

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS

UN MODELO DE PROGRAMACIÓN MULTI OBJETIVO PARA ASIGNACIÓN ÓPTIMA DE PERSONAL: CASO DE LA POLICÍA NACIONAL

TRABAJO DE TITULACIÓN PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE
INGENIERO MATEMÁTICO

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

ANDRÉS ARMANDO VINUEZA MACHUCA
andres.vinueza@epn.edu.ec

Director: MARÍA FERNANDA SALAZAR MONTENEGRO
fernanda.salazar@epn.edu.ec

QUITO, SEPTIEMBRE 2023

DECLARACIÓN

Yo ANDRÉS ARMANDO VINUEZA MACHUCA, declaro bajo juramento que el trabajo aquí escrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

A través de la presente declaración cedo mis derechos de propiedad intelectual, correspondientes a este trabajo, a la Escuela Politécnica Nacional, según lo establecido por la Ley de Propiedad Intelectual, por su reglamento y por la normatividad institucional vigente.

Andrés Armando Vinueza Machuca

CERTIFICACIÓN

Certifico que el presente trabajo fue desarrollado por ANDRÉS ARMANDO VINUEZA MACHUCA, bajo mi supervisión.

María Fernanda Salazar Montenegro
Director del Proyecto

Índice general

1. Introducción	11
1.1. Definición del Problema	11
1.2. Justificación	14
1.3. Objetivos de la investigación	15
1.3.1. Objetivo General	15
1.3.2. Objetivos Específicos	15
1.4. Estructura del Proyecto de Titulación	16
2. Optimización Multiobjetivo	17
2.1. Programación Lineal Entera	17
2.2. Optimalidad de Pareto	19
2.3. Técnicas de Escalarización	24
2.3.1. Método de la suma ponderada	24
2.3.2. El método ε - restricción	27
2.3.3. El método general de esclarización	30
2.4. Técnicas no Escalarizantes	32
2.4.1. Optimalidad lexicográfica	32
3. Modelo multiobjetivo para la asignación de servidores policiales	34
3.1. Definición del problema	34
3.2. Notación	35
3.3. Definición del modelo de programación entera multiobjetivo	37
3.4. Metodología para la solución del problema multiobjetivo MGAM	40

3.4.1.	Modelo original de asignación (MOA)	40
3.4.2.	Modelo multiobjetivo principal (MMP)	42
3.5.	Solución del problema multiobjetivo	46
3.5.1.	Solución modelo original multiobjetivo (MOAM)	49
3.5.2.	Solución Modelo Multiobjetivo Principal	55
4.	Conclusiones y Recomendaciones	65
4.1.	Conclusiones	65
4.2.	Recomendaciones	66
A.	Código empleado para la asignación de servidores policiales	71

Índice de Tablas

1.1. Actividades en las UPC tipo A y tipo B	13
2.1. Criterios y alternativas ejemplo 2.1	21
2.2. Condiciones del método general de escalarización para llegar a otros métodos populares de escalarización	31
3.1. Grados de los servidores policiales	35
3.2. Actividades servidores policiales en el conjunto J	36
3.3. Requerimientos de los servidores policiales para desempeñar una actividad	36
3.4. Asignación de servidores policiales para el ejemplo 3.1	43
3.5. Asignación 1 de servidores policiales para el ejemplo 3.2	44
3.6. Asignación 2 de servidores policiales para el ejemplo 3.2	44
3.7. Cantidad de servidores y tipos de policía por instancia	47
3.8. Dotación mínima de servidores policiales por actividad e instancia .	47
3.9. Demanda de servidores policiales por actividad	49
3.10. Valores de las funciones objetivo para la instancia mayo del 2019 del modelo MOA	50
3.11. Distribución de los valores de las funciones objetivo para la instancia septiembre del 2019 del modelo MOA	50
3.12. Tiempo de ejecución de los modelos en segundos	50
3.13. Valores funciones objetivo para la solución del modelo MOA para la instancia mayo	50
3.14. Valores funciones objetivo para la solución del modelo MOA para la instancia septiembre	51

3.15. Cantidad de subcircuitos para cada distribución de servidores policiales por modelo para la instancia de mayo	53
3.16. Distribución de servidores policiales asignados y faltante por modelo y actividad, instancia mayo	54
3.17. Valores de las funciones objetivo para la instancia mayo del 2019 del modelo MMP	55
3.18. Valores de la s funciones objetivo para la instancia septiembre del 2019 del modelo MMP	56
3.19. Tiempo de ejecución en segundos	56
3.20. Valores funciones objetivo para la solución del modelo MOA para la instancia mayo	57
3.21. Distribución de los valores de las funciones objetivo para el modelo MMP instancia septiembre	57
3.22. Distribución de servidores policiales asignados y faltante por modelo y actividad, instancia septiembre	58
3.23. Cantidad de servidores policiales por actividad para los grados de teniente y subteniente	59
3.24. Cantidad de subcircuitos para cada distribución de servidores policiales obtenida por la asignación del modelo MOA para la instancia de septiembre	60

Índice de figuras

- 1.1. División Administrativa del Ecuador 12
- 2.1. Máximos y mínimos eficientes 22
- 2.2. Ejemplo 2.3 Soluciones eficientes 23
- 3.1. Subcircuitos del Ecuador por zona administrativa 37
- 3.2. Índice de peligrosidad de los subcircuitos del Ecuador 48
- 3.3. Distribución de la asignación a nivel nacional para el modelo MOAM 55
- 3.4. Distribución asignación zona 9 para los 20 subcircuitos con menor índice de peligrosidad 63

Resumen

En esta investigación se considera un modelo de programación entera multiobjetivo para la asignación de servidores policiales del eje preventivo de la Policía Nacional a lo largo del territorio ecuatoriano. Se presenta dos formulaciones multiobjetivo diferentes en las que varían los conjuntos de las funciones objetivo. En el análisis teórico, se estudian técnicas de solución de problemas multiobjetivo escalarizantes y no escalarizantes. Para las primeras, se detalla la suma ponderada, luego el método ε -restricción y finalmente un método reciente llamado método de escalarización generalizada. Para las segundas, la optimalidad lexicográfica ha sido descrita. Ambos modelos multiobjetivo han sido implementados con los métodos de suma ponderada, escalarización general y optimalidad lexicográfica. Finalmente, se realizaron pruebas computacionales con datos reales y se compara el desempeño de los modelos multiobjetivo entre ellos y también con un modelo de programación entera tomado de la literatura. Se concluye que el mejor método para resolver el modelo multiobjetivo es la escalarización general, los resultados obtenidos mejoran además la solución del modelo con un solo objetivo.

Abstract

In this investigation, a multiobjective integer programming model is considered for the assignment of police officers of the preventive axis of the National Police throughout the Ecuadorian territory. Two different multiobjective formulations are presented in which the sets of objective functions vary. In the theoretical analysis, scalarizing and non-scalarizing multiobjective problem solving techniques are studied. For the former, the weighted sum is detailed, then the ε -constraint method, and finally a recent method called the generalized scalarization method. For the latter, lexicographical optimality has been described. Both multiobjective models have been implemented with the methods of weighted sum, general scalarization and lexicographical optimality. Finally, computational tests were carried out with real data and the performance of the multiobjective models was compared between them and also with an integer programming model taken from the literature. It is concluded that the best method to solve the multi-objective model is general scalarization, the results obtained also improve the solution of the model with a single objective.

Capítulo 1

Introducción

1.1. Definición del Problema

Uno de los ejes de lineamiento político más importantes de un país sin duda es la seguridad de la ciudadanía. El crimen deja en la sociedad consecuencias físicas, psicológicas y económicas (Buvinic et al., 2005). Varios factores influyen para reducir la delincuencia, una de las estrategias para prevenirla es la eficacia policial y de inteligencia (Alvarado and Muggah, 2018), es así que la correcta administración del personal policial ayudará a mejorar el nivel de seguridad de la población.

La Policía Nacional del Ecuador ha adoptado la filosofía de “Policía Comunitaria” y tiene como objetivo construir una cultura de seguridad ciudadana mediante la integración y participación de la sociedad para mejorar la calidad de vida y alcanzar el Buen Vivir (Dirección Nacional de la Policía Comunitaria, 2013). De acuerdo con Ministerio de Gobierno (2008) la institución cuenta con diferentes unidades especiales con adiestramiento especializado a nivel nacional, éstas son:

1. Grupo de Intervención y Rescate (GIR);
2. Unidad de Investigaciones Especiales (UIES);
3. Grupo de Operaciones Especiales (GOE);
4. Unidad de Equitación y Remonta (UER);
5. Unidad Antisecuestros (UNASE);
6. Unidad de Protección del Medio Ambiente (UPM); y,
7. Unidad de Acción Comunitaria (UNACO).

Particularmente, esta investigación se centra en el personal de la Unidad de Acción Comunitaria, quienes realizan actividades de prevención.

Para poder entender el problema que enfrenta la institución es necesario conocer su modelo de gestión. Al igual que todas las instituciones ecuatorianas, la Policía Nacional se rige por la Constitución de la República, en donde se promueve la descentralización y desconcentración del estado que tiene el propósito de que los servicios públicos lleguen a cada rincón del país (Secretaría Nacional de Planificación y Desarrollo, 2012).

Para cumplir con dicho deber constitucional y reducir la inequidad social la Secretaría Nacional de Planificación y Desarrollo (SENPLADES) reestructuró al estado, conformando los siguientes niveles administrativos ordenados de mayor a menor: Zona, Distrito y Circuito, contruidos a partir del modelo tradicional (Provincia, Cantón, Parroquia) (Secretaria Nacional de Planificación y Desarrollo, 2009). Así, la Policía Nacional adaptó su organización, y además se creó un nuevo nivel llamado *subcircuito* para mejorar su servicio. En la figura 1.1 se muestra la pirámide de la distribución administrativa del país.

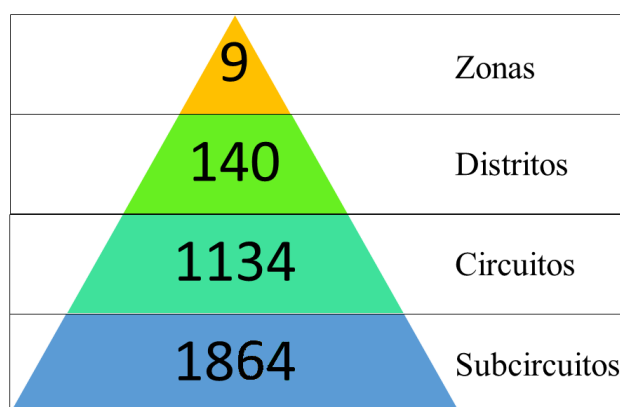


Figura 1.1: División Administrativa del Ecuador

En el nivel subcircuito se establece la organización policial denominada “Unidad de Policía Comunitaria” (UPC), que acoge las necesidades de seguridad ciudadanas permitiendo un mejor desempeño institucional. Sin embargo, la Policía Nacional se ha visto obstaculizada debido a un grave problema de déficit de personal (Policía Nacional del Ecuador, 2018).

La distribución del personal se realiza al clasificar las UPC en tipo A o tipo B con una dotación fija de 22 o 16 policías respectivamente, distribuidos como se muestra

en la tabla 1.1 (Dirección Nacional de la Policía Comunitaria, 2013). En cada uno de los formatos de asignación, uno de los servidores cumple además con la función de jefe de subcircuito, coordinando y dirigiendo a cada uno de los servidores policiales del subcircuito. De acuerdo con Ministerio del Interior (2011) las actividades que realiza el personal en una UPC se resumen de la siguiente forma:

- Polco: Policía en funciones de Policía Comunitaria, realiza acciones permanentes de acercamiento comunitario.
- Atención ciudadana: Policía de servicio permanente en la UPC.
- Servicio de prevención y respuesta: patrullaje continuo con vehículos y motocicletas.
- Servicio de disuasión y reacción: patrullaje en puntos y horas críticas para la disuasión del delito.

Actividad	Cantidad de Policías UPC tipo A	Cantidad de Policías UPC tipo B
Polco	1	1
Atención Ciudadana	3	3
Auxilio y Respuesta	6	6
Reacción y Disuasión	4	4
Motociclistas	8	2
Total	22	16

Tabla 1.1: Actividades en las UPC tipo A y tipo B

El modelo de gestión actual plantea una distribución homogénea para cada tipo de UPC sin considerar la demanda de servicios policiales del subcircuito, por lo cual es posible que exista una asignación excesiva o insuficiente. Este modelo de gestión tiene un objetivo logístico que busca garantizar atención las 24 horas del día en turnos de 8 horas. Sin embargo, la realidad es muy distinta, la oferta de servidores policiales no es suficiente para satisfacer ninguno de los 2 modelos, llegándose a tener casos con una asignación de 10 servidores policiales en varias UPC.

Frente a la falta de personal la verdadera asignación de servidores policiales se realiza de forma empírica. Uno de los problemas que ha ocasionado el actual modelo de gestión de personal es que los miembros de policía sufran inestabilidad familiar por pases y estrés laboral por horarios dinámicos (Policía Nacional del Ecuador, 2018), lo cual es consistente con el estudio de violencia de Violanti et al. (2017) que

afirma que el trabajo por turnos es una necesidad en la labor policial que lamentablemente suele acarrear problemas de sueño y enfermedades afectando el rendimiento de los servidores de policía .

La Policía Nacional desea seguir desarrollándose y ser referente en la región (Policía Nacional del Ecuador, 2018), por lo cual contar con un modelo de gestión de personal que permita obtener la asignación óptima de servidores policiales de manera técnica y de acuerdo a los requerimientos de demanda de cada subcircuito, será un importante aporte a la institución.

1.2. Justificación

Mukhopadhyay et al. (2016) mencionan que la capacidad de pronosticar y responder es el santo grial de la vigilancia. A nivel mundial muchas instituciones policiales han trabajado en la optimización de varios de sus procesos para mejorar su lucha contra el crimen usando técnicas de Investigación de Operaciones.

Varias investigaciones se centran en optimizar la distribución de las patrullas de policía, ya que la correcta administración de estos recursos permite reducir actos delictivos (Koper, 1995). Así, se tiene los trabajos de Antunes et al. (2016), Chaiken and Dormont (1978), Namoco et al. (2017) y Taylor and Huxley (1989) que utilizan Programación Lineal para asignar patrullas a puntos conflictivos mejorando la percepción de seguridad, reduciendo el consumo de recursos y las tasas de criminalidad.

En el ámbito policial también se ha estudiado el problema de la optimización de horarios. Por ejemplo, Todovic et al. (2015) asignan servidores policiales en horarios y actividades dentro de una jefatura de policía en Bosnia, reportando que con esta división del trabajo se reduce las largas jornadas y los dobles turnos para mejorar el desempeño del personal. Edleston (2010) en cambio trabaja en el diseño de la demanda para optimizar horarios con algoritmos metaheurísticos como la búsqueda tabú y algoritmos genéticos. De forma similar Bautista et al. (2018) asigna voluntarios a eventos deportivos para actividades definidas, maximizando la aptitud global del voluntariado pero usando programación entera.

Otro enfoque que se ha utilizado es la optimización multiobjetivo. Esta técnica permite resolver un problema de optimización donde la función objetivo es un vector de funciones lineales las cuales están en conflicto al ser optimizadas. Así, se tiene el trabajo de Adler et al. (2013) en el que se plantea un modelo de programación

multiobjetivo para asignar patrullas de la policía de tránsito para aumentar la presencia, notoriedad y el tiempo de dinamismo de los policías mientras que Guedes et al. (2015) resuelven mediante algoritmos evolutivos multiobjetivo la asignación de recursos, minimizando el tiempo de respuesta, las llamadas desatendidas y el desplazamiento de patrullas.

Trabajos similares se han centrado en el problema de asignación de personal. Ismayilova et al. (2007) diseñaron un modelo de programación entera multiobjetivo para la asignación de horarios maximizando las preferencias de los administradores y los tutores mientras que Kaliszewski et al. (2017) abordan el problema de asignación de aviones a puertas de un aeropuerto implementando un algoritmo de optimización multiobjetivo que minimiza la cola de las puertas y a su vez minimiza la cola de la plataforma.

Finalmente, como se indica en Narváez Montenegro (2015) es importante considerar que varias instituciones internacionales han trabajado por plantear la forma de administrar la fuerza policial, sin embargo es necesario diseñar metodologías que se apliquen a la realidad nacional. El problema de asignación de personal para la Policía Nacional en el Ecuador considera diferentes funciones objetivo a optimizar tales como: reducir distancias de traslado, maximizar eficiencia de los servidores policiales en las actividades que realizan y reducir los cambios del personal entre zonas; es decir, el número de servidores policiales que se asignan a una zona diferente a la de su lugar de residencia. Claramente estos objetivos son conflictivos por lo cual en este trabajo se abordará el problema de asignación con un enfoque de optimización multiobjetivo.

1.3. Objetivos de la investigación

1.3.1. Objetivo General

Asignar de forma eficiente el personal policial a las unidades territoriales del estado ecuatoriano a través de un modelo de optimización multiobjetivo.

1.3.2. Objetivos Específicos

- Formular, validar e implementar un modelo de asignación multiobjetivo para satisfacer la demanda de los servidores policiales.

- Comparar el modelo de optimización multiobjetivo con la versión de un modelo de Programación Entera con una sola función objetivo.

1.4. Estructura del Proyecto de Titulación

Esta tesis se compone de 3 capítulos:

- Capítulo 1 Introducción: Este capítulo proporciona una introducción a los temas de esta investigación. Se describe el problema que se resolverá con el modelo de programación multiobjetivo y la justificación para usar esta metodología.
- Capítulo 2 Optimización Multiobjetivo: Se comienza describiendo los conceptos básicos de la optimización multiobjetivo. Luego, se describen los métodos para resolver estos problemas; particularmente se describe un nuevo método conocido como "Método de escalarización generalizado".
- Capítulo 3 Modelo multiobjetivo para la asignación de servidores policiales: Se describe los datos, el modelo de optimización, los métodos de solución a usarse y finalmente se compara los resultados de las pruebas computacionales de los modelos multiobjetivo y también con un modelo de programación entera.

