



# **ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL**

## **FACULTAD DE CIENCIAS**

### **ESTUDIO DE LA ESPECTROSCOPIA DE BARIONES-MESONES UTILIZANDO UN MODELO DE QUARKS CONSTITUYENTES**

#### **MODELO ${}^3P_0$ PARA CALCULO DE ANCHO DE DESINTEGRACIÓN DE BARIONES**

**TRABAJO DE INTEGRACIÓN CURRICULAR PRESENTADO COMO  
REQUISITO PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE FÍSICO**

**TELMO SEBASTIÁN AGUILAR GARCÍA**

[telmo.aguilar@epn.edu.ec](mailto:telmo.aguilar@epn.edu.ec)

**DIRECTOR: ÁLVARO DUEÑAS VIDAL**

[alvaro.duenas@epn.edu.ec](mailto:alvaro.duenas@epn.edu.ec)

**DMQ, FEBRERO 2024**



## **CERTIFICACIONES**

Yo, TELMO SEBASTIÁN AGUILAR GARCÍA, declaro que el trabajo de integración curricular aquí descrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y, que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

---

Telmo Sebastián Aguilar García

Certifico que el presente trabajo de integración curricular fue desarrollado por Telmo Sebastián Aguilar García, bajo mi supervisión.

---

Álvaro Dueñas Vidal  
**DIRECTOR**



## **DECLARACIÓN DE AUTORÍA**

A través de la presente declaración, afirmamos que el trabajo de integración curricular aquí descrito, así como el(los) producto(s) resultante(s) del mismo, es(son) público(s) y estará(n) a disposición de la comunidad a través del repositorio institucional de la Escuela Politécnica Nacional; sin embargo, la titularidad de los derechos patrimoniales nos corresponde a los autores que hemos contribuido en el desarrollo del presente trabajo; observando para el efecto las disposiciones establecidas por el órgano competente en propiedad intelectual, la normativa interna y demás normas.

Telmo Sebastián Aguilar García

Álvaro Dueñas Vidal



## **AGRADECIMIENTOS**

A mis padres y mi abuela, por acompañarme, cuidarme y apoyarme en este largo camino, no podría haberlo hecho sin ustedes.

A mis amigos, Jorge, José Luis y Jael, por estar ahí en las buenas, en las malas y las mas o menos. Su compañía hizo mis días mas amenos.

A mis tutores, Álvaro y Jorge, por darme todos los conocimientos necesarios para realizar este trabajo.

Por último, a mi gata, Katur, por acompañarme en las largas noches de estudio.

## RESUMEN

En este trabajo se estudia el proceso de decaimiento fuerte de un barión hacia un sistema mesón-barión haciendo uso del ancho de desintegración. A través el modelo de creación de pares  ${}^3P_0$  se calcula la matriz de transición del proceso para evaluar la probabilidad de ocurrencia del mismo. Se realizan simplificaciones al cálculo mediante equivalencias de diagramas de Feynman y la elección de un sistema de coordenadas  $(\rho\lambda)$  adecuado, manteniendo la generalidad dentro del espectro de quarks ligeros. Mediante símbolos de Wigner se calcula los distintos acoples angulares obteniendo que desintegraciones son posibles y cuales no. Finalmente, se aprovecha la independencia de los números cuánticos para descomponer la matriz de transición en 3 términos: color, sabor y espín-espacio. El resultado es una expresión analítica para el ancho de desintegración del proceso, la cual, puede ser calculada al conocer las propiedades de las partículas iniciales y finales.

**Palabras clave:** Desintegración de bariones, Modelo  ${}^3P_0$ , Ancho de desintegración, Diagramas de Feynman, Teoría Cuántica de Campos.

## ABSTRACT

This work examines the strong decay process of a baryon into a meson-baryon system using its decay width. Through the  ${}^3P_0$  pair creation model, the transition matrix of the process is calculated to assess its probability of occurrence. Simplifications are applied to the calculation via Feynman diagram equivalences and the selection of an appropriate coordinate system  $(\rho\lambda)$ , maintaining generality within the light quark spectrum. Different angular couplings are calculated using Wigner symbols, determining which decays are allowed. Finally, leveraging the independence of quantum numbers, the transition matrix is decomposed into three contributions: color, flavor, and spin-space. The outcome is an analytical expression for the decay width of the process, which can be calculated given the initial and final particles.

**Keywords:** Baryon decay,  ${}^3P_0$  model, Decay width, Feynman diagrams, Quantum Field Theory.

---

# Índice general

---

<b>1. Descripción del componente desarrollado</b>	<b>1</b>
1.1. Objetivo general . . . . .	1
1.2. Objetivos específicos . . . . .	1
1.3. Alcance . . . . .	1
1.4. Marco teórico . . . . .	2
1.4.1. Campos y estados, la base de QFT . . . . .	3
1.4.2. Modelo quark . . . . .	5
<b>2. Metodología</b>	<b>7</b>
2.1. Ancho de desintegración . . . . .	8
2.2. Modelo ${}^3P_0$ . . . . .	9
2.2.1. Hamiltoniano de interacción . . . . .	10
2.2.2. Estados final e inicial . . . . .	11
2.3. Funciones de onda radiales . . . . .	13
2.3.1. Sistema de coordenadas $(\rho, \lambda)$ . . . . .	14
2.3.2. Expansión en gaussianas . . . . .	15
2.4. Momentos angulares y su acoplos . . . . .	16
2.4.1. Símbolos de Wigner . . . . .	17
2.5. Modelo microscópico . . . . .	18

<b>3. Resultados, conclusiones y recomendaciones</b>	<b>21</b>
3.1. Resultados . . . . .	21
3.1.1. Color . . . . .	25
3.1.2. Sabor . . . . .	26
3.1.3. Espín y espacio . . . . .	27
3.2. Conclusiones y recomendaciones . . . . .	31
<b>A. Cálculo de la matriz de transición</b>	<b>33</b>
A.1. Ordenamiento de deltas . . . . .	33
A.2. Cálculo de $\mathcal{J}(A \rightarrow BC)$ . . . . .	34
A.3. Cálculo de $\mathcal{E}(A \rightarrow BC)$ . . . . .	36
<b>Bibliografía</b>	<b>43</b>

---

## Índice de figuras

---

2.1. Proceso de desintegración de un barión A, conformado por los quarks $\alpha$ , $\beta$ y $\eta$ , que decae hacia el barión B ( $\zeta, \sigma, \epsilon$ ) y el mesón C ( $\delta, \tau$ ). . . . .	8
2.2. Sistema de coordenadas para un barón, donde $\langle r \rangle$ es el valor esperado del radio para la partícula y $\rho, \lambda$ son las dos nuevas coordenadas internas. . . . .	14
2.3. Kernel de interacción entre vértices. . . . .	19
3.1. Diagramas equivalentes por reordenación de quarks. . . . .	23

# Capítulo 1

---

## Descripción del componente desarrollado

---

### 1.1. Objetivo general

Obtener una expresión analítica para calcular el ancho de decaimiento en procesos de desintegración de bariones.

### 1.2. Objetivos específicos

1. Usar el modelo  ${}^3P_0$  para caracterizar los fenómenos de creación de pares presentes en los procesos de decaimiento.
2. Analizar los posibles diagramas de Feynman del proceso y determinar sus equivalencias.
3. Aprovechar la independencia de los números cuánticos de un sistema para facilitar el cálculo de la matriz de transición.

### 1.3. Alcance

En este trabajo, se estudiará el decaimiento de un barión hacia un sistema mesón-barión. Para caracterizar este proceso se calculará la anchura de desintegración a partir la matriz de transición usando la independencia de los números cuánticos entre sí. Se usará el modelo creación

de pares  ${}^3P_0$  para determinar los distintos canales de desintegración y las probabilidades de transición de estos. Mediante acoples angulares y símbolos de Wigner se modelará las conservaciones de momento angular y espín, determinando qué transiciones son prohibidas, cuáles son permitidas y cuáles son equivalentes. Por último, se obtendrá una expresión para el ancho de decaimiento que caracterice el proceso.

## 1.4. Marco teórico

Al describir sistemas de tamaño atómico la mecánica cuántica ha dado muy buenos resultados. A través de la ecuación de Schrödinger se ha podido describir los orbitales de un electrón en un átomo, la formación de moléculas y la radiación de cuerpo negro entre muchos más sistemas [1]. Sin embargo, esta formulación fallaría al describir sistemas subatómicos, como sería el núcleo, dando valores alejados de lo estudiado experimentalmente. Gran parte de estas discrepancias entre teoría y experimento se deberían a la presencia de efectos relativistas no tomados en cuenta en la Ec. de Schrödinger. Así, con el fin de mejorar la descripción de estos sistemas, se buscarían otras formulaciones concordantes con la relatividad.

La ecuación de Klein-Gordon, y después la ecuación de Dirac, serían una primera aproximación a una mecánica cuántica relativista. Estas ecuaciones de movimiento ya no describen funciones de onda, sino campos, dando nacimiento a la teoría cuántica de campos (QFT por sus siglas en inglés). Mediante esta nueva formulación se lograría describir sistemas electrodinámicos con gran precisión [2]. No obstante, la descripción de sistemas subatómicos seguiría siendo un reto debido a la presencia de interacciones fuertes. Es así cómo se han desarrollado diversos métodos y aproximaciones para tratar con partículas sujetas a este tipo de interacción. En este capítulo se introducirá brevemente los conceptos básicos de QFT necesarios para este trabajo junto a las distintas formas de clasificar y trabajar con las partículas subatómicas que experimentan interacciones fuertes.

### 1.4.1. Campos y estados, la base de QFT

Antes de adentrarse en la teoría cuántica de campos es importante entender qué es un campo y el significado físico de este. Al trabajar con la ecuación de Schrödinger, la función de onda describe las posibles configuraciones que puede tomar un sistema. Esta función indica qué estado se tiene y cuáles magnitudes, al medir sus observables, se pueden obtener. En QFT se tiene otro paradigma ya que la dinámica del sistema viene dada por la ecuación de Dirac,

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0, \quad (1.1)$$

donde  $m$  es la masa de la partícula o antipartícula estudiada,  $\gamma^i$  son las matrices de Dirac y  $\psi$  es el campo asociado a la partícula. Cabe notar que, durante este trabajo se usará el convenio de Einstein para simplificar sumatorios y un sistema de unidades reducidas tal que  $\hbar = c = 1$ .

La solución a esta ecuación es conocida [3] y viene dada por esta expresión,

$$\psi(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}_q}}} \sum_q \left( \hat{a}_q u_q(\vec{p}_q) e^{-i\vec{p}_q \cdot \vec{x}} + \hat{b}_q^\dagger v_q(\vec{p}_q) e^{i\vec{p}_q \cdot \vec{x}} \right), \quad (1.2)$$

donde se suma sobre todos los valores de un número  $q$  que caracteriza la partícula y se integra sobre todos los valores posibles de momento. Las funciones  $u_q(\vec{p}_q)$  y  $v_q(\vec{p}_q)$  son espinores que caracterizan el espín de la partícula mientras que  $\hat{a}_q$  y  $\hat{b}_q^\dagger$  son operadores.

Mientras que en la mecánica cuántica la función de onda sería suficiente para caracterizar el sistema, en QFT ya no es así. Ahora  $\psi$  es un campo que opera sobre los distintos estados. Para entender cómo lo hace es necesario estudiar los operadores  $\hat{a}_q$  y  $\hat{b}_q^\dagger$ . Suponiendo un estado cualquiera  $|A\rangle$  se tiene la siguiente acción de los operadores sobre este,

$$\begin{aligned} \hat{a}_{q_i}^\dagger |A\rangle &= |q_i A\rangle \text{ creación} \\ \hat{a}_{q_i} |q_i A\rangle &= |A\rangle \text{ destrucción.} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Por la forma en la que actúan sobre los estados, agregando o quitando partículas, estos operadores son llamados operadores de creación y

destrucción. Cabe notar que, en caso de trabajar con antipartículas, es necesario usar los operadores  $\hat{b}_{q_i}^\dagger$  y  $\hat{b}_{q_i}$  los cuales conmutan con los operadores para partículas. Además, si se actúa sobre el estado conjugado  $\langle A|$ , la función de los operadores se invierte,  $\hat{a}_{q_i}^\dagger$  quitaría partículas y  $\hat{a}_{q_i}$  las agregaría. Por ultimo, es necesario definir el estado sin partículas, también conocido como estado de vacío ( $|0\rangle$ ), sobre el cual actúan los operadores de la siguiente manera,

$$\begin{aligned}\hat{a}_q^\dagger|0\rangle &= |q\rangle \\ \hat{a}_q|0\rangle &= 0.\end{aligned}\tag{1.4}$$

Este estado de vacío, a pesar de no tener partículas, no tiene energía nula. Sin embargo, se suele definir la energía de este estado como 0 al ser el estado base. Debido al principio de incertidumbre de Heisenberg, la energía de este estado puede variar ligeramente lo que provoca fluctuaciones de vacío [4]. Estas fluctuaciones son la base de los modelos de creación de pares.

Al estudiar el principio de causalidad en QFT es necesario tomar en cuenta el ordenamiento temporal. No se puede destruir una partícula que no se ha creado. Así, mediante el teorema de Wick [5], se define un orden normal en el cual se debe acomodar todos los operadores creación a la izquierda del producto.

$$\begin{aligned}a_q^\dagger a_q|A\rangle &\text{ Estado ordenado,} \\ a_q a_q^\dagger|A\rangle &\text{ Estado no ordenado.}\end{aligned}\tag{1.5}$$

Para ordenar un estado es necesario conocer cómo conmutan los operadores creación y destrucción. Suponiendo dos partículas  $q$  y  $p$ , si estas actúan como fermiones, el anticonmutador de sus operadores cumple,

$$\{a_q, a_p^\dagger\} = a_q a_p^\dagger + a_p^\dagger a_q = \delta_{q,p} \delta(\vec{p}_q - \vec{p}_p),\tag{1.6}$$

donde el resto de combinaciones ( $\{a_q^\dagger, a_p^\dagger\}$  o  $\{a_q, a_p\}$ ) tienen un anticonmutador de valor 0. Así, un término no ordenado es equivalente a un término

ordenado más una delta de partículas y momentos,

$$\begin{aligned} a_p a_q^\dagger |A\rangle &= (\delta_{q,p} \delta(\vec{p}_q - \vec{p}_p) - a_q^\dagger a_p) |A\rangle \\ &= \delta_{q,p} \delta(\vec{p}_q - \vec{p}_p) |A\rangle - a_q^\dagger a_p |A\rangle. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Una vez entendido cómo se crean y destruyen partículas, es evidente que el campo es un operador de los estados. Así, en lugar de la función de onda, lo que caracterizaría el sistema sería el producto del campo y el estado,

$$\psi(\vec{x}) |A\rangle. \quad (1.8)$$

El campo  $\psi(\vec{x})$  es un ente físico que ocupa todo el espacio conteniendo información de la partícula asociada, mientras el estado da las condiciones iniciales de este. Distintos tipos de partículas tienen distintos campos e interaccionan de distintas maneras.

Por último, para obtener el valor esperado de un observable  $\hat{O}$  se tiene que usar el campo y el estado de la siguiente manera,

$$\langle A | \bar{\psi}(\vec{x}) \hat{O} \psi(\vec{x}) | A \rangle. \quad (1.9)$$

Acá, la posición ya no es un operador, como ocurre en mecánica cuántica, sino que es una coordenada. Al querer evaluar el campo se debe hacerlo en cierto punto del espacio-tiempo. En QFT espacio y tiempo son equivalentes, algo de esperar al trabajar en mecánica relativista.

### 1.4.2. Modelo quark

Ahora que se tiene una descripción de las partículas a través de campos, se puede comenzar describir sistemas más complejos. Toda la materia conocida puede ser descompuesta en partículas del modelo estándar. En específico, las partículas que se planea estudiar en este trabajo son conocidas como hadrones y están formadas por quarks. Los quarks son las únicas partículas que experimentan la interacción fuerte a través de una carga de color. Para entender cómo se clasifica la materia hadrónica es necesario conocer el Modelo quark [6]. Originalmente el modelo se postuló con 3 tipos o "sabores" de quarks diferenciados por su carga e isospín. En la actualidad, se conocen 6 sabores quarks separados por

su masa en dos grupos.

