

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA

DISEÑO Y SIMULACIÓN DE UNA MESA VIBRATORIA PROTOTIPO CON SEÑALES DE ENTRADA SENOIDAL

DISEÑO DE MATERIALIZACIÓN DE UNA MESA VIBRATORIA PROTOTIPO CON SEÑALES DE ENTRADA SENOIDAL

TRABAJO DE INTEGRACIÓN CURRICULAR PRESENTADO COMO
REQUISITO PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE INGENIERO MECÁNICO

JONATHAN PAUL ANRANGO CATUCUAMBA

jonathan.anrango@epn.edu.ec

DIRECTOR: MARIO GERMAN GRANJA RAMIREZ

mario.granja@epn.edu.ec

DMQ, Marzo 2023

CERTIFICACIONES

Yo, Jonathan Paul Anrango Catucuamba declaro que el trabajo de integración curricular aquí descrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y, que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

Jonathan Paul Anrango Catucuamba

Certifico que el presente trabajo de integración curricular fue desarrollado por Jonathan Paul Anrango Catucuamba, bajo mi supervisión.

Ing. Mario Germán Granja Ramírez M.Sc.
DIRECTOR

DECLARACIÓN DE AUTORÍA

A través de la presente declaración, afirmamos que el trabajo de integración curricular aquí descrito, así como el (los) producto(s) resultante(s) del mismo, son públicos y estarán a disposición de la comunidad a través del repositorio institucional de la Escuela Politécnica Nacional; sin embargo, la titularidad de los derechos patrimoniales nos corresponde a los autores que hemos contribuido en el desarrollo del presente trabajo; observando para el efecto las disposiciones establecidas por el órgano competente en propiedad intelectual, la normativa interna y demás normas.

Jonathan Paul Anrango Catucuamba

Ing. Mario Germán Granja Ramírez M.Sc

DEDICATORIA

Dedico este trabajo de integración curricular primeramente a Dios por la salud, sabiduría, fortaleza e inteligencia brindada en todo el transcurso de la carrera. Para mis ángeles de la guarda José María Catucuamba y María Ávila, que desde el cielo me está cuidando, guiando y dándome las fuerzas para seguir cumpliendo mis sueños. También dedico a mis amados padres María Clemencia Catucuamba y Héctor Anrango que han sido los factores más importantes para que esto sea posible, a mis queridos hermanos que siempre han sido un ejemplo para seguir y siempre han estado conmigo cuidándome e inculcándome en ser una buena persona y buen hermano. Al resto de la familia que ha sido un factor fundamental en esta etapa de mi vida, pero en especial a dos mujeres maravillosas (mi madre y mi abuelita) que han estado junto a mí en todo momento y que gracias a ellas he encontrado el cariño, la fuerza, y las ganas para seguir adelante y no decaer en los momentos complicados y de esa manera seguir creyendo que todo lo que nos proponamos se puede llegar a ser en esta vida juntos.

Jonathan

AGRADECIMIENTO

Agradecer a la Escuela Politécnica Nacional por haberme permitido ser parte de sus filas y formarme como todo un profesional íntegro y capaz de desenvolverse a las adversidades del ámbito laboral.

A los profesores con los cuales compartí muchas horas de clases durante este trayecto de estudios quienes supieron transmitirme sus conocimientos de una manera eficaz y concisa, generando día a día un deseo de aprender y mejorar personalmente como profesionalmente.

A mi director de tesis, Ing. Mario Granja, MSc., por los consejos, recomendaciones, confianza y sobre todo el apoyo absoluto brindado en la elaboración del presente trabajo.

A mis padres y familia, por el apoyo incondicional brindado en todo momento, que, pese a sus esfuerzos y sacrificios, siempre supieron darme una motivación constante, y que gracias a ellos poseo unos valores fundamentales que han sido un pilar fundamental en la forma de ser de mi persona en estos días. Todo se lo debo a ellos y esto va dedicado a ellos con mucho cariño.

A todos esos amigos y compañeros que conocí en la etapa universitaria con quienes se compartió risas, lagrimas, temores y sobre todo momentos inolvidables durante el transcurso de la vida universitaria. Gracias a todos por esos bellos momentos y que gracias a esos amigos la etapa universitaria se hace más bonita.

Jonathan

INDICE DE CONTENIDO

CERTIFICACIONES	I
DECLARACIÓN DE AUTORÍA	II
DEDICATORIA	III
AGRADECIMIENTO	IV
INDICE DE CONTENIDO.....	V
INDICE DE FIGURAS	VII
INDICE DE TABLAS	VIII
INDICE DE ECUACIONES	VIII
RESUMEN.....	X
ABSTRACT.....	XI
1. DESCRIPCIÓN DEL COMPONENTE DESARROLLADO	1
1.1 Objetivo general.....	2
1.2 Objetivos específicos	2
1.3 Alcance	2
1.4 MARCO TEÓRICO	3
1.4.1 Vibraciones mecánicas	3
1.4.2 Sistema masa-resorte-amortiguador.....	3
1.4.3 Mesa vibradora unidireccional	5
1.4.4 Análisis en el dominio del tiempo para un modelo de un grado de libertad	5
1.4.5 Resonancia	6
2. METODOLOGÍA.....	7
2.1. Planteamiento del modelo matemático.....	7
2.1.1. Análisis de cargas actuantes en el sistema masa – resorte – amortiguador	7
2.1.1.1. Fuerza inercial.....	9
2.1.1.2. Fuerza elástica	9
2.1.1.2.1. Configuración de resortes en serie	10
2.1.1.2.2. Configuración de resortes en paralelo.....	12
2.1.1.3. Fuerza amortiguadora	14
2.1.1.4. Fuerza excitadora armónica externa	14
2.1.2. Análisis dinámico en el sistema masa – resorte – amortiguador.....	14
2.1.3. Solución a la ecuación diferencial lineal descrita para el comportamiento dinámico que posee un sistema masa – resorte – amortiguador.....	15
2.1.3.1. Respuesta en estado transitorio (homogénea).....	16

2.1.3.1.1.	Caso 1: Sistema sobreamortiguado	18
2.1.3.1.2.	Caso 2: Sistema críticamente amortiguado.....	19
2.1.3.1.3.	Caso 3: Sistema Sub amortiguado.....	20
2.1.3.2.	Respuesta en estado estable (no homogénea).....	23
2.2.	Determinación del factor de amortiguamiento	26
2.2.1.	Decremento logarítmico.....	27
2.2.1.1.	Decremento logarítmico entre dos amplitudes sucesivas.....	27
2.2.1.2.	Decremento logarítmico entre dos amplitudes distantes.....	29
2.3.	Factor de Magnificación (Amplificación) Dinámica	31
2.3.1.	Caso 1: $\omega/\omega_n \rightarrow 0$	32
2.3.2.	Caso 2: $\omega/\omega_n \cong 1$	32
2.3.3.	Caso 3: $\omega/\omega_n \rightarrow \infty$	33
2.4.	Equilibrio de fuerzas en el sistema.....	34
2.4.1.	Zona antes de la Resonancia ($\omega/\omega_n < 1$).....	34
2.4.2.	Zona de Resonancia ($\omega/\omega_n = 1$).....	35
2.4.3.	Zona después de la Resonancia ($\omega/\omega_n \gg 1$).....	35
3.	RESULTADOS, CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	36
3.1.	Resultados.....	36
3.1.1.	Respuesta a la ecuación diferencial derivada del modelo matemático.	36
3.1.2.	Ecuación para el factor de amortiguamiento y su relación con el decremento logarítmico.	38
3.1.3.	Características de la ecuación para el factor de magnificación (amplificación) dinámica.39	
3.1.4.	Características de cada zona de la resonancia a partir del equilibrio de fuerzas. 41	
3.2.	Discusión	42
3.3.	Conclusiones	42
3.4.	Recomendaciones	43
4.	REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	43

INDICE DE FIGURAS

Figura 1. Sistema Masa-Resorte-Amortiguador.	4
Figura 2. Sistema mecánico con señal de entrada senoidal.	4
Figura 3. Mesa Vibratoria.	5
Figura 4. Sistema mecánico en el dominio del tiempo.	6
Figura 5. Elementos que compone un sistema masa resorte amortiguador.....	7
Figura 6. Diagrama de cuerpo libre de las fuerzas actuantes en el sistema.	8
Figura 7. Configuración en serie.	10
Figura 8. Diagrama de cuerpo libre de la configuración en serie de los resortes.	11
Figura 9. Configuración en paralelo.	12
Figura 10. Diagrama de cuerpo libre de la configuración de resortes en paralelo.	13
Figura 11. Respuesta a la ecuación diferencial lineal.	15
Figura 12. Respuesta al sistema sobre amortiguado.	19
Figura 13. Respuesta al sistema críticamente amortiguado.	19
Figura 14. Respuesta al sistema críticamente amortiguado.	20
Figura 15. Respuesta a los distintos casos de amortiguamiento.	21
Figura 16. Razón de amortiguamiento para un sistema sub amortiguado.	26
Figura 17. Respuesta del decremento logarítmico.	27
Figura 18. Respuesta al decremento logarítmico para amplitudes distantes.	29
Figura 19. Factor de Magnificación dinámica.	33
Figura 20. a) Esquema vectorial de las Fuerzas que intervienen en el sistema. b) Fuerzas.	34
Figura 21. Esquema del polígono de fuerzas antes de la resonancia.	34
Figura 22. Esquema del polígono de fuerzas en la resonancia.	35
Figura 23. Esquema del polígono de fuerzas después de la resonancia.	36
Figura 24. Desfase entre desplazamiento, velocidad y aceleración.	38

INDICE DE TABLAS

Tabla 1. Respuestas para los distintos sistemas de amortiguamiento tanto para el estado estable como transitorio.	37
Tabla 2. Relación entre el decremento logarítmico y el factor de amortiguamiento. ...	39
Tabla 3. Factor de magnificación para los distintos casos.	40
Tabla 4. Características de cada zona de la resonancia.	41

INDICE DE ECUACIONES

Ecuación 1. EDO sistema masa-resorte-amortiguador.....	4
Ecuación 2. EDO sistema mecánico con entrada senoidal.	5
Ecuación 3. Ley fundamental de Newton:	9
Ecuación 4. Deflexión o alargamiento estático.....	9
Ecuación 5. Fuerza Elástica.....	10
Ecuación 6. Deflexión estática total del sistema.	11
Ecuación 7. Configuración para resortes en serie.	12
Ecuación 8. Ecuación para resortes en paralelo.....	13
Ecuación 9. Configuración para resortes en paralelo.	13
Ecuación 10. Fuerza de amortiguación.	14
Ecuación 11. Fuerza excitadora externa.	14
Ecuación 12. Ecuación general de un sistema masa - resorte - amortiguador.....	15
Ecuación 13. Respuesta general a la ecuación diferencial lineal.	16
Ecuación 14. Ecuación diferencial en estado transitorio.....	16
Ecuación 15. Función exponencial.	16
Ecuación 16. Primera derivada de la función exponencial	16
Ecuación 17. Segunda derivada de la función exponencial.....	16
Ecuación 18. Expresión resultante.	17
Ecuación 19. Raíces de la ecuación diferencial lineal parte homogénea.....	17
Ecuación 20. Radical encargado en determinar el movimiento.....	17
Ecuación 21. Amortiguamiento Crítico.	18
Ecuación 22. Respuesta de un sistema sobre amortiguado.....	18
Ecuación 23. Respuesta al sistema críticamente amortiguado.	19
Ecuación 24. Raíces del sistema subamortiguado.	20
Ecuación 25. Respuesta al sistema subamortiguado en función de 2 constantes.....	20
Ecuación 26. Respuesta de la ecuación diferencial homogénea simplificada.	22

Ecuación 27. Respuesta a la ecuación diferencial homogénea en el dominio del tiempo.	22
Ecuación 28. Expresión para la Amplitud del sistema.	22
Ecuación 29. Ecuación para el ángulo de fase.	23
Ecuación 30. Respuesta a la ecuación diferencial no homogénea (particular)	23
Ecuación 31. Respuesta a la ecuación diferencial en estado estacionario en el dominio del tiempo.	25
Ecuación 32. Expresión para el ángulo de desfase.	26
Ecuación 33. Respuesta general a la ecuación diferencial en el dominio del tiempo.	26
Ecuación 34. Expresión para el decremento logarítmico.	27
Ecuación 35. Ecuación general para movimiento oscilatorio.	27
Ecuación 36. Razón logarítmica entre dos amplitudes sucesivas.	29
Ecuación 37. Razón logarítmica conocida dos amplitudes o picos distantes en n ciclos.	30
Ecuación 38. Número de ciclos.	30
Ecuación 39. Intervalo de tiempo vida media.	31
Ecuación 40. Factor de amortiguamiento en función de la razón logarítmica.	31
Ecuación 41. Respuesta al Factor de magnificación dinámica.	32

RESUMEN

Las vibraciones mecánicas en mesas vibratorias con señales de entrada senoidal son el caso más típico que se presenta en la industria. Las vibraciones están presentes en los equipos rotatorios como son bombas centrifugas, turbinas, lavadoras y clasificadoras y es muy importante conocer la influencia que tiene la vibración de los parámetros masa, constante de recuperación elástica, constante de amortiguamiento. La combinación de estos parámetros es gravitante en el control de la vibración, si se trabaja dentro de la resonancia el sistema vibra con facilidad y con poca energía ocasionando que haya perturbación en los equipos y daños a futuro.