Capítulo 2

Optimización Multiobjetivo

En este capítulo se abordan los conceptos importantes de la programación lineal multiobjetivo. Posteriormente se describen los métodos de solución conocidos como escalarizantes y no escalarizantes para resolver estos problemas. En los métodos escalarizantes se comenzará con el método de la suma ponderada, luego se incluirá el método ε - restricción y a partir de estos dos métodos se introducirá una generalización al método tradicional. Finalmente, se abordará los métodos no escalarizantes con el método de optimalidad lexicográfica.

2.1. Programación Lineal Entera

Comenzaremos definiendo algunos conceptos importantes de la programación lineal entera necesarios para abordar la programación lineal entera multiobjetivo. En esta sección las definiciones han sido tomadas de (Korte and Vygen, 2006). El problema de forma general se define así:

DEFINICIÓN 2.1 Sean $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ una matriz, $b \in \mathbb{R}^m$ y $c \in \mathbb{R}^n$ dos vectores. Un problema de programación lineal (LP) consiste en encontrar $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $Ax \leq b$ y $c^T x$ sea minimizado, o decidir que $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ es vacío, o decidir que para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ hay un $x \in \mathbb{R}^n$ con $Ax \leq b$ y $c^T x < \alpha$

En donde se nota $c^T x$ como el producto escalar entre dos vectores. Un programa lineal (LP) es una instancia del problema anterior. A menudo escribimos un programa lineal de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
& \text{mín } c^T x \\
& \text{Sujeto a:} \\
& Ax \leq b, \\
& x \geq 0
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Una solución factible de LP es un vector x que satisface $Ax \leq b$. Una solución factible que alcanza el mínimo se llama solución óptima. Un LP puede no tener solución por dos causas: la primera es porque el problema es infactible,

$$\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\} = \emptyset \tag{2.2}$$

y la segunda es porque no es acotado

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \exists x \in P \text{ tal que } c^T x < \alpha \tag{2.3}$$

La Programación Lineal se ocupa de maximizar o minimizar una función objetivo lineal de un número finito de variables sujetas a un número finito de desigualdades lineales. El conjunto de soluciones factibles es la intersección de un número finito de semiespacios. Tal conjunto se llama poliedro, se define así:

DEFINICIÓN 2.2 *Un poliedro en \mathbb{R}^n es un conjunto $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ para alguna matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y algún vector $b \in \mathbb{R}^m$. Si A y b son racionales, entonces P es un poliedro racional. Un poliedro acotado se llama polígono.*

Luego, se tiene la siguiente definición donde se introduce terminología necesaria:

DEFINICIÓN 2.3 *Sea $P := \{x : Ax \leq b\}$ sea un poliedro no vacío. Si c es un vector diferente de cero para el cual $\delta := \text{máx}\{cx : x \in P\}$ es finito, entonces $\{x : cx = \delta\}$ es llamado hiperplano de P . Una cara de P es la intersección entre P y el hiperplano de P . Un punto x para el cual $\{x\}$ es una cara se llama vértice de P , y también una solución básica de $Ax \leq b$*

Bajo la definición 2.3 una cara $F \subset P$ se puede denotar como $F = \{x \in P : cx = \delta\}$, donde $\delta := \text{máx}\{cx : c \in P\}$ para algún c . Con estas definiciones se puede asegurar que la solución de un LP se encuentra en una cara del poliedro como lo establece el siguiente corolario.

COROLARIO 2.4 Si $\max\{cx : x \in P\}$ es acotado para un poliedro P no vacío y un vector c , entonces el conjunto de puntos donde el máximo se alcanza es una cara de P .

Ahora, bajo el siguiente teorema se tiene que las soluciones de un LP se encuentran en los vértices del poliedro P .

PROPOSICIÓN 2.5 Sea $P := \{x : Ax = b, x \geq 0\}$ donde A es una matriz y b es un vector. Entonces x es un vértice de P si y solo si $x \in P$ y las columnas de A son linealmente independientes.

Finalmente, si consideramos incluir a un LP como restricción que $x \in \mathbb{Z}$ entonces un LP se llamará problema de programación entera y se define así:

DEFINICIÓN 2.6 Sean $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ una matriz, $b \in \mathbb{Z}^m$ y $c \in \mathbb{Z}^n$ dos vectores. Un problema de programación entera (IP) consiste en encontrar $x \in \mathbb{Z}^n$ tal que $Ax \leq b$ y $c^T x$ sea minimizado.

$$\begin{aligned} & \text{mín } c^T x \\ & \text{Sujeto a:} \\ & \quad Ax \leq b, \\ & \quad x \geq 0, \\ & \quad x \in \mathbb{Z}^n \end{aligned} \tag{2.4}$$

2.2. Optimalidad de Pareto

Los modelos de programación lineal son muy importantes en el campo de la optimización, sin embargo, muchos problemas de optimización podrían tener varios criterios para definir su función objetivo los cuales se encuentran en conflicto, así nace la *programación lineal multiobjetivo* (MOLP) en la que se optimiza un vector de funciones objetivos. Luc (2016) y Ehrgott (2005) denotan un *problema de programación*

lineal multiobjetivo (\mathcal{PMOLP}) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} & \text{mín}(f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x))) \\ \text{Sujeto a:} & \\ & x \in \mathcal{X}, \end{aligned} \tag{2.5}$$

La función $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^p$ es el vector formado por p funciones objetivo lineales. El conjunto \mathcal{X} se llamará conjunto factible y será igual al conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ de la definición 2.1. Si \mathcal{X} tiene como restricción adicional $x \in \mathbb{Z}^n$ se llamará *problema de programación entera multiobjetivo*.

La imagen de \mathcal{X} bajo f se denotará como $\mathcal{Y} := f(\mathcal{X}) := \{y \in \mathbb{R}^n : y = f(x) \forall x \in \mathcal{X}\}$ y se llamará imagen del conjunto factible, o el conjunto factible en el espacio criterio.

Aunque existen similitudes entre el problema LP y \mathcal{PMOLP} los conceptos tradicionales de optimización no se pueden aplicar a la programación lineal multiobjetivo y nace la necesidad de desarrollar nuevas nociones de optimalidad (Luc, 2016). Para comprender mejor los problemas \mathcal{PMOLP} Ehrgott (2005) plantea el siguiente ejemplo de comprar un vehículo:

Ejemplo 2.1. *Para la compra de un vehículo se consideran cuatro modelos preferidos: un VW Golf, un Opel Astra, un Ford Focus y un Toyota Corolla. Para tomar la decisión se considerará el precio, el consumo de gasolina y la potencia.*

El problema planteado cuenta con cuatro alternativas y tres criterios que evaluamos al mismo tiempo. Para ilustrar mejor el problema se cuenta con algunos datos en la tabla 2.1 (los datos son inventados). Con los criterios mencionados se desearía un vehículo con el precio más bajo, que sea potente y tenga un bajo consumo de energía. Sin embargo, un vehículo con dichas características no existe, entonces la solución no es sencilla y nace la pregunta: ¿cómo decidimos cuál de los cuatro vehículos es el “mejor”? El vehículo más potente es también el de mayor consumo de gasolina, de forma que parece no posible comprar un vehículo que además de potente y económico sea de bajo consumo de gasolina. Por el contrario observamos que si consideramos un único criterio para la compra la elección es fácil.

En este ejemplo el conjunto factible está formado por los vehículos $\mathcal{X} = \{\text{VW Golf, Opel Astra, Ford Focus, Toyota Corolla}\}$. Si se denota el precio por f_1 y el consumo de gasolina por f_2 , entonces las funciones $f_i : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ son criterios o funciones

Criterio	Alternativas			
	VW	Opel	Ford	Toyota
Precio (1000 dólares)	16.2	14.9	14	15.2
Consumo ($\frac{1}{100km}$)	7.2	7	7.5	8.2
Energía (kW)	66	62	55	71

Tabla 2.1: Criterios y alternativas ejemplo 2.1

objetivo y el problema de optimización puede expresarse matemáticamente como:

$$\begin{aligned}
 & \text{mín}(f_1(x), f_2(x)) \\
 \text{Sujeto a:} & \\
 & x \in \mathcal{X},
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Al introducir los problemas \mathcal{PMOLP} se utilizó el operador "mín"; mas es necesario definir un orden. Ehrgott y Ruzika (2008) mencionan que las diferentes interpretaciones de "mín" pertenecientes a diferentes órdenes son la base de una clasificación de problemas de optimización multicriterio. El orden a usar será denotado por \leq el cual establece que para un par de vectores $a, b \in \mathbb{R}^p$ se cumple que $a \leq b$ si $a_i \leq b_i \forall i \in \{1, \dots, p\}$ y $a < b$ si $a_i < b_i \forall i \in \{1, \dots, p\}$. A partir del orden descrito se introduce la siguiente definición:

DEFINICIÓN 2.7 *Se dice que un punto $y' \in \mathcal{Y}$ es un punto minimal si no existe otro punto $y \in \mathcal{Y}$ tal que $y \leq y'$ y $y' \neq y$. Si no existe otro punto $y \in \mathcal{Y}$ tal que $y < y'$ se llamará punto débilmente minimal.*

Análogamente, a partir de 2.7 se dice que un punto $y' \in \mathcal{Y}$ es un *punto maximal* si no existe otro punto $y \in \mathcal{Y}$ tal que $y \geq y'$ y $y' \neq y$. Si se cumple la definición con desigualdad estricta serán puntos *débilmente maximales*

La definición de puntos (débilmente) minimales permite comparar a la vez todas las componentes de un vector $y \in \mathcal{Y}$. En un problema de minimización se trata de obtener los valores más pequeños $y_i \forall i \in \{1, \dots, p\}$; estos puntos no son necesariamente únicos, lo cual se ilustra en el siguiente ejemplo tomado de Luc (2016):

Ejemplo 2.2. *Sea $\mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^2$ el área comprendida entre los vértices: $a = (0,0)$, $b = (1,0)$, $c = (0,1)$ determinar: los puntos maximales, débilmente maximales, minimales y débilmente minimales.*

El conjunto se muestra en la figura 2.1. Los puntos maximales y débilmente maximales

coinciden y son el conjunto de puntos formado por la línea que une el punto c y b que se notará como $[c, b]$. El punto $\{a\}$ es el único punto minimal, mientras que la unión de los segmentos $[c, a]$ y $[a, b]$ son débilmente minimales. Los puntos en el conjunto $[c, a) \cup (a, b]$ no son minimales, si tomamos $y \in [c, a) \cup (a, b]$ existe y' tal que $y' \leq y$ entonces $y' = a$.

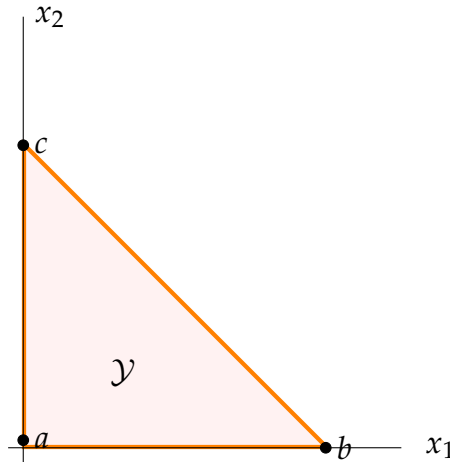


Figura 2.1: Máximos y mínimos eficientes

Dado que \mathcal{Y} es la imagen de \mathcal{X} , un punto minimal y' puede resultar de la evaluación de un punto $\hat{x} \in \mathcal{X}$, así $y' = f(\hat{x})$. Considerando esto tenemos la siguiente definición:

DEFINICIÓN 2.8 Un punto $\hat{x} \in \mathcal{X}$ se llamará solución eficiente (óptima de Pareto) si no existe otro $x \in \mathcal{X}$ tal que $f(x) \leq f(\hat{x})$. Y se llamará solución débilmente eficiente (débilmente óptima de Pareto) si no existe otro $x \in \mathcal{X}$ tal que $f(x) < f(\hat{x})$.

Las soluciones eficientes son equivalentes a las soluciones óptimas en problemas LP, sin embargo, las soluciones eficientes no son necesariamente únicas. En el siguiente ejemplo se muestra las soluciones eficientes:

Ejemplo 2.3. Se considera el siguiente problema de optimización multiobjetivo representado en la figura 2.2.

$$\text{máx } (25x_1 + 20x_2, x_1 + 8x_2)$$

Sujeto a:

$$x \in \mathcal{X},$$

donde, $\mathcal{X} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = -4.5 + 1.5x_1, x_2 = 5.5 - 1.5x_1, x_2 = 4 - 0.5x_1\}$.

Se ha denotado como $f_1(x_1, x_2) = 25x_1 + 20x_2$ y $f_2(x_1, x_2) = x_1 + 8x_2$ y las restricciones lineales se etiquetaron como L_1 , L_2 y L_3 . Se puede determinar a partir de la gráfica que las soluciones eficientes son el conjunto de puntos en L_2 ya que ambas funciones presentan su mayor crecimiento a la vez.

En programación lineal el conjunto de soluciones óptimas es una cara del conjunto factible, sin embargo, en modelos multiobjetivo esta propiedad no siempre se cumple (Luc, 2016).

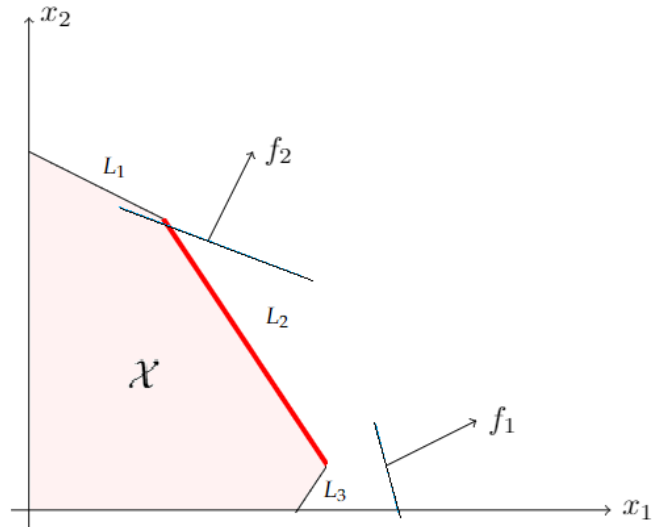


Figura 2.2: Ejemplo 2.3 Soluciones eficientes

Según la definición 2.8, una solución eficiente puede mejorar algún criterio sólo a expensas del deterioro de al menos otro criterio (Ehrgott, 2005). Esto lo podemos notar en el ejemplo 2.1 donde un auto más potente consume mayor gasolina.

Ehrgott (2005) menciona que cualquier solución eficiente es una buena solución de un problema multiobjetivo, pero también se desearía tomar aquellas que permitan maximizar los valores de una función objetivo f_i , digamos, por unidad de decrecimiento en f_j para cualquier $j \neq i$. En algunas situaciones, estas compensaciones pueden ser ilimitadas. Bajo esta premisa nace la definición de soluciones propiamente eficientes.

DEFINICIÓN 2.9 Una solución $\hat{x} \in \mathcal{X}$ se dirá propiamente eficiente si es eficiente y si existe $M > 0$ tal que para todo $k = 1, \dots, p$ y $x \in \mathcal{X}$ que satisfagan $f_k(x) > f_k(\hat{x})$, se cumple la relación:

$$\frac{f_k(\hat{x}) - f_k(x)}{f_j(x) - f_j(\hat{x})} \leq M, \quad (2.7)$$

para algún j tal que $f_j(x) < f_j(\hat{x})$.

De acuerdo con la definición 2.7, las soluciones propiamente eficientes son aquellas soluciones eficientes que tienen compensaciones acotadas entre los objetivos (Ehrgott, 2005).

Aunque esta definición parece ser más restrictiva, se puede obtener soluciones propiamente eficientes de forma sencilla. En la siguiente sección se analiza los métodos para resolver problemas \mathcal{PMOLP} .

2.3. Técnicas de Escalarización

Las técnicas de escalarización son métodos que permiten resolver problemas lineales multiobjetivo al transformar el problema con una función vectorial a un problema de un solo objetivo en donde cada objetivo se asociará a valores escalares. Se mostrará que una solución óptima en el problema de un solo objetivo será eficiente o incluso propiamente eficiente en el problema multiobjetivo.

2.3.1. Método de la suma ponderada

El método de suma ponderada permite resolver el problema \mathcal{PMOLP} al introducir valores escalares $\lambda_k > 0$ para $k = 1, \dots, p$ que pueden representar pesos, ponderaciones o preferencias deseadas por el tomador de decisiones, transformándolo en un problema de programación lineal de un solo objetivo con la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & \sum_{k=1}^p \lambda_k f_k(x) \\ & x \in \mathcal{X}, \end{aligned} \tag{2.8}$$

se lo llamará *problema de suma ponderada*. Este método es uno de los más usados por su sencillez. Esta nueva formulación permite obtener soluciones eficientes y propiamente eficientes como lo muestran los siguientes resultados (Ehrgott, 2005):

TEOREMA 2.10 Si $\hat{x} \in \mathcal{X}$ es una solución óptima del problema de suma ponderada con $\lambda_k > 0$, $k = 1, \dots, p$, entonces \hat{x} es una solución eficiente del problema \mathcal{PMOLP} (2.5).

Demostración. Suponiendo que \hat{x} no es eficiente, entonces existe otro $x \in \mathcal{X}$ tal que $f_k(x) \leq f_k(\hat{x}), k = 1, \dots, p$, además, se cumple la desigualdad estricta para algún k . Luego, como los pesos son estrictamente positivos se cumple:

$$\sum_{k=1}^p f_k(x) < \sum_{k=1}^p f_k(\hat{x}).$$

Sin embargo, al ser \hat{x} una solución óptima del problema de suma ponderada se tiene:

$$\sum_{k=1}^p f_k(\hat{x}) < \sum_{k=1}^p f_k(x),$$

por lo que se llega a una contradicción. \square

TEOREMA 2.11 Sean $\lambda_k > 0$, con $k = 1, \dots, p$ y $\sum_{k=1}^p \lambda_k = 1$. Si \hat{x} es una solución óptima del problema de suma ponderada entonces \hat{x} es una solución propiamente eficiente de \mathcal{PMOLP} .