Quarks Ligeros		
u	d	s
Quarks Pesados		
c	b	t

Cuadro 1.1: Sabores de quarks. De izquierda a derecha y de arriba a abajo se tiene los quarks: *up*, *down*, *strange*, *charm*, *bottom* y *top*.

Los quarks constituyen toda la materia hadrónica y sus distintas combinaciones determinan las propiedades de las partículas. Mediante la interacción fuerte los quarks se unen debido a que poseen una carga de color. Pueden tener una carga roja, verde o azul, además de sus correspondientes anticargas. Dado a que la dinámica de los quarks es dominada por estas cargas de color, el estudio de estas interacciones es conocido como cromodinámica cuántica (QCD por sus siglas en inglés). Todas las partículas observables deben tener un color nulo, es decir, las cargas de color de sus quarks deben anularse. Cuando se combina un quark con su antipartícula se genera un mesón y al combinar un quark de cada color se genera un barión. Cabe notar que distintas combinaciones de quarks pueden generar la misma partícula pero de distinta clase. Por ejemplo, el pión tiene 3 composiciones  $\pi^+(u\bar{d})$ ,  $\pi^-(d\bar{u})$  y  $\pi^0(u\bar{u}/d\bar{d})$ , todas describiendo una partícula de igual masa pero con distinta carga.

Por lo intensa que es la interacción fuerte QCD es no perturbativa [7]. Al tener una constante de acople ( $a_s$ ) mayor a 1, todos los términos que aparecen al realizar una expansión en series de Taylor aportan a la interacción. Así, para poder trabajar con interacciones entre quarks, hay que usar modelos fenomenológicos y aproximaciones de campos medios. Mediante estos modelos se ha logrado describir desde las distintas partículas que pueden crearse, hasta cómo estas decaen en partículas más estables [8, 9]. En este trabajo se explorará esta última aplicación usando modelos de creación de pares.

# Capítulo 2

---

## Metodología

---

Al estudiar el decaimiento de partículas existen varias formas de clasificar estos procesos dependiendo de las partículas finales. Por ejemplo, el decaimiento beta es clasificado como un decaimiento electromagnético ya que produce leptones a través de la interacción débil. Los procesos débiles o electromagnéticos suelen violar muchas leyes de conservación, por lo que es difícil estudiarlos [10]. Por otro lado, si todas las partículas involucradas en la desintegración son hadrones, se tiene un decaimiento fuerte. La mayoría de estos procesos suelen ser conservativos e involucran, como su nombre lo indica, la interacción fuerte entre quarks. Este tipo de decaimiento ocurre en partículas masivas al decaer en partículas más ligeras y estables.

De manera general, un decaimiento fuerte para un barión tiene la forma de la Figura 2.1, donde se nombra todos los quarks antes y después de la desintegración. Todas estas etiquetas son necesarias para tener en cuenta las posibles interacciones entre quarks ya que estos pueden intercambiarse y reconvinarse durante el proceso. Adicionalmente, se crea un par quark-antiquark  $(\mu, \nu)$  en medio del diagrama. Los decaimientos fuertes involucran la creación de pares  $(q\bar{q})$  a partir de las fluctuaciones de energía del vacío. Modelar esta creación de pares es necesario para describir el decaimiento de partículas y poder dar con la anchura de desintegración.

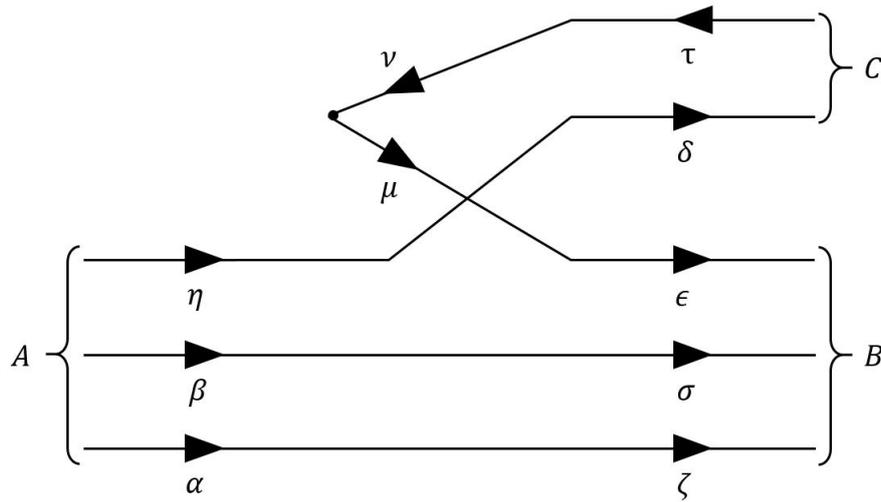


Figura 2.1: Proceso de desintegración de un barión A, conformado por los quarks  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\eta$ , que decae hacia el barión B ( $\zeta$ ,  $\sigma$ ,  $\epsilon$ ) y el mesón C ( $\delta$ ,  $\tau$ ).

## 2.1. Ancho de desintegración

Al estudiar decaimientos es necesario saber qué partículas decaen, sus productos y el tiempo de vida media de estas. Para ello es común usar el ancho de desintegración,

$$\Gamma_{A \rightarrow BC} = \frac{\hbar}{\tau_{A \rightarrow BC}}, \quad (2.1)$$

donde  $\tau$  es el tiempo de vida media.

Es más conveniente trabajar con  $\Gamma_{A \rightarrow BC}$  dado que, en la mayoría de experimentos, no se suele observar un solo canal de decaimiento, sino una mezcla por la gran cantidad de partículas que se tiene. Por lo tanto, es más fácil obtener el ancho de desintegración que medir el tiempo de vida media. Adicionalmente, no solo se tiene distintos canales de decaimiento, también las partículas finales pueden tener distintos momentos. Así, es necesario tomar en cuenta todos los posibles valores de momento al calcular,

$$\Gamma_{A \rightarrow BC} = \sum_{J_{BC}, l} \Gamma_{A \rightarrow BC}(J_{BC}, l), \quad (2.2)$$

donde  $J_{BC}$  es el momento angular total del sistema final y  $l$  el momento angular relativo entre las partículas finales.

Por último, se conoce la siguiente relación [11] entre el ancho de desintegración y la matriz de transición,

$$\Gamma_{A \rightarrow BC}(J_{BC}, l) = 2\pi \frac{E_B(k_0)E_C(k_0)}{m_A k_0} |\mathcal{M}_{A \rightarrow BC}|^2, \quad (2.3)$$

donde se calcula el momento final ( $k_0$ ) mediante la siguiente expresión,

$$k_0 = \frac{\sqrt{(m_A^2 - (m_B - m_C)^2)(m_A^2 - (m_B + m_C)^2)}}{2m_A}. \quad (2.4)$$

Así, se tiene una relación entre el ancho de decaimiento y la probabilidad del proceso mediante el módulo de su matriz de transición. Cabe notar que, para cada canal de decaimiento, habría que calcular su correspondiente matriz.

## 2.2. Modelo ${}^3P_0$

Dentro de los modelos de creación de pares, el modelo  ${}^3P_0$  ha dado buenos resultados para describir el decaimiento fuerte de partículas ligeras y pesadas [9, 12]. Este modelo fue propuesto por primera vez por Micu [13] y recibe su nombre por las condiciones que impone sobre el par creado. Dado que el vacío no posee paridad, momento angular ni carga se puede decir que este estado tiene los siguientes números cuánticos,

$$J^{PC} = 0^{++}, \quad (2.5)$$

donde  $J$  es el momento angular total,  $P$  es la paridad y  $C$  la conjugación de carga. A partir de estas propiedades es lógico asumir que el par creado del vacío debe mantener las mismas.

Al crearse un quark y un antiquark, cada uno con sus propiedades intrínsecas, existen dos formas de acoplar sus espines y momentos angulares. Si se tiene un acople singlete el par tendrá un espín  $S = 0$  y momento angular  $L = 0$ . Por otro lado, si se tiene un acople triplete el par tendrán tendrían un  $S = 1$  y un  $L = 1$ . Ambas combinaciones conservarían el momento total. Sin embargo, un momento angular relativo  $L = 0$  implicaría que el par no tiene el momento suficiente para separar-

se y recombinarse. Por tanto, el par creado debe tener, usando notación espectroscópica, los siguientes números cuánticos,

$${}^{2S+1}L_J = {}^3P_0. \quad (2.6)$$

De aquí surge nombre del método.

### 2.2.1. Hamiltoniano de interacción

Ahora, saber cómo se crea el par  $q\bar{q}$  es de gran importancia para caracterizar los procesos de decaimiento. De manera general, el par es creado por las fluctuaciones de energía del vacío, pero se conoce que este proceso puede ser inducido por las interacciones del campo. Siguiendo la referencia [14], se usa un Hamiltoniano de interacción con la siguiente forma,

$$H = g_s \sqrt{3} \int d^3x \bar{\psi}(\vec{x}) \psi(\vec{x}). \quad (2.7)$$

En esta expresión,  $g_s$  es una constante que caracteriza la intensidad de la interacción y  $\psi(\vec{x})$  es un campo en todo el espacio el cual obedece las ecuación (1.1). El término  $\sqrt{3}$  es puesto a propósito ya que se cancela al calcular la matriz de transición.

Al reemplazar las soluciones del campo y simplificar términos se obtiene el siguiente operador de transición,

$$T = -\gamma' \sqrt{3} \sum_{\mu, \nu} \int d^3p_\mu d^3p_\nu \left[ \mathcal{Y}_1 \left( \frac{\vec{p}_\mu - \vec{p}_\nu}{2} \right) \otimes (s_\mu s_\nu) 1 \right]_0 \quad (2.8)$$

$$a_\mu^\dagger(\vec{p}_\mu) b_\nu^\dagger(\vec{p}_\nu) \delta^{(3)}(\vec{p}_\mu + \vec{p}_\nu).$$

En esta expresión los operadores  $a_\mu^\dagger$  y  $b_\nu^\dagger$  caracterizan la creación del quark y antiquark, mientras que el término  $\delta^{(3)}(\vec{p}_\mu + \vec{p}_\nu)$  asegura la conservación del momento. La función  $\mathcal{Y}_1 \left( \frac{\vec{p}_\mu - \vec{p}_\nu}{2} \right)$  es el armónico esférico de ángulo sólido definido de la siguiente manera,

$$\mathcal{Y}_L(\vec{x}) = x^L Y_L(\hat{x}). \quad (2.9)$$

Por último,  $\gamma'$  resume todas las constantes que aparecen en el desarrollo. Esta constante usualmente es ajustada a los datos experimentales.

El operador  $T$  caracteriza la creación del par con los números cuánticos  ${}^3P_0$ , provocando la transición entre un estado inicial  $|A\rangle$  y un estado final  $|BC\rangle$ . Cabe notar que el estado final siempre tendrá 2 partículas ya que, al crear un par de quarks extras, el sistema final va a tener: 4 quarks, si se estudia el decaimiento de mesones; o 5 quarks si se estudia bariones, teniendo que reordenarse en 2 partículas distintas (B y C). Así, para calcular la matriz de transición se debe obtener el valor esperado de este operador al pasar del estado inicial al estado final,

$$\mathcal{M}_{A \rightarrow BC} = \delta^{(3)}(\vec{K}_0) \langle BC | T | A \rangle, \quad (2.10)$$

donde se agrega una delta sobre  $\vec{K}_0$  para conservar el momento del centro de masas.

### 2.2.2. Estados final e inicial

Para calcular la matriz de transición, es necesario conocer los estados finales e iniciales. Estos estados deben describir todas las propiedades de las partículas que los componen. Así, el vector estado para un barión va a ser distinto al estado de un mesón o de un sistema compuesto [15]. Por ejemplo, para el barión A  $(\alpha, \beta, \eta)$  se tiene,

$$|A\rangle = \int d^3 p_\alpha d^3 p_\beta d^3 p_\eta C_A \Phi_A(\vec{p}_\alpha, \vec{p}_\beta, \vec{p}_\eta) a_\alpha^\dagger(\vec{p}_\alpha) a_\beta^\dagger(\vec{p}_\beta) a_\eta^\dagger(\vec{p}_\eta) |0\rangle \quad (2.11)$$

donde los operadores creación caracterizan los quarks presentes en el sistema. Por su lado,  $\Phi_A$  es la función de onda radial y  $C_A$  es la función de onda de color de las cuales se hablará más adelante.

Por otro lado, para describir el estado final se debe tomar en cuenta que es un sistema conformado por un barión B  $(\zeta, \sigma, \epsilon)$  y un mesón C  $(\delta, \tau)$ . Por ende, es necesario explicar las propiedades de cada partícula además de las propiedades emergentes al ser un sistema compuesto. Así,

se tiene el siguiente estado,

$$\begin{aligned}
|BC\rangle = & \int d^3K_B d^3K_C \\
& \sum_{m, M_{BC}} \langle J_{BC} M_{BC} l m | J_A M_A \rangle \delta^{(3)}(\vec{K} - \vec{K}_0) \delta(k - k_0) \\
& \frac{Y_{lm}(\hat{k})}{k} \sum_{M_B, M_C, M_{I_B}, M_{I_C}} \langle J_B M_B J_C M_C | J_{BC} M_{BC} \rangle \\
& \langle I_B M_{I_B} I_C M_{I_C} | I_{BC} M_{I_{BC}} \rangle \int d^3p_\delta d^3p_\epsilon d^3p_\zeta d^3p_\sigma d^3p_\tau \\
& C_B \Phi_B(\vec{p}_\sigma, \vec{p}_\zeta, \vec{p}_\epsilon) a_\sigma^\dagger(\vec{p}_\sigma) a_\zeta^\dagger(\vec{p}_\zeta) a_\epsilon^\dagger(\vec{p}_\epsilon) C_C \Phi_C(\vec{p}_\delta, \vec{p}_\tau) a_\delta^\dagger(\vec{p}_\delta) b_\tau^\dagger(\vec{p}_\tau) |0\rangle.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Para entender esta expresión es conveniente explicarla término por término. En las últimas líneas, se tiene la integral de momentos junto a los operadores creación y a las funciones de onda. Esta parte describe las partículas presentes en el estado de manera semejante a lo que se tiene en el estado  $|A\rangle$ .

El término,

$$\sum_{M_B, M_C, M_{I_B}, M_{I_C}} \langle J_B M_B J_C M_C | J_{BC} M_{BC} \rangle \langle I_B M_{I_B} I_C M_{I_C} | I_{BC} M_{I_{BC}} \rangle, \tag{2.13}$$

es el acople de momentos angulares e isoespines, correspondientemente, de las dos partículas que conforman estado. Es necesario sumar sobre las proyecciones en el eje z ( $M_J$ ) para tomar en cuenta todos los distintos acoples.

Por último, el término,

$$\int d^3K_B d^3K_C \sum_{m, M_{BC}} \langle J_{BC} M_{BC} l m | J_A M_A \rangle \delta^{(3)}(\vec{K} - \vec{K}_0) \delta(k - k_0) \frac{Y_{lm}(\hat{k})}{k}, \tag{2.14}$$

asegura la conservación del momento lineal y angular. Dado que el sistema final se conforma por dos partículas, es necesario describirlo utilizando el momento del centro de masa ( $\vec{K}$ ), momento relativo ( $\vec{k}$ ) y el momento angular ( $l$ ) entre B y C. Por lo tanto, en esta expresión estaría asegurando la conservación del momento lineal, con respecto al momento del centro de masas ( $\vec{K}_0$ ), y la conservación del momento angular, con respecto al estado inicial.