La finalidad del presente trabajo de integración curricular es mostrar el modelo matemático y las ecuaciones de los parámetros fundamentales que rige el comportamiento del sistema vibratorio de una mesa vibratoria. El análisis del comportamiento de las vibraciones mecánicas en mesas vibratorias es de gran utilidad para el control de las vibraciones.

Para este estudio se parte identificando las fuerzas actuantes en el sistema vibratorio masa – resorte – amortiguador y a partir de un diagrama de cuerpo libre formular el modelo matemático y los parámetros fundamentales que describen dicho comportamiento dinámico de una mesa vibratoria como lo son la amplitud pico a pico, factor de amortiguamiento del aire, factor de magnificación y la ecuación general que modela el movimiento de un sistema masa – resorte amortiguador, para posteriormente calcular el decremento logarítmico y el equilibrio de las fuerzas actuantes en el sistema vibratorio.

PALABRAS CLAVE: Vibraciones, modelo matemático, amplitud pico a pico, resonancia, factor de amortiguamiento, factor de magnificación.

ABSTRACT

Mechanical vibrations on vibrating tables with sinusoidal input signals are the most typical case that occurs in the industry. Vibrations are present in rotating equipment such as centrifugal pumps, turbines, washers and classifiers and it is important to know the influence that vibration has on the parameters mass, elastic recovery constant, damping constant. The combination of these parameters is important in vibration control, if you work within resonance the system vibrates easily and with little energy, causing disturbances in the equipment and future damage.

The purpose of this curricular integration work is to show the mathematical model and the equations of the fundamental parameters that govern the behavior of the vibratory system of a vibrating table. Analysis of the behavior of mechanical vibrations in vibrating tables is especially useful for vibration control.

For this study, we start by identifying the forces acting on the mass-spring-damper vibratory system and, based on a free-body diagram, formulate the mathematical model and the fundamental parameters that describe said dynamic behavior of a vibrating table, such as the peak amplitude at peak, air damping factor, magnification factor and the general equation that models the movement of a mass-damping spring system, to later calculate the logarithmic decrease and the balance of the forces acting on the vibrating system.

KEYWORDS: Vibrations, mathematical model, peak to peak amplitude, resonance, damping factor, magnification factor.

1. DESCRIPCIÓN DEL COMPONENTE DESARROLLADO

La presente investigación en el trabajo de integración curricular como objetivo de estudiar los parámetros fundamentales que rigen el comportamiento de las vibraciones mecánicas de una mesa vibratoria prototipo con entrada senoidal, se fundamenta en el diseño analítico.

Para esto, en la primera parte se realiza una recopilación bibliográfica de que son las vibraciones mecánicas, tipos de vibraciones, parámetros de un sistema masa – resorte - amortiguador elementos o componentes intervienen en las vibraciones, respuestas en el dominio del tiempo a movimientos vibratorios, que es la resonancia y como se puede controlar las vibraciones mecánicas para no perturbar el funcionamiento de los equipos.

En la segunda parte se identificara las cargas actuantes en el sistema masa – resorte – amortiguador que componen a una mesa vibratoria, los componentes que describen a cada fuerza, con la ayuda de un diagrama de cuerpo libre y las leyes fundamentales de la física desarrollar un modelo matemático para encontrar una respuesta que determine el comportamiento de un sistema vibratorio al estar bajo un amortiguamiento sub amortiguado y bajo la aplicación de cargas externas, con lo que permita establecer el valor de la amplitud pico a pico que poseerá el sistema y con ellos los parámetros que intervienen en el sistema vibratorio como el factor de amortiguamiento, el factor de magnificación, la resonancia a partir del equilibrio de fuerzas

En la tercera parte se analizará las respuestas al modelo matemático obtenido anteriormente y con el uso del medio viscoso (aire) al que va a estar sometido el equipo y la técnica del decremento logarítmico determinar el factor de amortiguamiento que ofrece el aire al sistema masa – resorte – amortiguador y con ello facilitar la determinación de los demás parámetros.

En la última parte se analizará los resultados obtenidos en este estudio para establecer las condiciones necesarias en el control de las vibraciones y evitar daños a futuro tanto de máquinas como de vidas humanas. En base a este análisis se definirá los factores fundamentales a la hora de controlar las vibraciones mecánicas en aplicaciones industriales.

1.1 Objetivo general

Diseñar analíticamente una mesa vibratoria con señal de entrada senoidal para controlar las vibraciones mecánicas.

1.2 Objetivos específicos

- Recopilar información sobre el comportamiento dinámico que rigen en las mesas vibratorias.
- Establecer las variables fundamentales actuantes en un sistema vibratorio.
- Desarrollar el modelo matemático que describe el movimiento masa – resorte – amortiguador.
- Determinar el factor de amortiguamiento en un entorno de aire.
- Determinar la amplitud pico-pico de un sistema vibratorio.
- Determinar el factor de magnificación.
- Aportar información sobre el equilibrio de fuerzas en el sistema vibratorio y como interviene en la resonancia
- Analizar los parámetros fundamentales para el control de las vibraciones y evitar que caigan en la resonancia.

1.3 Alcance

El estudio de las vibraciones mecánicas en mesas vibratorias con señales de entrada senoidal se rige a casos que se presentan en la industria, automotriz, agrícola, procesos agroindustriales, minería, aeronáutica. La vibración está presente en todo momento por eso es muy importante conocer la influencia que tienen los parámetros masa, constante de recuperación elástica, constante de amortiguamiento. La combinación de estos parámetros es gravitante en el control de la vibración, si trabajamos dentro de la resonancia fácilmente vibra con poca energía que es la clave de las mesas vibratorias.

Un sistema vibratorio está dirigido al uso de los parámetros de un sistema masa – resorte – amortiguador para mover grandes masas con facilidad.

Para lograr el diseño de materialización de la mesa vibratoria, se hará uso de leyes físicas y de un diagrama de cuerpo libre que permitirá establecer modelos matemáticos, analíticos y físicos para determinar el comportamiento de las vibraciones

mecánicas, con el fin de controlar las vibraciones en una determinada aplicación industrial.

Se analizará la respuesta en el dominio del tiempo del modelo matemático determinado para mostrar el comportamiento dinámico de un sistema vibratorio y así evaluar los parámetros con el fin de controlar las vibraciones y evitar caer en la resonancia que afectan a los equipos.

Se mostrará el valor de los parámetros fundamentales para el control de las vibraciones y se dará ciertas condiciones para llevarlo a cabo.

1.4 MARCO TEÓRICO

1.4.1 Vibraciones mecánicas

Las vibraciones mecánicas es un campo amplio que permite comprender el comportamiento de movimientos ondulatorios transmitidos por un cuerpo; para entender su fin, es necesario ahondar en las áreas de ingeniería mecánica, ciencia computacional y matemáticas.

Entonces, se puede definir que las vibraciones mecánicas son oscilaciones alrededor de un punto de equilibrio; entendiéndose al punto de equilibrio como, la posición donde las fuerzas actuantes sobre el objeto tienen una resultante cero.

Por tanto, el estudio de las vibraciones mecánicas es importante para el diseño, construcción y operación de la mayoría de las máquinas rotatorias; tales como, bombas centrifugas, turbinas, mesas vibratorias, mesas rotatorias desbalanceadas, entre muchas más, las cuales están presentes en la industria automotriz, agrícola, minera, aeronáutica, etc.; por ello, es importante comprender el comportamiento de este tipo de sistema en particular. [1]

1.4.2 Sistema masa-resorte-amortiguador

Este tipo de sistemas está comprendido esquemáticamente por masas, resortes y amortiguadores; en el cual, el sistema puede almacenar energía potencial y cinemática, con el propósito de reducir los ruidos mecánicos y la transmisión de las vibraciones y se los representa como se muestra en la figura 1. [1]

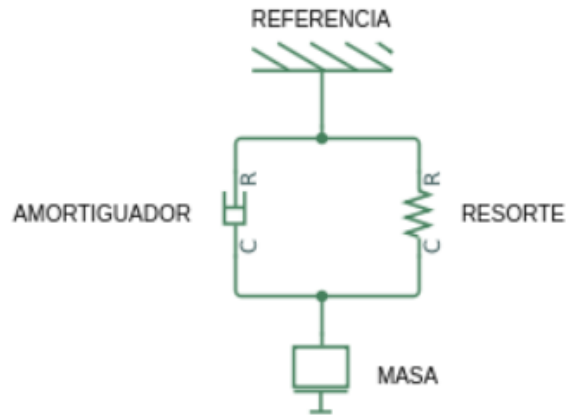


Figura 1. Sistema Masa-Resorte-Amortiguador.

Realizado por: Elaboración propia

Para comprender el funcionamiento de estos sistemas mecánicos es necesario realizar un análisis dinámico en los actuadores (masa-resorte-amortiguador) mediante un modelo matemático compuesto por ecuaciones diferenciales, de la siguiente manera.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

Ecuación 1. EDO sistema masa-resorte-amortiguador

Sin embargo, en este caso analizaremos un sistema mecánico con señal de entrada senoidal, lo que generara un movimiento unidireccional de los elementos, como se esquematiza en la siguiente.

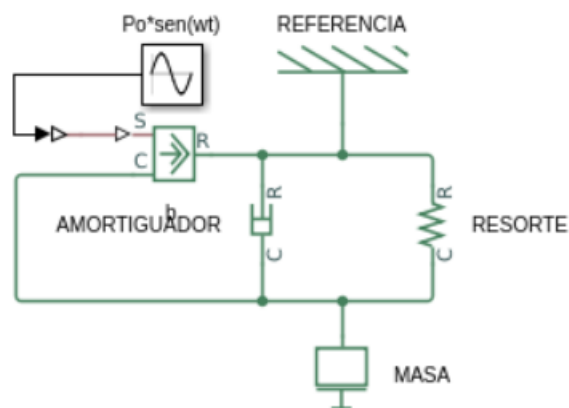


Figura 2. Sistema mecánico con señal de entrada senoidal.

Realizado por: Elaboración propia

Utilizando la ley de Newton y el gráfico del diagrama de cuerpo libre se logra obtener la ecuación resultante del equilibrio dinámico de un sistema vibratorio de un grado de libertad como se muestra en la siguiente expresión.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \text{Sen}(\omega t)$$

Ecuación 2. EDO sistema mecánico con entrada senoidal.

Es importante indicar que las Edo 's no homogénea de segundo grado con entrada de ondas senoidales describen acertadamente eventos naturales y señales variables en el tiempo, por ejemplo: voltajes generados por centrales eléctricas, elementos electrónicos como resistencias, condensadores e inductancias, vibraciones mecánicas; por lo cual, es importante su estudio. [2]

1.4.3 Mesa vibradora unidireccional

Una mesa vibratoria es un dispositivo mecánico que facilita el análisis dinámico de máquinas que son sometidas a movimientos transversales, generados por masas desbalanceadas producto de un motor en movimiento oscilatorio, provocando que esta oscile de forma unidireccional. Además, permite realizar el estudio de fenómenos como la resonancia que generan efectos negativos e incluso ocasionan daños mecánicos (rotura) en estructuras. [2]



Figura 3. Mesa Vibratoria.

Realizado por: [1]

1.4.4 Análisis en el dominio del tiempo para un modelo de un grado de libertad

Frecuentemente se tiene equipos o partes de equipos que son excitados a través de una base elástica, la que puede ser modelada por resortes y amortiguadores; es el caso de nuestra mesa vibratoria vacía la cual puede ser representada como sistema

masa – resorte con excitación en la base como se muestra en la figura, siendo su plataforma el oscilador visco elástico de un grado de libertad y es así que se obtiene sus propiedades equivalentes de masa “m”, coeficiente de rigidez “k” y coeficiente de amortiguamiento “c”; es así que la razón de amortiguamiento se define como $\zeta = c/2m\omega_n$. [2]

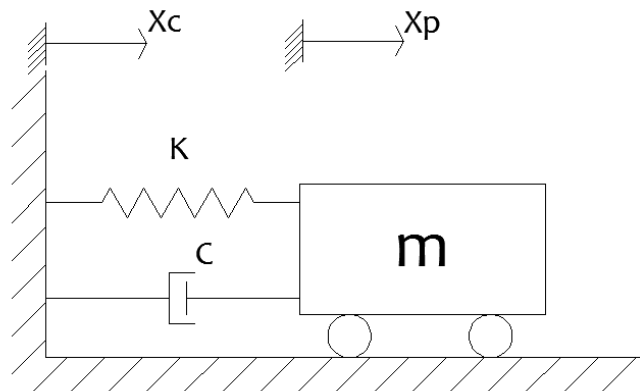


Figura 4. Sistema mecánico en el dominio del tiempo.

Realizado por: Elaboración propia

1.4.5 Resonancia

Este fenómeno físico se lo puede entender como la tendencia de un sistema a incrementar su amplitud de oscilación bajo la acción de algunas frecuencias; es decir, se produce cuando un cuerpo capaz de vibrar es sometido a la acción de una fuerza periódica, cuyo periodo de vibración coincide con el periodo de vibración característico de dicho cuerpo. [1]

Por tanto, es importante indicar que, si la frecuencia excitadora y la frecuencia natural son muy diferentes, el sistema necesitará más energía para provocar determinadas amplitudes de oscilación. En consecuencia, es importante que un sistema mecánico trabaje cerca de la condición de resonancia ya que una pequeña fuerza aplicada por el medio excitador puede generar grandes amplitudes de oscilación. [2] [3]

2. METODOLOGÍA

En esta sección del presente trabajo de investigación se realiza el estudio y análisis del comportamiento dinámico de las vibraciones mecánicas en una mesa vibratoria que posee una señal de entrada senoidal, este es el caso más típico que se presenta en la industria ya que lo que se busca es mover grandes masas con poca energía. Para lo cual se parte del desarrollo del modelo matemático que describe dicho movimiento con la finalidad de obtener los parámetros fundamentales de dicho comportamiento dinámico como lo es la amplitud pico a pico, el factor de amortiguación y el factor de magnificación.