Demostración. Sea \hat{x} una solución óptima de problema de suma ponderada. Por el teorema 2.10 esta solución es eficiente. Luego supongamos que \hat{x} no es propiamente eficiente y tomemos:

$$M := (p - 1) \max_{i,j} \frac{\lambda_j}{\lambda_i}. \quad (2.9)$$

Además, existe $i \in \{1, \dots, p\}$ y $x \in \mathcal{X}$ tal que $f_i(x) < f_i(\hat{x})$ y $f_i(\hat{x}) - f_i(x) > M(f_j(x) - f_j(\hat{x}))$ para todo $j \in \{1, \dots, p\}$ tal que $f_j(\hat{x}) < f_j(x)$ con $j \neq i$. Entonces

$$f_i(\hat{x}) - f_i(x) > \frac{p-1}{\lambda_i} \lambda_j (f_j(x) - f_j(\hat{x})) \quad (2.10)$$

Luego, sumando para $j \neq i$ se tiene:

$$\begin{aligned} \sum_{j:j \neq i} \lambda_i (f_i(\hat{x}) - f_i(x)) &> (p-1) \sum_{j:j \neq i} \lambda_j (f_j(x) - f_j(\hat{x})) \\ \lambda_i (f_i(\hat{x}) - f_i(x)) &> \sum_{j:j \neq i} \lambda_j (f_j(x) - f_j(\hat{x})) \\ \lambda_i f_i(\hat{x}) + \sum_{j:j \neq i} \lambda_j f_j(\hat{x}) &> \lambda_i f_i(x) + \sum_{j:j \neq i} \lambda_j f_j(x) \\ \sum_{j=1}^p \lambda_j f_j(\hat{x}) &> \sum_{j=1}^p \lambda_j f_j(x) \end{aligned}$$

Así, se llega a una contradicción lo que demuestra el resultado. \square

Los valores λ_k del problema de suma ponderada, de acuerdo a su elección permiten obtener una única solución eficiente y se puede extender para llegar a formar el conjunto de todas las soluciones eficientes (Marler y Arora, 2009). Además, si la función objetivo es p - direccionalmente convexa el método de la suma ponderada es una condición necesaria para que un modelo multiobjetivo tenga soluciones eficientes¹.

Al aplicar el método de la suma ponderada es muy importante la elección de las ponderaciones. Marler y Arora (2009) mencionan que la solución obtenida por el método debe reflejar las preferencias deseadas de las funciones objetivo; para entender la naturaleza de estos valores definen la función de preferencia como un campo vectorial $P[(f_1(x), \dots, f_k(x))]$ en la mente del tomador de decisiones que incorpora perfectamente sus preferencias. Para compararlos se calcula los gradientes de la función de preferencia y el problema de suma ponderada, así:

$$\nabla_x P[f(x)] = \sum_{k=1}^p \frac{\partial P}{\partial f_k} \nabla_x f_k(x) \quad (2.11)$$

$$\nabla_x \sum_{k=1}^k w_k f_k(x) = \sum_{k=1}^k w_k \nabla_x f_k(x) \quad (2.12)$$

De las ecuaciones 2.11 y 2.12 se puede concluir que el gradiente de la función objetivo y la función de preferencias deben ser paralelos, con lo que se puede imponer similitudes y afirmar que la función objetivo permite aproximar la función abstracta de preferencias; es decir, la solución al problema multiobjetivo original puede incorporar las preferencias deseadas. Por otro lado, Marler y Arora (2009) indican que se suele asumir que $\partial P / \partial f_i$ es constante implicando que el gradiente de la función de preferencias es constante, lo que no necesariamente es el caso; por lo tanto las ponderaciones podrían no reflejar con precisión las preferencias.

Para seleccionar los valores de los pesos es necesario que las funciones objetivo estén en una misma magnitud de modo que los pesos sean representativos. Marler y Arora (2009) señalan que normalizar las funciones objetivo permite asignar los

¹Se dirá p - direccionalmente convexa cuando la función sea convexa en una dirección p , se puede revisar la definición en Marler y Arora (2009)

pesos de forma sencilla, el proceso de normalización se presenta en el Algoritmo 1.

Algoritmo 1: Normalización de funciones objetivo

Entrada: (f_1, \dots, f_p) funciones objetivo de un problema multiobjetivo, \mathcal{X} conjunto factible

Salida : (f'_1, \dots, f'_p) funciones objetivo normalizadas, r_k valores máximos de las funciones objetivo

Inicialización: $r_i = 0, \forall i \in \{1, \dots, p\}, k = 1$

para $k \leq p$ **hacer**

1. Resolver el problema:

$$\begin{aligned} \min f_k(x) \\ x \in \mathcal{X} \end{aligned} \tag{2.13}$$

La solución de 2.13 se notará como \hat{x} .

2. Evaluar $f_i(\hat{x}), \forall i = \{1, \dots, p\}$.

3. Actualizar los valores máximos que pueden tomar las funciones objetivo:

$$r_i = \max\{r_i, f_i(\hat{x})\} \forall i \in \{1, \dots, p\}$$

$k = k + 1$

fin

$$f'_i = f_i/r_i, \forall i \in \{1, \dots, p\}$$

Luego de aplicar el algoritmo 1 se puede implementar un método sistemático para seleccionar pesos. El método de Yoon and Hwang (1995), que puede verse como un subconjunto de métodos de clasificación, ordena las diferentes funciones objetivo por importancia. Luego, el objetivo menos importante recibe una ponderación de uno, y se asignan ponderaciones enteras con incrementos consistentes a los objetivos que son más importantes ya que no es necesario que la suma de ponderaciones sea igual a uno.

2.3.2. El método ε - restricción

Otra técnica frecuentemente usada para la resolución de problemas multiobjetivo es el método ε - restricción. Este método optimiza una de las funciones objetivo

mientras las otras se añaden al modelo como restricciones lineales acotadas por valores reales. El problema lo llamaremos *problema ε -restricción*, la siguiente es el modelo general de este método:

$$\begin{aligned} & \text{mín } f_j(x) \\ \text{Sujeto a:} & \\ & f_k(x) \leq \varepsilon_k, \quad \forall k \in \{1, \dots, p\}, k \neq j \\ & x \in \mathcal{X} \end{aligned} \tag{2.14}$$

donde $\varepsilon_k \in \mathbb{R}^+ \forall k = 1, \dots, p$ y $k \neq j$. De manera similar al método de suma ponderada cuando el problema ε -restricción tiene una solución óptima entonces se obtiene soluciones eficientes para \mathcal{PMOLP} .

TEOREMA 2.12 *Sea \hat{x} una solución óptima de problema ε -restricción para algún j . Entonces \hat{x} es débilmente eficiente*

Demostración. Suponiendo que $\hat{x} \in \mathcal{X}$ no es una solución débilmente eficiente. Entonces existe un $x \in \mathcal{X}$ tal que $f_k(x) < f_k(\hat{x}) \forall k = 1, \dots, p$. Además, se cumple que $f_k(x) < f(\hat{x}) \leq \varepsilon_k \forall k \neq j$ por lo que se puede afirmar que x es una solución factible. Como se cumple que $f_j(x) < f_j(\hat{x})$, se contradice que \hat{x} es una solución óptima. \square

Adicionalmente, el siguiente teorema permite concluir que con este método se puede obtener todas las soluciones eficientes con la elección adecuada de los valores ε_k .

TEOREMA 2.13 *La solución factible $\hat{x} \in \mathcal{X}$ es eficiente si y solo si para todo $j \in \{1, \dots, p\}$ existe un vector $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ tal que \hat{x} es una solución óptima del problema ε -restricción.*

Demostración. \implies) Supongamos que existe j tal que $\hat{x} \in \mathcal{X}$ no es una solución óptima del problema ε -restricción. Se asume que $f_k(\hat{x}) = \varepsilon_k$, así, existe $x \in \mathcal{X}$ que satisface:

$$f_j(x) < f_j(\hat{x}) \tag{2.15}$$

$$f_k(x) \leq \varepsilon_k = f_k(\hat{x}), \forall k \in \{1, \dots, p\}, k \neq j \tag{2.16}$$

La ecuación 2.16 contradice que \hat{x} sea una solución eficiente, lo que prueba el resultado.

\Leftarrow) Supongamos que $\hat{x} \in \mathcal{X}$ no es eficiente. Así, existe $j \in \{1, \dots, p\}$ y una solución factible $x \in \mathcal{X}$ tal que $f_j(x) < f_j(\hat{x})$ y $f_k(x) \leq f_k(\hat{x}), \forall k = 1, \dots, p$ con $k \neq j$. Esto contradice que \hat{x} sea una solución óptima ya que x produce valores más pequeños de la función f_j .

□

Desafortunadamente, el método no garantiza que se pueda obtener soluciones propiamente eficientes y aún más al ser las funciones objetivo restricciones es posible que sean triviales al resolver el problema. Ante este problema Ehrgott y Ruzika (2008) desarrollaron el "método mejorado ε - restricción", construido a partir de dos modificaciones de problema ε -restricción. La primera modificación al método consiste en aumentar variables de holgura s_k^+ en cada una de las restricciones, e incluirlas en la función objetivo como una suma ponderada negativa obteniendo *el problema ε -restricción variación 1*:

$$\begin{aligned} & \text{mín } f_j(x) - \sum_{k \neq j} \gamma_k s_k^+ \\ \text{Sujeto a:} & \\ & f_k(x) + s_k^+ = \varepsilon_k, \quad \forall k \in \{1, \dots, p\}, k \neq j; \quad (2.17) \\ & s_k^+ \geq 0, \quad \forall k \in \{1, \dots, p\}, k \neq j; \\ & x \in \mathcal{X} \end{aligned}$$

Al incluir las variables de holgura s_k^+ en la función objetivo se busca tener valores altos para que la función objetivo f_k tome valores más pequeños y se aleje de la constante ε_k . Ehrgott y Ruzika (2008) demostraron que las variables s_k^+ brindan la información de propiamente eficiencia de las funciones objetivo y activan todas las restricciones en las que intervienen las funciones objetivo.

La segunda modificación consiste en aumentar variables s_k^- para flexibilizar las restricciones, estas variables permitirán violar los valores ε_k obteniendo *el problema ε -restricción variación 2*:

$$\begin{aligned} & \text{mín } f_j(x) + \sum_{k \neq j} \mu_k s_k^- \\ \text{Sujeto a:} & \\ & f_k(x) - s_k^- = \varepsilon_k \quad \forall k \in \{1, \dots, p\}, k \neq j; \quad (2.18) \\ & s_k^- \geq 0 \quad \forall k \in \{1, \dots, p\}, k \neq j; \\ & x \in \mathcal{X} \end{aligned}$$

Los valores μ_k en la función objetivo penalizan la violación de las restricciones para garantizar que $f_k(x) \leq \varepsilon_k$. De igual manera a la primera modificación Ehrgott y Ruzika (2008) también muestran que una solución óptima es una solución adecuadamente eficiente.

Aunque las dos modificaciones permiten resolver el problema con soluciones propiamente eficientes, al combinarlos es posible incluir las variables de holgura y de flexibilización obteniendo soluciones propiamente eficientes. Así, se obtiene el ε - restricción mejorado:

$$\text{mín } f_j(x) - \sum_{k \neq j} \gamma_k s_k^+ + \sum_{k \neq j} \mu_k s_k^-$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} f_k(x) + s_k^+ - s_k^- &= \varepsilon_k & \forall k \in \{1, \dots, p\}, k \neq j; \\ s_k^+ &\geq 0, s_k^- = 0 & \forall k \in \{1, \dots, p\}, k \neq j; \\ x &\in \mathcal{X} \end{aligned} \tag{2.19}$$

El problema ε - restricción mejorado no está acotado cuando $\mu_k - \gamma_k < 0$, por lo cual es necesario asumir que $\mu_k - \gamma_k \geq 0$. Entonces, bajo estas condiciones, si 2.19 tiene solución óptima Ehrgott y Ruzika (2008) también demostraron que el \mathcal{PMOLP} tiene soluciones propiamente eficientes.

2.3.3. El método general de escalarización

Rastegar y Khorram (2014) desarrollaron una generalización para los métodos de escalarización a partir del método mejorado de ε - restricción propuesto por Ehrgott y Ruzika (2008). El nuevo método incorpora la suma ponderada de las funciones objetivo, la suma ponderada negativa de las variables de holgura y la suma ponderada de variables flexibilizantes. Así, se llamará *problema de escalarización generalizada*, el cual tiene la siguiente forma:

$$\text{mín } \sum_{k=1}^p \lambda_k f_k(x) - \sum_{k=1}^p \gamma_k s_k^+ + \sum_{k=1}^p \mu_k s_k^-$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} f_k(x) - s_k^+ + s_k^- &= \varepsilon_k & \forall k \in \{1, \dots, p\}, k \neq j; \\ s_k^+ &\geq 0, s_k^- \geq 0 & \forall k \in \{1, \dots, p\}, k \neq j; \\ x &\in \mathcal{X} \end{aligned} \tag{2.20}$$

Si el problema de escalarización generalizada tiene una solución óptima $(\hat{x}, \hat{s}^+, \hat{s}^-)$ Rastegar y Khorram (2014) demostraron las siguientes afirmaciones:

1. Si $\lambda + \gamma \geq 0$ o $\lambda + \mu \geq 0$ y $\hat{s}^- > 0$, entonces \hat{x} es una solución débilmente eficiente.
2. Si $\lambda + \gamma \geq 0$ o $\lambda + \mu \geq 0$ y $\hat{s}^- > 0$, y \hat{x} es única, entonces \hat{x} es una solución estrictamente eficiente.
3. Si $\lambda + \gamma > 0$ o $\lambda + \mu > 0$ y $\hat{s}^- > 0$, entonces \hat{x} es una solución eficiente.

Luego, al igual que en todos los métodos, se desea obtener soluciones propiamente eficientes. Así, para que el problema de escalarización generalizada permita obtener soluciones eficientes Rastegar y Khorram (2014) demostraron que se requiere las siguientes condiciones:

- $\lambda + \mu > 0$
- $(\hat{x}, \hat{s}^+, \hat{s}^-)$ es una solución óptima
- Existe una partición $I \cup \bar{I}$ de $\{1, \dots, p\}$ tal que $\hat{s}_i^+ = 0, \hat{s}_i^- > 0 \forall i \in I$ y $\hat{s}_i^- = 0, \hat{s}_i^+ > 0$ para todo $i \in \bar{I}$.

En la tabla 2.2 se detalla las condiciones impuestas al modelo de escalarización generalizada para obtener los métodos de solución descritos anteriormente.

Método	Condición
Suma ponderada	$\gamma = 0, \varepsilon = \infty$
ε - restricción	$\gamma = 0, \mu = 0, \alpha_k = \infty, \lambda_k = 1, \lambda_{i \neq k} = 0$
ε - restricción mejorado	$\varepsilon_k = \infty, \lambda_k = 1, \lambda_{i \neq k} = 0$

Tabla 2.2: Condiciones del método general de escalarización para llegar a otros métodos populares de escalarización

2.4. Técnicas no Escalarizantes

En los métodos descritos en la sección anterior, las soluciones eficientes son construidas a partir de la introducción del orden \leq ; sin embargo, se puede introducir otras definiciones de orden que permitan resolver un problema multiobjetivo de modo que se encuentren soluciones eficientes. A continuación se describe el método de optimización lexicográfica.

2.4.1. Optimalidad lexicográfica

El método de optimización lexicográfica permite resolver el problema multiobjetivo \mathcal{PMOLP} con la introducción del orden lexicográfico. Este orden está denotado por $<_{\text{lex}}$, así, para un par de vectores $a, b \in \mathbb{R}^p$ se tiene que $a <_{\text{lex}} b$ si $a_q < b_q$ donde $q = \min\{k : a_k \neq b_k\}$, es decir, consiste en evaluar una de las componentes del vector. Este orden a diferencia del orden " \leq " es total. Al utilizarlo para resolver un problema multiobjetivo se intercambia el operador mín por el operador lexmin, así el problema de optimalidad lexicográfica es el siguiente:

$$\begin{aligned} & \text{lexmin}(f_1(x), \dots, f_p(x)) \\ \text{Sujeto a:} & \\ & x \in \mathcal{X} \end{aligned} \tag{2.21}$$

Una solución \hat{x} del problema de optimización lexicográfica se llamará óptima lexicográfica si no existe $x \in \mathcal{X}$ tal que $f(x) <_{\text{lex}} f(\hat{x})$. Esta nueva definición permite obtener funciones eficientes como muestra el siguiente teorema:

TEOREMA 2.14 *Sea $\hat{x} \in \mathcal{X}$ tal que $f(\hat{x}) \leq f(x)$ para todo $x \in \mathcal{X}$. Entonces \hat{x} es una solución eficiente.*

Demostración. Razonando por absurdo se supone que \hat{x} no es eficiente; es decir, existe un $x \in \mathcal{X}$ tal que $f(x) \leq f(\hat{x})$. Entonces para algún $k \in \{1, \dots, p\}$ tenemos $f_k(x) < f_k(\hat{x})$. □

Para resolver el problema mediante este método se aplica el Algoritmo 2.