Al conocer los estados final e inicial ya se podría realizar el cálculo de la matriz de transición. Sin embargo, al usar la independencia de los números cuánticos, se puede separar la matriz en distintas componentes,

$$\mathcal{M}_{A \rightarrow BC} = \mathcal{I}_{Sabor} \mathcal{I}_{Color} \mathcal{I}_{Espin-Espacio}, \quad (2.15)$$

donde cada competente es el acople del estado final con el inicial. Por ejemplo, para el término de color tendría,

$$\mathcal{I}_{Color} = \langle C_B C_C | C_A \rangle, \quad (2.16)$$

usando las siguientes funciones de color,

$$\begin{aligned} C_A = C(\alpha\beta\eta) &= \frac{1}{\sqrt{6}} \sum_{\alpha\beta\eta} \varepsilon_{\alpha\beta\eta} \text{ para bariones} \\ C_C = C(\delta\tau) &= \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{\delta\tau} \delta_{\delta\tau} \text{ para mesones.} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Acá, los sumatorios van sobre los 3 posibles colores que pueden tener los quarks (rojo, verde o azul). En mesones los quarks deben tener colores complementarios, de ahí la delta entre componentes, mientras que en bariones se debe tener un quark de cada color.

### 2.3. Funciones de onda radiales

Comprender qué representan y cómo calcular las funciones de onda radiales ( $\Phi_{A,B,C}$ ) es vital para el cálculo que se va a realizar en el siguiente capítulo. Estas funciones están en el espacio de momentos y caracterizan la probabilidad de encontrar la partícula con ciertos valores de momento lineal [16]. Al realizar la integral sobre todos los momentos, se esta tomando todas las posibles configuraciones del campo y se las superpone.

Lo más común es trabajar con el momento del centro de masas ( $\vec{P}_{A,B,C}$ ) y el momento relativo ( $\vec{p}_{A,B,C}$ ). Al realizar el correspondiente cambio de variables se puede simplificar la expresión de la función de onda radial. Para el mesón C se tendría,

$$\Phi_C(\vec{p}_\delta, \vec{p}_\tau) = \delta^{(3)}(\vec{P}_C - \vec{K}_C) \phi_C(\vec{p}_c), \quad (2.18)$$

donde aparece una delta entre el momento de la partícula  $\vec{P}_C$  y su momento en el espacio de fases  $\vec{K}_C$ . Al realizar este cambio  $\phi_C(\vec{p}_c)$  solo depende de una variable y es fácil de calcular. Si se intenta realizar el mismo cambio de coordenadas para los bariones A y B surge problemas al definir el momento relativo. Debido a que estas partículas están formadas por tres quarks es necesario tener una coordenada extra.

### 2.3.1. Sistema de coordenadas $(\rho, \lambda)$

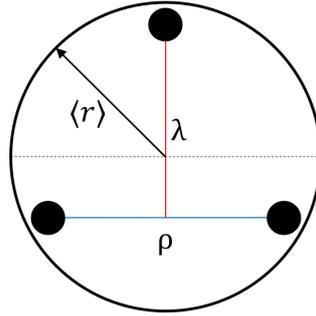


Figura 2.2: Sistema de coordenadas para un barión, donde  $\langle r \rangle$  es el valor esperado del radio para la partícula y  $\rho, \lambda$  son las dos nuevas coordenadas internas.

Se define dos nuevas coordenadas para caracterizar las posiciones de los quarks en el barión. Como se ve en la Figura 2.2, lo que se hace es obtener la distancia relativa de dos quarks ( $r_\rho$ ) y luego la distancia del tercer quark con respecto al centro de masa de los dos primeros ( $r_\lambda$ ) [17]. Así, se definiría las siguientes posiciones relativas usando la notación de quarks del barión A,

$$\begin{aligned} \vec{r}_\rho &= \vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta \\ \vec{r}_\lambda &= \frac{\omega_\alpha \vec{r}_\alpha + \omega_\beta \vec{r}_\beta}{\omega_{\alpha\beta}} - \vec{r}_\eta. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Donde se usa un convenio de masa reducidas tal que se toma una masa  $m$  de referencia y se redefine todas las masas de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} \omega_\alpha &= \frac{m_\alpha}{m} \\ \omega_{\alpha\beta} &= \omega_\alpha + \omega_\beta. \end{aligned} \quad (2.20)$$

El sistema  $(\rho, \lambda)$  no es único. Por la manera en la que se define, caben tres posibles formas en las que agrupar los quarks. Usualmente los quarks que conforman la coordenada  $\vec{r}_\rho$  tienen la misma masa mientras el quark sobrante suele ser más pesado. Si todos las partículas del barión tienen la misma masa, las tres formas de definir  $\vec{r}_\rho$  y  $\vec{r}_\lambda$  son equivalentes. En este trabajo, se se definirá  $\vec{r}_\rho$  tal que tome los dos quarks que no se ven recombinados en el proceso de decaimiento, como pasa con  $\alpha$  y  $\beta$  en la Figura 2.1.

Dado este nuevo sistema de coordenadas, se puede definir uno nuevo conjunto de momentos para los bariones,

$$\begin{aligned}\vec{P}_A &= \vec{p}_\alpha + \vec{p}_\beta + \vec{p}_\eta \\ \vec{p}_\rho &= \frac{\omega_\beta \vec{p}_\alpha - \omega_\alpha \vec{p}_\beta}{\omega_{\alpha\beta}} \\ \vec{p}_\lambda &= \frac{\omega_\eta (\vec{p}_\alpha + \vec{p}_\beta) - \omega_{\alpha\beta} \vec{p}_\eta}{\omega_{\alpha\beta\eta}}.\end{aligned}\tag{2.21}$$

Con estos nuevos momentos relativos, se realiza el siguiente cambio de variables en las funciones de onda radiales,

$$\begin{aligned}\Phi_A(\vec{P}_A) &= \delta^{(3)}(\vec{P}_A - \vec{K}_A) \phi_A(\vec{p}_{\rho_A}, \vec{p}_{\lambda_A}) \\ \Phi_B(\vec{P}_B) &= \delta^{(3)}(\vec{P}_B - \vec{K}_B) \phi_B(\vec{p}_{\rho_B}, \vec{p}_{\lambda_B}),\end{aligned}\tag{2.22}$$

obteniendo unas funciones  $\phi_{A,B}$  dependientes de dos momentos relativos.

### 2.3.2. Expansión en gaussianas

El problema ahora reside en calcular las funciones  $\phi_{A,B,C}$ . Para ello, se separa la parte angular y la parte del momento lineal [18],

$$\begin{aligned}\phi_A(\vec{p}_{\rho_A}, \vec{p}_{\lambda_A}) &= f_{\lambda_A}(\vec{p}_{\lambda_A}) f_{\rho_A}(\vec{p}_{\rho_A}) \left[ \mathcal{Y}_{L_{\lambda_A}}(\vec{p}_{\lambda_A}) \mathcal{Y}_{L_{\rho_A}}(\vec{p}_{\rho_A}) \right]_{L_A} \\ \phi_B(\vec{p}_{\rho_B}, \vec{p}_{\lambda_B}) &= f_{\lambda_B}(\vec{p}_{\lambda_B}) f_{\rho_B}(\vec{p}_{\rho_B}) \left[ \mathcal{Y}_{L_{\lambda_B}}(\vec{p}_{\lambda_B}) \mathcal{Y}_{L_{\rho_B}}(\vec{p}_{\rho_B}) \right]_{L_B} \\ \phi_C(\vec{p}_C) &= f_C(\vec{p}_C) \mathcal{Y}_{L_C}(\vec{p}_C).\end{aligned}\tag{2.23}$$

Se usa los armónicos esféricos de ángulo sólido para caracterizar el momento angular de las partículas y las funciones  $f(\vec{p})$  para caracterizar su momento lineal. Se nota que para los bariones es importante acoplar

el momento de cada coordenada del sistema  $(\rho, \lambda)$  con el momento de la partícula,

$$L_\lambda \otimes L_\rho = L. \quad (2.24)$$

Por último, se usa una expansión en gaussianas tal que,

$$f_C(\vec{p}_C) = \sum_i d_i^C \exp\left(-\frac{C_i}{2} p_C^2\right), \quad (2.25)$$

donde  $d_i^C$  y  $C_i$  son constantes que se estiman a partir de los datos experimentales y están relacionadas con el tamaño de la partícula.

## 2.4. Momentos angulares y su acople

Gran parte del cálculo de la matriz de transición requiere acoplar momentos angulares y objetos que operan de manera similar. Entender cómo trabajar con estos resulta de importancia para esta cuenta. Se supone dos estados  $|j_1, m_1\rangle$  y  $|j_2, m_2\rangle$  que se acoplan para dar un tercer estado  $|j_3, m_3\rangle$ . Se conoce que  $j_3$  puede tomar los siguientes valores dados por la desigualdad triangular,

$$|j_1 - j_2| \leq j_3 \leq j_1 + j_2, \quad (2.26)$$

donde se aumenta los valores en unidades [19].

Al momento querer calcular todos los nuevos posibles estados es necesario usar los coeficientes de Clebsch-Gordan  $(C_{j_3 m_3}^{m_1 m_2})$  definidos de la siguiente manera,

$$|(j_1 j_2) j_3, m_3\rangle = \sum_{m_1, m_2} C_{j_3 m_3}^{m_1 m_2} |j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle. \quad (2.27)$$

Estos coeficientes se encuentran tabulados para la mayoría de casos. Se usa la notación  $(j_1 j_2) j_3$  para denotar el acople de los momentos  $j_1$  y  $j_2$  para dar  $j_3$ . Estas relaciones son útiles al acoplar momentos angulares en pares. Sin embargo, al buscar acoplar momentos mas complejos es necesario usar otras herramientas matemáticas.

### 2.4.1. Símbolos de Wigner

Al generalizar los coeficientes Clebsch-Gordan, Wigner formuló una serie de símbolos para dar con estas sumas de momentos angulares. Por ejemplo, el acople que se acaba de realizar se puede representar por un símbolo  $3J$  de la siguiente manera,

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & -m_3 \end{pmatrix} \equiv \frac{(-1)^{j_1-j_2+m_3}}{\Pi_{j_3}} \langle j_1 m_1, j_2 m_2 | j_3 m_3 \rangle. \quad (2.28)$$

La expresión entre paréntesis es el  $3J$  y  $\Pi_{j_3}$  sería,

$$\Pi_{j_3} = \sqrt{2j_3 + 1}. \quad (2.29)$$

Wigner también logró generalizar el acople de varios momentos [20]. Así, se formuló el símbolo  $9J$  de la siguiente manera,

$$\langle [(j_1 j_2) j_3, (j_4 j_5) j_6] j_9 | [(j_1 j_4) j_7, (j_2 j_5) j_8] j_9 \rangle = \Pi_{j_3, j_6, j_7 j_8} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \\ j_7 & j_8 & j_9 \end{Bmatrix}. \quad (2.30)$$

En este ejemplo se acopla  $j_3$  y  $j_6$ , ambos ya acoples de otros momentos angulares, para dar un momento total  $j_9$ . Esta representación es equivalente al acople de  $j_7$  con  $j_8$  que se ve en el lado derecho del braket. El símbolo  $9J$  permite cambiar entre estas dos representaciones, de manera similar en la que los coeficientes de Clebsch-Gordan permiten pasar de la representación de  $|j_1 m_1, j_2 m_2\rangle$  a una de  $|j_3 m_3\rangle$ .

Ahora, los símbolos de Wigner son bastante útiles para cambiar de un acople de  $J - J$  a un acople  $L - S$  con facilidad,

$$\begin{aligned} & |[(L_1 S_1) J_1, (L_2 S_2) J_2] J_T \rangle = \\ & \Pi_{J_1, J_2, L_T, S_T} \begin{Bmatrix} L_1 & L_2 & L_T \\ S_1 & S_2 & S_T \\ J_1 & J_2 & J_T \end{Bmatrix} |[(L_1 L_2) L_T, (S_1 S_2) S_T] J_T \rangle. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Al usar el  $9J$  para cambiar entre estas representaciones se ve claramente una de sus propiedades: los últimos términos de sus filas y columnas

son los distintos acoples. Así,  $L_T$  es el resultado del acople los dos elementos de la fila donde está ( $L_1$  y  $L_2$ ). Lo mismo ocurre con  $J_T$ , solo que en este caso puede ser el acople de la columna ( $L_T$  y  $S_T$ ) o de la fila ( $J_1$  y  $J_2$ ). Adicionalmente, en caso de que algún acople no sea posible, por no cumplir la desigualdad triangular, el  $9J$  va a ser 0. Por tanto, si las dos representaciones no son equivalente el  $9J$  va a dar un valor nulo, lo cual es de gran utilidad al comparar acoples.

Por último, Wigner también definió un símbolo  $6J$ ,

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} = \sum_{m_1, \dots, m_6} (-1)^{\sum_{k=1}^6 (j_k - m_k)} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ -m_1 & -m_2 & -m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_5 & j_6 \\ m_1 & -m_5 & m_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_4 & j_2 & j_6 \\ m_4 & m_2 & -m_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_4 & j_5 & j_3 \\ -m_4 & m_5 & m_3 \end{pmatrix}. \quad (2.32)$$

Este símbolo suelen aparecer al simplificar símbolos  $9J$  que tengan un cero en alguno sus valores. Todas las relaciones entre estos símbolos de Wigner y acoples angulares son obtenidas de la referencia [21] para los cálculos realizados en el siguiente capítulo.

## 2.5. Modelo microscópico

A pesar de que el modelo  ${}^3P_0$  ha dado buenos resultados al calcular decaimientos de partículas, existen otras formas de modelar la creación de pares. En esta sección se hablará brevemente del modelo microscópico, denotando sus diferencias y semejanzas. Este modelo trata de describir la creación de pares tomando en cuenta los grados de libertad internos de los quarks y de los gluones. La idea del mismo es usar el Hamiltoniano que da el espectro de energía de una partícula para describir su decaimiento.

El modelo microscópico fue propuesto por primera vez por Eichten *et al* [22] para describir el decaimiento del charmonium mediante el siguiente Hamiltoniano de interacción,

$$H = \frac{1}{2} \int d^3x d^3y J^\alpha(\vec{x}) K(|\vec{x} - \vec{y}|) J^\alpha(\vec{y}), \quad (2.33)$$

donde los  $J^\alpha$  son las corrientes de probabilidad y  $K$  es el kernel de interacción. El kernel relaciona los dos vértices  $x$  y  $y$  como se ve en la Figura 2.3. Este Hamiltoniano usa dos variables de integración, a diferencia del modelo  ${}^3P_0$ , ya que se toma en cuenta todos los posibles vértices de interacción que se puedan crear.

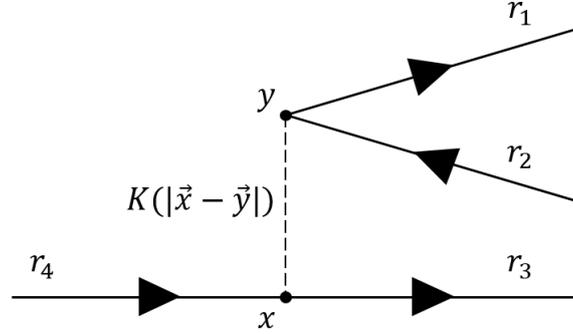


Figura 2.3: Kernel de interacción entre vértices.

Las corrientes de probabilidad y el kernel de interacción pueden tener una naturaleza escalar o vectorial dependiendo de la aproximación que se use. De manera general se define,

$$J^\alpha(\vec{x}) = \bar{\psi}(\vec{x})\Gamma\psi(\vec{x}) \quad (2.34)$$

pudiendo ser  $\Gamma$  un vector o un escalar. Este tipo de modelo también es llamado modelo  $JKJ$  y, dependiendo de la forma que tome la  $\Gamma$ , se puede separar en tres tipos de interacción:  $sKs$ ,  $j^0Kj^0$  y  $j^TKj^T$ .