Este estudio es teórico y experimental porque se desarrollará de dos maneras, determinando el modelo matemático para determinar los parámetros fundamentales del comportamiento dinámico de una mesa vibratoria, otro es el experimental donde se utilizará una mesa vibracional prototipo para obtener datos experimentales de los parámetros que intervienen en el movimiento del sistema masa – resorte – amortiguador.

El estudiar las vibraciones mecánicas de mesas vibratorias con señales de entrada senoidal de manera analítica permite obtener un modelo matemático con parámetros que combinándolos es gravitante en el control de la vibración, para lo cual si se trabaja dentro de la resonancia fácilmente vibra con poca energía que es la clave de las mesas vibratorias.

2.1. Planteamiento del modelo matemático

2.1.1. Análisis de cargas actuantes en el sistema masa – resorte – amortiguador

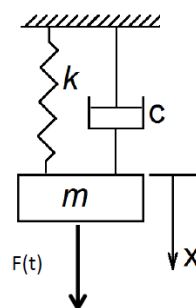


Figura 5. Elementos que compone un sistema masa resorte amortiguador.

Realizado por: [3]

Tomando como base la figura 5, se observa la conformación de un sistema formado por una masa (m), un componente elástico (resorte (k)) y un componente amortiguador (c), de la cual se obtiene los siguientes postulados:

- Para el análisis del comportamiento de las vibraciones mecánicas en la mesa vibratoria, la masa equivalente (m) solo va a tener movimiento vertical (desplazamiento vertical), es decir, los demás desplazamientos y giros van a estar restringidos para dicho caso.
- El componente elástico (k) es el encargado de proporcionar la energía (energía cinética) al sistema a través de una fuerza de resistencia (amortiguadora) hasta llegar a su condición inicial una vez culminado su deformación, la masa de este elemento va a ser considerada despreciable en comparación a la masa del sistema.
- El componente amortiguador (c) como la palabra mismo lo dice, es el encargado de transformar la energía cinética absorbida por el componente elástico en energía calorífica hasta llegar al punto de frenar y detener al sistema.
- El sistema como medio de rozamiento (medio de amortiguación) va a ser el aire, debido a que se va a encontrar expuesto al vacío (factor externo el aire).

Realizando un diagrama de cuerpo libre (DCL) a la masa (m) de la figura 5. Se tiene que las fuerzas verticales actuantes en la masa son las siguientes:

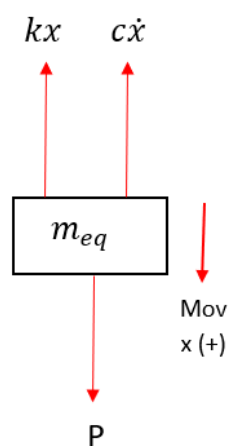


Figura 6. Diagrama de cuerpo libre de las fuerzas actuantes en el sistema.

Realizado por: Elaboración propia

2.1.1.1. Fuerza inercial.

Una fuerza inercial o también conocida como fuerza ficticia es aquella fuerza que se presenta cuando se estudia el movimiento de un cuerpo con respecto a un sistema de referencia no inercial. Es decir, aquella fuerza que permite entender la repentina aceleración de un cuerpo observado en un sistema de referencia no inercial, solo quien se encuentre situado en dicho sistema de referencia podrá distinguir dicha fuerza como las que todo mundo aprecia a simple vista (fuerzas reales, rozamiento, tracción, torsión, flexión, peso, etc.), caso contrario no será vista ni palpada.

Fuerza Inercial, $m\ddot{x}$

$$F = m\ddot{x}$$

Ecuación 3. Ley fundamental de Newton:

Donde: \ddot{x} = Aceleración del sistema.

F = Fuerza Inercial

m = Masa inercial del sistema

2.1.1.2. Fuerza elástica

Al colocar un peso (W) en el componente elástico que se encuentra en reposo, este tiende a estirarse un valor de δ_{est} (conocido como deflexión o alargamiento estático), el cual permanecerá presente hasta que el componente elástico haya llegado al punto de equilibrio (PE). Al encontrarse en este punto denominado Punto de Equilibrio (PE), la fuerza de la gravedad ejercida sobre la masa (m) se equilibrará a la fuerza elástica proporcionada por el resorte.

$$k * \delta_{est} = W = m * g$$

Ecuación 4. Deflexión o alargamiento estático

Donde: k = Constante elástica

δ_{est} = Deflexión o alargamiento estático

m = Masa equivalente del sistema

g = Aceleración de la gravedad.

F_e = Fuerza elástica.

x = Variación de la longitud de componente elástico (resorte).

Fuerza elástica, $k (x + \delta_{est})$

$$F_e = k (x + \delta_{est})$$

Ecuación 5. Fuerza Elástica.

En sistemas mecánicos ajustados a la realidad se observa que se tiene más de un resorte, configurados de distintas maneras que dificulta el análisis del modelo matemático, para ello se va a determinar y reemplazar un resorte equivalente que ejerza la misma fuerza en cierto punto específico generando la misma deformación que se tenía cuando se tenía los resortes por separado.

Para aplicaciones industriales donde se hace uso de componentes como poleas, engranajes, palancas y son interconectados a través de resortes se puede determinar la constante elástica equivalente haciendo uso de la energía almacenada, donde: para un desplazamiento específico la energía almacenada por el resorte equivalente es igual a suma de las energías almacenadas por cada uno de los resortes configurados en el sistema.

2.1.1.2.1. Configuración de resortes en serie

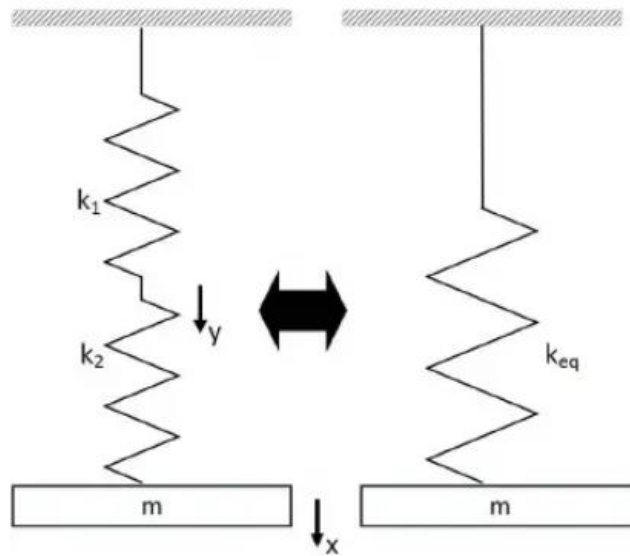


Figura 7. Configuración en serie.

Realizado por: [4]

De la figura 7 a la izquierda se tiene un sistema con una configuración de resortes conectados en serie (uno a continuación de otro), los cuales van a experimentar diferente desplazamiento (x) y que para una misma fuerza se determine una constante elástica equivalente tal como se aprecia en la parte derecha de la figura 7.

Aplicando una carga W al sistema de resortes estos sufren una deformación δ_1 y δ_2 respectivamente que rompe el reposo de los resortes. La deformación total (deflexión estática) del sistema δ_{st} queda:

$$\delta_{st} = \delta_1 + \delta_2$$

Ecuación 6. Deflexión estática total del sistema.

Como en los resortes se encuentran ejercido la misma fuerza W se tiene que:

$$w = k_1 \delta_1$$

$$w = k_2 \delta_2$$

Si k_{eq} es la constante elástica equivalente del sistema de resortes mostrados en la figura 8, entonces para la misma deflexión estática se tiene:

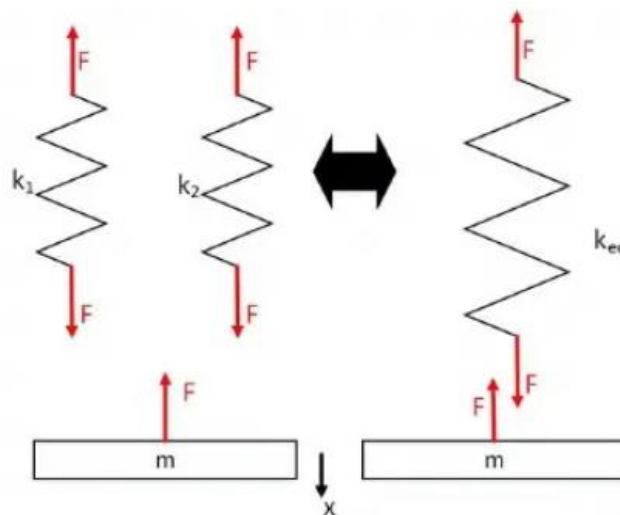


Figura 8. Diagrama de cuerpo libre de la configuración en serie de los resortes.

Realizado por: [4]

$$w = k_{eq} \delta_{st}$$

Como tienen la misma fuerza W se tiene que:

$$k_1 \delta_1 = k_2 \delta_2 = k_{eq} \delta_{st}$$

Resolviendo se tiene:

$$\delta_1 = \frac{k_{eq} \delta_{st}}{k_1} \quad \delta_2 = \frac{k_{eq} \delta_{st}}{k_2}$$

Reemplazando dichos valores en la ecuación 6:

$$\frac{k_{eq}\delta_{st}}{k_1} + \frac{k_{eq}\delta_{st}}{k_2} = \delta_{st}$$

$$\delta_{st} \left(\frac{k_{eq}}{k_1} + \frac{k_{eq}}{k_2} \right) = \delta_{st}$$

$$k_{eq} \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right) = 1$$

$$\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right) = \frac{1}{k_{eq}}$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

Si se tiene n resortes configurados en serie, la constante elástica equivalente quedaría:

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots + \frac{1}{k_n}$$

Ecuación 7. Configuración para resortes en serie.

2.1.1.2.2. Configuración de resortes en paralelo

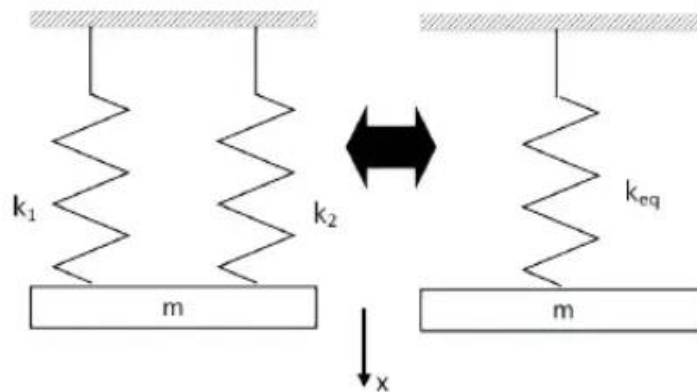


Figura 9. Configuración en paralelo.

Realizado por: [4]

De la figura 9 a la izquierda se tiene un sistema con una configuración de resortes conectados en paralelo, los cuales van a experimentar el mismo desplazamiento (x) y que para una misma fuerza y deformación determinar una constante elástica equivalente tal como se aprecia en la parte derecha de la figura 9.

Aplicando una carga W al sistema de resortes este sufre una deformación estática que rompe el reposo de los resortes y realizando el DCL a los resortes de la figura 10 se tiene:

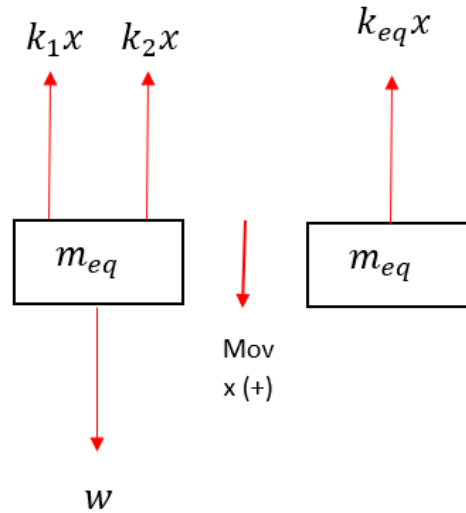


Figura 10. Diagrama de cuerpo libre de la configuración de resortes en paralelo.

Realizado por: Elaboración propia

$$w = k_1\delta_{st} + k_2\delta_{st}$$

$$w = \delta_{st} (k_1 + k_2)$$

Ecuación 8. Ecuación para resortes en paralelo.

Si k_{eq} es la constante elástica equivalente del sistema de resortes mostrados en la figura 10, desarrollando la ecuación 6 se tiene:

$$w = k_{eq}\delta_{st}$$

Por lo tanto,

$$k_{eq} = k_1 + k_2$$

Si se tiene n resortes configurados en paralelo, la constante elástica equivalente quedaría:

$$k_{eq} = k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_n$$

Ecuación 9. Configuración para resortes en paralelo.

2.1.1.3. Fuerza amortiguadora

Esta fuerza denominada resistencia viscosa, es la fuerza que actúa en sentido contrario al movimiento del sistema. Esta fuerza va a hacer la encargada de que la amplitud de la vibración vaya disminuyendo con el transcurso del tiempo.

Fuerza amortiguadora, $c\dot{x}$

$$F_d = c\dot{x}$$

Ecuación 10. Fuerza de amortiguación.