Algoritmo 2: Optimización Lexicográfica

Entrada: Función objetivo $f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x))$, \mathcal{X} conjunto factible

Salida : Conjunto de soluciones lexicográficamente óptimas

Inicialización: $k := 1$ y se define $\mathcal{X}_1 := \mathcal{X}$. Luego se resuelve el problema de optimización:

$$\begin{aligned} \min f_k(x) \\ x \in \mathcal{X}_k \end{aligned} \tag{2.22}$$

mientras $k \leq p$ **hacer**

1. Si 2.22 tiene una única solución óptima \hat{x}_k , Parar.
2. Si 2.22 es no acotado, Parar.
3. Si $k = p$, Parar. El conjunto de soluciones óptimas de optimización lexicográfica es:

$$\left\{ x \in \mathcal{X}_p : f_p(x) = \min_{x \in \mathcal{X}_p} f_p(x) \right\}$$

Se actualiza $\mathcal{X}_{k+1} := \{x \in \mathcal{X}_k : f_k(x) = \min_{x \in \mathcal{X}_k} f_k(x)\}$ y $k := k + 1$

fin

Capítulo 3

Modelo multiobjetivo para la asignación de servidores policiales

En este capítulo se presenta el problema multiobjetivo de asignación de servidores policiales y los principales resultados. El problema se resuelve con las técnicas de solución del capítulo 2 y se analizan los diferentes resultados.

3.1. Definición del problema

El problema de “asignación de los servidores policiales” tiene el objetivo de determinar la cantidad óptima de servidores policiales para desempeñar funciones en áreas geográficas del estado ecuatoriano llamadas subcircuitos. La asignación debe cumplir con la oferta y demanda de servidores policiales bajo las siguientes condiciones:

- Satisfacer las necesidades de seguridad de los subcircuitos.
- Cumplir con los requisitos mínimos de personal para cada subcircuito.
- El lugar de trabajo asignado a los servidores policiales debe estar cercano al lugar de residencia.
- Un servidor policial desempeña una actividad, para desempeñarla debe cumplir con los requisitos del grado y, si es requerido, la tenencia de licencia de moto o auto.
- Cumplir con el orden jerárquico de la institución.

- Respetar las restricciones legales y técnicas de la institución.

3.2. Notación

Se define el conjunto I que corresponde a los tipos de servidores policiales caracterizados por su lugar de origen, grado y la tenencia de licencia de conducir de auto y de moto. Los grados de los servidores policiales se referencia numéricamente, se define la función $g : I \rightarrow \{1, \dots, |R|\}$ que permite obtener un valor numérico asociado al orden ascendente del grado de los tipos de policía; por ejemplo los servidores policiales con grado "policía" tendrán el valor 1 mientras que los tenientes el valor 8. En la tabla 3.1 se puede observar todos los grados que puede tener un servidor policial.

Abreviatura	Grado
TNTE	Teniente
SBTE	Sub Teniente
SBOP	Suboficial Primero
SBOS	Suboficial Segundo
SGOP	Sargento Primero
SGOS	Sargento Segundo
CBOP	Cabo Primero
CBOS	Cabo Segundo
POLI	Policía

Tabla 3.1: Grados de los servidores policiales

El conjunto J representa las actividades que pueden realizar los servidores policiales en un subcircuito a asignarse. En la tabla 3.2 se considera el valor $j \in J$ para cada actividad.

Se denota por $I_j \subset I$ al subconjunto de tipos de policía que pueden realizar la actividad $j \in J$; un tipo de policía puede pertenecer a más de un conjunto I_j . Luego, para cada $i \in I$ y $j \in J$ se definen los subconjuntos $I_j(i) := \{\hat{i} \in I_j : g(\hat{i}) > g(i)\}$ que corresponden con los tipos de policía que pueden realizar la actividad j y que tienen grado mayor a los servidores de policía del tipo $i \in I$. En la tabla 3.3 se tienen los requisitos actuales que debe cumplir los servidores policiales para desempeñar una actividad.

Actividad	j
Polco	1
Atención ciudadana	2
Auxilio y respuesta (Conductor)	3
Auxilio y respuesta (Jefe de patrulla)	4
Reacción y disuasión	5
Motorizado	6
Apoyo operativo	7
Jefe de subcircuito	8

Tabla 3.2: Actividades servidores policiales en el conjunto J

Actividad	Requerimiento
Polco	Grado entre policía y sargento primero
Atención ciudadana	Grado de policía o cabo segundo
Apoyo operativo	Cualquier grado
Auxilio y respuesta (Conductor)	Grado entre policía y sargento segundo Licencia de vehículo
Auxilio y respuesta (Jefe de patrulla)	Grado entre cabo segundo y teniente Grado mayor al conductor
Reacción y disuasión	Grado de policía a sargento segundo
Motorizado	Grado entre policía a sargento primero Licencia de moto
Jefe de subcircuito	Grado entre sargento primero a teniente Grado mayor a todos los servidores policiales

Tabla 3.3: Requerimientos de los servidores policiales para desempeñar una actividad

Las unidades territoriales o subcircuitos donde los servidores policiales serán asignados a trabajar, forman el conjunto K . Sobre estos se define los subconjuntos K_1 y K_2 con $K_1 \cap K_2 = \emptyset$, estos conjuntos contienen a los subcircuitos que cuentan con UPC y los que no poseen UPC, respectivamente.

Tanto los subcircuitos como los tipos de servidores policiales pertenecen a una determinada zona. Para los primeros, se define la función $z_K : K \rightarrow \{1, \dots, 9\}$ que retorna la zona administrativa en la que se ubica un subcircuito $k \in K$. Para los segundos, se define la función $z_I : I \rightarrow \{1, \dots, 9\}$ que permite obtener la zona en la que se encuentra el origen o la vivienda de los servidores policiales de tipo $i \in I$. A partir de estas funciones se definen los subconjuntos $K(i) = \{k : z_K(k) \neq z_I(i)\}$ que representan los subcircuitos que no pertenecen a la zona en las que tienen su residencia los servidores policiales de tipo $i \in I$.

Ahora, se definen los parámetros del modelo. Sea a_i la cantidad de servidores policiales u oferta por cada tipo $i \in I$. Se denota como b_{jk} la demanda de servidores policiales requerida para realizar una actividad $j \in J$ en un subcircuito $k \in K$. La demanda es la cota máxima de servidores policiales que pueden ser asignados por subcircuito y actividad. Del mismo modo la cota inferior se nota por c_j y representa la dotación mínima de servidores policiales por actividad con la que puede operar una UPC, estos valores son válidos para todo $k \in K$.

Los parámetros d_{ik} indican la distancia del lugar de residencia de los servidores policiales de tipo $i \in I$ al subcircuito $k \in K$. Asimismo, se define como ρ_k el índice de peligrosidad de un subcircuito $k \in K$. La distribución de los subcircuitos por zona se puede ver en la imagen 3.1

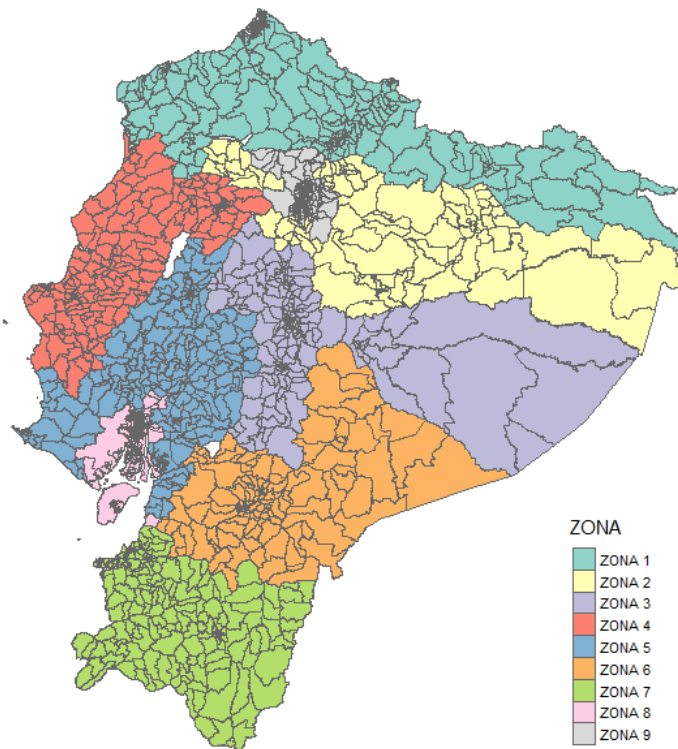


Figura 3.1: Subcircuitos del Ecuador por zona administrativa

3.3. Definición del modelo de programación entera multiobjetivo

Se definen las variables $x_{ijk} \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ que corresponden a la cantidad de servidores policiales del tipo $i \in I$ que realizarán la actividad $j \in J$ en el subcircuito $k \in K$. Las variables $y_{ijk} \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$, representan la cantidad faltante de servidores

policiales del tipo $i \in I$ para realizar la actividad $j \in J$ en el subcircuito $k \in K$. Las variables β_i representan la cantidad de servidores policiales del tipo $i \in I$ que trabajarán en una zona diferente a la zona administrativa donde está su residencia. Para optimizar la asignación de los servidores policiales se define el vector $(h_{ijk}^1, \dots, h_{ijk}^p)$ de p indicadores de la eficiencia de los tipos de servidores policiales al ser asignados a una actividad $j \in J$ en un subcircuito $k \in K$. Los indicadores evalúan aspectos necesarios para mejorar el desempeño de los servidores policiales mencionados en el capítulo 1 que se describirán adelante con la solución del modelo. Así, el modelo general para la asignación multiobjetivo (MGAM) de servidores policiales es la siguiente:

$$\text{máx} \left[\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} h_{ijk}^1 x_{ijk}, \dots, \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} h_{ijk}^{p-2} x_{ijk}, - \sum_{i \in I} h_{ijk}^{p-1} \beta_i, - \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} h_{ijk}^p y_{ijk} \right] \quad (3.1)$$

Sujeto a:

$$\sum_{j \in J} \sum_{k \in K} x_{ijk} \leq a_i, \quad \forall i \in I, \quad (3.2)$$

$$\sum_{i \in I_j} (x_{ijk} + y_{ijk}) = b_{jk}, \quad \forall j \in J, k \in K, \quad (3.3)$$

$$\sum_{k \in K(i)} \sum_{j \in J} x_{ijk} = \beta_i, \quad \forall i \in I, \quad (3.4)$$

$$x_{i3k} + y_{i3k} \leq \sum_{l \in I_4(i)} (x_{l4k} + y_{l4k}), \quad \forall i \in I_3, \forall k \in K, \quad (3.5)$$

$$\sum_{i \in I_3} x_{i3k} = \sum_{i \in I_4} x_{i4k} + 1, \quad \forall k \in K, \quad (3.6)$$

$$\sum_{\substack{i \in I_8: \\ g(i)=g}} x_{i8k} \leq 1 - \sum_{j \in J - \{8\}} \sum_{\substack{i \in I_j: \\ g(i) > g}} x_{ijk}, \quad \forall g \in \{3, \dots, |R| - 1\}, k \in K, \quad (3.7)$$

$$\sum_{i \in I_8} x_{i8k} = 1, \quad \forall k \in K, \quad (3.8)$$

$$\sum_{i \in I_2} x_{i2k} \geq c_2, \quad \forall k \in K_1 \quad (3.9)$$

$$\sum_{i \in I_2} x_{i2k} = 0, \quad \forall k \in K_2, \quad (3.10)$$

$$\sum_{i \in I_j} x_{ijk} \geq c_j, \quad \forall k \in K, \forall j \in J - \{2\}, \quad (3.11)$$

$$x_{ijk}, y_{ijk} \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}, \quad \forall i \in I, j \in J, k \in K, \quad (3.12)$$

$$\beta_i \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}, \quad \forall i \in I. \quad (3.13)$$

La ecuación 3.1 maximiza el vector de p funciones objetivo. Las primeras $p - 2$ funciones objetivo maximizan la eficiencia de los servidores policiales al ser asignados. Los parámetros evaluarán aspectos asociados a cada dimensión para que los servidores policiales sean asignados en la actividad que mejor pueden desempeñar en la ubicación que ofrezca mayores beneficios a todas las dimensiones. La siguiente función objetivo $p - 1$ penaliza la cantidad de servidores policiales cuya zona de residencia es diferente a la zona donde son asignados; finalmente, la función objetivo p penaliza la cantidad faltante de servidores policiales ponderado por un indicador para una actividad $j \in J$ en un subcircuito $k \in K$. La eficiencia q

Las primeras restricciones 3.2 garantizan que para cada tipo $i \in I$, el personal total asignado a todas las tareas en todos los subcircuitos no puede exceder la disponibilidad a_i . Asimismo, las restricciones 3.3 son de equilibrio y establecen que el número de servidores policiales de tipo $i \in I$ más una eventual falta de servidores policiales para cada subcircuito $k \in K$ es igual a la demanda de personal necesaria para realizar la actividad j en dicha unidad territorial. Luego, las restricciones 3.4 cuentan la cantidad de cada tipo de policía que realiza funciones fuera de la zona a la que pertenece su hogar. El conjunto de restricciones 3.5 y 3.6 se refieren a las condiciones de jefes y conductores de patrullas ($j = 3, j = 5$), las primeras garantizan que los conductores de patrulla tendrán grado menor que los jefes de patrulla, y las segundas que la cantidad de jefes de patrulla es igual a la cantidad de conductores de patrulla más uno, ya que los jefes de subcircuito también realizan la actividad de jefe de patrulla.

Posteriormente, las restricciones 3.7 y 3.8 se refieren a la actividad de jefe de subcircuito, las primeras exigen que los servidores policiales que trabajen en el subcircuito tengan grado menor o igual al jefe de subcircuito, mientras que las segundas imponen que en cada subcircuito se asigna exactamente un jefe de subcircuito. La actividad de atención ciudadana solo se brinda en los subcircuitos $k \in K_1$ que son aquellos que cuentan con UPC, esta afirmación se establece con las restricciones 3.10 donde se asignan un mínimo de servidores c_2 , las restricciones 3.9 indican que no se necesitan servidores policiales en dicha actividad por la ausencia de infraestructura para subcircuitos $k \in K_2$. Finalmente, las restricciones de la ecuación 3.11 garantiza que se suministre la cantidad mínima de servidores policiales que realizarán una actividad $j \in J$ en un subcircuito $k \in K$, excepto la actividad de atención ciudadana ($j = 2$).

3.4. Metodología para la solución del problema multi-objetivo MGAM

En esta sección se describe las funciones objetivo y las técnicas aplicadas para la solución del modelo multiobjetivo. El primer modelo toma las funciones objetivo consideradas por Salazar et al. (2019), se llamará modelo original de asignación (MOA). Para el segundo modelo se propone nuevas funciones objetivo que entren en conflicto y permitan comparar las asignaciones. En el desarrollo de esta sección las restricciones del modelo MGAM 3.2 a 3.13 se notarán como $x \in \mathcal{X}$

3.4.1. Modelo original de asignación (MOA)

El modelo diseñado por Salazar et al. (2019) tiene las mismas restricciones que el modelo MGAM, y es el siguiente:

$$\begin{aligned} \text{máx} \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} h_{ijk}^1 x_{ijk} + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} \rho_k x_{ijk} - \lambda_1 \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} y_{ijk} - \lambda_2 \sum_{i \in I} \beta_i \\ \text{Sujeto a:} \\ x \in \mathcal{X} \end{aligned} \tag{3.14}$$

Donde, $h_{ijk}^1 = \left[\alpha \left(1 - \frac{d_{ik}}{\max d_{ik}} \right) + (1 - \alpha) \left(\frac{g(i)}{|R|-1} \right) \right]$ es una combinación convexa tal que el primer término se relaciona con la cercanía entre el domicilio de un policía de tipo i y el subcircuito k y el segundo, con la experiencia que otorga el rango del policía de tipo i . El parámetro $\alpha \in [0, 1]$ es un peso para establecer la prioridad entre los términos anteriores.

La función objetivo en 3.14 tiene el propósito de maximizar la eficiencia global de la dotación de personal policial. Está segmentado en cuatro componentes: el desempeño de los servidores policiales de dotación a los subcircuitos, la preferencia de asignar más personal a los subcircuitos más peligrosos según su puntaje, una penalización por la incomodidad que les produce cada vez que son asignados a una zona distinta de su zona de residencia, y una penalización por no atender la demanda total. Los valores λ_1 y λ_2 son números positivos, donde $\lambda_2 > \lambda_1$ indica que es preferible mover servidores policiales entre zonas que no disponen de personal para las funciones policiales.

El modelo original 3.14 se puede descomponer en cuatro funciones objetivo denotadas por el vector $(f_1^{MOA}, \dots, f_4^{MOA})$ y definidas de la siguiente forma:

$$f_1^{MOA} = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} \left[\alpha \left(1 - \frac{d_{ik}}{\max d_{ik}} \right) + (1 - \alpha) \left(\frac{g(i)}{|R| - 1} \right) \right] x_{ijk}, \quad (3.15)$$

$$f_2^{MOA} = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} \rho_k x_{ijk}, \quad (3.16)$$

$$f_3^{MOA} = - \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} y_{ijk} \quad (3.17)$$

$$f_4^{MOA} = - \sum_{i \in I} \beta_i \quad (3.18)$$

Así, la versión multiobjetivo del modelo 3.14 será la siguiente:

$$\begin{aligned} & \text{máx}(f_1^{MOA}, f_2^{MOA}, f_3^{MOA}, f_4^{MOA}) \\ & \text{Sujeto a:} \\ & x \in \mathcal{X} \end{aligned} \quad (3.19)$$

El mismo se llamará modelo original de asignación multiobjetivo (MOAM). Se puede notar que el modelo MOA es un caso particular de la técnica de la suma ponderada aplicada al modelo MOAM, donde se considera el vector $(1, 1, -\lambda_1, -\lambda_2)$ como ponderaciones de las funciones objetivo.

Las funciones objetivo de MOAM evalúan criterios importantes en la asignación, las mismas que entran en conflicto; entonces se puede aplicar técnicas multiobjetivo para resolver el problema. En Salazar et al. (2019) se encontró soluciones para el modelo MOA, entonces bajo las hipótesis del teorema 2.10 se puede concluir que su versión multiobjetivo MOAM tiene al menos una solución propiamente eficiente. Para resolver el modelo MOA por técnicas de solución multiobjetivo se aplicó dos técnicas de solución multiobjetivo: suma ponderada y optimización lexicográfica.

