

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL



Carrera de Matemáticas

Proyecto de Titulación previo a la obtención del título de Matemático.

“Método de Newton Generalizado para la Resolución Numérica de la Desigualdad Variacional de Black-Scholes”

**ROLANDO P. MANTILLA YÁNEZ
GABRIELA C. GARCÍA TRUJILLO**

Director: Dr. Juan Carlos De los Reyes

-Octubre 2006-

Índice general

1. Objetivos.	8
1.1. Objetivo General.	8
1.2. Objetivos Específicos.	8
2. Valoración de Opciones.	10
2.1. Mercado de Capitales.	10
2.2. Opciones.	11
2.3. Clasificación de las Opciones.	11
2.3.1. Opciones de compra.	12
2.3.2. Opciones de Venta.	12
2.3.3. Opciones Europeas.	13
2.3.4. Opciones Americanas.	13
2.4. Posiciones Básicas en Opciones.	14
3. La Ecuación de Black & Scholes.	16
3.1. El proceso de Wiener.	16
3.2. El proceso de Wiener Generalizado.	18
3.3. Proceso de Ito.	19

3.4.	Modelo continuo para el comportamiento del precio y el Lema de Ito.	20
3.5.	Deducción de la Ecuación de Black & Scholes.	21
3.6.	La desigualdad variacional de Black & Scholes.	22
3.6.1.	Problema a frontera Libre.	22
3.6.2.	Formulación débil.	23
3.6.3.	El problema como la Desigualdad Variacional Parabólica de Black & Scholes.	26
4.	Estudio Variacional del Problema de Valoración de las Opciones Americanas.	29
4.1.	Elementos del análisis funcional.	29
4.2.	Desigualdades Variacionales Parabólicas.	32
4.2.1.	Formulación Abstracta de una Desigualdad Variacional Parabólica.	33
4.2.2.	Estudio de existencia y unicidad de soluciones de la PVI.	35
5.	Sistema de Complementariedad, Multiplicadores de Lagrange y Convergencia de Problemas Regularizados.	42
5.1.	Sistema de Complementariedad y Multiplicadores de Lagrange.	42
5.1.1.	El problema como un Sistema de Complementariedad.	43
5.1.2.	Problemas regularizados.	44
5.1.3.	Existencia de Solución Fuerte como límite de las soluciones a los problemas regularizados.	46
5.2.	Existencia del Multiplicador de Lagrange.	49
5.3.	Tasa de Convergencia de las soluciones de los problemas regularizados hacia la solución fuerte.	52
5.3.1.	Caso $\bar{\lambda} = 0$	53

5.3.2. Caso $\bar{\lambda}(\tau) = \ (A(0) + f(\tau))^+\ _\infty$.	54
6. El Método de Newton Semi-Suave y la Estrategia de Conjuntos Activos e Inactivos.	55
6.1. El método de Newton Semi-Suave.	55
6.1.1. El método de Newton Semi-Suave en dimensión finita.	55
6.1.2. Método de Newton Semi Suave en Espacios de Funciones.	60
6.2. Aplicación del método de Newton semi-suave a la desigualdad variacional de Black & Scholes.	62
6.2.1. Semi discretización en el tiempo.	62
6.2.2. Algoritmo de Conjuntos Activos e Inactivos. (ACAI)	63
6.2.3. Método de Elementos Finitos.	65
7. Experimentos Numéricos	71
7.1. Primer experimento	71
7.2. Segundo Experimento	84
7.3. Tercer Experimento	89
7.4. Cuarto Experimento	94
8. Conclusiones	99
A. Transformación de la ecuación de Black and Scholes a una ecuación parabólica del Calor.	101
B. Código fuente del programa resuelto en Matlab	104

Índice de figuras

2.1. Negociación de una opción de compra	14
2.2. Negociación de una opción de venta	15
6.1. Ilustración del método de Newton Suave.	56
6.2. Elemento de la base V_h	65
6.3. Función g	69
6.4. Función $\frac{\partial g}{\partial x}$	70
7.1. Ejemplo 1: Resolución del problema en sus variables transformadas	81
7.2. Ejemplo 1: Multiplicador de Lagrange	82
7.3. Ejemplo 1: Conjuntos Activos e Inactivos	82
7.4. Ejemplo 1: Solución del problema en sus variables originales	83
7.5. Ejemplo 1: Solución del problema en $V(S, 0)$	83
7.6. Ejemplo 2: Resolución del problema en sus variables transformadas.	86
7.7. Ejemplo 2: Multiplicador de Lagrange.	87
7.8. Ejemplo 2: Conjuntos Activos e Inactivos.	87
7.9. Ejemplo 2: Solución del problema en sus variables originales.	88
7.10. Ejemplo 2: Solución del problema en $V(S, 0)$	88

7.11. Ejemplo 2: $V(S, t) - V(S, 0)$	89
7.12. Ejemplo 3: Radio de convergencia para $i = 17$	91
7.13. Ejemplo 3: Resolución del problema en sus variables transformadas.	92
7.14. Ejemplo 3: Multiplicador de Lagrange.	92
7.15. Ejemplo 3: Conjuntos activos e inactivos.	93
7.16. Ejemplo 3: Solución del problema en sus variables originales.	93
7.17. Ejemplo 3: Solución del problema en $V(S, 0)$	94
7.18. Ejemplo 4: Solución del problema en sus variables transaformadas.	96
7.19. Ejemplo 4: Multiplicador de Lagrange.	97
7.20. Ejemplo 4: Conjuntos activos e inactivos.	97
7.21. Ejemplo 4: Solución del problema en sus variables originales.	98
7.22. Ejemplo 4: Solución del problema en $V = (S, 0)$	98

Introducción.

El presente trabajo es un estudio del problema de valoración de opciones americanas y su resolución numérica usando el método de Newton Semi-suave. Para ello en el Capítulo 2 se empieza introduciendo conceptos básicos como la definición de Opción, sus tipos e implicaciones de su negociación; para así entrar en el Capítulo 3 a estudiar cómo se valora una opción con el fin establecer principios que permitan calcular o estimar un valor monetario $V(S, t)$ para ésta, dependiendo del precio S del activo al que se aplica y considerando un tiempo t dentro de un periodo establecido. Para llevar a cabo la valoración de una Opción se requiere tener una noción del comportamiento del precio del activo a lo largo del tiempo, así se introduce un modelo estocástico continuo para el comportamiento del precio a partir de un movimiento browniano generalizado.

Dado el modelo para el comportamiento de S se aplica a éste el conocido Lema de Ito que desemboca en la Ecuación de Black & Scholes (B&S), la cual junto con una función de rentabilidad \mathcal{H} modelan el comportamiento de $V(S, t)$, en realidad, dependiendo de cuán conveniente sea (económicamente hablando) que el precio se modele con la ecuación B&S o con \mathcal{H} . El punto al que denominaremos S_f que diferencia cuándo es conveniente usar B&S o \mathcal{H} determina cuándo es óptimo ejercer la opción de cuando es mejor conservarla definiendo el precio óptimo de ejercicio de la opción.

Con el fin de colocar al problema en un lenguaje matemático conveniente el Capítulo 4 provee elementos generales sobre: espacios de funciones, sus normas, propiedades, productos internos y espacios duales necesarios, así como una introducción al estudio de las desigualdades variacionales y su solución. Así, el problema de valoración de una opción (en nuestro caso la opción de venta) puede ser expresado como un problema a frontera libre que a su vez tiene una formulación equivalente como una desigualdad variacional parabólica definida sobre un convexo cerrado no vacío que contiene todos los condicionamientos del problema.

En el Capítulo 5 se introducen los conceptos de sistema de complementariedad y de multiplicadores de Lagrange para poder expresar el problema como un sistema de ecuaciones diferenciales susceptible de resolverse por el método de Newton generalizado, para lo cual se hace necesario regularizar (relajar) la condición de complementariedad del sistema. La regularización en mención introduce además una familia de problemas regularizados cuyas soluciones, como se estudiará, convergen hacia la solución “fuerte” del problema y cuyas

propiedades justifican plenamente la introducción del sistema de complementariedad y la existencia del Multiplicador de Lagrange asociado a la condición de obstáculo.

El Capítulo 6 presenta y define el Método de Newton Semi-suave y sus principales características, tanto para ecuaciones en dimensión finita como para ecuaciones definidas en espacios de funciones. Por otra parte, el multiplicador de Lagrange asociado a la condición de obstáculo motiva el uso de subconjuntos del dominio de dicho multiplicador donde la condición es activa o inactiva, y a partir de esa consideración se introduce para nuestro problema la Estrategia de Conjuntos Activos e Inactivos. Esta estrategia combinada con una semi discretización del tipo Euler Implícito para la parte temporal nos permite formular el Algoritmo fundamental presentado en este trabajo, el cual es equivalente a una forma particular del método de Newton Semi-suave, asumiendo de él sus propiedades y principalmente la súper-linealidad de su convergencia.

Los detalles sobre el desarrollo del método son considerados también en el Capítulo 6. Debido a que en cada uno de los pasos del Algoritmo se requiere resolver una variación de un ecuación evolutiva del calor unidimensional a condiciones de frontera tipo Dirichlet se recurre en dicho paso a la técnica de los elementos finitos de primer orden. La variación mencionada está dada en el sentido de que es necesario acoplar en el método de elementos finitos la estrategia de conjuntos activos e inactivos.

Una vez implementado el Algoritmo mediante Matlab se recurre a realizar la experimentación numérica. En una primera etapa se considera un problema de valoración de una opción de venta resuelta por el Método Binomial y se compara mediante observación de diferencias porcentuales con nuestro método al resolver el mismo problema. Además se consideran tres ejemplos más en donde se prueba la eficacia del método haciendo al igual que en el primero experimentos para comprobar el tipo de convergencia y medir su radio. Adicionalmente se prueba en todos los casos que en efecto las soluciones regularizadas convergen a la solución del problema, a su vez se realizan experimentos del comportamiento del método ante la variación del refinamiento del mallado tanto en la parte temporal como espacial. La presentación y conclusiones sobre estos resultados se presentan en el Capítulo 7.

Capítulo 1

Objetivos.

En el presente Proyecto de Titulación se han planteado los siguientes objetivos:

1.1. Objetivo General.

Planteado el problema de valoración de una opción, en nuestro caso particular una opción de venta americana, modelado por la ecuación de Black & Scholes y por su función de rentabilidad estudiar el planteamiento del mismo como un problema a frontera libre y a partir de su debilitación y consideración de su condición de obstáculo abordar la desigualdad variacional correspondiente. Proponer una estrategia de simulación de la solución al problema de opciones americanas utilizando el método de Newton generalizado y demostrar su eficiencia numérica.

1.2. Objetivos Específicos.

1. A partir del problema a frontera libre y de una transformación de sus variables, expresar la valoración de opciones como una desigualdad evolutiva y una función de rentabilidad transformada.
2. Hacer un estudio de la existencia y unicidad de una solución débil al problema y de su solución fuerte.
3. Estudiar el sistema de complementariedad apoyados en la introducción de un multiplicador de Lagrange y realizar una regularización de dicho sistema, mediante la formulación de problemas regularizados, para que el método de Newton generalizado pueda ser aplicado y justificado.

4. Estudiar la convergencia de las soluciones de los problemas regularizados a la solución fuerte, así como la tasa de convergencia de este proceso apoyados en la técnica de conjuntos activos e inactivos relativos a la condición de obstáculo.
5. Utilizando una semi-discretización temporal y la técnica de conjuntos activos e inactivos construir un algoritmo que aproxime la solución al problema y demostrar su equivalencia con el método de Newton semi suave.
6. Implementar el Algoritmo utilizando Matlab.
7. Demostrar la eficiencia numérica del método considerando la variación del margen de error de nuestra solución comparando con un ejemplo resuelto por el método binomial¹, el tipo y velocidad de convergencia, así como sus residuos. Observar la variación del número de iteraciones al variar el parámetro de penalización γ y la partición tanto espacial como temporal.

¹El método binomial en la práctica es considerado como la mejor aproximación al problema de valoración de opciones.

Capítulo 2

Valoración de Opciones.

En el presente capítulo comenzaremos conociendo, en términos generales, los conceptos financieros pertinentes para abordar el problema de valoración de las *Opciones Financieras tipo Americano* a partir de ciertos conceptos y esquemas referentes a su negociación en el *mercado de capitales*.

Antes de hablar de las *opciones* en sí, se estudiará a leves rasgos el funcionamiento del mercado de capitales; esto debido a que para entender el funcionamiento y justificar la existencia de las opciones, primero hay que tener una idea, al menos básica, de lo que es el mercado y su dinámica: las causas de los cambios de precio, el papel que la información juega en ellos y especialmente los riesgos que entraña la negociación en un mercado.

2.1. Mercado de Capitales.

En general *mercado* es el ámbito en el cual convergen oferentes y demandantes por algún producto, bien o servicio al que se lo denominará *activo*. El término *mercado* no se refiere necesariamente a un lugar físico, sino más bien a la interacción, negociaciones y contrataciones libres entre compradores o consumidores y vendedores. De este modo existe un mercado particular para cada producto, bien o servicio. En un sentido más general, de acuerdo al activo que se negocia, se pueden tener varios tipos de mercados, por ejemplo: el mercado de productos, el mercado de trabajo, el mercado monetario, el mercado de capitales, etc.

En nuestro caso *mercado de capital* surge de la necesidad de las empresas al establecer negocios. Las empresas necesitan una variedad casi interminable de activos reales. Muchos de los activos son tangibles, como la maquinaria, las fábricas, oficinas, etc.; otros son intangibles, como los conocimientos técnicos, marcas y patentes. La valoración de estos activos intangibles, en cambio, se realiza a través de la venta de los activos financieros o títulos,

los cuales además de incorporar los derechos sobre los activos reales de la firma dan derecho al dinero líquido que éstos producen. En los mercados de capitales internacionales los activos financieros de mayor difusión son las *participaciones de capital*, más conocidos como *acciones*. Éstas dan derecho a quien las compra, es decir, al inversionista a participar de los beneficios que la empresa producirá.

A los mercados de capital se los clasifica en mercados primarios y secundarios. Cuando una empresa planea obtener capital adicional lo puede hacer mediante préstamos o vendiendo nuevas acciones a los inversores. Las ventas de las nuevas acciones, para obtener nuevo capital, ocurren en el mercado primario. Por otro lado, las acciones existentes que los inversores se compran unos a otros, y que por tanto no confieren capital nuevo a la empresa, ocurren en el mercado secundario. Nótese que no solamente las empresas acuden a los mercados de capital en busca de financiamiento, también lo hacen los gobiernos a través de la emisión de bonos.

2.2. Opciones.

Una *opción* es un contrato entre dos partes por el cual una de ellas adquiere sobre la otra el derecho, pero no la obligación, de comprarle o de venderle una unidad de un activo para una fecha futura por un precio fijo. La característica fundamental de las opciones es el carácter condicional que dan a una de las partes frente a ejercer su parte en el contrato (ya sea comprar o vender). Por consiguiente, es importante diferenciar al emisor del comprador en un contrato de opción.

El emisor del contrato tiene la obligación de cumplir con la venta o compra del activo subyacente, mientras que el comprador puede o no comprar o vender el activo subyacente. Así mismo, por el derecho adquirido, el comprador debe pagar al emisor una prima. Una *prima* es el precio del contrato de opción y es pagado al momento de la suscripción del mismo.

Los contratos de opciones se negocian directamente entre instituciones financieras o en mercados organizados.

2.3. Clasificación de las Opciones.

Las opciones están clasificadas según el tipo de derecho que otorgan, así:

- Opciones de Compra
- Opciones de Venta

Y a su vez, de acuerdo al momento en el que se puede ejecutar el contrato en:

- Opciones Europeas
- Opciones Americanas

2.3.1. Opciones de compra.

Este contrato otorga el derecho, pero no la obligación, a quien lo adquiere a comprar un activo a un precio fijo. Si se trata de una opción europea se la podrá ejecutar solamente al vencimiento del contrato. Si se trata de una opción americana se lo podrá hacer en cualquier momento anterior al vencimiento.

Si se opta por ejercer una opción de compra la transacción completa envuelve lo siguiente: el pago de la prima del comprador por la opción de compra del emisor, y posteriormente, el intercambio del activo del emisor por el pago del precio de ejercicio del comprador. Llamaremos precio de ejercicio al precio al que se fija la compra del activo.

Para el comprador, podemos representar las implicaciones de una opción de compra a su fecha de expiración de la siguiente forma:

$$C_T = \begin{cases} S_T - K & \text{si } S_T > K \\ 0 & \text{si } S_T \leq K \end{cases}$$

donde:

K = es el *precio de ejercicio*.

S_T = precio en el mercado del *Activo Subyacente*.

C_T = valor de la opción de compra a la fecha de expiración.

Podemos escribir equivalentemente:

$$C_T = \text{máx}[0, S_T - K]$$

2.3.2. Opciones de Venta.

Una opción de venta es un contrato que otorga el derecho, pero no la obligación a quien lo posee a vender un activo a un precio fijo. Al igual que las opciones de compra, las opciones de venta pueden ser europeas o americanas.

Si una opción de venta es ejercida, la transacción completa envuelve lo siguiente: el pago de la prima del comprador por la opción de venta del emisor y el posterior intercambio del activo entregado por el comprador por el precio de ejercicio del emisor.

Este intercambio se dará solamente si conviene a los intereses del comprador de la opción. Es decir siempre que el precio de ejercicio sea mayor al precio de mercado.

Podemos escribir las implicaciones de una opción de venta a su fecha de expiración de la siguiente manera:

$$P_T = \begin{cases} 0 & \text{si } S_T > K \\ K - S_T & \text{si } S_T \leq K \end{cases}$$

donde:

K = *precio de ejercicio*.

S_T = precio en el mercado del *Activo Subyacente*.