Donde: c = Constante de amortiguamiento.

\dot{x} = Velocidad del sistema.

F_d = Fuerza de amortiguamiento.

2.1.1.4. Fuerza excitadora armónica externa

Esta fuerza externa es la que ocasiona que se altere la posición de equilibrio del sistema. Es decir, es la encargada de proporcionar la vibración al sistema y puede ser de manera instantánea o de manera periódica (varie con el paso del tiempo)

Fuerza excitadora armónica externa, $F_o * \text{sen}(\omega t)$

$$F(t) = F_o * \text{sen}(\omega t)$$

Ecuación 11. Fuerza excitadora externa.

Donde: F_o = Módulo de la fuerza de excitación.

ω = Frecuencia de la vibración forzada.

t = Tiempo.

$F(t)$ = Fuerza de excitación armónica.

2.1.2. Análisis dinámico en el sistema masa – resorte – amortiguador.

Observando los desplazamientos al entrar en movimiento el sistema, se observa la alteración de la posición de equilibrio estático omitiendo del sistema de fuerzas todas aquellas equivalentes a cero en todo momento.

Realizando el equilibrio dinámico en la dirección del movimiento y haciendo uso de la segunda ley de Newton y del diagrama de cuerpo libre mostrado en la figura 10, se establece la ecuación 12:

$$\sum F_y = m\ddot{x}$$

$$m\ddot{x} = -kx - c\dot{x} + F_o * \text{sen}(\omega t)$$

$$m\ddot{x} + kx + c\dot{x} = F_o * \text{sen}(\omega t)$$

Ecuación 12. Ecuación general de un sistema masa - resorte - amortiguador.

Mediante la ecuación (12) determinada anteriormente se puede modelar de forma general el comportamiento vibratorio de un sistema masa – resorte – amortiguador de un grado de libertad.

2.1.3. Solución a la ecuación diferencial lineal descrita para el comportamiento dinámico que posee un sistema masa – resorte – amortiguador.

Por los postulados deducidos al inicio de la modelación del modelo matemático para un sistema M-R-A, se obtuvo una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes como se indica en la ecuación (12).

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_o \text{sen} \omega t$$

La ecuación diferencial lineal tendrá por solución general la suma de una respuesta homogénea (que no posee el término de la fuerza periódica externa) y una respuesta particular (surge del término de la fuerza periódica)

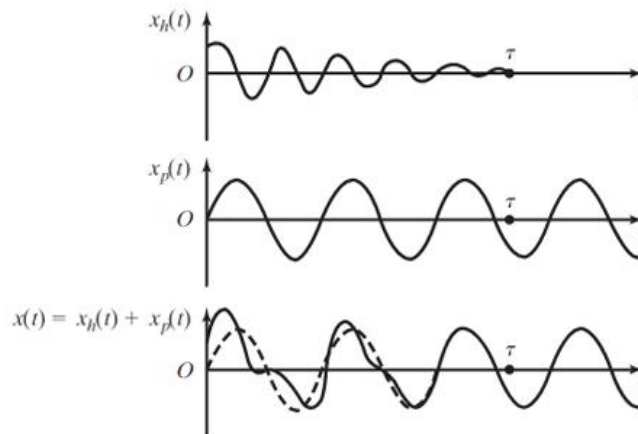


Figura 11. Respuesta a la ecuación diferencial lineal.

Realizado por: [4]

La vibración libre que tendrá el sistema con el paso del tiempo ira disminuyendo conforme actúe el factor de amortiguamiento, a esto se lo conoce como estado transitorio (solución homogénea), debido a que la variación en el movimiento del sistema está ligado al amortiguamiento y que dicha variación dependerá

exclusivamente del valor que posea los parámetros del sistema (k, c, m). Adicionalmente la respuesta general de la ecuación diferencial poseerá una solución en estado estable (solución particular) que no es más que el resultado de la fuerza externa a la que el sistema se encontraba expuesto.

Por lo tanto, la ecuación diferencial encontrada tendrá por solución la suma de las dos respuestas la transitoria y la estable.

$$x = x_{transitoria} + x_{estable}$$

Ecuación 13. Respuesta general a la ecuación diferencial lineal.

Donde;

$x_{transitoria}$

= *Es amortiguada por la fricción del sistema con el medio (aire) y desaparece.*

$x_{estable}$ = *Es la que se mantiene en el paso del tiempo.*

2.1.3.1. Respuesta en estado transitorio (homogénea)

La obtención de la solución para la parte homogénea de la ecuación diferencial lineal se parte de la forma:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

Ecuación 14. Ecuación diferencial en estado transitorio.

Las soluciones resultantes de la ecuación diferencial se plantean a partir de una función exponencial como se muestra a continuación:

$$x(t) = x_0 e^{st}$$

Ecuación 15. Función exponencial.

Derivando por primera vez la expresión (15) se obtendrá una nueva expresión en este caso será la velocidad del sistema:

$$\dot{x}(t) = x_0 s e^{st}$$

Ecuación 16. Primera derivada de la función exponencial

Derivando una segunda vez la expresión (15) se obtendrá una expresión en este caso para la aceleración del sistema:

$$\ddot{x}(t) = x_0 s^2 e^{st}$$

Ecuación 17. Segunda derivada de la función exponencial.

Sustituyendo las ecuaciones derivadas (15), (16), (17) en la ecuación (14) se tiene lo siguiente:

$$m x_0 s^2 e^{st} + c x_0 s e^{st} + k x_0 e^{st} = 0$$

Ecuación 18. Expresión resultante.

Dividiendo los términos de la ecuación (18) para $x_0 e^{st}$ la ecuación anterior, tomaría la forma de la siguiente manera:

$$ms^2 + cs + k = 0$$

Ordenando y simplificando los términos de la ecuación anterior se tiene:

$$s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m} = 0$$

Aplicando algebra a la ecuación da como resultado las siguientes raíces:

$$s_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$
$$s_{1,2} = \left(-\frac{\frac{c}{2m}}{\sqrt{\frac{k}{m}}} \pm \sqrt{\frac{\left(\frac{c}{2m}\right)^2}{\left(\frac{k}{m}\right)} - 1} \right) * \sqrt{\frac{k}{m}}$$
$$s_{1,2} = \left(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) * \omega_n$$

Ecuación 19. Raíces de la ecuación diferencial lineal parte homogénea.

Donde;

$\zeta =$ Es el factor de amortiguamiento

$\omega_n =$ Frecuencia natural del sistema.

A la expresión que se encuentra bajo el radical se la conoce como amortiguamiento crítico (C_{cr}), debido a que dicho valor depende exclusivamente de parámetros fundamentales para el sistema, es el encargado de determinar el movimiento que poseerá el sistema.

Es decir, si el amortiguamiento del sistema posee el mismo valor que el amortiguamiento crítico, la expresión bajo la radical sera igual a cero. Este postulado se lo puede ver así:

$$\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} = 0$$

Ecuación 20. Radical encargado en determinar el movimiento.

$$\frac{c_{cr}^2}{4m^2} = \frac{k}{m}$$

$$c_{cr}^2 = 4m^2 \frac{k}{m} = 4m^2 \omega_n^2$$

Simplificando la expresión queda:

$$c_{cr} = \sqrt{4m^2 \frac{k}{m}} = \sqrt{4m^2 \omega_n^2}$$

$$c_{cr} = 2m\omega_n$$

Ecuación 21. Amortiguamiento Crítico.

Por lo tanto, la expresión obtenida para el amortiguamiento crítico permite observar que dicho valor depende de parámetros exclusivos tanto másico como elástico y por ende se convierte en una propiedad del sistema y fundamental para determinar el movimiento.

Para el caso de estudio de este trabajo de integración curricular se va a realizar para un amortiguamiento inferior al crítico ($c < c_{cr}$)

$$\frac{c}{c_{cr}} = \zeta = \text{es la razón de amortiguación}$$

Según el tipo de amortiguamiento ζ los distintos movimientos son:

2.1.3.1.1. Caso 1: Sistema sobreamortiguado

$\zeta > 1$ Factor de amortiguamiento mayor a 1

Para este caso las dos raíces resultantes de la ecuación van a ser reales con signo negativo, y la solución de la ecuación resultaría de la siguiente manera:

$$x_h(t) = C_1 e^{(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) * \omega_n t} + C_2 e^{(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}) * \omega_n t}$$

Ecuación 22. Respuesta de un sistema sobre amortiguado.

En la práctica se tiene que el radical $\sqrt{\zeta^2 - 1}$ es siempre menor a ζ por lo que se tiene exponentes negativos y consecuentemente el desplazamiento es decreciente en el tiempo.

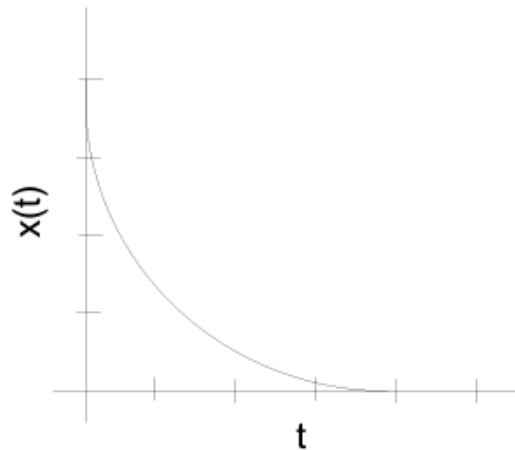


Figura 12. Respuesta al sistema sobre amortiguado.

Realizado por: [5]

2.1.3.1.2. Caso 2: Sistema críticamente amortiguado

$\zeta = 1$ Factor de amortiguamiento igual a 1

Para este caso las dos raíces resultantes de la ecuación van a ser reales con signo negativo y del mismo valor, por ende la solución de la ecuación resultaría de la siguiente manera:

$$x_h(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-st}$$

$$x_h(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-\omega_n t}$$

Ecuación 23. Respuesta al sistema críticamente amortiguado.

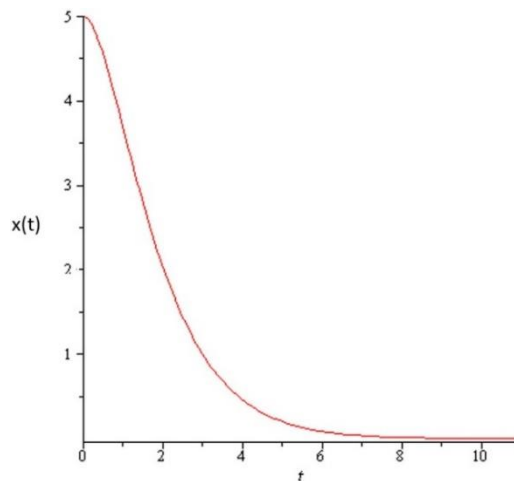


Figura 13. Respuesta al sistema críticamente amortiguado.

Realizado por: [5]

2.1.3.1.3. Caso 3: Sistema Sub amortiguado

$0 < \zeta < 1$ Factor de amortiguamiento entre 0 y 1

Para este caso las dos raíces resultantes de la ecuación van a ser imaginarias, por ende la solución de la ecuación resultaría de la siguiente manera:

$$s_1, s_2 = \left(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) * \omega_n$$

$$s_1, s_2 = \left(-\zeta \pm i\sqrt{1 - \zeta^2} \right) * \omega_n$$

Ecuación 24. Raíces del sistema subamortiguado.

$$x_h(t) = C_1 e^{\left(-\zeta + i\sqrt{1-\zeta^2}\right) * \omega_n t} + C_2 e^{\left(-\zeta - i\sqrt{1-\zeta^2}\right) * \omega_n t}$$

Ecuación 25. Respuesta al sistema subamortiguado en función de 2 constantes.

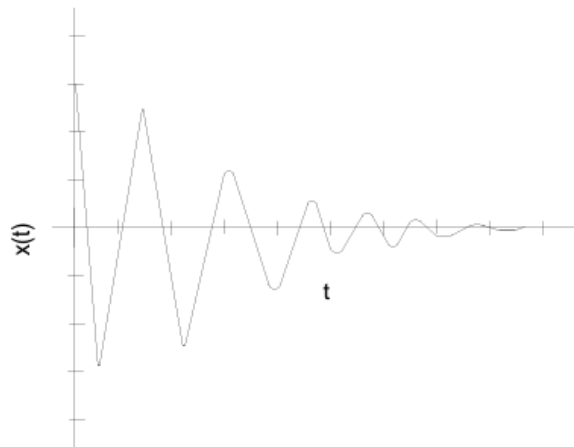


Figura 14. Respuesta al sistema críticamente amortiguado.

Realizado por: [5]

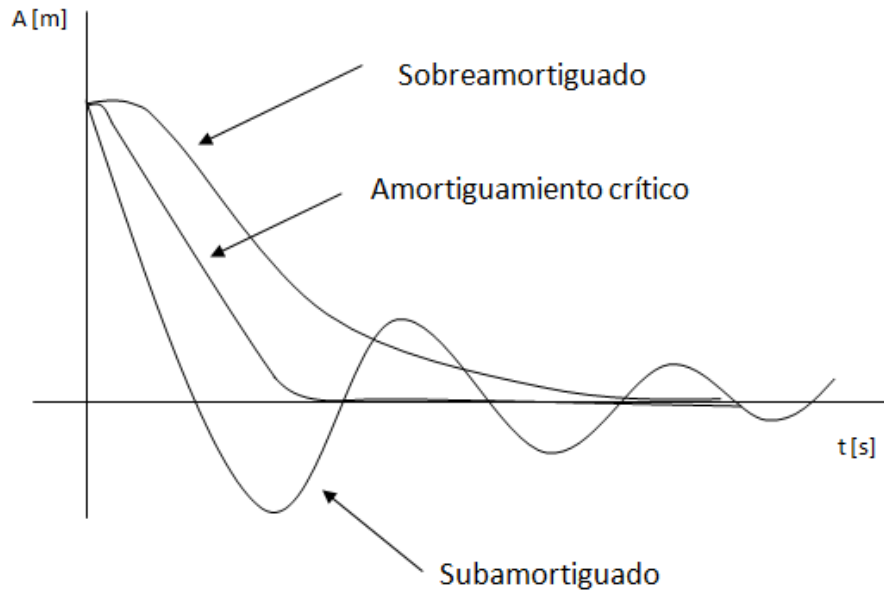


Figura 15. Respuesta a los distintos casos de amortiguamiento.