Para aplicar la técnica de suma ponderada se aplicará el algoritmo 1. Se obtienen los valores máximos para cada función objetivo que pueden tomar en \mathcal{X} , estos se denotarán como r_i^{MOA} para $i \in \{1, \dots, 4\}$. Entonces, se redefinen las funciones objetivo:

$$\bar{f}_i^{MOA} = \frac{f_i^{MOA}}{r_i} \quad i \in \{1, \dots, 4\} \quad (3.20)$$

Así, el modelo a resolver es el siguiente:

$$\text{máx} \sum_{i=1}^4 w_i \bar{f}_i^{MOA} \quad (3.21)$$

Sujeto a:

$$x \in \mathcal{X},$$

Donde w_i son los pesos asociados a la función objetivo i . Los pesos toman valores enteros en orden descendente, así la función objetivo es la siguiente: $4\bar{f}_1^{MOA} + 3\bar{f}_2^{MOA} + 2\bar{f}_3^{MOA} + \bar{f}_4^{MOA}$. Este modelo tiene ponderaciones que representan las preferencias en las funciones objetivo, toman valores enteros ya que no es necesario que los pesos sumen uno (Marler y Arora, 2009). Las preferencias consideradas tienen un propósito similar al modelo MOA, sin embargo, en la siguiente sección se observará que se obtienen diferentes soluciones.

Por otro lado, para resolver el modelo por la técnica de optimalidad lexicográfica se aplica el algoritmo 2. El principal insumo es el orden de las funciones objetivo, se considera el siguiente: $f_3^{MOA}, f_4^{MOA}, f_1^{MOA}$ y f_2^{MOA} . Como se describió en 2.4 este método optimiza sobre las soluciones factibles para $x \in \mathcal{X}$ luego de aplicar una de las funciones objetivo, entonces es importante que se optimice primero las funciones objetivo f_3^{MOA}, f_4^{MOA} para obtener valores pequeños de las mismas; de no aplicarlas primero las soluciones podrían tener faltante y abundantes cambios de zona. Luego se optimiza las funciones objetivo f_1^{MOA}, f_2^{MOA} , estas consideran la preferencia del método anterior.

3.4.2. Modelo multiobjetivo principal (MMP)

A partir del modelo MOAM se construye un nuevo modelo que permite mejorar la asignación con el cambio de las funciones objetivo. Para introducir este modelo se analizará antes los criterios a mejorar a partir de los siguientes dos ejemplos:

Ejemplo 3.1. *Supongamos que se asigna 4 servidores policiales a las actividades de jefe de subcircuito y apoyo operativo, 2 servidores tienen el grado de teniente y 2 el grado de suboficial primero. Los servidores policiales se asignarán a 2 subcircuitos pertenecientes a una misma zona, los mismos se encuentran a una distancia d de todos los servidores policiales. El primer subcircuito tiene un nivel de peligrosidad con valor ρ_1 y el segundo un valor ρ_2 donde $\rho_1 > \rho_2$.*

Bajo estas condiciones se obtienen los siguientes valores de las funciones objetivo:

$$\begin{aligned} f_1^{MOA} &= 4(1 - \alpha), \\ f_2^{MOA} &= 3\rho_1 + \rho_2, \\ f_3^{MOA} &= 0 \\ f_4^{MOA} &= 0 \end{aligned}$$

La solución al problema de asignación se muestra en la tabla 3.4. Se evidencia que la mayor cantidad de servidores policiales fueron asignados al subcircuito 1 que tiene un nivel de peligrosidad mayor. Por otro lado, si consideramos $\rho_1 - \rho_2 < \varepsilon$, es decir, si los subcircuitos tienen un nivel de delincuencia similar es natural afirmar que deberían tener una asignación similar. Específicamente en la asignación sería mejor si el modelo asigna un servidor policial adicional al segundo subcircuito, preferentemente el servidor policial con grado teniente. Si tomamos $\rho_1 = 0.9$ y $\rho_2 = 0.89$ resulta más evidente que no se debería inflar la asignación del primer subcircuito y es necesario un equilibrio.

Actividad	Subcircuito1	Subcircuito 2
Jefe de subcircuito	Teniente	Suboficial primero
Apoyo Operativo	Teniente Suboficial primero	

Tabla 3.4: Asignación de servidores policiales para el ejemplo 3.1

Ejemplo 3.2. Consideramos las mismas hipótesis que el ejemplo 3.1 pero el nivel de peligrosidad de los subcircuitos será el mismo $\rho_1 = \rho_2$.

Bajo las condiciones mencionadas, el modelo tiene múltiples soluciones, nos concentraremos en dos asignaciones factibles mostradas en las tablas 3.5 y 3.6. Para cualquiera de las soluciones factibles se obtienen los siguientes valores de las funciones objetivo:

$$\begin{aligned} f_1^{MOA} &= 2(1 - \alpha) \left(\frac{16}{8} \right), \\ f_2^{MOA} &= 2\rho_1 + 2\rho_2 = 4\rho_1, \\ f_3^{MOA} &= 0 \\ f_4^{MOA} &= 0 \end{aligned}$$

La primera solución tiene una asignación idéntica para los dos subcircuitos, mientras que la segunda asigna todos los servidores de grado mayor (teniente) en uno de los subcircuitos.

Entonces, en el modelo original no se garantiza una equitativa distribución de los grados, se requiere que los servidores policiales con mayor experiencia realicen cargos más altos. Además, tomando en cuenta que los subcircuitos son similares, se debería obtener como única solución la primera mencionada en la tabla 3.5.

Actividad	Subcircuito 1	Subcircuito 2
Jefe de subcircuito	Teniente	Teniente
Apoyo Operativo	Suboficial primero	Suboficial primero

Tabla 3.5: Asignación 1 de servidores policiales para el ejemplo 3.2

Actividad	Subcircuito1	Subcircuito 2
Jefe de subcircuito	Teniente	Suboficial primero
Apoyo Operativo	Teniente	Suboficial primero

Tabla 3.6: Asignación 2 de servidores policiales para el ejemplo 3.2

Con los ejemplos expuestos se concluye que el modelo MOA no garantiza una asignación similar u homogénea cuando los subcircuitos tienen niveles de peligrosidad similares y se acumulan servidores policiales en los subcircuitos con índice de peligrosidad mayor. De la misma forma se requiere una valoración de la experiencia por actividad para que los servidores policiales con grados mayores desempeñen cargos de mayor complejidad.

Con las observaciones encontradas al modelo MOA, se define el modelo multiobjetivo principal (MMP) con las mismas restricciones $x \in \mathcal{X}$ y las siguientes funciones objetivo:

$$f_1^{MMP} = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} \left(1 - \frac{d_{ik}}{\max d_{ik}} \right) x_{ijk}, \quad (3.22)$$

$$f_2^{MMP} = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} \left(\frac{g(i)}{|R| - 1} \right) (1 + \gamma \mathbb{1}_{j \in (4,8)}) x_{ijk}, \quad (3.23)$$

$$f_3^{MMP} = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} \rho_k x_{ijk}, \quad (3.24)$$

$$f_4^{MMP} = - \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} (1 - \rho_k) y_{ijk}, \quad (3.25)$$

$$f_5^{MMP} = - \sum_{i \in I} \beta_i \quad (3.26)$$

En el modelo MMP las funciones objetivo se interpretan de la siguiente forma: f_1^{MMP} maximiza la asignación de a los servidores policiales al subcircuito más cer-

cano de su lugar de origen. La función f_2^{MMP} maximiza la suma de servidores policiales por el valor de su grado dando un peso adicional de valor γ para los tipos de servidores policiales que desempeñen las actividades de jefe de patrulla y jefe de subcircuito. Luego, f_3^{MMP} maximiza la presencia policial en subcircuitos con un índice de peligrosidad alto. Finalmente, f_4^{MMP} minimiza el faltante en subcircuitos con un índice de peligrosidad menor.

En la función objetivo f_2^{MMP} el valor γ que pondera las actividades de jefes de subcircuito y jefes de patrulla permite priorizar a los servidores policiales de mayor grado para que las desempeñen, entonces, se valora más la experiencia en estas actividades. Las funciones objetivo f_3^{MMP} y f_4^{MMP} son opuestas y permiten realizar una repartición de servidores policiales más equitativa. El modelo decide entre incrementar la presencia policial en subcircuito peligrosos donde la demanda de servidores policiales es mayor o satisfacer la demanda de un subcircuito poco peligroso que requiere menos personal.

De forma similar se describe las técnicas de solución multiobjetivo. Para el método de suma ponderada se aplica el modelo de suma ponderada aplicando el algoritmo 1, de forma análoga se denotarán como r_i^{MMP} para $i \in \{1, \dots, 4\}$ los valores máximos que tomará la función objetivo i en \mathcal{X} . Entonces, se redefinen las funciones objetivo:

$$\bar{f}_i^{MMP} = \frac{f_i^{MMP}}{r_i} \quad i \in \{1, \dots, 5\} \quad (3.27)$$

Así, el modelo a resolver es el siguiente:

$$\begin{aligned} & \text{máx} \sum_{i=1}^5 w_i \bar{f}_i^{MMP} \\ & \text{Sujeto a:} \\ & \quad x \in \mathcal{X}, \end{aligned} \quad (3.28)$$

La ecuación 3.28 toma como valores escalares números enteros donde se pondera primero las funciones objetivo relacionadas a la eficiencia. Las preferencias de las funciones objetivo son similares a las tomadas para el modelo MOAM en 3.3.1; la función objetivo tiene la siguiente forma: $5f_1^{MMP} + 4f_2^{MMP} + 3f_3^{MMP} + 2f_4^{MMP} + f_5^{MMP}$.

A partir del modelo de suma ponderada 3.28 se desarrolla el método general de escalarización. Con este método se propone cotas a las funciones objetivo junto con

la ponderación de los objetivos. Así, el problema a resolver es el siguiente:

$$\text{máx} \left[\sum_{i=1}^3 w_i \cdot \bar{f}_i^{MMP} + \sum_{i=1}^2 s_i^+ - \sum_{i=1}^2 s_i^- \right] \quad (3.29)$$

$$\text{Sujeto a:} \quad (3.30)$$

$$f_4^{MMP} + s_1^+ - s_1^- = (\delta_1 + 1) | \text{mín } f_4^{MMP} |, \quad (3.31)$$

$$f_5^{MMP} + s_2^+ - s_2^- = (\delta_2 + 1) | \text{mín } f_5^{MMP} |, \quad (3.32)$$

$$x \in \mathcal{X} \quad (3.33)$$

Donde, $\delta_i < 1$. Los parámetros δ_i representarán el porcentaje máximo deseado que la solución se diferencia de los valores críticos relacionados a la cantidad de servidores policiales que se cambian de zona y el faltante de servidores policiales. Se incluyó las variables enteras s_i^+ y s_i^- como variables de holgura y flexibilizantes respectivamente, que permiten a las funciones objetivo degradar a la función objetivo i pero si el modelo decide superar estas cotas lo puede hacer y se penaliza en la función objetivo.

Para implementar el método de optimización lexicográfica se sigue el siguiente orden: f_4^{MMP} , f_5^{MMP} , f_1^{MMP} , f_2^{MMP} y f_3^{MMP} . Se optimizan primero las funciones f_4^{MMP} y f_5^{MMP} para garantizar que todo el personal sea asignado en algún subcircuito y reducir los cambios de zona de trabajo, respectivamente. A diferencia del modelo MOAM en esta ocasión se prioriza la dotación de personal en subcircuitos poco peligrosos.

3.5. Solución del problema multiobjetivo

Los resultados presentados en esta sección se han obtenido usando datos reales de la Policía Nacional. Durante un año se requieren realizar dos asignaciones por lo que se consideraron dos instancias para comparar las soluciones. Las instancias tienen fecha de mayo 2019 y septiembre 2019, la información de cada instancia como el total de servidores policiales a ser asignado y la cantidad de tipos de policía que formarán los elementos del conjunto I se tiene en la tabla 3.7.

El conjunto de unidades geográficas consideradas como lugar origen de los servidores policiales Q se forma por las cabeceras cantonales de las provincias en las que nacieron los servidores policiales.

Instancia	Servidores policiales	Tipos de servidores policiales
Mayo	17674	593
Septiembre	18575	603

Tabla 3.7: Cantidad de servidores y tipos de policía por instancia

Los parámetros (c_1, \dots, c_8) que corresponden a la cantidad mínima de servidores policiales por actividad o mínima asignación requerida para ambas instancias se muestra en la tabla 3.8. La instancia de septiembre de 2019 tiene la característica de tener menor cantidad de servidores policiales que pueden desempeñar la actividad de motorizados.

Actividad	Mínima Asignación Mayo	Mínima Asignación Septiembre
Polco	0	0
Atención Ciudadana	2	2
Auxilio y Respuesta (Conductor)	2	2
Auxilio y Respuesta (Jefe de patrulla)	1	1
Reacción y Disuasión	0	0
Motociclistas	2	1
Apoyo Operativo	0	0
Jefe de Subcircuito	1	1

Tabla 3.8: Dotación mínima de servidores policiales por actividad e instancia

Bajo la distribución territorial actual el conjunto K está formado por 1864 subcircuitos, donde $|K_2| = 454$ son los subcircuitos que no disponen de UPC.

Se contó con información nacional de las bases: auxilios ECU911, delitos y homicidios, botones de seguridad, y detenidos por UPCs. ECU911 se refiere a las llamadas al número de emergencia 911. Botones de seguridad son las emergencias solicitadas por los botones de seguridad, los mismos son un dispositivo que genera comunicación directa del ciudadano con la UPC del sector de su residencia.

La información mencionada permite primero obtener un índice para medir la peligrosidad en los subcircuitos a nivel nacional. Para obtenerlo se aplica una combinación convexa con la siguiente formula:

$$I = \alpha_1 \text{emergencias} + \alpha_2 \text{delitos\&homicidios} + \alpha_3 \text{detenidos} \quad (3.34)$$

Donde *emergencias* es la cantidad de llamadas de emergencia solicitadas por los canales del ECU911 y botones de seguridad. Las ponderaciones tomadas son $\alpha_1 = 0.4$, $\alpha_2 = 0.3$, $\alpha_3 = 0.3$. El índice de peligrosidad para los subcircuitos del Ecuador

se ilustra en la figura 3.2. La escala de colores está dividida por 5 cuantiles, se puede notar que el 80 % de los subcircuitos tienen un índice inferior a 0.2.

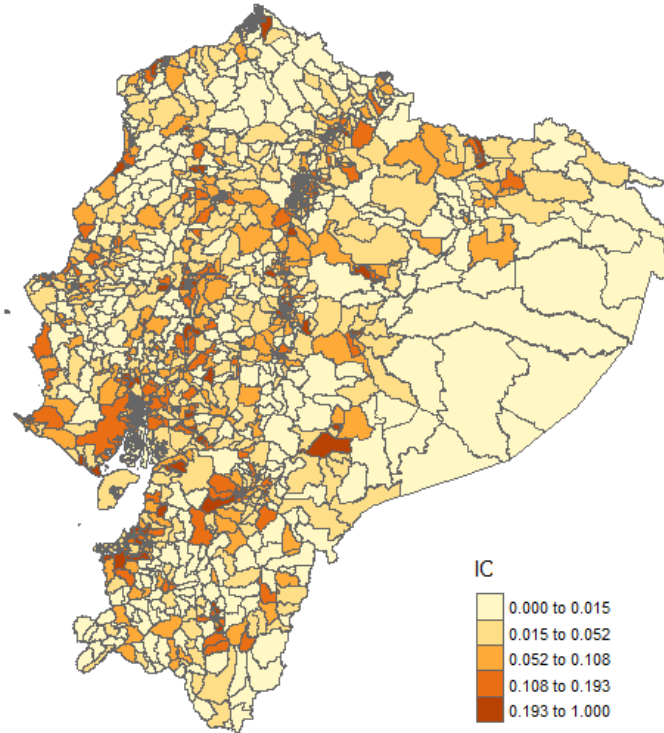


Figura 3.2: Índice de peligrosidad de los subcircuitos del Ecuador

Los parámetros de demanda b_{jk} para $j \in J$, $k \in K$ fueron calculados a partir de la metodología aplicada en Edleston (2010) en la que se estima la cantidad de servidores policiales a partir del tiempo aproximado por actividad. Para el problema actual la Policía Nacional estimó la cantidad de tiempo aproximado que toma a un servidor policial atender situaciones como: una llamada de emergencia, un delito, un homicidio y arrestar a un individuo. Estas situaciones se presentan en las actividades que realizan los servidores policiales y permiten obtener una aproximación a la cantidad requerida por actividad. Así, Policía Nacional propuso que la demanda de las actividades de patrullaje se relaciona con la cantidad de emergencias solicitas al ECU911 y botones de seguridad. La actividad de reacción y disuasión relacionada a delitos y homicidios mientras que apoyo operativo a procedimientos con detenidos. El resto de actividades tienen una demanda establecida por la actividad que desempeñan: polco (1), atención ciudadana (3), apoyo operativo (2) y jefe de subcircuito (1). En la tabla 3.9 se muestra la distribución de la demanda por actividad.

Actividad	Demanda
Polco	1864
Atención ciudadana	4233
Apoyo operativo	1640
Auxilio y respuesta (Conductor)	4169
Auxilio y respuesta (Jefe de patrulla)	2305
Reacción y disuasión	2307
Motorizado	3748
Jefe de subcircuito	1864
Total	22130

Tabla 3.9: Demanda de servidores policiales por actividad

En la descripción de los modelos se plantearon valores fijos considerados como pesos. Para el modelo MOA se toma $\alpha = 0.3$, $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = \lambda_1 + 0.1$. Para el modelo de escalarización generalizada de MMP se usa $\delta_i = 0.1$, $i = 1, 2$, con el modelo se aspira que los cambios de zona no superen en 10 % a la cantidad mínima factible.

Los modelos multiobjetivo fueron implementados en Python y se probaron en una computadora AMD Ryzen 5 4500U with Radeon Graphics - con 20 GB de Ram. Se resolvió los problemas con el solver comercial Gurobi 9.0.2 (Gurobi Optimization, 2020). En el anexo 1 se tiene el código usado para resolver los modelos propuestos.