P_T = valor de la opción de venta a la fecha de expiración.

Equivalentemente podemos escribir:

$$P_T = \text{máx}[0, K - S_T]$$

2.3.3. Opciones Europeas.

Son opciones que solamente pueden ejercerse al momento de expiración del contrato, e igualmente pueden ser compra o de venta, adquiriendo las características de una opción de compra o de venta según sea el caso.

2.3.4. Opciones Americanas.

Son opciones que permiten ser ejercidas en cualquier tiempo antes de su expiración. Por lo general las complicaciones en este tipo de opciones no radican en determinar el costo de la prima, sino más bien en encontrar su valor a cualquier tiempo antes de su expiración. De igual manera pueden ser de compra o de venta.

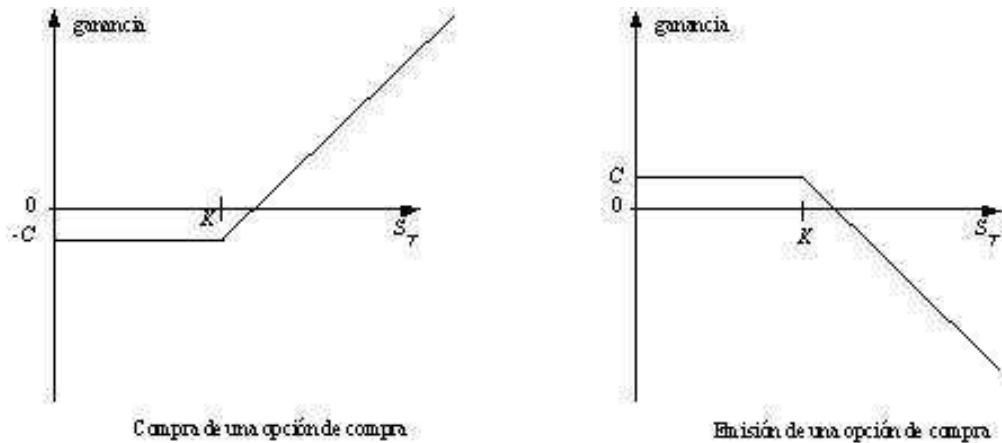


Figura 2.1: Negociación de una opción de compra

2.4. Posiciones Básicas en Opciones.

Se pueden ilustrar las posiciones en contratos de opciones a través de gráficos de ganancias en función del precio al momento de vencer el contrato (S_T).

La figura (2.1) muestra los resultados de la compra de una opción de compra. El ejercicio de esta opción será óptimo siempre que el precio de mercado, al momento de ejercer la opción, supere a la suma del precio de ejercicio más la prima pagada por la opción, C . De no ser así se habrá perdido la prima, puesto que resulta más conveniente comprar el activo a su precio actual en el mercado (spot). Por otro lado, la figura también muestra los resultados de la emisión de una opción de compra. Quien emite la opción espera que esta no sea ejercida puesto que esto significa ganar la prima C . Si no sucede así, deberá cumplir con la venta del activo a un precio más bajo que el que paga el mercado.

Los resultados para opciones de venta se ilustran en la figura (2.2). La compra de una opción de venta será conveniente siempre que la suma del precio de mercado y la prima P sea más baja que el precio spot. Para un productor que compró la opción de venta significa vender más caro que lo que paga el mercado. Recíprocamente, la emisión de una opción de venta resultará conveniente si el precio de ejercicio más la prima no superan al precio de mercado. Con ello habrá ganado la prima.

Comprar una opción de compra tiene la ventaja de limitar las pérdidas en caso de movimientos extremos a la baja en el precio de mercado. Análogamente, comprar una opción de venta tiene la ventaja que protege al inversionista contra los movimientos extremos al alza en el precio de mercado.

Considerando una opción americana, cualquier día antes de la fecha de expiración el comprador puede:

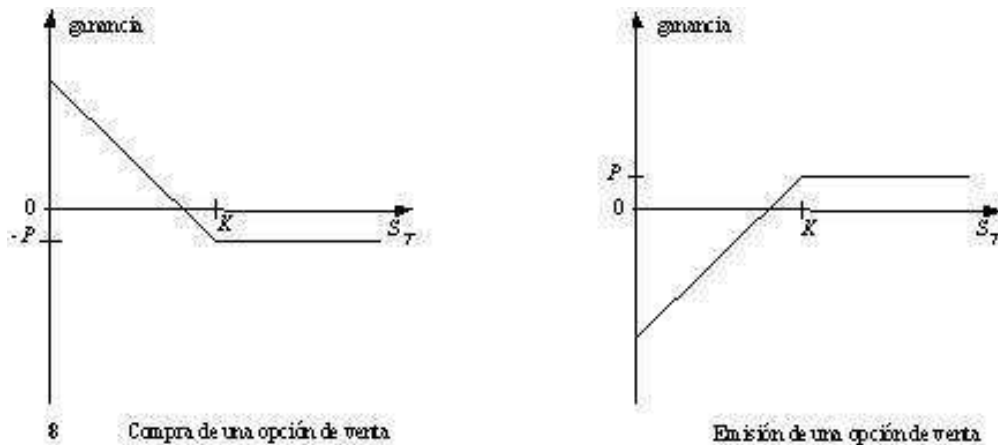


Figura 2.2: Negociación de una opción de venta

- Vender la opción en el mercado. Con ello cancela su posición.
- Ejercer la opción de compra.
- Retener la opción y no ejercerla.

Al tiempo de expiración, la tercera alternativa es equivalente a permitir que la opción de compra expire. A esta misma fecha es fácil ver, ignorando la primera alternativa, cual de las otras dos conviene a los intereses del comprador de la opción. Esto dependerá del precio corriente de las acciones comunes en el mercado. Si el precio de una acción, a esa fecha en el mercado, es mayor al precio de ejercicio, entonces le será rentable al comprador de la opción el ejercerla, puesto que al hacerlo puede inmediatamente revender, si lo desea, las acciones en el mercado y lograr una ganancia por el diferencial entre el precio de ejercicio y el de mercado. Por otro lado, si el precio de mercado de las acciones al momento de ejecutar la opción es menor al precio de ejercicio el comprador de la opción la dejará expirar, pues el ejercerla le acarrearía pérdidas.

Debe señalarse que en la práctica es usual no entregar el activo subyacente sino solamente el margen de diferencia entre el precio de ejercicio y el precio de mercado al momento de la ejecución de la opción.

Los principales usos de las opciones son la especulación y la cobertura. La especulación, como en cualquier otro activo, consiste en tomar posiciones según a lo que se cree evolucionarán los precios. Por otro lado, la cobertura toma posiciones para disminuir la exposición a los cambios de precio, dependiendo de la necesidades.

Capítulo 3

La Ecuación de Black & Scholes.

Dado que el valor de un derivado financiero depende del precio de un activo más fundamental llamado activo subyacente, se hace necesario describir el comportamiento del precio del activo subyacente para posteriormente valorar un derivado financiero, es decir, es necesario estimar la diferencia entre el precio de ejercicio y el precio spot (precio actual en el mercado) al momento en el que se haría efectiva la opción.

De manera general, se puede decir que el precio de un derivado financiero estará en función de cualquier variable estocástica que influya en el precio del activo y la variable tiempo. Resulta indispensable entonces tratar de describir el comportamiento de las variables estocásticas para resolver el problema de la valoración.

A través de la ecuación Black & Scholes se puede modelar el comportamiento del precio de las opciones financieras¹. En general, el precio de un derivado financiero estará en función de cualquier variable estocástica que influya en el precio del activo subyacente en el transcurso del tiempo. Resulta entonces indispensable el estudio de los procesos estocásticos involucrados para resolver el problema de la valoración de los derivados financieros. A continuación se describen las herramientas para la obtención de la ecuación de Black & Scholes.

3.1. El proceso de Wiener.

Consideremos el denominado *proceso de Wiener*, que es un tipo particular de proceso del Markov, que ha sido usado ampliamente en física para describir el movimiento de una partícula de gas sujeta a un gran número de choques. Se puede entender el comportamiento de una

¹Las opciones financieras se asumen negociables en *Mercados Eficientes*, los cuales son mercados donde la variación de los precios es resultado de la asimilación inmediata de la información por parte de los participantes del mercado; haciendo esto que las variaciones sean totalmente aleatorias.

variable estocástica, que sigue un proceso de Wiener al considerar los cambios en su valor en pequeños intervalos de tiempo. Considérese un pequeño intervalo de tiempo Δt y el cambio en el precio del activo subyacente Δz durante dicho intervalo de tiempo.

Existen dos propiedades básicas que debe cumplir una variable estocástica para que siga un proceso de Wiener:

1. Se satisface la siguiente relación:

$$\Delta z = \xi \sqrt{\Delta t}$$

o equivalentemente

$$z_t - z_s = \xi \sqrt{t - s}$$

donde ξ es una variable aleatoria normal estándar.

2. Sean $\Delta_1 t$ y $\Delta_2 t$ dos intervalos de tiempo disjuntos, entonces sus cambios de precio correspondientes $\Delta_1 z$ y $\Delta_2 z$ son variables aleatorias independientes.

El proceso de Wiener, tomado en tiempo y variables continuas, queda completamente descrito cuando

$$dz = \xi \sqrt{dt} \tag{3.1}$$

Definición 1. Se dice que $Z[\cdot]$ es un proceso de Wiener o movimiento Browniano si Z es una función definida en algún intervalo $I = [0, T]$ (eventualmente puede ser $T = +\infty$), con las siguientes propiedades:

1. $Z(0) = 0$
2. $\forall t, \forall a \geq 0$ la variable aleatoria $Z[t + a] - Z[t]$ es independiente de $\{Z[s] : 0 \leq s < t\}$
3. $\forall t, \forall a \geq 0$:

$$Z[t + a] - Z[t] \sim N(0, \sqrt{a}),$$

donde $N(0, \sqrt{a})$ representa una distribución normal con media 0 y varianza \sqrt{a} .

Observación 1. La proyección de Z sobre la coordenada t , $Z[t]$, es una variable aleatoria para todo $t \in I$; en este sentido se dice que $\{Z[t]\}_{t \in I}$ es un proceso estocástico.

Observación 2. La propiedad 2 implica que el proceso es independiente de su historia.

Los procesos de Wiener se caracterizan porque ΔZ y su respectivo Δt se relacionan a través de la ecuación:

$$\Delta Z = \xi \sqrt{\Delta t} \tag{3.2}$$

o lo que es lo mismo

$$Z_{t+\Delta t} = Z_t + \xi\sqrt{\Delta t}, \quad (3.3)$$

donde ξ es una variable aleatoria normal estándar.

El proceso de Wiener queda bien definido para tiempo continuo cuando $\Delta t \rightarrow 0$ obteniendo que

$$dZ = \xi\sqrt{dt} \quad (3.4)$$

Observación 3. *Notar que $E[\Delta Z] = 0$ y $Var[\Delta Z] = \Delta t$, siendo esto consistente con la propiedad 3.*

El proceso de Wiener determina que el valor esperado de $Z_{t+\Delta t}$ en cualquier instante futuro es igual a su valor actual Z_t . Esto significa que la tendencia en el cambio de la variable $Z_{t+\Delta t}$ es cero a cualquier tiempo futuro. Nótese que quien invierte en acciones u otro activo tiene la expectativa de que éste cambie de precio y así obtener un beneficio. Por lo tanto el proceso de Wiener debe ser corregido para reflejar esta expectativa. Esto se hace a través del proceso de Wiener Generalizado.

3.2. El proceso de Wiener Generalizado.

Definición 2. *El proceso de Wiener generalizado se define para una variable estocástica x a tiempo continuo en términos de dZ (Ec: 3.4) como:*

$$dx = adt + bdz \quad (3.5)$$

donde a y b son constantes.

Para entender la ecuación (3.5), considérense separadamente los dos componentes de la parte derecha de esta ecuación. El término adt implica que x tiene un crecimiento esperado de a por unidad de tiempo. No tomando en cuenta, por el momento, el término bdz la ecuación se escribe:

$$dx = adt$$

lo cual implica que:

$$x = x_0 + at$$

donde x_0 es el valor de la variable x al tiempo cero, observándose así que la variabilidad para un tiempo T de x sería aT .

Por otro lado, el término bdz corresponde a la variabilidad en los cambios de x . El coeficiente b indica la cantidad de variabilidad del proceso. La cantidad de variabilidad de dx es b veces un proceso de Wiener.

En un pequeño intervalo de tiempo Δt el cambio Δx en el valor de x , según las ecuaciones (3.2) y (3.5), está dado por:

$$\Delta x = a\Delta t + b\xi\sqrt{\Delta t}$$

Por consiguiente, bajo un proceso de Wiener generalizado, Δx es una variable aleatoria que se distribuye normalmente de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} E[\Delta x] &= a\Delta t \\ Var[\Delta x] &= b^2\Delta t \end{aligned} \tag{3.6}$$

El proceso de Wiener generalizado es una mejor aproximación para explicar el comportamiento del precio de activos en mercados eficientes. Sin embargo tiene una ligera deficiencia: no permite caracterizar los cambios de precio en términos porcentuales, lo que es lo habitual. Esta deficiencia se corrige al tomar a las constantes a y b de la ecuación (3.5) como funciones de la variable estocástica x (precio) y del tiempo t . A este procedimiento se le llama *proceso de Ito*.

3.3. Proceso de Ito.

Definición 3. *El proceso de Ito es un proceso de Wiener generalizado donde los parámetros a y b son funciones dependientes de x y t . Se describe según la ecuación:*

$$dx = a(x, t)dt + b(x, t)dz \tag{3.7}$$

En el proceso de Ito se considera que tanto el crecimiento esperado, así como la cantidad de variabilidad son susceptibles a cambiar en el tiempo.

3.4. Modelo continuo para el comportamiento del precio y el Lema de Ito.

En primera instancia parecería adecuado utilizar el proceso generalizado de Wiener para describir el comportamiento del precio. Esto es un crecimiento esperado constante de a en el precio, por unidad de tiempo; y una cantidad de variabilidad constante b de los cambios de precio. Sin embargo, es mucho más adecuado expresar el crecimiento esperado en el precio como una *proporción del mismo*.

Se puede expresar el crecimiento esperado en el precio como una proporción constante de la siguiente forma: Si S es el precio del activo, el crecimiento esperado sobre él es μS para algún parámetro constante μ .

El término estocástico debe también ser ajustado. Este término que hace referencia a la variabilidad del precio del activo debe cumplir con que cualquiera sea el precio de la acción, siempre existirá el mismo nivel de variabilidad o incertidumbre sobre el crecimiento en el precio.

Sea σ^2 la varianza del cambio proporcional del precio del activo. Esto significa que $\sigma^2 \Delta t$ es la varianza del cambio proporcional en el precio del activo en el tiempo Δt y que $\sigma^2 S^2 \Delta t$ es la varianza del cambio *actual* en el precio del activo, S , durante Δt . La varianza instantánea de la tasa de cambio de S es por lo tanto $\sigma^2 S^2$.

Estos argumentos sugieren que el precio de un activo, S , debe ser representado a través de un proceso de Ito, el cual tiene un crecimiento esperado instantáneo μS y una razón de varianza instantánea $\sigma^2 S^2$. Por consiguiente, se puede escribir el proceso como:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \quad (3.8)$$

o equivalentemente:

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz$$

donde μ es la tasa esperada de retorno expresada en términos porcentuales del activo, σ es su volatilidad y dz denota un proceso de Wiener estándar.

Lema 1. Sea $S(t)$ un proceso de Ito, particularmente el proceso (3.8). Sea $V(S, t)$ el precio de una opción tal que V es una función suave². Entonces $V(S(t), t)$ es también un proceso de Ito, y

$$dV = \left(\mu S \frac{\partial V}{\partial S} - \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dz.$$

² V es suave si sus derivadas parciales de todos los órdenes están definidas.

3.5. Deducción de la Ecuación de Black & Scholes.

Partamos, por facilidad de notación, de la versión a tiempo discreto del modelo de comportamiento de precio del activo S .

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \Delta z \quad (3.9)$$

Considerando el precio de la opción (V) como función del precio del activo (S), se tiene por el lema de Ito

$$\Delta V = \left(\mu S \frac{\partial V}{\partial S} - \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) \Delta t + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} \Delta z \quad (3.10)$$

El siguiente paso será, a través de una combinación adecuada de las ecuaciones (3.10) y (3.9), deshacerse del término Δz de incertidumbre. Esto es posible gracias a que el Lema de Ito establece que en ambas ecuaciones la incertidumbre es la misma. Esto se logra al escoger un *portafolio*³ conformado por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial S} &: \text{ Acciones} \\ -V &: \text{ Opciones} \end{aligned}$$

Definiendo Ψ como el valor de este portafolio, entonces se tiene:

$$\Psi = -V + S \frac{\partial V}{\partial S}$$

y el cambio en el valor del portafolio $\Delta \Psi$ en el tiempo será:

$$\Delta \Psi = -\Delta V + \Delta S \frac{\partial V}{\partial S} \quad (3.11)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.9) y (3.10) en la ecuación (3.11) tenemos:

$$\Delta \Psi = \left(-\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) \Delta t \quad (3.12)$$

³Un *portafolio* es un conjunto de activos definidos por su retorno esperado y la variabilidad observada en su retorno, es decir, su nivel de riesgo.

