ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS

TEORÍA DE SEMI-GRUPOS EN CIERTAS ECUACIONES DE LA MECÁNICA DE FLUIDOS

TRABAJO DE INTEGRACIÓN CURRICULAR PRESENTADO COMO REQUISITO PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE MATEMÁTICO

NARAYA GABRIELA NARVÁEZ ARICHÁBALA

naraya.narvaez@epn.edu.ec

DIRECTOR: DR. MANUEL FERNANDO CORTEZ ESTRELLA

manuel.cortez@epn.edu.ec

QUITO, 12 DE OCTUBRE DE 2023

CERTIFICACIONES

Yo, NARAYA GABRIELA NARVÁEZ ARICHÁBALA, declaro que el trabajo de integración curricular aquí descrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y, que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

Naraya Gabriela Narváez Arichábala

Certifico que el presente trabajo de integración curricular fue desarrollado por Naraya Gabriela Narváez Arichábala, bajo mi supervisión.

Dr. Manuel Fernando Cortez Estrella
DIRECTOR

DECLARACIÓN DE AUTORÍA

A través de la presente declaración, afirmamos que el trabajo de integración curricular aquí descrito, así como el producto resultante del mismo, es público y estará a disposición de la comunidad a través del repositorio institucional de la Escuela Politécnica Nacional; sin embargo, la titularidad de los derechos patrimoniales nos corresponde a los autores que hemos contribuido en el desarrollo del presente trabajo; observando para el efecto las disposiciones establecidas por el órgano competente en propiedad intelectual, la normativa interna y demás normas.

Naraya Gabriela Narváez Arichábala

Dr. Manuel Fernando Cortez Estrella

RESUMEN

En el presente trabajo, se estudia el problema de Cauchy sobre todo $\mathbb{R}^3$, para la ecuación incompresible de Bardina-Navier-Stokes con un término de amortiguamiento $-\mu\,\vec{v}$, con velocidad inicial $\vec{v}_0 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ y fuerza externa $\vec{f} : [0,T) \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, descrita como ;

$$(BNS)\begin{cases} \partial_t \vec{v} + \textbf{div}((\vec{v} \otimes \vec{v})_\alpha) - \Delta \vec{v} + \vec{\nabla}\Pi = \vec{f} - \mu\vec{v}, \quad \alpha > 0, \\ \textbf{div}(\vec{v}) = 0, \\ \vec{u}(0,\cdot) = \vec{v}_0, \quad \textbf{div}(\vec{v}_0) = 0, \end{cases}$$

donde, $\vec{v} : [0,T) \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es la velocidad del fluido, $\Pi : [0,T) \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es la presión que actúa en el fluido y $(\cdot)_\alpha$ es el operador de Filtrado de Helmhotz, descrito en la sección 2.2.1.

En primera instancia, se analiza el buen colocamiento global en variable temporal de la solución de (BNS), en el marco de los espacios de Sobolev, en particular el espacio de energía asociado al problema.

A continuación, se estudia la regularidad de la solución del problema a partir de la regularidad de la fuerza externa $\vec{f}$ en ciertos espacios de Sobolev.

Finalmente, se presentará detalladamente el comportamiento asintótico en variable temporal de la solución de nuestro problema. Específicamente se detallará la existencia del conjunto Atractor global para el semigrupo asociado a (3.1). Para ello se utilizará herramientas del análisis armónico y de la teoría de semigrupos en espacios de Banach.

Palabras clave: ecuación de Bardina Navier Stokes, operador de Helmhotz, semi-grupos en espacios de Banach, Atractor global.

ABSTRACT

In this paper, we study the Cauchy problem for the Bardina-Navier-Stokes equation with, $\mu\vec{v}$, a damping term, on the whole three-dimensional. The equation describes an incompressible fluid with an initial velocity, $\vec{v}_0 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, and an external force $\vec{f} : [0, T) \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. The problem is formulated as follows:

$$(BNS) \begin{cases} \partial_t \vec{v} + \textbf{div}((\vec{v} \otimes \vec{v})_\alpha) - \Delta\vec{v} + \vec{\nabla}\Pi = \vec{f} - \beta\vec{v}, \quad \alpha > 0, \\ \textbf{div}(\vec{v}) = 0, \\ \vec{u}(0, \cdot) = \vec{v}_0, \quad \textbf{div}(\vec{v}_0) = 0, \end{cases}$$

where $\vec{v} : [0, T) \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ represents the fluid velocity, $\Pi : [0, T) \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ is the fluid pressure, and $(\,\cdot\,)_\alpha$ denotes the Helmholtz Filtering operator as described in section 2.2.1.

In the first instance, we study the existence, and uniqueness of global in time weak solutions in the energy space.

Next, the regularity of the problem's solution is studied based on the regularity of the external force $\vec{f}$, in certain Sobolev spaces.

Finally, the asymptotic behavior of the solution to our problem in the temporal variable will be presented in detail. Specifically, the existence of the global attractor set for the semi-group associated with (3.1), will be detailed. To achieve this, tools from harmonic analysis and the theory of semi-groups in Banach spaces will be used.

Keywords: Bardina Navier Stokes equation, Helmholtz operator, semi-groups in Banach spaces, global attractor.

Índice general

1. Descripción del componente desarrollado **1**

1.1. Objetivo general 1

1.2. Objetivos específicos 2

1.3. Alcance 2

2. Marco teórico **4**

2.1. Transformada de Fourier en la clase de Schwartz 4

2.1.1. Transformada de Fourier en distribuciones temperadas 6

2.1.2. Espacios de Sobolev no homogéneos 7

2.1.3. Espacios de Sobolev homogéneos 8

2.2. Ecuaciones de Bardina-Navier-Stokes con un término de amortiguamiento 11

2.2.1. Operador de Helmhotz 12

3. El buen colocamiento de la ecuación de Bardina-Navier-Stokes con un término de amortiguamiento **19**

3.1. Espacio de energía y el Teorema de buen colocamiento global en tiempo 21

4. Regularidad de la solución *mild* de la ecuación de Bardina-Navier-Stokes con un término de amortiguamiento **33**

4.1. Teorema de Regularidad en los espacios $H^s(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ 33

5. Existencia del Atractor global del semi-grupo asociado a la ecuación (3.1) **41**

5.1. Introducción a la Teoría de semi-grupos en espacios de Banach 41

5.2. Caracterización del conjunto atractor global para el semi-grupo asociado a la ecuación (2.1) 48

5.3. Conclusiones 54

5.4. Recomendaciones 56

A. Identidades vectoriales y estimaciones para ciertas funciones vectoriales **57**

A.1. Funciones a valores vectoriales 57

A.1.1. Importantes funciones vectoriales de $\mathbb{R}^3$ en R^3 58

B. Pormenores del Teorema de existencia global en variable temporal **63**

B.1. Deducción del Espacio de Energía y Estimaciones *apriori*, para la ecuación de Bardina-Navier-Stokes con un término de amortiguamiento 63

B.1.1. Desigualdades de Grönwall 67

C. Pormenores del Teorema de Regularidad **68**

C.1. Demostración de la continuidad de la solución $\vec{v}$ en $H^s(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, con $s \in [0, 1]$. 68

D. Pormenores del Teorema de existencia del Atractor global **71**

D.1. Prueba de la proposición 5.1 71

D.2. Prueba del teorema 5.3 72

D.3. Prueba de la proposición 5.7 73

Bibliografía **74**

Capítulo 1

Descripción del componente desarrollado

La finalidad de este proyecto es estudiar en detalle el comportamiento asintótico en variable temporal de las soluciones de la ecuación de Bardina-Navier-Stokes con un término de amortiguamiento. Con este fin empezaremos por revisar conceptos elementales del análisis armónico para posteriormente enfocarnos en el operador de Helmholtz que será una parte importante para poder introducir la ecuación de Bardina.

Una vez descrito el modelo físico que interpreta nuestra ecuación se continua con el teorema de buen colocamiento Local y global del problema de Cauchy de nuestro problema, en el marco de los espacios de Sobolev. Aquí aportaremos un nuevo resultado sobre la regularidad de soluci on de nuestro problema.

Finalmente como uno de los dos resultados principales de este manuscrito se detallará la demostración de la existencia del conjunto atractor global para el semi-grupo asociado a nuestra equación. Se finalizara con algunas conclusiones sobre las implicaciones de este último resultado.

1.1. Objetivo general

Describir el comportamiento asintótico en variable temporal y la regularidad de las soluciones del problema de Cauchy en todo el espacio de la ecuación de Bardina-Navier-Stokes con un término de amortiguamiento en el contexto de los espacios de Sobolev.

1.2. Objetivos específicos

1. Exponer brevemente los resultados principales con respecto a la teoría básica del análisis armónico con respecto a la transformada de Fourier.
2. Estudiar rigurosamente las propiedades del operador de Helmholtz en los espacios Sobolev.
3. Estudiar la existencia global en variable temporal de la solución de la ecuación Bardina-Navier-Stokes con un término de amortiguamiento.
4. Demostrar la regularidad de la solución de la ecuación Bardina-Navier-Stokes con un término de amortiguamiento.
5. Detallar la demostración de la existencia del conjunto Atractor Global asociado al semi-grupo de la ecuación de Bardina Navier Stokes con un término de amortiguamiento.

1.3. Alcance

El alcance de nuestro estudio se da, en el contexto de los α-*models*, con un término de amortiguamiento lineal, sobre todo $\mathbb{R}^3$, así como, para el caso periódico del sistema clásico de los α-*models*. Mientras que, para el caso clásico de los α-*models*, en todo el espacio $\mathbb{R}^3$, nuestro estudio no aporta ninguna nueva idea, a lo ya conocido. Esto se debe esencialmente a lo siguiente: en el caso de los α-*models* periódicos, la desigualdad de Poincaré, permite tener una estimación de energía adecuada, para mostrar la existencia del conjunto atractor global asociado.

En cambio, sobre todo el espacio $\mathbb{R}^3$, se pierde la desigualdad de Poincaré y con ella, el buen control, en las estimaciones de energía, que permiten demostrar la existencia del conjunto atractor global. Añadiendo un término de amortiguamiento lineal, a la ecuación del sistema clásico sobre todo $\mathbb{R}^3$, se obtiene el buen control de las estimaciones de energía y por tanto se puede demostrar la existencia del conjunto atractor global.

Capítulo 2

Marco teórico

Nuestro objetivo es estudiar la ecuación de Bardina-Navier-Stokes incompresible, con un término de amortiguamiento sobre todo $\mathbb{R}^3$, a tal efecto, empezaremos por presentar las principales herramientas que se utilzarán. Se omitirán algunas demostraciones clásicas en el marco teórico del análisis armónico El lector podrá revisar [1, 9, 12, 7] para mayor detalle.

2.1. Transformada de Fourier en la clase de Schwartz

DEFINICIÓN 2.1. *Definimos la clase de Schwartz como*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \left\{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \rho_{\alpha,\beta}(\varphi) := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left| x^\alpha \partial^\beta \varphi(x) \right| < +\infty, \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n \right\}.$$

Note que $(\rho_{\alpha,\beta})_{\alpha\in\mathbb{N}^n,\beta\in\mathbb{N}^n}$ son semi-normas definidas sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, por lo cual se le puede dar una estructura de espacio de Fréchet con la siguiente noción de convergencia.

DEFINICIÓN 2.2. *Sea $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Decimos que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a φ si*

$$\forall \ (\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n \qquad \rho_{\alpha,\beta}(\varphi_n - \varphi) \to 0 \qquad \textit{cuando} \qquad n \to +\infty.$$

Sobre este espacio (y también sobre el espacio de las distribuciones temperadas), la transformada de Fourier es una arma muy poderosa que permite convertir ecuaciones diferenciales en ecuaciones algebraicas más manejables en variable frecuencial. Esto será particularmente útil en nuestro estudio, se la define de la siguiente manera.

DEFINICIÓN 2.3 (Transformada de Fourier)**.** *Dada una función* $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, *definimos su* transformada de Fourier $\widehat{\varphi} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ *mediante la fórmula*

$$\widehat{(\varphi)}(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi\cdot x}\varphi(x)\,dx,\ \forall \xi \in \mathbb{R}^n,$$

siempre que tenga sentido.

A continuación se enunciará las propiedades básica de la transformada de Fourier.

PROPOSICIÓN 2.1. *Sean* $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) y \in \mathbb{R}^n$ *y* $\alpha \in \mathbb{N}^n$. *Entonces*

1. $\widehat{\widetilde{\varphi}} = \widetilde{\widehat{\varphi}}$, $\quad \widehat{\overline{\varphi}} = \overline{\widetilde{\widehat{\varphi}}}$, $\quad \widehat{\widehat{\varphi}} = (2\pi)^n \widetilde{\varphi}$, $\quad \widehat{\partial^\alpha \varphi}(\xi) = (i\xi)^\alpha \widehat{\varphi}(\xi)$.
2. *Si* $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, *entonces* $(\partial^\alpha \widehat{\varphi})(\xi) = \mathcal{F}\left([-ix]^\alpha \varphi(x)\right)(\xi)$.
3. $\widehat{\varphi * \psi} = \widehat{\varphi} \cdot \widehat{\psi}$.
4. $\widehat{\varphi \cdot \psi} = \frac{1}{(2\pi)^n} \widehat{\varphi} * \widehat{\psi}$.
5. $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\widehat{\psi} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi(\xi)}\psi(\xi) d\xi$.
6. $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\overline{\psi(x)} dx = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}(\xi)\overline{\widehat{\psi}(\xi)} d\xi$.
7. $\|\widehat{\varphi}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = (2\pi)^{n/2} \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$.

Donde, para $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, *definimos su reflexión como* $\widetilde{f}(x) := f(-x)$, *y definimos su conjugado como* $\widehat{f}$.

Demostración. Ver ([7]). $\square$

OBSERVACIÓN 1.

1. La transformada de Fourier $\widehat{\cdot} : \left(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \tau_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)}\right) \to \left(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \tau_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)}\right)$, es un operador lineal, inyectivo, sobreyectivo y secuencialmente continuo, por tanto sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es invertible con inversa secuencialmente continua (ver página 21 de [1]).

2. Utilizando la identidad de Plancherel y la densidad de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$, se puede definir sin ambigüedad la transformada de Fourier en $L^2(\mathbb{R}^n)$ (ver [6, 10]).

3. Las propiedades enunciadas en la proposición 2.1,se verifican para el caso de funciones en $L^2(\mathbb{R}^n)$. En particular, si $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, entonces $(\widehat{f})^{-1} = \frac{1}{(2\pi)^n}\widetilde{\widehat{f}}$.

2.1.1. Transformada de Fourier en distribuciones temperadas

Tras concluir la breve revisión de la Transformada de Fourier en el ámbito de Schwartz, dirigiremos nuestra atención al análisis de la transformada de Fourier en un contexto aún más amplio: el de las distribuciones temperadas.

DEFINICIÓN 2.4. *Definiremos al espacio de las distribuciones temperadas como el dual topológico de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, y lo notamos por $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, es decir,*

$$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) := \{v : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C} \mid v \textit{ es lineal y secuencialmente continua}\}.$$

En lo siguiente definiremos algunas distribuciones temperadas que serán de gran ayuda en lo posterior.

DEFINICIÓN 2.5. *Sean $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y $\alpha \in \mathbb{N}^n$ un multi-índice, definimos las siguientes distribuciones temperadas:*

1. *La reflexión de u, $\widetilde{u}$,como $\langle \widetilde{u}, \varphi \rangle := \langle u, \widetilde{\varphi} \rangle$, $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.*

2. *La derivada parcial de u de orden $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $\partial^\alpha u$, como $\langle \partial^\alpha u, \varphi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^\alpha \varphi \rangle$, $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.*

3. *El producto entre u y ψ, $u\psi$, como $\langle u\psi, \varphi \rangle := \langle u, \psi\varphi \rangle$, $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.*

4. *La convolución de u con ψ, $u * \psi$, como $\langle u * \psi, \varphi \rangle := \left\langle u, \widetilde{\psi} * \varphi \right\rangle$, $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.*

5. *La transformada de Fourier de u, notada por $\widehat{u}$, como $\langle \widehat{u}, \varphi \rangle := \langle u, \widehat{\varphi} \rangle$, $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.*

OBSERVACIÓN 2.

1. La transformada de Fourier en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, presentan similares propiedades como las vistas en la proposición 2.1, para el caso de las funciones de la clase Schwartz (ver [1]). En particular, se tiene que si $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ y $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, entonces

   a) $\widehat{\widetilde{u}} = \widetilde{\widehat{u}}$; $\quad \widehat{\partial^\alpha u} = (i\xi)^\alpha \widehat{u}$; $\quad \partial^\alpha \widehat{u} = \mathcal{F}\left((-ix)^{|\alpha|} u\right)$; $\quad \widehat{\widehat{u}} = (2\pi)^n \widetilde{u}$.

   b) $\widehat{u * \psi} = \widehat{u}\widehat{\psi}$; $\quad \widehat{u\psi} = \frac{1}{(2\pi)^n} \widehat{u} * \widehat{\psi}$.

2. De la misma manera que antes, $\widehat{\cdot} : (\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \tau_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)}) \to (\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \tau_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)})$ es un operador lineal, secuencialmente continuo, biyectivo y con inversa secuencialmente continua.

En lo siguiente tendrán verdadera importancia la clase de distribuciones temperadas tal que $\widehat{u} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ y además $(1 + |\cdot|^2)^s \widehat{u} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ para ciertos valores de $s \in \mathbb{R}$.

2.1.2. Espacios de Sobolev no homogéneos

En el contexto del análisis armónico, los espacios de Sobolev definidos por medio de la transformada de Fourier tienen propiedades interesantes, como la caracterización de su regularidad a partir de la integrabilidad en espacios $L^2_\xi(\mathbb{R}^3)$ ponderados con polinomios de la forma $(1 + |\xi|^2)^s$ o $|\xi|^{2s}$ para algún $s \in \mathbb{R}$. Por esta razón, estos espacios de Sobolev proporcionan una herramienta sustancial para analizar y comprender la regularidad de las soluciones de ecuaciones diferenciales parciales y otros problemas de análisis matemático. Así, comenzaremos definiendo los espacios de Sobolev homogéneos y no homogéneos.

DEFINICIÓN 2.6. *Sea $s \in \mathbb{R}$, el espacio de Sobolev no homogéneo de orden s, $H^s(\mathbb{R}^n)$, esta definido de la siguiente forma:*

$$H^s(\mathbb{R}^n) := \left\{ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \widehat{u} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) : \|u\|_{H^s} = \left[\int_{\mathbb{R}^n} \left(1 + |\xi|^2\right)^s |\widehat{u}(\xi)|^2 \, d\xi \right]^{1/2} < +\infty \right\}.$$

Como hemos dicho antes, está introducción a los espacios de Sobolev esta enfocado de una manera somera, por lo que, la siguiente proposición cubre todo los resultados útiles para este trabajo concernientes a los

Espacios de Sobolev no homogéneos. El lector interesado en profundizar el tema puede dirigirse a ver [1, 9, 7].

PROPOSICIÓN 2.2. *Los siguientes enunciados son verdaderos:*

1. *Dado $s \in \mathbb{R}$, $H^s(\mathbb{R}^n)$ es un espacio de Hilbert con producto interno dado por*

$$(u,v)_{H^s} := \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s \widehat{u}(\xi)\overline{\widehat{v}(\xi)} d\xi, \forall u, v \in H^s(\mathbb{R}^n).$$

2. *Si $s_1 \leq s_2$, entonces $H^{s_2}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{s_1}(\mathbb{R}^n)$.*

3. *Para $s \in \mathbb{R}$, la clase de Schwartz es densa en $H^s(\mathbb{R}^n)$.*

4. *Para $s \in \mathbb{R}$, $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ es el dual topológico de $H^s(\mathbb{R}^n)$.*

5. *Dado $s \in \mathbb{R}$, tenemos que*

$$\|\cdot\|_{H^s}{}^{1} \simeq \|\cdot\|_{L^2} + \left[\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s} |\widehat{\cdot}(\xi)|^2 d\xi\right]^{1/2}$$

.

2.1.3. Espacios de Sobolev homogéneos

En esta parte del texto precisaremos los espacios de Sobolev homogéneos, que son una clase especial de distribuciones temperadas, las cuales imponen una condición de homogeneidad en la transformada de Fourier de las funciones. Son especialmente útiles en el estudio de EDPs, ya que proporcionan una estructura natural para definir y analizar soluciones débiles.

DEFINICIÓN 2.7. *Sea $s \in \mathbb{R}$, el espacio de Sobolev homogéneo de orden s, $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$, está definido de la siguiente forma:*

$$H^s(\mathbb{R}^n) := \left\{ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \widehat{u} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) : \|u\|^2_{\dot{H}} := \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s} \left|\widehat{u}(\xi)\right|^2 d\xi < +\infty \right\}.$$

[1] Si E es un espacio normado dotado de dos normas $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}, \|\cdot\|_{\mathbb{E}}$, usaremos la notación $|\cdot\|_{\mathcal{E}} \simeq \|\cdot\|_{\mathbb{E}}$ para indicar que estas normas son *equivalentes*: hay dos constantes $C_1, C_2 > 0$ tal que para todo $e \in E$ tenemos $C_1\|e\|_{\mathcal{E}} \leq \|e\|_{\mathbb{E}} \leq C_2\|e\|_{\mathcal{E}}$.

Continuando con la misma idea de esta parte del manuscrito, en la siguiente proposición enunciaremos lo estríctamente necesario sobre las propiedades de los espacios de Sobolev no homogéneos para el propósito final del texto. Para los detalles el lector podrá referenciarse en [1, 7].

PROPOSICIÓN 2.3. *Los siguientes enunciados son verdaderos*

1. $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$ *es un espacio normado , con norma* $\|\cdot\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)}$.
2. *Si* $s \geq 0 \Rightarrow H^s(\mathbb{R}^n) \subseteq \dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$.
3. *Si* $s \leq 0 \Rightarrow \dot{H}^s(\mathbb{R}^n) \subseteq H^s(\mathbb{R}^n)$.
4. $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$ *es un espacio de Hilbert ssi* $s < n/2$
5. *Si* $|s| < n/2$*, entonces el espacio dual de* $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$ *es* $\dot{H}^{-s}(\mathbb{R}^n)$.

En lo que respecta a los espacios homogéneos de Sobolev, no se establece ninguna relación a través de la inclusión, a diferencia de lo que ocurre en los espacios de Sobolev no homogéneos.

Finalmente, para terminar este breve repaso de los espacios de Sobolev enunciaremos las inclusiones continuas, que se tienten entre los espacios homoéneos y no homogéneos, así como importantes estimativas que se utilizarán a lo largo de este escrito. El lector interesado en las demostraciones de ésta última compilación de resultados, puede referirse a [12, 9, 1].

TEOREMA 2.4. *Los siguientes enunciados son verdaderos*

1. *Si* $s \in [0, n/2)$*, entonces* $H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{\frac{2n}{2-2s}}(\mathbb{R}^n)$ *y* $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{\frac{2n}{2-2s}}(\mathbb{R}^n)$.
2. *Si* $s > n/2$*, entonces* $H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n)$.
3. *Si* $s > n/2$*, entonces,* $\forall u, v \in H^s(\mathbb{R}^n)$,
$$\|u\,v\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leq C_{n,s} \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \|v\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} ,$$
4. *Sean* $s \geq 0$ *y* $\delta \in (0, n/2)$*. Consideremos* $u, v \in H^s(\mathbb{R}^n) \cap \dot{H}^\delta(\mathbb{R}^n)$*. Se tiene que* $u\,v \in H^{s+\delta-\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n) \cap \dot{H}^{s+\delta-\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n)$ *y además*
$$\|u\,v\|_{H^{s+\delta-n/2}} \leq C_n \left(\|u\|_{H^s} \|v\|_{\dot{H}^\delta} + \|v\|_{H^s} \|u\|_{\dot{H}^\delta}\right),$$
$$\|u\,v\|_{\dot{H}^{s+\delta-n/2}} \leq C_n \left(\|u\|_{\dot{H}^s} \|v\|_{\dot{H}^\delta} + \|v\|_{\dot{H}^s} \|u\|_{\dot{H}^\delta}\right).$$

5. *Sean* $\vec{v}, \vec{w} \in H^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) \cap \dot{H}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$. *Se tiene que* $\vec{u}, \vec{w} \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, $(\vec{v} \otimes \vec{w}) \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, *y además:*

$$\|(\vec{v} \otimes \vec{w})\|_{\dot{H}^1}^2 \leq 2\left[\|\vec{v}\|_{\dot{H}^1}^2 \|\vec{w}\|_{\dot{H}^2} \|\vec{w}\|_{\dot{H}^1} + \|\vec{w}\|_{\dot{H}^1}^2 \|\vec{v}\|_{\dot{H}^2} \|\vec{v}\|_{\dot{H}^1}\right].$$

Una vez terminado esta breve introducción de las principales herramientas de este trabajo, sugerimos al lector que antes de avanzar al siguiente capítulo, consulte el apéndice A, donde se proporcionan algunas identidades útiles para funciones vectoriales. Esto debido al hecho que nuestro problema es en realidad un sistema de ecuaciones de $[0, +\infty[\times \mathbb{R}^3$ en $[0, +\infty[\times \mathbb{R}^3$ y la terminología que utilizaremos es concisa para simplicar la lectura y podría prestarse a confución.

Por otro lado, dada la naturaleza de la ecuación abordada en este estudio, los espacios de Banach que se emplearan son espacios de funciones definidas en variable temporal y en variable espacial, así se recomienda al lector, también, dar un breve repaso a los espacios de Lebesgue en tiempo y espacio así como a los espacios de Sobolev en tiempo y espacio. Para obtener detalles más profundos, es recomendable consultar referencias como: [7] y [3].

2.2. Ecuaciones de Bardina-Navier-Stokes con un término de amortiguamiento

La ecuación de Navier-Stokes incompresible es una ecuación referencial en la mecánica de fluidos que detalla el movimiento de un fluido viscoso e incompresible, sobre todo $\mathbb{R}^3$. La ecuación de Navier-Stokes incompresible se describe como:

$$\partial_t \vec{v} + \textbf{div}(\vec{v} \otimes \vec{v}) - \Delta \vec{v} + \vec{\nabla} \Pi = 0, \quad \textbf{div}(\vec{v}) = 0,$$

donde, $\vec{v} : [0, +\infty[\times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ y $\Pi : [0, +\infty[\times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, son la velocidad del fluido y la presión respectivamente. Esta ecuación se basa en los principios de conservación de masa y de momento.