3.5.1. Solución modelo original multiobjetivo (MOAM)

Para comparar las soluciones y como insumo para el modelo de suma ponderada, en las tablas 3.10 y 3.11 se presenta la distribución de las funciones objetivo con los valores de su máximo, mínimo y la diferencia que pueden tomar para las instancias consideradas. Los valores fueron calculados al resolver el modelo hasta la optimalidad con cada una de las funciones objetivo y evaluando en las otras funciones los resultados obtenidos.

Siguiendo la metodología descrita se procede a resolver los modelos para las instancias planteadas. En la tabla 3.12 se tiene los tiempos de ejecución en segundos para cada instancia y modelo, los modelos se resolvieron hasta la optimalidad. Se evidencia que el modelo original es aquel con menor tiempo de ejecución, luego se tiene la suma ponderada y el método de optimalidad lexicográfica el mayor tiempo. En general los métodos multiobjetivo tomaron más tiempo de ejecución que el mo-

Función Objetivo	Valor Mínimo	Valor Máximo	Diferencia
f_1^{MOA}	7038.39598	8056.233963	1017.837983
f_2^{MOA}	1874.21006	2479.577355	605.3672946
f_3^{MOA}	4456	5948	1492
f_4^{MOA}	1999	15496	13497

Tabla 3.10: Valores de las funciones objetivo para la instancia mayo del 2019 del modelo MOA

Función Objetivo	Valor Mínimo	Valor Máximo	Diferencia
f_1^{MOA}	6423.0283	8209.997	1786.968
f_2^{MOA}	1723.68521	2747.882	1024.197
f_3^{MOA}	-7430	-3555	3875
f_4^{MOA}	-16301	-744	15557

Tabla 3.11: Distribución de los valores de las funciones objetivo para la instancia septiembre del 2019 del modelo MOA

delo original. El método de optimalidad lexicográfica triplica a los otros métodos ya que resuelve un nuevo modelo en cada instancia del algoritmo. Considerando que la asignación se realiza dos veces al año se puede afirmar que todos los tiempos son razonables para resolver el problema.

Base de datos	Modelo Original	Suma Ponderada	Optimalidad Lexicográfica
Mayo 2019	2116.25	2397.36	8539.05
Septiembre 2019	1547.31	2376.05	9868.85

Tabla 3.12: Tiempo de ejecución de los modelos en segundos

En las tablas 3.13 y 3.14 se tiene el resumen de los valores para cada función objetivo obtenida por modelo e instancia respectivamente.

Función Objetivo	Modelo Original	Suma Ponderada	Optimalidad Lexicográfica
f_1^{MOA}	7898.453	7899.183	7933.825
f_2^{MOA}	2363.083	2433.916	2179.388
f_3^{MOA}	4456	4456	4456
f_4^{MOA}	1999	2160	1999

Tabla 3.13: Valores funciones objetivo para la solución del modelo MOA para la instancia mayo

Función Objetivo	Modelo Original	Suma Ponderada	Optimalidad Lexicográfica
f_1^{MOA}	8033.775	7928.39	8060.199
f_2^{MOA}	2644.444	2559.767	2391.5159
f_3^{MOA}	3555	3917	3555
f_4^{MOA}	1222	817	1222

Tabla 3.14: Valores funciones objetivo para la solución del modelo MOA para la instancia septiembre

Comenzaremos analizando la instancia de mayo. Comparando los modelos de suma ponderada y modelo original se tienen los mismos valores para f_3^{MOA} ; es decir, se asignaron los valores más pequeños de faltante que admite la instancia. Las funciones objetivo f_1^{MOA} y f_2^{MOA} del modelo de suma ponderada tienen valores mayores al modelo original, entonces el modelo de suma ponderada incrementó valores de eficiencia pero a costa de incrementar los cambios de zona relacionados a la función objetivo f_4^{MOA} que subieron de 1999 a 2160.

El modelo de optimalidad lexicográfica y el modelo original coinciden sus valores para las funciones objetivo f_3^{MOA} y f_4^{MOA} , las funciones toman los valores más pequeños posibles en la instancia. Luego, se puede notar que el modelo de optimalidad lexicográfica tiene un valor mayor para f_1^{MOA} , esto tiene sentido con el orden de optimización mencionado en la subsección 3.3.2.

En cuanto a la instancia de septiembre, se tiene valores diferentes entre el modelo original y suma ponderada para las 4 funciones objetivo consideradas. La solución del modelo de suma ponderada aumentó f_3^{MOA} por lo que el faltante es superior al mínimo; sin embargo, se redujo significativamente f_4^{MOA} que son los servidores policiales que se cambiaron de zona; si el modelo asignase a todos los servidores policiales, la función objetivo f_3^{MOA} se reduciría en 362 mientras que f_4^{MOA} incrementaría en 405. Esta solución permite evidenciar como el modelo multiobjetivo compara entre funciones objetivo y no permite que se degrade una función más que otra. Sin embargo, es claro que se tiene que asignar a todos los servidores policiales y es necesario incluir como restricción al modelo por suma ponderada; si no se asignan todos los servidores policiales las funciones objetivo f_1^{MOA} y f_2^{MOA} toman valores inferiores al modelo original.

La solución por el modelo de optimalidad lexicográfica es similar a la instancia de mayo. Las funciones objetivo f_3^{MOA} y f_4^{MOA} toman los valores más pequeños

mientras que f_1^{MOA} es mayor a los otros modelos.

En ambas instancias se pudo notar que el modelo original y el modelo de optimalidad lexicográfica generan el menor faltante posible y cambios de zona. En cambio el modelo de suma ponderada compara las funciones objetivo para obtener mayor eficiencia en al menos una función objetivo.

Ahora, para analizar y comparar a mayor nivel las soluciones se toma la instancia de mayo y se detallará la asignación a nivel de subcircuito. Se obtuvieron diferentes distribuciones en la cantidad de servidores policiales para cada subcircuito, en la tabla 3.15 se puede notar que la asignación para los tres modelos va de 7 a 35 servidores policiales por subcircuito. Las asignaciones más frecuentes son 7 o 9 servidores policiales, para el modelo original el 83.3% de los subcircuitos tienen dichas distribuciones, mientras que el modelo de suma ponderada y optimalidad lexicográfica el porcentaje es de 85.2% y 77.5%, respectivamente.

Dado que que el índice de peligrosidad mostrado en la figura 3.2 evidencia que el 80% de los subcircuitos tienen una pequeña dispersión y que es inferior al 0.2, entonces es coherente que la asignación más frecuente sea el valor de 9 para todos los modelos.

En la tabla 3.16 se puede observar la distribución de servidores policiales y su faltante por actividad. Se destaca que el modelo de optimización lexicográfica para las actividades de conductor de patrulla (3) y jefe de patrulla (4) el faltante de servidores policiales es aproximadamente del doble a los otros modelos; esto se debe a que el modelo prioriza subcircuitos menos peligrosos, la relación entre los grados y la distancia al lugar de origen.

Cantidad Servidores Policiales	Modelo Original	Suma Ponderada	Optimalidad Lexicográfica
7	395	398	344
8	0	0	20
9	1158	1191	1101
10	4	4	6
11	9	9	44
12	75	34	220
13	32	25	22
14	69	70	37
15	48	48	26
16	21	20	11
17	20	20	12
18	9	9	4
19	9	11	6
20	5	6	3
21	4	5	3
22	2	4	2
23	1	3	0
24	0	2	0
25	1	3	1
26	1	1	1
35	1	1	1
Total	1864	1864	1864

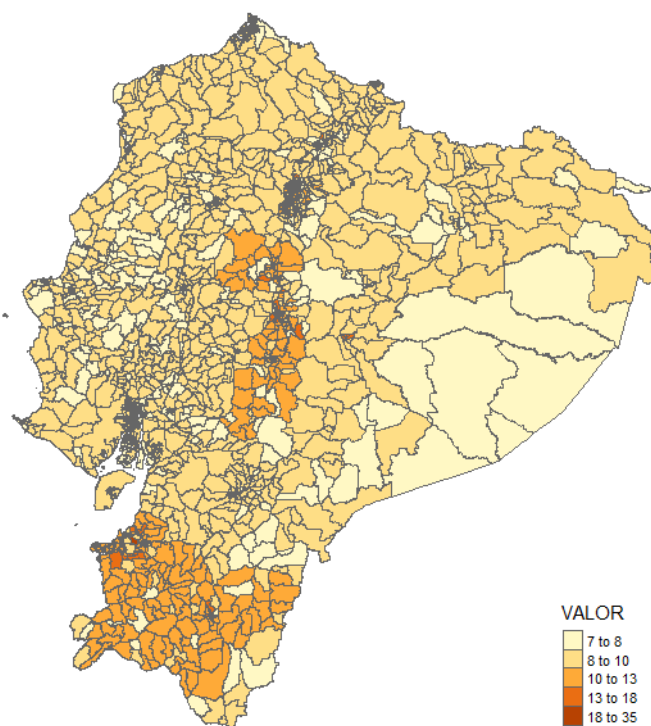
Tabla 3.15: Cantidad de subcircuitos para cada distribución de servidores policiales por modelo para la instancia de mayo

La distribución de la asignación para el modelo original y su versión multiobjetivo a nivel nacional se observa en la figura 3.3. La asignación para un 80% de los subcircuitos no cambió significativamente para el modelo original y el modelo de suma ponderada, el modelo de optimalidad lexicográfica tiene una distribución más grande. Los tres modelos son alternativas con diferentes ventajas al realizar la asignación. De acuerdo con la definición de los problemas MOLP todas las soluciones obtenidas son eficientes, la mejor solución depende de los tomadores de decisión.

Actividad	Modelo Original		Suma Ponderada		Optimalidad Lexicográfica	
	Asignación	Faltante	Asignación	Faltante	Asignación	Faltante
1	328	1536	288	1576	482	1382
2	3091	1142	3054	1179	3195	1038
3	4023	146	4067	102	3896	273
4	2159	146	2203	102	2032	273
5	2142	165	2162	145	2047	260
6	3738	10	3748	0	3734	14
7	329	1311	288	1352	424	1216
8	1864	0	1864	0	1864	0
Total	17674	4456	17674	4456	17674	4456

Tabla 3.16: Distribución de servidores policiales asignados y faltante por modelo y actividad, instancia mayo

a. Modelo original y modelo de suma ponderada



b. Modelo de Optimalidad Lexicográfica

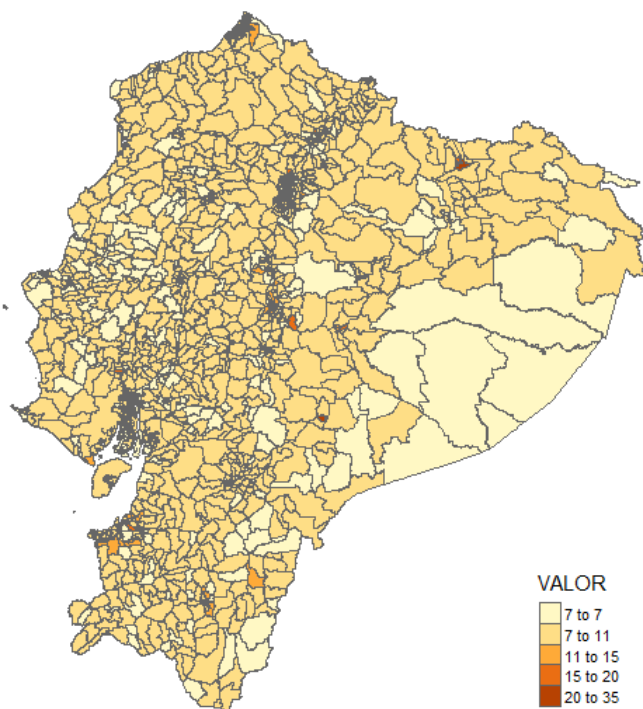


Figura 3.3: Distribución de la asignación a nivel nacional para el modelo MOAM

3.5.2. Solución Modelo Multiobjetivo Principal

En esta subsección se resuelve la asignación de servidores policiales con el modelo multiobjetivo principal (MMP). Siguiendo con la metodología las técnicas de solución de problemas multiobjetivo aplicadas son las mismas al caso anterior y se incluye el método general de escalarización.

En las tablas 3.17 y 3.18 se exhibe con las distribución que toman las funciones objetivo para el modelo MMP para la instancia de mayo y septiembre respectivamente. Estos valores son necesarios para el modelo de suma ponderada y escalarización generalizada, además son un punto de comparación de las soluciones.

Función Objetivo	Valor Mínimo	Valor Máximo	Diferencia
f_1^{MMP}	14697.268	15897.478	1200.21
f_2^{MMP}	9708.65	11269.5	1560.85
f_3^{MMP}	1707.031	2648.02	940.99
f_4^{MMP}	3637.71	5027.95	1390.25
f_5^{MMP}	1999	14701	12702

Tabla 3.17: Valores de las funciones objetivo para la instancia mayo del 2019 del modelo MMP

En la tabla 3.19 se presenta los tiempos de ejecución para los modelos por cada

Función Objetivo	Valor Mínimo	Valor Máximo	Diferencia
f_1^{MMP}	13465.677	18048.412	4582.735
f_2^{MMP}	4415.50	8125.375	3709.875
f_3^{MMP}	1723.685	2747.882	1024.20
f_4^{MMP}	2673.057	6287.157	3756.23
f_5^{MMP}	744	16357	15613

Tabla 3.18: Valores de las funciones objetivo para la instancia septiembre del 2019 del modelo MMP

instancia. El modelo original se ejecuta en menor tiempo al modelo multiobjetivo principal, esto coincide con el caso anterior.

Base de datos	Modelo Original	Suma Ponderada	Escalarización Generalizada	Optimalidad Lexicográfica
Mayo 2019	1694.24	2467.27	8949.40	8474.21
Septiembre 2019	1547.31	9487.35	3696.61	6975.58

Tabla 3.19: Tiempo de ejecución en segundos

En las tablas 3.20 y 3.21 se tiene los resultados obtenidos para cada función objetivo e instancia. En la sección anterior se mostró los cambios al aplicar técnicas multiobjetivo respecto al modelo original, ahora no se puede comparar las funciones objetivo ya que son diferentes en cada modelo.

De las funciones objetivo se puede observar algunas características. Primero, las soluciones de los dos modelos e instancias tienen los mismos valores para la función objetivo f_2^{MMP} , por lo que los modelos asignaron los grados de forma idéntica para todos los modelos. Por otro lado, el modelo de optimalidad lexicográfica tiene los valores más bajos de la función f_4^{MMP} , este resultado es esperado ya que se optimiza primero dicha función objetivo en el algoritmo. El modelo de optimalidad lexicográfica asigna de forma preferente la mayor cantidad de servidores policiales en subcircuitos pocos peligrosos. Finalmente, las funciones f_1^{MMP} y f_5^{MMP} asociadas a las distancias y cambios de zona tienen una relación directa. Si incrementan los cambios de zona incrementa la función objetivo asociada a las distancias, lo que equivale a que el personal trabaje cerca de su lugar de origen aunque tenga que cambiar de zona.

Función Objetivo	Suma Ponderada	Escalarización Generalizada	Optimalidad Lexicográfica
f_1^{MMP}	15037.97	15093.48	15191.23
f_2^{MMP}	11269.5	11269.5	11269.5
f_3^{MMP}	2637.82	2484.59	1999.01
f_4^{MMP}	5221.61	4923.24	3756.23
f_5^{MMP}	14316	14192	14517

Tabla 3.20: Valores funciones objetivo para la solución del modelo MOA para la instancia mayo

Función Objetivo	Suma Ponderada	Escalarización Generalizada	Optimalidad Lexicográfica
f_1^{MMP}	17551.15	17479.68	17496.563
f_2^{MMP}	7599.25	7599.25	7599.25
f_3^{MMP}	2722.286	2599.698	1812.088
f_4^{MMP}	4121.677	3816.016	2673.057
f_5^{MMP}	2012	1760	2435

Tabla 3.21: Distribución de los valores de las funciones objetivo para el modelo MMP instancia septiembre

Para analizar a mayor detalle las soluciones, se tomará en este caso la instancia de septiembre. En la tabla 3.22 se cuenta con la asignación de servidores policiales y faltante para cada actividad. El modelo original, suma ponderada y escalarización generalizada tienen la menor cantidad de servidores policiales faltantes en las actividades de jefe y conductor de patrulla.

Actividad	Modelo Original		Suma Ponderada		Escalarización Generalizada	
	Asignación	Faltante	Asignación	Faltante	Asignación	Faltante
1	1051	813	948	916	1251	613
2	3644	589	3573	660	3445	788
3	4140	29	4169	0	4142	27
4	2276	29	2305	0	2278	27
5	2281	1467	2466	1282	2341	1407
6	2296	11	2302	5	2279	28
7	1023	617	948	692	975	665
8	1864	0	1864	0	1864	0
Total	18575	3555	18575	3555	18575	3555

Actividad	Optimalidad Lexicográfica	
	Asignación	Faltante
1	1284	580
2	3772	461
3	3728	441
4	1864	441
5	3115	633
6	1889	418
7	1059	581
8	1864	0
Total	18575	3555

Tabla 3.22: Distribución de servidores policiales asignados y faltante por modelo y actividad, instancia septiembre

Un cambio importante con el modelo MMP tiene que ver con los grados de teniente y subteniente. En la tabla 3.23 se tiene la cantidad de servidores policiales por actividad para dichos grados, se puede notar que los servidores policiales con dichos grados ya no desempeñan la actividad de apoyo operativo, entonces su asignación no era necesaria para dichos subcircuitos. El modelo MMP optimiza la distancia al lugar de origen, índice de peligrosidad y cambios de zona, si estos criterios influyeran positivamente en la asignación se hubiese obtenido una asignación similar de servidores policiales en dicha actividad.