Así, esta ecuación no muestra el término que envuelve incertidumbre Δz . Consecuentemente este portafolio es libre de riesgo durante el tiempo Δt , por lo tanto su tasa de retorno es r . Entonces en este portafolio se debe cumplir, para el periodo de tiempo corto Δt , que el cambio en el valor del portafolio sea:

$$\Delta\Psi = r\Psi\Delta t \tag{3.13}$$

Finalmente, para la obtención de la ecuación diferencial de Black & Scholes debemos sustituir la ecuación (3.12) en la ecuación (3.13)

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right) \Delta t = r \left(V - S \frac{\partial V}{\partial S}\right) \Delta t$$

o equivalentemente:

$$\mathcal{L}V := \frac{\partial V}{\partial t} + rS \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV = 0 \tag{3.14}$$

Bajo la suposición de ausencia de arbitraje tenemos que el precio de una opción europea satisface la ecuación diferencial parcial (3.14) y tiene una solución analítica, dada una condición inicial factible. Esta solución analítica es conocida como la fórmula de Black y Scholes para valoración de opciones europeas. En el caso de las opciones americanas en el que se puede ejercer la opción a cualquier tiempo antes de su fecha de expiración, el problema es más delicado pues no solamente hay que determinar el valor de la opción, si no que hay que determinar si es conveniente ejercer o no la opción. En el contexto de Black & Scholes la solución al problema de valoración de opciones americanas se puede obtener como solución del problema a frontera libre de la ecuación (3.14) en el dominio $\mathbb{R}^+ \times [0, T]$.

En la siguiente sección problema a frontera libre será expresado a través de su formulación débil, desembocando en la desigualdad variacional de Black & Scholes.

3.6. La desigualdad variacional de Black & Scholes.

3.6.1. Problema a frontera Libre.

La rentabilidad de la opción al tiempo t se denota por $\mathcal{H}(S, t)$ y estará definida, para una opción de venta, por:

$$\mathcal{H}(S, t) = \max \{0, K - S(t)\}$$

donde:

K es el precio de ejercicio de la opción.

$S(t)$ es el precio del activo a tiempo t .

Problema 1 (Problema de Frontera Libre). .- Encontrar $V = V(S, t)$ y $S_f = S_f(t)$, tal que:

$$\mathcal{L}V(S, t) = 0 \quad \text{para } S > S_f \quad \text{y} \quad 0 \leq t \leq T$$

$$V(S, t) = \mathcal{H}(S, t) \quad \text{para } S \leq S_f \quad \text{y} \quad 0 \leq t \leq T$$

con las condiciones de frontera

$$V(S, t) = 0 \quad \text{para } S \rightarrow \infty \quad \text{y} \quad 0 \leq t \leq T$$

y la condición final

$$V(S, T) = \mathcal{H}(S, T) \quad \text{para } S \geq 0,$$

siempre y cuando V y $\frac{\partial V}{\partial S}$ sean continuas en la frontera libre S_f .

Notemos que la condición de frontera $V(S, t) = K$ para $S \rightarrow 0$ ya está incluida a través de la condición $V(S, t) = \mathcal{H}(S, t)$ para $S \leq S_f$. La frontera libre S_f que es parte de la solución, separa la parte del dominio donde es óptimo ejercer la opción inmediatamente, de la parte donde es favorable conservar la opción y por consiguiente el precio óptimo de ejercicio de la opción. Notemos además que el derecho de ejercer la opción tempranamente conduce a la condición $V(S, t) \geq \mathcal{H}(S, t)$ para todo $S > 0$ y $0 \leq t \leq T$ y por consiguiente puede ser visto como una condición de obstáculo inferior para el precio de la opción Americana V .

3.6.2. Formulación débil.

Con el fin de formular el problema tomando en cuenta una ecuación parabólica y proceder a presentar su formulación débil se hacen las transformaciones no lineales siguientes:

$$S = Ke^x, \quad t = T - \frac{2\tau}{\sigma^2}, \quad V(S, t) = Ke^{-\frac{x}{2}(q-1) - (\frac{1}{4}(q-1)^2 + q)\tau} y(x, \tau) \quad (3.15)$$

con $q := \frac{2r}{\sigma^2}$, para luego de unos cálculos⁴ transformar la Ec.(3.14) en la ecuación parabólica del calor:

$$\mathcal{W}(y) = \frac{\partial y}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \quad (3.16)$$

sobre una nueva variable $y(x, \tau)$. La transformación de la función de rentabilidad $\mathcal{H}(S, t)$, resulta en la función de rentabilidad transformada:

$$g(x, \tau) = e^{\frac{1}{4}(q+1)^2\tau} \max\{e^{\frac{x}{2}(q-1)} - e^{\frac{x}{2}(q+1)}, 0\}.$$

La transformación de los datos en la frontera sería:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y(x, \tau) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x, \tau), \quad y(x, 0) = g(x, 0).$$

Para simplificar el tratamiento de las condiciones de frontera, reducimos el problema a condiciones de frontera homogéneas mediante la sustitución:

$$u(x, \tau) = (y(x, t) - g(x, t))$$

El siguiente paso es cambiar el dominio no acotado \mathbb{R} por el dominio computacional:

$$\Omega =]x_{\min}, x_{\max}[\subset \mathbb{R}$$

con valores fijos $x_{\min} < 0 < x_{\max}$

Luego, una formulación débil puede ser encontrada al multiplicar el problema transformado por una función test e integrar por partes. La condición de obstáculo (en S_T), así como la condición de frontera homogénea y las condiciones iniciales están integradas en la definición del conjunto de funciones test admisibles:

$$\mathcal{K}_0 := \{v \in L^2(0, \sigma^2 T/2; H^1(\Omega)) : v(x, \tau) \geq 0, v(x_{\max}, \tau) = v(x_{\min}, \tau) = 0, v(x, 0) = 0; \\ (x, \tau) \in \Omega \times]0, \sigma^2 T/2[\}$$

Las definiciones y notaciones acerca de los espacios de Sóbolev usados se pueden consultar en la sección Elementos del Análisis funcional.

Observación 4. *Nuestro \mathcal{K}_0 es un conjunto convexo, cerrado, no vacío puesto que:*

Dados $u, v \in \mathcal{K}_0$ y $\theta \in [0, 1]$ tenemos:

$$\blacksquare [\theta u + (1 - \theta)v](x, \tau) = \theta u(x, \tau) + (1 - \theta)v(x, \tau) \geq 0$$

⁴Los detalles de la transformación y sus cálculos se encuentran en el Anexo 1

- $[\theta u + (1 - \theta)v](x_{max}, \tau) = \theta u(x_{max}, \tau) + (1 - \theta)v(x_{max}, \tau) = \theta u(x_{min}, \tau) + (1 - \theta)v(x_{min}, \tau) = [\theta u + (1 - \theta)v](x_{min}, \tau)$
- $[\theta u + (1 - \theta)v](x, 0) = \theta u(x, 0) + (1 - \theta)v(x, 0) = 0$
- $[\theta u + (1 - \theta)v]|_{\Gamma} = \theta u|_{\Gamma} + (1 - \theta)v|_{\Gamma} = 0$

lo que muestra que $[\theta u + (1 - \theta)v] \in \mathcal{K}_0$ probando así la convexidad.

Ahora tomaremos $(f_n) \subset \mathcal{K}_0$ tal que $\|f_n - f\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Probemos que $f \in \mathcal{K}_0$.

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^T \int_{x_{min}}^{x_{max}} \left| \frac{\partial f_n}{\partial x}(x) - \frac{\partial f}{\partial x}(x) \right| dx dt + \int_0^T \int_{x_{min}}^{x_{max}} |f_n(x) - f(x)| dx dt \right).$$

Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{x_{min}}^{x_{max}} |f_n(x) - f(x)| dx dt = 0 \quad (3.17)$$

Sea $E_t = \cup_{A \subset]0,T[} A$ tal que $m(A)^5 = 0$. Sea $E_x = \cup_{B \subset]x_{min}, x_{max}[} B$ tal que $m(B) = 0$.

Existe $c > 0$ tal que $\forall x \in \Phi$, $|f_n(x) - f(x)| \leq c \int_{]0,T[-E_t} \int_{]x_{min}, x_{max}[-E_x} |f_n(x) - f(x)| dx dt$.

Así (3.17) implica que $f_n(x) \rightarrow f(x)$ cuando $n \rightarrow \infty \forall x \in \Phi$ donde $\Phi =]0, T[\times]x_{min}, x_{max}[-E_t \times E_x$

Observación 5. La condición de frontera en la definición de \mathcal{K}_0 es posible, pues si tomamos $h \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, donde $\Gamma = \{x_{min}, x_{max}\}$, entonces existirá $w \in H^1(\Omega)$ tal que $w|_{\Gamma} = h$ así $v|_{\Gamma} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ de modo que siendo $v - w = \phi$ podemos ver que $\phi(t) \in H_0^1(\Omega)$ c.t.p. en $[0, T]$

Entonces, procedemos formulación débil multiplicando 3.16 por $\phi \in \mathcal{K}_0$:

$$\int_0^{\sigma^2 T/2} \left(\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial \tau} \phi dx + \int_{\Omega} \frac{\partial g}{\partial \tau} \phi dx - \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \phi dx - \int_{\Omega} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \phi dx \right) d\tau = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^{\sigma^2 T/2} \left(\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial \tau} \phi dx + \int_{\Omega} \frac{\partial g}{\partial \tau} \phi dx - \left[\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial x} \phi d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} dx \right] - \left[\int_{\Gamma} \frac{\partial g}{\partial x} \phi d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} dx \right] \right) d\tau = 0$$

donde tomando $a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ y $f : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por⁶

⁵ $m(A)$ denota la medida de A

⁶Con respecto a la notación, muy a menudo y si no se genera confusión de notará $u = u(t) \in H_0^1(\Omega)$

$$a(u, v) := \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx, \quad f(v) := - \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{\partial g}{\partial \tau} v + \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx$$

tenemos que,

$$\int_0^{\sigma^2 T/2} \left(\frac{\partial u}{\partial \tau}, \phi \right) + \int_0^{\sigma^2 T/2} a(u, \phi) = \int_0^{\sigma^2 T/2} f(v)$$

La forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ es simétrica, *coerciva* y continua. En efecto, sean $u, v \in H_0^1(\Omega)$ tenemos que:

$$a(u, v) := \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} dx = a(v, u)$$

lo que verifica la simetría.

Adicionalmente,

$$a(u, v) := \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} dx = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx = \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{L^2}^2 \geq \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2$$

Esta propiedad hace de $a(\cdot, \cdot)$ una forma coerciva.

La continuidad de a viene de la desigualdad de Cauchy- Schwartz:

$$\left| \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{L^2(\Omega)} \right| \leq |(u, v)_{H_0^1(\Omega)}| \leq \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$$

3.6.3. El problema como la Desigualdad Variacional Parabólica de Black & Scholes.

Para tratar el problema como una desigualdad parabólica evolutiva, volvamos por un momento al problema a frontera libre (1) en donde se puede observar lo siguiente:

Si $S > Sf$, considerando además que la condición para ejercer la opción favorablemente es que $V(S, t) > \mathcal{H}$ tenemos que:

$$\mathcal{L}(V) = 0$$

y si $S \leq S_f$ entonces $V(S, t) = \mathcal{H}(S)$

$$\mathcal{L}(V) < 0$$

Adicionalmente, de razonar sobre el valor de la opción podemos observar que lo anterior nos indica que en cada uno de los casos se tiene que o $\mathcal{L}(V) = 0$ o $V - \mathcal{H} = 0$, lo que nos lleva observar que:

$$\mathcal{L}(V) \cdot (V(S, t) - \mathcal{H}) = 0$$

y así podemos plantear el problema como lo que se conoce como un *sistema lineal de complementariedad*, el cual se justificará y se explicará mejor en la sección pertinente.

Problema 2. *Encontrar $V(S, t)$ con $(S, t) \in \mathbb{R} \times [0, T[$ tal que*

$$\mathcal{L}(V) \cdot (V(S, t) - \mathcal{H}) = 0$$

$$\mathcal{L}(V) \leq 0, \quad V(S, t) - \mathcal{H} \geq 0$$

Al aplicar sobre el problema complementario las transformaciones practicadas a $\mathcal{L}(V)$ en la sección 3.6.2 logramos reescribir el problema en función de (3.16):

$$(\mathcal{W}u - f) \cdot (u(x, \tau) - g(x, \tau)) = 0 \tag{3.18}$$

$$(\mathcal{W}u - f) \geq 0, \quad u(x, \tau) - g(x, \tau) \geq 0$$

Por último, si consideramos que para la solución w para este último problema complementario y v cualesquiera en \mathcal{K}_0 tenemos que $w \geq 0$ y $v \geq 0$, de modo que:

$$\int_{x_{min}}^{x_{max}} (\mathcal{W}w - f)(v - w)dx = \int_{x_{min}}^{x_{max}} (\mathcal{W}v - f)vdx \geq 0 \geq 0$$

gracias a (3.18). Así,

$$\int_{x_{min}}^{x_{max}} \mathcal{W}w(v - w)dx \geq \int_{x_{min}}^{x_{max}} f(v - w).$$

para poder reformular el problema de la manera siguiente:

Problema 3. *Encontrar $w \in L^2(0, \sigma^2 T/2; H_0^1(\Omega))$ con $\frac{\partial w}{\partial t} \in L^2(0, \sigma^2 T/2; H^{-1}(\Omega))$ tal que $w(x, 0) = 0$, $w(\tau) \in \mathcal{K}_0(\tau)$ para todo $\tau \in]0, \sigma^2 T/2[$, y es tal que*

$$\left\langle \frac{\partial w}{\partial \tau}, v - w \right\rangle + a(w, v - w) \geq f(v - w)$$

para todo $v \in \mathcal{K}_0$

Problema 4. *Encontrar $w \in \mathcal{K}_0$ con tal que $\frac{\partial w}{\partial t} \in L^2(0, \sigma^2 T/2; H^{-1}(\Omega))$ tal que $w(x, 0) = w_0 \in \mathcal{K}_0(0)$ y,*

$$\int_0^{\sigma^2 T/2} \left\{ \left\langle \frac{\partial w}{\partial \tau}, v - w \right\rangle + a(w, v - w) - f(v - w) \right\} d\tau \geq 0$$

para todo $v \in \mathcal{K}_0$

Teorema 1. *Los problemas (3) y (4) son equivalentes.*

Demostración. Si consideramos un solución del problema (3), evidentemente ésta resuelve al problema (4). Recíprocamente, consideremos una solución del problema (4) y supongamos, para $\varepsilon > 0$ y $\tau \in]0, \sigma^2 T/2[$ cualesquiera,

$$v = \begin{cases} w & \text{si } t \notin]\tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon[\\ \tilde{v} \in \mathcal{K}_0 & \text{si } t \in]\tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon[\end{cases}$$

Entonces,

$$\int_{\tau - \varepsilon}^{\tau + \varepsilon} \left\{ \left\langle \frac{\partial w}{\partial \tau}, v - w \right\rangle + a(w, v - w) - f(v - w) \right\} d\tau \geq 0$$

y como esto se cumple para cualquier intervalo de integración en $]0, \sigma^2 T/2[$ tenemos que se resuelve el problema (3). \square

La discusión sobre la existencia y unicidad de la solución a nuestra desigualdad variacional se trata en la sección 4.2.2.

Capítulo 4

Estudio Variacional del Problema de Valoración de las Opciones Americanas.

El fin primordial de este capítulo es exponer resultados de existencia y unicidad para nuestro problema de valoración de opciones americanas. Para esto, el estudio variacional del problema mediante su tratamiento como un problema a frontera Libre da un excelente marco teórico para abordar dichos resultados.

Bajo el contexto expuesto, primeramente se introducirán los conceptos y herramientas del análisis funcional requeridos. Así, el estudio del Problema como problema a frontera libre, su formulación débil y su tratamiento como un problema de minimización nos conducen al campo de las ecuaciones variacionales parabólicas evolutivas, cuyos resultados en existencia y unicidad se encuentran ampliamente estudiados por diversos autores.

4.1. Elementos del análisis funcional.

Dado un intervalo $[0, T] \subset \mathbb{R}$ (generalmente $T < \infty$ y X un espacio de Banach con norma $\|\cdot\|_X$), designamos por $L^p(0, T; X)$ el espacio de clases de funciones medibles de $t \rightarrow f(t)$ y definidas de $[0, T] \rightarrow X$ tales que:

$$\|f\|_{L^p(0, T; X)} = \left(\int_0^T \|f\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \quad p \neq +\infty,$$

y

$$\|f\|_{L^\infty(0, T; X)} = \sup_{t \in (0, T)} \text{ess} \|f\|_X < +\infty \quad p = +\infty$$

Los espacios $L^p(0, T; X)$ son espacios de Banach dotados de la norma $\|f\|_{L^p(0, T; X)}$ cuando $p \neq +\infty$ y con la norma $\|f\|_{L^\infty(0, T; X)}$ cuando $p = +\infty$.

Si X es un espacio de Hilbert dotado de un producto escalar $(\cdot, \cdot)_X$, el espacio $L^2(0, T; X)$ es un espacio de Hilbert para el producto escalar:

$$(f, g)_{L^2(0, T; X)} = \int_0^T (f, g)_X dt$$

Definición 4. Sea f una función continua. Llamaremos soporte de f , $\text{supp}(f)$, al complemento del mayor abierto sobre el que f es nula, o equivalentemente, la adherencia del conjunto $\{x; f(x) \neq 0\}$. Si $\text{supp}(f)$ es compacto diremos que f tiene soporte compacto.

Definición 5. Sea Ω un abierto de \mathbb{R}^n , una distribución sobre Ω es una forma lineal $T : C_c^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\varphi \rightarrow \langle T, \varphi \rangle \quad \varphi \in C_c^\infty(\Omega),^1$$

que verifica la propiedad de continuidad siguiente: para todo compacto K contenido en Ω , existe un entero p y una constante C tal que:

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \quad |\langle T, \varphi \rangle| \leq C \sup_{\substack{|\alpha| \leq p \\ x \in K}} |\partial^\alpha \varphi(x)|$$

Denotaremos por $\mathfrak{D}'(\Omega)$ el espacio de distribuciones sobre Ω .