Realizado por: [5]

Simplificando y desarrollando la ecuación (25) queda:

$$x_h(t) = e^{-\zeta\omega_n t} \left(C_1 e^{i\sqrt{1-\zeta^2} * \omega_n t} + C_2 e^{-i\sqrt{1-\zeta^2} * \omega_n t} \right)$$

$$x_h(t) = e^{-\zeta\omega_n t} \left[C_1 \left(\cos \left(\sqrt{1-\zeta^2} * \omega_n t \right) + i \operatorname{Sen} \left(\sqrt{1-\zeta^2} * \omega_n t \right) \right) + C_2 \left(\cos \left(\sqrt{1-\zeta^2} * \omega_n t \right) - i \operatorname{Sen} \left(\sqrt{1-\zeta^2} * \omega_n t \right) \right) \right] \quad (25)$$

$$x_h(t) = e^{-\zeta\omega_n t} \left[(C_1 + C_2) * \cos \left(\sqrt{1-\zeta^2} * \omega_n t \right) + i(C_1 - C_2) * \operatorname{Sen} \left(\sqrt{1-\zeta^2} * \omega_n t \right) \right]$$

$$x_h(t) = e^{-\zeta\omega_n t} \left(K_1 * \cos \left(\sqrt{1-\zeta^2} * \omega_n t \right) + K_2 * \operatorname{Sen} \left(\sqrt{1-\zeta^2} * \omega_n t \right) \right)$$

Haciendo un cambio de variable para las variables K_1 y K_2 y reemplazando la solución de la ecuación quedaría:

$$K_1 = X * \cos \emptyset$$

$$K_2 = X * \operatorname{Sen} \emptyset$$

$$x_h(t) = X e^{-\zeta \omega_n t} * \text{Sen} \left(\sqrt{1 - \zeta^2} * \omega_n t + \phi \right)$$

Ecuación 26. Respuesta de la ecuación diferencial homogénea simplificada.

El movimiento subamortiguado va hacer oscilatorio pero decreciente.

Simplificando términos de la ecuación (26) queda:

$$\sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} = \sqrt{(-1) \left[\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2\right]} = i \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}$$

$$\omega_d = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} = \sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{1 - \left(\frac{c}{c_{cr}}\right)^2} = \omega_n \sqrt{1 - \left(\frac{c}{c_{cr}}\right)^2}$$

Como para el caso de estudio del presente trabajo de investigación se va a considerar que el factor de amortiguamiento sea menor a 1, la solución a la respuesta de la ecuación diferencial tomaría la forma del caso 3, un sistema subamortiguado.

Por lo tanto, la respuesta en estado transitorio (homogénea) para la ecuación diferencial lineal en el dominio del tiempo es:

$$x_h(t) = X e^{-\zeta \omega_n t} \text{sen}(\omega_d t + \phi)$$

Ecuación 27. Respuesta a la ecuación diferencial homogénea en el dominio del tiempo.

Donde;

X = El valor de la amplitud del sistema

ω_d = Es la frecuencia amortiguada del sistema

ϕ = Es el ángulo

El valor de las constantes (X y ϕ) se las determina con las condiciones iniciales establecidas para cada caso.

La posición del sistema x_h parte de una posición x_0 para un $t = 0$ por lo tanto quedaría:

$$x_h(t = 0) = X \text{sen}(\phi) = x_0$$

$$X \text{sen}(\phi) = x_0$$

$$X = \frac{x_0}{\text{sen}(\phi)}$$

Ecuación 28. Expresión para la Amplitud del sistema.

Derivando una vez la ecuación (27) se encuentra la velocidad del sistema como se indica a continuación:

$$\dot{x}_h(t) = e^{-\zeta\omega_n t} X\omega_d \cos(\omega_d t + \phi) + e^{-\zeta\omega_n t} (-\zeta\omega_n) X \operatorname{sen}(\omega_d t + \phi)$$

De la misma manera que la posición la velocidad parte de un valor \dot{x}_0 cuando el tiempo es $t = 0$ por lo tanto queda:

$$\dot{x}_h(t = 0) = X\omega_d \cos(\phi) + (-\zeta\omega_n) X \operatorname{sen}(\phi) = \dot{x}_0$$

$$\dot{x}_h(t = 0) = X(\omega_d \cos(\phi) - (\zeta\omega_n) \operatorname{sen}(\phi)) = \dot{x}_0$$

$$X(\omega_d \cos(\phi) - (\zeta\omega_n) \operatorname{sen}(\phi)) = \dot{x}_0$$

Reemplazando el valor de la amplitud queda:

$$\dot{x}_0 = \frac{x_0}{\operatorname{sen}(\phi)} * (\omega_d \cos(\phi) - (\zeta\omega_n) \operatorname{sen}(\phi))$$

Aplicando la ley distributiva:

$$\dot{x}_0 = \frac{x_0 * \omega_d}{\tan(\phi)} - x_0 * \zeta * \omega_n$$

$$\dot{x}_0 + x_0 * \zeta * \omega_n = \frac{x_0 * \omega_d}{\tan(\phi)}$$

$$\tan(\phi) = \frac{x_0 * \omega_d}{\dot{x}_0 + x_0 * \zeta * \omega_n}$$

Por lo tanto, el ángulo de fase queda:

$$\phi = \arctan\left(\frac{x_0 * \omega_d}{\dot{x}_0 + x_0 * \zeta * \omega_n}\right)$$

Ecuación 29. Ecuación para el ángulo de fase.

Reemplazando el valor del ángulo de la ecuación (29) en la ecuación (28) se determina el valor de la amplitud.

2.1.3.2. Respuesta en estado estable (no homogénea)

Para la solución en estado estable (particular) de la ecuación diferencial lineal se parte de una función de senos y cosenos que se asume de la siguiente manera:

$$x_p(t) = A \operatorname{Sen}(\omega t) + B \operatorname{Cos}(\omega t)$$

Ecuación 30. Respuesta a la ecuación diferencial no homogénea (particular)

Derivando por primera vez la expresión (30) se tiene:

$$\dot{x}_p(t) = A\omega \cos(\omega t) - B\omega \sin(\omega t)$$

Derivando una segunda vez la expresión (30) se tiene:

$$\ddot{x}_p(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t) - B\omega^2 \cos(\omega t)$$

Sustituyendo las ecuaciones derivadas en la ecuación (12) se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} m(-A\omega^2 \sin(\omega t) - B\omega^2 \cos(\omega t)) + c(A\omega \cos(\omega t) - B\omega \sin(\omega t)) \\ + k(A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)) = F_0 \sin(\omega t) \\ -A\omega^2 m \sin(\omega t) - B\omega^2 m \cos(\omega t) + A\omega c \cos(\omega t) - B\omega c \sin(\omega t) + Ak \sin(\omega t) \\ + Bk \cos(\omega t) = F_0 \sin(\omega t) \end{aligned}$$

Separando términos e igualando queda:

$$-A\omega^2 m \sin(\omega t) - B\omega c \sin(\omega t) + Ak \sin(\omega t) = F_0 \sin(\omega t) \quad (1)$$

$$-A\omega^2 m - B\omega c + Ak = F_0$$

$$A(-\omega^2 m + k) - B\omega c = F_0$$

$$-B\omega^2 m \cos(\omega t) + A\omega c \cos(\omega t) + Bk \cos(\omega t) = 0 \quad (2)$$

$$-B\omega^2 m + A\omega c + Bk = 0$$

$$B(-\omega^2 m + k) + A\omega c = 0$$

$$B = -\frac{A\omega c}{(-\omega^2 m + k)}$$

Reemplazando la ecuación (1) en (2)

$$A(-\omega^2 m + k) - \left(-\frac{A\omega c}{(-\omega^2 m + k)}\right) \omega c = F_0$$

$$A(-\omega^2 m + k) + \frac{A\omega^2 c^2}{(-\omega^2 m + k)} = F_0$$

$$A \left[(-\omega^2 m + k) + \frac{\omega^2 c^2}{(-\omega^2 m + k)} \right] = F_0$$

$$A = \frac{F_0 (-\omega^2 m + k)}{(-\omega^2 m + k)^2 + (\omega c)^2}$$

$$B = -\frac{\frac{F_0 (-\omega^2 m + k)}{(-\omega^2 m + k)^2 + (\omega c)^2} * \omega c}{(-\omega^2 m + k)}$$

$$B = -\frac{F_0 * (\omega c)}{(-\omega^2 m + k)^2 + (\omega c)^2}$$

Por lo tanto, la respuesta de la ecuación diferencial lineal en estado estacionario queda:

$$x_p(t) = \sqrt{A^2 + B^2} * \text{Sen}(\omega_n t + \varphi)$$

Ecuación 31. Respuesta a la ecuación diferencial en estado estacionario en el dominio del tiempo.

Donde:

φ = es el ángulo de desfase entre el desplazamiento y la fuerza excitadora.

El valor de las constantes ($\sqrt{A^2 + B^2}$ y φ) se las determina con las condiciones iniciales establecidas para cada caso.

La posición del sistema x_p parte de una posición x_0 para un $t = 0$ por lo tanto quedaría:

$$x_p(t = 0) = \sqrt{A^2 + B^2} * \text{Sen}(\varphi) = x_0$$

$$\sqrt{A^2 + B^2} * \text{Sen}(\varphi) = x_0$$

$$\sqrt{A^2 + B^2} = \frac{x_0}{\text{Sen}(\varphi)}$$

Derivando una vez la ecuación (30) se encuentra la velocidad del sistema como se indica a continuación:

$$\dot{x}_p(t) = \sqrt{A^2 + B^2} * \omega_n * \cos(\omega_n t + \varphi)$$

De la misma manera que la posición la velocidad parte de un valor \dot{x}_0 cuando el tiempo es $t = 0$ por lo tanto queda:

$$\dot{x}_p(t = 0) = \sqrt{A^2 + B^2} * \omega_n * \cos(\varphi) = \dot{x}_0$$

$$\sqrt{A^2 + B^2} * \omega_n * \cos(\varphi) = \dot{x}_0$$

$$\frac{x_0 * \omega_n}{\dot{x}_0} = \frac{\text{sen}(\varphi)}{\cos(\varphi)}$$

$$\frac{x_0 * \omega_n}{\dot{x}_0} = \tan(\varphi)$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{x_0 * \omega_n}{\dot{x}_0}\right) = \arctan\left(\frac{c\omega}{k - \omega^2 m}\right) = \arctan\left(\frac{2 * \zeta * s}{1 - \zeta^2}\right)$$

Ecuación 32. Expresión para el ángulo de desfase.

Por lo tanto, la respuesta general a la ecuación diferencial lineal que describe el movimiento del sistema masa – resorte – amortiguador conforme a la ecuación (13) queda:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

$$x(t) = X e^{-\zeta\omega_n t} \text{sen}(\omega_d t + \phi) + X * \text{Sen}(\omega_n t + \varphi)$$

Ecuación 33. Respuesta general a la ecuación diferencial en el dominio del tiempo.

2.2. Determinación del factor de amortiguamiento

Hay varias formas de determinar el factor de amortiguamiento, pero no todas usan los mismos parámetros. Algunos hacen uso de la aceleración de la vibración, mientras que otros hacen uso de la velocidad de la vibración. Otra manera de determinar el factor de amortiguamiento es por medio del análisis en el dominio del tiempo o en el dominio de la frecuencia, que ciertos métodos lo usan. En conclusión, la determinación del factor de amortiguamiento va a variar y depender de qué manera se lo hace y que parámetros se utiliza.

Una manera conveniente para determinar la cantidad de amortiguación presente en un sistema oscilatorio es medir la razón de disminución de las oscilaciones libres ilustrada en la siguiente figura.

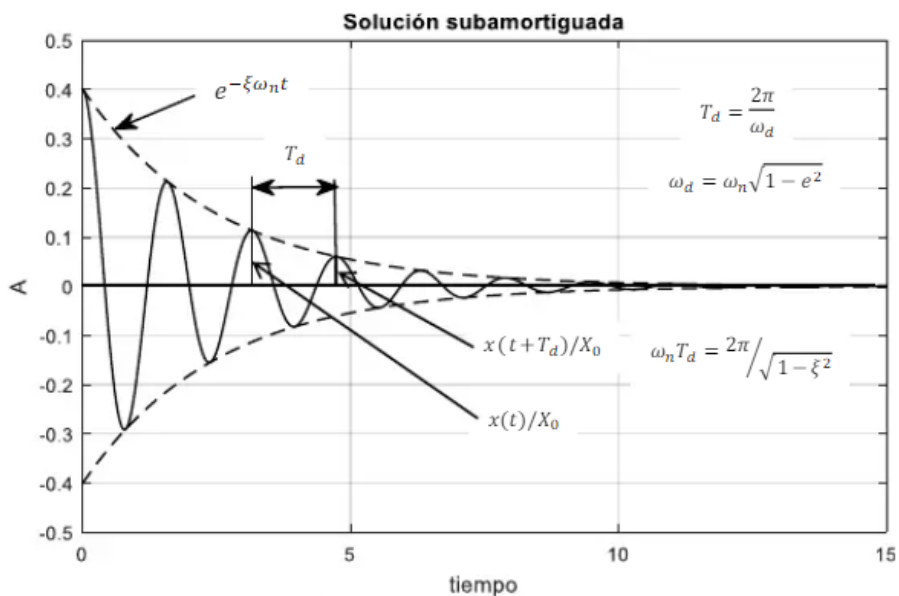


Figura 16. Razón de amortiguamiento para un sistema sub amortiguado.

