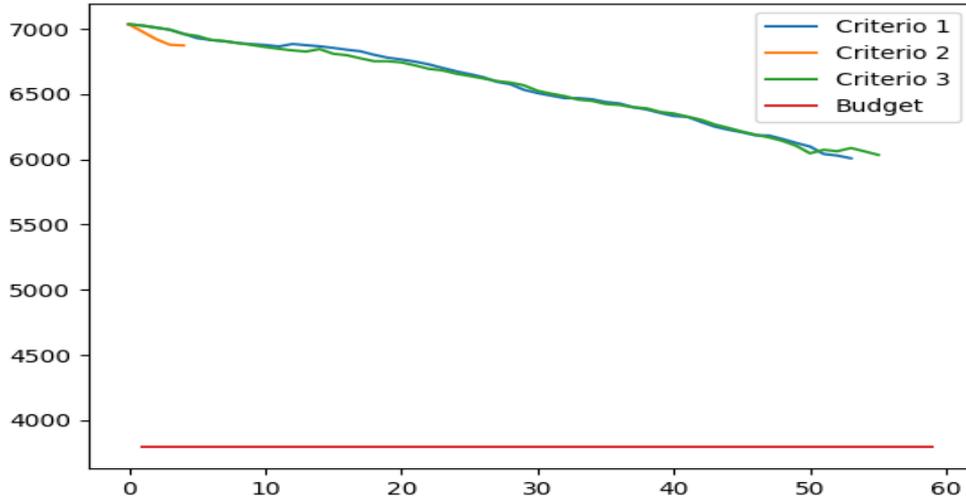


Figura 4.15: Presupuesto utilizado en cada iteración de la heurística 1 para la instancia Gottingen

de cálculo en cada iteración, además de una disminución progresiva en el presupuesto utilizado y un aumento gradual en el valor de la función objetivo. Lamentablemente ningún criterio obtuvo una solución factible dentro del tiempo máximo de dos horas de cómputo ver en la [Tabla 4.6](#).

Cuadro 4.6: Resultados de la heurística 1 para la instancia Gottingen

	Buget	Objetivo	Tiempo
Criterio 1	6008	21159996.5	7300.72
Criterio 2	6873	21161094	7559.67
Criterio 3	6034	21158740.5	7489.31

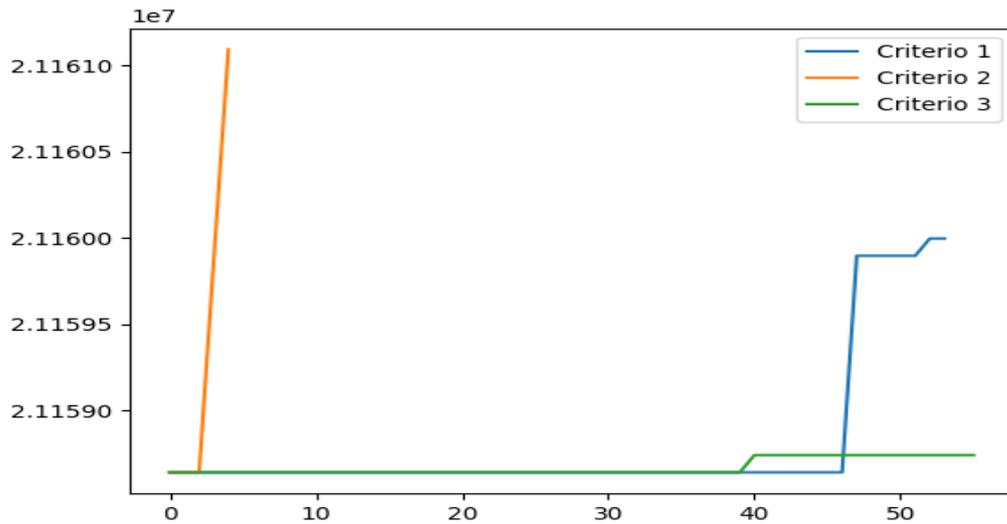


Figura 4.16: valor de la función objetivo en cada iteración de la heurística 1 para la instancia Gottingen

4.2.2. Heurística 2

El análisis de esta heurística es más simple comparado con la anterior heurística, puesto que solamente se cuenta con una solución. Por lo tanto, para cada instancia se reporta una tabla con la solución de la heurística. Pintado de color verde si el presupuesto hallado es menor al presupuesto máximo establecido y de color rojo caso contrario. Al finalizar se tiene un análisis del comportamiento de la heurística.