Designaremos por $\mathfrak{D}]0, T[; X)$ el espacio de funciones infinitamente derivables a soporte compacto en $]0, T[$ a valores en X , y por $\mathfrak{D}']0, T[; X)$ el espacio de distribuciones sobre $]0, T[$ a valores en X , definido por

$$\mathfrak{D}']0, T[; X) = L(\mathfrak{D}]0, T[; X)$$

en donde $L(M; N)$ es el espacio de aplicaciones lineales continuas de $M \rightarrow N$.

En particular a $f \in L^p(0, T; X)$ se le puede hacer corresponder una distribución $\tilde{f} : \mathfrak{D}]0, T[\rightarrow X$ definida por:

$$\tilde{f}(\phi) = \int_0^T \phi(t) f(t) dt \quad \phi \in \mathfrak{D}]0, T[$$

¹ $C_c^\infty(\Omega) = \{f \in C^\infty(\Omega); f(x) = 0 \forall x \in \Omega - K \text{ donde } K \subset \Omega \text{ es un compacto}\}$

La aplicación $\phi \rightarrow \tilde{f}(\phi)$ es lineal y continua de $\mathfrak{D}]0, T[\rightarrow X$. Además $f \rightarrow \tilde{f}$ es una inyección y es conveniente identificar f y \tilde{f} . Adicionalmente, si $f \rightarrow 0$ en $L^p(0, T; X) \Rightarrow \tilde{f} \rightarrow 0$ en $\mathfrak{D}']0, T[; X$, es decir, $\tilde{f}(\phi) \rightarrow 0, \forall \phi \in \mathfrak{D}]0, T[$ [GLT]

Dado que $\mathfrak{D}']0, T[; X \subset L^p(0, T; X)$, se tiene que algebraicamente y topológicamente

$$L^p(0, T; X) \subset \mathfrak{D}']0, T[; X$$

Para $f \in \mathfrak{D}']0, T[; X$ definimos $\frac{d^k f}{dt^k} = f^{(k)}$ por

$$f^{(k)}(\phi) = \langle f^{(k)}, \phi \rangle = (-1)^k \langle f, \phi^{(k)} \rangle \text{ para todo } \phi \in \mathfrak{D}]0, T[$$

de donde, $f^{(k)} \in \mathfrak{D}']0, T[; X \forall k$.

Además, si $f \in L^p(0, T; X)$, $f' = \frac{df}{dt}$ denota la derivada de f en t en el sentido de las distribuciones en $]0, T[$ con valores en X .

Observación 6. Más adelante se usará muy convenientemente el hecho de que $\langle \cdot, \cdot \rangle|_{L^2(0, T; X)} = (\cdot, \cdot)_{L^2(0, T; X)}$, es decir, la identificación de $L^2(0, T; X)$ con su dual.

Sea Ω un dominio acotado o no de \mathbb{R} y sea $p \in \mathbb{R}$ con $1 \leq p \leq \infty$

Definición 6. El espacio de Sóbolev $W^{1,p}(\Omega)$ se define por:

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega); \exists g \in L^p(\Omega) \text{ tal que } \int_{\Omega} u \varphi' = - \int_{\Omega} g \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \right\}$$

Notaremos $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$, y adicionalmente, diremos que para cada $u \in W^{1,p}(\Omega)$ $u' = g$.

Observación 7. En la definición de $W^{1,p}$ diremos que φ es una función test. Podemos utilizar indistintamente $C_c^1(\Omega)$ o $C_c^\infty(\Omega)$ como conjunto de funciones test, puesto que si $\phi \in C_c^1(\Omega)$, entonces $\rho_n * \phi \in C_c^\infty(\Omega)$ para n suficientemente grande y $\rho_n * \phi$ tiende a ϕ en C^1 .

Observación 8. Para definir $W^{1,p}$ podemos utilizar a su vez el lenguaje de la teoría de las distribuciones. Toda función $u \in L^p(\Omega)$ admite una derivada en el sentido de las distribuciones, que es un elemento del espacio $\mathfrak{D}'(\Omega)$. Se dice que $u \in W^{1,p}(\Omega)$ si esta derivada distribucional coincide, en el espacio $\mathfrak{D}'(\Omega)$, con una función de $L^p(\Omega)$.

El espacio $W^{1,p}(\Omega)$ está dotado de la norma:

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|u'\|_{L^p(\Omega)}$$

o a veces, por la norma equivalente

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \|u'\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}$$

El espacio H^1 esta dotado del producto escalar

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + (u', v')_{L^2}$$

y por la norma asociada

$$\|u\|_{H^1} = \left(\|u\|_{L^2}^2 + \|u'\|_{L^2}^2 \right)^{1/2}$$

que es equivalente a la norma $W^{1,2}(\Omega)$.

Notación 1. Llamaremos a $(H^1)'$ el dual de H^1 .

Definición 7. Dado $1 \leq p < \infty$, se designa por $W_0^{1,p}(\Omega)$ la clausura de $C_c^1(\Omega)$ en $W^{1,p}(\Omega)$. Notaremos $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$.

El espacio $W_0^{1,p}(\Omega)$ esta dotado de la norma inducida por $W^{1,p}(\Omega)$; el espacio $H_0^1(\Omega)$ esta dotado del producto escalar inducido por $H^1(\Omega)$.

Definición 8 (Espacios de S6oblev fraccionarios). *Se puede definir una familia de espacios intermedios entre $L^p(\Omega)$ y $W^{1,p}(\Omega)$. M6as exactamente, si $0 < s < 1$ ($s \in \mathbb{R}$) y si $1 \leq p \leq \infty$, se define:*

$$W^{s,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega); \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{s + \frac{N}{p}}} \in L^p(\Omega \times \Omega) \right\},$$

donde Ω es un abierto de \mathbb{R}^N . Se nota $H^s(\Omega) = W^{s,2}(\Omega)$. Por 6ltimo se define $W^{s,p}(\Omega)$ para s real, no entero, $s > 1$ como sigue. Se escribe $s = m + \sigma$ con $m =$ parte entera de s y se define

$$W^{s,p}(\Omega) = \{u \in W^{m,p}(\Omega); D^\alpha u \in W^{\sigma,p}(\Omega) \text{ para todo } \alpha \text{ con } |\alpha| = m\}$$

4.2. Desigualdades Variacionales Parab6licas.

Definici6n 9. Sea H un espacio de Hilbert. Dado un conjunto $K \subset H$ y una aplicaci6n $F : K \rightarrow H$, una desigualdad variacional se define como el problema de encontrar $u \in K$ tal que

$$(F(u), v - u) \geq 0, \text{ para todo } v \in K, \quad (4.1)$$

donde K es un conjunto cerrado no vac6o.

4.2.1. Formulación Abstracta de una Desigualdad Variacional Parabólica.

Sean V y H dos espacios de Hilbert tales que:

- $V \subset H$, la inyección de V en H continua, V denso en H

Designamos por $((,))$ (respectivamente $(,)$) el producto escalar en V (respectivamente H) y por $\| \cdot \|$ (respectivamente $| \cdot |$) la norma correspondiente. Entonces tenemos que existe $c \geq 0$ tal que

- $\|v\|_H \leq c\|v\|_V, \forall v \in V$.

Se puede identificar a H con su dual siempre que se pueda sumergir H en V' , entonces tenemos una identificación compatible con la anterior:

- $V \subset H \subset V'$ donde V' es el dual de V .

Dotamos a V' de la norma "dual"

$$\|w\|_* = \sup_{v \in V} \langle w, v \rangle \quad \text{con } \|v\| = 1.$$

Además tendremos en cuenta el espacio de Hilbert

$$H(0, T; V) = \left\{ v \mid v \in L^2(0, T; V), v' = \frac{\partial v}{\partial t} \in L^2(0, T; V') \right\} \quad (4.2)$$

dotado del producto escalar $(u, v) := (u, v)_{L^2(0, T; V)} + (u', v')_{L^2(0, T; V')}$

Sea K un convexo cerrado no vacío de V con u_0 dado como condición inicial. Además, sea $A \in \mathfrak{L}(V; V')$ coerciva, i.e., satisfaciendo la condición

$$\langle Av, v \rangle_{V', V} \geq \alpha \|v\|^2, \quad \alpha \text{ constante } > 0 \quad (4.3)$$

la que se escribirá cuando sea conveniente $a(u, v) = \langle Au, v \rangle_{V', V}$. Sean $f \in L^2(0, T; V')$, y

$$\mathfrak{K} = \{v \in H(0, T; V), v(t) \in K \text{ para casi todo } t \in [0, T]\}$$

$$\mathfrak{K}_0 = \{v \in H(0, T; V), v(0) = u_0, v(t) \in K \text{ para casi todo } t \in [0, T]\}$$

El problema general en estudio es encontrar $u \in \mathfrak{K}_0$ tal que²

$$\int_0^T (u' + Au - f, v - u) dt \geq 0, \quad \text{para todo } v \in \mathfrak{K}$$

o su forma que se demostró como equivalente en el Teorema 1:

$$(u' + Au - f, v - u) \geq 0, \quad \text{para todo } v \in \mathfrak{K}, \quad \text{c.t.p. } t \in [0, T]$$

La Desigualdad Variacional Parabólica. (PVI)

Las Desigualdades Parabólicas Evolutivas que cuentan entre sus diversas aplicaciones con diversos problemas de difusión, como el de la calor, la de la presión de un fluido, la de un gas en otro medio gaseoso y la misma ecuación de Black & Scholes que puede interpretarse como un problema de difusión del calor en un dominio unidimensional.

Por ello vamos a plantear el problema en una forma general bajo las siguientes suposiciones:

- $V = H^1(\Omega)$, $H = L^2(\Omega)$, con Ω abierto en \mathbb{R}^n
- $a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla \cdot u \nabla v dx$
- $f \in H$ de modo que $(f, g) = \int_{\Omega} fg$
- K convexo cerrado no vacío de $H^1(\Omega)$.

Así, designando por $u(t)$ la función $t \mapsto u(x, t)$; se considera entonces el problema de encontrar $w(t) \in K$ para cualquier $t \in [0, T]$ tal que:

$$\left\langle \frac{\partial w}{\partial \tau}, v - w \right\rangle + a(w, v - w) \geq f(v - w), \quad \text{para todo } v \in K \text{ con } w(0) = u_0, \quad \text{con } u_0 \text{ dado en } L^2(\Omega).$$

o en el contexto evolutivo, considerando:

$$\mathfrak{K} = \{v \in H(0, T; H^1(\Omega)), v(t) \in K \text{ c.t.p. en } [0, T]\}$$

$$\mathfrak{K}_0 = \{v \in H(0, T; H^1(\Omega)), v(0) = u_0, v(t) \in K \text{ c.t.p. en } [0, T]\}$$

El problema consiste en encontrar $w \in \mathfrak{K}_0$ tal que:

$$\int_0^T \left\{ \left\langle \frac{\partial w}{\partial \tau}, v - w \right\rangle + a(w, v - w) - f(v - w) \right\} d\tau \geq 0, \quad \text{para todo } v \in \mathfrak{K}.$$

²En cuanto a la notación, a menudo y si no se genera confusión se escribirá $u = u(t) \in H$

4.2.2. Estudio de existencia y unicidad de soluciones de la PVI.

Comencemos esta sección relacionando la PVI con un problema en el que no se involucra una parte temporal con el fin de establecer relaciones y derivar una técnica apropiada para estudiar la solución de la PVI.

Sean V un espacio de Hilbert y K un conjunto convexo cerrado no vacío en V . Consideramos el problema de encontrar $u \in K$ tal que

$$a(u, v - u) \geq (f, v - u) \quad \text{para } u, v \in K. \quad (4.4)$$

con a una forma bilineal continua definida sobre V y $f \in V'$. Para (4.4) el problema de existencia y unicidad ha sido ampliamente estudiado como aplicación del *teorema de Stampacchia* (Ver[Bré]). En el caso del problema parabólico evolutivo tenemos que considerar una forma bilineal $u, \varphi \mapsto \hat{a}(u, \varphi)$ definida para $u(t) \in V$ y $\varphi(t) \in \Phi$ donde Φ está estrictamente contenido en el espacio de Hilbert V . En el problema análogo a (4.4) se debe tener en cuenta que $\hat{a}(u, \varphi - u)$ no está bien definido (ver observación más adelante) aún en el caso $\varphi \in K \cap \Phi$, de modo que se tiene que reformular la forma bilineal para este problema y poder formular así una desigualdad variacional bien definida. Esta técnica se puede apreciar en [LS].

Así, pasamos a formular el resultado fundamental para nuestra PVI, en donde obviamente se tomará en cuenta la modificación mencionada de la forma bilineal.

El Resultado Fundamental de Existencia y Unicidad para la PVI.

Consideremos Ω un conjunto abierto en \mathbb{R}^n con frontera suave Γ , y recordando que $V = H^1(\Omega)$ cuyo espacio dual está contenido en $(H_0^1(\Omega))' = H^{-1}(\Omega)$, definamos:

$$V_T = \{v \in L^2(0, T; H^1(\Omega)), v' \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)), v(0) = 0\} \quad (4.5)$$

dotado de la norma $\left(\|v\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega))}^2 + \|v'\|_{L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

Y,

$$\Phi = \{\varphi \in L^2(0, T; H^1(\Omega)), \varphi' \in L^2(0, T; L^2(\Omega)), \varphi(0) = 0\} \quad (4.6)$$

Notemos que Φ es un espacio de Hilbert con la norma de V_T y que además se tiene que $\Phi \subset V_T$ estrictamente.

Las funciones $v \in V_T$ están definidas en $\Omega \times]0, T]$. Sea $\Sigma = \Gamma \times [0, T]$ la frontera lateral de $\Omega \times]0, T]$, se puede definir $v|_{\Sigma}$ (en realidad $v|_{\Sigma} \in L^2(0, T; H^{1/2}(\Gamma))$ [Bré]). Por consiguiente podemos definir, dentro del contexto de las notaciones de la formulación abstracta, siendo

$$K = \{v(t) \in H_0^1(\Omega) \text{ tales que } v(t) \geq 0 \text{ en casi todo } [0, T]\} \quad (4.7)$$

el convexo cerrado \mathfrak{K}_o en V_T :

$$\mathfrak{K}_o = \{v \in V_T \mid v(t) \in K \text{ en casi todo } [0, T]\} \quad (4.8)$$

Sean ahora $a_{i,j}(x, t)$ y a_o funciones a valores reales que satisfacen

$$a_{i,j}(x, t) \in L^\infty(\Omega \times]0, T[) \quad i, j = 1, \dots, n$$

$$\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x, t) \zeta_i \zeta_j \geq \alpha (\zeta_1^2 + \dots + \zeta_n^2) \text{ para } \zeta_i \in \mathbb{R}, \alpha > 0 \quad (4.9)$$

para $x, t \in \Omega \times]0, T[$, $a_o \in L^\infty(\Omega \times]0, T[)$, $a_o(x, t) \geq \alpha$.

Definamos para $u, v \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$,

$$\mathbf{a}(u, v) = \int_0^T a(t; u(t), v(t)) dt,$$

donde

$$a(t; w_1, w_2) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{i,j}(x, t) \frac{\partial w_1}{\partial x_j} \frac{\partial w_2}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} a_o(x, t) w_1 w_2 dx$$

y gracias a (4.9) tenemos que $\mathbf{a}(u, v)$ es una forma bilineal continua sobre $L^2(0, T; H^1(\Omega))$ y por ende sobre V_T y

$$\mathbf{a}(v, v) \geq \alpha \|v\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}^2$$

Ahora, redefinamos nuestra forma bilineal \mathbf{a} de la siguiente manera a fin de superar los problemas sobre su definición:

$$\hat{\mathbf{a}}(u, \varphi) = \mathbf{a}(u, \varphi) - (u, \varphi'), \quad u \in V_T, \varphi \in \Phi$$

$$(f, g) = \int_0^T (f(t), g(t))_{L^2(\Omega)} dt$$

Y finalmente establezcamos nuestra desigualdad variacional modificada para poder estudiar la existencia y unicidad de la solución.

Observación 9. *Hablar del término $\hat{\mathbf{a}}(u, \varphi - u)$ no tiene sentido debido a que (u, u') no está definida. En la observación 10 mostraremos que (u, u') es formalmente cero y por ello podemos establecer el siguiente teorema tratando de plantear el problema de manera análoga al problema (4.4).*

Teorema 2. Sean V y Φ definidas por (4.5), (4.6) y \mathfrak{K}_o el conjunto convexo cerrado de V definido por (4.8). Supongamos que se cumple (4.9). Entonces, para f dado en $L^2(0, T; L^2(\Omega))$. Existe un único $u \in \mathfrak{K}_o$ tal que

$$\mathbf{a}(u, \varphi - u) - (u, \varphi') \geq (f, \varphi) \quad (4.10)$$

Proposición 3. La solución de (4.10) es también una solución débil de la ecuación parabólica:

$$\begin{aligned} B(x, t, \frac{\partial}{\partial x}) u + \frac{\partial u}{\partial t} &= f \text{ en } \Omega \times]0, T], \text{ donde} \\ B(x, t, \frac{\partial}{\partial x}) &= - \sum \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) + a_0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

sujeta a la condición inicial $u(x, 0) = 0$ y a la condición de frontera unilateral $u = 0$ en Σ

Demostración de la proposición. Sea $\psi \in \mathfrak{D}(\Omega \times]0, T[)$. Si convenientemente tomamos $\varphi = u \pm \psi$ en (4.10) obtenemos:

$$\mathbf{a}(u, \Psi) - (u, \varphi') = (f, \Psi)$$

Por lo tanto, u satisface la ecuación parabólica (4.11), y dado que $u \in \mathcal{K}$, este satisface por definición

$$u(x, 0) = 0,$$

y

$$u = 0 \text{ en } \Sigma$$

De este modo tenemos que el problema parabólico evolutivo a condición inicial y condiciones de contorno del tipo Dirichlet se ve resuelto por la solución del problema del Teorema 2. \square

Demostración de la Existencia del Teorema 2.