Debido al gran abanico de opciones que se tiene para abordar esta ecuación y la dificultad que presenta entorno a la existencia global y regularidad de sus soluciones, los investigadores muchas veces toman como punto de referencia la ecuación de Navier-Stokes, para modelizar otro tipo de fenómenos. En particular, para los fluidos turbulentos se tiene la ecuación de Bardina-Navier-Stokes o simplente ecuación de Bardina, que proporciona una descripción física detallada de los procesos turbulentos en un fluido: se considera el flujo turbulento como una superposición de un flujo medio y fluctuaciones turbulentas alrededor de ese flujo medio. La ecuación describe, la evolución de las fluctuaciones turbulentas y tiene en cuenta la interacción entre ellas y el flujo medio.

Una de las características fundamentales de la ecuación de Bardina es que introduce un término de transporte adicional, llamado "término de convección espectral". Este elemento tiene en cuenta el transporte de la energía turbulenta a través de las escalas de longitud en el flujo turbulento. Esencialmente, dicho término captura la transferencia de energía de las escalas grandes a las escalas pequeñas de turbulencia.

En términos de un sitema adecuado para el buen colocamiento en los espacios de Sobolev la ecuación de Bardina es descrita como

$$\partial_t \vec{v} + \textbf{div}((\vec{v} \otimes \vec{v})_\alpha) - \Delta \vec{v} + \vec{\nabla} \Pi = 0, \quad \textbf{div}(\vec{v}) = 0, \quad \vec{v}(0, \cdot) = \vec{v}_0, \quad \alpha > 0,$$

donde el operador de filtrado $(\ \cdot\ )_\alpha$ está dado resoviendo la ecuación de Helmholtz

$$-\alpha^2\Delta(\varphi)_\alpha + (\varphi)_\alpha = \varphi.$$

En el presente trabajo se estudia el problema de Cauchy en $\mathbb{R}^3$ de la ecuación de Bardina-Navier-Stokes incompresible incorporando un término de amortiguamiento, descrito como:

$$\begin{cases} \partial_t\vec{u} + \mathbf{div}((\vec{u}\otimes\vec{u})_\alpha) - \Delta\vec{u} + \vec{\nabla}\Pi = \vec{f} - \mu\vec{v}, \quad \alpha > 0,\ \mu > 0, \\ \mathbf{div}(\vec{v}) = 0, \\ \vec{v}(0,\cdot) = \vec{v}_0, \quad \mathbf{div}(\vec{v}_0) = 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

La ecuación de Bardina-Navier-Stokes con el término de amortiguamiento $-\mu\, u$ es una variante de la ecuación de Bardina-Navier-Stokes que se utiliza para modelar ciertos fenómenos en los océanos, como la disipación de energía en las capas superficiales debido a la acción del viento y otros factores [11]. Además, la introducción de este nuevo término permite mejorar la capacidad del modelo para representar fenómenos turbulentos realistas y mejorar la convergencia numérica en simulaciones de flujo turbulento (ver [5]).

Para poder abordar el buen colocamiento, tanto local como global en los espacios $H^s(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$ del problema (2.1) es necesario hablar en detalle del Operador de Helmholtz.

2.2.1. Operador de Helmhotz

La ecuación de Helmholtz sobre $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, es una ecuación lineal elíptica definida como:

$$(-\alpha^2\Delta + Id)\psi = \varphi, \tag{2.2}$$

donde $\alpha > 0$, $\varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ es una distribución temperada dada, y $\psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ es la incógnita del problema. Para poder resolver la ecuación (2.2) sobre $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, es necesario obtener la solución fundamental, que sirve como base para poder resolver la ecuación para toda $\psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Es por tanto que consideramos el siguiente problema:

$$(-\alpha^2\Delta + Id)H_\alpha = \delta_0. \tag{2.3}$$

Aplicando la transformada de Fourier a ambos lados se puede llegar a

$$\widehat{H}_\alpha(\xi) = \frac{1}{1+\alpha^2|\xi|^2}.$$

Ahora bien, para obtener H_α explícitamente en variable espacial, consideramos el siguiente cambio de variable $\eta = \alpha\xi$, por el cual se obtiene que

$$\widehat{H}_\alpha\left(\frac{1}{\alpha}\eta\right) = \frac{1}{1+|\eta|^2},$$

además, por las propiedades de la transformada de Fourier tenemos que

$$\widehat{H}_\alpha\left(\frac{\eta}{\alpha}\right) = (\alpha)^n\widehat{H}_\alpha(\eta),$$

de donde se sigue que

$$\widehat{H}_\alpha(\eta) = \frac{1}{\alpha^n}\left(\frac{1}{1+|\eta|^2}\right). \tag{2.4}$$

Por otro lado, sabemos que

$$\widehat{B}(\eta) = \frac{1}{1+|\eta|^2},$$

donde $B(\cdot)$ esta definido como:

$$B(x) = \pi^{n/2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^{n/2}}e^{-t-\frac{(\pi|x|)^2}{t}}dt. \tag{2.5}$$

$B(\cdot)$ es llamado el Potencial de Bessel (ver [6]). Con esta consideración en mente y por el hecho que la transformada de Fourier actúa como un isomorfismo en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, podemos aplicar sin dificultad la transformada inversa de Fourier a la ecuación (2.4), que junto con la identidad (2.5), nos permite concluir que

$$H_\alpha(\alpha x) = \frac{1}{\alpha^n}\pi^{n/2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^{n/2}}e^{-t-\frac{\pi^2|x|^2}{t}}dt.$$

Finalmente, con el cambio de variable $y = 2\pi\alpha x$ obtenemos

$$H_\alpha(y) = \frac{\pi^{n/2}}{\alpha^n} \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^{n/2}} e^{-t-\frac{|y|^2}{4t\alpha^2}} dt. \tag{2.6}$$

H_α es también conocida como el **núcleo de Helmholtz**, debido a que contiene de algún modo la información completa sobre como construir soluciones generales del problema (2.2). En la siguiente proposición se desarrollará esta idea, además de algunas propiedades de H_α.

Proposición 2.5. *Sea $\alpha > 0$ y H_α , el núcleo de Helmholtz. Se tiene que los siguientes enunciados son verdaderos:*

1. $\|H_\alpha\|_{L^1} = (2\pi)^n$.

2. *Sea $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, entonces:* $\forall x \in \mathbb{R}^n$,

$$\left(\left(-\alpha^2\Delta + Id\right)(\varphi) * H_\alpha\right)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(-\alpha^2\Delta\varphi(y) + \varphi(y)\right) H_\alpha(x-y)\, dy = \varphi(x).$$

Demostración. Empezemos por probar el literal 1) de esta proposición. Gracias a Teorema de Fubini y a la identidad (2.6), tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} H_\alpha(x) dx = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\alpha^n} \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^{\frac{n}{2}}} e^{-t} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t\alpha^2}} dx\, dt. \tag{2.7}$$

Haciendo el cambio de variable $y = \frac{x}{2\sqrt{t}\alpha}$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} H_\alpha(x)\, dx &= \frac{\pi^{\frac{n}{2}} (2\,\alpha)^n}{\alpha^n} \int_0^{+\infty} e^{-t} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|y|^2} dy\, dt \\
&= (2\pi)^n \int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt = (2\pi)^n.
\end{aligned}$$

Ahora, para mostrar el literal 2) de esta proposición, consideremos $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ fijo arbitrario. Entonces, utilizando las propiedades de la transformada de Fourier y su inversa en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, podemos darnos cuenta que, si deseamos encontrar $\psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, tal que $(-\alpha^2\Delta + Id)\psi = \varphi$, se tiene que ψ es de la forma

$$\psi = H_\alpha * \varphi, \tag{2.8}$$

Por tanto, con esta última igualdad presente y utilizando las propiedades de la convolución y la regularidad de φ, tenemos que

$$\begin{aligned}\left(\left(-\alpha^2\Delta + Id\right)(\varphi) * H_\alpha\right)(x) &= (-\alpha^2\Delta\varphi * H_\alpha)(x) + (\varphi * H_\alpha)(x)\\ &= (-\alpha\Delta + Id)\,\psi(x) = \varphi(x).\end{aligned}$$

$\square$

OBSERVACIÓN 3.

1. En este contexto, para un parámetro $\alpha > 0$, definimos el operador de Helmhotz
$$\begin{aligned}(\cdot)_\alpha \colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\\ \varphi \quad &\longmapsto (\varphi)_\alpha = H_\alpha * \psi.\end{aligned}$$

2. En el ámbito de las ecuaciones que gobiernan la mecánica de fluidos turbulentos, el operador $(\cdot)_\alpha$ recibe el nombre de operador de **filtrado promedio**. Esta denominación surge debido a que este operador posibilita la formulación de un modelo preciso que describe el comportamiento a gran escala del fluido, al mismo tiempo que realiza un filtrado o promedio de las dinámicas en escalas menores que $\alpha > 0$.

Ahora mostraremos que $(\cdot)_\alpha$ es un operador es auto-adjunto.

PROPOSICIÓN 2.6. *El operador $(\cdot)_\alpha$ es auto-adjunto con respecto al producto escalar $(\cdot,\cdot)_{L^2}$. Es decir*

$$\forall f, g \in L^2(\mathbb{R}^3), \qquad ((f)_\alpha, g)_{L^2} = (f, (g)_\alpha)_{L^2}.$$

Demostración. Sean $f, g \in L^2(\mathbb{R}^3)$, sabemos que

$$\begin{aligned}((f)_\alpha, g)_{L^2} &= \int_{\mathbb{R}^n} H_\alpha * f(x) g(x)dx,\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\widetilde{H_\alpha} * g(x)dx,\end{aligned}$$

donde $\widetilde{H_\alpha}$ denota la reflexión del núcleo de Helmholtz; a su vez, es una función par, por lo que se tiene

$$\begin{aligned}((f)_\alpha, g)_{L^2} &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) H_\alpha * g(x)dx,\\ &= (f, (g)_\alpha)_{L^2}.\end{aligned}$$

$\square$

En relación a los espacios $H^s(\mathbb{R}^3)$, el operador de filtrado $(\cdot)_\alpha$ actúa como un regularizador. Para ahondar en este aspecto, presentamos la siguiente proposición.

Proposición 2.7. *Sea f una función con la regularidad adecuada. Se tiene los siguientes enunciados:*

1. $\|(f)_\alpha\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} \qquad \forall 1 \leq p \leq +\infty.$
2. $\|(f)_\alpha\|_{\dot{H}^1} \leq c_{1,\alpha}\, \|f\|_{L^2}.$
3. $\|(f)_\alpha\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq c_{2,\alpha}\, \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \qquad 1 \leq n \leq 3.$
4. $\|(f)_\alpha\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq c_{2\,\alpha}\, \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}, \qquad 1 \leq n \leq 3,$

donde $c_{1,\alpha}$ y $c_{2,\alpha}$ son constantes que dependen de α.

Demostración. La primera desigualdad es inmediata gracias a la desigualdad de Young y el segundo literal de la proposición 2.5.

Dado $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ probemos ahora que

$$\|(f)_\alpha\|_{L^2} \leq c_{1,\alpha} \|f\|_{L^2},$$

donde $c_{1,\alpha}$ es una constante que depende de α. Gracias a la definición del operador de Helmhotz, tenemos que

$$\begin{aligned}\|(f)_\alpha\|_{\dot{H}^1}^2 &= \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^2 \Big(\frac{1}{1+\alpha^2|\xi|^2}\Big)^2 |\widehat{f}(\xi)|^2\, d\xi \\ &\leq c_{1,\alpha} \int_{\mathbb{R}^3} |\widehat{f}(\xi)|^2\, d\xi = c_{1,\alpha}\|f\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

Para el tercer literal, supongamos que $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, donde $1 \leq n \leq 3$. Gracias a la desigualdad de Young tenemos que

$$\|(f)_\alpha\|_{L^\infty} \leq \|H_\alpha\|_{L^2} \|f\|_{L^2}.$$

Analicemos la cantidad $\|H_\alpha\|_{L^2}$. Entonces se tiene

$$\begin{aligned}
\|H_\alpha\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+\alpha^2|\xi|^2)^2} d\xi. \\
&= \int_{\overline{B}(0,1)} \frac{1}{(1+\alpha^2|\xi|^2)^2} d\xi + \int_{(\overline{B}(0,1))^C} \frac{1}{(1+\alpha^2|\xi|^2)^2} d\xi \\
&= \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{(1+\alpha^2|\xi|^2)^2}\right) + \int_{(\overline{B}(0,1))^c} \frac{1}{(1+\alpha^2|\xi|^2)^2} d\xi \\
&= c_{2,\alpha}.
\end{aligned}$$

Finalmente, supongamos que $f \in L^2$, con $1 \leq n \leq 3$. Por la desigualdad de Young tenemos que

$$\|(f)_\alpha\|_{L^2}^2 \leq \|H_\alpha\|_{L^2} \|f\|_{L^1},$$

y por el literal anterior se sigue el resultado. □

Como resultado de las propiedades básicas de la regularidad elíptica de la ecuación de Helmholtz (véase [6]), también se tiene la siguiente estimación

$$\|(\varphi)_\alpha\|_{H^2} \leq \frac{C}{\alpha}\|\varphi\|_{L^2}.$$

Más aún, para $s \geq 0$ se tiene la siguiente desigualdad

$$\|(\varphi)_\alpha\|_{H^{s+2}} \leq \frac{C}{\alpha}\|\varphi\|_{H^s} \qquad \forall \varphi \in H^{s+2}.$$

Como una consecuencia de la identidad anterior, tenemos el siguiente resultado.

Lema 2.8. *Sea $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión que converge a φ en $H^s(\mathbb{R}^3)$. Entonces $(((\varphi)_\alpha)_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $(\varphi)_\alpha$ en $H^{s+2}(\mathbb{R}^3)$.*

Demostración. Es inmediato de la desigualdad (2.8). □

Hasta aquí, tenemos todo lo necesario para discutir sobre la regularidad y el comportamiento asintótico en variable temporal de la solución del problema 2.1. Como mencionamos antes, nuestro punto de partida es el buen colacamiento del problema de Cauchy en los espacios $H^s(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$. Por la naturaleza misma de nuestra ecuación, los resultados para la ecuación de Navier-Stokes incomprensible estarán presentes en algunas estimaciones. En particular, las estimaciones que tienen que ver con el núcleo del calor en los espacios $H^s(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ y las propiedades del proyector de Leray en dichos espacios, serán usadas sin hacer reparos en las demostraciones. El lector interesado puede profundizar en estos temas en [12], donde se hace todo el detalle de estos resultados clásicos.

Capítulo 3

El buen colocamiento de la ecuación de Bardina-Navier-Stokes con un término de amortiguamiento

Retomando el problema principal, tenemos la siguiente expresión:

$$(BNS)\begin{cases} \partial_t\vec{v} + div((\vec{v}\otimes\vec{v})_\alpha) - \Delta\vec{v} + \vec{\nabla}\Pi = \vec{f} - \mu\vec{v} \\ \vec{v}(0,\cdot) = \vec{v_0} \\ div(\vec{u}) = 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Por el argumento de punto fijo que se utilizará para la obtención del teorema de buen colocamiento global en variable temporal del problema (3.1), se necesita presentar la formulación integral asociada, así como la definición de solución *mild* o solución en el sentido de Duhamel. Notemos primero que, por nuestras hipótesis podemos ver a la presión Π en función de $\vec{v}$. En efecto, suponiendo toda la regularidad para $\vec{v}$ como para Π, aplicando el operador divergencia a ambos lados de la ecuación (3.1), y teniendo en cuenta que $\vec{f}$ es a divergencia nula, se sigue que

$$\begin{aligned} \text{div}(\partial_t\vec{v}) &= \text{div}(\Delta\vec{v}) - \text{div}(\text{div}((\vec{v}\otimes\vec{v})_\alpha)) - \text{div}(\vec{\nabla}\Pi) + \text{div}(\vec{f}) - \mu\,\text{div}(\vec{v}). \\ 0 &= -\text{div}(\text{div}((\vec{u}\otimes\vec{u})_\alpha)) - \text{div}(\vec{\nabla}\Pi) \\ \Delta\Pi &= -\text{div}(\text{div}((\vec{v}\otimes\vec{v})_\alpha)) \\ \Pi &= (\Delta)^{-1}(-\text{div}(\text{div}((\vec{v}\otimes\vec{v})_\alpha))) \end{aligned} \tag{3.2}$$

Es así que si logramos plantear nuestro problema en función únicamente de la incógnica $\vec{v}$, podremos resolver nuestro problema. Para ello, aplicando el Operador de Leray a ambos lados de la ecuación (3.1), y al ser $\vec{v}$, $\vec{f}$ a divergencia nula, tenemos

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\partial_t\vec{v}) &= \mathbb{P}(\Delta\vec{v}) - \mathbb{P}(\mathbf{div}((\vec{v}\otimes\vec{v})_\alpha)) - \mathbb{P}(\vec{\nabla}\Pi) + \mathbb{P}(\vec{f}) - \mu\,\mathbb{P}(\vec{v}),\\ \partial_t\vec{v} &= \Delta\vec{v} - \mathbb{P}(\mathbf{div}((\vec{v}\otimes\vec{v})_\alpha)) + \vec{f} - \mu\,(\vec{v}).\end{aligned}$$

Nuestro problema se ha transformado en un problema del calor no lineal de la forma $\partial_t\vec{v} - \Delta\vec{v} = F(\vec{v})$, donde $F(\vec{v}) = -\mathbb{P}(\mathbf{div}((\vec{v}\otimes\vec{v})_\alpha)) + \vec{f} - \mu\,(\vec{v})$. Utilizando la teoría clásica de semi-grupos en espacios de Banach, podemos concluir que $\vec{v}$ se puede escribir de la siguiente forma integral:

$$\vec{v}(t,\cdot) = h_t*\vec{v}_0 + \int_0^t h_{t-s}*\vec{f}(s,\cdot)\,ds - \int_0^t h_{t-s}*\mathbb{P}(\mathbf{div}((\vec{v}\otimes\vec{v})_\alpha))(s,\cdot)\,ds - \mu\int_0^t h_{t-s}*\vec{v}(s,\cdot)\,ds, \tag{3.3}$$

donde $(h_t)_{t\geq 0}$ es el semigrupo del calor que esta definido como

$$h_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{3/2}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3).$$

Observación 4.

1. Los operados $\mathbb{P}$ y $(\cdot)_\alpha$ conmutan sin ningún problema.

2. A diferencia del problema Navier-Stokes incompresible, se tiene que el término div$((\vec{v}\otimes\vec{v})_\alpha$ se comporta bien en los espacios H^s, debido a la naturaleza del operador $(\cdot)_\alpha$, que permite regularizar las funciones en dichos espacios.

Una vez entendida la formulación de Duhamel de nuestro problema (3.1) es conveniente definir claramente el tipo de soluciones con las cuales vamos a trabajar.

Definición 3.1 (Solución *mild* del problema (3.1)). *Decimos que un par* $(\vec{v},\Pi)$*, es una solución mild del problema* (3.1)*, si existe un espacio funcional para* $\vec{v}$ *y otro para* Π *tales que:*

- $\vec{v}$ *satisface la formulación integral* (3.3).

- $\vec{v}$ *es conseguida a partir de un argumento de punto fijo de Banach.*

- Π *verifica* (3.2), *en sentido de distribuciones temperadas.*

En términos generales, las soluciones *mild* no constituyen soluciones clásicas del problema (3.1). Por contraste, todas las soluciones *mild* son soluciones en el sentido de las distribuciones (la afirmación contraria es falsa). En nuestro caso, una de los objetivos principales de este trabajo es demostrar que nuestra solución *mild* coincide con la soución clásica del problema (3.1). Ahora, con respecto al espacio de energía de nuestro problema tenemos las siguientes observaciones.

OBSERVACIÓN 5.

1. Por la regularidad que se tiene gracias al operador de filtrado $(\cdot)_\alpha$, el espacio de energía del problema (3.1) será más regular que el espacio de energía para la ecuación de Navier Stokes incompresible.

2. En nuestro caso, tanto el espacio funcional, en el cual se construye el argumento de punto fijo para construir soluciones *mild*, como el espacio de energía natural al problema coinciden, cosa que no pasa para el caso de Navier-Stokes.

3.1. Espacio de energía y el Teorema de buen colocamiento global en tiempo

En el marco de referencia que nos encontramos, las estimaciones *apriori* son de gran ayuda para obtener información que nos permita encontrar el espacio funcional adecuado, donde tentativamente se encuentren las soluciones del problema (3.3). Además, estas estimaciones permiten comprender el comportamiento cualitativo (existencia, regularidad, unicidad, etc.) de dichas soluciones. Dada la limitación de espacio, hemos trasladado todo este análisis didáctico al apéndice de este manuscrito (ver B.1).

Así continuaremos, definiendo el espacio de energía donde construiremos la solución *mild* de nuestro problema (3.1)

DEFINICIÓN 3.2. *Al espacio* $L^\infty\big(0,T,H^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)\big)\cap L^2\big(0,T,\dot{H}^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)\big)$ *se lo denomina* espacio de energía *del problema* (3.1).

Para enunciar nuestro primer teorema, notaremos $H^1_\alpha=(H^1,\|\cdot\|_{H^1_\alpha})$.

TEOREMA 3.1. *Sean* $\vec{v}_0\in H^1_\alpha(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$ *y* $\vec{f}\in L^2([0,\infty[,H^1_\alpha(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3))$ *dos funciones a divergencia nula. Entonces, para todo* $\alpha>0$ *y* $\mu>0$ *existen un par de funciones* $\vec{v}=\vec{v}_{\alpha,\mu}\in L^\infty([0,+\infty[,H^1_\alpha(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3))\cap L^2_{loc}([0,+\infty[,\dot{H}^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3))$*, y* $\Pi=\Pi_{\alpha,\mu}\in L^2_{loc}([0,+\infty[,H^3(\mathbb{R}^3))\cap L^1_{loc}([0,+\infty[,H^4(\mathbb{R}^3))$*, tales que,* $(\vec{v},\Pi)$ *es la* ***única*** *solución mild del problema (3.1). Además se verifican la siguiente igualdad de energía:*

$$\frac{1}{2}(\|\vec{v}(t,\cdot)\|^2_{H^1_\alpha})+\alpha^2\int_0^t||\vec{v}(s,\cdot)||^2_{\dot{H}^2}\,ds+\int_0^t\|\vec{v}(s,\cdot)\|^2_{\dot{H}^1}\,ds-\frac{1}{2}\|\vec{v}_0\|^2_{H^1_\alpha}$$
$$=-\alpha^2\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}\Delta(\vec{f})(s,x)\cdot\vec{v}(s,x)\,dx\,ds+\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}\vec{f}(s,x)\cdot\vec{v}(s,x)\,dx\,dt-\mu\int_0^t\|\vec{v}(s,\cdot)\|^2_{H^1_\alpha}\,ds.$$

Demostración. La demotración del teorema 3.1 será dividida en tres etapas:

- **Etapa 1:** fijamos $T>0$ arbitrario y consideramos el espacio de Banach:
$$E_T=L^\infty([0,T],H^1_\alpha(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3))\cap L^2([0,T],\dot{H}^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)),$$
donde la norma esta definida:
$$\|\vec{v}\|_{E_T}=\sup_{0\leq t\leq T}\|\vec{v}(t,\cdot)\|_{H^1_\alpha}+\Big(\int_0^T\|\vec{v}(t,\cdot)\|^2_{\dot{H}^2}\,dt\Big)^{\frac{1}{2}}.$$
Mostraremos a partir de un teorema de punto fijo de Banach que existe T, tal que, existe una *mild* solución del problema (3.1). Además, en esta etapa mostraremos la estimación de energía.

- **Etapa 2:** mostraremos que T puede tomarse arbitrariamente. Para ello utilizaremos estimaciones del tipo Gronwall. También se mostrará que, la presión Π asociada a $\vec{v}$, pertenece al espacio adecuado.

- **Etapa 3:** finalmente, mostraremos la unicidad de la solución.

Etapa 1 Empezaremos por fijar el teorema de punto fijo de Banach adecuado para nuestro problema.

TEOREMA 3.2. *Sean* $(E, \|\cdot\|_E)$ *un espacio de Banach y* $u_0 \in E$ *un dato inicial tal que* $\|u_0\|_E \leq \delta$. *Asumamos que* $L\colon E \to E$ *es una aplicación lineal, y* $B\colon E \times E \to E$ *es una aplicación bilineal, que satisfacen*

$$\|L(u)\|_E \leq C_L \ \|u\|_e \qquad y \qquad \|B(u,w)\|_E \leq C_B \ \|u\|_E \|w\|_E \quad \forall\, v, w \in E,$$

donde las constantes de continuidad satisfacen que

$$0 < 3\ C_L \ < 1, \quad 0 < \ 9\ C_B\ \delta < \ 1 \quad y \quad C_L \ + \ 6\ C_B \delta < 1.$$

Entonces la ecuación $u = u_0 + L(u) + B(u,u)$ *admite una única solución* $u \in E$, *tal que* $\|u\| \leq 3\ \delta$.

Demostración. Ver [4]. □

Ahora, volviendo a abordar la formulación de Duhamel, de nuestro problema, tenemos que

$$\vec{v}(t,\cdot) = h_t * \vec{v}_0 + \int_0^t h_{t-s} * \vec{f}(s,\cdot)\, ds - \int_0^t h_{t-s} * \mathbb{P}(\textbf{div}((\vec{v} \otimes \vec{v})_\alpha))(s,\cdot)\, ds - \mu \int_0^t h_{t-s} * \vec{v}(s,\cdot)\, ds.$$

Es así, que para nuestro caso, consideramos:

$$E = E_T, \qquad u_0 = h_t * \vec{v}_0 + \int_0^t h_{t-s} * \mathbb{P}(\vec{f})(s,\cdot)\, ds.$$

$$B(v,w) = -\int_0^t h_{t-s} * \mathbb{P}(\textbf{div}((\vec{u} \otimes \vec{w})_\alpha))(s,\cdot)\, ds.$$

$$L(v) = -\mu \int_0^t h_{t-s} * \vec{u}(s,\cdot)\, ds.$$

Técnicamente, es suficiente mostrar que: $u_0 \in E$, la continuidad de $B(\cdot,\cdot)$ en $E \times E$ y la continuidad de $L(\cdot)$ en E. Esto debido a que, con estos resultados se podrá adaptar $T^* > 0$ suficientemente pequeño, de tal manera que se tenga completamente las hipótesis del teorema 3.2. Para más detalle, ver [4]. Enunciaremos el siguiente lema muy útil para la primera etapa de esta demostración.