De manera similar que en el modelo  ${}^3P_0$ , al reemplazar las soluciones de campo y las corrientes de probabilidad se obtiene un operador de transición,

$$T = \int d^3p_1 d^3p_2 d^3p_3 d^3p_4 K(|\vec{Q}|) \delta^{(3)}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 - \vec{p}_4) \sqrt{\frac{m_1 m_2 m_3 m_4}{E_{p_1} E_{p_2} E_{p_3} E_{p_4}}} \sum_{r_1, r_2, r_3, r_4} [a_{r_1}^\dagger(\vec{p}_1) b_{r_2}^\dagger(\vec{p}_2) a_{r_3}^\dagger(\vec{p}_3) a_{r_4}(\vec{p}_4)] [\bar{u}_{r_1}(\vec{p}_1) \Gamma v_{r_2}(\vec{p}_2)] [\bar{u}_{r_3}(\vec{p}_3) \Gamma u_{r_4}(\vec{p}_4)], \quad (2.35)$$

donde  $\vec{Q} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_4 - \vec{p}_3$  es el momento transferido, el cual se conserva en la desintegración. Este nuevo operador es mucho más complejo que el operador para el modelo  ${}^3P_0$  ya que, al contemplar interacciones entre quarks y gluones, se tiene que considerar el cambio de momento de los

quarks. Debido al posible cambio de momentos, este tipo de interacción cambia el término de Espín-Espacio de la matriz de transición (2.15). Los términos de color y sabor se mantienen iguales.

# Capítulo 3

---

## Resultados, conclusiones y recomendaciones

---

Una vez introducidas todas las herramientas necesarias para calcular el ancho de desintegración, se procede con el cálculo del mismo. Dada la extensión de algunas de estas cuentas, las mismas fueron puestas en el Anexo A en caso de ser necesario.

### 3.1. Resultados

Se comenzó calculando la amplitud de transición

$$\begin{aligned} \langle BC|T|A\rangle = & \\ & -\sqrt{3}\gamma' \sum_{\mu,\nu} \int d^3 K_B d^3 K_C d^3 p_\alpha d^3 p_\beta d^3 p_\eta d^3 p_\delta d^3 p_\epsilon d^3 p_\zeta d^3 p_\sigma d^3 p_\tau d^3 p_\mu d^3 p_\nu \\ & \delta^{(3)}(\vec{K} - \vec{K}_0) \delta^{(3)}(\vec{K}_A - \vec{P}_A) \delta^{(3)}(\vec{K}_B - \vec{P}_B) \delta^{(3)}(\vec{K}_C - \vec{P}_C) \delta^{(3)}(\vec{p}_\mu + \vec{p}_\nu) \\ & \sum_{m, M_{BC}, M_B, M_C, M_{I_B}, M_{I_C}} \langle J_B M_B J_C M_C | J_{BC} M_{BC} \rangle \langle I_B M_{I_B} I_C M_{I_C} | I_{BC} M_{I_{BC}} \rangle \quad (3.1) \\ & \langle J_{BC} M_{BC} l m | J_A M_A \rangle \frac{\delta(k - k_0)}{k} Y_{lm}^*(\hat{k}) \left[ \mathcal{Y}_1 \left( \frac{\vec{p}_\mu - \vec{p}_\nu}{2} \right) \otimes (s_\mu s_\nu) 1 \right]_0 \\ & \langle 0 | b_\tau(\vec{p}_\tau) a_\delta(\vec{p}_\delta) \phi_C^*(\vec{p}_\delta, \vec{p}_\tau) a_\epsilon(\vec{p}_\epsilon) a_\zeta(\vec{p}_\zeta) a_\sigma(\vec{p}_\sigma) \phi_B^*(\vec{p}_\sigma, \vec{p}_\zeta, \vec{p}_\epsilon) \\ & a_\mu^\dagger(\vec{p}_\mu) b_\nu^\dagger(\vec{p}_\nu) \phi_A(\vec{p}_\alpha, \vec{p}_\beta, \vec{p}_\eta) a_\alpha^\dagger(\vec{p}_\alpha) a_\beta^\dagger(\vec{p}_\beta) a_\eta^\dagger(\vec{p}_\eta) | 0 \rangle. \end{aligned}$$

Para simplificar esta expresión fue necesario calcular el siguiente pro-

ducto de operadores creación y destrucción,

$$\langle 0|b_\tau a_\sigma a_\zeta a_\epsilon a_\delta a_\mu^\dagger b_\nu^\dagger a_\alpha^\dagger a_\beta^\dagger a_\eta^\dagger|0\rangle, \quad (3.2)$$

donde se sacan las funciones de onda radiales al no operar en los estados del campo. Para resolver este término, se usó los anticonmutadores de los operadores (ver A.1) obteniendo así una serie de deltas,

$$\begin{aligned} \langle 0|b_\tau a_\sigma a_\zeta a_\epsilon a_\delta a_\mu^\dagger b_\nu^\dagger a_\alpha^\dagger a_\beta^\dagger a_\eta^\dagger|0\rangle = & \\ & \delta_{\tau\nu}\delta_{\delta\mu}\delta_{\epsilon\alpha}\delta_{\zeta\beta}\delta_{\sigma\eta} - \delta_{\tau\nu}\delta_{\delta\mu}\delta_{\epsilon\alpha}\delta_{\sigma\beta}\delta_{\zeta\eta} - \delta_{\tau\nu}\delta_{\delta\mu}\delta_{\zeta\alpha}\delta_{\epsilon\beta}\delta_{\sigma\eta} - \delta_{\tau\nu}\delta_{\epsilon\mu}\delta_{\delta\alpha}\delta_{\zeta\beta}\delta_{\sigma\eta} \\ & + \delta_{\tau\nu}\delta_{\delta\mu}\delta_{\zeta\alpha}\delta_{\sigma\beta}\delta_{\epsilon\eta} + \delta_{\tau\nu}\delta_{\delta\mu}\delta_{\sigma\alpha}\delta_{\epsilon\beta}\delta_{\zeta\eta} + \delta_{\tau\nu}\delta_{\epsilon\mu}\delta_{\delta\alpha}\delta_{\sigma\beta}\delta_{\zeta\eta} + \delta_{\tau\nu}\delta_{\epsilon\mu}\delta_{\zeta\alpha}\delta_{\delta\beta}\delta_{\sigma\eta} \\ & + \delta_{\tau\nu}\delta_{\zeta\mu}\delta_{\delta\alpha}\delta_{\epsilon\beta}\delta_{\sigma\eta} - \delta_{\tau\nu}\delta_{\delta\mu}\delta_{\sigma\alpha}\delta_{\zeta\beta}\delta_{\epsilon\eta} - \delta_{\tau\nu}\delta_{\epsilon\mu}\delta_{\zeta\alpha}\delta_{\sigma\beta}\delta_{\delta\eta} - \delta_{\tau\nu}\delta_{\epsilon\mu}\delta_{\sigma\alpha}\delta_{\delta\beta}\delta_{\zeta\eta} \quad (3.3) \\ & - \delta_{\tau\nu}\delta_{\zeta\mu}\delta_{\delta\alpha}\delta_{\sigma\beta}\delta_{\epsilon\eta} - \delta_{\tau\nu}\delta_{\zeta\mu}\delta_{\epsilon\alpha}\delta_{\delta\beta}\delta_{\sigma\eta} - \delta_{\tau\nu}\delta_{\sigma\mu}\delta_{\delta\alpha}\delta_{\epsilon\beta}\delta_{\zeta\eta} + \delta_{\tau\nu}\delta_{\epsilon\mu}\delta_{\sigma\alpha}\delta_{\zeta\beta}\delta_{\delta\eta} \\ & + \delta_{\tau\nu}\delta_{\zeta\mu}\delta_{\epsilon\alpha}\delta_{\sigma\beta}\delta_{\delta\eta} + \delta_{\tau\nu}\delta_{\zeta\mu}\delta_{\sigma\alpha}\delta_{\delta\beta}\delta_{\epsilon\eta} + \delta_{\tau\nu}\delta_{\sigma\mu}\delta_{\delta\alpha}\delta_{\zeta\beta}\delta_{\epsilon\eta} + \delta_{\tau\nu}\delta_{\sigma\mu}\delta_{\epsilon\alpha}\delta_{\delta\beta}\delta_{\zeta\eta} \\ & - \delta_{\tau\nu}\delta_{\zeta\mu}\delta_{\sigma\alpha}\delta_{\epsilon\beta}\delta_{\delta\eta} - \delta_{\tau\nu}\delta_{\sigma\mu}\delta_{\epsilon\alpha}\delta_{\zeta\beta}\delta_{\delta\eta} - \delta_{\tau\nu}\delta_{\sigma\mu}\delta_{\zeta\alpha}\delta_{\delta\beta}\delta_{\epsilon\eta} + \delta_{\tau\nu}\delta_{\sigma\mu}\delta_{\zeta\alpha}\delta_{\epsilon\beta}\delta_{\delta\eta}. \end{aligned}$$

Se nota que, con el fin de simplificar notación, cada delta denota una equivalencia entre partículas y momentos,

$$\delta_{\tau\nu} = \delta_{\tau\nu}\delta^{(3)}(\vec{p}_\tau - \vec{p}_\nu). \quad (3.4)$$

Ahora, cada producto de deltas puede ser representado mediante un diagrama de Feynman. Por ejemplo, el término  $\delta_{\tau\nu}\delta_{\epsilon\mu}\delta_{\zeta\alpha}\delta_{\sigma\beta}\delta_{\delta\eta}$  da el diagrama de la Figura 2.1. Usando estas equivalencias entre diagramas y términos se pudo simplificar la expresión. Así, los productos con la delta  $\delta_{\delta\mu}$  se eliminaron ya que implicaría un mesón creado del vacío que no interactúa. Estos términos no representan un proceso físico de interés ya que no provoca una desintegración. De igual manera, si se intercambian los quarks observadores del barión, como en la Figura 3.1, se genera dos diagramas equivalentes y, por ende, dos términos equivalentes.

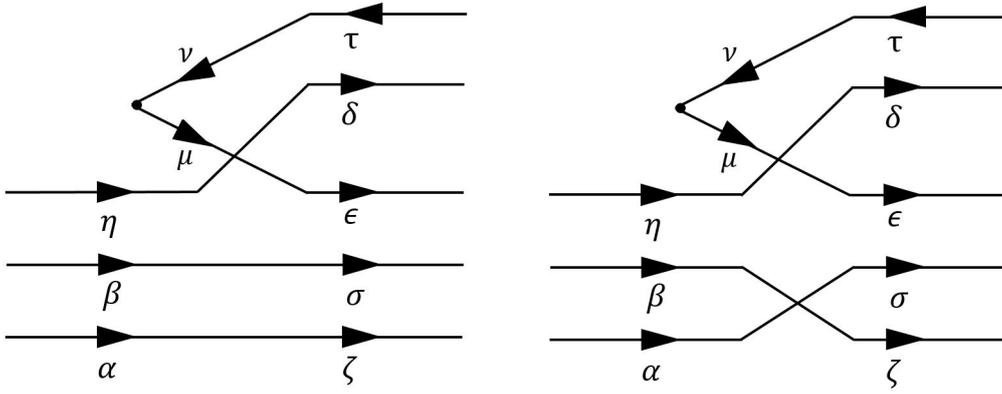


Figura 3.1: Diagramas equivalentes por reordenación de quarks.

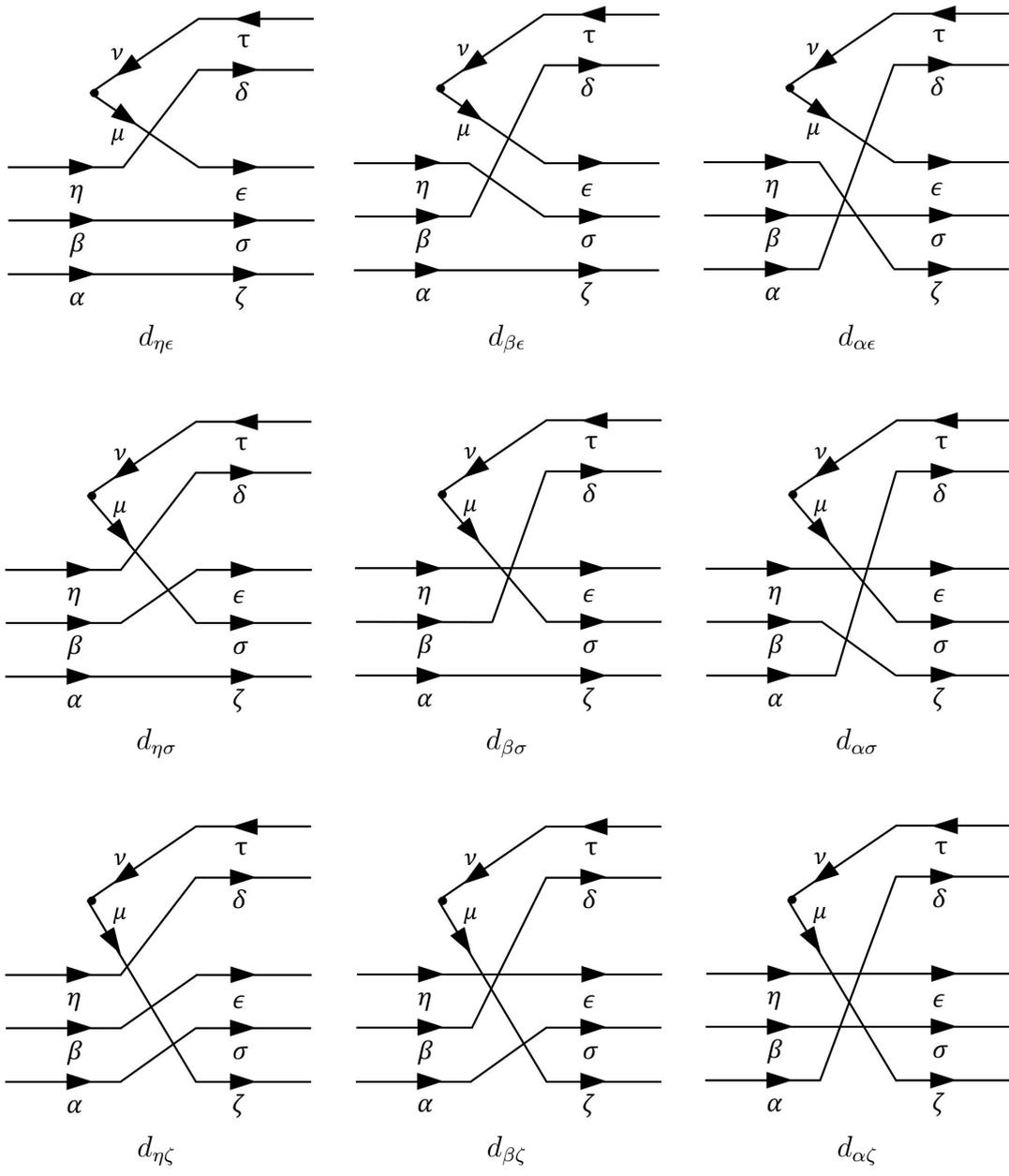
Se obtuvo la siguiente expresión simplificada,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \langle 0 | b_\tau a_\sigma a_\zeta a_\epsilon a_\delta a_\mu^\dagger b_\nu^\dagger a_\alpha^\dagger a_\beta^\dagger a_\eta^\dagger | 0 \rangle = & \\
& -\delta_{\tau\nu} \delta_{\epsilon\mu} \delta_{\zeta\alpha} \delta_{\sigma\beta} \delta_{\delta\eta} + \delta_{\tau\nu} \delta_{\epsilon\mu} \delta_{\zeta\alpha} \delta_{\delta\beta} \delta_{\sigma\eta} + \delta_{\tau\nu} \delta_{\epsilon\mu} \delta_{\delta\alpha} \delta_{\sigma\beta} \delta_{\zeta\eta} \\
& + \delta_{\tau\nu} \delta_{\sigma\mu} \delta_{\zeta\alpha} \delta_{\epsilon\beta} \delta_{\delta\eta} - \delta_{\tau\nu} \delta_{\sigma\mu} \delta_{\zeta\alpha} \delta_{\delta\beta} \delta_{\epsilon\eta} + \delta_{\tau\nu} \delta_{\sigma\mu} \delta_{\delta\alpha} \delta_{\zeta\beta} \delta_{\epsilon\eta} \\
& - \delta_{\tau\nu} \delta_{\zeta\mu} \delta_{\sigma\alpha} \delta_{\epsilon\beta} \delta_{\delta\eta} + \delta_{\tau\nu} \delta_{\zeta\mu} \delta_{\sigma\alpha} \delta_{\delta\beta} \delta_{\epsilon\eta} - \delta_{\tau\nu} \delta_{\zeta\mu} \delta_{\delta\alpha} \delta_{\sigma\beta} \delta_{\epsilon\eta}.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Cada uno de estos términos tiene asociado un diagrama de Feynman los cuales se presentan en el Cuadro 3.1. Los diagramas obtenidos se diferencian por la forma en la que se ordenan los quarks. Suponiendo que A es una partícula que contiene un quark pesado, las partículas finales serían distintas dependiendo de cual recibe este quark. Sin embargo, si todos los quarks son ligeros las diferencias de sus masas son despreciables y, por ende, se puede tomar las partículas como equivalentes para el proceso. Esto simplifica la cantidad de diagramas dado que todos son equivalentes diferenciándose solamente por la notación usada. Así, se obtuvo la siguiente expresión,

$$\langle 0 | b_\tau a_\sigma a_\zeta a_\epsilon a_\delta a_\mu^\dagger b_\nu^\dagger a_\alpha^\dagger a_\beta^\dagger a_\eta^\dagger | 0 \rangle = -18 \delta_{\tau\nu} \delta_{\epsilon\mu} \delta_{\zeta\alpha} \delta_{\sigma\beta} \delta_{\delta\eta}. \tag{3.6}$$

Se nota que se podría tomar cualquier otro término de la expresión (3.5) al ser todos equivalentes. En este caso, se toma el diagrama  $d_{\eta\epsilon}$  que es el mismo de la Figura 2.1. Además, se agrega un factor 18 en la expresión para tomar en cuenta el aporte de todos los diagramas.