Actividad	Modelo Original		Suma Ponderada		Escalarización Generalizada		Optimalidad Lexicográfica	
	TNTE	SBTE	TNTE	SBTE	TNTE	SBTE	TNTE	SBTE
Jefe de subcircuito	114	669	122	679	113	680	118	674
Auxilio y respuesta (jefe de patrulla)	20	351	13	345	22	344	17	350
Apoyo Operativo	1	4	0	0	0	0	0	0
Total	135	1024	135	1024	135	1024	135	1024

Tabla 3.23: Cantidad de servidores policiales por actividad para los grados de teniente y subteniente

En la tabla 3.24 se tiene la distribución de la asignación para cada modelo por subcircuito. La asignación más frecuente para el modelo original y suma ponderada son 8 servidores policiales que representan el 35.72 % y el 38.46 % de los subcircuitos, respectivamente. El modelo de escalarización generalizada tiene 9 servidores policiales como la asignación más frecuente, representando el 59.92 %. Finalmente, el modelo de optimalidad lexicográfica tiene como asignaciones frecuentes 8 y 12 servidores policiales que representan el 70.22 % de los subcircuitos.

Las asignaciones más frecuentes toman valores de 8 y 9 que es consistente con la poca dispersión obtenida por el índice de peligrosidad. Las asignaciones con más servidores policiales corresponde con los subcircuitos con mayor índice de peligrosidad. Se obtienen resultados similares con la instancia de mayo analizada previamente.

Cantidad Servidores Policiales	Modelo Original	Suma Ponderada	Escalarización Generalizada	Optimalidad Lexicográfica
6	224	255	45	120
7	13	1	31	0
8	666	717	222	542
9	75	69	1117	245
10	31	20	9	7
11	394	287	66	170
12	166	183	85	767
13	67	56	59	12
14	85	99	88	1

Cantidad Servidores Policiales	Modelo Original	Suma Ponderada	Escalarización Generalizada	Optimalidad Lexicográfica
15	54	75	54	0
16	24	24	23	0
17	21	28	21	0
18	12	13	12	0
19	11	11	11	0
20	6	7	6	0
21	6	5	6	0
22	4	4	4	0
23	2	3	2	0
24	1	2	1	0
25	1	3	1	0
26	0	1	0	0
35	1	1	1	0
Total	1864	1864	1864	1864

Tabla 3.24: Cantidad de subcircuitos para cada distribución de servidores policiales obtenida por la asignación del modelo MOA para la instancia de septiembre

Adicionalmente, con el modelo MMP se busca mayor homogeneidad en la asignación para los subcircuitos con un nivel de peligrosidad similar. En el ejemplo 3.1 se mostraba dicho efecto donde un subcircuito no debería acumular más servidores policiales cuando su índice de peligrosidad es apenas mayor a otros subcircuitos contiguos. Para mostrar el cumplimiento de este criterio y compararlo con el modelo original se tomará los 20 subcircuitos con índice de peligrosidad menor en el Distrito Metropolitano de Quito o Zona 9. En la figura 3.4 se tiene la distribución de la asignación por modelo en colores, y el orden de menor a mayor índice de peligrosidad, donde 1 es el menor valor y 20 el mayor valor para los subcircuitos planteados. Para una mejor comprensión se llamará a los subcircuitos por el orden colocado.

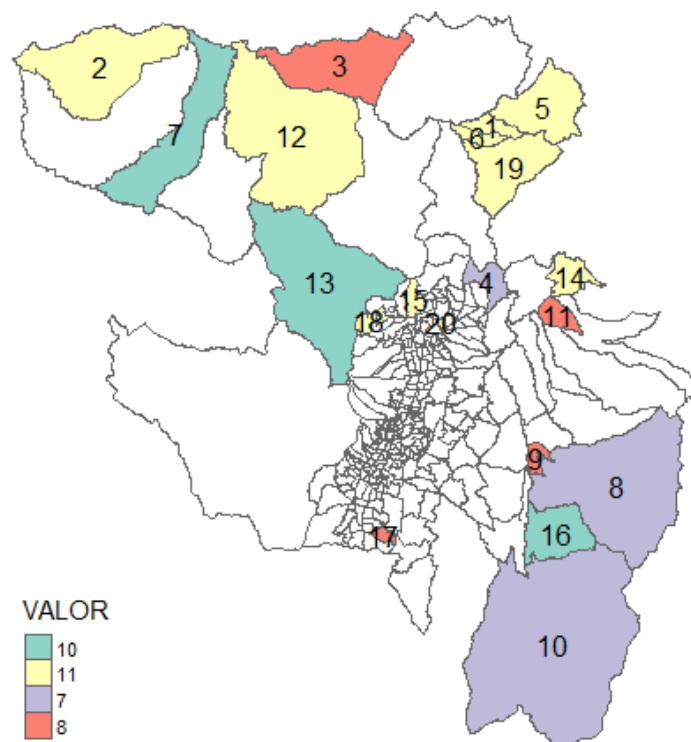
Analizando el modelo original en la figura 3.4.a se nota gráficamente que hay una gran dispersión de los servidores policiales asignados. Si consideramos los subcircuitos {2, 7, 12, 13} geográficamente cercanos, notamos que el subcircuito 2 tiene un servidor policial más que el subcircuito 7 y de igual forma con el subcircuito 12 y 13. Cabe recalcar que los subcircuitos tomados tienen el índice de peligrosidad más bajo entonces la asignación esperada tomaría valores menores a 9 o 10, pero se toman 10 y 11. Por lo tanto, bajo el criterio que se analiza se puede evidenciar la falta

de homogeneidad en el modelo original y al redistribuir de mejor forma al personal para garantizar una mejor distribución en los subcircuitos peligrosos.

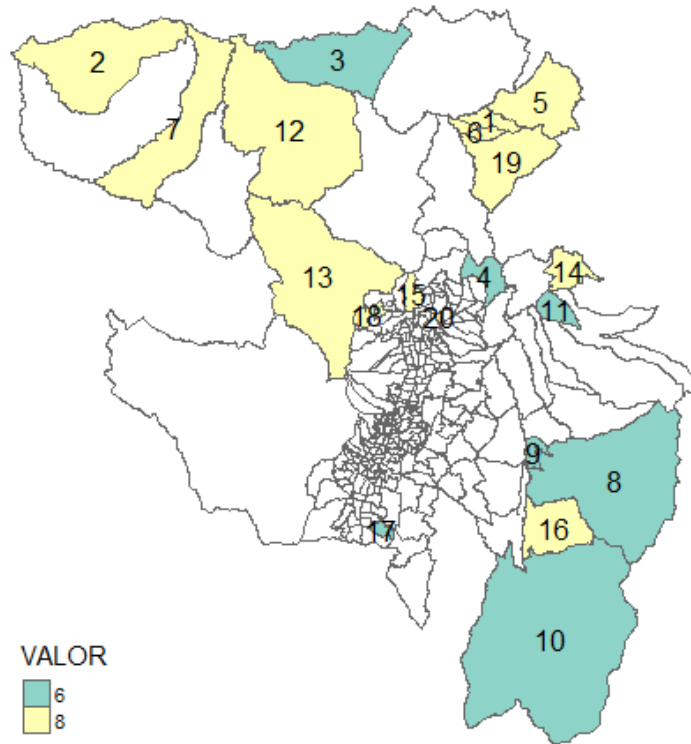
Ahora, para el modelo de suma ponderada y escalarización generalizada se puede notar una situación diferente. Se conserva como media de la asignación 9 servidores para los dos modelos y ambos no superan la misma. Los subcircuitos etiquetados con valores $\{2,7,12,13\}$ tienen la misma asignación en ambos modelos y se nota mayor homogeneidad. Por otro lado, tenemos los subcircuitos 8 y 10 con una menor dotación de servidores policiales en comparación al resto, en este caso son cercanos geográficamente a los subcircuitos 9 y 16 donde se redistribuyó de mejor forma el personal. Con la homogeneidad se busca una mejor distribución del personal sin exigir que los subcircuitos peligrosos tengan más servidores policiales ya que influyen más criterios importantes en la asignación.

El modelo de optimalidad lexicográfica no tiene una asignación homogénea. Por el orden de prioridad de las funciones objetivo en la optimización se asignará más servidores policiales en los subcircuitos menos peligrosos. A diferencia de los otros modelos la asignación en estos 20 subcircuitos va de 8 a 12 servidores. La optimalidad lexicográfica no permite obtener soluciones propiamente eficientes por tal razón la solución cambia notoriamente con las dos técnicas mencionadas.

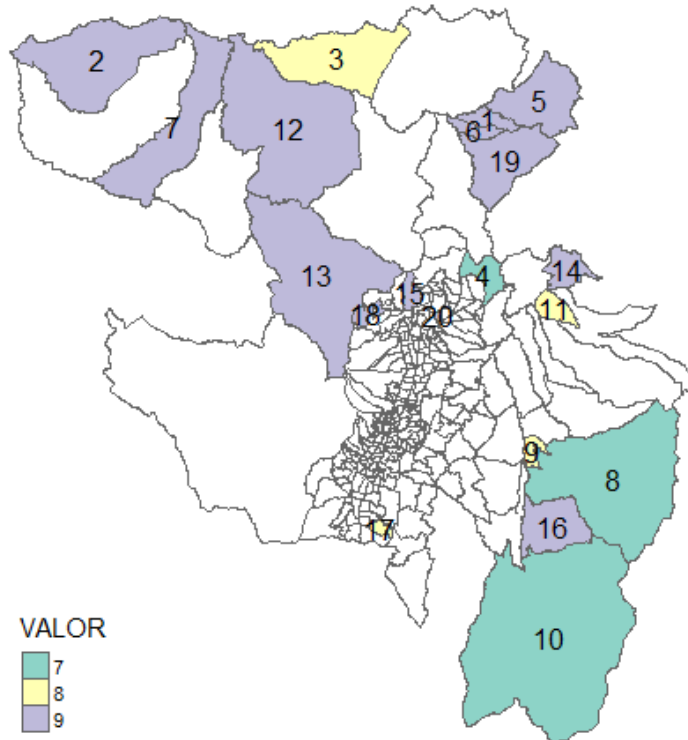
a. Modelo Original



b. Modelo Suma Ponderada



c. Modelo Escalarización Generalizada



b. Modelo Optimalidad Lexicográfica

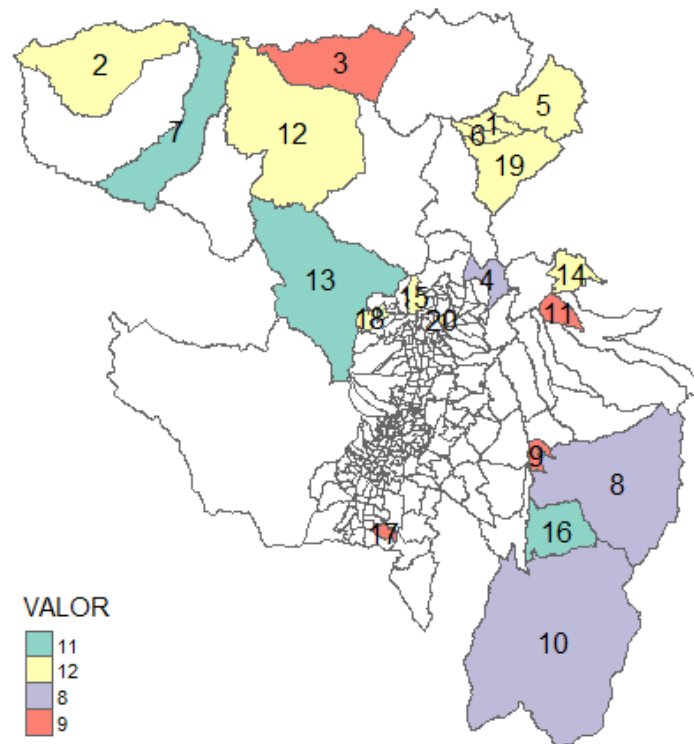


Figura 3.4: Distribución asignación zona 9 para los 20 subcircuitos con menor índice de peligrosidad

A diferencia de lo obtenido con el modelo MOA y su versión multiobjetivo se obtuvo soluciones notablemente diferentes con el modelo MMP. Aplicar las técnicas de suma ponderada y escalarización generalizada permitieron obtener soluciones correctas como ya se vio. La principal diferencia se tiene en la distribución de servidores policiales donde la solución obtenida por la técnica de escalarización generalizada asigna 9 servidores para la mayor parte de subcircuitos, mientras que la solución obtenida por la suma ponderada tiene una distribución más amplia.

En este caso aplicar la solución obtenida por la optimalidad lexicográfica no es deseable. Para la Policía Nacional la solución debe asignar más servidores en subcircuitos peligrosos. En este caso se tuvo una debilidad en la solución porque la técnica no garantiza obtener soluciones propiamente eficientes que evalúen la eficiencia de las funciones objetivo.

Se puede concluir que el modelo MMP cumple con los objetivos planteados. Todos los criterios que se analizaron en la asignación intervienen en un aspecto importante en el trabajo de los servidores policiales. Inicialmente ya se garantizaba que el lugar de origen y de trabajo sea cercana. Luego, al considerar una asignación ho-

mogénea para subcircuitos con un similar nivel de peligrosidad se garantiza que la dotación de servidores también sea similar y por lo tanto evitar el trabajo excesivo. Se da prioridad a la experiencia para desempeñar cargos más importantes como jefe de subcircuito y de patrulla. Finalmente, se reduce los cambios de zona en la asignación.

Capítulo 4

Conclusiones y Recomendaciones

4.1. Conclusiones

1. El problema de asignación de los servidores policiales en el Ecuador se puede modelar y resolver mediante modelos de programación lineal y programación lineal multiobjetivo.
2. Al comparar el modelo original y multiobjetivo se obtuvieron diferentes soluciones eficientes que son válidas para la Policía Nacional.
3. Las ventajas que se obtuvieron al usar la versión multiobjetivo del modelo dependen de cada técnica usada. Todas estas técnicas permitieron garantizar que la asignación de servidores policiales sea más homogénea.
4. Con la técnica de suma ponderada y escalarización generalizada se obtuvieron soluciones propiamente eficientes que permiten comparar las funciones objetivo y aumentar el valor de una función objetivo si el beneficio es mayor que degradar otra.
5. La técnica de optimalidad lexicográfica no permite obtener soluciones propiamente eficientes por lo que se garantiza la optimización de las funciones objetivo únicamente en un orden de preferencia estricto.
6. Al modificar el modelo original y definir el modelo MMP se pudo mejorar la asignación de los servidores policiales con grado de teniente y subteniente. En lugar de desempeñar actividades de apoyo, se prioriza su experiencia en actividades como jefe de subcircuito o jefe de patrulla.

7. Con el modelo MMP los subcircuitos con un nivel de peligrosidad similar tienen una asignación más eficiente y homogénea. Los subcircuitos con nivel de peligrosidad ligeramente mayor a otros contiguos no acumulan personal que se puede aprovechar mejor y es requerido con mayor urgencia en otras localidades del país.
8. En todos los modelos se determina no solamente el número de servidores policiales para cada subcircuito sino las actividades que deben realizar en la UPC.

4.2. Recomendaciones

1. Como se describió en la descripción del problema el modelo de gestión que tiene la Policía Nacional es empírico, por lo que es necesario implementar uno de los modelos de optimización planteados que mejoran la asignación y se adaptan a la instancia requerida.
2. Aunque la asignación óptima de los servidores policiales no es la única clave para reducir la violencia y el crimen en el país, la importancia de una buena asignación de oficiales de policía no se puede dejar de lado. Con el modelo de optimización se distribuirá de forma eficiente los servidores, se reducirá las cargas de trabajo extensas y se garantizará mayor presencia policial en los lugares que se requiera.
3. Se recomienda utilizar la metodología de optimización multiobjetivo. El contar con diferentes soluciones de acuerdo a un criterio de preferencia permite que los tomadores de decisión visualicen diferentes escenarios y seleccionen el mejor.

Bibliografía

- Ehrgott y Ruzika. Improved ϵ -constraint method for multiobjective programming. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 138(3):375–396, Apr. 2008. doi: 10.1007/s10957-008-9394-2. URL <https://doi.org/10.1007/s10957-008-9394-2>.
- Marler y Arora. The weighted sum method for multi-objective optimization: new insights. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 41(6):853–862, Dec. 2009. doi: 10.1007/s00158-009-0460-7. URL <https://doi.org/10.1007/s00158-009-0460-7>.
- Rastegar y Khorram. A combined scalarizing method for multiobjective programming problems. *European Journal of Operational Research*, 236(1):229–237, July 2014. doi: 10.1016/j.ejor.2013.11.020. URL <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2013.11.020>.
- N. Adler, A. S. Hakkert, J. Kornbluth, T. Raviv, and M. Sher. Location-allocation models for traffic police patrol vehicles on an interurban network. *Annals of Operations Research*, 221(1):9–31, Jan. 2013. doi: 10.1007/s10479-012-1275-2. URL <https://doi.org/10.1007/s10479-012-1275-2>.
- N. Alvarado and R. Muggah. Crimen y violencia: Un obstáculo para el desarrollo de las ciudades de América Latina y el Caribe. Technical report, Inter-American Development Bank, Nov. 2018. URL <https://doi.org/10.18235/0001440>.
- C. H. Antunes, M. J. Alves, and J. Clímaco. *Multiobjective Linear and Integer Programming*. Springer International Publishing, 2016. doi: 10.1007/978-3-319-28746-1. URL <https://doi.org/10.1007/978-3-319-28746-1>.
- J. Bautista, M. Mateo, and Rocio De La Torre. Programación lineal entera mixta para asignar voluntarios a la organización de eventos deportivos. caso aptitud no restringida, 2018. URL <http://rgdoi.net/10.13140/RG.2.2.35854.25923>.