Cuadro 4.7: Resumen de las soluciones de la heurística 2

Grid				
	Buget	Objetivo	T. heurística	T. hallar el objetivo
Método 1	914	48268	0.23	45.05
Método 2	914	49183	0.23	19.66
Atenas				
Método 1	633	12325576	0.33	355.87
Método 2	633	12413035	0.33	183.29
Anillo				
Método 1	12049	————	3.06	————
Método 2	12049	687949	3.06	5202.61
Gottinten				
Método 1	3759	————	6.68	————
Método 2	3759	————	6.68	————

Cuadro 4.8: Resumen del tiempo necesario para hallar el flujo de costo mínimo inicial

	Grid	Atenas	Ring	Gottingen
Tiempo para resolver el primer flujo de costo mínimo	57.54	924.69	3984.66	133954.50

Primero se debe apreciar que en tres de las cuatro instancias se tienen presupuestos menores a los encontrados en la heurística 1. Segundo el tiempo de solución de la heurística es muy pequeño, se debe recordar que estos tiempos no toman en cuenta el tiempo usado para calcular el flujo de costo mínimo inicial mostrado en [Tabla 4.8](#). Tercero, esta heurística carecía de una forma de encontrar el valor de la función objetivo por lo que se recurrió a los métodos explicados en el [Capítulo 3](#). Estos métodos terminaron siendo muy grandes y no se pudo hallar el valor objetivo de la solución para la instancia de Gottingen. Cuatro se aprecia que el valor objetivo del método 2 es mayor al valor objetivo del método 1 a cambio el tiempo de solución de este método es menor por tratarse de un modelo más pequeño.

Analizando las soluciones se tienen los siguientes puntos a considerar.

- En tres de las cuatro instancias, los presupuestos son menores en comparación con los valores encontrados en la heurística 1.
- El tiempo de ejecución de la heurística es sorprendentemente corto. Es relevante recordar que estos tiempos no incluyen el tiempo necesario para calcular el flujo de costo mínimo inicial, los tiempos utilizados para el flujo de costo mínimo están resumidos en la [Tabla 4.8](#).
- La heurística carecía de un método para determinar el valor de la función objetivo, lo que llevó a utilizar los métodos descritos en el [Capítulo 3](#). Sin embargo, estos métodos resultaron ser computacionalmente demandantes para las instancias grandes como la Anillo y Gottingen.
- Se observa que el valor objetivo del método 2 supera al valor objetivo del método 1, sin embargo, el tiempo de resolución de este método es menor debido a ser un modelo más pequeño.

Capítulo 5

Conclusiones y Recomendaciones

Luego de analizar los resultados computacionales de las instancias se puede determinar lo siguiente:

1. El criterio 2 para la heurística 1 tiene el peor comportamiento entre todos los criterios. La primera razón es que al empezar las iteraciones esta empieza eliminando líneas que tienen una considerable cantidad de pares origen-destino haciendo que la heurística sea más lenta. La segunda razón es el crecimiento en el valor de la función objetivo. En la mayoría de las instancias se da que esta heurística empieza a aumentar su valor de la función objetivo desde iteraciones más tempranas, además, este crecimiento es más acelerado en comparación con los otros dos criterios.
2. El valor del presupuesto utilizado en la solución de la heurística 2 es el mejor de todos. Por otro lado, incremento del valor de la función objetivo con los criterios 1 y 3 es despacio en la heurística 1. Esto sugiere la posibilidad de desarrollar una nueva heurística que combine las heurísticas presentes en este trabajo. Esta nueva heurística consistiría en aplicar primero la heurística 2 a la instancia. De esta manera, la heurística 2 nos proporciona un concepto de líneas que podría incorporarse a la heurística 1, con el propósito de reducir el presupuesto en caso de ser necesario. Se espera que, al hacerlo, el valor de la función objetivo se mantenga constante o incremente

lentamente.