Para esta demostración usaremos la técnica de regularización elíptica. Así definamos para $\varepsilon > 0$

$$\hat{a}_\varepsilon(u, \varphi) = \hat{a}(u, \varphi) + \varepsilon(u', \varphi'), \text{ donde } u, \varphi \in \Phi$$

Esta es una forma bilineal continua sobre Φ , y adicionalmente tenemos que:

$$\hat{a}_\varepsilon(\varphi, \varphi) = \mathbf{a}(\varphi, \varphi) + \varepsilon \|\varphi'\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}^2 \geq \inf(\alpha, \varepsilon) \|\varphi\|_\Phi^2$$

Por consiguiente, dado que $\mathfrak{K}_o \cap \Phi$ es cerrado en Φ , por el teorema de Stampacchia tenemos que existe un único $u_\varepsilon \in \mathfrak{K}_o \cap \Phi$ tal que

$$\hat{a}_\varepsilon(u_\varepsilon, \varphi - u_\varepsilon) \geq (f, \varphi - u_\varepsilon) \text{ para } \varphi \in \mathfrak{K}_o \cap \Phi \quad (4.12)$$

Tomando $\varphi = 0$ en (4.12) tenemos que:

$$\mathbf{a}(u, -u) - \varepsilon(u', u') \geq (f, -u),$$

luego considerando que $\|u'\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \geq -\|u'\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}$ y usando la desigualdad de Cauchy-Schwartz podemos escribir:

$$\begin{aligned} & -\mathbf{a}(u, u) + \varepsilon\|u'\|^2 \geq -(f, u) \\ \Rightarrow & \mathbf{a}(u, u) - \varepsilon\|u\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 \leq (f, u) \\ \Rightarrow & \|u\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} - \varepsilon\|u'\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq c_1\|u\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \\ \Rightarrow & \left(\|u\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} + \sqrt{\varepsilon}\|u'\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \right) \left(\|u\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} - \sqrt{\varepsilon}\|u'\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \right) \leq c_1\|u\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}. \end{aligned}$$

y observando que:

$$\left(\frac{\|u\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} - \sqrt{\varepsilon}\|u'\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}}{\|u\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}} \right) = 1 + (1 - \sqrt{\varepsilon}) \left(\frac{\|u'\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}}{\|u\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}} \right) \geq 1 \text{ para cualquier } \varepsilon \leq 1,$$

se concluye:

$$\|u_\varepsilon\|_{L^2(0,T;H^1(0,T;\Omega))} + \sqrt{\varepsilon}\|u'_\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq c_1, \quad (4.13)$$

donde cada c_1 es constante y no depende de ε .

Se mostrará ahora que:

$$\|u'_\varepsilon\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leq c_2 \quad (4.14)$$

Para esto, tomando en (4.12) $\varphi = u_\varepsilon \pm \psi$, $\psi \in \mathfrak{D}(\Omega \times]0, T])$ tenemos que:

$$\begin{aligned} & \hat{a}_\varepsilon(u_\varepsilon, \psi) = (f, \psi) \\ \Rightarrow & \hat{a}(u_\varepsilon, \psi) + \varepsilon(u'_\varepsilon, \psi') = (f, \psi) \\ \Rightarrow & \mathbf{a}(u_\varepsilon, \psi) - (u_\varepsilon, \psi') + \varepsilon(u', \psi') = (f, \psi) \\ \Rightarrow & \mathbf{a}(u_\varepsilon, \psi) - (u_\varepsilon, \psi') - \varepsilon(u_\varepsilon, \psi'') = (f, \psi) \end{aligned}$$

Entonces, recordando la proposición 3 podemos concluir que

$$Bu_\varepsilon + u'_\varepsilon - \varepsilon u''_\varepsilon = f \quad (4.15)$$

Pero por (4.13) u_ε pertenece a un conjunto acotado de $L^2(0, T; H^1(\Omega))$ con lo cual Bu_ε pertenece a un conjunto acotado de $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ y se puede reescribir (4.15) como:

$$u'_\varepsilon - \varepsilon u''_\varepsilon = g_\varepsilon \quad \|g_\varepsilon\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leq c_3 \quad (4.16)$$

Resolviendo (4.16), puesto que $u'_\varepsilon \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, u'_ε sería de la forma [Sch]:

$$u'_\varepsilon(t) = \int_t^\infty E_\varepsilon(t - \sigma) g_\varepsilon(\sigma) d\sigma, \quad E_\varepsilon(t) = \begin{cases} \varepsilon^{-1} \exp(\varepsilon^{-1}t) & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

Y puesto que $\int_{\mathbb{R}} |E_\varepsilon(t)| dt = 1$, obtenemos (4.14).

De (4.13) y (4.14) se sigue que $\|u_\varepsilon\|_V \leq c_4$. Consecuentemente, podemos extraer una sub-
sucesión $\{u_\eta\}$ tal que $u_\eta \rightarrow w$ converge débilmente en V_T . Como \mathfrak{K}_\circ es convexo y cerrado,
este es débilmente cerrado y $w \in \mathfrak{K}_\circ$.

Se mostrará ahora que w satisface

$$\mathbf{a}(w, \varphi - w) - (w, \varphi') \geq (f, \varphi - w) \text{ para } \varphi \in \mathfrak{K}_\circ \cap \Phi \quad (4.17)$$

Se deduce de (4.12) que:

$$\hat{a}_\varepsilon(u_\varepsilon, \varphi) - (f, \varphi - u_\varepsilon) \geq \hat{a}_\varepsilon(u_\varepsilon, u_\varepsilon) = \mathbf{a}(u_\varepsilon, u_\varepsilon) - (u_\varepsilon, u'_\varepsilon) + \varepsilon \|u'_\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 \geq \mathbf{a}(u_\varepsilon, u_\varepsilon)$$

Tomando $\varepsilon = \eta$ se tiene que $\hat{a}_\varepsilon(u_\varepsilon, \varphi) \rightarrow \hat{a}(w, \varphi)$. Como

$$\hat{a}(w, \varphi) - (f, \varphi - w) \geq \liminf \mathbf{a}(u_\eta, u_\eta).$$

Debido a que la forma bilineal coerciva y continua $\mathbf{a}(u, v)$ es débil semicontinua inferiormente
y del hecho de que $u_\eta \rightarrow w$ débilmente tenemos

$$\liminf \mathbf{a}(u_\eta, u_\eta) \geq \mathbf{a}(w, w),$$

lo que es equivalente a (4.17).

Prueba de la Unicidad

Tomemos u_1 y u_2 dos soluciones de nuestro problema

$$u_i \in \mathfrak{K}_\circ, \quad \mathbf{a}(u_i, \varphi - u_i) - (u_i, \varphi') \geq (f, \varphi - u_i) \text{ para } \varphi \in \mathfrak{K}_\circ \cap \Phi \quad (4.18)$$

Se podría tomar $\varphi = u_1$ en (4.18) cuando $i = 1$ y $\varphi = u_2$ en (4.18) cuando $i = 2$, y añadir
las desigualdades correspondientes. Pero la elección " $\varphi = u_i$ " no esta permitida por que en
general u_i no está en Φ . Esto se corrige tomando φ "tan cercano como sea posible a u_i ".
Se introduce una sucesión de funciones \mathbf{v}_m definida por $\mathbf{v}_m(t) = 0$ para $t \leq \frac{1}{m}$, $m(t - \frac{1}{m})$
para $\frac{1}{m} \leq t \leq \frac{2}{m}$, 1 para $t \geq \frac{2}{m}$, y una sucesión regularizante ρ_n de funciones pares C^∞ con
soporte en $[\frac{-1}{n}, \frac{1}{n}]$, $\rho_n \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}} \rho_n(t) dt = 1$. Para $v \in V_T$, se pone:

$$T_n^m v = \mathbf{v}_m ((\mathbf{v}_m v) * \rho_n * \rho_n)$$

si $n > 2m$, la función $(\mathbf{v}_m v) * \rho_n * \rho_n$ es cero en $]0, \frac{1}{m} - \frac{2}{n}[$. Se puede demostrar que \mathfrak{K}_\circ es
invariante por traslación, así $T_n^m v \in \mathfrak{K}_\circ$ si $\mathbf{v} \in \mathfrak{K}_\circ$, es más:

$$(T_n^m v)' = \mathbf{v}'_m ((\mathbf{v}_m v) * \rho_n * \rho_n) + \mathbf{v}_m ((\mathbf{v}_m v) * \rho_n * \rho'_n) \quad (4.19)$$

pertenece a $L^2(0, T; L^2(\Omega))$, tal que $T_n^m v \in \mathfrak{K}_\circ \cap \Phi$ si $v \in \mathfrak{K}$. Escogemos ahora

$$\varphi = T_n^m u_2 \text{ en (4.18) con } i = 1 \quad \text{y} \quad \varphi = T_n^m u_1 \text{ en (4.18) con } i = 2$$

Sumando, se obtiene

$$X_n^m + Y_n^m \geq Z_n^m \quad (4.20)$$

Donde

$$\begin{aligned} X_n^m &= \mathbf{a}(u_1, T_n^m u_2 - u_1) + \mathbf{a}(u_2, T_n^m u_1 - u_2) \\ Y_n^m &= -(u_1, (T_n^m u_2)') - (u_2, (T_n^m u_1)') \\ Z_n^m &= (f, T_n^m u_2 - u_1 + T_n^m u_1 - u_2) \end{aligned}$$

Cuando $n \rightarrow \infty$, tenemos:

$$\begin{aligned} X_n^m &\rightarrow X^m = \mathbf{a}(u_1, \mathbf{v}_m^2 u_2 - u_1) + \mathbf{a}(u_2, \mathbf{v}_m^2 u_1 - u_2) \\ Z_n^m &\rightarrow Z^m = (f, \mathbf{v}_m^2 u_2 - u_1 + \mathbf{v}_m^2 u_1 - u_2) \end{aligned}$$

Verificaremos la relación:

$$Y_n^m \rightarrow Y^m = -2 \int_0^\infty \mathbf{v}_m \mathbf{v}_m' (u_1, u_2)_{L^2(\Omega)} dt \quad (4.21)$$

Usando (4.19), se tiene

$$Y_n^m = y_n^m + \eta_n^m$$

donde

$$\begin{aligned} y_n^m &= - \int_0^\infty (\mathbf{v}_m u_1, (\mathbf{v}_m u_2) * \rho_n * \rho_n') dt - \int_0^\infty (\mathbf{v}_m u_2, (\mathbf{v}_m u_1) * \rho_n * \rho_n') dt \\ \eta_n^m &= - \int_0^\infty \mathbf{v}_m' (u_1, (\mathbf{v}_m u_2) * \rho_n * \rho_n) dt - \int_0^\infty \mathbf{v}_m' (u_2, (\mathbf{v}_m u_1) * \rho_n * \rho_n) dt \end{aligned}$$

puesto que p_n es tal que:

$$y_n^m = - \int_0^\infty ((\mathbf{v}_m u_1) * \rho_n, (\mathbf{v}_m u_2) * \rho_n') dt - \int_0^\infty ((\mathbf{v}_m u_1) * \rho_n', (\mathbf{v}_m u_2) * \rho_n) dt$$

Como $y_n^m = 0$, (4.21) se cumple. Por lo tanto (4.20) implica

$$X^m + Y^m \geq Z^m \quad (4.22)$$

Ahora haciendo tender $m \rightarrow \infty$ tenemos

$$\begin{aligned} X^m &\rightarrow -b(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \\ Z^m &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

y

$$|Y^m| \leq \sup_{t \leq \frac{2}{m}} \|u_1(t)\|_{L^2(\Omega)} \sup_{t \leq \frac{2}{m}} \|u_2(t)\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0$$

Como u_j es continua desde $t \geq 0 \rightarrow L^2(0, T; \Omega)$, $u_j(0) = 0$ Entonces (4.22) implica que

$$-\mathbf{a}(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \geq 0$$

es decir

$$\mathbf{a}(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = 0$$

ya que

$$\mathbf{a}(v, v) \geq \beta \|v\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}^2, \quad \beta > 0$$

de donde se sigue que $u_1 = u_2$ lo que demuestra la unicidad.

Observación 10. Sin pérdida de generalidad en la demostración de unicidad anterior, específicamente en la definición de Y_n^m podemos tomar $u_1 = u_2 = u$ en $L^2(0, \sigma^2 T/2; H_0^1(\Omega))$ de modo que

$$Y_n^m = -2(u, (T_n^m u)').$$

Así, cuando $n \rightarrow \infty$

$$Y_n^m \rightarrow Y^m = -2 \int_0^\infty \mathbf{v}_m \mathbf{v}'_m(u, u)_{L^2(\Omega)} dt,$$

y cuando $m \rightarrow \infty$

$$|Y^m| \leq \sup_{t \leq \frac{2}{m}} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \rightarrow 0.$$

De este modo se justifica que el término indefinido (u, u') se considere formalmente cero.

Teorema 4. El problema (3) (y su equivalente, el Pbma. (4)) tiene solución débil única tal que $w \in L^2(0, \sigma^2 T/2; H_0^1(\Omega))$.

Demostración. La existencia de una solución débil viene dada por el teorema (2) puesto que \mathcal{K}_0 en convexo cerrado no vacío conteniendo al $0 \in L^2(\Omega)$ y la forma bilineal a corresponde al operador parabólico bajo las mismas condiciones del teorema en mención y a su interpretación como un problema del calor con condiciones iniciales y de frontera tipo Dirichlet. \square

Capítulo 5

Sistema de Complementariedad, Multiplicadores de Lagrange y Convergencia de Problemas Regularizados.

En esta sección se discute sobre la existencia de una solución fuerte de nuestro problema, obtenida como el único límite asintótico de soluciones a una familia de ecuaciones parabólicas no lineales regularizadas, enfocando el problema desde el punto de vista de los multiplicadores de Lagrange. Dichos multiplicadores son caracterizados a partir de un sistema de complementariedad asociado a cada ecuación regularizada permitiéndonos discutir además sobre las propiedades del multiplicador Lagrange hacia el que converge la sucesión de estos multiplicadores.

5.1. Sistema de Complementariedad y Multiplicadores de Lagrange.

Consideremos una desigualdad variacional parabólica general en el sentido de su definición abstracta como en la sección (5.2) y así formulemos el problema siguiente:

Sea $K = \{v \in H_0^1(\Omega) \mid v \geq \psi\}$ y sea:

$$\mathfrak{K}_0 = \{v \mid v \in H(0, T; H^1(\Omega)), v(0) = v_0, v(t) \in K \text{ c.t.p. } t \in [0, T]\}$$

El problema consiste en encontrar $w \in \mathfrak{K}_0$ tal que para casi todo $t \in (0, T)$

$$\left\langle \frac{\partial w(t)}{\partial t}, v(t) - w(t) \right\rangle + a(w(t), v(t) - w(t)) \geq f(v(t) - w(t)), \quad \text{para todo } v \in \mathfrak{K}_0. \quad (5.1)$$

Además, si consideramos la siguiente definición podemos obtener resultados de regularidad adicionales el problema

Definición 10 (Solución Fuerte). *Se dice que el problema (5.1) posee una solución fuerte si siendo w^* dicha solución satisface el resultado de regularidad $w^* \in H^1(0, \sigma^2 T/2; L^2(\Omega)) \cap C(0, \sigma^2 T/2; H_0^1(\Omega))$.*

En efecto, como se mostrará en la sección siguiente, el problema posee una solución fuerte y podemos entonces plantear el problema en la forma:

Definición 11 (Sistema de Complementariedad). *Sea w^* una solución fuerte del problema (5.1), entonces éste puede ser escrito en la forma:*

$$(SC) \begin{cases} \left(\frac{\partial w^*(t)}{\partial t}, v(t) \right) + a(w^*(t), v(t)) - (f(t), v(t)) = (\lambda(t), v(t)) \\ w^* \geq \psi, (w^*(t) - \psi(t), \lambda(t)) = 0 \text{ c.t.p. } t \in (0, T) \\ \lambda \geq 0 \end{cases}$$

Se dice que esta expresión es un sistema de complementariedad.