LEMA 3.3. *Sea* $\vec{f} \in L^2([0,T], L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3))$ *y consideremos* $\vec{F}(t,x) = \int_0^t h_{t-s} * \vec{f}(s,x) ds$. *Entonces, tenemos las siguientes estimaciones:*

1) $\|\vec{F}(\cdot,\cdot)\|_{L^\infty_T L^2_x} \leq \ c\sqrt{T}\, \|\vec{f}\|_{L^2_T L^2_x}$.

2) $\|\vec{F}(\cdot,\cdot)\|_{L^\infty_T \dot{H}^1_x} \leq c\|\vec{f}\|_{L^2_T L^2_x}$.

3) $\|\vec{F}(\cdot,\cdot)\|_{L^2_T \dot{H}^2_x} \leq c\, \|\vec{f}\|_{L^2_T L^2_x}$,

donde

$$
\begin{aligned}
\|\vec{F}(\cdot,\cdot)\|_{L^\infty_T L^2_x} &= \sup_{0\leq t\leq T} \|\vec{F}(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)} \\
\|\vec{F}(\cdot,\cdot)\|_{L^\infty_T \dot{H}^1_x} &= \sup_{0\leq t\leq T} \|\vec{F}(t,\cdot)\|_{\dot{H}^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)} \\
\|\vec{F}(\cdot,\cdot)\|_{L^2_T \dot{H}^2_x} &= \Big(\int_0^T \|\vec{F}(t,\cdot)\|^2_{\dot{H}^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)}\, dt\Big)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Demostración. Ver [12]. □

Apartado 1.1: en primera instancia, mostremos que $h_t * \vec{v}_0 + \int_0^t h_{t-s}\vec{f}(s,\cdot)\, ds \in E_T$. Notemos que, gracias a la desigualdad de Young para la convolución y las propiedades de la convolución , tenemos que $\forall t \in [0,T]$

$$
\begin{aligned}
\|h_t * \vec{v}_0\|_{H^1} &= ||h_t * \vec{v}_0||_{L^2} + ||h_t * \vec{v}_0||_{\dot{H}^1} \\
&\leq ||h_t||_{L^1}||\vec{v}_0||_{L^2} + ||\nabla(h_t * \vec{v}_0)|| \\
&\leq ||h_t||_{L^1}||\vec{v}_0||_{L^2} + ||h_t * \nabla\vec{v}_0)|| \\
&\leq ||h_t||_{L^1}||\vec{v}_0||_{L^2} + ||h_t||_{L^1}||\nabla\vec{v}_0)||_{L^2} \\
&\leq ||\vec{v}_0||_{L^2} + ||\vec{v}_0||_{\dot{H}^1} \\
&= ||\vec{v}_0||_{H^1}.
\end{aligned}
$$

Ahora, utilizando el teorema de Fubini Tonelli, tenemos que

$$
\begin{aligned}
\|h_t * \vec{v}_0\|^2_{L^2_T \dot{H}^2_x} &= \int_0^T \|h_t * \vec{v}_0\|^2_{\dot{H}^2} dt \\
&= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^4 e^{-2t|\xi|^2} |\widehat{\vec{v}_0}(\xi)|^2\, d\xi\ dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^4 |\widehat{\vec{v}_0}(\xi)|^2 \int_0^T e^{-2t|\xi|^2}\ dt\ d\xi \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^4 |\widehat{\vec{v}_0}(\xi)|^2 \int_0^{+\infty} e^{-2t|\xi|^2}\ dt\ d\xi
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^2 |\widehat{\vec{v}_0}(\xi)|^2 \int_0^{+\infty} e^{-z}\, dz\, d\xi$$
$$= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^2 |\widehat{\vec{v}_0}(\xi)|^2 d\xi = \frac{1}{2}\|\vec{v}_0\|^2_{H^1}.$$

Así, tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \|h_t * \vec{v}_0\|_{E_T} &= \|h_t * \vec{v}_0\|_{L^\infty_T H^1_x} + \|h_t * \vec{v}_0\|_{L^2_T \dot{H}^2_x} \\ &= \sup_{0\leq t\leq T} ||h_t * \vec{v}_0||_{H^1} + \|h_t * \vec{v}_0\|_{L^2_T \dot{H}^2} \\ &\leq \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \|\vec{v}_0\|_{H^1}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Para terminar la primera parte, de la primera etapa de la demostración, estudiaremos el termino $\int_0^t h_{t-s} * \vec{f}\, ds$. Gracias al lema 3.3, tenemos que,

$$\begin{aligned} \left\|\int_0^t h_{t-s} * \vec{f}\, ds\right\|_{E_T} &= \left\|\int_0^t h_{t-s} * \vec{f}\, ds\right\|_{L^\infty_T H^1_x} + \left\|\int_0^t h_{t-s} * \vec{f}\, ds\right\|_{L^2_T \dot{H}^2_x} \\ &= \left\|\int_0^t h_{t-s} * \vec{f}\, ds\right\|_{L^\infty_T L^2_x} + \left\|\int_0^t h_{t-s} * \vec{f}\, ds\right\|_{L^\infty_T \dot{H}^1_x} \\ &+ \left\|\int_0^t h_{t-s} * \vec{f}\, ds\right\|_{L^2_T \dot{H}^2_x} \leq c(\sqrt{T}+2)\|\vec{f}\|_{L^2_T L^2_x}. \end{aligned}$$

En consecuencia, concluimos que $h_t * \vec{v}_0 + \int_0^t h_{t-s}\mathbb{P}(\vec{f})(s,\cdot)\, ds \in E_T$.
Apartado 1.2: ahora mostremos que $L(\cdot)$ es un operador lineal continuo de E_T en E_T. Nuevamente, utilizando el lema 3.3 y dado que $u \in E_T$ se tiene

$$\begin{aligned} \|L(\vec{v})\|_{E_T} &= \mu\left\|\int_0^t h_{t-s} * \vec{v}\, ds\right\|_{L^\infty_T H^1_x} + \left\|\int_0^t h_{t-s} * \vec{v}\, ds\right\|_{L^2_T \dot{H}^2_x} \\ &= \mu\left\|\int_0^t h_{t-s} * \vec{v}\, ds\right\|_{L^\infty_T L^2_x} + \mu\left\|\int_0^t h_{t-s} * \vec{v}\, ds\right\|_{L^\infty_T \dot{H}^1_x} \\ &+ \mu\left\|\int_0^t h_{t-s} * \vec{v}\, ds\right\|_{L^2_T \dot{H}^2_x} \leq \mu c(\sqrt{T}+2)\|\vec{v}\|_{E_T}. \end{aligned}$$

Apartado 1.3: finalmente, para terminar con la primer etapa de este teorema, mostraremos la continuidad de $B(\cdot,\cdot)$ en $E_T \times E_T$. Antes que nada, recordemos que por definición del operador de filtrado Helmhotz, tenemos que $(\vec{v} \otimes \vec{v})_\alpha = (-\alpha^2\Delta + I_d)^{-1}(\vec{v} \otimes \vec{w}) = H_\alpha * (\vec{v} \otimes \vec{w})$, donde H_α, es el núcleo de Helmhotz que tiene interesantes propiedades de decaimiento (ver la sección 2.2.1), en particular $\|H_\alpha\|_{L^1} = c_\alpha$. Con esto en mente, notemos lo siguiente: para $0 < t \leq T$, gracias a las desigualdades de Young y la continuidad del operador de Leray (y a la conmutatividad con el operador de filtrado H_α), en los espacios de Lebesgue (ver[12]), tenemos que:

$$
\begin{aligned}
\|B(\vec{v},\vec{w})(t,\cdot)\|_{L^2} &= \left\| \int_0^t h_{t-s} * \mathbb{P}\, \mathbf{div}((\vec{v}\otimes\vec{w})_\alpha)(s,\cdot) ds \right\|_{L^2} \\
&\leq \int_0^t \|h_{t-s} * \mathbb{P}\ \mathbf{div}((\vec{v}\otimes\vec{w})_\alpha)(s,\cdot)\|_{L^2} ds \\
&\leq \int_0^t \|h_{t-s} * \mathbb{P}\ \mathbf{div}(H_\alpha * (\vec{v}\otimes\vec{w}))(s,\cdot)\|_{L^2} ds \\
&\leq \int_0^t \left\|H_\alpha * (h_{t-s} * \mathbb{P}\ \mathbf{div}(\vec{v}\otimes\vec{w}))\,(s,\cdot)\right\|_{L^2} ds \\
&\leq c_\alpha \int_0^t \left\|h_{t-s} * \mathbb{P}\ \mathbf{div}(\vec{v}\otimes\vec{w})(s,\cdot)\right\|_{L^2} ds \\
&\leq c_\alpha \int_0^t \left\|\mathbf{div}(\vec{v}\otimes\vec{w})(s,\cdot)\right\|_{L^2} ds \\
&\leq c_\alpha \int_0^t \|\vec{v}\otimes\vec{w}(s,\cdot)\|_{\dot{H}^1} ds \\
&\leq c_\alpha\, T^{1/2}\, \|\vec{v}\otimes\vec{w}\|_{L^2_T\dot{H}^1_x}.
\end{aligned}
$$

Por último, estudiaremos el término $\|\vec{v}\otimes\vec{w}\|_{L^2_T\dot{H}^1_x}$. Utilizando el literal 5), del teorema 2.4, tenemos

$$
\begin{aligned}
\|\vec{v}\otimes\vec{w}\|_{L^2_T\dot{H}^1_x} = &= \left(\int_0^T \|\vec{v}\otimes\vec{w}(t,\cdot)\|^2_{\dot{H}^1}\, dt\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\int_0^T \left(\|\vec{v}(t,\cdot)\|^2_{\dot{H}^1}\|\vec{w}(t,\cdot)\|_{\dot{H}^1}\|\vec{w}(t,\cdot)\|_{\dot{H}^2} + \|\vec{w}(t,\cdot)\|^2_{\dot{H}^1}\|\vec{v}(t,\cdot)\|_{\dot{H}^1}\|\vec{v}(t,\cdot)\|_{\dot{H}^2}\right) dt\right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.5) \\
&\leq C\left(\|\vec{v}\|^2_{L^\infty_T\dot{H}^1_x}\|\vec{w}\|_{L^\infty_T\dot{H}^1_x}\int_0^T \|\vec{w}(t,\cdot)\|_{\dot{H}^2}\, dt + \|\vec{w}\|^2_{L^\infty_T\dot{H}^1_x}\|\vec{v}\|_{L^\infty_T\dot{H}^1_x}\int_0^T \|\vec{v}(t,\cdot)\|_{\dot{H}^2}\, dt\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C\left(T^{\frac{1}{2}}\|\vec{v}\|^2_{L^\infty_T\dot{H}^1_x}\|\vec{w}\|_{L^\infty_T\dot{H}^1_x}\|\vec{w}\|_{L^2_T\dot{H}^2_x} + T^{\frac{1}{2}}\|\vec{w}\|^2_{L^\infty_T\dot{H}^1_x}\|\vec{v}\|_{L^\infty_T\dot{H}^1_x}\|\vec{v}\|_{L^2_T\dot{H}^2_x}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq CT^{\frac{1}{4}}\|\vec{v}\|_{E_T}\|\vec{w}\|_{E_T}. \quad (3.6)
\end{aligned}
$$

Por tanto, podemos concluir que $\sup_{0\leq t\leq T}\|B(\vec{v},\vec{w})(t,\cdot)\|_{H^1_\alpha} \leq C\,T^{\frac{3}{4}}\,\|\vec{v}\|_{E_T}\|\vec{w}\|_{E_T}$. Por otra parte, vamos a continuar con la estimación de $\|B(\vec{v},\vec{w})\|_{L^\infty_T\dot{H}^1_x}$. Por el literal 2) en el lema 3.3, tomando $\vec{f} = \mathbb{P}\,\text{div}((\vec{v} \otimes \vec{w})_\alpha)$, se sigue que

$$\begin{aligned}
\left\| \int_0^t h_{t-s} * \mathbb{P}\ \textbf{div}((\vec{v} \otimes \vec{w})_\alpha)(s,\cdot) ds \right\|_{L^\infty_T \dot{H}^1_x} &\leq c \, \|\mathbb{P}\ \textbf{div}((\vec{v} \otimes \vec{w})_\alpha\|_{L^2_T L^2_x} \\
&\leq c \, \|H_\alpha * (\mathbb{P}\ \textbf{div}(\vec{v} \otimes \vec{w}))\,\|_{L^2_T L^2_x} \\
&\leq c_\alpha \, \|\vec{v} \otimes \vec{w}\|_{L^2_T \dot{H}^1_x} \\
&\leq c_\alpha \, T^{1/4} \, \|\vec{v}\|^2_{E_T} \|\vec{w}\|^2_{E_T},
\end{aligned}$$

con lo cual tenemos

$$\|B(\vec{v}, \vec{w})(\cdot,\cdot)\|_{L^\infty_T H^1_x} \leq c_\alpha \ C^T \ \ T^{1/4} \, \|\vec{v}\|^2_{E_T} \|\vec{w}\|^2_{E_T},$$

donde $C^T = \max\{T^{\frac{1}{4}}, T^{\frac{3}{4}}\}$. Para finalizar la última parte, de la primera etapa del teorema 3.1, estudiaremos la cantidad

$$\left\| \int_0^t h_{t-s} * \mathbb{P}\ \textbf{div}((\vec{v} \otimes \vec{w})_\alpha)(s,\cdot) ds \right\|_{L^2_T \dot{H}^2_x}.$$

Por el punto 3) del lema 3.3, se sigue que

$$\left\| \int_0^t h_{t-s} * \mathbb{P}\ \textbf{div}((\vec{v} \otimes \vec{w})_\alpha)(s,\cdot) ds \right\|_{L^2_T \dot{H}^2_x} \leq c \, \|\mathbb{P}\ \textbf{div}((\vec{v} \otimes \vec{w})_\alpha\|_{L^2_T L^2_x} \leq c_\alpha \, T^{1/4} \, \|\vec{u}\|^2_{E_T}. \tag{3.7}$$

Se concluye que $B(\cdot,\cdot)$ es continuo de $E_T \times E_T$ en E_T. Para finalizar esta etapa, necesitamos demostrar la estimación de energía del teorema (3.1). El análisis de esta parte del teorema se encuentra en el apéndice B (ver la estimación (B.3)).

Etapa 2: esta etapa se dividirá en dos apartados: el primero que muestre que el tiempo de existencia de la solución se puede tomar arbitrario, y el segundo que, la presión asociada pertenece al espacio indicado en el teorema 3.1.

Apartado 2.1: observemos primero que la solución $\vec{v}$ obtenida anteriormente también resuleve (en sentido de las distribuciones) el problema:

$$\partial_t \vec{v} + \mathbb{P}(\textbf{div}((\vec{v} \otimes \vec{v})_\alpha)) - \Delta \vec{v} = \vec{f} - \mu \, \vec{v}.$$

Como $\vec{v}$ pertenece a E_T y $\vec{f}$ pertenece a $L^2([0,T], H^1_\alpha)$, se tiene que, cada término de esta ecuación pertenece al espacio $L^2([0,T], L^2)$, además recordemos que $(\cdot)_\alpha = (-\alpha^2\Delta + I_d)^{-1}$. Con toda esta información podemos escribir la ecuación de la forma

$$\partial_t \vec{v} + \mathbb{P}\ (\text{div}((-\alpha^2\Delta + I_d)^{-1}(\vec{v}\otimes\vec{v})) - \Delta\vec{v} = \vec{f} - \mu\ \vec{v},$$

aplicando el operador $(-\alpha\Delta + I_d)$ en cada término, se sigue que $\vec{v}$ también verifica

$$(-\alpha^2\Delta+I_d)\partial_t\vec{v} = -\mathbb{P}\ (\text{div}(\vec{v}\otimes\vec{v}))+(-\alpha^2\Delta+I_d)\Delta\vec{v}+(-\alpha^2\Delta+I_d)\vec{f}-\mu\ (-\alpha^2\Delta+I_d)\vec{v}.$$

Por las propiedades del operador $(\cdot)_\alpha$, se tiene que cada término de la última estimación pertenece a $L^2([0,T], H^{-2}(\mathbb{R}^3))$. Aquí podemos analizar análogamente como en las estimaciones *apriori* (ver apéndice B, sección B.1), que en este caso tienen sentido, pues, nuestras hipótesis tanto de $\vec{v}\in E_T$, como de $\vec{f}$ permiten dar sentido a todos los cálculos hasta llegar a

$$\frac{d}{dt}(\|\vec{v}(t,\cdot)\|^2_{H^1_\alpha}) \leq \|\vec{v}(t,\cdot)\|^2_{H^1_\alpha}+\|\vec{f}(t,\cdot)\|^2_{H^1_\alpha}-2\alpha^2||\vec{v}(t,\cdot)||^2_{\dot{H}^2}-2\|\vec{v}(t,\cdot)\|^2_{\dot{H}^1}-2\mu\|\vec{v}(t,\cdot)\|^2_{H^1_\alpha}. \tag{3.8}$$

Como las cantidades $-2\mu\|\vec{v}(t,\cdot)\|^2_{H^1_\alpha}$, $-2\alpha^2||\vec{v}(t,\cdot)||^2_{\dot{H}^2}$ y $-2\|\vec{v}(t,\cdot)\|^2_{\dot{H}^1}$ son negativas, tenemos

$$\frac{d}{dt}(\|\vec{v}(t,\cdot)\|^2_{H^1_\alpha}) \leq \|\vec{v}(t,\cdot)\|^2_{H^1_\alpha} + \|\vec{f}(t,\cdot)\|^2_{H^1_\alpha}.$$

Entonces aplicando, una desigualdad de Grönwall (ver apéndice B, sección B.1.1,estimación B.2), se tiene que $\forall\ t\in[0,T]$, se tiene

$$\begin{aligned}\|\vec{v}(t,\cdot)\|^2_{H^1_\alpha} \leq & \|\vec{v}_0\|^2_{H^1_\alpha}\, e^{2t} + \int_0^t e^{2(t-s)}\|\vec{f}(s,\cdot)\|^2_{H^1_\alpha} ds \\ \leq & \|\vec{v}_0\|^2_{H^1_\alpha}\, e^{2t} + e^{2t}\|\vec{f}\|^2_{L^2_T H^1_\alpha}.\end{aligned}$$

Así se concluye que

$$\sup_{0\leq t\leq T}\|\vec{v}(t,\cdot)\|_{H^1_\alpha} \leq (\|\vec{v}_0\|^2_{H^1_\alpha}\, e^{2T} + e^{2T}\|\vec{f}\|^2_{L^2_T H^1_\alpha})^{\frac{1}{2}}.$$

Para controlar la otra parte de la norma E_T con los datos del problema ($\vec{v}_0$ y $\vec{f}$), regresamos a la desigualdad (3.8), para obtener fácilmente la siguiente desigualdad

$$2\alpha^2||\vec{v}(t,\cdot)||^2_{\dot{H}^2} \leq \|\vec{v}(t,\cdot)\|^2_{H^1_\alpha} + \|\vec{f}(t,\cdot)\|^2_{H^1_\alpha}$$
$$2\alpha^2||\vec{v}(t,\cdot)||^2_{\dot{H}^2} \leq \|\vec{v}_0\|^2_{H^1_\alpha} e^{2T} + e^{2T}\|\vec{f}\|^2_{L^2_T H^1_\alpha} + \|\vec{f}(t,\cdot)\|^2_{H^1_\alpha}$$

Entonces integrando en la variable temporal en $[0,T]$, tenemos

$$\int_0^T ||\vec{v}(t,\cdot)||^2_{\dot{H}^2}\, dt \leq \frac{T\, e^{2T}}{2\alpha^2}(\|\vec{v}_0\|^2_{H^1_\alpha} + \|\vec{f}\|^2_{L^2_T H^1_\alpha}) + \frac{1}{2\alpha^2}\|\vec{f}\|^2_{L^2_T H^1_\alpha}.$$

Con esta útima estimativa podemos ver que podemos prolongar de manera arbitraria el tiempo de existencia de la solución *mild* $\vec{v}$.
Apartado 2.2: ahora, mostremos que $\Pi = \Pi_{\alpha,\mu} \in L^2_{loc}([0,+\infty[, H^3(\mathbb{R}^3)) \cap L^1_{loc}([0,+\infty[, H^4(\mathbb{R}^3))$. Empezaremos por mostrar que $\Pi \in L^2_{loc}([0,+\infty[, H^3(\mathbb{R}^3))$. Para ello, mostremos primero que $\vec{v}\otimes\vec{v} \in L^2_T H^1_x$. Por la estimación (3.5), tenemos que $\vec{v}\otimes\vec{v} \in L^2_T \dot{H}^1_x$. Por otro lado, sabemos que $\vec{v} \in L^\infty_T H^1_\alpha \cap L^2_T \dot{H}^2$, lo que implica que $\vec{v}\otimes\vec{v} \in L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}_x$. En efecto, basta mostrar que $\forall i,j = 1,2,3$ la multiplicación $v_i v_j$ pertenece a $L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}_x$, donde v_i y v_j son las componentes i-ésima y j-ésima del vector $\vec{v}$. Entonces, utilizando el literal 4) del teorema 2.4, se sigue

$$\|v_i v_j(t,\cdot)\|_{H^{\frac{1}{2}}} \leq C\Big(\|v_i(t,\cdot)\|_{H^1}\|v_j(t,\cdot)\|_{\dot{H}^1} + \|v_j(t,\cdot)\|_{H^1}\|v_i(t,\cdot)\|_{\dot{H}^1}\Big)$$
$$\sup_{t\in[0,T]} \|v_i v_j(t,\cdot)\|_{H^{\frac{1}{2}}} \leq C\|\vec{v}\|_{L^\infty_T H^1_x},$$

con lo cual se puede deducir que $\vec{v}\otimes\vec{v} \in L^2_T \dot{L}^2_x$. En efecto, razonando de manera similar que antes tenemos

$$\begin{aligned}
\|v_i v_j\|^2_{L^2_T L^2_x} &= \int_0^T \|v_i v_j(t,\cdot)\|^2_{L^2}\, dt = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} |\widehat{v_i v_j}|^2(t,\xi)\, d\xi\, dt \\
&\leq \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} (1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}} |\widehat{v_i v_j}|^2\ (t,\xi)\, d\xi\, dt \\
&\leq \|v_i v_j\|_{L^2_T H^{\frac{1}{2}}_x} \|v_i v_j\|_{L^2_T H^{\frac{1}{2}}_x} \leq \|v_i v_j\|^2_{L^\infty_T \dot{L}^2_x} T.
\end{aligned}$$

Con todas esta estimativas a la mano, podemos mostrar que $\Pi \in L^2_{loc}([0,+\infty[, H^3(\mathbb{R}^3))$.

Regresando a (3.2), tenemos que

$$\begin{aligned}\Pi =&(\Delta)^{-1}(-\mathbf{div}(\mathbf{div}((\vec{v}\otimes\vec{v})_\alpha)))\\ \Pi =&\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}R_iR_j\left((-\alpha^2\Delta+I_d)^{-1}(v_iv_j)\right),\end{aligned}$$

donde $R_i=\frac{\partial_i}{\sqrt{-\Delta}}$ es la transformada i-ésima de Riesz (ver [12, 8]). Razonando como antes es suficiente mostrar que $\|R_iR_j\left((-\alpha^2\Delta+I_d)^{-1}(v_iv_j)\right)\|_{L^2_TH^3_x}$ esta bien controlada, para todo $i,j=1,2,3$. Así, se tiene

$$\begin{aligned}\|R_iR_j\left((-\alpha^2\Delta+I_d)^{-1}(v_iv_j)\right)\|^2_{L^2_TH^3_x}&=\int_0^T\|R_iR_j\left((-\alpha^2\Delta+I_d)^{-1}(v_iv_j)\right)(t,\cdot)\|^2_{H^3}\,dt\\ &=\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3}(1+|\xi|^2)^3\Big(\frac{1}{1+\alpha^2|\xi|^2}\Big)^2\frac{|\xi_i\xi_j|^2}{|\xi|^4}|\widehat{v_iv_j}|^2(t,\xi)\,d\xi\,dt\\ &\leq c_\alpha\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3}(1+|\xi|^2)|\widehat{v_iv_j}|^2\ (t,\xi)\,d\xi\,dt\\ &=\|v_iv_j\|^2_{L^2_TH^1_x}.\end{aligned}$$

Finalmente, mostremos que $\Pi\in L^1_{loc}([0,+\infty[,H^4(\mathbb{R}^3))$. Razonando como antes, es suficiente mostrar que $\|R_iR_j\left((-\alpha^2\Delta+I_d)^{-1}(v_iv_j)\right)\|_{L^1_TH^4_x}$ esta bien controlada, para todo $i,j=1,2,3$. Comenzaremos por estimar puntualmente en variable temporal la cantidad $\|R_iR_j\left((-\alpha^2\Delta+I_d)^{-1}(v_iv_j)(t,\cdot)\right)\|_{H^4}$. Usando, el hecho que H^s es una álgebra de Banach con $s\geq\frac{3}{2}$, tenemos

$$\begin{aligned}\|R_iR_j\left((-\alpha^2\Delta+I_d)^{-1}(v_iv_j)(t,\cdot)\right)\|^2_{H^4}&=\int_{\mathbb{R}^3}(1+|\xi|^2)^4\Big(\frac{1}{1+\alpha^2|\xi|^2}\Big)^2\frac{|\xi_i\xi_j|^2}{|\xi|^4}|\widehat{v_iv_j}|^2(t,\xi)\,d\xi\\ &\leq c_\alpha\int_{\mathbb{R}^3}(1+|\xi|^2)^2|\widehat{v_iv_j}|^2\ (t,\xi)\,d\xi\\ &=\|v_iv_j(t,\cdot)\|^2_{H^2}\leq\|v_i(t,\cdot)\|^2_{H^2}\|v_j(t,\cdot)\|^2_{H^2}.\end{aligned}$$

Con esta última estimativa tenemos que

$$\|R_iR_j\left((-\alpha^2\Delta+I_d)^{-1}(v_iv_j)\right)\|_{L^1_TH^4_x}\leq\int_0^T\|v_i(t,\cdot)\|_{H^2}\|v_j(t,\cdot)\|_{H^2}\,dt\leq\|\vec{v}\|^2_{L^2_TH^2_x},$$

con lo cual se verifica todas las propiedades con respecto a Π.