Realizado por: [6]

Esto se expresa mejor por el decremento logarítmico que se define como el logaritmo natural de la relación entre las amplitudes, lo que da como resultado la siguiente ecuación:

$$\delta = \ln \left(\frac{X_j}{X_{j+1}} \right)$$

Ecuación 34. Expresión para el decremento logarítmico.

2.2.1. Decremento logarítmico

El método empleado para encontrar la cantidad de amortiguamiento existente en un sistema masa – resorte – amortiguador, parte de análisis en el dominio del tiempo para calcular la tasa de decaimiento de las oscilaciones en el transcurso de un determinado tiempo, por lo que a un valor mayor de amortiguamiento se tendrá una mayor variación en las oscilaciones.

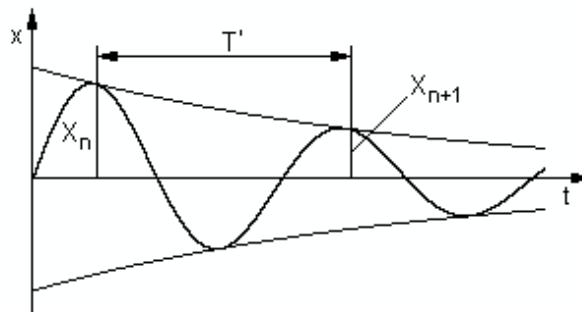


Figura 17. Respuesta del decremento logarítmico.

Realizado por: [6]

A partir de lo anterior se puede decir que, el decremento logarítmico no es más que el logaritmo natural de la tasa de disminución de dos amplitudes sucesivas separadas por cierto número de ciclos.

A partir de estas amplitudes es factible encontrar el factor de amortiguamiento ζ .

2.2.1.1. Decremento logarítmico entre dos amplitudes sucesivas.

De la ecuación general para movimiento oscilatorio:

$$x(t) = X e^{-\zeta \omega_n t} \text{sen}(\omega_d t - \phi)$$

Ecuación 35. Ecuación general para movimiento oscilatorio.

Donde:

$X =$ Amplitud máxima del movimiento del sistema.

$\omega_d = \text{Frecuencia amortiguada}$

$\phi = \text{Ángulo de fase}$

$t = \text{Tiempo}$

La amplitud máxima del movimiento del sistema masa – resorte - amortiguador surge cuando el término seno de la ecuación (35) posee un valor unitario (igual a 1). Es decir aplicando la definición de decremento logaritmo para la amplitud máxima X_j para un tiempo t_j y la amplitud máxima sucesiva X_{j+1} para un tiempo t_{j+1} , la ecuación quedaria:

Remplazando estas expresiones en la ecuación (34) se tiene:

$$\delta = \ln\left(\frac{X_j}{X_{j+1}}\right) = \ln\left(\frac{X e^{-\zeta\omega_n t_j} * \text{sen}(\omega_d t - \phi)}{X e^{-\zeta\omega_n (t_{j+1})} * \text{sen}(\omega_d t - \phi)}\right)$$

Dónde: ----- $\omega_d = \sqrt{1 - \zeta^2} * \omega_n$

$$\delta = \ln\left(\frac{X_j}{X_{j+1}}\right) = \ln\left(\frac{X e^{-\zeta\omega_n t_j} * \text{sen}\left(\sqrt{1 - \zeta^2} * \omega_n * t_j - \phi\right)}{X e^{-\zeta\omega_n (t_{j+1})} * \text{sen}\left(\sqrt{1 - \zeta^2} * \omega_n * t_{j+1} - \phi\right)}\right)$$

El valor de la función seno tanto para el tiempo t_j como para el tiempo t_{j+1} va hacer igual debido a que ambos se encuentran en el periodo de amortiguamiento T_d , por lo tanto la expresión anterior queda:

$$\delta = \ln\left(\frac{X_j}{X_{j+1}}\right) = \ln\left(\frac{X e^{-\zeta\omega_n t_j} * \text{sen}\left(\sqrt{1 - \zeta^2} * \omega_n * t_j - \phi\right)}{X e^{-\zeta\omega_n (t_{j+1})} * \text{sen}\left(\sqrt{1 - \zeta^2} * \omega_n * t_{j+1} - \phi\right)}\right)$$

Donde: ----- $t_{j+1} = t_j + T_d$

$$\delta = \ln\left(\frac{e^{-\zeta\omega_n t_j}}{e^{-\zeta\omega_n (t_{j+1})}}\right) = \ln(e^{-\zeta\omega_n t_j - (-\zeta\omega_n t_{j+1})}) = \ln(e^{-\zeta\omega_n t_j + \zeta\omega_n t_{j+1}})$$

$$\delta = \ln(e^{-\zeta\omega_n t_j + \zeta\omega_n t_{j+1}}) = \ln(e^{\zeta\omega_n * (-t_j + t_{j+1})}) = \ln(e^{\zeta\omega_n T_d})$$

Aplicando la propiedad de logaritmo natural queda:

$$\delta = \zeta\omega_n T_d$$

Donde: ----- $T_d = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}$ "período amortiguado"

Remplazando la expresión anterior el valor del decremento logarítmico quedaría:

$$\delta = \zeta \omega_n \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} = \frac{\zeta * 2\pi}{\sqrt{1 - \zeta^2}}$$

$$\delta = \frac{2\pi * \zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}$$

Con amortiguamiento muy pequeños $\zeta \rightarrow 0$ la expresión del decremento logarítmico queda:

$$\delta = 2\pi\zeta$$

Ecuación 36. Razón logarítmica entre dos amplitudes sucesivas.

2.2.1.2. Decremento logarítmico entre dos amplitudes distantes.

Si en la práctica se mide las amplitudes o picos consecutivos del movimiento de un sistema masa – resorte – amortiguador y se lo replica en un gráfico se puede extraer de la definición que no solo es para medidas consecutivas o adyacentes sino también que se lo puede extrapolar para picos distantes, con la finalidad de precisar el valor de cálculo del decremento logarítmico como se lo ve a continuación:

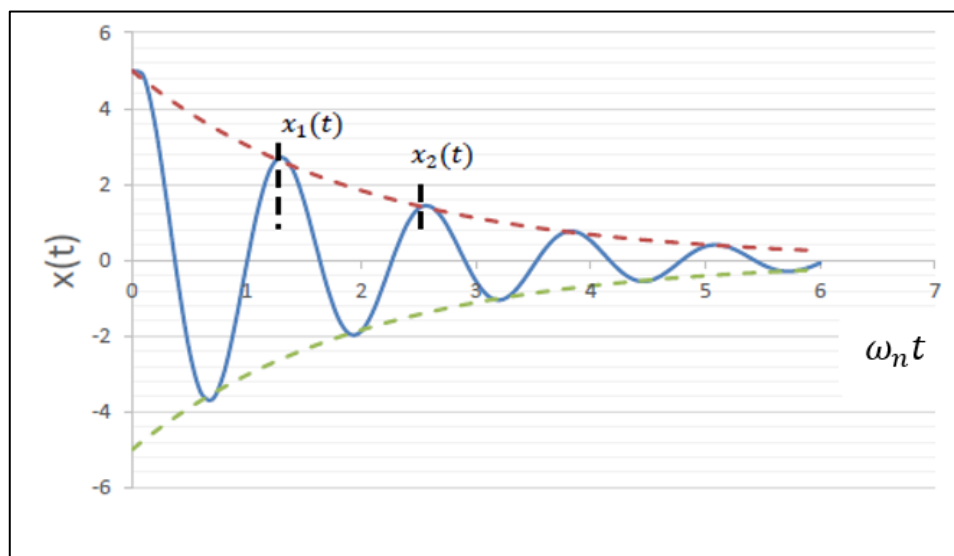


Figura 18. Respuesta al decremento logarítmico para amplitudes distantes.

Realizado por: [6]

Por definición de decremento logarítmico mostrada en la ecuación:

$$\frac{x_0}{x_n} = \frac{x_0}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \frac{x_3}{x_4} + \dots + \frac{x_{n-1}}{x_n}$$

$$\frac{x_0}{x_n} = \left(\frac{x_j}{x_{j+1}} \right)^n$$

$$\ln \left(\frac{x_0}{x_n} \right) = n * \ln \left(\frac{x_j}{x_{j+1}} \right)$$

Como la expresión encontrada por definición: $\delta = \ln \left(\frac{X_j}{X_{j+1}} \right)$

Remplazando en la expresión:

$$\ln \left(\frac{x_0}{x_n} \right) = n * \delta$$

$$\delta = \frac{1}{n} * \ln \left(\frac{x_0}{x_n} \right)$$

Ecuación 37. Razón logarítmica conocida dos amplitudes o picos distantes en n ciclos.

El número de ciclos para encontrar una determinada amplitud se determina:

$$n = \frac{1}{\delta} * \ln \left(\frac{x_0}{x_n} \right)$$

Dónde: $\delta = \frac{2\pi * \zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}$

$$n = \frac{1}{\frac{2\pi * \zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}} * \ln \left(\frac{x_0}{x_n} \right) = \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{2\pi * \zeta} * \ln \left(\frac{x_0}{x_n} \right)$$

Ecuación 38. Número de ciclos.

El intervalo del tiempo de la vida media se obtiene a partir de:

$$\Delta T = n * \zeta$$

Remplazando el valor de n y ζ en la ecuación 39 se tiene:

$$\Delta T = \left(\frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{2\pi * \zeta} * \ln \left(\frac{x_0}{x_n} \right) \right) * \left(\frac{2\pi}{\sqrt{1 - \zeta^2} * \omega_n} \right)$$

$$\Delta T = \frac{1}{\zeta * \omega_n} * \ln\left(\frac{x_0}{x_n}\right)$$

Ecuación 39. Intervalo de tiempo vida media.

Una relación interesante que se obtiene a partir de la razón logarítmica es el factor de amortiguamiento.

$$\delta = \frac{2\pi * \zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}$$

$$\left(\delta * \sqrt{1 - \zeta^2}\right)^2 = (2\pi * \zeta)^2$$

$$\delta^2 * (1 - \zeta^2) = 2^2 \pi^2 * \zeta^2$$

$$\delta^2 - \delta^2 \zeta^2 = 2^2 \pi^2 * \zeta^2$$

$$\delta^2 = 2^2 \pi^2 * \zeta^2 + \delta^2 \zeta^2$$

$$\delta^2 = (2^2 \pi^2 + \delta^2) * \zeta^2$$

$$\zeta^2 = \frac{\delta^2}{(2^2 \pi^2 + \delta^2)}$$

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{\frac{4\pi^2}{\delta^2} + 1}}$$

Ecuación 40. Factor de amortiguamiento en función de la razón logarítmica.

2.3. Factor de Magnificación (Amplificación) Dinámica

Las vibraciones forzadas en un sistema son el efecto de la aplicación de forma periódica de una fuerza externa con magnitud constante. Por ende, la importancia de estudiar el factor de amplificación dinámica, ya que dicho valor define cual va hacer el comportamiento dinámico que va a tener el sistema vibratorio y a su vez determinar la excitación a la que se encuentra sometido.

Para el coeficiente de amplificación (magnificación) dinámica se va a considerar solo la parte permanente (respuesta en el regimen estable) debido a que en dicho regimen desaparecerá cuando la fuerza de excitación externa F_0 acabe.

Partiendo de la solución general que rige el comportamiento dinámico del sistema vibratorio demostrado en la ecuación (13)

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

$$x(t) = e^{-\zeta\omega t} (A \cos(\omega_d t) + B \sin(\omega_d t)) + \frac{F_0}{k} \frac{1}{4\zeta^2 r^2 + (1-r^2)^2} [(1-r^2) \sin(\omega_n t) - 2\zeta r \cos(\omega_n t)]$$

$$FM = \frac{X'}{X_0} = \frac{X}{\frac{F_0}{K}} = \frac{X}{X_{est}} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}}$$

Ecuación 41. Respuesta al Factor de magnificación dinámica.

Graficando el factor de magnificación dinámica en función de r (relación de frecuencias $\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)$) de la ecuación (41) se encuentran los puntos críticos de la curva.

$$\frac{\partial FM}{\partial r} = 0 \quad (\text{puntos máximos})$$

$$\frac{\partial FM}{\partial r} = \frac{2r(1-r^2-2\zeta^2)}{[(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2]^{\frac{3}{2}}} = 0$$

Los valores de r satisfacen la ecuación en tres casos:

2.3.1. Caso 1: $\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right) \rightarrow 0$

Cuando los valores de la relación de frecuencias r tienden a cero, la fuerza armónica externa coincide con la fuerza del resorte. Es decir, el valor de la frecuencia ocasionada por la fuerza externa se asemeja al valor de la frecuencia natural, ocasionando que la vibración en el sistema empieza a razón de la fuerza externa.

$$x = \frac{F_0}{k} * \sin(\omega t)$$

En este caso el factor de amortiguamiento actúa de dos maneras: la primera actúa en la reducción del factor de magnificación de la respuesta del sistema y la segunda actúa en el aumento del ángulo de desfase φ .