Sea el funcional convexo $\Phi : L^2(0, T; L^2(\Omega)) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ dado por:

$$\Phi(w) = \begin{cases} 0 & \text{si } w \geq \psi \text{ c.t.p.} \\ \infty & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Entonces, se puede probar que $\lambda \in \partial\Phi(w^*(t))$, y más aún se puede expresar como $\lambda^*(t) \in \partial\Phi(w^*(t))$ donde $\partial\Phi$ es el sub-diferencial de Φ estando dicho sub-diferencial definido por:

$$\partial\Phi(w(t)) = \{w'(t) \in (L^2(\Omega))' \mid \Phi(v) - \Phi(w) \geq \langle w', v - w \rangle \text{ para todo } v \in L^2(0, T; L^2(\Omega))\}$$

y en este sentido consideremos la siguiente definición:

Definición 12. *Sea $\lambda^*(t) \in \partial\Phi(w^*(t))$, definido a partir de (SC). $\lambda^*(t)$ es conocido como el multiplicador de Lagrange asociado a la condición $w \geq \phi$*

5.1.1. El problema como un Sistema de Complementariedad.

Recordando la desigualdad variacional del problema descrito en (5.1):

$$\left\langle \frac{\partial u(\tau)}{\partial \tau}, v(\tau) - u(\tau) \right\rangle + a(u(\tau), v(\tau) - u(\tau)) - f(v(\tau) - u(\tau)) \geq 0 \text{ para todo } v \in \mathfrak{K}_\circ.$$

Ahora denotemos por λ a la forma:

$$\lambda(w) = \langle \lambda(\tau), w(\tau) \rangle = \left\langle \frac{\partial u(\tau)}{\partial \tau}, w(\tau) \right\rangle + a(u(\tau), w(\tau)) - (f(\tau), w(\tau)) \text{ para todo } w \in L^2(0, \frac{\sigma^2}{2}T; H_0^1(\Omega)).$$

donde además por ser $a(\cdot, \cdot)$ bilineal y continua se puede, por tanto, asegurar que $\lambda \in L^2(0, \frac{\sigma^2}{2}T; H^{-1}(\Omega))$. Asumiendo la regularidad necesaria (a probarse en la sección siguiente), se puede afirmar que $\lambda \in L^2(0, \frac{\sigma^2}{2}T; L^2(\Omega))$, justificándose la notación¹:

$$(\lambda(\tau), w(\tau)) = \left(\frac{\partial u(\tau)}{\partial \tau}, w(\tau) \right) + a(u(\tau), w(\tau)) - (f(\tau), w(\tau)) \text{ para todo } w \in L^2(0, \frac{\sigma^2}{2}T; H_0^1(\Omega)).$$

Ahora, de la conveniente introducción de $\lambda(w)$ se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial u}{\partial \tau}, w \right) + a(u, w) - (\lambda, w) = (f, w) & \forall w(t) \in H_0^1(\Omega) \\ (\lambda, v - u) \geq 0 & v \in \mathcal{K}_0 \end{cases}$$

Tomando el caso de $v = h + u$ con $h \in \mathcal{K}_0$ se tiene que:

$$(\lambda, h + u - u) = (\lambda, h) = (\lambda, h) \geq 0$$

y por tanto $\lambda(t) \geq 0$ c.t.p. A su vez, escogiendo $v = 0$:

$$(\lambda, -u) = -(\lambda, u) \geq 0$$

Es decir $(\lambda, u) \leq 0$. Luego como $u \in \mathcal{K}_0$ y $\lambda \geq 0$, la única posibilidad es:

$$(\lambda, u) = 0$$

En conclusión, nuestro sistema de complementariedad es:

$$(P) \begin{cases} \left(\frac{\partial u}{\partial \tau}, w \right) + a(u, w) - (\lambda, w) = (f, w) & \text{para todo } w(t) \in H_0^1(\Omega). \\ u \in \mathcal{K}_0 \\ \lambda \geq 0 \\ (\lambda, u) = 0. \end{cases}$$

5.1.2. Problemas regularizados.

Observemos que el problema (P), al expresar explícitamente sus condiciones, puede ser escrito de la forma:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial u}{\partial \tau}, w \right) + a(u, w) - (\lambda, w) = (f, w) \text{ para todo } w(t) \in H_0^1(\Omega). \\ u \in L^2(0, \sigma^2 T/2; H_0^1(\Omega)) \quad u(x, 0) = 0 \\ u \geq 0 \\ \lambda \geq 0 \\ (\lambda, u) = 0, \end{cases}$$

y mostremos que las tres últimas condiciones pueden ser expresadas como:

$$\mathcal{C}(u, \lambda) = 0 \text{ donde } \mathcal{C}(u, \lambda) = \lambda - \text{máx}(0, \lambda + cu)$$

para todo $c > 0$. En efecto, supongamos que $\lambda = \text{máx}(0, \lambda - cu)$, así:

¹Véase la observación 6

- Si $\lambda = 0$ entonces $0 \geq \lambda - cu$, o equivalentemente, $u \geq 0$
- Si $\lambda = \lambda - cu$, entonces $0 \leq \lambda + cu$, o equivalentemente, $\lambda \geq 0$
- En cualquiera de los dos casos anteriores tenemos que se cumple que $(\lambda, u) = 0$

Ahora supongamos que $u \geq 0$, $\lambda \geq 0$, $(\lambda, u) = 0$ para mostrar que $\lambda = \text{máx}(0, \lambda - cu)$ para todo $c > 0$, o lo que es lo mismo:

$$\lambda = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda - cu \leq 0 \\ \lambda - cu & \text{si } \lambda - cu \geq 0 \end{cases}$$

- Supongamos que $\lambda - cu \leq 0$. Sean $u \in \mathcal{K}_0$ y $(c_n)_{n \geq 1}$ con $c_n = \frac{1}{n}$ entonces $\lambda \leq c_n u$. Así cuando $n \rightarrow \infty$ se tiene que $\lambda \leq 0$ y consecuentemente $\lambda = 0$.
- Si $\lambda - cu \geq 0$ entonces $-cu \geq -\lambda$ y $(-cu, u) \geq (-\lambda, u)$ de modo que $-c\|u\|^2 \geq 0$, es decir, $c\|u\|^2 \leq 0$ y consecuentemente $u = 0$ c.t.p. Lo anterior nos permite afirmar convenientemente que $\lambda = \lambda - cu$.

Nuestro sistema de complementariedad es equivalente entonces a:

$$(P') \begin{cases} \left(\frac{\partial u}{\partial \tau}, w \right) + a(u, w) - (\lambda, w) = (f, w) \text{ para todo } w(t) \in H_0^1(\Omega). \\ u \in L^2(0, \sigma^2 T/2; H_0^1(\Omega)) \\ u(x, 0) = 0 \\ \mathcal{C}(u, \lambda) = 0 \end{cases}$$

Adelantándonos al hecho de que vamos a resolver el sistema de complementariedad por el método de Newton generalizado, que se estudiará en el siguiente capítulo, introduzcamos la noción de problemas regularizados que nos permitirán usar el método de Newton apropiadamente. La razón principal para hablar problemas regularizados es que el operador máx obtenido en (P') va de L^2 en L^2 y es un operador no diferenciable (ver teorema 18) y dado que la diferenciabilidad es necesaria para definir una aproximación de Newton (ver en la sección 6.1.2) existe la necesidad de hacer que nuestro operador máx cumpla esta condición. Esto se logra al introducir un $0 < \alpha < 1$ tal que:

$$\lambda = \alpha \text{máx}(0, \lambda - cu) \tag{5.2}$$

Lo cual es equivalentemente a

$$\lambda = \text{máx}(0, \bar{\lambda} - \gamma u) \tag{5.3}$$

con $\bar{\lambda} \in L^2(0, \frac{\sigma^2}{2}T, L^2(\Omega))$, cuando tomamos $\bar{\lambda} = 0$ y $\gamma = \frac{c\alpha}{1-\alpha}$. Notar que $\gamma \rightarrow \infty^+$ cuando $\alpha \rightarrow 1^-$. Más adelante veremos que de acuerdo a la elección de $\bar{\lambda}$ el desempeño de la aproximación puede ser controlado.

De lo anterior podemos entonces definir la familia de problemas regularizados que consideraremos:

$$\left\langle \frac{\partial u(\tau)}{\partial \tau}, \phi \right\rangle - a(u(\tau), \phi) - (\max(0, \bar{\lambda}(\tau) - \gamma u(\tau)), \phi) - (f(\tau), \phi) = 0 \text{ c.t.p. } \tau \in (0, \sigma^2 T/2). \quad (5.4)$$

para todo $\phi \in H_0^1(\Omega)$ y $u(0) = u_0$

Observación 11. Si existe un multiplicador de Lagrange $\lambda^*(\tau) \in L^2(\Omega)$ satisfaciendo (SC), entonces $u^*(t)$ es solución al problema (5.4). De hecho, $\lambda^*(\tau)$ satisface la condición

$$\lambda^* = \max(0, \bar{\lambda} - \gamma u) \quad (5.5)$$

para todo $\gamma > 0$. Además se tiene que $\lambda^* \in \partial(u^*(t))$ si y sólo si (5.5) se cumple para algún $\gamma > 0$, estos resultados son expuestos en [KIK].

5.1.3. Existencia de Solución Fuerte como límite de las soluciones a los problemas regularizados.

El objetivo de esta sección es el mostrar que existe una solución fuerte al problema (3) como límite de las soluciones de los problemas regularizados (5.4). Cada problema regularizado se tratará por medio de un esquema de aproximación por diferencias finitas. Los resultados aquí mostrados pueden ser estudiados en detalle [IK]. Aquí nos limitaremos a mostrar esquemáticamente los resultados y las demostraciones que ahí se presentan.

Teorema 5. Consideremos el problema regularizado (5.4) con $f, \bar{\lambda} \in L^2(0, \sigma^2 T/2; L^2(\Omega))$, $u_0 \in L^2(\Omega)$. Entonces para cada $\gamma > 0$ existe una única solución $u_\gamma \in H^1(0, \sigma^2 T/2; H^{-1}(\Omega)) \cap L^2(0, \sigma^2 T/2; H_0^1(\Omega))$. Adicionalmente si $\bar{\lambda}(t) = \bar{\lambda} \in L^2(\Omega)$, $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, entonces $u_\gamma \in H^1(0, \sigma^2 T/2; L^2(\Omega)) \cap C(0, \sigma^2 T/2; H_0^1(\Omega)) \cap L^2(0, \sigma^2 T/2; H_0^1(\Omega))$.

Esquema demostrativo. Consideremos la aproximación por diferencias finitas del problema (5.4):

$$\left(\frac{u^{k+1}(\tau) - u^k(\tau)}{\Delta \tau}, \phi \right) + a(u^{k+1}(\tau), \phi) - (\max(0, \bar{\lambda}^k(\tau) - \gamma u^{k+1}(\tau)), \phi) - (f^k(\tau), \phi) \text{ para todo } \phi \in H_0^1(\Omega) \quad (5.6)$$

con $u^0 = u_0 \in L^2(\Omega)$, $f^k = \frac{1}{\Delta \tau} \int_{k\Delta \tau}^{(k+1)\Delta \tau} f(\tau) d\tau$, $\bar{\lambda}^k = \frac{1}{\Delta \tau} \int_{k\Delta \tau}^{(k+1)\Delta \tau} \bar{\lambda}(\tau) d\tau$ y $\Delta \tau = \frac{\sigma^2 T}{2N}$ y $k = 1, 2, \dots$. Obsérvese que:

$$u \in L^2(\Omega) \rightarrow \max(0, \bar{\lambda}^k(\tau) - \gamma u(\tau)) \in L^2(\Omega)$$

es Lipschitz continua y monótona. Considerando, el operador $B : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ definido por

$$B(u) = \frac{1}{\Delta \tau} - Au - \max(0, \bar{\lambda}^k(\tau) - \gamma u(\tau))$$

con A :

$$A : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$$

$$A(u) = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right),$$

se puede mostrar que B es coercivo, monótono y semicontinuo para todo $\Delta\tau$ suficientemente pequeño e independiente de $\gamma > 0$. Así (5.6) tiene una única solución u^{k+1} en $H_0^1(\Omega)$ para todo k .

Se toma $\lambda^{k+1} = \max(0, \bar{\lambda}^k - \gamma u^{k+1})$ y usando la continuidad y la coercividad de la forma bilineal a , se logra probar que para todo $\hat{\psi} \in \mathcal{K}_0$

$$(\lambda^{k+1}, (\hat{\psi} - u^{k+1})) \geq \frac{1}{2\gamma} \|\lambda^{k+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{2\gamma} \|\bar{\lambda}^k\|_{L^2(\Omega)}^2$$

Tomando $\phi = u^{k+1} - \hat{\psi}$, se tiene de (5.6) que

$$\begin{aligned} & \|u^k - \hat{\psi}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^k \left((\|\hat{\psi} - u^i\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \frac{1}{\gamma} \|\lambda^i\|_{L^2(\Omega)}^2) \Delta\tau + \|u^i - u^{i-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\ & \leq \|\hat{\psi} - u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^k \left(\|\hat{\psi}\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|f^{i-1}\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + \frac{1}{\gamma} \|\bar{\lambda}^{i-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \Delta\tau \end{aligned} \quad (5.7)$$

para $k=1,2,\dots$ Sea

$$u_{\Delta\tau}^{(1)}\tau = u^k + \frac{t - k\Delta\tau}{\Delta\tau} (u^{k+1} - u^k) \text{ en } [k\Delta\tau, (k+1)\Delta\tau]$$

Así, observando (5.6) y (5.7), se concluye que la familia $u_{\Delta\tau}^{(1)}$ es acotada en $W(0, \frac{\sigma^2 T}{2}) = H^1(0, \sigma^2 T/2; H^{-1}(\Omega)) \cap L^2(0, \sigma^2 T/2; H^1(\Omega))$ y por el lema de Aubin (Ver[KI]), ésta tiene una subsucesión que converge a algún u_γ débilmente en $H^1(0, \sigma^2 T/2; H^{-1}(\Omega))$ y fuertemente en $L^2(0, \sigma^2 T/2; L^2(\Omega))$. Más aún para

$$u_{\Delta\tau}^{(2)}\tau = u^{k+1} \text{ en } (k\Delta\tau, (k+1)\Delta\tau],$$

se tiene que

$$\int_0^{\sigma^2 T/2} \|u_{\Delta\tau}^{(1)}(\tau) - u_{\Delta\tau}^{(2)}(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \frac{\Delta\tau}{3} \sum_{k=1}^N \|u^k - u^{k+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \rightarrow 0$$

conforme $\Delta\tau \rightarrow 0$. De esto se concluye sin pérdida de generalidad, que $u_{\Delta\tau}^{(2)}$ converge al mismo u_γ débilmente en $L^2(0, \sigma^2 T/2; H_0^1(\Omega))$ y fuertemente en $L^2(0, \sigma^2 T/2; L^2(\Omega))$, de donde u_γ satisface (5.4).

Para probar la *unicidad* notar que para $u \in W(0, \frac{\sigma^2 T}{2})$ se tiene que $\frac{d}{d\tau} \|u(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 = 2\langle \frac{du(\tau)}{d\tau}, u(\tau) \rangle$ para casi todo τ .

Sean $u_1, u_2 \in W(0, \frac{\sigma^2 T}{2})$ dos soluciones a (5.4) con condiciones iniciales $u_1(0)$ y $u_2(0)$ en $L^2(\Omega)$ respectivamente y $f_1, f_2 \in L^2(0, \sigma^2 T/2; L^2(\Omega))$ Entonces de (5.7) se obtiene que

$$\frac{d}{d\tau} \|u_1(\tau) - u_2\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u_1(\tau) - u_2(\tau)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq \|f_1(\tau) - f_2(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2$$

implicando la existencia de $M_1 > 0$ tal que:

$$\begin{aligned} & \|u_1(\tau) - u_2\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^\tau \|u_1(s) - u_2(s)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 ds \\ & \leq M_1 \left(\|u_1(0) - u_2(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^\tau \|f_1(s) - f_2(s)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 ds \right) \end{aligned}$$

para todo $\tau \in [0, \sigma^2 T/2]$, de modo que se concluye la unicidad de la solución a (5.4).

Por último se prueba que la solución a (5.4) obtenida es fuerte. Para ello se define

$$\Psi_\gamma(u) = \int_\Omega \int_{\frac{-\bar{\lambda}}{\gamma}}^u \text{máx}(0, \bar{\lambda}(x) - \gamma s) ds dx$$

y ayudado de (5.6) con $\phi = \frac{u^{k+1} - u^k}{\Delta\tau}$ y considerando la monotonicidad de Ψ se obtiene la siguiente acotación:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^k \left(\left\| \frac{u^i - u^{i-1}}{\Delta\tau} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \Delta\tau + a(u^i - u^{i-1}, u^i - u^{i-1}) \right) + a(u^k, u^k) + \Psi_\gamma(u^k - \psi) \\ & \leq a(u^0, u^0) + \Psi_\gamma(y^0 - \psi) + 3 \sum_{i=1}^k \left(M_1^2 \|u^i\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|f^i\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \Delta\tau. \end{aligned}$$

Se concluye que $u_{\Delta\tau}^{(1)}(\cdot)$ es acotado en $H^1(0, \sigma^2 T/2; L^2(\Omega)) \cap C(0, \sigma^2 T/2; H_0^1(\Omega))$ y converge débilmente en $H^1(0, \sigma^2 T/2; L^2(\Omega))$ y débil* en $L^\infty(0, \sigma^2 T/2; H_0^1(\Omega))$ hacia u_γ . Más aún, como u_γ satisface $\frac{d}{dt} u_\gamma - Au_\gamma = \tilde{f}$, con $\tilde{f} = \text{máx}(0, \bar{\lambda} - \gamma u_\gamma) - f \in L^2(0, \sigma^2 T/2; L^2(\Omega))$ y $u(0) = u_0 \in H_0^1(\Omega)$, se concluye que $u_\gamma \in C(0, \sigma^2 T/2; H_0^1(\Omega)) \cap L^2(0, \sigma^2 T/2; \text{dom}(A))$. \square

Teorema 6. *Sea $u_0 \in \mathcal{K}_0$, $f \in L^2(0, \sigma^2 T/2; L^2(\Omega))$. Entonces el problema (3) tiene una única solución fuerte $u^* \in H^1(0, \sigma^2 T/2; L^2(\Omega))$.*

Esquema de la demostración. Primeramente se toma en cuenta que del proceso de demostración del teorema (5) se puede concluir que la siguiente estimación se satisface:

$$\begin{aligned} & a(u_\gamma(t), u_\gamma(t)) + \int_0^\tau \left\| \frac{d}{ds} u_\gamma(t) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\ & \leq M_2 \left(\|u_0\|_{H_0^1(\Omega)} + \gamma \left\| \text{máx}(0, u_0 + \frac{\bar{\lambda}}{\gamma}) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^\tau \|f(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \right) \end{aligned} \quad (5.8)$$

Entonces, si $\bar{\lambda} = 0$ se puede deducir que u_γ es acotado en $H^1(0, \sigma^2 T/2; L^2(\Omega)) \cap C(0, \sigma^2 T/2; H_0^1(\Omega))$, y por tanto que existe una subsucesión que converge a u^* débilmente en $H^1(0, \sigma^2 T/2; L^2(\Omega))$ y de manera débil* en $L^\infty(0, \sigma^2 T/2; H_0^1(\Omega))$ y fuertemente en $L^2(0, \sigma^2 T/2; L^2(\Omega))$ conforme $\gamma \rightarrow \infty$. Adicionalmente, de (5.7) y considerando que u_γ satisface la ecuación (5.4) para todo $\gamma > 0$ se puede mostrar la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned} & \|\hat{\psi} - u_\gamma(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^\tau \left(\|\hat{\psi} - u_\gamma(s)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \frac{1}{\gamma} \|\lambda_\gamma(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) ds \\ & \leq \|\hat{\psi} - u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\tau \|\hat{\psi}\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \int_0^\tau \left(2\|f(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{\gamma} \|\bar{\lambda}(s)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \right) ds \end{aligned}$$

para cualquier $\hat{\psi} \in \mathcal{K}_0(\tau)$, y $\lambda_\gamma(\tau) = \max(0, \bar{\lambda}(\tau) - \gamma u_\gamma)$ casi en todo punto $\tau \in (0, \sigma^2 T/2)$. Esta desigualdad permite deducir que cuando $\hat{\psi} = 0$

$$\int_0^{\sigma^2 T/2} \|\max(0, -u_\gamma)\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau \rightarrow 0$$

conforme $\gamma \rightarrow \infty$ y consecuentemente $u^* \geq 0$ c.t.p. y como además

$$(\max(0, -\gamma u_\gamma), u - u_\gamma(\tau)) \leq 0 \text{ para todo } u \text{ en } \mathcal{K}_0(\tau)$$

entonces y^* es una solución fuerte satisfaciendo el problema (3).