Etapa 3: para finalizar la demostración del teorema 3.1 nos queda mostrar la unicidad de la solución originada a partir de $\vec{v}_0$. Notemos que el teorema 3.2 nos da la unicidad de la solución sobre una bola. Sin embargo, fuera de esa bola, en principio no se conoce nada. Es por eso que, la última etapa de esta demostración es la unicidad sobre todo el espacio. Entonces consideramos, $\vec{v} \in L^{\infty}([0,+\infty[, H^1_\alpha) \cap L^2_{loc}([0,+\infty[, \dot{H}^2)$, y $\vec{w} \in L^{\infty}([0,+\infty[, H^1_\alpha \cap L^2_{loc}([0,+\infty[, \dot{H}^2)$, dos soluciones del problema, con presiones Π_v Π_w y con datos iniciales $\vec{v}_0$ y $\vec{w}_0$, respectivamente. Tomamos $\vec{\theta} = \vec{v} - \vec{w}$ y $\rho = \Pi_v - \Pi_w$, entonces se sigue que la pareja $(\vec{\theta}, \rho)$, verifica

$$\begin{cases} \partial_t \vec{\theta} + \left((\vec{\theta} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} + (\vec{w} \cdot \vec{\nabla})\vec{\theta} \right)_\alpha - \Delta \vec{\theta} + \vec{\nabla}\rho = -\mu \vec{\theta} \\ \vec{\theta}(0,\cdot) = \vec{v}(0,\cdot) - \vec{w}(0,\cdot). \end{cases}$$

Reproduciendo, exactamente las mismas ideas de las estimaciones *apriori* (ver la estimativa (B.3)), podemos llegar sin ningún problema a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|\vec{\theta}(t,\cdot)\|^2_{H^1_\alpha} \right) + \|\vec{\theta}(t,\cdot)\|^2_{\dot{H}^1} + \alpha^2 \|\vec{\theta}(t,\cdot)\|^2_{\dot{H}^2} = -\mu \|\vec{\theta}(t,\cdot)\|^2_{H^1_\alpha} - \left\langle (\vec{\theta} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}(t,\cdot), \vec{\theta}(t,\cdot) \right\rangle_{\dot{H}^{-1} \times \dot{H}^1}. \tag{3.9}$$

La parte delicada de este análisis es únicamente el término no lineal $\left\langle (\vec{\theta} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}(t,\cdot), \vec{\theta}(t,\cdot) \right\rangle_{\dot{H}^{-1} \times \dot{H}^1}$, entonces para analizarlo, se utiliza la desigualdad de de Hardy-Littlewood-Sobolev, la desigualdad de interpolación y las desigualdades de Hölder (ver [1, 8, 7]), para lograr obtener:

$$\begin{aligned}
\left| \left\langle (\vec{\theta} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}(t,\cdot), \vec{\theta}(t,\cdot) \right\rangle_{\dot{H}^{-1} \times \dot{H}^1} \right| &\leq c \|(\vec{\theta} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}(t,\cdot)\|_{\dot{H}^{-1}} \|\vec{\theta}(t,\cdot)\|_{\dot{H}^1} \\
&\leq c \|(\vec{\theta} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}(t,\cdot)\|_{L^{6/5}} \|\vec{\theta}(t,\cdot)\|_{\dot{H}^1} \\
&\leq c \|\vec{\theta}(t,\cdot)\|_{L^2} \|\vec{\nabla} \otimes \vec{v}(t,\cdot)\|_{L^3} \|\vec{\theta}(t,\cdot)\|_{\dot{H}^1} \\
&\leq c \|\vec{\theta}(t,\cdot)\|_{L^2} \|\vec{\nabla} \otimes \vec{v}(t,\cdot)\|^{1/2}_{L^2} \|\vec{\nabla} \otimes \vec{v}(t,\cdot)\|^{1/2}_{L^6} \|\vec{\theta}(t,\cdot)\|_{\dot{H}^1} \\
&\leq c \|\vec{\theta}(t,\cdot)\|_{L^2} \|\vec{\nabla} \otimes \vec{v}(t,\cdot)\|^{1/2}_{L^2} \|\vec{\nabla} \otimes \vec{v}(t,\cdot)\|^{1/2}_{\dot{H}^1} \|\vec{\theta}(t,\cdot)\|_{\dot{H}^1} \\
&\leq c \|\vec{\theta}(t,\cdot)\|_{L^2} \|\vec{v}(t,\cdot)\|^{1/2}_{\dot{H}^1} \|\vec{v}(t,\cdot)\|^{1/2}_{\dot{H}^2} \|\vec{\theta}(t,\cdot)\|_{\dot{H}^1} \\
&\leq c \|\vec{\theta}(t,\cdot)\|^2_{L^2} \|\vec{v}(t,\cdot)\|_{\dot{H}^1} \|\vec{v}(t,\cdot)\|_{\dot{H}^2} + \frac{1}{2} \|\vec{\theta}(t,\cdot)\|^2_{\dot{H}^1} \\
&\leq c \|\vec{\theta}(t,\cdot)\|^2_{H^1_\alpha} \|\vec{v}(t,\cdot)\|_{\dot{H}^1} \|\vec{v}(t,\cdot)\|_{\dot{H}^2} \\
&+ \frac{1}{2} \|\vec{\theta}(t,\cdot)\|^2_{\dot{H}^1}.
\end{aligned}$$

Ahora, volviendo a (3.9), se tiene

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\vec{\theta}(t,\cdot)\|^2_{H^1_\alpha}) + \|\vec{\theta}(t,\cdot)\|^2_{\dot{H}^1} + \alpha^2 \|\vec{\theta}(t,\cdot)\|^2_{\dot{H}^2} \leq -\mu \|\vec{\theta}(t,\cdot)\|^2_{H^1_\alpha} \\
&+ c \|\vec{\theta}(t,\cdot)\|^2_{H^1_\alpha} \|\vec{v}_1(t,\cdot)\|_{\dot{H}^1} \|\vec{v}_1(t,\cdot)\|_{\dot{H}^2} + \frac{1}{2} \|\vec{\theta}(t,\cdot)\|^2_{\dot{H}^1}.
\end{aligned}$$

Así, fácilmente se tiene la siguiente desigualdad,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\vec{\theta}(t,\cdot)\|^2_{H^1_\alpha}) \leq c\,\|\vec{\theta}(t,\cdot)\|^2_{H^1_\alpha}\,\|\vec{v}_1(t,\cdot)\|_{\dot{H}^1}\|\vec{v}_1(t,\cdot)\|_{\dot{H}^2}.$$

Nuevamente, aplicando la desigualdad de Gronwall (ver apéndice B, sección B.1.1, estimación B.2), se sigue

$$\|\vec{\theta}(t,\cdot)\|^2_{H^1_\alpha} \leq \|\vec{\theta}(0,\cdot)\|^2_{H^1_\alpha}\, e^{c\int_0^t \|\vec{v}_1(s,\cdot)\|_{\dot{H}^1}\|\vec{v}_1(s,\cdot)\|_{\dot{H}^2}\,ds}.$$

Además, usando (3.11) el término $c\int_0^t \|\vec{v}_1(s,\cdot)\|_{\dot{H}^1}\|\vec{v}_1(s,\cdot)\|_{\dot{H}^2}$ es controlado por una constante $C>0$, que depende de $\alpha, \vec{v}_0, \|\vec{\theta}(0,\cdot)\|^2_{H^1_\alpha}$ y $\|\vec{f}\|^2_{L^2_T H^1_{\alpha,x}}$. Con esta estimación, se puede escribir la siguiente desigualdad:

$$\|\vec{\theta}(t,\cdot)\|^2_{H^1_\alpha} \leq \|\vec{\theta}(0,\cdot)\|^2_{H^1_\alpha}\, e^{C\,t}. \tag{3.10}$$

La unicidad de la solución se sigue directamente de esta desigualdad. $\square$

Observación 6.

- Con miras a los propósitos venideros de este documento, es relevante remarcar que, de la estimación (3.8) se deduce la desigualdad

$$\alpha^2\int_0^t ||\vec{v}(s,\cdot)||^2_{\dot{H}^2}\,ds + \int_0^t \|\vec{v}(s,\cdot)\|^2_{\dot{H}^1}\,ds \leq \frac{1}{2}\|\vec{v_0}\|^2_{H^1_\alpha} + \frac{2}{\mu}\int_0^t \|\vec{f}(s,\cdot)\|^2_{H^1_\alpha}\,ds. \tag{3.11}$$

Capítulo 4

Regularidad de la solución *mild* de la ecuación de Bardina-Navier-Stokes con un término de amortiguamiento

4.1. Teorema de Regularidad en los espacios $H^s(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$

En esta parte de nuestro estudio sobre la ecuación de Bardina-Navier-Stokes con un término de amortiguamiento, analizaremos la regularidad que podemos conseguir a partir de nuestra solución *mild* $\vec{v}$, obtenida en el teorema 3.1, en el marco de los espacios de Sobolev H^s $(s \geq 0)$. En particular, se entenderá la conexión entre la regularidad de la fuerza externa $\vec{f}$ y la regularidad de $\vec{v}$. Sin más, enunciamos el teorema principal de esta parte del texto.

Teorema 4.1. *Sean $\vec{v_0} \in H^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ y $\vec{f} \in L^\infty_{loc}([0, +\infty[; H^\infty)$, dos funciones a divergencia nula. Entonces la única solución mild $(\vec{v}, \Pi)$ del problema (3.1), obtenida en el teorema 3.1, verifica:*

$$\vec{v} \in \mathscr{C}([0, \infty[; H^s(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)) \cap \mathscr{C}^1(]0, \infty[; H^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3))$$
$$\Pi \in \mathscr{C}([0, \infty[; H^{s+2}(\mathbb{R}^3)) \cap \mathscr{C}(]0, \infty[; H^\infty(\mathbb{R}^3)),$$

donde, $H^\infty = \bigcap_{s \geq 0} H^s(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, y $s \in [0, 1]$.

Este teorema muestra, en particular que si $\vec{f}$ es suficientemente regular, entonces nuestra *mild* solución, $(\vec{v}, \Pi)$ asociada a el dato inicial $\vec{v}_0$ y a $\vec{f}$, es en realidad una solución clásica del problema (3.1).

Demostración. Como $\vec{f} \in L^\infty_{loc}([0,+\infty[; H^\infty(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)) \subset L^2_{loc}([0,+\infty[; H^1(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3))$, se tiene gracias al teorema 3.1, que existe una única $\vec{v} \in L^\infty([0,\infty); H^1(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0,\infty); \dot{H}^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3))$ y $\Pi \in L^1([0,+\infty) : H^3(\mathbb{R}^3))$, solución *mild* del problema (3.1). Por otra parte, puesto que la regularidad de la presión Π, depende de la velocidad $\vec{v}$, únicamente analizaremos la regularidad de $\vec{v}$. Recordemos nuevamente, que $\vec{v}$ puede escribirse de la siguiente formulación integral

$$\vec{v}(t,\cdot) = \underbrace{h_t * *\vec{v}_0}_{I_1(t)} + \underbrace{\int_0^t h_{t-s}\vec{f}(s,\cdot)\,ds}_{I_2(t)} - \underbrace{\int_0^t h_{t-s} * \mathbb{P}(\text{div}((\vec{v}\otimes\vec{v})_\alpha))(s,\cdot)\,ds}_{I_3(t)} - \underbrace{\mu\int_0^t h_{t-s} * \vec{v}(s,\cdot)\,ds}_{I_4(t)}.$$

Con toda esta información, partiremos en tres etapas la demostración de este teorema:

- **Etapa 1:** vamos a mostrar que para cualquier $T > 0$, se satisface que $\vec{v} \in C([0,T]; H^s(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3))$, con $s \in [0,1]$.
- **Etapa 2:** vamos a mostrar que para cualquier $T > 0$ $\vec{v}$ pertenece al espacio $C([0,T]; H^\infty(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3))$.
- **Etapa 3:** utilizando las inclusiones que relacionan los espacios de Hilbert H^s, y los espacios de Hölder, finalizaremos el teorema 4.1.

Etapa 1: nuevamente por limitación del espacio y por ser clásico, esta parte de la demostración sera puesta en el apéndice del texto (ver apéndice C, sección C.1).
Etapa 2: Esta etapa de la demostración será dividida en dos apartados:

Apartado 2.1: vamos a mostrar que para cualquier $T > 0$, se satisface que $\vec{v} \in C(]0,T]; H^{1+\lambda}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3))$, con $\lambda \in]0,1[$. Empezaremos por demostrar que cada término, que compone la forma integral de $\vec{v}$, esta bien definido en $H^{1+\lambda}$ para $t\in]0,T]$. Así para el primer término, $I_1(t)$, se tiene

$$
\begin{aligned}
\|h_t*\vec{v}_0\|_{H^{1+\lambda}} \simeq & \|h_t*\vec{v}_0\|_{L^2}+\|h_t*\vec{v}_0\|_{\dot{H}^{1+\lambda}}\\
\leq & ||h_t||_{L^1}||\vec{v_0}||_{L^2}+\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\xi|^{2(1+\lambda)}e^{-2t|\xi|^2}|\widehat{\vec{v_0}}|^2\,d\xi\right)^{1/2}\\
\leq & ||\vec{v_0}||_{L^2}+\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\xi|^{2\lambda}e^{-2t|\xi|^2}|\xi|^2|\widehat{\vec{v_0}}|^2\right)^{1/2}\\
\leq & ||\vec{v_0}||_{H^1}+\left(\sup_{\xi\in\mathbb{R}^3}(|\xi|^{2\lambda}e^{-2t|\xi|^2})\int_{\mathbb{R}^3}|\xi|^2|\widehat{\vec{v_0}}|^2\right)^{1/2}\\
\leq & ||\vec{v_0}||_{H^1}+\left(\sup_{\xi\in\mathbb{R}^3}(|\xi|^{2\lambda}e^{-2t|\xi|^2})\right)^{1/2}\|\vec{v_0}\|_{H^1}\\
\leq & C_s(1+t^{-\frac{\lambda}{2}})\|\vec{v_0}\|_{H^1}.
\end{aligned}
$$

Entonces, la siguiente estimativa nos permite acotar el segundo término, $I_2(t)$, de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
\int_0^t\|h_{t-\tau}*\vec{f}(\tau,\cdot)\|_{H^{1+\lambda}}\,d\tau \leq & \int_0^t\|h_{t-\tau}*\vec{f}(\tau,\cdot)\|_{H^{1+\lambda}}\,d\tau\\
\leq & \int_0^t\|h_{t-\tau}*\vec{f}(\tau,\cdot)\|_{L^2}+\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\xi|^{2\lambda}e^{-2(t-\tau)|\xi|^2}|\xi|^2|\widehat{\vec{f}(\tau,\xi)}|^2\,d\xi\right)^{1/2}\,d\tau\\
\leq & \int_0^t\|\vec{f}(\tau,\cdot)\|_{L^2}\,d\tau+c_\lambda\int_0^t\|\vec{f}(\tau,\cdot)\|_{\dot{H}^1}(t-\tau)^{-\frac{\lambda}{2}}\,d\tau\\
\leq & c_\lambda\int_0^t\|\vec{f}(\tau,\cdot)\|_{H^1}\,(1+(t-\tau)^{-\frac{\lambda}{2}})\\
\leq & c_\lambda\|\vec{f}\|_{L^2_TH^1_x}\,(t+t^{\frac{-\lambda+2}{2}}+t^{-\lambda+1}).
\end{aligned}
$$

Ahora, la estimativa para la parte no lineal de $\vec{v}$, $I_3(t)$, es la siguiente:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t\|h_{t-\tau}*\mathbb{P}(\mathbf{div}\,((\vec{v}\otimes\vec{v})_\alpha)(\tau,\cdot)\|_{H^{1+\lambda}}\,d\tau\leq C_\lambda\int_0^t\|h_{t-\tau}div\,((\vec{v}\otimes\vec{v})_\alpha)(\tau,\cdot)\|_{H^{1+\lambda}}\,d\,\tau\\
&=C_\lambda\int_0^t\Big(\int_{\mathbb{R}^3}e^{-2(t-\tau)|\xi|^2}\frac{(1+|\xi|^2)^{1+\lambda}|\widehat{\vec{v}\otimes\vec{v}}|^2(\tau,\xi)|\xi|^2}{(1+\alpha^2|\xi|^2)^2}d\xi\Big)^{\frac{1}{2}}\,d\tau\leq C_{\lambda,\alpha}\|\vec{v}\otimes\vec{v}\|_{L^2_TH^1_x}\,t^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Ahora, para el cuarto término, $I_4(t)$, procedemos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\int_0^t \|h_{t-\tau} * \vec{v}(\tau,\cdot)\|_{H^{1+\lambda}}\, d\tau &\leq \int_0^t \|h_{t-\tau} * \vec{v}(\tau,\cdot)\|_{H^{1+\lambda}}\, d\tau \\
&\lessapprox \int_0^t \|h_{t-\tau} * \vec{v}(\tau,\cdot)\|_{L^2}\, d\tau + \int_0^t \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{2\lambda} e^{-2t|\xi|^2} |\xi|^2 |\widehat{\vec{v}(\tau,\xi)}|^2 \, d\xi \right)^{1/2} d\tau \\
&\leq \int_0^t \|\vec{v}(\tau,\cdot)\|_{L^2}\, d\tau + c_\lambda \int_0^t \|\vec{v}(\tau,\cdot)\|_{\dot{H}^1} (t-\tau)^{-\frac{\lambda}{2}}\, d\tau \\
&\leq c_\lambda \|\vec{v}\|_{L^\infty_T H^1_x} \int_0^t (1 + (t-\tau)^{-\frac{\lambda}{2}})\, d\tau \\
&\leq c_\lambda \, \|\vec{v}\|_{L^\infty_T H^1_x} (t + t^{-(\frac{\lambda-2}{2})}).
\end{aligned}$$

Apartado 2.2: una vez que sabemos que $\forall\, t > 0$ $\vec{v}(t,\cdot) \in H^{1+\lambda}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, vamos a mostrar que $\vec{v} \in \mathcal{C}(]0,T]; H^{1+\lambda}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3))$, con $0 < \lambda < 1$. Procederemos como antes, es decir, mostraremos que cada término de la forma integral de $\vec{v}$ pertenece a dicho espacio. Consideramos $t > 0$ y $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in]0,T]$ tal que $\lim_{n\to+\infty} t_n = t$, entonces, como $t > 0$ fijo, se tiene que existe $c > 0$, tal que, $c < t$, con lo cual tenemos la siguiente estimativa para $I_1(t)$:

$$\begin{aligned}
\|h_t * \vec{v}_0 - h_{t_n} * \vec{v}_0\|^2_{H^{1+\lambda}} &= \int_{\mathbb{R}^3} (1+|\xi|^2) |\widehat{\vec{v}_0}|^2 (1+|\xi|^2)^\lambda e^{-2t|\xi|^2} (1 - e^{-(t_n - t)|\xi|^2})(1 - e^{-(t_n-t)|\xi|^2})\, d\xi \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^3} (1+|\xi|^2) |\widehat{\vec{v}_0}|^2 (1+|\xi|^2)^\lambda e^{-2c|\xi|^2} (1 - e^{-2(t_n-t)|\xi|^2})\, d\xi \\
&\leq (\sup_{\xi\in\mathbb{R}^3} (1+|\xi|^2)^\lambda e^{-2c|\xi|^2}) \int_{\mathbb{R}^3} (1+|\xi|^2)|\widehat{\vec{v}_0}|^2 (1 - e^{-2(t_n-t)|\xi|^2})\, d\xi \\
&\leq c_\lambda \int_{\mathbb{R}^3} (1+|\xi|^2)|\widehat{\vec{v}_0}|^2 (1 - e^{-2(t_n-t)|\xi|^2})\, d\xi.
\end{aligned}$$

Ahora, como $\vec{v}_0 \in H^1(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$, podemos utilizar el T.C.D.L[1], para concluir que $\lim_{n\to+\infty} \|h_t * \vec{v}_0 - h_{t_n} * \vec{v}_0\|_{H^{1+\lambda}} = 0$. Con esto hemos demostrado que $h_t * \vec{v}_0 \in C(]0,T]; H^{1+\lambda})$. Estudiamos ahora la continuidad del segundo término, $I_2(t)$. Gracias a regularidad de $\vec{f}$, a las propiedades del núcleo del calor,a la desigualdad de Cauchy-Schwarz y nuevamente por el T.C.D.L,

[1]Teorema de convergencia Dominada de Lebesgue

tenemos

$$
\begin{aligned}
&\left\| \int_0^{t_n} h_{t_n-\tau} * \vec{f}(\tau,\cdot)\, d\tau - \int_0^t h_{t-\tau} * \vec{f}(\tau,\cdot)\, d\tau \right\|_{H^{1+\lambda}} \\
&= \left\| \int_0^{t_n} (h_{t_n-\tau} - h_{t-\tau}) * \vec{f}(\tau,\cdot)\, d\tau - \int_{t_n}^t h_{t-\tau} * \vec{f}(\tau,\cdot)\, d\tau \right\|_{H^{1+\lambda}} \\
&\leq \int_0^{t_n} \|(h_{t_n-\tau} - h_{t-\tau}) * \vec{f}(\tau,\cdot)\|_{H^{1+\lambda}}\, d\tau + \int_{t_n}^t \|h_{t-\tau} * \vec{f}(\tau,\cdot)\|_{H^{1+\lambda}}\, d\tau \\
&\leq \int_0^T \|(h_{t_n-\tau} - h_{t-\tau}) * \vec{f}(\tau,\cdot)\|_{H^{1+\lambda}}\, d\tau + (t-t_n)\|\vec{f}(\tau,\cdot)\|_{L^\infty_T H^{1+\lambda}_x} \\
&\Rightarrow \int_0^T \lim_{n\to\infty} \|(h_{t_n-\tau} - h_{t-\tau}) * \vec{f}(\tau,\cdot)\|_{H^{1+\lambda}}\, d\tau + \lim_{n\to\infty} ((t-t_n))\|\vec{f}(\tau,\cdot)\|_{L^\infty_T H^{1+\lambda}_x} = 0.
\end{aligned}
$$

Por tanto tenemos que el término $\int_0^t h_{t-\tau} * \vec{f}(\tau,\cdot)$ esta en $C(]0,T]; H^{1+\lambda})$. Ahora para el tercer término, $I_3(t)$, primero, recordemos que la solución $\vec{v}$ de esta ecuación verifica $\vec{v}\otimes\vec{v} \in L^2_T H^1_x$. Con esta información a la mano, podemos escribir:

$$
\begin{aligned}
&\left\| \int_0^{t_n} h_{t_n-\tau} * \mathbb{P}(\mathbf{div}\,((\vec{v}\otimes\vec{v})_\alpha)(\tau,\cdot)\, d\tau - \int_0^t h_{t-\tau} * \mathbb{P}(\mathbf{div}\,((\vec{v}\otimes\vec{v})_\alpha)(\tau,\cdot)\, d\tau \right\|_{H^{1+\lambda}} \\
&\leq \left\| \int_0^{t_n} (h_{t_n-\tau} - h_{t-\tau}) * \mathbb{P}(\mathbf{div}\,((\vec{v}\otimes\vec{v})_\alpha)(\tau,\cdot)\, d\tau - \int_{t_n}^t h_{t-\tau} * \mathbb{P}(\mathbf{div}\,((\vec{v}\otimes\vec{v})_\alpha)(\tau,\cdot)\, d\tau \right\|_{H^{1+\lambda}} \\
&\leq \underbrace{\int_0^{t_n} \|(h_{t_n-\tau} - h_{t-\tau}) * \mathbf{div}\,((\vec{v}\otimes\vec{v})_\alpha)(\tau,\cdot)\|_{H^{1+\lambda}}\, d\tau}_{\tilde{A}(t_n)} + \underbrace{\int_{t_n}^t \|h_{t-\tau} * \mathbf{div}\,((\vec{v}\otimes\vec{v})_\alpha)(\tau,\cdot)\|_{H^{1+\lambda}}\, d\tau}_{\tilde{B}(t_n)}
\end{aligned}
$$

Examinemos meticulosamente las cantidades, $\tilde{A}(t_n)$ y $\tilde{B}(t_n)$. Con respecto a $\tilde{A}(t_n)$, tenemos que, utilizando las propiedades del operador de Helmhotz, del operador de Leray y T.C.D.L, tenemos que la cantidad $\tilde{A}(t_n)$ se controla de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
\tilde{A}(t_n) &\leq \int_0^T \|(h_{t_n-\tau} - h_{t-\tau}) * (\mathbf{div}\,((\vec{v}\otimes\vec{v})_\alpha)(\tau,\cdot)\|_{H^{1+\lambda}}\, d\tau \\
&= \int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^3} (1+|\xi|^2)^{1+\lambda} \frac{|\xi|^2 |\widehat{\vec{v}\otimes\vec{v}}(\tau,\xi)|^2}{(1+\alpha^2|\xi|^2)^2} \left(e^{-(t-\tau)|\xi|^2}(e^{-(t_n-t)|\xi|^2} - 1\right)^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} d\tau. \\
&\leq c_\alpha \int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^2 |\widehat{\vec{v}\otimes\vec{v}}(\tau,\xi)|^2 \left(e^{-(t-\tau)|\xi|^2}(e^{-(t_n-t)|\xi|^2} - 1\right)^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} d\tau \\
&= \int_0^T \|(h_{t_n-\tau} - h_{t-\tau}) * \vec{v}\otimes\vec{v}\,(\tau.\cdot)\|_{\dot{H}^1}\, d\tau. \qquad (4.1)
\end{aligned}
$$