Aquí la deformación del resorte es la que ocasiona el desplazamiento del sistema.

2.3.2. Caso 2: $\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right) \cong 1$

En este caso cuando los valores de la relación de frecuencias r se asemeja a 1, el factor de magnificación de la respuesta del sistema alcanza su valor máximo. Es decir,

el valor de la frecuencia ocasionada por la fuerza externa coincide con el valor de la frecuencia natural. En este caso es donde se produce la denominada resonancia.

Operar dentro de la resonancia fácilmente vibra con poca energía desarrollando grandes valores de amplitud, por ello se recomienda evitar la zona de resonancia ya que este factor puede llegar a ser perjudicial para la seguridad de los equipos ya que perturba la operación de estos.

$$\frac{x}{x_{est}} \Big|_{m\acute{a}x} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-2\zeta^2}} = \frac{1}{2\zeta} \text{ para valores de amortiguamiento } \zeta < 0.1$$

2.3.3. Caso 3: $\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right) \rightarrow \infty$

En este caso cuando los valores de la relación de frecuencias r son mayores a 1 o tienden al ∞ , la frecuencia de la fuerza excitadora externa tiende a aumentar su valor ($\omega \rightarrow \infty$) debido a que debe contrarrestar la fuerza inercial. En consecuencia, el sistema permanece en reposo ($FM \rightarrow 0$)

$$\frac{x}{x_{est}} \Big|_{\omega \rightarrow \infty} \rightarrow 0$$

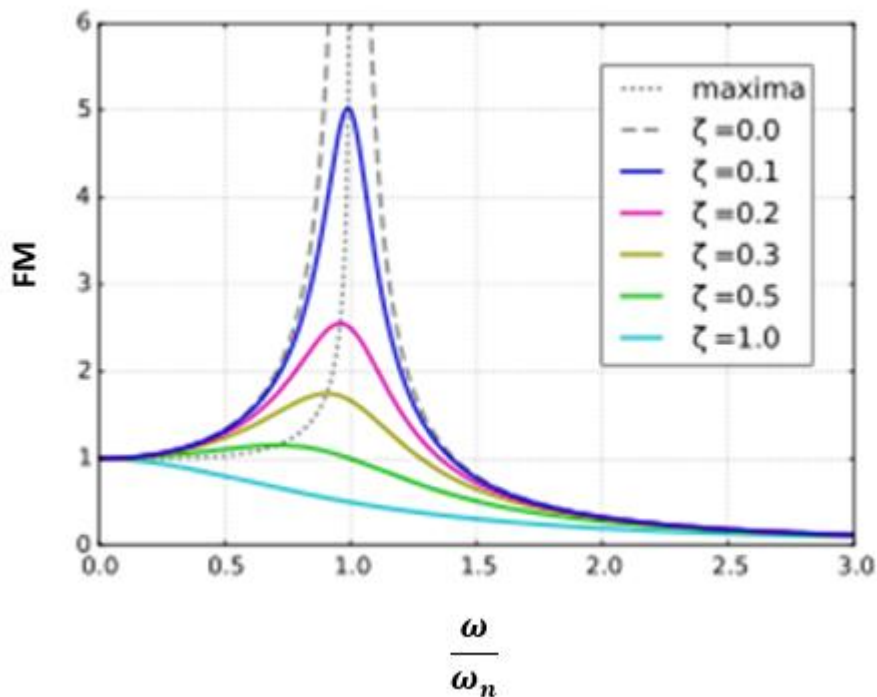


Figura 19. Factor de Magnificación dinámica.

Realizado por: Elaboración propia

Por lo tanto, el factor de magnificación dinámica es la relación entre la parte dinámica y la parte estática del sistema vibratorio cuando este se encuentra sometido a una excitación constante.

2.4. Equilibrio de fuerzas en el sistema.

Las fuerzas actuantes en el sistema masa – resorte - amortiguador visto en el apartado 2.1.1 deben estar en equilibrio dinámico en todo momento y en cada zona de la relación de frecuencias (ω/ω_n). Es decir, el conjunto de la fuerza inercial, fuerza elástica, fuerza amortiguadora y fuerza excitadora externa se anulará (igual a cero).

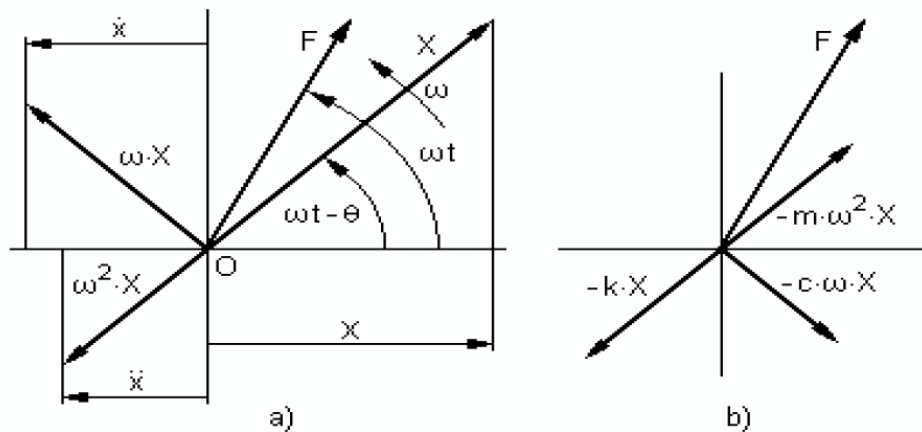


Figura 20. a) Esquema vectorial de las Fuerzas que intervienen en el sistema. b) Fuerzas.

Realizado por: [3]

2.4.1. Zona antes de la Resonancia ($\omega/\omega_n < 1$)

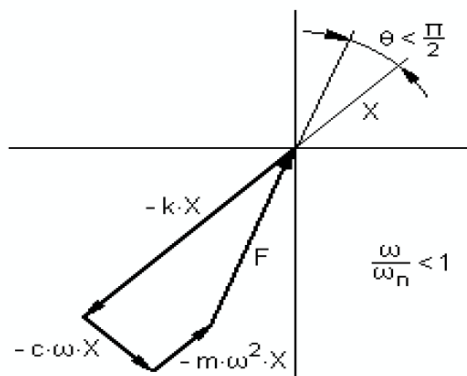


Figura 21. Esquema del polígono de fuerzas antes de la resonancia.

Realizado por: [3]

Con base en la figura 21 donde se presenta el polígono de fuerzas actuantes, se tiene que para una razón de frecuencias menores a 1, los valores de la fuerza inercial y la fuerza de amortiguamiento son pequeños, lo que ocasiona que el ángulo de fase (θ) tenga un valor igualmente pequeño. Es decir, la fuerza excitadora externa se equipará con la fuerza elástica ocasionando que el retraso del desplazamiento con respecto a la fuerza excitadora externa sea casi nulo.

2.4.2. Zona de Resonancia ($\omega/\omega_n = 1$)

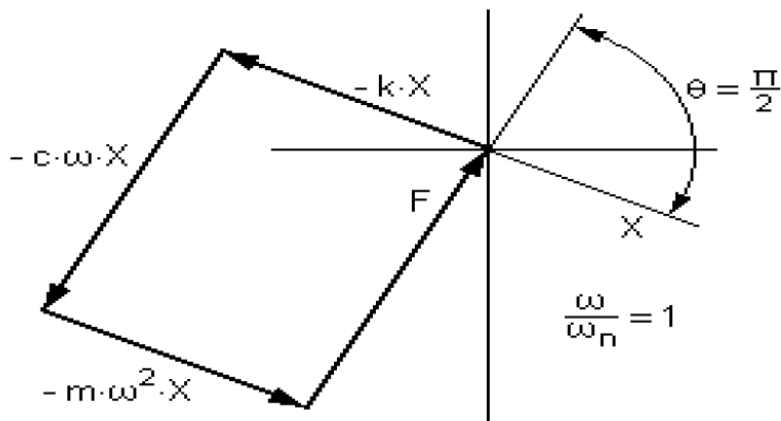


Figura 22. Esquema del polígono de fuerzas en la resonancia.

Realizado por: [3]

Con base en la figura 22 donde se presenta el polígono de fuerzas actuantes, se tiene que para una razón de frecuencias iguales a 1, los valores de la fuerza inercial y la fuerza de amortiguamiento son grandes, lo que ocasiona que el ángulo de fase (θ) tenga un valor de 90° . Es decir, la fuerza excitadora externa se equipará con la fuerza amortiguamiento al igual que la fuerza inercial se equipará con la fuerza elástica.

2.4.3. Zona después de la Resonancia ($\omega/\omega_n \gg 1$)

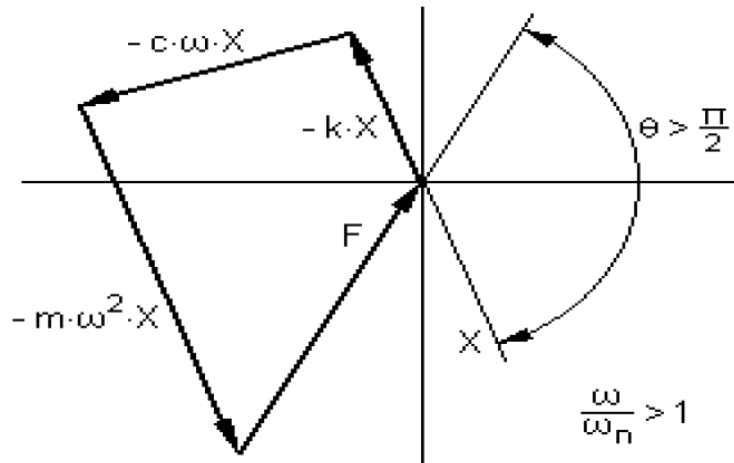


Figura 23. Esquema del polígono de fuerzas después de la resonancia.

Realizado por: [3]

Con base en la figura 23 donde se presenta el polígono de fuerzas actuantes, se tiene que para una razón de frecuencias mayores a 1, los valores de la fuerza elástica y la fuerza de amortiguamiento son pequeñas, lo que ocasiona que el ángulo de fase (θ) tenga un valor de 180° . Es decir, la fuerza excitadora externa se equipará con la fuerza inercial.

3. RESULTADOS, CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

3.1. Resultados

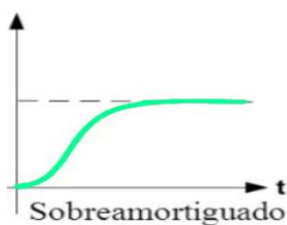
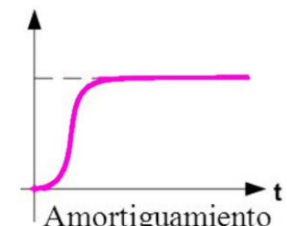
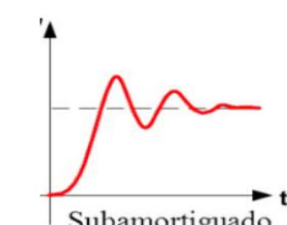
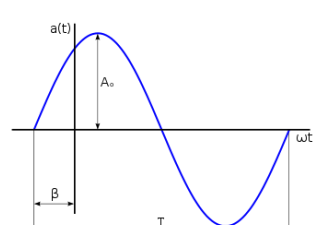
Para este capítulo, ya determinado el modelo matemático y las ecuaciones de los distintos parámetros fundamentales presentes en un sistema vibratorio, se analiza a detalle cada variable de las distintas respuestas, con el fin recopilar información para el control de las vibraciones y evitar que caigan en la resonancia.

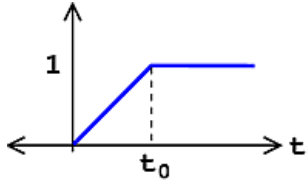
Con dicho análisis en los resultados obtenidos se conocerá que variable sobresale en la ecuación y su importancia en el control. Finalmente aportar conclusiones y recomendaciones derivados del desarrollo del presente trabajo de integración curricular.

3.1.1. Respuesta a la ecuación diferencial derivada del modelo matemático.

En la tabla 1 se observa las ecuaciones de las distintas respuestas para estado estable y transitorio que tiene un sistema vibratorio, raíces para los tres tipos de amortiguamiento, con la finalidad de observar las variables que componen cada respuesta.

Tabla 1. Respuestas para los distintos sistemas de amortiguamiento tanto para el estado estable como transitorio.