Para verificar la unicidad de dicho resultado consideremos que dos soluciones u_1^* y u_2^* al problema (3), entonces tenemos que

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} (u_1^*(\tau) - u_2^*(\tau)), u_1^*(\tau) - u_2^*(\tau) \right) + a(u_1^*(\tau) - u_2^*(\tau), u_1^*(\tau) - u_2^*(\tau)) \leq (f_1(\tau) - f_2(\tau), u_1^*(\tau) - u_2^*(\tau))$$

y de ello se puede ver que:

$$\|u_1^*(\tau) - u_2^*(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^\tau \|u_1^*(s) - u_2^*(s)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 ds \leq \left(\|u_1^*(0) - u_2^*(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^\tau \|f(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \right)$$

en $(0, \sigma^2 T/2]$, lo cual implica que la solución fuerte es única. \square

Además las soluciones regularizadas poseen la siguiente propiedad (para la prueba de este resultado ver [KI]):

Corolario 1. *Sea $\bar{\lambda} = 0$ en (5.6) y observando que $a(u(\tau), u^+(\tau)) \geq 0$ para todo $u(\tau) \in H_0^1(\Omega)$. Entonces $u_\gamma^k \geq u_{\hat{\gamma}}^k$ para $\gamma < \hat{\gamma}$.²*

5.2. Existencia del Multiplicador de Lagrange.

En esta sección se mostrará que para una apropiada selección de $\bar{\lambda}$ la sucesión $\lambda_\gamma(\tau) = \max(0, \bar{\lambda} - \gamma u_\gamma)$ converge al multiplicador de Lagrange $\lambda^* \in L^2(0, \sigma^2 T/2)$ asociado a la condición $u \geq 0$, conforme $\gamma \rightarrow \infty$. Para esta sección se tendrán en cuenta las siguientes suposiciones:

$$\begin{aligned} \bar{\lambda} &\in L^2(0, \sigma^2 T/2; L^2(\Omega)), \bar{\lambda} \geq 0, \bar{\lambda}(\tau) \geq f(\tau) \text{ para casi todo } \tau. \\ a(u(\tau), u^+(\tau)) &\geq 0 \text{ para todo } u^+(\tau), u(\tau) \in H_0^1(\Omega) \end{aligned} \quad (5.9)$$

²A esta propiedad se le denomina monotonía

En general para problemas con condiciones de obstáculo $u \geq \psi$ la condición es $\bar{\lambda}(\tau) \geq A\psi + f(\tau)$ y debe ser interpretada en el sentido de que casi para todo τ

$$\langle \bar{\lambda}(\tau) - (A\psi + f(\tau)), \phi \rangle \geq 0$$

Antes de entrar en la demostración de la existencia del multiplicador de Lagrange consideremos los siguientes resultados.

Teorema 7. *Si las condiciones (5.9) se cumplen y $u_0 \in \mathcal{K}_0$, entonces la solución u_γ^k a (5.6) satisface que $u_\gamma^k \in \mathcal{K}_0$ para todo $\gamma > 0$ y $u_\gamma^k \leq u_{\hat{\gamma}}^k$ para $\gamma < \hat{\gamma}$ para todo $k \geq 0$.*

Esquema de demostración. Para todo $k > 0$ se define $\lambda_\gamma^k \geq 0$ por

$$\lambda_\gamma^k = \max(0, \bar{\lambda}^k - \gamma u_\gamma^{k+1})$$

donde u_γ^k es la solución a (5.6). En primer lugar se muestra por inducción que $u_\gamma^k \in \mathcal{K}_0$ para todo k . Supongamos que $u_\gamma^k \in \mathcal{K}_0$. Entonces se puede probar de (5.6) que

$$\frac{1}{\Delta\tau}(-u_\gamma^{k+1}, (-u_\gamma^{k+1})^+) + a(-u_\gamma^{k+1}, (-u_\gamma^{k+1})^+) + \langle -(A(0) + f^k) + \lambda_\gamma^{k+1}, (-u_\gamma^{k+1})^+ \rangle = \frac{1}{\Delta\tau}(-u_\gamma^{k+1}, (-u_\gamma^{k+1})^+) \leq 0,$$

donde

$$\langle f^k + \lambda_\gamma^{k+1}, (-u_\gamma^{k+1})^+ \rangle \geq \gamma \|(-u_\gamma^{k+1})^+\|_{L^2(\Omega)}^2$$

pues $\bar{\lambda}^k - f^k \geq 0$. De aquí para $\Delta\tau > 0$ suficientemente pequeño $\|(-u_\gamma^{k+1})^+\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 0$ de donde se puede concluir que $u_\gamma^{k+1} \in \mathcal{K}_0$. Del mismo modo, para $u_\gamma^k \leq u_{\hat{\gamma}}^k$ y $\gamma < \hat{\gamma}$:

$$\frac{1}{\Delta\tau}(u_\gamma^{k+1} - u_{\hat{\gamma}}^{k+1}, (u_\gamma^{k+1} - u_{\hat{\gamma}}^{k+1})^+) + a(u_\gamma^{k+1} - u_{\hat{\gamma}}^{k+1}, (u_\gamma^{k+1} - u_{\hat{\gamma}}^{k+1})^+) + (\lambda_\gamma^{k+1} - \lambda_{\hat{\gamma}}^{k+1}, (u_\gamma^{k+1} - u_{\hat{\gamma}}^{k+1})^+) = \frac{1}{\Delta\tau}(u_\gamma^k - u_{\hat{\gamma}}^k, (u_\gamma^{k+1} - u_{\hat{\gamma}}^{k+1})^+) \leq 0,$$

donde

$$(\lambda_\gamma^{k+1} - \lambda_{\hat{\gamma}}^{k+1}, (u_\gamma^{k+1} - u_{\hat{\gamma}}^{k+1})^+) \geq 0.$$

Y de ello se concluye que para $\Delta\tau > 0$ suficientemente pequeño $\|(u_\gamma^{k+1} - u_{\hat{\gamma}}^{k+1})^+\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 0$, lo cual implica que $u_\gamma^{k+1} \leq u_{\hat{\gamma}}^{k+1}$ para $\gamma < \hat{\gamma}$. \square

Corolario 2. *Bajo las mismas hipótesis del Teorema 7, se tiene que $u_\gamma(\tau) = \lim u_{\Delta\tau}^{(1)} \in H^1(0, \sigma^2 T/2; L^2(\Omega)) \cap C(0, \sigma^2 T/2; H_0^1(\Omega)) \cap L^2(0, \sigma^2 T/2; \text{dom}(A))$ donde $\text{dom}(A) = H_0^1(\Omega)$, esto, conforme $\Delta\tau \rightarrow 0^+$. Adicionalmente, se satisface (6) y*

$$\frac{d}{d\tau} u_\gamma(t) - Au_\gamma(t) - \max(0, \bar{\lambda} - \gamma u_\gamma) = f(t). \quad (5.10)$$

Más aún $u_\gamma(\tau) \in K_0$ para todo $\gamma > 0$, $u_\gamma(t) \leq u_{\hat{\gamma}}(t)$ para $\gamma < \hat{\gamma}$, y

$$0 \leq \lambda_\gamma(t) = \max(0, \bar{\lambda}(\tau) - \gamma u_\gamma(\tau)) \leq \bar{\lambda}(\tau) \text{ casi en todo } (0, \sigma^2 T/2) \times \Omega \quad (5.11)$$

Esquema demostrativo. Del Teorema (7) se puede deducir que

$$0 \leq \lambda_\gamma^{k+1}(t) = \text{máx}(0, \bar{\lambda}^k - \gamma u_\gamma^k) \leq \bar{\lambda}^k \text{ c.t.p.}$$

y además que λ_γ^{k+1} es monótonamente no decreciente conforme γ crece hacia el ∞ . En la prueba del Teorema (5) se puede observar que $u_\gamma = \lim u_\tau^1$ lo cual implica que converge fuertemente en $L^2(0, \sigma^2)$ y débilmente en $H^1(0, \sigma^2 T/2; H^{-1}(\Omega)) \cap L^2(0, \sigma^2 T/2; H_0^1(\Omega))$ y u_γ satisface (5.10) y (5.11). La propiedad de regularización se puede observar en esa misma prueba si se reemplaza f por $\hat{f} = f - \lambda_\gamma \in L^2(0, \sigma^2 T/2; L^2(\Omega))$ y $\Psi_\gamma = 0$. \square

Teorema 8. *Bajo las suposiciones del Teorema (7), existe un multiplicador de Lagrange $\lambda^* \in L^2(0, \sigma^2 T/2; L^2(\Omega))$ tal que*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} u^*(\tau) - Au^*(\tau) - f(\tau) - \lambda^*(\tau) &= 0 \\ \lambda^*(\tau) &= \text{máx}(0, \lambda^* - u^*) \end{aligned}$$

Demostración Esquemática. Del Corolario (2) se sigue que $\{u_\gamma\}_{\gamma \geq 1}$ es acotado en $W(0, \frac{\sigma^2 T}{2})$ y fuertemente en $L^2(0, \sigma^2 T/2; L^2(\Omega))$. Debido a que $u_\gamma \geq 0$ para todo $\gamma > 0$, se tiene que $u^* \geq 0$. Más aún $\lambda_\gamma(t)$ es acotado en $L^2(0, \sigma^2 T/2; L^2(\Omega))$ y consecuentemente existe $\lambda^*(\tau) \in L^2(0, \sigma^2 T/2; L^2(\Omega))$ tal que $\lambda^*(\tau) \geq 0$ en casi todo punto y una subsucesión de $\{\lambda_\gamma(\tau)\}$ que converge débilmente a $\lambda^*(\tau) \in L^2(0, \sigma^2 T/2; L^2(\Omega))$. Puesto que

$$0 \leq \int_0^{\sigma^2 T/2} \left(\lambda_\gamma(\tau), \frac{1}{\gamma} \bar{\lambda}(\tau) - u_\gamma(\tau) \right) d\tau \rightarrow \int_0^{\sigma^2 T/2} (\lambda^*(\tau), -u^*(\tau)) d\tau$$

se tiene que

$$\int_0^{\sigma^2 T/2} (\lambda^*(\tau), u^*(\tau)) d\tau = 0$$

Observándose de este modo que el par $(u^*(\tau), \lambda^*(\tau))$ satisface la condición de complementariedad que se muestra en (P') . Tomando el límite en la expresión:

$$\left\langle \frac{\partial u_\gamma(\tau)}{\partial \tau}, \phi \right\rangle + a(u_\gamma(\tau), \phi) - (\lambda_\gamma(\tau), \phi) - (f(\tau), \phi) = 0$$

para todo $\phi \in H_0^1(\Omega)$ y para casi todo $\tau \in (0, \sigma^2 T/2]$, se tiene que:

$$\left\langle \frac{\partial u^*(\tau)}{\partial \tau}, \phi \right\rangle + a(u^*(\tau), \phi) - (\lambda^*(\tau), \phi) - (f(\tau), \phi) = 0$$

concordando con el multiplicador de Lagrange y con el problema presentado en (P') . \square

5.3. Tasa de Convergencia de las soluciones de los problemas regularizados hacia la solución fuerte.

El objetivo básico de en esta sección es probar la convergencia de $u_\gamma \rightarrow u^*$ en el espacio $L^\infty((0, \sigma^2 T/2) \times \Omega)$ con tasa $\frac{1}{\gamma}$, dadas ciertas condiciones de regularidad. Sea $\mathcal{C} = \{v \in H_0^1 \Omega \mid v \geq 0 \text{ c.t.p. en } \Omega\}$ y sea $\mathcal{C}^* = \{v^* \in H^{-1} \Omega \mid \langle v^*, v \rangle \geq 0 \text{ para todo } v \in \mathcal{C}\}$ denotando el cono dual. Puesto que $v^* \in H^{-1}(\Omega)$ puede ser descompuesto como $v^* = (v^*)^+ - (v^*)^-$ con $(v^*)^{+/-} \in \mathcal{C}^*$. Se dirá que $v^* \in \mathcal{C}^*$ es *acotado superiormente por una constante* si v^* está acotado por la función constante $|v^*|_\infty < \infty$ si

$$\langle |v^*|_\infty - v^*, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \text{ para todo } v \in \mathcal{C}.$$

Se dirá que $v^* \in H_0^1(\Omega)$ es acotado por una constante si $(v^*)^+$ y $(v^*)^-$ son superiormente acotadas por constantes y se toma:

$$|v^*|_\infty = \text{máx}(\|(v^*)^+\|, \|(v^*)^-\|).$$

Adicionalmente, requeriremos de un lema técnico que se describirá a continuación. Con este fin sea Q un subconjunto abierto no cilíndrico de $((0, \sigma^2 T/2) \times \Omega)$ y definamos $\Omega_\tau = \{x : (\tau, x) \in Q\}$, para $\tau \in (0, \sigma^2 T/2)$ y $\Omega_0 = \{x : (0, x) \in \bar{Q}\}$, $\Omega_{\sigma^2 T/2} = \{x : (\sigma^2 T/2, x) \in \bar{Q}\}$. Sea $(\cdot, \cdot)_{\Omega_\tau}$ el producto interno usual en Ω_τ . La restricción de a al conjunto $H^1(\Omega_\tau) \times H^1(\Omega_\tau)$ se notará también por a .

Lema 2. *Sea $Q = \{(\tau, x) : \tau \in (0, \sigma^2 T/2), x \in \Omega_\tau\}$ un sub-dominio de $(0, \sigma^2 T/2) \times \Omega$ con frontera Lipschitziana, $h \in L^\infty(0, \sigma^2 T/2; H^{-1}(\Omega_\tau))$ con $\text{ess sup}_{\tau \in (0, \sigma^2 T/2)} \|h(\tau)\|_{\infty, \Omega_\tau} < 0$, y que $a(1, \phi^+) \geq 0$, $a(\phi, \phi^+) \geq 0$, para todo $\phi \in H^1(\Omega_\tau)$, $\tau \in (0, \sigma^2 T/2)$. Sea $c > 0$, definamos $y \in Y$ con $Y = \{y \in H^1(Q) \mid y(\tau, x) = 0 \text{ para } \tau \in (0, \sigma^2 T/2), x \in \partial\Omega_\tau\}$ satisfaciendo $y(0, \cdot) = 0$ para casi todo punto en Ω_0 , y*

$$\int_0^{\sigma^2 T/2} \left[\left(\frac{\partial y(s)}{\partial s}, \phi(s) \right)_{\Omega_s} + a(y(s), \phi(s)) + \gamma(y(s), \phi(s))_{\Omega_s} - \langle g(s), \phi(s) \rangle_{H^{-1}(\Omega_s), H_0^1(\Omega_s)} \right] d\tau \geq 0 \quad (5.12)$$

para todo $\tau \in [0, \sigma^2 T/2]$ y $\phi \in Y$. Entonces $y \in L^\infty(Q)$

$$-\frac{1}{\gamma} \text{ess sup}_{\tau \in (0, \sigma^2 T/2)} \|g^-(\tau)\|_\infty \leq y(\tau, x) \leq \frac{1}{\gamma} \text{ess sup}_{\tau \in (0, \sigma^2 T/2)} \|g^+(\tau)\|_\infty \text{ para todo } x \in \Omega_\tau$$

y todo $\tau \in [0, \sigma^2 T/2]$.

Ahora introduzcamos lo que se denominan conjuntos activos e inactivos asociados a la solución u^* del Problema (3):

$\mathcal{A}^* = \{(\tau, x) \in (0, \sigma^2 T/2) \times \Omega \mid u^*(\tau, x) = 0\}$, $\mathcal{I}^* = \{(\tau, x) \in (0, \sigma^2 T/2) \times \Omega \mid u^*(\tau, x) > 0\}$, con fronteras $\partial\mathcal{A}^*$ y $\partial\mathcal{I}^*$, respectivamente.

A continuación se trabaja sobre la convergencia en cada uno de los conjuntos definidos.