Examinemos puntualmente la cantidad $\|(h_{t_n-\tau}-h_{t-\tau})*\vec{v}\otimes\vec{v}\,(\tau.\cdot)\|_{\dot{H}^1}$, por consiguiente, para $\tau\in[0,t]$, tenemos

$$\begin{aligned}\|(h_{t_n-\tau}-h_{t-\tau})*\vec{v}\otimes\vec{v}\,(\tau.\cdot)\|^2_{\dot{H}^1} &= \int_{\mathbb{R}^3}|\xi|^2|\widehat{\vec{v}\otimes\vec{v}}(\tau,\xi)|^2\,e^{-2(t-\tau)|\xi|^2}(e^{-(t_n-t)|\xi|^2}-1)^2\,d\xi\\ &\leq \int_{\mathbb{R}^3}|\xi|^2|\widehat{\vec{v}\otimes\vec{v}}(\tau,\xi)|^2\,(e^{-2(t_n-t)|\xi|^2}-1)\,d\xi.\end{aligned}$$

Entonces, como para todo $\tau\in[0,t]$, $\vec{v}\otimes\vec{v}(\tau,\cdot)\in H^1(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$, se sigue a partir de T.C.D.L, que $\lim_{n\to+\infty}\|(h_{t_n-\tau}-h_{t-\tau})*\vec{v}\otimes\vec{v}\,(\tau.\cdot)\|_{\dot{H}^1}=0$. Así, regresando a (4.1), y utilizando nuevamente T.C.D.L, en variable temporal, tenemos que $\lim_{n\to+\infty}\tilde{A}(t_n)=0$ ya que $\vec{v}\otimes\vec{v}\in L^2_TH^1_x\subset L^1_TH^1_x$. Por otro lado, con respecto a la cantidad $\tilde{B}(t_n)$, la estimativa que tenemos es la siguiente:

$$\begin{aligned}\tilde{B}(t_n) &= \int_{t_n}^t\|h_{t-\tau}*\textbf{div}\,((\vec{v}\otimes\vec{v})_\alpha)(\tau,\cdot)\|^2_{H^{1+\lambda}}\,d\tau\\ &= \int_{t_n}^t\Big(\int_{\mathbb{R}^3}(1+|\xi|^2)^{1+\lambda}e^{-2(t-\tau)|\xi|^2}\frac{|\xi|^2|\widehat{\vec{v}\otimes\vec{v}}(\tau,\xi)|^2}{(1+\alpha^2|\xi|^2)^2}\,d\xi\Big)^{\frac{1}{2}}d\tau\\ &\leq \int_{t_n}^t\Big(\int_{\mathbb{R}^3}|\xi|^2|\widehat{\vec{v}\otimes\vec{v}}(\tau,\xi)|^2d\xi\Big)^{\frac{1}{2}}d\tau\\ &\leq \int_{t_n}^t\|\vec{v}\otimes\vec{v}(\tau,\cdot)\|_{H^1}\leq(t-t_n)^{\frac{1}{2}}\|\vec{v}\otimes\vec{v}\|_{L^2_TH^1_x}\\ &\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\tilde{B}(t_n)=0.\end{aligned}$$

Se concluye que $\int_0^t h_{t-\tau}*\mathbb{P}(\textbf{div}\,(\vec{v}\otimes\vec{v})_\alpha(\tau,\cdot)\,d\tau\in C([0.T];H^{1+\lambda}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3))$. Finalmente, analizamos el término $I_4(t)$. Como $\vec{v}\in L^\infty_TH^1_x$, se tiene

$$\begin{aligned}&\mu\left\|\int_0^{t_n}h_{t_n-\tau}*\vec{v}(\tau,\cdot)\,d\tau-\int_0^t h_{t-\tau}*\vec{v}(\tau,\cdot)\,d\tau\right\|_{H^{1+\lambda}}\\ &=\mu\left\|\int_0^{t_n}(h_{t_n-\tau}-h_{t-\tau})*\vec{v}(\tau,\cdot)\,d\tau-\int_{t_n}^t h_{t-\tau}*\vec{v}(\tau,\cdot)\,d\tau\right\|_{H^{1+\lambda}}\\ &\leq\mu\underbrace{\int_0^T\|(h_{t_n-\tau}-h_{t-\tau})*\vec{v}(\tau,\cdot)\|_{H^{1+\lambda}}\,d\tau}_{J_1(t_n)}+\mu\underbrace{\int_{t_n}^t\|h_{t-\tau}*\vec{v}(\tau,\cdot)\|_{H^{1+\lambda}}\,d\tau}_{J_2(t_n)}\end{aligned}$$

Ahora, analicemos estas dos últimas cantidades. Empezemos por el más sencillo $J_2(t_n)$. Gracias al hecho que $\vec{v}$ pertenece a $L^\infty([0,T];H^1)\cap L^2([0,T];\dot{H}^2)$, se sigue que $\vec{v} \in L^2([0,T];H^2)$, y por tanto

$$\begin{aligned}
&\mu \int_{t_n}^{t} \|h_{t-\tau} * \vec{v}(\tau,\cdot)\|_{H^{1+\lambda}}\, d\tau \leq +\mu \int_{t_n}^{t} \|h_{t-\tau} * \vec{v}(\tau,\cdot)\|_{H^2}\, d\tau \\
&\leq \mu \int_{t_n}^{t} \|\vec{v}(\tau,\cdot)\|_{H^2} \leq \mu (t-t_n)^{\frac{1}{2}} \|\vec{v}\|_{L^2_T H^2} \\
&\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mu \int_{t_n}^{t} \|h_{t-\tau} * \vec{v}(\tau,\cdot)\|_{H^{1+\lambda}}\, d\tau = 0,
\end{aligned}$$

mientras que, para la cantidad $J_1(t_n)$, tenemos la siguiente estimativa:

$$\begin{aligned}
\int_0^T \|(h_{t_n-\tau} - h_{t-\tau}) * \vec{v}(\tau,\cdot)\|_{H^{1+\lambda}}\, d\tau \leq c_\lambda & \underbrace{\int_0^T \|(h_{t_n-\tau} - h_{t-\tau}) * \vec{v}(\tau,\cdot)\|_{L^2}\, d\tau}_{J_{1,1}(t_n)} \\
&+ \underbrace{\int_0^T \|(h_{t_n-\tau} - h_{t-\tau}) * \vec{v}(\tau,\cdot)\|_{\dot{H}^{1+\lambda}}\, d\tau}_{J_{1,2}(t_n)}.
\end{aligned}$$

Analicemos uno por uno estos dos nuevos términos. Con respecto a la cantidad $J_{1,1}(t_n)$, tenemos que $\lim_{n\to+\infty} J_{1,1}(t_n) = 0$, ya que $C([0,T];H^1(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3))$. Ahora, para la cantidad $J_{1,2}(t_n)$, empecemos por estudiar puntualmente la cantidad $\|(h_{t_n-\tau} - h_{t-\tau}) * \vec{v}\,(\tau.\cdot)\|_{\dot{H}^{1+\lambda}}$. Para $\tau \in [0,t[$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\|(h_{t_n-\tau} - h_{t-\tau}) * \vec{v}\,(\tau.\cdot)\|^2_{\dot{H}^{1+\lambda}} &= \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{2(1+\lambda)} |\widehat{\vec{v}}(\tau,\xi)|^2\, e^{-2(t-\tau)|\xi|^2} (e^{-(t_n-t)|\xi|^2} - 1)^2\, d\xi \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^2 |\widehat{\vec{v}}(\tau,\xi)|^2\, \frac{|(t-\tau)^{\frac{1}{2}}\xi|^{2\lambda}}{(t-\tau)^\lambda}\, (e^{-(t_n-t)|\xi|^2} - 1)^2\, d\xi \\
&\leq \frac{\left(\sup_{\eta\in\mathbb{R}^3} e^{-2|\eta|^2}|\eta|^{2\lambda}\right)}{(t-\tau)^\lambda} \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^2 |\widehat{\vec{v}}(\tau,\xi)|^2\, (e^{-(t_n-t)|\xi|^2} - 1)^2\, d\xi \\
&\leq \frac{c_\lambda}{(t-\tau)^\lambda} \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^2 |\widehat{\vec{v}}(\tau,\xi)|^2\, (e^{-(t_n-t)|\xi|^2} - 1)^2\, d\xi.
\end{aligned}$$

Entonces, como para todo $\tau \in [0,t[$, $\vec{v}(\tau,\cdot) \in H^1(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$, utilizando T.C.D.L, podemos concluir que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{c_\lambda}{(t-\tau)^\lambda} \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^2 |\widehat{\vec{v}}(\tau,\xi)|^2\, (e^{-(t_n-t)|\xi|^2} - 1)^2\, d\xi. = 0.$$

Así, utilizando nuevamente T.C.D.L, en variable temporal, tenemos que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^T \left(\frac{c_\lambda}{(t-\tau)^\lambda} \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^2 |\widehat{\vec{v}}(\tau,\xi)|^2\, (e^{-(t_n-t)|\xi|^2} - 1)^2\, d\xi \right)^{\frac{1}{2}} d\tau = 0,$$

ya que, $\vec{v} \in L^\infty_T H^1_x$ y $\lambda \in]0,1[$. Esto automáticamente implica que $\lim_{n\to+\infty} I_2(t_n) = 0$.

En este punto, hemos establecido que $\vec{v} \in \mathcal{C}(]0,T], H^{1+\lambda}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3))$, con $\lambda \in]0,1]$. Aprovechando la regularidad inherente de la fuerza externa $\vec{f}$ (por hipótesis), podemos repetir este procedimiento de manera iterativa (con el propósito de incrementar la regularidad del término no lineal), lo que nos permite concluir que. $\vec{v} \in \mathcal{C}(]0,T], H^\infty(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3))$.

Etapa 3: a partir de aquí, observamos que $u(t,x)$ resuelve la ecuación (3.1), de manera clásica. En efecto, primero notemos que nuestra solución *mild* $\vec{v}$, verifica, en sentido de distribuciones la ecuación

$$\partial_t \vec{v} = \Delta \vec{v} - \mathbb{P}(\mathrm{div}((\vec{v}\otimes\vec{v})_\alpha)) + \vec{f} - \mu\,\vec{v}.$$

Analicemos, cada parte del lado derecho de esta expresión. Es así que, como $\vec{f}(t,\cdot) \in H^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3) \subset \mathcal{C}^{0,\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$, donde, $\mathcal{C}^{0,\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$, es el espacios de Hölder de las funciones $\frac{1}{2}$-Hölder continuas, así $\vec{f} \in C([0,T], C(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3))$. Un estudio similar permite mostrar también que $\vec{v} \in C]0,T], C(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3))$.

Adicionalmente, como $\vec{v}(t,\cdot) \in H^4(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$, tenemos que $\Delta\vec{v}(t,\cdot) \in H^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$, y por el razonamiento anterior tenemos que, $\Delta\vec{v} \in C(]0,T], C(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3))$, así, finalmente, por la la regularidad de $\vec{v}$ y por la ganancia de regularidad que proporciona el operador de Helmholtz $(\cdot)_\alpha$, tenemos que $\mathbb{P}(\mathrm{div}((\vec{v}\otimes\vec{v})_\alpha)) \in C(]0,T], C(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3))$. Con todo esto, podemos deducir que nuestra solución *mild* $\vec{v}$, es en realidad una solución clásica del problema (3.1) y que $\partial_t\vec{v} \in C(]0,T], C(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3))$.

Por otra parte, con esta información, podemos verificar que $\partial_t\vec{v} \in \mathcal{C}(]0,T_0], \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3))$. En efecto, vamos a demostrar que para todo $k \in \mathbb{N}$, la función $\partial^\alpha_x\partial_t\vec{v}(t,\cdot)$, es una función continua de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^3$, con $\alpha \in \mathbb{N}^3$, tal que $|\alpha| \leq k$. Ahora, como $\partial_t\vec{v} \in \mathcal{C}(]0,T_0], H^\infty(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3))$, se tiene en particular que, $\vec{v}(t,\cdot) \in H^{2+k}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$, de donde, se deduce que $\partial^\alpha_x\partial_t\vec{v}(t,\cdot) \in H^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3) \subset \mathcal{C}^{0,\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$ y concluimos como antes. Después de todo este análisis, podemos inferir que, $\partial_t\vec{v} \in \mathcal{C}(]0,T[, \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3))$ y por lo tanto, $\vec{v} \in \mathcal{C}^1(]0,T, \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3))$. $\square$

Capítulo 5

Existencia del Atractor global del semi-grupo asociado a la ecuación (3.1)

En esta parte del texto, abordaremos el problema del comportamiento asintótico para el caso de las soluciones del problema (3.1). Empezaremos con introducir algunas nociones de la teoría de semi-grupos en espacios de Banach para después concluir con el teorema principal de este trabajo. Para más detalle sobre la teoría de semigrupos en espacios de Banach, se recomienda consultar [14, 13].

5.1. Introducción a la Teoría de semi-grupos en espacios de Banach

Definición 5.1 (Semi-grupo continuo en espacios de Banach)**.** *Sea* $(E, \|\cdot\|_E)$ *un espacio de Banach y* $(S(t))_{t\geq 0}$ *una familia mono-paramétrica de operadores continuos (no necesariamente lineales) de* E *en* E*. Decimos que* $(S(t))_{t\geq 0}$ *es un semi-grupo continuo, definido sobre* E*, si verifica:*

1. $S(0) = I$.

2. $S(t)S(\tau) = S(t+\tau)$ *para todo* $t, \tau \geq 0$.

3. $\lim\limits_{t\to t_0} S(t)u = S(t_0)u$ *para todo* $u \in E$ *y todo* $t_0 > 0$.

4. $\lim\limits_{t \to 0^+} S(t)u = u$ *para todo* $u \in E$.

A lo largo de esta parte de nuestro trabajo, nos referiremos a un semi-grupo continuo como simplemente un semi-grupo. Para facilitar la lectura.

DEFINICIÓN 5.2. *Sea* $A \subset E$*. Definimos la* ***orbita positiva*** *del conjunto* A *a partir del semi-grupo* $(S(t))_{t\geq 0}$ *al conjunto*

$$\gamma^+(A) = \bigcup_{t\geq 0} S(t)A,$$

donde, $S(t)A = \{u \in E : u = S(t)a,\ a \in A\}$.

Se puede dar una generalización de la noción de un semi-grupo para una familia de operadores mono-paramétrica indexada con $\mathbb{R}$. En ese caso, se puede hablar de orbitas negativas, pero para el fin práctico de este estudio no es necesario esta definición.

DEFINICIÓN 5.3. *Sea* $A \subset E$*. Decimos que* A *es un* ***conjunto positivamente invariante*** *bajo el semi-grupo* $(S(t))_{t\geq 0}$ *si*

$$\forall t > 0 \qquad S(t)A \subset A.$$

Con esta última definición, resulta sencillo establecer que un conjunto A se denomina un **invariante funcional**, respecto al semigrupo $(S(t))_{t\geq 0}$ si

$$\forall t \geq 0 \qquad S(t)A = A.$$

La siguiente definición tendrá una importancia relevante en el objetivo principal de este trabajo.

DEFINICIÓN 5.4. *Sea* $A \subset E$*. Definimos el conjunto* ω***-límite*** *de* A*, al conjunto*

$$\omega(A) = \bigcap_{s\geq 0} \overline{\gamma^+(S(t)A)} = \bigcap_{s\geq 0} \overline{\bigcup_{t\geq s} S(t)A},$$

En el caso cuando $A = \{v_0\}$, entonces al conjunto ω-límite se lo nota simplemente como $\omega(v_0)$. El siguiente enunciado nos permitirá tener claro, algunas propiedades básicas del conjunto ω-límite.

PROPOSICIÓN 5.1. *Con las notaciones anteriores se tiene los siguiente:*

1. *Para* $A \subset E$, $x \in \omega(A)$ *ssi existe una sucesión* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in A$ *y* $(t_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^+ \xrightarrow{k\to+\infty} +\infty$ *tal que,*

$$\lim_{k\to+\infty} S(t_k)x_k = x.$$

2. *Para* $v_0 \in E$, *se tiene que*

$$\omega(v_0) = \{y \in E : \exists\ (t_k)_{k\in\mathbb{N}} \xrightarrow{k\to+\infty} +\infty \text{ tal que } \lim_{k\to+\infty} S(t_k)v_0 = y\}.$$

3. *Si* $A \subset B \Rightarrow \omega(A) \subset \omega(B)$.

Demostración. La prueba de esta proposición, se encuentra en el apéndice D (ver sección D.1). □

Note, en general se tiene que si $A \subset E$ entonces $\bigcup_{x\in A} \omega(x) \subset \omega(A)$, pero no necesariamente se tiene la otra inclusión. $v^* = v(t_0)$ $v^* = v(t_0)$

Nuestra siguiente proposición nos permitirá, de forma conjunta con el concepto de conjunto Absorbente, dar una caracterización clara del conjunto atractor global asociado al semi-grupo de la ecuación (3.1).

PROPOSICIÓN 5.2. *Asumamos que para algún subconjunto* $A \subset E$ *y para algún* $t_0 > 0$, *se tiene que el conjunto* $\bigcup_{t\geq t_0} S(t)A$ *es relativamente compacto en* $(E, \|\cdot\|_E)$. *Entonces* $\omega(A)$ *es no vacío, compacto y un conjunto invariante funcional bajo* $S(t)_{t\geq 0}$.

Demostración. La demostración de esta proposición es similar, a la presentada en el lema 5.9. □

Ahora vamos a definir el conjunto atractor de un semi-grupo, que será una herramienta importante de nuestro resultado final.

DEFINICIÓN 5.5. *Sea* $\mathcal{A} \subset E$. *Decimos que* $\mathcal{A}$ *es un* ***atractor*** *del semi-grupo* $(S(t))_{t\geq 0}$, *si satisface las siguientes dos propiedades:*

1. $\mathcal{A}$ *es un conjunto invariante funcional del semi-grupo* $(S(t))_{t\geq 0}$.

2. *Si existe $\mathcal{U}$, una vecindad abierta*[1] *de $\mathcal{A}$, tal que $\forall\, v_0 \in \mathcal{U}$, se tenga*

$$d(S(t)v_0, \mathcal{A}) \xrightarrow{t \to +\infty} 0,$$

donde $d(x, \mathcal{A}) = \operatorname{ínf}_{y \in \mathcal{A}} \|x - y\|_E$.

Observación 7.

1. Si $\mathcal{A}$ es un conjunto atractor, entonces la vecindad abierta más grande de $\mathcal{A}$ que verifique el literal 2), de la definición 5.5, es llamado la **cuenca de atracción** de $\mathcal{A}$.

2. El literal 2), de la definición 5.5, se puede leer también como $\mathcal{A}$ atrae todos los puntos de $\mathcal{U}$.

Definición 5.6. *Sea $\mathcal{A}$ un atractor del semi-grupo, y $\mathcal{U}$, una vecindad abierta de $\mathcal{A}$, que verifique el literal 2) de la definición 5.5. Decimos que $\mathcal{A}$* ***atrae uniforme*** *al conjunto $B \subset \mathcal{U}$ si*

$$d(S(t)B, \mathcal{A}) \xrightarrow{t \to +\infty} 0, \tag{5.1}$$

donde $d(\cdot, \cdot)$, es la semi-métrica de dos subconjuntos, definida como: $d(B, A) = \sup_{x \in A} d(x, B) = \sup_{x \in A} \operatorname{ínf}_{y \in B} \|x - y\|_E$.

Nótese que, la definición 5.2, es equivalente a decir que: $\forall\, \epsilon > 0$, existe $t_\epsilon > 0$ tal que $\forall t \geq t_\epsilon$, $S(t)B \subset \mathcal{U}_\epsilon$

[2], donde

$$\mathcal{U}_\epsilon = \{x \in E : d(x, \mathcal{A}) < \epsilon\}.$$

Definición 5.7. *Sea $\mathcal{A}$ un atractor del semi-grupo y $\mathcal{U}$, una vecindad abierta de $\mathcal{A}$ que verifique el literal 2) de la definición 5.5. Decimos que $\mathcal{A}$ atrae a los conjuntos acotado (o conjuntos compactos) de $\mathcal{U}$ si $\mathcal{A}$* ***atrae uniformemente a cada conjunto acotado*** *(o compacto) de $\mathcal{U}$.*

Con esta última definición, estamos listos para definir el conjunto atractor global de un semigrupo.

[1]Recordemos que $\mathcal{U}$, es dicho una vecindad abierta de $\mathcal{A}$, si $\mathcal{A} \subset \mathcal{U}$, y además $\mathcal{U}$ es un conjunto abierto

[2]$\mathcal{U}_\epsilon$, es conocida como una ϵ-vecindad de $\mathcal{A}$

DEFINICIÓN 5.8. *Sea $\mathcal{A}$ un atractor del semi-grupo. Decimos que $\mathcal{A}$ es un **atractor global** del semi-grupo $(S(t))_{t\geq 0}$ si:*

- *$\mathcal{A}$ es compacto en $(E, \|\cdot\|_E)$.*
- *$\mathcal{A}$ atrae uniformemente a todos los conjuntos acotados de E.*

OBSERVACIÓN 8.

1. Si $\mathcal{A}$ es un atractor global, entonces es maximal (con respecto a la inclusión) de los conjuntos atractores. De la misma manera si $\mathcal{A}$ es un atractor global, entonces es maximal (con respecto a la inclusión) de los conjuntos invariantes funcionales.
2. Si un semi-grupo admite un atractor global entonces este es único.
3. Si $\mathcal{A}$ es un atractor global de un semi-grupo, entonces su cuenca de atración es E.

Como hemos dicho antes, nuestro interés es dar condiciones suficientes y necesarias para que el semi-grupo asociado a la ecuación (3.1), tenga un atractor global. Para ello, necesitamos introducir la siguiente definición.

DEFINICIÓN 5.9. *Decimos que $\mathcal{B} \subset E$ es un **conjunto absorbente** del semi-grupo $(S(t))_{t\geq 0}$, si verifica:*

- *$\forall B \subset E$ acotado, existe $T(B) > 0$ tal que*

$$\forall t \geq T(B) \qquad S(t)B \subset \mathcal{B}.$$

Una característica notable del conjunto absorbente $\mathcal{B}$, es que al cabo de un lapso de tiempo (determinado por dicho conjunto acotado), las trayectorias de cualquier conjunto acotado quedan dentro de $\mathcal{B}$. A primera vista, esta propiedad podría sugerir que la presencia de un conjunto absorbente conlleva la existencia de un atractor global, pero esta conclusión es falsa. Ahora bien, el caso contrario es verdad es decir, si $(S(t))_{t\geq 0}$ admita un atractor global $\mathcal{A}$, entonces se tiene la existencia de un conjunto Absorbente. En efecto, si consideramos

$$\mathcal{U}_\epsilon = \{x \in E : d(x, \mathcal{A}) < \epsilon\}.$$

Entonces, sabemos que $\forall B_0 \subset E$ acotado $\lim_{t\to+\infty} d(S(t)B_0, \mathcal{A}) \to 0$. Así, dado $\frac{\epsilon}{2} > 0$ existe $t_\epsilon > 0$ tal que $d(S(t)B_0, \mathcal{A}) \leq \frac{\epsilon}{2}$ para todo $t \geq t_\epsilon$. Mostremos que $S(t)B_0 \subset \mathcal{U}_\epsilon$ con $t \geq t_\epsilon$. Si $v \in S(t)B_0$ entonces existe $u \in B_0$ tal que $v = S(t)u$, de donde

$$d(S(t)u, \mathcal{A}) \leq d(S(t)B_0, \mathcal{A}) \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

En lo siguiente, mostraremos que un semi-grupo que posee un conjunto absorbente y goza de algunas otras propiedades posee un atractor global. La próxima definición, es una de las propiedades antes mencionadas.

DEFINICIÓN 5.10. *Sea $(S(t))_{t\geq 0}$ un semi-grupo en E. Decimos que $(S(t))_{t\geq 0}$ es **uniformemente compacto** para t suficientemente grande, si para todo conjunto B acotado existe $t_0 > 0$, que depende de B, tal que*

$$\bigcup_{t\geq t_0} S(t)B. \tag{5.2}$$

sea relativamente compacto en E.

Una alternativa a la definición 5.10 con respecto a la existencia del atractor global es la siguiente, que para nuestro caso jugará un rol importante.

DEFINICIÓN 5.11. *Sea $(S(t))_{t\geq 0}$ un semi-grupo en E. Decimos que $(S(t))_{t\geq 0}$, es una perturbación **uniformemente compacta** si $S(t) = S_1(t) + S_2(t)$, donde $(S_1(t))_{t\geq 0}$ es una familia de operadores continuos de E en E que verifica (5.2) y $(S_2(t))_{t\geq 0}$, es una familia de aplicaciones continuos de E en E, que verifica: $\forall\, C \subset E$ acotado, se tiene*

$$\sup_{u\in C} \|S_2(t)u\|_E \xrightarrow{t\to+\infty} 0.$$

OBSERVACIÓN 9.

1. Note que si $(S(t))_{t\geq 0}$, es un semi-grupo en E, que verifica 5.1 entonces trivialmente verifica 5.11.

2. Las familias de aplicaciones continuas $(S_1(t))_{t\geq 0}$ y $(S_2(t))_{t\geq 0}$, no son

necesariamente operadores lineales ni semi-grupos definidos en E.

El siguiente teorema da condiciones suficientes para la existencia de un conjunto atractor global, de un semi-grupo. Este teorema será la base del teorema principal de nuestro trabajo.

TEOREMA 5.3. *Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio de Banach y $(S(t))_{t\geq 0}$ un semi-grupo, que verifica las siguientes propiedades:*

1. *$(S(t))_{t\geq 0}$ admite un conjunto absorbente $\mathcal{B}$ en E .*
2. *$(S(t))_{t\geq 0}$ verifica la definición 5.10.*

Entonces, el conjunto ω-límite de $\mathcal{B}$, $\mathcal{A} = \omega(\mathcal{B})$, es el atractor global del semi-grupo $(S(t))_{t\geq 0}$ en E.