Cuadro 3.1: Procesos para el decaimiento de un barión. Debajo de cada diagrama se pone la notación ( $d_{ab}$ ) usada para identificarlo, donde  $a$  es el quark del barión inicial que termina en el mesón y  $b$  es el quark del barión final que proviene del par creado.

Así, al resolver el braket de operadores, se obtuvo la siguiente amplitud de transición,

$$\begin{aligned}
\langle BC|T|A\rangle = & \\
& 18\gamma'\sqrt{3}\sum_{\mu,\nu}\int d^3K_B d^3K_C d^3p_\alpha d^3p_\beta d^3p_\eta d^3p_\delta d^3p_\epsilon d^3p_\zeta d^3p_\sigma d^3p_\tau d^3p_\mu d^3p_\nu \\
& \delta^{(3)}(\vec{K}-\vec{K}_0)\delta^{(3)}(\vec{K}_A-\vec{P}_A)\delta^{(3)}(\vec{K}_B-\vec{P}_B)\delta^{(3)}(\vec{K}_C-\vec{P}_C)\delta^{(3)}(\vec{p}_\mu+\vec{p}_\nu) \\
& \sum_{m,M_{BC},M_B,M_C,M_{I_B},M_{I_C}} \langle J_B M_B J_C M_C | J_{BC} M_{BC} \rangle \langle I_B M_{I_B} I_C M_{I_C} | I_{BC} M_{I_{BC}} \rangle \quad (3.7) \\
& \langle J_{BC} M_{BC} l m | J_A M_A \rangle \frac{\delta(k-k_0)}{k} Y_{lm}^*(\hat{k}) \left[ \mathcal{Y}_1\left(\frac{\vec{p}_\mu-\vec{p}_\nu}{2}\right) \otimes (s_\mu s_\nu) 1 \right]_0 \\
& \phi_B^*(\vec{p}_\sigma, \vec{p}_\zeta, \vec{p}_\epsilon) \phi_C^*(\vec{p}_\delta, \vec{p}_\tau) \phi_A(\vec{p}_\alpha, \vec{p}_\beta, \vec{p}_\eta) \delta_{\tau\nu} \delta_{\epsilon\mu} \delta_{\zeta\alpha} \delta_{\sigma\beta} \delta_{\delta\eta}.
\end{aligned}$$

Se calculó cada número cuántico por separado, aprovechando la independencia entre ellos vista en (2.15).

### 3.1.1. Color

Para el término de color fue necesario calcular el siguiente producto,

$$\mathcal{I}_{Color} = \langle C(\epsilon\sigma\zeta)C(\delta\tau) | C(\alpha\beta\eta)C(\mu\nu) \rangle, \quad (3.8)$$

donde se agregó la función de color del par creado del vacío.

Reemplazando las funciones de color de (2.17) se obtuvo el siguiente sumatorio,

$$\mathcal{I}_{Color} = \frac{1}{18} \sum_{\alpha\beta\eta} \sum_{\mu\nu} \sum_{\epsilon\sigma\zeta} \sum_{\delta\tau} \epsilon_{\alpha\beta\eta} \delta_{\mu\nu} \epsilon_{\epsilon\sigma\zeta} \delta_{\delta\tau}. \quad (3.9)$$

Se simplificó usando las equivalencias de partículas obtenidas en la expresión (3.6),

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{Color} &= \frac{1}{18} \sum_{\alpha\beta\eta\mu} \sum_{\epsilon\sigma\zeta\delta} \epsilon_{\alpha\beta\eta} \epsilon_{\epsilon\sigma\zeta} \delta_{\delta\mu} \delta_{\epsilon\mu} \delta_{\zeta\alpha} \delta_{\sigma\beta} \delta_{\delta\eta} \\
&= \frac{1}{18} \sum_{\alpha\beta\eta} \sum_{\delta} \epsilon_{\alpha\beta\eta} \epsilon_{\delta\beta\alpha} \delta_{\delta\eta} \\
&= \frac{1}{18} \sum_{\alpha\beta\eta} \epsilon_{\alpha\beta\eta} \epsilon_{\eta\beta\alpha}.
\end{aligned} \quad (3.10)$$

Ahora, al tener dos símbolos de Levi-Civita con coeficientes invertidos,

cuando uno es positivo el otro es negativo y viceversa. Como se tiene 6 valores posibles distintos de 0, se puede simplificar el sumatorio obteniendo la aportación de las funciones de color,

$$\mathcal{I}_{Color} = -\frac{1}{3}. \quad (3.11)$$

### 3.1.2. Sabor

La componente de sabor fue calculada mediante un acople entre los valores iniciales y finales,

$$\mathcal{I}_{Sabor} = \langle [(t_\mu t_\beta t_\alpha) I_B (t_\nu t_\eta) I_C] I_A | [(t_\alpha t_\beta t_\eta) I_A (t_\mu t_\nu) 0] I_A \rangle, \quad (3.12)$$

donde se usó las equivalencias de partículas y la conservación del isoespín para simplificar la notación.

Debido a que los acoples se calculan en parejas, fue necesario acoplar los isoespines de los quarks en los bariones. Usando el sistema de coordenadas  $(\rho, \lambda)$  se definió,

$$t_\rho = t_\alpha \otimes t_\beta. \quad (3.13)$$

Este es el isoespín de los quarks espectadores.

Al reemplazar se obtuvo la siguiente expresión,

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{Sabor} = & (-1)^{t_\alpha + t_\beta + t_\mu - I_B} (-1)^{t_\nu + t_\eta - I_C} \\ & \langle [(t_\rho t_\mu) I_B (t_\eta t_\nu) I_C] I_A | [(t_\rho t_\eta) I_A (t_\mu t_\nu) 0] I_A \rangle, \end{aligned} \quad (3.14)$$

donde fue necesario agregar términos de fase al reordenar los isoespines. Se calculó el acople mediante un símbolo  $9j$ ,

$$\mathcal{I}_{Sabor} = (-1)^{t_\alpha + t_\beta + t_\mu - I_B} (-1)^{t_\nu + t_\eta - I_C} \Pi_{I_B, I_C, I_A, 0} \begin{Bmatrix} t_\rho & t_\mu & I_B \\ t_\eta & t_\nu & I_C \\ I_A & 0 & I_A \end{Bmatrix}. \quad (3.15)$$

Por último, al tener un 0 en uno de sus componentes, se pudo simpli-

ficar el  $9J$  obteniendo un  $6J$ ,

$$\mathcal{I}_{Sabor} = (-1)^{t_\alpha+t_\beta+t_\mu+t_\eta+t_\rho+I_A-I_B} \frac{\Pi_{I_B, I_C}}{\Pi_{t_\mu}} \begin{Bmatrix} t_\eta & I_C & t_\mu \\ I_B & t_{\rho_A} & I_A \end{Bmatrix}, \quad (3.16)$$

donde se usó la equivalencia  $t_\mu = t_\nu$  que surge de la simplificación.

### 3.1.3. Espín y espacio

La parte de espín-espacio fue separada en dos componentes. Una que abarque la conservación de momentos angulares  $\mathcal{J}$  y otra para la conservación de espín y momentos lineales  $\mathcal{E}$ ,

$$\mathcal{I}_{Espin-Espacio} = 18\gamma'\sqrt{3} \sum_{L_{BC}, L, S} \mathcal{J}(A \rightarrow BC)\mathcal{E}(A \rightarrow BC), \quad (3.17)$$

donde el factor inicial son las constantes de la ecuación (3.7).

Para lograr esta separación de componentes fue necesario pasar de un acople  $J-J$  a un acople  $L-S$  como se muestra en el Anexo A.2. Se obtuvo la siguiente parte para el momento angular,

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(A \rightarrow BC) = & \\ & (-1)^{3/2-S_B-S_C+L_A+L+l+J_A-J_{BC}} \\ & \Pi_{L_{BC}, L, L, J_B, J_C, J_{BC}, S_A, S_B, S_C, S, S} \\ & \begin{Bmatrix} L & S & J_A \\ S_A & L_A & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} S & L_{BC} & J_{BC} \\ l & J_A & L \end{Bmatrix} \\ & \begin{Bmatrix} s_\rho & 1/2 & S_B \\ 1/2 & 1/2 & S_C \\ S_A & 1 & S \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} L_B & S_B & J_B \\ L_C & S_C & J_C \\ L_{BC} & S & J_{BC} \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

y la siguiente componente de espín y momento lineal,

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(A \rightarrow BC) = & \int d^3 K_B d^3 K_C d^3 p_\alpha d^3 p_\beta d^3 p_\eta d^3 p_\mu d^3 p_\nu \delta^{(3)}(\vec{K} - \vec{K}_0) \\
& \delta^{(3)}(\vec{K}_A - \vec{P}_A) \delta^{(3)}(\vec{K}_B - \vec{P}_B) \delta^{(3)}(\vec{K}_C - \vec{P}_C) \delta^{(3)}(\vec{p}_\mu + \vec{p}_\nu) \frac{\delta(k - k_0)}{k} \\
& \left\{ [\phi_B(\vec{p}_\sigma, \vec{p}_\zeta, \vec{p}_\epsilon) \phi_C(\vec{p}_\delta, \vec{p}_\tau)]_{L_{BC}} Y_l(\hat{k}) \right\}_L^* \left\{ \phi_A(\vec{p}_\alpha, \vec{p}_\beta, \vec{p}_\eta) \mathcal{Y}_1 \left( \frac{\vec{p}_\mu - \vec{p}_\nu}{2} \right) \right\}_L.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Donde, al igual que al calcular el componente de sabor, se introduce un nuevo espín y momento angular para los quarks observadores,

$$\begin{aligned}
L_\rho &= L_\alpha \otimes L_\beta \\
s_\rho &= s_\alpha \otimes s_\beta.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

La parte de espín fue simplificada mediante el colapso de deltas y la definición de un nuevo conjunto de coordenadas usando los momentos del centro de masa y los momentos relativos,

$$\begin{aligned}
\vec{p}_\alpha &= \frac{\omega_\alpha}{\omega_{\alpha\beta\eta}} \vec{P}_A + \frac{\omega_\alpha}{\omega_{\alpha\beta}} \vec{p}_{\lambda_A} - \vec{p}_\rho \\
\vec{p}_\beta &= \frac{\omega_\beta}{\omega_{\alpha\beta\eta}} \vec{P}_A + \frac{\omega_\beta}{\omega_{\alpha\beta}} \vec{p}_{\lambda_A} + \vec{p}_\rho \\
\vec{p}_\eta &= \frac{\omega_\eta}{\omega_{\alpha\beta\eta}} \vec{P}_A - \vec{p}_{\lambda_A} \\
\vec{K}_B &= \frac{\omega_B}{\omega_{BC}} \vec{K} + \vec{k} \\
\vec{K}_C &= \frac{\omega_C}{\omega_{BC}} \vec{K} - \vec{k} \\
\vec{p} &= \vec{p}_\mu = \vec{p}_\nu.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Al reemplazar estos se obtuvo la siguiente expresión,

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(A \rightarrow BC) = & \int d^3 p d^3 k d^3 p_\rho \frac{\delta(k - k_0)}{k^{l+1}} \\
& \left\{ \phi_B(\vec{p}_\sigma, \vec{p}_\zeta, \vec{p}_\epsilon) \phi_C(\vec{p}_\delta, \vec{p}_\tau) \mathcal{Y}_l(\hat{k}) \right\}_L^* \left\{ \phi_A(\vec{p}_\alpha, \vec{p}_\beta, \vec{p}_\eta) \mathcal{Y}_1 \left( \frac{\vec{p}_\mu - \vec{p}_\nu}{2} \right) \right\}_L.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Para resolver esta parte fue necesario reemplazar las funciones de onda radiales por sus expansiones en gaussianas. Adicionalmente, se sim-

plificó los acoples de la última línea usando las propiedades de los  $9J$  y la ortogonalidad de los armónicos esféricos. Todo este desarrollo está en el Anexo A.3. Se presenta acá la expresión final para el término de espín y momento lineal,

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(A_{ik} \rightarrow B_{jk} C_V) = & \sum_{ijkl'} d_i^{\lambda_A} d_j^{\lambda_B} (d_k^\rho)^2 d_{V'}^C \exp(-Dk_0^2) \\
& \sum_{l_1, l_2, \dots, l_8, l_9} B_{l_1, l_2}^{l_4} B_{L_{\lambda_A} - l_1, 1 - l_2}^{l_5} B_{l_6, l_7}^{l_9} B_{L_{\lambda_B} - l_6, L_C - l_7}^{l_5} B_{l_9, l}^{l_4} C_{l_1}^{L_{\lambda_A}} C_{l_2}^1 C_{l_6}^{L_{\lambda_B}} C_{l_7}^{L_C} \\
& \prod_{L_{BC}, L_A, L_B, L_C, L_{\lambda_A}, L_{\lambda_B}, l_3, l_3, l_4, l_4, l_5, l_5, l_8, l_8, l_9, 1} \\
& (1-x)^{l_1} x^{l_2} \left( \frac{\omega_\mu}{\omega_{\alpha\beta\mu}} - x \right)^{l_6} \left( \frac{\omega_\mu}{\omega_{\eta\mu}} - x \right)^{l_7} \\
& (-1)^{L_{BC} + L_A + L_B + L_{\lambda_A} + L_{\lambda_B} + L_\rho - l_1 - l_6 - l_7 + l_5 + l_4 + 1} (2)^{L_\rho - \frac{1}{2}} \\
& k_0^{l_1 + l_2 + l_6 + l_7 + 1} B^{-\frac{1}{2}(L_C + L_{\lambda_A} + L_{\lambda_B} - l_1 - l_2 - l_6 - l_7 + 4)} \rho_k^{-\frac{1}{2}(2L_\rho + 3)} \tag{3.23} \\
& \Gamma\left(\frac{1}{2}(L_C + L_{\lambda_A} + L_{\lambda_B} - l_1 - l_2 - l_6 - l_7 + 4)\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}(2L_\rho + 3)\right) \\
& \left\{ \begin{matrix} L_{\lambda_A} & L_\rho & L_A \\ L & 1 & l_3 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} L_{\lambda_B} & L_\rho & L_B \\ L_{BC} & L_C & l_8 \end{matrix} \right\} \\
& \left\{ \begin{matrix} L_\rho & l_8 & L_{BC} \\ l & L & l_3 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} l_5 & l_9 & l_8 \\ l & l_3 & l_4 \end{matrix} \right\} \\
& \left\{ \begin{matrix} l_1 & L_{\lambda_A} - l_1 & L_{\lambda_A} \\ l_2 & 1 - l_2 & 1 \\ l_4 & l_5 & l_3 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} l_6 & L_{\lambda_B} - l_6 & L_{\lambda_B} \\ l_7 & L_C - l_7 & L_C \\ l_9 & l_5 & l_8 \end{matrix} \right\}.
\end{aligned}$$

Los coeficientes  $B_{a,b}^c$  y  $C_a^b$  surgen al operar los acoples angulares y se definen de la siguiente manera,

$$B_{a,b}^c = (-1)^c \sqrt{\frac{(2a+1)(2b+1)}{4\pi}} \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C_b^a = \sqrt{\frac{4\pi(2a+1)!}{(2b+1)!(2(a-b)+1)!}} \tag{3.24}$$

y los valores  $B$ ,  $D$ ,  $\rho_k$  y  $x$  son introducidos al hacer la expansión en gaussianas.