CARACTERÍSTICAS DE UN SISTEMA VIBRATORIO				
ESTADO ESTABLE	$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$ (HOMOGÉNEA)	Sobre amortiguado	$\zeta > 1$	$x_h = c_1 e^{(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})t} + c_2 e^{(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})t}$  <p>Sobreamortiguado</p>
		Criticamente amortiguado	$\zeta = 1$	$x_h = (c_1 + c_2 t)e^{-\omega_n t}$  <p>Amortiguamiento crítico</p>
		Sub amortiguado	$\zeta < 1$	$x_h = X e^{-\zeta \omega_n t} \text{sen} \left(\sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n t + \phi \right)$  <p>Subamortiguado</p>
ESTADO TRANSITORIO	$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \text{sen}(\omega t)$	Señal de entrada Senoidal		$x_p(t) = A \text{Sen}(\omega t) + B \text{Cos}(\omega t)$ 

	(NO HOMOGÉNEA)	Señal de entrada Rampa	$x_p(t) = A\text{Sen}(\omega t) + B\text{Cos}(\omega t)$ 
		Señal de entrada Skp	$x_p(t) = A\text{Sen}(\omega t) + B\text{Cos}(\omega t)$

Fuente: (Propia)

Con base en la ecuación (33) determinada en el capítulo 2 se muestra la respuesta en el dominio del tiempo para el comportamiento dinámico de un sistema vibratorio, en este caso la posición.

$$x(t) = X e^{-\zeta\omega_n t} \text{sen}(\omega_d t + \phi) + X * \text{Sen}(\omega_n t + \varphi)$$

Derivando 2 veces dicha ecuación se obtendría la velocidad y aceleración que tendría el sistema vibratorio. En la figura 24 se estima el desfase existente entre cada variable del comportamiento dinámico del sistema.

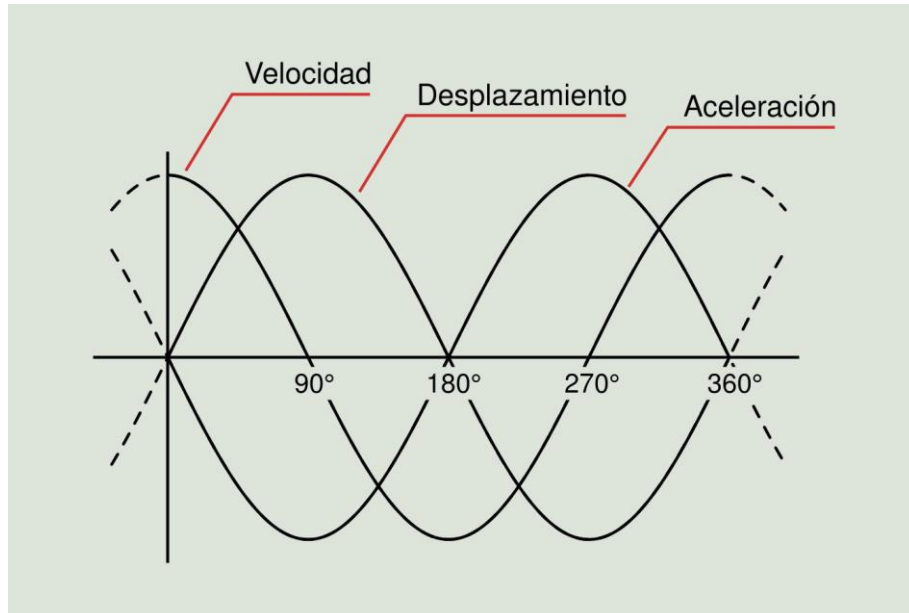


Figura 24. Desfase entre desplazamiento, velocidad y aceleración.

Realizado por: [7]

3.1.2. Ecuación para el factor de amortiguamiento y su relación con el decremento logarítmico.

En la tabla 2 se observa la ecuación del factor de amortiguamiento y del decremento logarítmico, con la finalidad de que se pueda descartar variables para establecer una relación directa entre dichos parámetros.

Tabla 2. Relación entre el decremento logarítmico y el factor de amortiguamiento.

		FACTOR DE AMORTIGUAMIENTO	
DECREMENTO LOGARÍTMICO	AMPLITUDES SUCESIVAS	$\delta = 2\pi\zeta$	
	AMPLITUDES DISTANTES	$\delta = \frac{2\pi * \zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}$	

Fuente: (Propia)

El decremento logarítmico es una práctica experimental que con la ayuda de la relación directa entre el decremento logarítmico y el factor de amortiguamiento permite obtener el número de ciclos y por ende el valor de la amplitud del sistema vibratorio.

3.1.3. Características de la ecuación para el factor de magnificación (amplificación) dinámica.

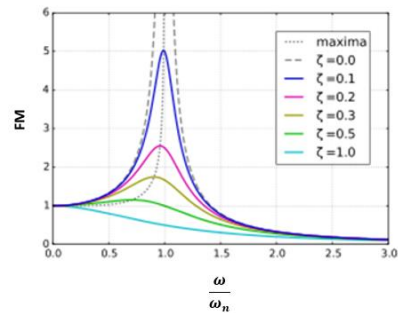
En la tabla 3 se observa la ecuación del factor de magnificación dinámica para los 3 casos existentes, con la finalidad de analizar la resonancia y poder evitarla. El factor de magnificación dinámica es la relación entre la parte dinámica y la parte estática del sistema vibratorio cuando este se encuentra sometido a una excitación constante.

Con base en la ecuación (41) determinada en el capítulo 2 para el coeficiente de amplificación (magnificación) dinámica se va a considerar solo la parte permanente (respuesta en el régimen estable) debido a que en dicho régimen desaparecerá cuando la fuerza de excitación externa F_0 acabe.

$$FM = \frac{X'}{X_0} = \frac{X}{\frac{F_0}{K}} = \frac{X}{X_{est}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}}$$

Tabla 3. Factor de magnificación para los distintos casos.

CARACTERÍSTICAS DEL FACTOR DE MAGNIFICACIÓN	
FACTOR DE MAGNIFICACIÓN DINÁMICA	<p>CASO 1: $\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right) \rightarrow 0$</p> <p>El valor de la frecuencia ocasionada por la fuerza externa se asemeja al valor de la frecuencia natural, ocasionando que la vibración en el sistema empieza a razón de la fuerza externa.</p>
	<p>CASO 2: $\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right) \approx 1$</p> <p>El valor de la frecuencia ocasionada por la fuerza externa coincide con el valor de la frecuencia natural. En este caso es donde se produce la denominada resonancia.</p>
	<p>CASO 3: $\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right) \rightarrow \infty$</p> <p>El valor permanece en reposo ($FM \rightarrow 0$) y es el caso más óptimo para el funcionamiento de un equipo.</p>



Fuente: (Propia)

3.1.4. Características de cada zona de la resonancia a partir del equilibrio de fuerzas.

En la tabla 4 se observa el distinto equilibrio entre las fuerzas del sistema para cada zona de la resonancia.

Tabla 4. Características de cada zona de la resonancia.

		CARACTERÍSTICAS DEL EQUILIBRIO DE FUERZAS	
ZONAS DE LA RESONANCIA	ZONA ANTES DE LA RESONANCIA ($\omega/\omega_n < 1$)	<p>En esta zona la fuerza excitadora externa se equipará con la fuerza elástica ocasionando que el retraso del desplazamiento con respecto a la fuerza excitadora externa sea casi nulo.</p>	
	ZONA DE LA RESONANCIA ($\omega/\omega_n = 1$)	<p>En esta zona la fuerza excitadora externa se equipará con la fuerza amortiguamiento al igual que la fuerza inercial se equipará con la fuerza elástica.</p>	
	ZONA DESPUÉS DE LA RESONANCIA ($\omega/\omega_n \gg 1$)	<p>En esta zona la fuerza excitadora externa se equipará con la fuerza inercial.</p>	

Fuente: (Propia)

3.2. Discusión

El presente trabajo de integración curricular descrito en este documento se centra en el desarrollo de un modelo matemático que describa el comportamiento dinámico de las vibraciones mecánicas, lo cual es de mucha utilidad para ciertas aplicaciones industriales donde se requiere mover masas grandes con poca energía que es de la utilidad más ocupada en estos días.

Debido a la presencia de la resonancia en los equipos de las industrias es fundamental analizar cada componente que interviene en un sistema vibratorio con la finalidad de controlar esos movimientos oscilatorios y evitar que el sistema caiga en resonancia. Analizar el comportamiento de cada componente de un sistema masa – resorte – amortiguador mejora el control de las vibraciones mecánicas y su posterior vida útil.

Se desarrollo un modelo matemático que describe el comportamiento dinámico de un sistema vibratorio cuando se encuentra bajo la aplicación de una carga externa.

3.3. Conclusiones

El presente trabajo de integración curricular permitió analizar y estudiar el comportamiento dinámico de una mesa vibratoria con entrada senoidal a partir del desarrollo de un modelo matemático que describa dicho movimiento vibratorio.

Mediante el uso de un diagrama de cuerpo libre del sistema vibratorio se determinó las fuerzas que intervienen y con ello plantear las variables existentes en el desarrollo del modelo matemático del sistema vibratorio.

El desarrollo de un modelo matemático que describa dicho comportamiento facilitó el análisis de los parámetros fundamentales que intervienen en dicho sistema vibratorio y poder entender la importancia de controlar las vibraciones mecánicas en aplicaciones industriales.

Conocido el medio de amortiguamiento externo al que va a estar expuesto el sistema se determinó el decremento logarítmico y conocido dicho valor encontrar la ecuación que describa el factor de amortiguamiento y el factor de magnificación y el valor de la amplitud del sistema.

Con la ayuda de polígonos de fuerzas y el diagrama de cuerpo libre del sistema vibratorio se determinó el equilibrio de fuerzas existentes en cada zona de la resonancia para así observar que fuerza intervienen en zona antes de la resonancia para su posterior control y evitar que el sistema vibratorio caiga en resonancia.

Mediante la determinación de la ecuación del factor de magnificación dinámica se concluyó que para que el sistema no caiga en resonancia el valor de la relación de frecuencias debe ser mayor 1 o tender al infinito positivo, con ello se obtendrá valores de amplitud pequeños evitando las perturbaciones de las vibraciones.

3.4. Recomendaciones

Es recomendable aplicar el modelo matemático determinado en este trabajo de integración curricular solo a sistemas con 1 grado de libertad y bajo fuerzas excitadoras senoidales debido a que las fuerzas y los parámetros son específicos para esas condiciones y si varían dichas condiciones lo más recomendable sería desarrollar un nuevo modelo matemático que incluya las nuevas modificaciones.

Ser minucioso al momento de estudiar el comportamiento de las vibraciones mecánicas, ya que un análisis mal realizado puede acarrear errores en los resultados a obtener.

Se recomienda validar las ecuaciones obtenidas analíticamente a través de una simulación o de un experimento físico.

Realizar un buen diagrama de cuerpo libre facilita el entendimiento de los parámetros que intervienen en la formulación de un modelo matemático, por eso se recomienda analizar bien las cargas tanto externas como internas bajo las cuales se encuentra sometido un sistema en particular.

4. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] A. Fernandez, «Power-MI,» 12 julio 2020. [En línea]. Available: <https://power-mi.com/es/content/estudio-de-las-vibraciones>. [Último acceso: 03 marzo 2023].
- [2] B. N. y. P. P. Carrillo J., Artist, *Evaluación del diseño de una pequeña mesa vibratoria para ensayos en ingeniería sismo-resistente*. [Art]. Universidad Militar Nueva Granada., 2013.
- [3] Carakenio73, «dademuchconnection,» 07 mayo 2020. [En línea]. Available: <https://dademuch.com/2020/05/07/sistema-de-segundo-orden/>. [Último acceso: 03 marzo 2023].
- [4] C. J. y. R. L., Artist, *Diseño, Modelamiento y Simulación de una mesa vibradora unidireccional hidráulica. (Tesis de Grado)*.. [Art]. Universidad industrial de Santander, 2011.
- [5] D. G. Calzada, «Apuntes de Análisis Estructural 2».

- [6] D. L. A. López, Artist, *Implementación de Mesa Vibradora Unidireccional para Simulación Sísmica y Experimentación con Modelos Reducidos*. [Art]. UNIVERSIDAD PRIVADA DE TACNA, 2017.
- [7] EcuRed, «EcuRed,» [En línea]. Available: https://www.ecured.cu/Resonancia_mec%C3%A1nica. [Último acceso: 5 Diciembre 2022]
- [8] Instituto de Ingeniería UNAM, «Instituto de Ingeniería UNAM,» 5 Noviembre 2013. [En línea]. Available: <http://www.ii.unam.mx/es-mx/Investigacion/Proyecto/Paginas/mesavibradora.aspx>. [Último acceso: 6 Diciembre 2022].
- [9] J. C. P. T. H. C. T. H. Ramón Martínez Batista, Artist, *VIBRACIONES MECANICA Volumen I*. [Art]. Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE, 2018.
- [10] J. E. L. CASTRO, Artist, *DISEÑO Y FABRICACIÓN DE MESA VIBRATORIA UNI-DIRECCIONAL CON UN ACTUADOR HIDRÁULICO*. [Art]. UNIVERSIDAD DE CHILE, 2007.
- [11] L. Carvajal, Metodología de la Investigación Científica. Curso general y aplicado, 28 ed., Santiago de Cali: U.S.C., 2006, p. 139.
- [12] M. Beltran, «Academia,» 12 abril 2020. [En línea]. Available: https://www.academia.edu/35968968/Resortes_en_serie_y_Paralelo. [Último acceso: 03 marzo 2023].
- [13] M. Caprile, Artist, “*Validación experimental del modelo de comportamiento de un cuerpo rígido no anclado bajo excitación bidimensional en mesa vibradora*”. [Art]. Universidad de Chile, 2003.
- [14] P. L. R. / A. M. d. Pezzo, Artist, *VIBRACIONES DE UN GRADO DE LIBERTAD*. [Art]. Universidad Nacional de La Plata, 2018.
- [15] S. y. D. H. Y. Timoshenko, «Problemas de Vibraciones en Ingeniería,» La Habana, 1966..
- [16] S. Rao. Singiresu, *Mechanical Vibrations*, La Habana: Félix Varela, 2009.