Demostración. La prueba de este importante teorema, e encuentra en el apéndice D (ver sección (D.2)). □

OBSERVACIÓN 10.

1. En relación al teorema 5.3, se puede mostrar afinando más el análisis que $\mathcal{A}$ es un conjunto conexo (ver [14]), pero para nuestro estudio no es relevante este aspecto.

2. En el teorema 5.3, se puede bajar la hipótesis concerniente a la definición 5.10, de la siguiente manera: $\exists t_1 > 0$ tal que $S(t_1)\mathcal{B}$ sea compacto. En efecto, al observar la demostración del teorema 5.3, se requiere que $\bigcup_{t\geq t_0} S(t)\mathcal{B}$ sea relativamente compacta cuando $\mathcal{B}$ es un conjunto absorbente en E. Entonces, si suponemos que $\overline{S(t_1)\,\mathcal{B}}$ es compacto, se tiene que existe $t_0 > 0$ (dependiente del conjunto $S(t_1)\,\mathcal{B}$), tal que, $S(t)\mathcal{B} \subset \mathcal{B}$, para todo $t \geq t_0$. Así, para todo $t \geq t_* = t_0 + t_1$, se deduce que $S(t)\mathcal{B} = S(t_1)S(t-t_1)\mathcal{B}$ esta incluido en $S(t_1)\mathcal{B}$ como $S(t-t_1)\mathcal{B} \subset \mathcal{B}$, y por consiguiente, $\bigcup_{t\geq t_*} S(t)$ esta incluido en $S(t_1)\mathcal{B}$, con lo cual se puede argumetar, a partir de aquí, como en la demostración del teorema 5.3.

Para finalizar este breve repaso de la teoría de semi-grupos, introduciremos un concepto fundamental de nuetro trabajo, que lo comentaremos oportunamente.

DEFINICIÓN 5.12. *Decimos que un semi-grupo es asintóticamente compacto, si para cada sucesión acotada* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* E *y para toda* $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty$*, la sucesión* $(S(t_n)x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es relativamente compacta en* $(E, \|\cdot\|_E)$*.*

La importancia de esta última definición, con respecto a nuestro trabajo, es la siguiente: en el teorema 5.5, se puede mostrar que teniendo la hipótesis de un semi-grupo asintóticamente compacto, en lugar de la definición 5.10 (ver [14]), el teorema 5.3 es válido, en espacios uniformemente convexos, particularmente en espacios de Hilbert, lo cual, se utilizará en la demostración, de la existencia del Atractor global para el semi-grupo asociado a la ecuación de Bardina-Navier-Stokes con un término de amortiguamiento. Con este objetivo, enunciaremos la última proposición de esta introducción de teoría de semi-grupos, que muestra la equivalencia de la definición 5.11 con la definión 5.12 en los espacios de Banach uniformemente convexos.

PROPOSICIÓN 5.4. *Consideremos* $(E, \|\cdot\|_E)$ *un espacio de Banach uniformemente convexo. Si suponemos la existencia de un conjunto absorbente del semi-grupo* $(S(t))_{t\geq 0}$ *en* E*, como en el teorema 5.3, entonces las tres condiciones siguientes son equivalentes:*

1. *La definición 5.11.*
2. *La definición 5.12.*
3. *Existe un conjunto compacto* $K \subset H$ *tal que* $\lim_{t\to+\infty} d(S(t)\mathcal{B}, K) = 0$.

Demostración. ver [14] □

5.2. Caracterización del conjunto atractor global para el semi-grupo asociado a la ecuación (2.1)

En esta parte del trabajo supondremos que la fuerza $\vec{f}$ asociada al problema (3.1), es a divergencia nula, estacionaria, y pertenece a

$(H^1, \|\cdot\|_\alpha)$. Empezaremos por describir explícitamente el semi-grupo asociado al problema (3.1).

TEOREMA 5.5. *Dada una fuerza independiente del tiempo, a divergencia nula, $\vec{f} \in (H^1, \|\cdot\|_\alpha)$, la ecuación (3.1), define un **semi-grupo** sobre $(H^1, \|\cdot\|_\alpha)$.*

Demostración. Definimos, $(\mathcal{S}_{\vec{f}}(t))_{t\geq 0}$, la familia de operadores mono- paramétrica en $(H^1, \|\cdot\|_\alpha)$, como

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\vec{f}}(t) \colon H^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) &\longrightarrow H^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \\ \vec{v}_0 &\longmapsto \vec{v}(t, \cdot), \end{aligned}$$

donde $\vec{v}(t,\cdot)$ es la única solución *mild* global en tiempo originada a partir del dato inicial $\vec{v}_0$ y descrito en el teorema 3.1.
Los literales 1), 2) de la definición 5.1, se verifican con la únicidad de $\vec{v}$, mientras que, los literales 3) y 4), se da a partir del teorema 4.1. □

Nuestro objetivo principal en este estudio, es detallar y caracterizar explícitamente, que este semi-grupo tiene un **conjunto atractor global**. Así, presentamos el teorema principal de nuestro trabajo.

TEOREMA 5.6. *Dada una fuerza independiente del tiempo, a divergencia nula, $\vec{f} \in (H^1, \|\cdot\|_\alpha)$. Entonces, el semi-grupo, $(\mathcal{S}_{\vec{f}}(t)_{t\geq 0})$, asociado a la ecuación (3.1), tiene un único atractor globlal $\mathcal{A}_{\vec{f}}$, que depende intrínsicamente de la fuerza $\vec{f}$.*

Demostración. En primer lugar, mostremos que, $(\mathcal{S}_{\vec{f}}(t))_{t\geq 0}$, admite un conjunto absorbente $\mathcal{B}_{\vec{f}}$. Con este fin, tenemos la siguiente proposición:

PROPOSICIÓN 5.7. *Sea $\vec{v}_0 \in H^1_\alpha(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ y $\vec{f}$, una fuerza estacionaria en $H^1_\alpha(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Entonces la solución $\vec{v}$, construida, a partir de $\vec{v}_0$ y $\vec{f}$, en el teorema 3.1, satisface las siguientes desigualdades*

1) $\forall t \geq 0$*:*

$$\|\vec{v}(t,\cdot)\|^2_{H^1_\alpha} \leq \|\vec{v}_0\|^2_{H^1_\alpha} e^{-\mu t} + \frac{4}{\mu^2}\|\vec{f}\|^2_{H^1_\alpha}. \tag{5.3}$$

2) $\forall t \geq 0$ *and* $T \geq 0$*:*

$$\int_t^{t+T} \|\vec{v}(s,\cdot)\|^2_{\dot{H}^1} ds + \alpha^2 \int_t^{t+T} \|\vec{v}(s,v\cdot)\|^2_{\dot{H}^2} ds \leq \frac{2T}{\mu}\|\vec{f}\|^2_{H^1_\alpha} + \|\vec{v}(t,\cdot)\|^2_{H^1_\alpha}. \tag{5.4}$$

Para no perder el hilo de la demotración del teorema 5.6, dejamos la demostración de esta proposición en el apéndice D (ver sección D.3). Continuando con la demostración, podemos usar la estimación (5.3), para concluir fácilmente, que el conjunto

$$\mathcal{B}_{\vec{f}} = \left\{ \vec{v}_0 \in H^1_\alpha(\mathbb{R}^3) : \|\vec{v}_0\|^2_{H^1_\alpha} \leq \frac{8}{\mu^2}\|\vec{f}\|^2_{\mathcal{H}^1_\alpha} \right\},$$

es un conjunto absorbente para el semi-grupo $(\mathcal{S}_{\vec{f}}(t))_{t\geq 0}$. En efecto, note que $\mathcal{B}_{\vec{f}}$, es un conjunto cerrado y acotado en $H^1_\alpha(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$. Ahora, sea $B \subset H^1_\alpha(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$, un conjunto acotado. Entonces, para $R > 0$ suficientemente largo, tenemos que $\forall\, \vec{v}_0 \in B$, $\|\vec{v}_0\|^2_{H^1_\alpha} \leq R^2$. Por otro lado, por el punto $1)$ en la proposición 5.7, se tiene que $\forall\, \vec{v}_0 \in B$,

$$\|\mathcal{S}_{\vec{f}}(t)\vec{v}_0\|^2_{H^1_\alpha} \leq \|\vec{v}_0\|^2_{\mathcal{H}^1_\alpha} e^{-\mu t} + \frac{4}{\mu^2}\|\vec{f}\|^2_{H^1_\alpha} \leq R^2\, e^{-\mu t} + \frac{4}{\mu^2}\|\vec{f}\|^2_{H^1_\alpha}.$$

Aquí, consideramos $T = T(B) > 0$, de tal manera que $\forall\, t > T$, se cumpla que $R^2 e^{-\mu t} \leq \frac{4}{\mu^2}\|\vec{f}\|^2_{H^1_\alpha}$, y por consecuencia, tenemos que, $\forall\, \vec{v}_0 \in B$, $\mathcal{S}_{\vec{f}}(t)\vec{v}_0 \in \mathcal{B}_{\vec{f}}$.
El siguiente paso de la demostración del teorema 5.6, es mostrar que $(\mathcal{S}_{\vec{f}}(t))_{t\geq 0}$, es asintóticamente compacto en H^1_α, que de hecho es una tarea muy complicada. La demostración de esta propiedad es igual a la realizada en el artículo [5], en el cuál, utilizan técnicas superiores al nivel de este trabajo.
Para terminar la demostración de la existencia del atractor global $\mathcal{A}_{\vec{f}}$, vamos a comprobar que, las propiedades de nuestro semi-grupo (tener, un conjunto absorbente en H^1_α y ser asintóticamente compacto), implica, la existencia del atractor global.

Ahora bien, como $H^1_\alpha(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$, es un espacio de Hilbert , es decir un espacio de Banach uniformemente convexo, se puede utilizar la proposición 5.4, y por tanto, al ser nuestro semi-grupo, asintíticamente compacto y admitir un conjunto absorbente en $H^1_\alpha(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$, tenemos que $(\mathcal{S}_{\vec{f}}(t))_{t\geq 0}$, se puede descomponer de la siguiente manera: $\mathcal{S}_{\vec{f}}(t) = \mathcal{S}_{\vec{f}_1}(t) + \mathcal{S}_{\vec{f}_2}(t)$, donde $(\mathcal{S}_{\vec{f}_1}(t))_{t\geq 0}$, es una familia de operadores continuos de $H^1_\alpha(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ en $H^1_\alpha(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ que verifica (5.2), y $(\mathcal{S}_{\vec{f}_2}(t))_{t\geq 0}$, es una familia de aplicaciones continuos de $H^1_\alpha(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ en $H^1_\alpha(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$, que verifica: $\forall\, C \subset H^1_\alpha(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ acotado, se tiene

$$\sup_{\vec{u}\in C} \|\mathcal{S}_{\vec{f}_2}(t)\vec{u}\|_{H^1_\alpha} \xrightarrow{t\to+\infty} 0.$$

En primer lugar, tengamos claro lo siguiente: si $(\vec{v}_{0n})_{n\geq 0}$, una sucesión acotada de $H^1_\alpha(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$, y $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} > 0$, una sucesión creciente de reales estríctamente positivos, tal que $\lim_{n\to\infty} t_n = +\infty$ entonces $(\mathcal{S}_{\vec{f}_2}(t_n)\vec{v}_{0n})_{n\in\mathbb{N}}$, converge a cero. En efecto, como $(\vec{v}_{0n})_{n\in\mathbb{N}}$, es una sucesión acotada existe, $r > 0$, tal que $(\vec{v}_{0n})_{n\in\mathbb{N}} \in B_{H^1_\alpha}(0,r)$, entonces

$$\|\mathcal{S}_{\vec{f}_2}(t_n)\vec{v}_{0n})\|_{H^1_\alpha} \leq \sup_{\vec{v}_0\in B_{H^1_\alpha}(0,r)} \|\mathcal{S}_{\vec{f}_2}(t_n)\vec{v}_0\|_{H^1_\alpha} \xrightarrow{n\to+\infty} 0.$$

Así, podemos concluir que, $\mathcal{S}_{\vec{f}}(t_n)\vec{v}_{0n}$ converge, si y solo si, $\mathcal{S}_{\vec{f}_1}(t_n)\vec{v}_{0n}$ converge, y además sus límites son iguales. Ahora vamos a mostrar el siguiente lema, relacionado con una caracterización del conjunto ω-límite, en este contexto.

Lema 5.8. *Con las notaciones del teorema 5.6. tenemos que para todo conjunto acotado B_0 en H^1_α se verifica $\omega(B_0) = \omega_1(B_0)$, donde $\omega(B_0)$ es el conjunto ω -límite de B_0 a partir del semi-grupo $(\mathcal{S}_{\vec{f}}(t))_{t\geq 0}$ y $\omega_1(B_0)$*

esta definido como

$$\omega_1(B_0) = \bigcap_{s\geq 0} \overline{\bigcup_{t\geq s} \mathcal{S}_{\vec{f}_1}(t) B_0}.$$

Observación 11.

1. Note que la definición de $\omega_1(B_1)$ se parece mucho a la de conjunto ω-límite, aunque $\mathcal{S}_{\vec{f}_1}$ no es un semi-grupo definido en $H^1_\alpha(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$. Sin embargo, por construcción ω_1 verifica el literal 1) de la proposición.

Demostración. Mostremos que $\omega(B_0) = \omega_1(B_0)$. Sea $\vec{v}_0 \in \omega(B_0)$ entonces existe existe una sucesión $(\vec{v}_{0n})_{n\in\mathbb{N}} \in B_0$ y $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^+$ (creciente) $\xrightarrow{m\to+\infty}$ $+\infty$ tal que $\lim_{n\to+\infty} \mathcal{S}_{\vec{f}}(t_n)\vec{v}_{0n} = \vec{v}_0$. Por la observación anterior, tenemos que $\lim_{n\to+\infty} \mathcal{S}_{\vec{f}_1}(t_n)\vec{v}_{0n} = \vec{v}_0$. Así $\vec{v}_0 \in \omega_1(B_0)$. Por tanto $\omega_1(B_0) \subset \omega_1(B_0)$. Para la otra inclusión se razona análogamente. □

Lo siguiente es mostrar que $\omega(\mathcal{B}_{\vec{f}}) = \omega_1(\mathcal{B}_{\vec{f}})$ es el conjunto atractor global del semi-grupo. Con este fin utilizaremos el siguiente lema

LEMA 5.9. *Con las notaciones del teorema 5.6, $\omega_1(\mathcal{B}_{\vec{f}})$, es no vacío, compacto y un conjunto invariante funcional bajo $(\mathcal{S}_{\vec{f}}(t))_{t\geq 0}$.*

Demostración. Por hipótesis, sabemos que, para algún $t_0 > 0$, se tiene que, $\bigcup_{t\geq t_0} \mathcal{S}_{\vec{f}_1}(t)\mathcal{B}_{\vec{f}}$, es relativamente compacto en $H^1_\alpha(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Por otra parte, notemos que, dado $s > 0$, el conjunto $\bigcup_{t\geq s} \mathcal{S}_{\vec{f}_1}(t)\mathcal{B}_{\vec{f}}$ es no vacío, al ser la unión de conjuntos no vacíos, ya que $\mathcal{B}_{\vec{f}}$ es no vacío, por tanto, $\overline{\bigcup_{t\geq s} \mathcal{S}_{\vec{f}_1}(t)\mathcal{B}_{\vec{f}}}$ es un conjunto cerrado no vacío. Ahora bien, si definimos $F_s = \overline{\bigcup_{t\geq s} \mathcal{S}_{\vec{f}_1}(t)\mathcal{B}_{\vec{f}}}$, tenemos que $(F_s)_{s\geq 0}$ es una familia decreciente de conjuntos cerrados. Así, es fácil ver que, $\forall s \geq t_0$ $F_s \subset F_{t_1}$, y utilizando la hipótesis que F_{t_1} es compacta tenemos que, $\bigcap_{s\geq t_0} F_s \neq \emptyset$. Por otro lado, $\forall s < t_0$, se tiene $F_{t_0} \subset F_s$. Así, tenemos que

$$\emptyset \neq \bigcap_{s\geq t_0} F_s = \Big(\bigcap_{s\geq t_0} F_s\Big) \bigcap F_{t_0} \subset \Big(\bigcap_{s<t_0} F_s\Big) \bigcap \Big(\bigcap_{s\geq t_0} F_s\Big) = \omega(\mathcal{B}_{\vec{f}}).$$

Por tanto, $\omega_1(\mathcal{B}_{\vec{f}})$ es compacto no vacío (al ser un conjunto cerrado dentro de un espacio topológico compacto).

Ahora mostremos que $\omega_1(\mathcal{B}_{\vec{f}})$, es un conjunto invariante funcional bajo $(\mathcal{S}_{\vec{f}}(t))_{t\geq 0}$, es decir que $\forall\, t \geq 0$ $\mathcal{S}_{\vec{f}}(t)\omega_1(\mathcal{B}_{\vec{f}}) = \omega_1(\mathcal{B}_{\vec{f}})$. Empecemos por mostrar que $\mathcal{S}_{\vec{f}}(t)\omega_1(\mathcal{B}_{\vec{f}}) \subset \omega_1(\mathcal{B}_{\vec{f}})$, con $t \geq 0$ fijo.

Sea $\vec{v}_0 \in \mathcal{S}_{\vec{f}}(t)\omega_1(\mathcal{B}_{\vec{f}})$, entonces, existe $\vec{u}_0 \in \omega_1(\mathcal{B}_{\vec{f}}) = \omega(\mathcal{B}_{\vec{f}})$, tal que $\mathcal{S}_{\vec{f}}(t)\vec{u}_0 = \vec{v}_0$. Por definición, existe una sucesión $(\vec{u}_{0n})_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}_{\vec{f}}$ y $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^+$ (creciente) $\xrightarrow{m\to+\infty} +\infty$, tal que $\lim_{n\to+\infty} \mathcal{S}_{\vec{f}}(t_n)\vec{u}_{0n} = \vec{u}_0$. Entonces, como $\mathcal{S}_{\vec{f}}(t)$ es continua de $H^1_\alpha(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ en $H^1_\alpha(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ y además, por las propiedades de semi-grupo, se sigue

$$\vec{v}_0 = S(t)\vec{u}_0 = \mathcal{S}_{\vec{f}}(t) \lim_{n\to+\infty} \mathcal{S}_{\vec{f}}(t_n)\vec{u}_{0n} = \lim_{n\to+\infty} \mathcal{S}_{\vec{f}}(t_n + t)\vec{u}_{0n}.$$

Por tanto, $\vec{v}_0 \in \omega_1(\mathcal{B}_{\vec{f}})$. Para la inclusión $\omega_1(\mathcal{B}_{\vec{f}}) \subset \mathcal{S}_{\vec{f}}(t)\omega_1(\mathcal{B}_{\vec{f}})$, procedemos de la siguiente forma: sea $\vec{v}_0 \in \omega_1(\mathcal{B}_{\vec{f}}) = \omega(\mathcal{B}_{\vec{f}})$, existe una sucesión $(\vec{v}_{0n})_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}_{\vec{f}}$ y $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^+$ (creciente) $\xrightarrow{n\to+\infty} +\infty$, tal que, $\lim_{n\to+\infty} \mathcal{S}_{\vec{f}}(t_n)\vec{v}_{0n} = \vec{v}_0$. Con esto y nuestra hipótesis, podemos deducir que $\lim_{n\to+\infty} \mathcal{S}_{\vec{f}_1}(t_n)\vec{v}_{0n} = \vec{v}_0$. Por otro lado, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $\forall n \geq n_0$ se tenga $t_n - t \geq t_0$. Entonces se tiene que $(\mathcal{S}_{\vec{f}_1}(t_{n+n_0} - t)\vec{v}_{0n+n_0})_{n\in\mathbb{N}}$, pertenece a F_{t_0}, que a su vez es compacto y por lo tanto, se sigue que, esta sucesión admite una sub-sucesíon (que la notaremos de la misma manera), que converge a algún, $\vec{w}_0 \in H^1_\alpha(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Como $\vec{w}_0$ pertenece a $\omega_1(\mathcal{B}_{\vec{f}}) = \omega(\mathcal{B}_{\vec{f}})$ y con todo esta información, podemos concluir, lo siguiente

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{\vec{f}}(t)\vec{w}_0 &= \mathcal{S}_{\vec{f}}(t)\Big(\lim_{n\to+\infty} \mathcal{S}_{\vec{f}_1}(t_{n+n_0} - t)\vec{v}_{0n+n_0}\Big) = \mathcal{S}_{\vec{f}}(t)\Big(\lim_{n\to+\infty} \mathcal{S}_{\vec{f}}(t_{n+n_0} - t)\vec{v}_{0n+n_0}\Big)\\ &= \lim_{n\to+\infty} \mathcal{S}_{\vec{f}}(t_{n+n_0} - t)\vec{v}_{0n+n_0} = \vec{v}_0,\end{aligned}$$

lo cual muestra que $\vec{v}_0 \in \mathcal{S}_{\vec{f}}(t)\omega(\mathcal{B}_{\vec{f}}) = \mathcal{S}_{\vec{f}}(t)\omega_1(\mathcal{B}_{\vec{f}})$.

Lo siguiente es mostrar que, $\omega(\mathcal{B}_{\vec{f}}) = \omega_1(\mathcal{B}_{\vec{f}})$, atrae uniformemente a los conjuntos acotados de $H^1_\alpha(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Argumentemos por absurdo: supongamos que existe $\mathcal{B}_0$, un conjunto acotado de $H^1_\alpha(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, tal que, $d(\mathcal{S}_{\vec{f}}(t)\mathcal{B}_0, \omega(\mathcal{B}_f))$, no converge a 0 cuando $t \to +\infty$.Así, existe $\epsilon > 0$ y $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^+$ (sucesión creciente), tal que, $\tau_n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$, y además

$$d(\mathcal{S}_{\vec{f}}(\tau_n)\,\mathcal{B}_0, \omega(\mathcal{B}_{\vec{f}})) \geq \epsilon,$$

de donde, se tiene, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $\vec{u}_{0n} \in \mathcal{B}_0$, tal que

$$d(\mathcal{S}_{\vec{f}}(\tau_n)\vec{u}_{0n}, \omega(\mathcal{B}_{\vec{f}})) \geq \frac{\epsilon}{2}. \tag{5.5}$$

Por otro lado, como $\vec{u}_{0n} \in \mathcal{B}_0$ (acotado), tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{S}_{\vec{f}_2}(\tau_n)(\vec{u}_{0n}) = 0.$$

Se sigue que, existe $N \in \mathbb{N}$, suficientemente grande, tal que, $\|\mathcal{S}_{\vec{f}_2}(\tau_n\vec{u}_{0n})\|_{H^1_\alpha} \leq \frac{\epsilon}{4}$, se tiene que

$$\begin{aligned}\|\mathcal{S}_{\vec{f}}(\tau_n\vec{u}_{0n}) - \vec{w}\|_{H^1_\alpha} &\leq \|\mathcal{S}_{\vec{f}_1}(\tau_n\vec{u}_{0n}) - \vec{w}\|_{H^1_\alpha} + \|\mathcal{S}_{\vec{f}_2}(\tau_n\vec{u}_{0n})\|_{H^1_\alpha},\\ &\leq \|\mathcal{S}_{\vec{f}_1}(\tau_n\vec{u}_{0n}) - \vec{w}\|_{H^1_\alpha} + \frac{\epsilon}{4}.\end{aligned}$$

Con esto podemos deducir que $d(\mathcal{S}_{\vec{f}_1}(\tau_n)\,\vec{u}_{0n}, \omega(\mathcal{B}_{\vec{f}})) \geq \frac{\epsilon}{4}$. Por otro lado, como $\mathcal{B}_{\vec{f}}$, es un conjunto absorbente en $H^1_\alpha(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, se tiene que existe $N \in \mathbb{N}$, suficientemente grande, tal que, $\forall n \geq N$, $\mathcal{S}_{\vec{f}_1}(\tau_n)\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}_{\vec{f}}$, con $\tau_n \geq t_0$. Entonces $\mathcal{S}_{\vec{f}_1}(\tau_{N+n})\vec{u}_{0N+n} \in \mathcal{B}_{\vec{f}}$.

Adicionalmente $\mathcal{S}_{\vec{f}_1}(\tau_{N+n})\vec{u}_{0N+n} \in \bigcup_{t\geq t_0} \mathcal{S}_{\vec{f}_1}(t)\mathcal{B}_{\vec{f}}$, conjunto relativamente compacto, entonces esta sucesión admite una sub-sucesíon (que la notaremos de la misma manera) que converge a $\vec{v}_0 \in H^1_\alpha(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n))$. Con todo esto, se sigue que

$$\vec{v}_0 = \lim_{n\to\infty} \mathcal{S}_{\vec{f}_1}(\tau_{N+n})\,\vec{u}_{0N+n}.$$

Se sigue que, $\vec{v}_0 \in \omega(\mathcal{B}_{\vec{f}}) = \mathcal{A}_{\vec{f}}$. Lo cuál es una contradicción con (5.5).

Finalmente, mostremos que este atractor es maximal, con respecto a la inclusión. Sea $\mathcal{A}'_{\vec{f}}$, un atractor del semi-grupo $(\mathcal{S}_{\vec{f}}(t))_{t\geq 0}$, tal que, $\mathcal{A}_{\vec{f}} \subset \mathcal{A}'_{\vec{f}}$. Entonces, como $\mathcal{A}'_{\vec{f}}$, es un conjunto compacto, tenemos que existe $t' > 0$ tal que $\mathcal{S}_{\vec{f}}(t')\mathcal{A}'_{\vec{f}} \subset \mathcal{B}_{\vec{f}}$, y como $\mathcal{A}'_{\vec{f}}$, es un conjunto invariante funcional de $(\mathcal{S}_{\vec{f}}(t))_{t\geq 0}$, se tiene que, para todo $t > 0$ $\mathcal{S}_{\vec{f}}(t)\mathcal{A}'_{\vec{f}} = \mathcal{A}'_{\vec{f}}$, y por tanto $\omega(\mathcal{A}'_{\vec{f}}) \subset \omega(\mathcal{B}_{\vec{f}}) = \mathcal{A}_{\vec{f}}$. $\square$

5.3. Conclusiones

1. **Fenómeno físico de la ecuación de Bardina-Navier-Stokes, con término de amortiguamiento**

   La ecuación que abordamos en este trabajo, se origina de los α-models (ver [8]), que son bastante utilizados en métodos numéricos que simulan el comportamiento turbulento en el flujo de fluido. En particular, la ecuación de Bardina-Navier-Stokes, con el término de amortiguamiento $-\mu u$, que elegimos para este trabajo, describe los efectos de fricción de arrastre en ciertos modelos oceánicos

   (oceanos).