3. Debido a la rapidez de la heurística 2 se la puede utilizar en cada iteración de la heurística 1, es decir, la heurística 1 encuentra un flujo de costo mínimo que se lo pasa a la heurística 2 para hallar mejores frecuencias de las líneas posibles.

Referencias bibliográficas

- [1] Ahuja, R., Magnanti, T., y Orlin, J. *Network Flows*. Prentice-Hall, Inc, 1988.
- [2] Bull, S. H., Rezanova, N. J., Lusby, R. M., y Larsen, J. An applied optimization based method for line planning to minimize travel time. *DTU Management Engineering*, 2016.
- [3] Bussieck, M. *Optimal lines in public rail transport*. PhD thesis, Universität Braunschweig, 1998.
- [4] Chua, T. A. The planning of urban bus routes and frequencies: A survey. *Transportation*, 12(2):147–172, 1984.
- [5] Claessens, M. T., van Dijk, N. M., y Zwaneveld, P. J. Cost optimal allocation of rail passenger lines. *European Journal of Operational Research*, 110(3):474–489, 1998.
- [6] Guihaire, V. y Hao, J.-K. Transit network design and scheduling: A global review. *Transportation Research Part A: Policy and Practice*, 42:1251–1273, 12 2008.
- [7] Israeli, Y. y Ceder, A. Transit route design using scheduling and multiobjective programming techniques. En Daduna, J. R., Branco, I., y Paixão, J. M. P., editors, *Computer-Aided Transit Scheduling*, págs. 56–75, Berlin, Heidelberg, 1995. Springer Berlin Heidelberg.
- [8] Müller-Hannemann, M., Rückert, R., Schiewe, A., y Schöbel, A. Estimating the robustness of public transport schedules using machi-

- ne learning. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 137:103566, 2022.
- [9] Nachtigall, K. y Jerosch, K. Simultaneous Network Line Planning and Traffic Assignment. En Fischetti, M. y Widmayer, P., editors, *8th Workshop on Algorithmic Approaches for Transportation Modeling, Optimization, and Systems (ATMOS'08)*, volume 9 of *OpenAccess Series in Informatics (OASICS)*, Dagstuhl, Germany, 2008. Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum fuer Informatik.
- [10] Pfetsch, M. E. y Borndörfer, R. Routing in line planning for public transport. En *Operations Research Proceedings 2005: Selected Papers of the Annual International Conference of the German Operations Research Society (GOR), Bremen, September 7–9, 2005*, págs. 405–410. Springer, 2006.
- [11] R. Borndörfer, M. Grötschel, M. P. *A column-generation approach to line planning in public transport*. Transp. Sci, Kaiserslautern, Alemania, 2007.
- [12] Schiewe, A. Openlintim. <https://gitlab.rlp.net/lintim/>, 2022.
- [13] Schiewe, A., Schiewe, P., y Schmidt, M. The line planning routing game. *European Journal of Operational Research*, 274(2):560–573, 2019.
- [14] Schiewe, P. *Integrated Optimization in Public Transport Planning*. Springer, Kaiserslautern, Alemania, 2020.
- [15] Schiewe, P. y Schöbel, A. Integrated optimization of sequential processes: General analysis and application to public transport. *EURO Journal on Transportation and Logistics*, 11:100073, 2022.
- [16] Schmidt, M. y Schöbel, A. The complexity of integrating passenger routing decisions in public transportation models. *Networks*, 65(3):228–243, 2015.
- [17] Schöbel, A. Line planning in public transportation: models and methods. *OR Spectrum*, 34(3):491–510, May 2011.

- [18] Scholl, S. *Customer-oriented line planning*. PhD thesis, Technische Universität Kaiserslautern, 2005.
- [19] Schrijver, A. *Theory of Linear and Integer Programming*. Wiley, 1998.
- [20] Schöbel, A. y Scholl, S. Line planning with minimal transfers. En *Workshop on Algorithmic Methods and Models for Optimization of Railways*, vol. 6901, 2006.