- M. Buvinic, A. Morrison, and M. B. Orlando. *Violencia, crimen y desarrollo social en américa latina y el caribe*, 2005. URL http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1405-74252005000100008.
- J. M. Chaiken and P. Dormont. A patrol car allocation model: Capabilities and algorithms. *Management Science*, 24(12):1291–1300, Aug. 1978. doi: 10.1287/mnsc.24.12.1291. URL <https://doi.org/10.1287/mnsc.24.12.1291>.
- Dirección Nacional de la Policía Comunitaria. *Policía Comunitaria Modelo de Gestión*. Ecuador, 3 edition, 7 2013.
- O. S. Edleston. Improving police efficiency to meet demand issues, Jan 2010. URL <https://hdl.handle.net/2134/7245>.
- M. Ehrgott. *Multicriteria Optimization*. Springer-Verlag, 2 edition, 2005. doi: 10.1007/3-540-27659-9. URL <https://doi.org/10.1007/3-540-27659-9>.
- R. Guedes, V. Furtado, and T. Pequeno. Multi-objective evolutionary algorithms and multiagent models for optimizing police dispatch. In *2015 IEEE International Conference on Intelligence and Security Informatics (ISI)*. IEEE, May 2015. doi: 10.1109/isi.2015.7165936. URL <https://doi.org/10.1109/isi.2015.7165936>.
- I. Gurobi Optimization. Gurobi optimizer reference manual, 2020. URL <http://www.gurobi.com>.
- N. A. Ismayilova, M. Sağır, and R. N. Gasimov. A multiobjective faculty–course–time slot assignment problem with preferences. *Mathematical and Computer Modelling*, 46(7-8):1017–1029, Oct. 2007. doi: 10.1016/j.mcm.2007.03.012. URL <https://doi.org/10.1016/j.mcm.2007.03.012>.
- I. Kaliszewski, J. Miroforidis, and J. Stańczak. THE AIRPORT GATE ASSIGNMENT PROBLEM – MULTI-OBJECTIVE OPTIMIZATION VERSUS EVOLUTIONARY MULTI-OBJECTIVE OPTIMIZATION. *Computer Science*, 18(1):41, 2017. doi: 10.7494/csci.2017.18.1.41. URL <https://doi.org/10.7494/csci.2017.18.1.41>.
- C. S. Koper. Just enough police presence: Reducing crime and disorderly behavior by optimizing patrol time in crime hot spots. *Justice Quarterly*, 12(4):649–672, Dec. 1995. doi: 10.1080/07418829500096231. URL <https://doi.org/10.1080/07418829500096231>.
- B. Korte and J. Vygen. *Combinatorial Optimization*. Springer-Verlag, 2006. doi: 10.1007/3-540-29297-7. URL <https://doi.org/10.1007/3-540-29297-7>.

- D. T. Luc. *Multiobjective Linear Programming*. Springer International Publishing, 2016. doi: 10.1007/978-3-319-21091-9. URL <https://doi.org/10.1007/978-3-319-21091-9>.
- Ministerio de Gobierno. Ley organica de la policia, 2008. URL <https://www.ministeriodegobierno.gob.ec/wp-content/uploads/downloads/2014/03/LEY-ORGANICA-DE-LA-POLICIA-NACIONAL.pdf>.
- Ministerio del Interior. Proyecto: Desconcentración de los servicios de seguridad en distritos y circuitos, 2011. URL <https://www.ministeriodegobierno.gob.ec/wp-content/uploads/2015/04/DESCONCENTRACION-DE-SERVICIOS-DE-SEGURIDAD-EN-DISTRITOS-Y-CIRCUITOS1.pdf>.
- A. Mukhopadhyay, C. Zhang, Y. Vorobeychik, M. Tambe, K. Pence, and P. Speer. Optimal allocation of police patrol resources using a continuous-time crime model. In Q. Zhu, T. Alpcan, E. Panaousis, M. Tambe, and W. Casey, editors, *Decision and Game Theory for Security*, pages 139–158, Cham, 2016. Springer International Publishing. ISBN 978-3-319-47413-7.
- R. A. Namoco, E. M. Lago, R. O. Pailagao, J. B. Vallar, , , and and. An integer programming approach for patrol police allocation in an urban city in the philippines. *Indian Journal of Science and Technology*, 10(40):1–8, Dec. 2017. doi: 10.17485/ijst/2017/v10i40/119147. URL <https://doi.org/10.17485/ijst/2017/v10i40/119147>.
- R. D. Narváz Montenegro. Las políticas de seguridad ciudadana y la distribución del personal policial bajo el modelo de policia comunitaria en chile y ecuador, 2015. URL <http://repositorio.uchile.cl/handle/2250/137535>.
- Policía Nacional del Ecuador. Plan estratégico de la policía nacional del ecuador “confianza y transparencia” 2017-2021, 7 2018.
- F. Salazar, S. Gutierrez, P. Vaca, and R. Torres. An efficiency-based integer programming model for police staffing in ecuador, 2019.
- Secretaria Nacional de Planificación y Desarrollo. Plan nacional para el buen vivir 2009-2013, 2009. URL https://www.planificacion.gob.ec/wp-content/uploads/downloads/2015/12/plan_nacional_para_el_buen_vivir2009-2013.pdf.

- Secretaría Nacional de Planificación y Desarrollo. Folleto informativo: Proceso de desconcentración del ejecutivo en los niveles administrativos de planificación, 2012. URL https://www.planificacion.gob.ec/wp-content/uploads/downloads/2012/10/Folleto_informativo-Desconcentracion2012.pdf.
- P. E. Taylor and S. J. Huxley. A break from tradition for the san francisco police: Patrol officer scheduling using an optimization-based decision support system. *Interfaces*, 19(1):4–24, Feb. 1989. doi: 10.1287/inte.19.1.4. URL <https://doi.org/10.1287/inte.19.1.4>.
- D. Todovic, D. Makajic-Nikolic, M. Kostic-Stankovic, and M. Martic. Police officer scheduling using goal programming. *Policing: An International Journal of Police Strategies & Management*, 38(2):295–313, May 2015. doi: 10.1108/pijpsm-11-2014-0124. URL <https://doi.org/10.1108/pijpsm-11-2014-0124>.
- J. M. Violanti, L. E. Charles, E. McCanlies, T. A. Hartley, P. Baughman, M. E. Andrew, D. Fekedulegn, C. C. Ma, A. Mnatsakanova, and C. M. Burchfiel. Police stressors and health: a state-of-the-art review. *National Library of Medicine*, 11 2017. URL <https://doi.org/10.1108/PIJPSM-06-2016-0097>.
- K. Yoon and C.-L. Hwang. *Multiple Attribute Decision Making*. SAGE Publications, Inc., 1995. doi: 10.4135/9781412985161. URL <https://doi.org/10.4135/9781412985161>.

Anexo A

Código empleado para la asignación de servidores policiales

La implementación del código se hizo con python con el uso de la api de gurobi. Los conjuntos y parámetros usados son listas y se representan de la siguiente forma:

- Los conjuntos I, J, K se representan con las mismas letras. Además, se tiene la lista IJ como par ordenado de los valores de I y J . Los valores de los conjuntos están etiquetados con el valor entero menos 1 ya que python cuenta desde 0.
- Los conjuntos I_j se almacenan en la lista $F[j]$.
- Los conjuntos $K(i)$ se nombran como la lista $P[i]$.
- Los conjuntos $I_4(i)$ se nombran como la lista $I_3[i]$.
- Los parámetros de oferta, demanda y distancia se nombran con las mismas letras a, b y d . Mientras que los parámetros de la peligrosidad se tiene en la lista r .

En el código A.1 tiene las variables usadas para el modelo creadas como variables enteras positivas. Luego, en el código A.2 se puede observar las restricciones usadas en todos los modelos.

```
1 import numpy as np
2 import pandas as pd
3 from gurobipy import*
4
5 x = m.addVars(IJ, K, vtype=GRB.INTEGER, name='x', lb = 0)
6 y = m.addVars(IJ, K, vtype = GRB.INTEGER, name='y', lb = 0)
```

```
7 beta = m.addVars(I, vtype = 'I', name='b', lb = 0)
```

Código A.1: Variables para el modelo de asignación

```
1 #Restricciones de la oferta
2 m.addConstrs(
3     (x.sum(i,'*', '*') <= a[i] for i in I), name="Oferta");
4 del ai
5
6 #Restricciones de la demanda
7 m.addConstrs(
8     (x.sum('*',j,k) + y.sum('*',j,k) == b[j,k] for j in J for k in K )
9     , "Demanda");
10
11 #Restricciones de cambios de zona
12 for i in I:
13     co1 = LinExpr()
14     co1.addTerms(
15         (1.0 for j in J for k in P[i] if i in F[j]),
16         (x[i,j,k] for j in J for k in P[i] if i in F[j]) )
17     m.addConstr( co1== beta[i], "CambioZona_"+str(i))
18     del co1
19
20 #Restricciones de jefes y conductores de patrullas
21 #Igualdad entre conductores y jefes de patrullas
22 for k in K:
23     co1 = LinExpr()
24     co1.addTerms( (1.0 for i in F[2] ), (x[i,2,k] for i in F2) )
25     co1.addTerms( (-1.0 for i in F[3]), (x[i,3,k] for i in F3) )
26     m.addConstr( co1==1, "Patrullas_"+str(k))
27     del co1
28
29 #Los grados de los jefes es mayor al conductor
30 for k in K:
31     for i in F2:
32         r_name = "R_Jefes_patrullas_" + str(i) + "_" + str(k)
33         Li = I_3[i]
34         co = LinExpr()
35         co.addTerms( (1.0 for j in Li), (x[j,3,k] for j in Li) )
36         co.addTerms( (1.0 for j in Li), (y[j,3,k] for j in Li) )
37         m.addConstr( co >= x[i,2,k]+y[i,2,k], r_name )
38         del Li,co
39
40 #Restricciones los jefes de subcircuito tienen grado mayor a todos los
```



```

servidores policiales
41 for k in K:
42     for g in G3:
43         r_name = "RJefe_mayor_grado_" + str(k)+"_"+str(g)
44         co1     = quicksum( x[i,7,k] for i in F7 if rango[i]==g )
45         if g<8:
46             co2 = quicksum( x[i,j,k] for j in J if j!=7 for i in F[j]
47             if rango[i]>g )
48             m.addConstr( co1 <= 1-co2 , r_name )
49             del co2
50         else:
51             m.addConstr( co1 <= 1 , r_name )
52         del co1
53
54 #Restricciones asignar un jefe por subcircuito
55 m.addConstrs((x.sum('*',7,k)==1 for k in K), "JefeSub");
56
57 #Restricciones personal m nimo
58 m.addConstrs(
59     (x.sum('*',1,k) >= 2 for k in K1), "Atencion_Ciudadana");
60 m.addConstrs(
61     (x.sum('*',2,k) >= 2 for k in K), "R_turnos_patrulla");
62 m.addConstrs(
63     (x.sum('*',4,k) >= 1 for k in K), "Reaccion_Disuacion");
64 m.addConstrs(
65     (x.sum('*',5,k) >= 2 for k in K), name="Motorizado");

```

Código A.2: Restricciones del modelo usado

```

1 obj = LinExpr()
2 obj.addTerms( (h1[i,k] for (i,j) in IJ for k in K) , (x[i,j,k] for (i
3     ,j) in IJ for k in K) )
4 obj.addTerms( (-lm for i in I), (gamma[i] for i in I) )
5 obj.addTerms( (-lm-0.1 for (i,j) in IJ_7 for k in K) , (y[i,j,k] for (
6     i,j) in IJ for k in K) )
7 obj.addTerms( (r[k][0] for k in K for (i,j) in IJ) , (x[i,j,k] for k
8     in K for (i,j) in IJ) )
9 m.setObjective(obj, GRB.MAXIMIZE);

```

Código A.3: Función objetivo original

En el código A.4 se tiene la función objetivo del modelo original, luego en los códigos de A.5 a A.8 se tiene las funciones objetivos usadas para los MOA y MMP resueltas con métodos multiobjetivos.

```

1 obj = LinExpr()
2 obj.addTerms( (h1[i,k] for (i,j) in IJ for k in K) , (x[i,j,k] for (
    i,j) in IJ for k in K) )
3 m.setObjectiveN(obj,index =0, weight= 4)
4 del obj
5
6 obj = LinExpr()
7 obj.addTerms( ( h2[k][0] for k in K for (i,j) in IJ) , (x[i,j,k] for
    k in K for (i,j) in IJ) )
8 m.setObjectiveN(obj,index =1, weight= 3)
9 del obj
10
11 obj = LinExpr()
12 obj.addTerms( (-h3 for i in I), (gamma[i] for i in I) )
13 m.setObjectiveN(obj,index =2, weight= 1 )
14 del obj
15
16 obj = LinExpr()
17 obj.addTerms( ( -h4 for (i,j) in IJ for k in K) , (y[i,j,k] for (i,j)
    in IJ_7 for k in K) )
18 m.setObjectiveN(obj,index =3, weight= 2)
19 del obj
20
21 m.ModelSense=-1

```

Código A.4: Función multiobjetivo MOA

```

1 obj = LinExpr()
2 obj.addTerms( (h1[i][k] for (i,j) in IJ for k in K) , (x[i,j,k] for
    (i,j) in IJ for k in K) )
3 m.setObjectiveN(obj,index =0, priority=3 )
4 del obj
5
6 obj = LinExpr()
7 obj.addTerms( ( h2[i,j] for k in K for (i,j) in IJ) , (x[i,j,k] for k
    in K for (i,j) in IJ) )
8 m.setObjectiveN(obj,index =1, priority=2)
9 del obj
10
11 obj = LinExpr()
12 obj.addTerms( ( h3[k][0] for k in K for (i,j) in IJ) , (x[i,j,k] for
    k in K for (i,j) in IJ) )
13 m.setObjectiveN(obj,index =2, priority=1)
14 del obj
15

```

```

16 obj = LinExpr()
17 obj.addTerms( (-1 for i in I), (gamma[i] for i in I) )
18 m.setObjectiveN(obj,index =4, priority=4)
19 del obj
20
21 m.ModelSense=-1

```

Código A.5: Función multiobjetivo modelo MOA optimización lexicográfica

```

1     obj = LinExpr()
2 obj.addTerms( (h1[pi[i]][k] for (i,j) in IJ for k in K) , (x[i,j,k]
   for (i,j) in IJ for k in K) )
3 m.setObjectiveN(obj,index =0, weight= 5)
4 del obj
5
6 #Grados
7 obj = LinExpr()
8 obj.addTerms( ( h2[i,j] for k in K for (i,j) in IJ) , (x[i,j,k] for k
   in K for (i,j) in IJ) )
9 m.setObjectiveN(obj,index =1, weight= 4)
10 del obj
11
12 #peligrosidad
13 obj = LinExpr()
14 obj.addTerms( ( h3[k][0] for k in K for (i,j) in IJ) , (x[i,j,k] for
   k in K for (i,j) in IJ) )
15 m.setObjectiveN(obj,index =2, weight= 3)
16 del obj
17
18 obj = LinExpr()
19 obj.addTerms( ( h4[k][0]-1 for (i,j) in IJ_7 for k in K) , (y[i,j,k]
   for (i,j) in IJ_7 for k in K) )
20 m.setObjectiveN(obj,index =3, weight= 2)
21 del obj
22
23
24 obj = LinExpr()
25 obj.addTerms( (-1 for i in I), (gamma[i] for i in I) )
26 m.setObjectiveN(obj,index =5, weight= 1)
27 del obj
28 m.ModelSense=-1

```

Código A.6: Función multiobjetivo modelo MMP

```

1 obj = LinExpr()

```

```

2 obj.addTerms( ( h1[pi[i]][k] for (i,j) in IJ for k in K ) , (x[i,j,k]
   for (i,j) in IJ for k in K ) )
3 m.setObjectiveN(obj,index =0, weight= 5 )
4 del obj
5
6 obj = LinExpr()
7 obj.addTerms( ( h2[i,j] for k in K for (i,j) in IJ) , (x[i,j,k] for k
   in K for (i,j) in IJ) )
8 m.setObjectiveN(obj,index =1, weight= 4)
9 del obj
10
11 obj = LinExpr()
12 obj.addTerms( ( h3[k][0] for k in K for (i,j) in IJ) , (x[i,j,k] for
   k in K for (i,j) in IJ) )
13 m.setObjectiveN(obj,index =2, weight= 3)
14 #m.addConstr( obj-f3h+f3n==2061, name="f3");
15 del obj
16
17 obj = LinExpr()
18 obj.addTerms( ( h4[k][0]-1 for (i,j) in IJ_7 for k in K) , (y[i,j,k]
   for (i,j) in IJ for k in K ) )
19 m.setObjectiveN(obj,index =3, weight= 2)
20 del obj
21
22 m.setObjectiveN(( f5h)-(2*f5n)+extra,index =5, weight= 1)
23
24 m.ModelSense=-1

```

Código A.7: Función multiobjetivo modelo MMP modelo de escalarización generalizada

```

1 obj = LinExpr()
2 obj.addTerms( ( h1[pi[i]][k] for (i,j) in IJ for k in K ) , (x[i,j,k]
   for (i,j) in IJ for k in K ) )
3 m.setObjectiveN(obj,index =0, priority=3 )
4 del obj
5
6 obj = LinExpr()
7 obj.addTerms( ( h2[i,j] for k in K for (i,j) in IJ) , (x[i,j,k] for k
   in K for (i,j) in IJ) )
8 m.setObjectiveN(obj,index =1, priority=2)
9 del obj
10
11 obj = LinExpr()
12 obj.addTerms( ( h3[k][0] for k in K for (i,j) in IJ) , (x[i,j,k] for

```

```

    k in K for (i,j) in IJ) )
13 m.setObjectiveN(obj,index =2, priority=1)
14 del obj
15
16 obj = LinExpr()
17 obj.addTerms( ( h4[k][0] for (i,j) in IJ_7 for k in K) , (y[i,j,k] for
    (i,j) in IJ_7 for k in K) )
18 m.setObjectiveN(obj,index =3, priority=5)
19 del obj
20
21 obj = LinExpr()
22 obj.addTerms( (-1 for i in I), (gamma[i] for i in I) )
23 m.setObjectiveN(obj,index =4, priority=4)
24 del obj
25
26 m.ModelSense=-1

```

Código A.8: Función multiobjetivo modelo MMP optimización lexicográfica