Para resolver por completo este término, se tiene que dar los límites de los  $l_i$  en los sumatorios. Muchos de estos límites vienen dados al simplificar los acoples de momento. Los límites faltantes fueron calculados

mediante las relaciones triangulares de los  $6J$  y  $9J$ . Se obtuvo así los siguientes límites:

- Los sumatorios sobre  $i, j, k, l'$  son fijados según la precisión que requiera en la expansión gaussiana.
- $l_1$  va desde 0 hasta  $L_{\lambda_A}$ .
- $l_2$  va desde 0 hasta 1.
- $l_3$  va desde  $|L_{\lambda_A} - 1|$  hasta  $L_{\lambda_A} + 1$ .
- $l_4$  va desde  $|l_1 - l_2|$  hasta  $l_1 + l_2$ .
- $l_5$  va desde  $|L_{\lambda_A} - 1 - l_1 + l_2|$  hasta  $L_{\lambda_A} + 1 - l_1 - l_2$ , o desde  $|L_{\lambda_B} - L_C - l_6 + l_7|$  hasta  $L_{\lambda_B} + L_C - l_6 - l_7$ .
- $l_6$  va desde 0 hasta  $L_{\lambda_B}$ .
- $l_7$  va desde 0 hasta  $L_C$ .
- $l_8$  va desde  $|L_{\lambda_B} - L_C|$  hasta  $L_{\lambda_B} + L_C$ .
- $l_9$  va desde  $|l_7 - l_6|$  hasta  $l_7 + l_6$ .

Por último, se da una expresión para la matriz de transición multiplicando todos los distintos aportes calculados,

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{A \rightarrow BC} = & \\
& - 6\gamma' \sqrt{3} \sum_{L_{BC}, L, S} \sum_{ijkl'} d_i^{\lambda_A} d_j^{\lambda_B} (d_k^\rho)^2 d_{l'}^C \exp(-Dk_0^2) \\
& \sum_{l_1, l_2, \dots, l_8, l_9} B_{l_1, l_2}^{l_4} B_{L_{\lambda_A} - l_1, 1 - l_2}^{l_5} B_{l_6, l_7}^{l_9} B_{L_{\lambda_B} - l_6, L_C - l_7}^{l_5} B_{l_9, l}^{l_4} C_{l_1}^{L_{\lambda_A}} C_{l_2}^1 C_{l_6}^{L_{\lambda_B}} C_{l_7}^{L_C} \\
& \frac{1}{\prod_{t_\mu}} \prod_{L, L, J_B, J_C, J_{BC}, S_A, S_B, S_C, S, S, L_{BC}, L_{BC}, L_A, L_B, L_C, L_{\lambda_A}, L_{\lambda_B}, l_3, l_3, l_4, l_4, l_5, l_5, l_8, l_8, l_9, 1, I_B, I_C} \\
& (1-x)^{l_1} x^{l_2} \left( \frac{\omega_\mu}{\omega_{\alpha\beta\mu}} - x \right)^{l_6} \left( \frac{\omega_\mu}{\omega_{\eta\mu}} - x \right)^{l_7} \\
& (-1)^{t_\alpha + t_\beta + t_\mu + t_\eta + t_\rho + I_A - I_B - S_B - S_C + L_A + L + l + J_A - J_{BC}} \\
& (-1)^{L_{BC} + L_A + L_B + L_{\lambda_A} + L_{\lambda_B} + L_\rho - l_1 - l_6 - l_7 + l_5 + l_4 + \frac{1}{2}} (2)^{L_\rho - \frac{1}{2}} \\
& k_0^{l_1 + l_2 + l_6 + l_7 + 1} B^{-\frac{1}{2}(L_C + L_{\lambda_A} + L_{\lambda_B} - l_1 - l_2 - l_6 - l_7 + 4)} \rho_k^{-\frac{1}{2}(2L_\rho + 3)} \\
& \Gamma\left(\frac{1}{2}(L_C + L_{\lambda_A} + L_{\lambda_B} - l_1 - l_2 - l_6 - l_7 + 4)\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}(2L_\rho + 3)\right) \\
& \left\{ \begin{matrix} t_\eta & I_C & t_\mu \\ I_B & t_{\rho_A} & I_A \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} L & S & J_A \\ S_A & L_A & 1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} S & L_{BC} & J_{BC} \\ l & J_A & L \end{matrix} \right\} \\
& \left\{ \begin{matrix} s_\rho & 1/2 & S_B \\ 1/2 & 1/2 & S_C \\ S_A & 1 & S \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} L_B & S_B & J_B \\ L_C & S_C & J_C \\ L_{BC} & S & J_{BC} \end{matrix} \right\} \\
& \left\{ \begin{matrix} L_{\lambda_A} & L_\rho & L_A \\ L & 1 & l_3 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} L_{\lambda_B} & L_\rho & L_B \\ L_{BC} & L_C & l_8 \end{matrix} \right\} \\
& \left\{ \begin{matrix} L_\rho & l_8 & L_{BC} \\ l & L & l_3 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} l_5 & l_9 & l_8 \\ l & l_3 & l_4 \end{matrix} \right\} \\
& \left\{ \begin{matrix} l_1 & L_{\lambda_A} - l_1 & L_{\lambda_A} \\ l_2 & 1 - l_2 & 1 \\ l_4 & l_5 & l_3 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} l_6 & L_{\lambda_B} - l_6 & L_{\lambda_B} \\ l_7 & L_C - l_7 & L_C \\ l_9 & l_5 & l_8 \end{matrix} \right\}.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

## 3.2. Conclusiones y recomendaciones

En este trabajo se obtuvo una expresión analítica para calcular el ancho de desintegración en el decaimiento de un barión hacia un sistema mesón-barión. Mediante el modelo  ${}^3P_0$  se logró obtener caracterizar la creación de pares, obteniendo la matriz de transición del proceso. Se

usó la independencia de los números cuánticos y las equivalencias entre diagramas de Feynman para simplificar la expresión lo más posible, sin perder mucha generalidad. La expresión obtenida puede ser implementada en un código computacional para calcular el ancho de decaimiento con solo conocer las propiedades de las partículas finales e iniciales.

Durante el desarrollo de este trabajo se supuso que todos los quarks involucrados en la desintegración son quarks ligeros, simplificando así los distintos procesos de decaimiento. En caso se busque trabajar en el espectro de quarks pesados, es necesario revisar qué procesos son equivalentes mediante sus diagramas de Feynman. Adicionalmente, es recomendable definir el sistema de coordenadas  $(\rho, \lambda)$  de manera cautelosa, dado que muchas simplificaciones provienen de tener un par de quarks espectadores. Por último, muchas expresiones aparecen de manera frecuente y es conveniente usar una notación más simple para ellas.

# Capítulo A

---

## Cálculo de la matriz de transición

---

En este anexo se presentan los cálculos auxiliares requeridos para obtener la matriz de transición. Muchos cálculos son retomados del anterior capítulo, en esos casos la expresión de partida es especificada.

### A.1. Ordenamiento de deltas

Partiendo de la expresión (3.2) se ordena los operadores usando las relaciones de anticonmutación de (1.6). Primero, se simplifica la notación de la siguiente manera,

$$\langle 0 | b_\tau a_\sigma a_\zeta a_\epsilon a_\delta a_\mu^\dagger b_\nu^\dagger a_\alpha^\dagger a_\beta^\dagger a_\eta^\dagger | 0 \rangle = \langle b_\tau a_\sigma a_\zeta a_\epsilon a_\delta a_\mu^\dagger b_\nu^\dagger a_\alpha^\dagger a_\beta^\dagger a_\eta^\dagger \rangle. \quad (\text{A.1})$$

Se ordena primero los operadores  $b_q$  y luego los operadores  $a_q$ , encerrando los términos que solo contienen deltas.

$$\begin{aligned}
& \langle b_\tau b_\nu^\dagger a_\sigma a_\zeta a_\epsilon a_\delta a_\mu^\dagger a_\alpha^\dagger a_\beta^\dagger a_\eta^\dagger \rangle = \\
& \langle (\delta_{\tau\nu} - b_\nu^\dagger b_\tau) a_\sigma a_\zeta a_\epsilon a_\delta a_\mu^\dagger a_\alpha^\dagger a_\beta^\dagger a_\eta^\dagger \rangle = \\
& \delta_{\tau\nu} \langle a_\sigma a_\zeta a_\epsilon (\delta_{\delta\mu} - a_\mu^\dagger a_\delta) a_\alpha^\dagger a_\beta^\dagger a_\eta^\dagger \rangle - \langle b_\nu^\dagger b_\tau a_\sigma a_\zeta a_\epsilon a_\delta a_\mu^\dagger a_\alpha^\dagger a_\beta^\dagger a_\eta^\dagger \rangle = \\
& \delta_{\tau\nu} \delta_{\delta\mu} \langle a_\sigma a_\zeta a_\epsilon a_\alpha^\dagger a_\beta^\dagger a_\eta^\dagger \rangle - \delta_{\tau\nu} \langle a_\sigma a_\zeta a_\epsilon a_\mu^\dagger a_\delta a_\alpha^\dagger a_\beta^\dagger a_\eta^\dagger \rangle = \\
& \delta_{\tau\nu} \delta_{\delta\mu} \langle a_\sigma a_\zeta (\delta_{\epsilon\alpha} - a_\alpha^\dagger a_\epsilon) a_\beta^\dagger a_\eta^\dagger \rangle - \delta_{\tau\nu} \langle a_\sigma a_\zeta (\delta_{\epsilon\mu} - a_\mu^\dagger a_\epsilon) a_\delta a_\alpha^\dagger a_\beta^\dagger a_\eta^\dagger \rangle = \\
& \delta_{\tau\nu} \delta_{\delta\mu} \delta_{\epsilon\alpha} \langle a_\sigma a_\zeta a_\beta^\dagger a_\eta^\dagger \rangle - \delta_{\tau\nu} \delta_{\delta\mu} \langle a_\sigma a_\zeta a_\alpha^\dagger a_\epsilon a_\beta^\dagger a_\eta^\dagger \rangle \\
& - \delta_{\tau\nu} \delta_{\epsilon\mu} \langle a_\sigma a_\zeta a_\delta a_\alpha^\dagger a_\beta^\dagger a_\eta^\dagger \rangle + \delta_{\tau\nu} \langle a_\sigma a_\zeta a_\mu^\dagger a_\epsilon a_\delta a_\alpha^\dagger a_\beta^\dagger a_\eta^\dagger \rangle = \\
& \delta_{\tau\nu} \delta_{\delta\mu} \delta_{\epsilon\alpha} \langle a_\sigma (\delta_{\zeta\beta} - a_\beta^\dagger a_\zeta) a_\eta^\dagger \rangle - \delta_{\tau\nu} \delta_{\delta\mu} \langle a_\sigma (\delta_{\zeta\alpha} - a_\alpha^\dagger a_\zeta) a_\epsilon a_\beta^\dagger a_\eta^\dagger \rangle \\
& - \delta_{\tau\nu} \delta_{\epsilon\mu} \langle a_\sigma a_\zeta (\delta_{\delta\alpha} - a_\alpha^\dagger a_\delta) a_\beta^\dagger a_\eta^\dagger \rangle + \delta_{\tau\nu} \langle a_\sigma (\delta_{\zeta\mu} - a_\mu^\dagger a_\zeta) a_\epsilon a_\delta a_\alpha^\dagger a_\beta^\dagger a_\eta^\dagger \rangle = \tag{A.2} \\
& \delta_{\tau\nu} \delta_{\delta\mu} \delta_{\epsilon\alpha} \delta_{\zeta\beta} \langle a_\sigma a_\eta^\dagger \rangle - \delta_{\tau\nu} \delta_{\delta\mu} \delta_{\epsilon\alpha} \langle a_\sigma a_\beta^\dagger a_\zeta a_\eta^\dagger \rangle \\
& - \delta_{\tau\nu} \delta_{\delta\mu} \delta_{\zeta\alpha} \langle a_\sigma a_\epsilon a_\beta^\dagger a_\eta^\dagger \rangle + \delta_{\tau\nu} \delta_{\delta\mu} \langle a_\sigma a_\alpha^\dagger a_\zeta a_\epsilon a_\beta^\dagger a_\eta^\dagger \rangle \\
& - \delta_{\tau\nu} \delta_{\epsilon\mu} \delta_{\delta\alpha} \langle a_\sigma a_\zeta a_\beta^\dagger a_\eta^\dagger \rangle + \delta_{\tau\nu} \delta_{\epsilon\mu} \langle a_\sigma a_\zeta a_\alpha^\dagger a_\delta a_\beta^\dagger a_\eta^\dagger \rangle \\
& + \delta_{\tau\nu} \delta_{\zeta\mu} \langle a_\sigma a_\epsilon a_\delta a_\alpha^\dagger a_\beta^\dagger a_\eta^\dagger \rangle - \delta_{\tau\nu} \langle a_\sigma a_\mu^\dagger a_\zeta a_\epsilon a_\delta a_\alpha^\dagger a_\beta^\dagger a_\eta^\dagger \rangle = \\
& \boxed{\delta_{\tau\nu} \delta_{\delta\mu} \delta_{\epsilon\alpha} \delta_{\zeta\beta} \delta_{\sigma\eta}} - \delta_{\tau\nu} \delta_{\delta\mu} \delta_{\epsilon\alpha} \langle (\delta_{\sigma\beta} - a_\beta^\dagger a_\sigma) a_\zeta a_\eta^\dagger \rangle \\
& - \delta_{\tau\nu} \delta_{\delta\mu} \delta_{\zeta\alpha} \langle a_\sigma (\delta_{\epsilon\beta} - a_\beta^\dagger a_\epsilon) a_\eta^\dagger \rangle + \delta_{\tau\nu} \delta_{\delta\mu} \langle (\delta_{\sigma\alpha} - a_\alpha^\dagger a_\sigma) a_\zeta a_\epsilon a_\beta^\dagger a_\eta^\dagger \rangle \\
& - \delta_{\tau\nu} \delta_{\epsilon\mu} \delta_{\delta\alpha} \langle a_\sigma (\delta_{\zeta\beta} - a_\beta^\dagger a_\zeta) a_\eta^\dagger \rangle + \delta_{\tau\nu} \delta_{\epsilon\mu} \langle a_\sigma (\delta_{\zeta\alpha} - a_\alpha^\dagger a_\zeta) a_\delta a_\beta^\dagger a_\eta^\dagger \rangle \\
& + \delta_{\tau\nu} \delta_{\zeta\mu} \langle a_\sigma a_\epsilon (\delta_{\delta\alpha} - a_\alpha^\dagger a_\delta) a_\beta^\dagger a_\eta^\dagger \rangle - \delta_{\tau\nu} \langle (\delta_{\sigma\mu} - a_\mu^\dagger a_\sigma) a_\zeta a_\epsilon a_\delta a_\alpha^\dagger a_\beta^\dagger a_\eta^\dagger \rangle
\end{aligned}$$

Se elimina el término  $\langle a_\eta^\dagger a_\sigma \rangle$  al ser igual a 0. Este proceso es repetido hasta tener una suma de deltas presentada en la expresión (3.3).