   Esta modificación, se usa comúnmente para simular flujos de fluidos en ambientes oceánicos, donde la presencia de arrastre y fricción entre la superficie del océano y la atmósfera es significativa. En este contexto, el parámetro, μ, es el coeficiente que representa los efectos de arrastre y fricción en el entorno oceánico.

2. **Buen planteamiento del problema (3.1), en ciertos espacios de Sobolev** Nuestro objetivo principal, en este trabajo fue detallar la existencia y caracterizar, el atractor global, para el semi-grupo asociado a la ecuación (3.1), para tal efecto, fue necesario demostrar la existencia global en tiempo y unicidad de la solución en el espacio de energía adecuado. La demostración de este resultado, utilizó un

teorema de punto fijo de Banach, y para demostrar las hiótesis del argumento de punto fijo de Banach, se empleó las propiedades del operador de Helmholtz en los espacios de Sobolev. También decir que, nuestra demostración del teorema 4.1, es análoga en muchos aspectos a la propuesta en [5], para el teorema 1.3, sin embargo, existen dos diferencias fundamentales, con respecto a nuestro resultado:

- En [5], los autores consideran, la fuerza $\vec{f}$ independiente del tiempo, mientras que, en este trabajo se consideró, una fuerza externa que pertenece al espacio $L^2([0,+\infty]; H^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n))$.
- En comparación, al teorema 1.3, del artículo [5], se mejora la regularidad de la presión Π, en los espacios de Sobolev, al demostrar que, también pertenece a $L^1([0,+\infty[; H^4(\mathbb{R}^n))$.

3. **Regularidad de la solución *mild* del problema** (3.1) En esta parte del trabajo, demostramos en el teorema 4.1, que si la fuerza externa $\vec{f}$ es arbitrariamente regular entonces la solución asociada $\vec{v}$, es arbitrariamente regular. Al desarrollar este resultado deducimos lo siguiente:

   - Si $\vec{f}$ pertenece al espacio $L^2[0T]; H^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n))$. como en el teorema 3.1, entonces únicamente, se puede mostrar que la solución asociada $\vec{v}$ pertenece al espacio $C(0,T; H^{1+\lambda}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n))$, con $0<\lambda<1$, y por esta razón, no se puede concluir que $\vec{v}$, es solución clásica del problema (3.1).
   - Si $\vec{f}=0$, entonces la solución $\vec{v}$, es arbitrariamente regular. En este caso, un resultado similar fue propuesto por L. Berselli y R. Lewandowski en [2], para la ecuación clásica de Bardina-Navier-Stokes, utlizando técnicas variacionales.
   - Si $\vec{f}$, pertenece a $C([0,T]; H^s(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n))$, con $s\geq 0$, suficientemente grande entonces, $\vec{v}$ es solución clásica del problema (3.1), sin embargo ella no pertenece al espacio $C^1([0,T]; C^\infty(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3))$, es decir su regularidad es limitada.

4. **Existencia del Atractor Global del semi-grupo asociado al problema** (3.1) En esta última parte del manuscrito, hicimos uso de la

teoría de semi-grupos, para detallar como ciertas propiedades que verifica el semi-grupo $(\mathcal{S}_{\vec{f}}(t))_{t\geq 0}$, asociado a la ecuación (3.1), implican la existencia del conjunto atractor global. El atractor global de un semi-grupo, asociada a una ecuación diferencial parcial, es relevante en el estudio del comportamiento asintótico en tiempo de las soluciones, ya que es el único (si es que existe) conjunto compacto, invariante al semi-grupo, en el cual convergen todas las trayectorias del semi-grupo. Esto, permite tener información de la estabilidad de las las soluciones en un tiempo arbitrariamente largo.

La idea principal para mostrar este resultado, fue utilizar la existencia del conjunto absorbente y la propiedad que el semi-grupo es asintóticamente compacto, vista en [5], para mostrar que el conjunto ω-límite del conjunto absorbente $\mathcal{B}_f$, es el conjunto atractor global. Por otra parte, en [5], los autores realizan un análisis cualitativo de este conjunto (soluciones eternas, soluciones estacionarias, dimensión fractal, etc.), pero estos temas sobrepasan el tipo de estudio que se realiza en este manuscrito.

5.4. Recomendaciones

1. Con relación a la regularidad de la solución del problema, queda abierta, la siguiente pregunta: encontrar la optimalidad de la regularidad de la fuerza externa $\vec{f}$ para que la solución asociada sea solución clásica del problema (3.1).

2. Un trabajo similar a este, incluyendo el estudio cualitativo del conjunto atractor global, se puede realizar para el caso de la ecuación de Camassa Holm y la ecuación de Clark (que son otros casos particulares de los α-modélos (ver [8]),con un término de amortiguamiento similar al nuestro.

3. En sintonía con el objetivo de este trabajo, se podría estudiar, con más detenimiento la relación de la dimensión fractal del conjunto atractor global (que también depende de la regularidad de $\vec{f}$), con los exponentes de Lyapunov del semi-grupo $(\mathcal{S}_{\vec{f}}(t))_{t\geq 0}$.

Apéndice A

Identidades vectoriales y estimaciones para ciertas funciones vectoriales

A.1. Funciones a valores vectoriales

Consideramos $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ un multi-índice, y notaremos $|\alpha| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j$ su talla y con esto se puede definir $D^\alpha \varphi(x) = \dfrac{\partial^\alpha \varphi}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}}(x)$.

Dado que estaremos trabajando con funciones vectoriales, es útil generalizar algunos conceptos que se tienen para funciónes de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ o de funciones $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{C}$. Primero consideraremos el espacio $\mathbb{R}^n$ equipado con su norma euclidiana $|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$, entonces consideramos funciones del tipo

$$
\begin{aligned}
\vec{f} : \mathbb{R}^m \quad &\longrightarrow \quad \mathbb{R}^n \\
\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \quad &\longmapsto \quad \begin{bmatrix} f_1(x_1, \cdots, x_m) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \cdots, x_m) \end{bmatrix},
\end{aligned}
$$

con $m, n \geq 1$, cada uno de sus componentes $f_1, \cdots, f_n$ es una foción definida sobre $\mathbb{R}^m$, a valores reales, y así tenemos

$$|\vec{f}(x)| = \max_{i=1,...,n} |f_i(x)|$$

Para un elemento fijo $x \in \mathbb{R}^m$ la norma $|\vec{f}(x)|$ se puede remplazar sin ninguna dificultad por otra norma equivalente en $\mathbb{R}^n$.
Con las precisiones anteriores, se puede definir, por ejemplo, el espacio de funciones vectoriales continuas y acotadas definidas sobre $\mathbb{R}^m$ a valores en $\mathbb{R}^n$, que sera notado como $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, cuya norma se define

$$\|\vec{f}\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^m} |\vec{f}(x)|.$$

Con este ejemplo podemos ver que todas las definiciones construidas para funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ se pueden prolongar de manera natural a funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$. En el caso particular que nos compete, cuando $\alpha \in \mathbb{N}^3$ es un multíndice y $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es una función vectorial, se escribirá $D^\alpha \vec{f}$ para designar el vector

$$D^\alpha \vec{f} = \begin{bmatrix} D^\alpha f_1 \\ \\ D^\alpha f_2 \\ \\ D^\alpha f_3 \end{bmatrix},$$

y con esto se puede caracterizar todos los espacios donde intervienen la regularidad de las derivadas de $\vec{f}$. Para más detalles sobre estos espacios el lector tenga a bien

A.1.1. Importantes funciones vectoriales de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbf{R}^3$

. La ecuación incomprensible de Bardina-Navier-Stokes con un término de amortiguamiento son ecuaciones diferenciales vectoriales y, por lo tanto, es muy importante tener en cuenta algunos cálculos específicos del marco vectorial que permiten simplificar (o simplemente completar) un cierto número de cálculos. Por esta razón, ahora recordamos algunas definiciones del cálculo vectorial en $\mathbb{R}^3$

- **El operador gradiente**. Este operador sera notado $\vec{\nabla}$ y es definido por

$$\vec{\nabla} = \begin{bmatrix} \partial_{x_1} \\ \\ \partial_{x_2} \\ \\ \partial_{x_3} \end{bmatrix}.$$

Si $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función a valores reales, su gradiente est el vector definido como:

$$\varphi = \begin{bmatrix} \partial_{x_1}\varphi \\ \\ \partial_{x_2}\varphi \\ \\ \partial_{x_3}\varphi \end{bmatrix},$$

y $|\vec{\nabla}\varphi| = \sqrt{(\partial_{x_1}\varphi)^2 + (\partial_{x_2}\varphi)^2 + (\partial_{x_3}\varphi)^2}$.
Si $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es una función vectorial, su gradiente es la matriz definida como:

$$\vec{\nabla} \otimes \vec{f} = \begin{bmatrix} \partial_{x_1} f_1 & \partial_{x_1} f_2 & \partial_{x_1} f_3 \\ \\ \partial_{x_2} f_1 & \partial_{x_2} f_2 & \partial_{x_2} f_3 \\ \\ \partial_{x_3} f_1 & \partial_{x_3} f_2 & \partial_{x_3} f_3 \end{bmatrix}. \tag{A.1}$$

- **El operador Laplaciano**. Si $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ es una una función a valores reales se tiene

$$\Delta\varphi = \sum_{i=1}^{3} \partial^2_{x_i}\varphi,$$

y si $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es una función vectorial se tendrá

$$\Delta\vec{f} = \begin{bmatrix} \Delta f_1 \\ \\ \Delta f_2 \\ \\ \Delta f_3 \end{bmatrix}.$$

- **El operador divergencia**. Si $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es una función vectorial, definimos el operador divergencia como:

$$div(\vec{f}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{f} = \partial_{x_1} f_1 + \partial_{x_2} f_2 + \partial_{x_3} f_3. \tag{A.2}$$

Con respecto a esta última definición, las notaciones, $div(\vec{f})$ y $\vec{\nabla} \cdot \vec{f}$ son empleadas de manera intercambiable.

- **El producto vectorial**. Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son dos vectores de $\mathbb{R}^3$, se define su producto vectorial [1] $\vec{u} \wedge \vec{v}$ por:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{bmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{bmatrix}, \tag{A.3}$$

y este producto vectorial se puede generalizar sin problemas a las funciones vectoriales.

- **operador rotacional**. Para una función vectorial $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ se define su rotacional $\vec{\nabla} \wedge \vec{f}$ como:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{f} = \begin{bmatrix} \partial_{x_2} f_3 - \partial_{x_3} f_2 \\ \\ \partial_{x_3} f_1 - \partial_{x_1} f_3 \\ \\ \partial_{x_1} f_2 - \partial_{x_2} f_1 \end{bmatrix}, \tag{A.4}$$

este operador explica la forma que un campo de vectores gira alrededor de un punto.

- **El producto tensorial entre vectores**. Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son dos vectores de $\mathbb{R}^3$, el producto tensorial entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$, notado como $\vec{a} \otimes \vec{b}$ esta definido por

$$\vec{u} \otimes \vec{v} = \begin{bmatrix} u_1v_1 & u_1v_2 & u_1v_3 \\ \\ u_2v_1 & u_2v_2 & u_2v_3 \\ \\ u_3v_1 & u_3v_2 & u_3v_3 \end{bmatrix}. \tag{A.5}$$

Así, el producto tensorial de dos vectores es un *tensor* cuya expresión viene dada por una matriz. Esta definición justifica la notación $\vec{\nabla} \otimes \vec{f}$ utilizada anteriormente en (A.1).

- **La divergencia de un tensor**. Si $\vec{u} \otimes \vec{v} = (u_i v_j)_{1 \leq i,j \leq 3}$ es la matriz asociada a un tensor, definimos la divergencia de este tensor mediante

[1] La notación $\vec{u} \times \vec{v}$ es igualmente utilizada en la literatura.

la fórmula

$$div(A) = \begin{bmatrix} \partial_{x_1}(u_1v_1) + \partial_{x_2}(u_1v_2) + \partial_{x_3}(u_1v_3) \\ \partial_{x_1}(u_2v_1) + \partial_{x_2}(u_2v_2) + \partial_{x_3}(u_2v_3) \\ \partial_{x_1}(u_3v_1) + \partial_{x_2}(u_3v_2) + \partial_{x_3}(u_3v_3) \end{bmatrix}. \tag{A.6}$$

Para cerrar esta sección, recordemos que si $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq 3}$ es una matriz, entonces anotaremos su derivada $\partial_{x_k}A = (\partial_{x_k}a_{i,j})_{1\leq i,j\leq 3}$ y su norma (habitual) vendrá dada por $|A| = \left(\sum_{i,j=1}^{3} |a_{i,j}|^2\right)^{1/2}$, pero por supuesto es posible usar cualquier norma equivalente.

Observación 12.

- Si suponemos la suficiente regularidad para que todas las derivadas tengan sentido, tenemos las siguientes identidades:

  1) Si $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función real, entonces

  $$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla}\varphi) = \Delta\varphi \quad \text{y por tanto} \quad div(\vec{\nabla}\varphi) = \Delta\varphi.$$

  2) Si $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función real y si $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es una función vectorial, entonces,

  $$div(\varphi\vec{f}) = \varphi\, div(\vec{f}) + \vec{\nabla}\varphi \cdot \vec{f}$$

  3) Si $\vec{f}, \vec{g} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ son dos funciones vectoriales y si $\lambda \in \mathbb{R}$, tenemos que

  $$\vec{\nabla} \wedge (\lambda\vec{f} + \vec{g}) = \lambda\vec{\nabla} \wedge \vec{f} + \vec{\nabla} \wedge \vec{g}.$$

  4) Si $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función a valores reales entonces

  $$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla}\varphi) = 0, \tag{A.7}$$

  se tiene que el rotacional de un gradiente es siempre nul.

5) Si $\vec{f}:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es una función vectorial, se tiene que

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{f}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{f}) - \Delta \vec{f}.$$

En particular, si $div(\vec{f}) = 0$, se tiene que

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{f}) = -\Delta \vec{f}.$$

6) Si $\vec{f}:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es una función vectorial, entonces $div(\vec{\nabla} \wedge \vec{f}) = 0$ y por tanto la divergencia de un rotacional es siempre nulo.

7) Si $\phi, \varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ son dos funciones reales:

$$\Delta(\phi\varphi) = (\Delta\phi)\varphi + \phi\Delta\varphi + 2\vec{\nabla}\phi \cdot \vec{\nabla}\varphi.$$

8) Si $\vec{f}:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es una función vectorial, entonces

$$(\vec{f} \cdot \vec{\nabla})\vec{f} = (\vec{\nabla} \wedge \vec{f}) \wedge \vec{f} + \vec{\nabla}\frac{|\vec{f}|^2}{2}.$$

9) Si $\vec{f}, \vec{g} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ son dos funciones vectoriales y si $div(\vec{f}) = 0$, entonces se tiene la siguiente identidad

$$(\vec{f} \cdot \vec{\nabla})\vec{g} = div(\vec{g} \otimes \vec{f}). \tag{A.8}$$

Esta última estimación tiene una relevancia importante en el análisis de la ecuación incomprensible Bardina-Navier- Stokes. Finalmente el estudio de todas las operaciones usuales (convolución, transformada de Fourier, multiplicación, etc.) se puede realizar en el marco de las funciones vectoriales (es suficiente razonar componente por componente) sin ningún problema.

Apéndice B

Pormenores del Teorema de existencia global en variable temporal

B.1. Deducción del Espacio de Energía y Estimaciones *apriori*, para la ecuación de Bardina-Navier-Stokes con un término de amortiguamiento

Para el siguiente análisis se asumirá toda la regularidad de las funciones para que todos los cálculos tengan sentido. En la ecuación (3.1) aplicamos el operador $(-\alpha^2\Delta + Id)$ a ambos lados, de esta manera obtenemos

$$\begin{aligned}&(-\alpha^2\Delta + Id)\partial_t\vec{v} + div(\vec{v}\otimes\vec{v}) - (-\alpha^2\Delta + Id)\Delta\vec{v} + (-\alpha^2\Delta + Id)\nabla\vec{\Pi}\\ &= (-\alpha^2\Delta + Id)\vec{f} - (-\alpha^2\Delta + Id)\ \mu\vec{v}.\end{aligned}$$

Distribuimos

$$\begin{aligned}&-\alpha^2\Delta\partial_t\vec{v} + \partial_t\vec{v} + div(\vec{v}\otimes\vec{v}) + \alpha^2\Delta(\Delta\vec{v}) - \Delta\vec{v} - \alpha^2\Delta(\nabla\vec{\Pi}) + \nabla\vec{\Pi}\\ &= -\alpha^2\Delta(\vec{f}) + \vec{f} + \alpha^2\Delta\ \mu\vec{v} - \mu\ \vec{v}.\end{aligned}$$

Multiplicamos por $\vec{v}$

$$
\begin{aligned}
&-\alpha^2\Delta\partial_t\vec{v}\cdot\vec{v}+\partial_t\vec{v}\cdot\vec{v}+div(\vec{v}\otimes\vec{v})\cdot\vec{v}+\alpha^2\Delta(\Delta\vec{v})\cdot\vec{v}-\Delta\vec{v}\cdot\vec{v}-\alpha^2\Delta(\nabla\vec{\Pi})\cdot\vec{v}+\nabla\vec{\Pi}\cdot\vec{v}\\
&=-\alpha^2\Delta(\vec{f})\cdot\vec{v}+\vec{f}\cdot\vec{v}+\alpha^2\beta\Delta\vec{v}\cdot\vec{v}-\mu\vec{v}\cdot\vec{v}.
\end{aligned}
$$

Integramos en $\mathbb{R}^3$, de modo que

$$
\begin{aligned}
&-\underbrace{\int_{\mathbb{R}^3}\alpha^2\Delta\partial_t\vec{v}\cdot\vec{v}\,dx}_{I_1}+\underbrace{\int_{\mathbb{R}^3}\partial_t\vec{v}\cdot\vec{v}\,dx}_{I_2}+\underbrace{\int_{\mathbb{R}^3}div(\vec{v}\otimes\vec{v})\cdot\vec{v}\,dx}_{I_3}+\underbrace{\int_{\mathbb{R}^3}\alpha^2\Delta(\Delta\vec{v})\cdot\vec{v}\,dx}_{I_4}\\
&-\underbrace{\int_{\mathbb{R}^3}\Delta\vec{v}\cdot\vec{v}\,dx}_{I_5}-\underbrace{\int_{\mathbb{R}^3}\alpha^2\Delta(\nabla\vec{\Pi})\cdot\vec{v}\,dx}_{I_6}+\underbrace{\int_{\mathbb{R}^3}\nabla\vec{\Pi}\cdot\vec{v}\,dx}_{I_7}+\underbrace{\int_{\mathbb{R}^3}\alpha^2\Delta(\vec{f})\cdot\vec{v}\,dx}_{I_8}\\
&=\underbrace{\int_{\mathbb{R}^3}\vec{f}\cdot\vec{v}\,dx}_{I_9}+\underbrace{\int_{\mathbb{R}^3}\alpha^2\mu\;\Delta\vec{v}\cdot\vec{v}\,dx}_{I_{10}}-\underbrace{\int_{\mathbb{R}^3}\mu\;\vec{v}\cdot\vec{v}\,dx}_{I_{11}}. \qquad \text{(B.1)}
\end{aligned}
$$

Ahora, estudiemos por separado cada uno de los términos de esta última igualdad.

$$
\begin{aligned}
I_1 &= -\int_{\mathbb{R}^3}\alpha^2\Delta\partial_t\vec{v}\cdot\vec{v}\,dx=\alpha^2\int_{\mathbb{R}^3}\nabla\partial_t\vec{v}\cdot\nabla\vec{v}\,dx=\alpha^2\int_{\mathbb{R}^3}\partial_t\nabla\vec{v}\cdot\nabla\vec{v}\,dx\\
&=\alpha^2\int_{\mathbb{R}^3}\frac{d}{dt}(|\nabla\vec{v}|^2)\,dx=\frac{\alpha^2}{2}\frac{d}{dt}(\|\nabla\vec{v}(t,\cdot)\|_{L^2}^2)=\frac{\alpha^2}{2}\frac{d}{dt}(\|\vec{v}(t,\cdot)\|_{\dot{H}^1}^2).\\
I_2 &= \int_{\mathbb{R}^3}\partial_t\vec{v}\cdot\vec{v}\,dx=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{v}^{\,2})\,dx=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\vec{v}(t,\cdot)\|_{L^2}^2).\\
I_3 &= \int_{\mathbb{R}^3}div(\vec{v}\otimes\vec{v})\cdot\vec{v}\,dx=0.\\
I_4 &= \int_{\mathbb{R}^3}\alpha^2\Delta(\Delta\vec{v})\cdot\vec{v}\,dx=\alpha^2\int_{\mathbb{R}^3}\Delta\vec{v}\cdot\Delta\vec{v}\,dx=\alpha^2\|v(t,\cdot)\|_{\dot{H}^2}^2.\\
I_5 &= -\int_{\mathbb{R}^3}\Delta\vec{v}\cdot\vec{v}\,dx=\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla\vec{v}|^2\,dx=\|\nabla\vec{v}\|_{L^2}^2=\|\vec{v}\|_{\dot{H}^1}^2.\\
I_6 &= -\alpha^2\int_{\mathbb{R}^3}\Delta(\nabla\vec{\Pi})\cdot\vec{v}\,dx=0.\\
I_7 &= \int_{\mathbb{R}^3}\nabla\vec{\Pi}\cdot\vec{v}\,dx=-\int_{\mathbb{R}^3}\vec{\Pi}\cdot\vec{\nabla}v\,dx=0.\\
I_8 &= \alpha^2\int_{\mathbb{R}^3}\Delta(\vec{f})\cdot\vec{v}\,dx.\\
I_9 &= \int_{\mathbb{R}^3}\vec{f}\cdot\vec{v}\,dx.\\
I_{10} &= \int_{\mathbb{R}^3}\alpha^2\;\mu\Delta\vec{v}\cdot\vec{v}\,dx=-\alpha^2\;\mu\int_{\mathbb{R}^3}\nabla\vec{v}\cdot\nabla\vec{v}\,dx=-\alpha^2\;\mu\|\vec{v}(t,\cdot)\|_{\dot{H}^1}^2.
\end{aligned}
$$

$$I_{11} = -\mu \int_{\mathbb{R}^3} |\vec{v}|^2 \, dx = -\mu \|\vec{v}(t,\cdot)\|^2_{L^2}.$$

Por tanto, notando $\|\vec{v}(t,\cdot)\|^2_{H^1_\alpha} = \|\vec{v}(t,\cdot)\|^2_{L^2} + \alpha^2 ||\vec{v}(t,\cdot)||^2_{\dot{H}^1}$ [1] , la igualdad (B.1), se puede expresa como

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\vec{v}(t,\cdot)\|^2_{H^1_\alpha}) + \alpha^2 ||\vec{v}(t,\cdot)||^2_{\dot{H}^2} + \|\vec{v}(t,\cdot)\|^2_{\dot{H}^1} = -\alpha^2 \int_{\mathbb{R}^3} \Delta(\vec{f})\cdot\vec{v} \, dx + \int_{\mathbb{R}^3} \vec{f}\cdot\vec{v} \, dx - \mu \|\vec{v}(t,\cdot)\|^2_{H^1_\alpha}. \tag{B.2}$$

Integrando esta última identidad con respecto a la variable temporal en el intervalo $[0,t]$, tenemos

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}(\|\vec{v}(t,\cdot)\|^2_{H^1_\alpha}) + \alpha^2 \int_0^t ||\vec{v}(s,\cdot)||^2_{\dot{H}^2} \, ds + \int_0^t \|\vec{v}(s,\cdot)\|^2_{\dot{H}^1} \, ds - \frac{1}{2}\|\vec{v}_0\|^2_{H^1_\alpha} \\ &= -\alpha^2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \Delta(\vec{f})(s,x)\cdot\vec{v}(s,x) \, dx \, ds + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \vec{f}(s,x)\cdot\vec{v}(s,x) \, dx \, dt - \mu \int_0^t \|\vec{v}(s,\cdot)\|^2_{H^1_\alpha} \, ds. \end{aligned} \tag{B.3}$$

OBSERVACIÓN 13.

1. La estimación (B.3) es conocida como la igualdad de energía del problema (3.1).

2. Esta identidad nos suministra información fundamental, acerca de los espacios funcionales en los cuales debemos considerar los datos $\vec{v}_0$ y $\vec{f}$, así como el espacio funcional apropiado para construir la *solución mild*.

Para que la igualdad de energía tenga sentido, es necesario que $\vec{v}_0 \in (H^1, \|\cdot\|_{H^1_\alpha})$. Por otro lado, para que el problema este bien planteado necesitamos que la norma de la solución, en el espacio de energía, este acotado, únicamente por los datos. Así, primero, nos enfocaremos en la parte derecha de la igualdad de energía. Entonces, utilizando integración por partes en variable espacial y la desigualdad de Young, tenemos

$$\begin{aligned} -\alpha^2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \Delta(\vec{f})(s,x)\cdot\vec{v}(s,x) \, dx \, ds &= \alpha^2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \nabla(\vec{f})(s,x)\cdot\nabla\vec{v}(s,x) \, dx \, ds \\ &\leq \alpha^2 \int_0^t \left(\frac{2}{\mu}\|\vec{f}(s,\cdot)\|^2_{\dot{H}^1} + \frac{\mu}{2}\|\vec{v}(s,\cdot)\|^2_{\dot{H}^1}\right) ds. \end{aligned}$$

[1] Sin dificultad se puede mostrar que $\|\cdot\|_{H^1_\alpha}$ es una norma sobre H^1 y además $\|\cdot\|_{H^1_\alpha} \simeq \|\cdot\|_{H^1}$.