## A.2. Cálculo de $\mathcal{J}(A \rightarrow BC)$

Para poder separar estas la componente de espín-espacio ( $\mathcal{I}_{Espin-Espacio}$ ) es necesario pasar de todas las conservaciones de momento angular de un acople  $J - J$  a un acople  $L - S$ , para ello se usa símbolos  $9J$ . Por ejemplo, se transformaría así el acople para el estado inicial junto al par creado:

$$\{[L_A S_A]_{J_A} [11]_0\}_{J_A} = \sum_{L,S} \Pi_{L,S,J_A,0} \begin{Bmatrix} L_A & S_A & J_A \\ 1 & 1 & 0 \\ L & S & J_A \end{Bmatrix} \{[L_A 1]_L [S_A 1]_S\}_{J_A}, \tag{A.3}$$

donde se cambia la notación para denotar más fácilmente los acoples,

$$|[(L_A S_A)_{J_A}, (11)_0]_{J_A}\rangle = \{[L_A S_A]_{J_A} [11]_0\}_{J_A}. \quad (\text{A.4})$$

Al tener un 0 en el  $9J$  se lo puede simplificar siguiendo las relaciones en la referencia [21],

$$\begin{aligned} & \{[L_A S_A]_{J_A} [11]_0\}_{J_A} = \\ & \sum_{L,S} (-1)^{S+J_A+L_A+1} \frac{\Pi_{L,S}}{\sqrt{3}} \begin{Bmatrix} L & S & J_A \\ S_A & L_A & 1 \end{Bmatrix} \{[L_A 1]_L [S_A 1]_S\}_{J_A}. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Se hace lo mismo con el estado final  $BC$ ,

$$\begin{aligned} & \{[L_B S_B]_{J_B} [L_C S_C]_{J_C}\}_{J_{BC}}^* = \\ & \sum_{L_{BC}, S} \Pi_{L_{BC}, S, J_B, J_C} \begin{Bmatrix} L_B & S_B & J_B \\ L_C & S_C & J_C \\ L_{BC} & S & J_{BC} \end{Bmatrix} \{[L_B L_C]_{L_{BC}} [S_B S_C]_S\}_{J_A}^*, \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

donde se reemplaza el  $S_{BC} = S$  por conservación del espín total.

De igual manera, se transforma el acople que asegura la conservación del momento angular para el estado final  $|BC\rangle$ ,

$$\begin{aligned} & \{[L_{BC} S]_{J_{BC}} l\}_{J_A}^* = (-1)^{L_{BC}+S-J_{BC}} \{[S L_{BC}]_{J_{BC}} l\}_{J_A}^* \\ & = (-1)^{L_{BC}+S-J_{BC}} \sum_L (-1)^{L_{BC}+S+J_A+l} \Pi_{L, J_{BC}} \begin{Bmatrix} S & L_{BC} & J_{BC} \\ l & J_A & L \end{Bmatrix} \{S [L_{BC} l]_L\}_{J_A}^* \\ & = \sum_L (-1)^{2L_{BC}+2S+J_A+l-J_{BC}} \Pi_{L, J_{BC}} \begin{Bmatrix} S & L_{BC} & J_{BC} \\ l & J_A & L \end{Bmatrix} (-1)^{S+L-J_A} \{[L_{BC} l]_L S\}_{J_A}^* \\ & = \sum_L (-1)^{S+L+l-J_{BC}} \Pi_{L, J_{BC}} \begin{Bmatrix} S & L_{BC} & J_{BC} \\ l & J_A & L \end{Bmatrix} \{[L_{BC} l]_L S\}_{J_A}^*. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Por último, y para expresar todos los términos en función de símbolos de Wigner, se debe transformar la conservación de espín,

$$\{[s_\mu s_\beta s_\alpha]_{S_B} [s_\nu s_\eta]_{S_C}\}_{S'}^* \{[s_\alpha s_\beta s_\eta]_{S_A} [s_\mu s_\nu]_1\}_{S}, \quad (\text{A.8})$$

donde es necesario definir el espín para los quarks espectadores,

$$s_\rho = s_\alpha \otimes s_\beta. \quad (\text{A.9})$$

Reemplazando en los acoples de los bariones se tiene,

$$\begin{aligned} [s_\alpha s_\beta s_\eta]_{S_A} &= [s_\rho s_\eta]_{S_A} \\ [s_\mu s_\beta s_\alpha]_{S_B} &= [s_\mu (s_\beta s_\alpha)_{s_\rho}]_{S_B} \\ &= (-1)^{s_\alpha + s_\beta + s_\mu - S_B} [s_\rho s_\mu]_{S_B}. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Así, se llega a la siguiente expresión,

$$\begin{aligned} &\{[s_\mu s_\beta s_\alpha]_{S_B} [s_\nu s_\eta]_{S_C}\}_S^* \{[s_\alpha s_\beta s_\eta]_{S_A} [s_\mu s_\nu]_1\}_S \\ &= (-1)^{s_\alpha + s_\beta + s_\mu - S_B} (-1)^{s_\nu + s_\eta - S_C} \{[s_\rho s_\mu]_{S_B} [s_\eta s_\nu]_{S_C}\}_S^* \{[s_\rho s_\eta]_{S_A} [s_\mu s_\nu]_1\}_S \\ &= (-1)^{s_\alpha + s_\beta + s_\mu + s_\nu + s_\eta - S_B - S_C} \Pi_{S_B, S_C, S_A, 1} \begin{Bmatrix} s_\rho & s_\mu & S_B \\ s_\eta & s_\nu & S_C \\ S_A & 1 & S \end{Bmatrix} \\ &= (-1)^{1/2 - S_B - S_C} \Pi_{S_B, S_C, S_A, 1} \begin{Bmatrix} s_\rho & 1/2 & S_B \\ 1/2 & 1/2 & S_C \\ S_A & 1 & S \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

donde se usa el hecho de que los quarks tiene espín 1/2. Se nota que no se puede reemplazar  $s_\rho$  ya que, al ser un acople, puede tener un valor de 1 o 0. Multiplicando todas estas expresiones se llega a la ecuación (3.18).

### A.3. Cálculo de $\mathcal{E}(A \rightarrow BC)$

Para esta parte se comienza con la ecuación (3.22). Se separa las funciones de onda en una parte radial y una parte angular,

$$\begin{aligned} \phi_A(\vec{p}_\alpha, \vec{p}_\beta, \vec{p}_\eta) &= f_{\lambda_A}(\vec{p}_{\lambda_A}) f_\rho(\vec{p}_\rho) \left[ \mathcal{Y}_{L_{\lambda_A}}(\vec{p}_{\lambda_A}) \mathcal{Y}_{L_\rho}(\vec{p}_\rho) \right]_{L_A} \\ \phi_B(\vec{p}_\sigma, \vec{p}_\zeta, \vec{p}_\epsilon) &= f_{\lambda_B}(\vec{p}_{\lambda_B}) f_\rho(\vec{p}_\rho) \left[ \mathcal{Y}_{L_{\lambda_B}}(\vec{p}_{\lambda_B}) \mathcal{Y}_{L_\rho}(\vec{p}_\rho) \right]_{L_B} \\ \phi_C(\vec{p}_C) &= f_C(\vec{p}_C) \mathcal{Y}_{L_C}(\vec{p}_C), \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

donde la parte radial se expresa en una expansión en gaussianas tal que,

$$\begin{aligned}
f_{\lambda_A}(\vec{p}_{\lambda_A}) &= \sum_i d_i^{\lambda_A} \exp\left(-\frac{\lambda_{Ai}}{2} p_{\lambda_A}^2\right) \\
f_{\lambda_B}(\vec{p}_{\lambda_B}) &= \sum_j d_j^{\lambda_B} \exp\left(-\frac{\lambda_{Bj}}{2} p_{\lambda_B}^2\right) \\
f_{\rho}(\vec{p}_{\rho}) &= \sum_k d_k^{\rho} \exp\left(-\frac{\rho_k}{2} p_{\rho}^2\right) \\
f_C(\vec{p}_C) &= \sum_{l'} d_{l'}^C \exp\left(-\frac{C_{l'}}{2} p_C^2\right).
\end{aligned} \tag{A.13}$$

Se usa el índice  $l'$  para no confundirlo con el  $l$  del momento angular relativo de las partículas finales. Reemplazando se obtiene,

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(A_{ik} \rightarrow B_{jk} C_{l'}) &= \sum_{ijkl'} d_i^{\lambda_A} d_j^{\lambda_B} (d_k^{\rho})^2 d_{l'}^C \\
&\int d^3 p d^3 k d^3 p_{\rho} \frac{\delta(k - k_0)}{k^{l+1}} \exp\left(-\frac{1}{2}[\lambda_{Ai} p_{\lambda_A}^2 + \lambda_{Bj} p_{\lambda_B}^2 + \rho_k p_{\rho}^2 + C_{l'} p_C^2]\right) \\
&\left\{ \left[ \left[ \mathcal{Y}_{L_{\lambda_B}}(\vec{p}_{\lambda_B}) \mathcal{Y}_{L_{\rho}}(\vec{p}_{\rho}) \right]_{L_B} \mathcal{Y}_{L_C}(\vec{p}_C) \right]_{L_{BC}} \mathcal{Y}_l(\vec{k}) \right\}^* \left\{ \left[ \mathcal{Y}_{L_{\lambda_A}}(\vec{p}_{\lambda_A}) \mathcal{Y}_{L_{\rho}}(\vec{p}_{\rho}) \right]_{L_A} \mathcal{Y}_1(\vec{p}) \right\}_L.
\end{aligned} \tag{A.14}$$

Se debe expresar la exponencial en las variables de integración. Con el fin de posteriormente eliminar un término, se realizar el siguiente cambio de coordenada,

$$\begin{aligned}
\vec{q} &= \vec{p} - x\vec{k} \\
\vec{k} &= \vec{k}.
\end{aligned} \tag{A.15}$$

Así se llega a las siguiente relaciones,

$$\begin{aligned}
\vec{p}_{\lambda_A} &= (1-x)\vec{k} - \vec{q} \\
\vec{p}_{\lambda_B} &= \left(\frac{\omega_{\mu}}{\omega_{\alpha\beta\mu}} - x\right)\vec{k} - \vec{q} \\
\vec{p}_C &= \left(\frac{\omega_{\mu}}{\omega_{\eta\mu}} - x\right)\vec{k} - \vec{q},
\end{aligned} \tag{A.16}$$

donde se nota que  $x$  es un escalar cualquiera. De hecho, si se toma  $x = 0$  se vuelve al sistema de coordenadas de (3.21).

Se eleva al cuadrado cada término,

$$\begin{aligned}
p_{\lambda_A}^2 &= (1-x)^2 k^2 + q^2 - 2(1-x) \vec{k} \cdot \vec{q} \\
p_{\lambda_B}^2 &= \left( \frac{\omega_\mu}{\omega_{\alpha\beta\mu}} - x \right)^2 k^2 + q^2 - 2 \left( \frac{\omega_\mu}{\omega_{\alpha\beta\mu}} - x \right) \vec{k} \cdot \vec{q} \\
p_C^2 &= \left( \frac{\omega_\mu}{\omega_{\eta\mu}} - x \right)^2 k^2 + q^2 + 2 \left( \frac{\omega_\mu}{\omega_{\eta\mu}} - x \right) \vec{k} \cdot \vec{q},
\end{aligned} \tag{A.17}$$

y se reemplaza en el argumento de la exponencial,

$$\begin{aligned}
\lambda_{A_i} p_{\lambda_A}^2 + \lambda_{B_j} p_{\lambda_B}^2 + C_{l'} p_C^2 &= \\
k^2 \left[ \lambda_{A_i} (1-x)^2 + \lambda_{B_j} \left( \frac{\omega_\mu}{\omega_{\alpha\beta\mu}} - x \right)^2 + C_{l'} \left( \frac{\omega_\mu}{\omega_{\eta\mu}} - x \right)^2 \right] & \\
+ q^2 [\lambda_{A_i} + \lambda_{B_j} + C_{l'}] & \\
- 2 \vec{k} \cdot \vec{q} \left[ \lambda_{A_i} (1-x) + \lambda_{B_j} \left( \frac{\omega_\mu}{\omega_{\alpha\beta\mu}} - x \right) + C_{l'} \left( \frac{\omega_\mu}{\omega_{\eta\mu}} - x \right) \right] &.
\end{aligned} \tag{A.18}$$

Se encoje un  $x$  tal que anule el término cruzado  $\vec{k} \cdot \vec{q}$ ,

$$\begin{aligned}
\lambda_{A_i} (1-x) + \lambda_{B_j} \left( \frac{\omega_\mu}{\omega_{\alpha\beta\mu}} - x \right) + C_{l'} \left( \frac{\omega_\mu}{\omega_{\eta\mu}} - x \right) &= 0 \\
\lambda_{A_i} + \lambda_{B_j} \frac{\omega_\mu}{\omega_{\alpha\beta\mu}} + C_{l'} \frac{\omega_\mu}{\omega_{\eta\mu}} - x (\lambda_{A_i} + \lambda_{B_j} + C_{l'}) &= 0 \\
x = \frac{\lambda_{A_i} + \lambda_{B_j} \frac{\omega_\mu}{\omega_{\alpha\beta\mu}} + C_{l'} \frac{\omega_\mu}{\omega_{\eta\mu}}}{\lambda_{A_i} + \lambda_{B_j} + C_{l'}} &= \frac{A}{2B},
\end{aligned} \tag{A.19}$$

donde, para simplificar notación, se define,

$$\begin{aligned}
A &= \lambda_{A_i} + \lambda_{B_j} \frac{\omega_\mu}{\omega_{\alpha\beta\mu}} + C_{l'} \frac{\omega_\mu}{\omega_{\eta\mu}} \\
2B &= \lambda_{A_i} + \lambda_{B_j} + C_{l'} \\
2D &= \lambda_{A_i} (1-x)^2 + \lambda_{B_j} \left( \frac{\omega_\mu}{\omega_{\alpha\beta\mu}} - x \right)^2 + C_{l'} \left( \frac{\omega_\mu}{\omega_{\eta\mu}} - x \right)^2.
\end{aligned} \tag{A.20}$$

Se reemplaza en la integral,

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(A_{ik} \rightarrow B_{jk}C_{l'}) = & \\
& \sum_{ijkl'} d_i^{\lambda_A} d_j^{\lambda_B} (d_k^\rho)^2 d_{l'}^C \int d^3q d^3k d^3p_\rho \frac{\delta(k - k_0)}{k^{l'+1}} \exp\left(-Bq^2 - Dk^2 - \frac{\rho k}{2} p_\rho^2\right) \\
& \left\{ \left[ \left[ \mathcal{Y}_{L_{\lambda_B}}(\vec{p}_{\lambda_B}) \mathcal{Y}_{L_\rho}(\vec{p}_\rho) \right]_{L_B} \mathcal{Y}_{L_C}(\vec{p}_C) \right]_{L_{BC}} \mathcal{Y}_l(\vec{k}) \right\}_L^* \left\{ \left[ \mathcal{Y}_{L_{\lambda_A}}(\vec{p}_{\lambda_A}) \mathcal{Y}_{L_\rho}(\vec{p}_\rho) \right]_{L_A} \mathcal{Y}_1(\vec{p}) \right\}_L.
\end{aligned} \tag{A.21}$$

Ahora, para resolver la expresión por completo hay que calcular los acoplos angulares. Para ello es necesario expresar estos en las coordenadas de integración y reducirlos lo más posible. Se obtienen así las siguientes expresiones simplificadas para el estado inicial,

$$\begin{aligned}
& \left\{ \left[ \mathcal{Y}_{L_{\lambda_A}}(\vec{p}_{\lambda_A}) \mathcal{Y}_{L_\rho}(\vec{p}_\rho) \right]_{L_A} \mathcal{Y}_1(\vec{p}) \right\}_L = \\
& \sum_{l_1, l_2, l_3, l_4, l_5} B_{l_1, l_2}^{l_4} B_{L_{\lambda_A} - l_1, 1 - l_2}^{l_5} C_{l_1}^{L_{\lambda_A}} C_{l_2}^1 \Pi_{L_A, L_{\lambda_A}, l_3, l_4, l_5, 1} (1-x)^{l_1} x^{l_2} \\
& (-1)^{L+L_A+L_{\lambda_A} - l_1 + 1} k^{l_1 + l_2 - l_4} q^{L_{\lambda_A} - l_1 - l_2 - l_5 + 1} \\
& \left\{ \begin{matrix} L_{\lambda_A} & L_\rho & L_A \\ L & 1 & l_3 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} l_1 & L_{\lambda_A} - l_1 & L_{\lambda_A} \\ l_2 & 1 - l_2 & 1 \\ l_4 & l_5 & l_3 \end{matrix} \right\} \\
& \left\{ \mathcal{Y}_{L_\rho}(\vec{p}_\rho) \left[ \mathcal{Y}_{l_4}(\vec{k}) \mathcal{Y}_{l_5}(\vec{q}) \right]_{l_3} \right\}_L,
\end{aligned} \tag{A.22}$$

y para el estado final,

$$\begin{aligned}
& \left\{ \left[ \left[ \mathcal{Y}_{L_{\lambda_B}}(\vec{p}_{\lambda_B}) \mathcal{Y}_{L_\rho}(\vec{p}_\rho) \right]_{L_B} \mathcal{Y}_{L_C}(\vec{p}_C) \right]_{L_{BC}} \mathcal{Y}_l(\vec{k}) \right\}_L = \\
& \sum_{l_6, l_7, l_8, l_9, l_{10}, l_{11}, l_{12}} B_{l_6, l_7}^{l_9} B_{L_{\lambda_B} - l_6, L_C - l_7}^{l_{10}} B_{l_9, l}^{l_{12}} C_{l_6}^{L_{\lambda_B}} C_{l_7}^{L_C} \\
& \Pi_{L_{BC}, L_B, L_C, L_{\lambda_B}, l_8, l_9, l_{10}, l_{11}, l_{12}} \left( \frac{\omega_\mu}{\omega_{\alpha\beta\mu}} - x \right)^{l_6} \left( \frac{\omega_\mu}{\omega_{\eta\mu}} - x \right)^{l_7} \\
& (-1)^{L_{BC} + L_B + L_{\lambda_B} + L_\rho + L - l_6 - l_7 + l_{10} + l_{12}} k^{l + l_6 + l_7 - l_{12}} q^{L_{\lambda_B} + L_C - l_6 - l_7 - l_{10}} \\
& \left\{ \begin{matrix} L_{\lambda_B} & L_\rho & L_B \\ L_{BC} & L_C & l_8 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} L_\rho & l_8 & L_{BC} \\ l & L & l_{11} \end{matrix} \right\} \\
& \left\{ \begin{matrix} l_{10} & l_9 & l_8 \\ l & l_{11} & l_{12} \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} l_6 & L_{\lambda_B} - l_6 & L_{\lambda_B} \\ l_7 & L_C - l_7 & L_C \\ l_9 & l_{10} & l_8 \end{matrix} \right\} \\
& \left\{ \mathcal{Y}_{L_\rho}(\vec{p}_\rho) \left[ \mathcal{Y}_{l_{12}}(\vec{k}) \mathcal{Y}_{l_{10}}(\vec{q}) \right]_{l_{11}} \right\}_L.
\end{aligned} \tag{A.23}$$

Se reemplaza en el término de espín y de momento lineal,

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(A_{ik} \rightarrow B_{jk}C_{l'}) = & \sum_{ijkl'} d_i^{\lambda_A} d_j^{\lambda_B} (d_k^\rho)^2 d_{l'}^C \int d^3q d^3k d^3p_\rho \frac{\delta(k - k_0)}{k^{l+1}} \exp\left(-Bq^2 - Dk^2 - \frac{\rho_k}{2} p_\rho^2\right) \\
& \sum_{l_1, l_2, \dots, l_{11}, l_{12}} B_{l_1, l_2}^{l_4} B_{L_{\lambda_A} - l_1, 1 - l_2}^{l_5} B_{l_6, l_7}^{l_9} B_{L_{\lambda_B} - l_6, L_C - l_7}^{l_{10}} B_{l_9, l}^{l_{12}} C_{l_1}^{L_{\lambda_A}} C_{l_2}^1 C_{l_6}^{L_{\lambda_B}} C_{l_7}^{L_C} \\
& \Pi_{L_{BC}, L_A, L_B, L_C, L_{\lambda_A}, L_{\lambda_B}, l_3, l_4, l_5, l_8, l_9, l_{10}, l_{11}, l_{12}, 1} \\
& (1-x)^{l_1} x^{l_2} \left(\frac{\omega_\mu}{\omega_{\alpha\beta\mu}} - x\right)^{l_6} \left(\frac{\omega_\mu}{\omega_{\eta\mu}} - x\right)^{l_7} \\
& (-1)^{L_{BC} + L_A + L_B + L_{\lambda_A} + L_{\lambda_B} + L_\rho - l_1 - l_6 - l_7 + l_{10} + l_{12} + 1} \\
& k^{l+l_1+l_2-l_4+l_6+l_7-l_{12}} q^{L_C + L_{\lambda_A} + L_{\lambda_B} - l_1 - l_2 - l_5 - l_6 - l_7 - l_{10} + 1} \tag{A.24} \\
& \left\{ \begin{matrix} L_{\lambda_A} & L_\rho & L_A \\ L & 1 & l_3 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} L_{\lambda_B} & L_\rho & L_B \\ L_{BC} & L_C & l_8 \end{matrix} \right\} \\
& \left\{ \begin{matrix} L_\rho & l_8 & L_{BC} \\ l & L & l_{11} \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} l_{10} & l_9 & l_8 \\ l & l_{11} & l_{12} \end{matrix} \right\} \\
& \left\{ \begin{matrix} l_1 & L_{\lambda_A} - l_1 & L_{\lambda_A} \\ l_2 & 1 - l_2 & 1 \\ l_4 & l_5 & l_3 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} l_6 & L_{\lambda_B} - l_6 & L_{\lambda_B} \\ l_7 & L_C - l_7 & L_C \\ l_9 & l_{10} & l_8 \end{matrix} \right\} \\
& \left\{ \mathcal{Y}_{L_\rho}(\vec{p}_\rho) \left[ \mathcal{Y}_{l_{12}}(\vec{k}) \mathcal{Y}_{l_{10}}(\vec{q}) \right]_{l_{11}} \right\}_L^* \left\{ \mathcal{Y}_{L_\rho}(\vec{p}_\rho) \left[ \mathcal{Y}_{l_4}(\vec{k}) \mathcal{Y}_{l_5}(\vec{q}) \right]_{l_3} \right\}_L.
\end{aligned}$$

Al usar la ortogonalidad de los armónicos esféricos se puede calcular la integral de ángulos dejando solamente las integrales radiales,

$$\begin{aligned}
& \int d^3q d^3k d^3p_\rho \left\{ \mathcal{Y}_{L_\rho}(\vec{p}_\rho) \left[ \mathcal{Y}_{l_{12}}(\vec{k}) \mathcal{Y}_{l_{10}}(\vec{q}) \right]_{l_{11}} \right\}_L^* \left\{ \mathcal{Y}_{L_\rho}(\vec{p}_\rho) \left[ \mathcal{Y}_{l_4}(\vec{k}) \mathcal{Y}_{l_5}(\vec{q}) \right]_{l_3} \right\}_L = \\
& \int dq d\Omega_q dk d\Omega_k dp_\rho d\Omega_{p_\rho} q^2 k^2 p_\rho^2 \\
& \left\{ p_\rho^{L_\rho} Y_{L_\rho}(\hat{p}_\rho) \left[ k^{l_{12}} Y_{l_{12}}(\hat{k}) q^{l_{10}} Y_{l_{10}}(\hat{q}) \right]_{l_{11}} \right\}_L^* \left\{ p_\rho^{L_\rho} Y_{L_\rho}(\hat{p}_\rho) \left[ k^{l_4} Y_{l_4}(\hat{k}) q^{l_5} Y_{l_5}(\hat{q}) \right]_{l_3} \right\}_L = \\
& \delta_{L_\rho, L_\rho} \delta_{l_{12}, l_4} \delta_{l_{10}, l_5} \delta_{l_{11}, l_3} \delta_{L, L} \int dq dk dp_\rho q^{2+l_5+l_{10}} k^{2+l_4+l_{12}} p_\rho^{2+2L_\rho}. \tag{A.25}
\end{aligned}$$

Obteniendo una serie de deltas que simplifican los sumatorios.

Por último, las integrales radiales pueden ser resueltas usando la fun-

ción Gamma de Euler,

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} dt t^{z-1} e^{-t}. \quad (\text{A.26})$$

Así, se puede calcularla integral sobre  $q$ ,

$$\int_0^{\infty} dq e^{-Bq^2} q^{L_C + L_{\lambda_A} + L_{\lambda_B} - l_1 - l_2 - l_6 - l_7 + 3} = \int_0^{\infty} dq e^{-Bq^2} q^{L_q}, \quad (\text{A.27})$$

donde se realiza el cambio de variable  $t = Bq^2$  con  $dt = 2Bq dq$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} dq e^{-Bq^2} q^{L_q} &= \frac{1}{2B} \int_0^{\infty} dt e^{-t} \left(\frac{t}{B}\right)^{\frac{1}{2}(L_q - 1)} \\ &= \frac{B^{-1 - \frac{1}{2}(L_q - 1)}}{2} \int_0^{\infty} dt e^{-t} t^{\frac{1}{2}(L_q - 1) + 1 - 1} \\ &= \frac{1}{2} B^{-\frac{1}{2}(L_q + 1)} \Gamma\left(\frac{1}{2}(L_q + 1)\right). \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

Es importante notar que  $L_q > -1$  para que la función Gamma tenga todos sus valores bien definidos. Se reemplaza  $L_q$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} dq e^{-Bq^2} q^{L_C + L_{\lambda_A} + L_{\lambda_B} - l_1 - l_2 - l_5 - l_6 - l_7 + l_5 + 3} = \\ \frac{1}{2} B^{-\frac{1}{2}(L_C + L_{\lambda_A} + L_{\lambda_B} - l_1 - l_2 - l_6 - l_7 + 4)} \\ \Gamma\left(\frac{1}{2}(L_C + L_{\lambda_A} + L_{\lambda_B} - l_1 - l_2 - l_6 - l_7 + 4)\right). \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

Se realiza lo mismo con la integral sobre  $p_\rho$ ,

$$\begin{aligned} \int dp_\rho e^{-\frac{\rho k}{2} p_\rho^2} p_\rho^{2 + 2L_\rho} &= \int dp_\rho e^{-R p_\rho^2} p_\rho^{L'_\rho} \\ &= \frac{1}{2} R^{-\frac{1}{2}(L'_\rho + 1)} \Gamma\left(\frac{1}{2}(L'_\rho + 1)\right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\rho k}{2}\right)^{-\frac{1}{2}(2L_\rho + 3)} \Gamma\left(\frac{1}{2}(2L_\rho + 3)\right). \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

Para la integral sobre  $k$  se puede usar la delta de momentos  $\delta(k - k_0)$  presente en la expresión (2.12) al definir el estado  $|BC\rangle$ . Así, al reemplazar las integrales obtenidas y ordenar los términos, se llega a la expresión (3.23) resolviendo el término de espín-espacio.

---

## Referencias bibliográficas

---

- [1] Xiaoyi Guo and Mingyu Xu. Some physical applications of fractional Schrödinger equation. *Journal of Mathematical Physics*, 47(8), Aug 2006.
- [2] M. Baranger, H. A. Bethe, and R. P. Feynman. Relativistic correction to the Lamb shift. *Physical Review*, 92(2):482–501, Oct 1953.
- [3] Michael Edward Peskin and Daniel V. Schroeder. *An Introduction to Quantum Field Theory*. CRC Press, 2019.
- [4] M. Bordag, U. Mohideen, and V.M. Mostepanenko. New developments in the Casimir effect. *Physics Reports*, 353(1–3):1–205, Oct 2001.
- [5] G. C. Wick. The evaluation of the collision matrix. *Physical Review*, 80(2):268–272, Oct 1950.
- [6] Y. Ne’eman. Derivation of strong interactions from a gauge invariance. *Nuclear Physics*, 26(2):222–229, Aug 1961.
- [7] H. David Politzer. Reliable perturbative results for strong interactions? *Physical Review Letters*, 30(26):1346–1349, Jun 1973.
- [8] E. Eichten, K. Gottfried, T. Kinoshita, K. D. Lane, and T. M. Yan. Charmonium: Comparison with experiment. *Physical Review D*, 21(1):203–233, Jan 1980.
- [9] J. Segovia, D.R. Entem, and F. Fernández. Scaling of the  $^3P_0$  strength in heavy meson strong decays. *Physics Letters B*, 715(4–5):322–327, Sep 2012.

- [10] Bertram Schwarzschild. Two experiments observe explicit violation of time-reversal symmetry. *Physics Today*, 52(2):19–20, Feb 1999.
- [11] Simon Capstick and Winston Roberts. Quasi-two-body decays of nonstrange baryons. *Physical Review D*, 49(9):4570–4586, May 1994.
- [12] Qi-Fang Lü and Xian-Hui Zhong. Strong decays of the higher excited  $\Lambda_Q$  and  $\Sigma_Q$  baryons. *Physical Review D*, 101(1), Jan 2020.
- [13] L. Micu. Decay rates of meson resonances in a quark model. *Nuclear Physics B*, 10(3):521–526, May 1969.
- [14] E. S. Ackleh, T. Barnes, and E. S. Swanson. On the mechanism of open-flavor strong decays. *Physical Review D*, 54(11):6811–6829, Dec 1996.
- [15] Cameron Hayne and Nathan Isgur. Beyond the wave function at the origin: Some momentum-dependent effects in the nonrelativistic quark model. *Physical Review D*, 25(7):1944–1950, Apr 1982.
- [16] R. Bonnaz and B. Silvestre-Brac. Discussion of the  $^3P_0$  model applied to the decay of mesons into two mesons. *Few-Body Systems*, 27(3–4):163–187, Dec 1999.
- [17] Guo-Liang Yu, Zhen-Yu Li, Zhi-Gang Wang, Lu Jie, and Yan Meng. Systematic analysis of single heavy baryons  $\Lambda_Q$ ,  $\Sigma_Q$  and  $\Omega_Q$ . *Nuclear Physics B*, 990:116183, May 2023.
- [18] A. Valcarce, H. Garcilazo, F. Fernández, and P. González. Quark-model study of few-baryon systems. *Reports on Progress in Physics*, 68(5):965–1041, Mar 2005.
- [19] B. H. Bransden and C. J. Joachain. *Quantum Mechanics*. Pearson, 2<sup>nd</sup> edition, 2000.
- [20] L. C. Biedenharn and James D. Louck. *The Racah-Wigner algebra in quantum theory*. Cambridge University Press, 1984.
- [21] D. A. Varshalovich. *Quantum Theory of Angular Momentum*. World Scientific, 1988.

- [22] E. Eichten, K. Gottfried, T. Kinoshita, K. D. Lane, and T. M. Yan. Charmonium: The model. *Physical Review D*, 17(11):3090–3117, Jun 1978.