De la misma manera tenemos

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} (\vec{f})(s,x)\cdot\vec{v}(s,x)\,dx\,ds \leq \int_0^t \Big(\frac{2}{\mu}\|\vec{f}(s,\cdot)\|_{L^2}^2 + \frac{\mu}{2}\|\vec{v}(s,\cdot)\|_{L^2}^2\Big)\,ds.$$

Así, introduciendo estas dos últimas estimativas en (B.3), tenemos

$$\frac{1}{2}\|\vec{v_0}\|_{H_\alpha^1}^2 - \alpha^2\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}\Delta(\vec{f})(s,x)\cdot\vec{v}(s,x)\,dxds + \int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}\vec{f}(s,x)\cdot\vec{v}(s,x)dxdt - \mu\int_0^t\|\vec{v}(s,\cdot)\|_{H_\alpha^1}^2 ds$$
$$\leq \frac{1}{2}\|\vec{v_0}\|_{H_\alpha^1}^2 + \frac{2}{\mu}\int_0^t\|\vec{f}(s,\cdot)\|_{H_\alpha^1}^2\,ds - \frac{\mu}{2}\int_0^t\|\vec{v}(s,\cdot)\|_{H_\alpha^1}^2 ds.$$

De esta última desigualdad podemos deducir las siguientes dos estimaciones :

$$\|\vec{v}(t,\cdot)\|_{H_\alpha^1}^2 \leq C(\|\vec{v_0}\|_{H_\alpha^1}^2 + \int_0^t\|\vec{f}(s,\cdot)\|_{H_\alpha^1}^2\,ds).$$
$$\int_0^t||\vec{v}(s,\cdot)||_{\dot{H}^2}^2\,ds \leq C(\|\vec{v_0}\|_{H_\alpha^1}^2 + \int_0^t\|\vec{f}(s,\cdot)\|_{H_\alpha^1}^2\,ds),$$

donde $C>0$ es una constante que depende de los parámetros μ y α.
Se concluye que $\vec{v}$ debe verificar $\vec{v}\in L^\infty\big([0,T],H^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)\big)\cap L^2\big([0,T],\dot{H}^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)\big)$, y además $\vec{u_0}\in H^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ y $\vec{f}\in L^2\big([0,T],H^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)\big)$.

Observación 14.

1. A partir de la igualdad de energía, tenemos la siguiente desigualdad:

$$\frac{1}{2}(\|\vec{v}(t,\cdot)\|_{H_\alpha^1}^2) + \alpha^2\int_0^t||\vec{v}(s,\cdot)||_{\dot{H}^2}^2\,ds + \int_0^t\|\vec{v}(s,\cdot)\|_{\dot{H}^1}^2\,ds$$
$$\leq \frac{1}{2}\|\vec{v_0}\|_{H_\alpha^1}^2 + \frac{2}{\mu}\int_0^t\|\vec{f}(s,\cdot)\|_{H_\alpha^1}^2\,ds - \frac{\mu}{2}\int_0^t\|\vec{v}(s,\cdot)\|_{H_\alpha^1}^2\,ds.$$

2. Esta última expresión es llamada desigualdad de energía y es el inicio para estudio del comportamiento asintótico de las soluciones en variable temporal.

3. Una vez identificado el espacio de energía para $\vec{v}$, utilizando la igualdad (3.2), se puede demostrar de manera directa que la presión Π, asociada a $\vec{v}$, pertenece a $L^2_{loc}([0,T],H^3(\mathbb{R}^3))$.

B.1.1. Desigualdades de Grönwall

Las desiguldades de Grönwall permiten establecer acotaciones superiores en soluciones de ecuaciones diferenciales y proporciona herramientas para demostrar la existencia, unicidad y estabilidad de soluciones. Aquí, ofrecemos los resultados clásicos.

Proposición B.1. *Sean $\phi, \psi : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones continuas tales que $\phi(t) \geq 0$ y $\psi(t) \geq 0$. Si para $t_0 \leq t$ tenemos*

$$\phi(t) \leq A + B \int_{t_0}^{t} \psi(s)\phi(s)ds, \tag{B.4}$$

donde A y B son constantes positivas, entonces para $t_0 \leq t$ tenemos la desigualdad

$$\phi(t) \leq A \exp\left(B \int_{t_0}^{t} \psi(s)ds \right). \tag{B.5}$$

Un caso clásico de uso de esta desigualdad corresponde al caso donde la función ψ verifica $\psi \equiv 1$ en la condición (B.4), y luego simplemente obtenemos la estimación $\phi(t) \leq A\, e^{B(t-t_0)}$. Otra situación interesante se da cuando $A = 0$ en (B.4), y entonces podemos deducir que $\phi(t) = 0$, este último caso suele establecerse para verificar la unicidad de las soluciones de ecuaciones diferenciales parciales. El siguiente corolario es una consecuencia de la proposición B.5, que será de gran utilidad en este trabajo.

Corolario B.2. *Sean f y g dos funciones no-negativas $C^1([t_0, T])$. Sea $\mathcal{A}$, una función continua, sobre $[t_0, T]$. Supongamos que para todo $t \in [t_0, T]$,*

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} g^2(t) \leq \mathcal{A}(t) g^2(t) + f(t)g(t).$$

Entonces

$$g(t) \leq g(t_0) e^{-\int_{t_0}^{t} \mathcal{A}(\tau)\, d\tau} + \int_{t_0}^{t} f(\tau) e^{\int_{\tau}^{t} \mathcal{A}(s)\, ds}\, d\tau.$$

Apéndice C

Pormenores del Teorema de Regularidad

C.1. Demostración de la continuidad de la solución $\vec{v}$ en $H^s(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, con $s \in [0, 1]$.

En esta parte de la demostración del teorema 4.1, vamos a mostrar que para cualquier $T > 0$, $\vec{v}$ pertenece a $C([0, T]; H^s(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3))$, con $s \in [0, 1]$. Demostraremos que cada término de la formulación integral de $\vec{v}$ pertenece a $C([0, T]; H^s(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3))$, con $s \in [0, 1]$. Tomemos primero $s = 1$ y consideremos $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^+$ tal que $\lim_{n\to+\infty} t_n = t$. Para el primer término, $I_1(t)$, notemos que gracias a que $t_n \to t$ y al T.C.D.L[1], se sigue que

$$\|h_{t_n} * \vec{v}_0 - h_t * \vec{v}_0\|_{H_1}^2 = \int_{\mathbb{R}^3} (1 + |\xi|^2)(e^{-2t_n|\xi|^2} - e^{-2t|\xi|^2})\, |\widehat{\vec{v}_0}(\xi)|^2 \, d\xi$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \|h_{t_n} * \vec{v}_0 - h_t * \vec{v}_0\|_{H_1}^2 = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^3} (1 + |\xi|^2)(e^{-2t_n|\xi|^2} - e^{-2t|\xi|^2})\, |\widehat{\vec{v}_0}(\xi)|^2 \, d\xi = 0.$$

Con esto hemos demostrado que $h_t * \vec{v}_0 \in C([0, T]; H^s(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3))$. Estudiemos ahora,el segundo término, $I_2(t)$. Gracias a las propiedades de la convolución, las propiedades del núcleo del calor, la desigualdad de Cauchy-

[1] Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue.

Schwarz y nuevamente por el T.C.D.L, tenemos que

$$\begin{aligned}
&\left\|\int_0^{t_n} h_{t_n-\tau} * \vec{f}(\tau,\cdot)\,d\tau - \int_0^t h_{t-\tau} * \vec{f}(\tau,\cdot)\,d\tau\right\|_{H^1}\\
&= \left\|\int_0^{t_n} (h_{t_n-\tau} - h_{t-\tau}) * \vec{f}(\tau,\cdot)\,d\tau - \int_{t_n}^t h_{t-\tau} * \vec{f}(\tau,\cdot)\,d\tau\right\|_{H^1}\\
&\leq \int_0^{t_n} \|(h_{t_n-\tau} - h_{t-\tau}) * \vec{f}(\tau,\cdot)\|_{H^1}\,d\tau + \int_{t_n}^t \|h_{t-\tau} * \vec{f}(\tau,\cdot)\|_{H^1}\,d\tau\\
&\leq \int_0^{T} \|(h_{t_n-\tau} - h_{t-\tau}) * \vec{f}(\tau,\cdot)\|_{H^1}\,d\tau + ((t-t_n))^{\frac{1}{2}}\|\vec{f}(\tau,\cdot)\|_{L^2_T H^1_x}\\
&\Rightarrow \int_0^{T} \lim_{n\to\infty} \|(h_{t_n-\tau} - h_{t-\tau}) * \vec{f}(\tau,\cdot)\|_{H^1}\,d\tau + \lim_{n\to\infty} ((t-t_n))^{\frac{1}{2}}\|\vec{f}(\tau,\cdot)\|_{L^2_T H^1_x} = 0.
\end{aligned}$$

Así, $\int_0^t h_{t-\tau} * \vec{f}(\tau,\cdot) \in C([0,T]; H^1(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3))$. Ahora para el tercer término, $I_3(t)$, el más complicado de estimar, recordemos primeramente que, la solución $\vec{v}$ de esta ecuación verifica $\vec{v}\otimes\vec{v} \in L^2_T H^1_x$. Con esta información, podemos escribir:

$$\begin{aligned}
&\left\|\int_0^{t_n} h_{t_n-\tau} * \mathbb{P}(\mathbf{div}\,(\vec{v}\otimes\vec{v})_\alpha(\tau,\cdot)\,d\tau - \int_0^t h_{t-\tau} * \mathbb{P}(\mathbf{div}\,(\vec{v}\otimes\vec{v})_\alpha(\tau,\cdot)\,d\tau\right\|_{H^1}\\
&= \left\|\int_0^{t_n} (h_{t_n-\tau} - h_{t-\tau}) * \mathbb{P}(\mathbf{div}\,((\vec{v}\otimes\vec{v})_\alpha)(\tau,\cdot)\,d\tau - \int_{t_n}^t h_{t-\tau} * \mathbb{P}(\mathbf{div}\,((\vec{v}\otimes\vec{v})_\alpha)(\tau,\cdot)\,d\tau\right\|_{H^1}\\
&\leq \underbrace{\int_0^{t_n} \|(h_{t_n-\tau} - h_{t-\tau}) * \mathbb{P}(\mathbf{div}\,(\vec{v}\otimes\vec{v})_\alpha(\tau,\cdot)\|_{H^1}\,d\tau}_{A(t_n)} + \underbrace{\int_{t_n}^t \|h_{t-\tau} * \mathbb{P}(\mathbf{div}\,(\vec{v}\otimes\vec{v})_\alpha(\tau,\cdot)\|_{H^1}\,d\tau}_{B(t_n)}.
\end{aligned}$$

En este punto, analizaremos detenidamente las cantidades $A(t_n)$ y $B(t_n)$ respectivamente. Empecemos con $A(t_n)$. Entonces, utilizando las propiedades del operador de Helmhotz, del operador de Leray y el T.C.D.L, tenemos

$$\begin{aligned}
A(t_n) &\leq \int_0^T \|(h_{t_n-\tau} - h_{t-\tau}) * (\mathbf{div}\,(\vec{v}\otimes\vec{v})_\alpha(\tau,\cdot)\|_{H^1}\,d\tau\\
&= \int_0^T \Big(\int_{\mathbb{R}^3} (1+|\xi|^2)\frac{|\xi|^2|\widehat{\vec{v}\otimes\vec{v}}(\tau,\xi)|^2}{(1+\alpha^2|\xi|^2)^2}\,(e^{-2(t_n-\tau)|\xi|^2} - e^{-2(t-\tau)|\xi|^2})\,d\xi\Big)^{\frac{1}{2}}\,d\tau.\\
&\leq \int_0^T \Big(\int_{\mathbb{R}^3} (1+|\xi|^2)\widehat{\vec{v}\otimes\vec{v}}\,(e^{-2(t_n-\tau)|\xi|^2} - e^{-2(t-\tau)|\xi|^2})\,d\xi\Big)^{\frac{1}{2}}\,d\tau\\
&\Rightarrow \lim_{n\to\infty} A(t_n) = 0,
\end{aligned}$$

mientras que para $B(t_n)$ tenemos

$$\begin{aligned}
B(t_n) &= \int_{t_n}^{t} \|h_{t-\tau} * \mathbb{P}(\mathbf{div}\,(\vec{v}\otimes\vec{v})_\alpha(\tau,\cdot)\|_{H^1}^2\, d\tau \leq \int_{t_n}^{t} \|h_{t-\tau} * (\mathbf{div}\,(\vec{v}\otimes\vec{v})_\alpha(\tau,\cdot)\|_{H^1}^2\, d\tau \\
&= \int_{t_n}^{t} \Big(\int_{\mathbb{R}^3} (1+|\xi|^2) e^{-2(t-\tau)|\xi|^2} \frac{|\xi|^2 |\widehat{\vec{v}\otimes\vec{v}}(\tau,\xi)|^2}{(1+\alpha^2|\xi|^2)^2}\, d\xi \Big)^{\frac{1}{2}} d\tau \leq \int_{t_n}^{t} \Big(\int_{\mathbb{R}^3} |\widehat{\vec{v}\otimes\vec{v}}(\tau,\xi)|^2\, d\xi \Big)^{\frac{1}{2}} d\tau \\
&= \int_{t_n}^{t} \|\vec{v}\otimes\vec{v}(\tau,\cdot)\|_{L^2}\, d\tau \leq \int_{t_n}^{t} \|\vec{v}\otimes\vec{v}(\tau,\cdot)\|_{H^1} \leq (t-t_n)^{\frac{1}{2}} \|\vec{v}\otimes\vec{v}\|_{L^2_T H^1_x} \\
&\Rightarrow \lim_{n\to\infty} B(t_n) = 0.
\end{aligned}$$

Por tanto $\int_0^t h_{t-\tau} * \mathbb{P}(\mathbf{div}\,(\vec{v}\otimes\vec{v})_\alpha(\tau,\cdot)\, d\tau \in C([0.T]; H^1(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3))$. Ahora analizamos, el último término, $I_4(t)$, asociado al amortiguamiento $\mu > 0$. Como $\vec{v} \in L^\infty_T H^1_x$ y nuevamente, ayudándonos en el T.C.D.L, se tiene

$$\begin{aligned}
&\mu \left\| \int_0^{t_n} h_{t_n-\tau} * \vec{v}(\tau,\cdot)\, d\tau - \int_0^t h_{t-\tau} * \vec{v}(\tau,\cdot)\, d\tau \right\|_{H^1} \\
&= \mu \left\| \int_0^{t_n} (h_{t_n-\tau} - h_{t-\tau}) * \vec{v}(\tau,\cdot)\, d\tau - \int_{t_n}^t h_{t-\tau} * \vec{v}(\tau,\cdot)\, d\tau \right\|_{H^1} \\
&\leq \mu \int_0^{t_n} \|(h_{t_n-\tau} - h_{t-\tau}) * \vec{v}(\tau,\cdot)\|_{H^1}\, d\tau + \mu \int_{t_n}^t \|h_{t-\tau} * \vec{v}(\tau,\cdot)\|_{H^1}\, d\tau \\
&\leq \mu \int_0^{T} \|(h_{t_n-\tau} - h_{t-\tau}) * \vec{v}(\tau,\cdot)\|_{H^1}\, d\tau + \mu\,(t-t_n)\, \|\vec{v}(\tau,\cdot)\|_{L^\infty_T H^1_x} \\
&\Rightarrow \mu \int_0^{T} \lim_{n\to\infty} \|(h_{t_n-\tau} - h_{t-\tau}) * \vec{v}(\tau,\cdot)\|_{H^1}\, d\tau + \lim_{n\to\infty} \mu\,(t-t_n) \|\vec{v}(\tau,\cdot)\|_{L^2_T H^1_x} = 0.
\end{aligned}$$

Con esto hemos mostrado que $\vec{v} \in C([0,T]; H^1(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3))$. Ahora por por la inclusión $H^1(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3) \subset H^s(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$ con $s \leq 1$, se puede concluir que $\vec{v} \in C([0,T]; H^s(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3))$, con $s \leq 1$.

Apéndice D

Pormenores del Teorema de existencia del Atractor global

D.1. Prueba de la proposición 5.1

Demostración. Empezemos por mostrar el primer literal, de esta proposición. Sea $v \in \omega(A)$ y $(s_n)_{n\in\ltimes} \in \mathbb{R}^+$ una sucesión creciente, tal que, $\lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty$. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que, $v \in \overline{\bigcup_{t\geq s_n} S(t)A}$, así

$$B_E\Big(v, \frac{1}{n}\Big) \bigcap \Big(\bigcup_{t\geq s_n} S(t)A\Big) \neq \emptyset$$

, de donde, se sigue que, existe $t_n \geq s_n$ y $v_n \in A$, tales que, $S(t_n)v_n \in B_E\Big(x, \frac{1}{n}\Big)$, lo que implica $\lim_{n\to+\infty} S(t_n)u_n = v$.
Recíprocamente, si $v = \lim_{n\to+\infty} S(t_n)v_n$, con $(t_n) \in \mathbb{R}^+$, sucesión creciente que diverge al infinito y $(v_n) \in A$. Fijando $s \geq 0$ arbitrario, mostremos que, $v \in \overline{\bigcup_{t\geq s} S(t)A}$.

Por hipótesis, tenemos que, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que, $t_n \geq s \; \forall\, n \geq n_0$. Así, tenemos que $(S(t_{n_0+n})v_{n_0+n})_{n\in\mathbb{N}} \in \bigcup_{t\geq s} S(t)A$ y además $v = \lim_{n\to+\infty} S(t_{n_0+n})u_{n_0+n}$, con lo cual, $v \in \omega(A)$.

La demostración del literal 2). es un caso particular del literal 1). La demostración del literal 3), se concluye solamente usando la definición del conjunto ω-límite. $\square$

D.2. Prueba del teorema 5.3

Demostración. Para empezar consideramos $\mathcal{B}$ el conjunto absorbente del semi-grupo $(S(t))_{t\geq 0}$. Por hipótesis, existe $t_0 > 0$, (que depende de $\mathcal{B}$), tal que,

$$\bigcup_{t\geq t_0} S(t)\mathcal{B}$$

, es un conjunto relativamente compacto y utilizando la proposición 5.2, se deduce que $\omega(\mathcal{B})$ es compacto no vacío, e invariante funcional. Vamos a probar que $\mathcal{A} = \omega(\mathcal{B})$, es el atractor global del semi-grupo $(S(t))_{t\geq 0}$. Ahora, mostremos que $\omega(\mathcal{B}) = \mathcal{A}$ atrae uniformemente a los conjuntos acotados de E. Razonemos por absurdo: supongamos que existe B_0, un conjunto acotado de E, tal que, $d(S(t)B_0, \mathcal{A})$ no converge a 0. Con esto sabemos que, existe $\epsilon > 0$ y $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^+$, (sucesión creciente), tal que $\tau_n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$, y que verifica

$$d(S(\tau_n)B_0, \mathcal{A}) \geq \epsilon.$$

Así, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $y_n \in B_0$ tal que

$$d(S(\tau_n)y_n, \mathcal{A}) \geq \frac{\epsilon}{2}.$$

Por otro lado, como $\mathcal{B}$ es absorbente en E, se tiene que existe $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $\forall n \geq N$, $S(\tau_n)B_0 \subset \mathcal{B}$ y $\tau_n \geq t_0$. Entonces $S(\tau_{N+n})y_{N+n} \in \mathcal{B}$. Adicionalmente, $S(\tau_{N+n})y_{N+n} \in \bigcup_{t\geq t_0} S(t)\mathcal{B}$, y como este último conjunto es relativamente compacto, se sigue que esta sucesión admite una sub-sucesíon,(que la notaremos de la misma manera), que converge a $y \in E$. Se tiene que

$$y = \lim_{n\to\infty} S(\tau_{N+n})\, y_{N+n}.$$

Se sigue que $y \in \omega(\mathcal{B}) = \mathcal{A}$, lo cuál es una contradicción. En efecto, por lo anterior sabemos que

$$d(S(\tau_{N+n})y_{N+n}, \mathcal{A}) \geq \frac{\epsilon}{2} \Rightarrow \qquad d(y, \mathcal{A}) \geq \frac{\epsilon}{2},$$

Lo cual es absurdo. Finalmente, mostremos que este atractor es maximal, con respecto a la inclusión. Sea $\mathcal{A}'$, un atractor del semi-grupo $(S(t))_{t\geq 0}$, tal que, $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$. Entonces, como $\mathcal{A}'$ es un conjunto acotado tenemos existe $t' > 0$, tal que, $S(t')\mathcal{A}' \subset \mathcal{B}$, y como $\mathcal{A}'$ es un conjunto invariante funcional de $(S(t))_{t\geq 0}$, se tiene que $\forall\, t > 0$, $S(t)\mathcal{A}' = \mathcal{A}'$ y por tanto $\omega(\mathcal{A}') \subset \omega(\mathcal{B}) = \mathcal{A}$. $\square$

D.3. Prueba de la proposición 5.7

Demostración. El control (5.3), se sigue directamente de la identidad (**??**). En efecto , por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, y como $-\|\vec{u}(t,\cdot)\|^2_{\dot{H}^1} - \alpha^2\|\vec{u}(t,\cdot)\|^2_{\dot{H}^2}$ es negativo, podemos escribir

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\vec{v}(t,\cdot)\|^2_{H^1_\alpha})\\
\leq& -\|\vec{v}(t,\cdot)\|^2_{\dot{H}^1} - \alpha^2\|\vec{v}(t,\cdot)\|^2_{\dot{H}^2} + \|\vec{f}\|_{L^2}\|\vec{v}(t,\cdot)\|_{L^2} + \alpha^2\|\vec{f}\|_{\dot{H}^1}\|\vec{v}(t,\cdot)\|_{\dot{H}^1} - \mu\|\vec{v}(t,\cdot)\|^2_{H^1_\alpha}\\
\leq& \frac{2}{\mu}\|\vec{f}\|^2_{L^2} + \frac{\mu}{2}\|\vec{v}(t,\cdot)\|^2_{L^2} + \frac{2\alpha^2}{\mu}\|\vec{f}\|^2_{\dot{H}^1} + \frac{\mu\alpha^2}{2}\|\vec{v}(t,\cdot)\|^2_{\dot{H}^1} - \mu\|\vec{v}(t,\cdot)\|^2_{H^1_\alpha}\\
\leq& \frac{2}{\mu}\|\vec{f}\|^2_{H^1_\alpha} - \frac{\mu}{2}\|\vec{v}(t,\cdot)\|^2_{H^1_\alpha}.
\end{aligned}
$$

Nuevamente, aplicando Grönwall, tenemos que

$$\|\vec{v}(t,\cdot)\|^2_{H^1_\alpha} \leq \|\vec{v_0}\|^2_{H^1_\alpha}\, e^{-\mu t} + \frac{4}{\mu}\int_0^t e^{-\mu(t-s)}\,\|\vec{f}\|^2_{H^1_\alpha} ds.$$

Por tanto, se obtiene el control deseado. Ahora mostremos la desigualdad (5.4). Entonces, analizando de la misma manera que antes, podemos llegar sin dificultad a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\vec{v}(t,\cdot)\|^2_{H^1_\alpha}) \leq -\|\vec{v}(t,\cdot)\|^2_{\dot{H}^1} - \alpha^2\|\vec{v}(t,\cdot)\|^2_{\dot{H}^2} + \frac{2}{\mu}\|\vec{f}\|^2_{H^1_\alpha}.$$

Integrando en el intervalo $[t, t+T]$, se consigue que

$$\|\vec{v}(t+T,\cdot)\|^2_{H^1_\alpha} \leq -\int_t^{t+T}\|\vec{v}(s,\cdot)\|^2_{\dot{H}^1}ds - \alpha^2\int_t^{t+T}\|\vec{v}(s,\cdot)\|^2_{\dot{H}^2}ds + \frac{2T}{\mu}\|\vec{f}\|^2_{H^1_\alpha} + \|\vec{v}(t,\cdot)\|^2_{H^1_\alpha}.$$

Con esta última estimación, se concluye la estimación deseada. $\square$

Referencias bibliográficas

[1] Bahouri, H., Chemin, J., y Danchin, R. *Fourier Analysis and Nonlineal Partial Differential Equations*. Springer, New York, Estados Unidos, 2011.

[2] Berselli, L. y Lewandowski., R. On the Bardina's Model in the Whole Space. *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, 42:1335–1351, 2018.

[3] Brézis, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer & Business Media, California, Estados Unidos, 2011.

[4] Chamorro, D. y Yangari, M. Some existence and regularity results for a non-local transport-diffusion equation with fractional derivatives in time and space. 2022.

[5] Cortez, M. y Jarrín., O. On the long-time behavior for a damped Navier-Stokes-Bardina model. *Discrete and Continuous Dynamical Systems, Series A,*, 42:3661–3707, 2022.

[6] Evans, L. *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, California, Estados Unidos, segunda edición, 2010.

[7] Grafakos, L. *Classical Fourier Analysis*. Springer, New York, Estados Unidos, segunda edición, 2008.

[8] Lemarié-Rieusset, P. *The Navier-Stokes Problem in the 21st Century*. CRC Press, París, Francia, 2016.

[9] Loachamin, G. *Sobre el problema de Cauchy para la ecuación del calor fraccionaria.* Quito: EPN, 2020.

[10] Mitrea, D. *Distributions, Partial Differential Equations, and Harmonic Analysis.* Springer, New York, Estados Unidos, segunda edición, 2018.

[11] Pedlosky, J. Geophysical Fluid Dynamics. . *Springer*, 1979.

[12] Quiroga, A. *Algunos detalles relevantes de las ecuaciones de navier-stokes incompresibles.* Quito: EPN, 2022.

[13] Raugel, G. Global Attractors in Partial Differential Equations. . *Lectures notes, CNRS et Université Paris-Sud, Analyse Numérique et EDP*, UMR 8628, 2006.

[14] Temam, R. *Infinite Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics.* Springer-Verlag, New York, USA, 1997.