5.3.1. Caso $\bar{\lambda} = 0$.

Definamos el conjunto

$$\mathcal{A}_\gamma = \{((\tau, x) \in (0, \sigma^2 T/2) \times \Omega \mid u_\gamma(\tau, x) < 0)\}.$$

Entonces por la monotonía vista en el Corolario (1) si $0 < \lambda \leq \hat{\lambda} < \infty$ que establece que $u^* \leq u_{\hat{\gamma}} \leq u_\gamma$ para $0 < \gamma \leq \hat{\gamma} < \infty$ podemos concluir además que:

$$\mathcal{A}^* \subset \mathcal{A}_{\hat{\gamma}} \subset \mathcal{A}_\gamma \text{ c.t.p.}$$

Teorema 9. *Suponiendo que $\text{dom}(A) \subset C(\bar{\Omega})$, observando que en nuestro problema $\|(A(0) + f(\cdot))^+\|_\infty = \|(f(\cdot))^+\|_\infty \in L^\infty(0, \sigma^2 T/2)$ y suponiendo además que \mathcal{A}^* y \mathcal{A}_γ para $\gamma > 0$, son dominios en \mathbb{R}^2 con fronteras Lipschitz continuas. Entonces para todo $\gamma > 0$ y $\tau \in [0, \sigma^2 T/2]$*

$$\|u_\gamma(\tau) - u^*(\tau)\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{\gamma} \text{supess}_{\tau \in (0, \sigma^2 T/2)} \|(A(0) + f(\cdot))^+\|_\infty$$

Esquema demostrativo. Para el caso que consideramos en este teorema, a virtud de (5.4) y (8) de la sección anterior, se tiene lo siguiente:

$$u_\gamma, u \in L^2(0, \sigma^2 T/2; C(\bar{\Omega})) \cap H^1(0, \sigma^2 T/2; \Omega),$$

así como también que $\mathcal{A}^* \subset \mathcal{A}_\gamma$ para todo $\gamma > 0$. A partir de la definición de \mathcal{A}_γ se puede afirmar que:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} u_\gamma = \gamma u_\gamma - A(u_\gamma) - f(\tau) \text{ en } \mathcal{A}_\gamma, \quad u_\gamma = 0 \text{ en } \partial \mathcal{A}_\gamma \setminus \{(\sigma^2 T/2, x) \in \bar{\mathcal{A}}_\gamma\}$$

Del Lema (2) con $Q = \mathcal{A}_\gamma$ y $h = f$ se puede concluir que

$$\sup_{t \in [0, \sigma^2 T/2]} \|u_\gamma\|_{L^\infty(\Omega_\tau)} \leq \frac{1}{\gamma} \text{supess}_{\tau \in (0, \sigma^2 T/2)} \|(f(\cdot))^+\|_\infty, \leq \text{supess}_{\tau \in (0, \sigma^2 T/2)} \|(f(\cdot))^+\|_\infty, \quad (5.13)$$

Ahora se estudiará la estimación en \mathcal{I}^* . Sea $\Sigma\{(\tau, x) \in \partial \mathcal{I}^* \mid \tau \in (0, \sigma^2 T/2)\}$ denotando la frontera lateral de \mathcal{I}^* y sea $\Sigma_\tau = \{x \mid (t, x) \in \Sigma\}$. Notar que Σ_τ es definido en el sentido c.t.p. $\tau \in (0, \sigma^2 T/2)$, debido a que $u^*(\tau) \in C(\bar{\Omega})$ para casi todo $\tau \in (0, \sigma^2 T/2)$. Para c.t.p. τ se tiene que $u^*(\tau, \cdot) \leq 0$ en Σ_τ . Luego, $\delta = \text{supess}_{\tau \in (0, \sigma^2 T/2)} \|u_\gamma\|_{L^\infty(\Sigma_\tau)}$ y $u_\gamma - u^* = -u_\gamma \geq 0$ en Σ_τ c.t.p. en $\partial \mathcal{I}^*$ están bien definidas. Observando que $\gamma \leq \text{supess}_{\tau \in (0, \sigma^2 T/2)} \|u_\gamma\|_{L^\infty(\mathcal{A}_{\gamma, \tau})} \leq \frac{1}{\gamma} \|\text{máx}(0, f)\|_{L^\infty(Q)}$, donde $\mathcal{A}_{\gamma, \tau} = \{x \mid (\tau, x) \in \mathcal{A}_\gamma\}$. En \mathcal{I}^* tenemos

$$\begin{cases} \frac{d}{d\tau}(u_\gamma - u^*) - A(u_\gamma - u^*) = \lambda_\gamma - \lambda^* \leq 0 & \text{en } \mathcal{I}^* \\ u_\gamma - u^* = -u_\gamma \geq 0 \text{ en } \partial \mathcal{I}^*, u_\gamma - u^* = 0 & \text{en } \{(0, \tau) \in \mathcal{I}^*\} \end{cases}$$

de donde $u = u_\gamma - u^*$ satisface (5.12) con $\gamma = 0$, $h = \lambda_\gamma - \lambda^* \leq 0$ y $Q = \mathcal{I}^*$. Poniendo $\phi = (u(\tau) - \alpha)^+ \in Y$ en (5.12) se sigue que con los argumentos como en la prueba del Lema (2) tal que para todo $\tau \in [0, \sigma^2 T/2]$.

$$\|u_\gamma(\tau) - u^*(\tau)\|_{L^\infty(\mathcal{I}_\tau^*)} \leq \alpha \leq \frac{1}{\gamma} \sup_{\tau \in (0, \sigma^2 T/2)} \|(f(\cdot))^+\|_\infty$$

donde $\mathcal{I}_\tau^* = \bar{x}(\tau, x) \in \mathcal{I}^*$. Para luego combinando las dos desigualdades obtenidas llegar a la desigualdad deseada. \square

5.3.2. Caso $\bar{\lambda}(\tau) = \|(A(0) + f(\tau))^+\|_\infty$.

Supongamos que $\bar{\lambda}(\tau) = \|(A(0) + f(\tau))^+\|_\infty \in L^\infty(0, \sigma^2 T/2)$. El resultado de monotonía del Corolario 2 implica que $u_\gamma \leq u_{\hat{\gamma}} \leq u^*$, para $0 < \gamma \leq \hat{\gamma} < \infty$. Definamos

$$\mathcal{A}_\gamma = \{(\tau, x) \in (0, \sigma^2 T/2) \times \Omega \mid \lambda_\gamma(\tau, x) > 0\},$$

donde $\lambda_\gamma(\tau) = \max(0, \bar{\lambda}(\tau))$. Entonces $\mathcal{A}_\gamma \subset \mathcal{A}^*$.

Teorema 10. *Suponiendo que $\text{dom}(A) \subset C(\bar{\Omega})$, observando que en nuestro problema $\|(A(0) + f(\cdot))^+\|_\infty = \|(f(\cdot))^+\|_\infty \in L^\infty(0, \sigma^2 T/2)$ y asumiendo que \mathcal{A}^* y \mathcal{A}_γ son dominios con fronteras Lipschitz continuas. Entonces:*

$$\|u_\gamma - u^*\|_{L^\infty(0, \sigma^2 T/2) \times \Omega} \leq \frac{1}{\gamma} \sup_{\tau \in (0, \sigma^2 T/2)} \|(f(\cdot))^+\|_\infty$$

Esquema demostrativo. En \mathcal{A}_γ tenemos que $\bar{\lambda} - \gamma u_\gamma \geq 0$, $u^* = 0$ y $u_\gamma \geq 0$ c.t.p.. De ello se puede mostrar que

$$\|u^* - u_\gamma\|_{L^\infty(\mathcal{A}_\gamma)} \leq \frac{1}{\gamma} \|\bar{\lambda}\|_{L^\infty(0, \sigma^2 T/2)}$$

Obsérvese que $\alpha := \sup_{(\tau, x) \in L^\infty(\mathcal{A}_\gamma)} \|u^*(\tau, x) - u_\gamma(\tau, x)\| = \sup_{0, \sigma^2 T/2} \|\cdot\|_{L^\infty(\Omega_\tau)}$, donde $\Omega_\tau \in \mathcal{A}_\gamma$, y que $u^*(\tau) - u_\gamma(\tau) \in C(\bar{\Omega})$, para casi todo $\tau \in (0, \sigma^2 T/2)$. En consecuencia, para casi todo $\tau \in (0, \sigma^2 T/2)$ se tiene que

$$\|u^*(\tau) - u_\gamma(\tau)\|_{L^\infty(\Sigma_\tau)} \leq \|u^*(\tau) - u_\gamma(\tau)\|_{C(\bar{\Omega}_\tau)} \leq \alpha$$

donde $\Sigma_\tau = \{x \mid (\tau, x) \in \Sigma\}$ y $\Sigma = \{(\tau, x) \in \partial \mathcal{I}^* \mid \tau \in (0, \sigma^2 T/2)\}$. En \mathcal{I}^* se tiene que

$$\begin{cases} \frac{d}{d\tau}(u^* - u_\gamma) - A(u^* - u_\gamma) = \lambda^* - \lambda_\gamma \leq 0 & \text{en } \mathcal{I}_\gamma \\ u^* - u_\gamma \geq 0 \text{ en } \partial \mathcal{I}_\gamma \text{ y } u^* - u_\gamma = 0 & \text{en } \{(0, x) \in \bar{\mathcal{I}}_\gamma\} \end{cases}$$

Tomando el producto interno con $\phi = (u^* - u_\gamma - \alpha)^+$ implica que

$$\|u^* - u_\gamma\|_{L^\infty(\mathcal{I}_\gamma)} \leq \alpha \leq \frac{1}{\gamma} \|\bar{\lambda}\|_{L^\infty(0, \sigma^2 T/2)}.$$

\square

Capítulo 6

El Método de Newton Semi-Suave y la Estrategia de Conjuntos Activos e Inactivos.

En este capítulo empezaremos estudiando el Método de Newton Semi-suave en dimensión finita, puesto que permite conocer y dar una idea clara del método a la vez que introduce conceptos que serán luego extendidos al caso de espacios de funciones. El método de Newton Semi-suave ha sido ampliamente estudiado para espacios de dimensión finita [FP]).

Luego, se tratará el problema de valoración como un sistema de ecuaciones diferenciales y un sistema de complementariedad que se obtiene a partir de la desigualdad variacional obtenida en el capítulo 5. A continuación se expresará el sistema de complementariedad como una ecuación operacional que involucre funciones Newton diferenciables para finalmente aplicar una estrategia de conjuntos activos y estudiar su equivalencia con un método de Newton Semi-Suave.

6.1. El método de Newton Semi-Suave.

6.1.1. El método de Newton Semi-Suave en dimensión finita.

Consideremos una función $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ suave, i.e., $G \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ donde el esquema aproximativo de Newton viene dada por el modelo lineal:

$$G(x^k) + JG(x^k)d, \tag{6.1}$$

donde JG es el Jacobiano de G y $d = x - x^k$.

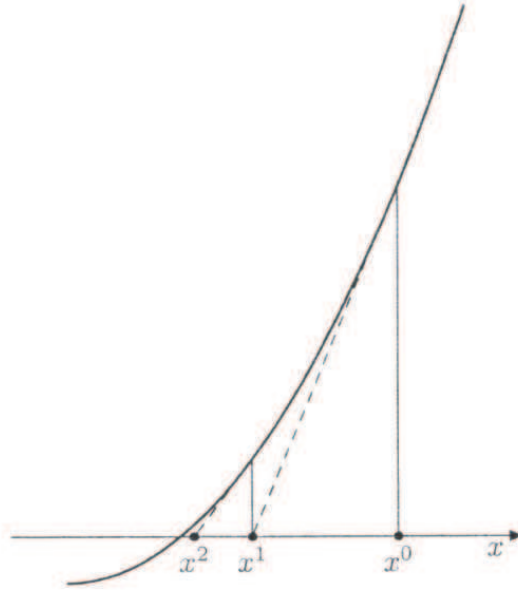


Figura 6.1: Ilustración del método de Newton Suave.

El éxito de este tipo de esquema está basado en el hecho de que (6.1) sea una buena aproximación de G cerca de x^k y en que la ecuación lineal resultante es resoluble dado que G es continuamente diferenciable y $JG(x^k)$ es invertible.

Definimos $x^{k+1} := x^k + d^k$ siendo d^k una raíz de (6.1). Notemos que esto nos define la iteración de Newton usual.

$$G(x^k) + JG(x^k)(d^k - x^k) = G(x^k) + JG(x^k)(x^{k+1} - x^k) = 0$$

de donde podemos ver que: $x^{k+1} = x^k - JG^{-1}(x^k)G(x^k)$ y además que $JG(x^k)d$ es una buena aproximación de $G(x^k + d) - G(x^k)$.

En el gráfico (6.1) podemos ver un ejemplo de cómo trabaja este método.

En el caso en el que G sea “no suave” y por ende, no diferenciable, se observa que el tratar de generalizar el método no resulta fácil, pues algunas propiedades no resultan razonables o útiles en el momento de tratar de definir un modelo local que sea análogo al método de Newton.

Para obtener un esquema de Newton “no suave” debemos primeramente observar que no se tiene garantizada la existencia del Jacobiano de G y aún si existiera no hay razón para esperar que éste se pueda usar para obtener una buena aproximación de G cerca de algún punto de interés.

Generalizando (6.1), asumamos que el modelo buscado de Newton está dado por:

$$G(x^k) + A(x^k, d) \quad (6.2)$$

donde $A(x^k, d)$ es tomado como un modelo de $G(x^k + d) - G(x^k)$ cerca de $d = 0$. En realidad para ser más precisos podemos decir que hay una familia de aproximaciones $\mathcal{A}(x)$ donde cada elemento $A(x, \cdot) \in \mathcal{A}(x)$ es una función de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^m que puede ser usado en (6.2). Muy a menudo tomaremos $\mathcal{A} = \partial G$.

Definición 13. Sea $G : \Omega \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función no suave, localmente Lipschitz continua en todo $x \in \Omega$. Definimos el Jacobiano límite de G en $\bar{x} \in \Omega$ por

$$JacG(\bar{x}) = \partial G(\bar{x}) = \left\{ H \in \mathbb{R}^{n \times m} \mid H = \lim_{k \rightarrow \infty} JG(x^k), \text{ para alguna sucesión } x^k \rightarrow \bar{x} \right\}$$

con x^k no perteneciente a los puntos donde G sea no diferenciable.

Definición 14. Sea $G : \Omega \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función localmente Lipschitz continua en un punto $\bar{x} \in \Omega$. El Jacobiano generalizado de Clarke de G en \bar{x}

$$\partial G(\bar{x}) = \text{conv } JacG(\bar{x}).$$

es decir la envoltura convexa del Jacobiano Limitante¹.

Ejemplo 11. Consideremos $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, asumiendo que cumple las condiciones requeridas en la definición(14)

$$G(x, y) = \begin{pmatrix} \min(x, y) \\ |x|^3 - y \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

Con el fin de calcular $\partial G(0, 0)$ consideremos las cuatro regiones cerradas:

$$\begin{aligned} R_1 &= \{(x, y) \mid y \geq x, x \geq 0\} \\ R_2 &= \{(x, y) \mid y \geq x, x \leq 0\} \\ R_3 &= \{(x, y) \mid y \leq x, x \leq 0\} \\ R_4 &= \{(x, y) \mid y \leq x, x \geq 0\} \end{aligned}$$

Claramente la unión de las cuatro regiones es el espacio y la unión de sus fronteras \mathfrak{B} es un conjunto de medida nula. Notemos que el conjunto \mathfrak{B} contiene todos los puntos donde G es no diferenciable, pero también contiene otros donde es continuamente diferenciable, por ejemplo el semi-eje y positivo.

Considerando las regiones R_1, \dots, R_4 podemos ver que el Jacobiano generalizado de Clarke esta dado por la envoltura convexa de los límites de los Jacobianos de G calculados por sucesiones convergentes a cero desde el interior de cada una de las regiones.

$$\partial G(0, 0) = \text{conv} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right),$$

¹La envoltura convexa de un conjunto es la intersección de todos los convexos en $\mathbb{R}^{n \times m}$ que contienen a dicho conjunto

Sean $p \in [0, 1]$, tenemos que:

$$\partial G(0, 0) = p \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + (1 - p) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

de donde:

$$\partial G(0, 0) = \begin{pmatrix} p & 1 - p \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Definición 15. Sea G una función localmente Lipschitz de un conjunto Ω de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^m , decimos que G tiene una aproximación de Newton en un punto $\bar{x} \in \Omega$ si existe una vecindad $\Omega' \subset \Omega$ y una función $\Delta : (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ tal que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \Delta(t) = 0,$$

de modo que para cada punto $x \in \Omega'$ existe una familia $\mathcal{A}(x)$ de funciones de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^m satisfaciendo las siguientes dos propiedades:

- a) $A(x, 0) = 0$ para todo $A(x, \cdot) \in \mathcal{A}$
- b) Para algún $x \in \Omega'$ diferente de \bar{x} y para algún $A(x, \cdot) \in \mathcal{A}$

$$\frac{\|G(x) + A(x, \bar{x} - x) - G(\bar{x})\|}{\|x - \bar{x}\|} \leq \Delta(\|x - \bar{x}\|) \quad (6.4)$$

Llamaremos a \mathcal{A} un esquema de aproximación (de Newton) para G en \bar{x} y si el requerimiento **b)** se puede expresar como:

- b') Existe una constante positiva L' tal que para todo $x \in \Omega'$ diferente de \bar{x} y para todo $A(x, \cdot) \in \mathcal{A}(x)$

$$\frac{\|G(x) + A(x, \bar{x} - x) - G(\bar{x})\|}{\|x - \bar{x}\|^2} \leq L'$$

Entonces decimos que F tiene una aproximación de Newton fuerte en \bar{x} y que \mathcal{A} es un esquema de aproximación (de Newton) fuerte.

Con la definición anterior se presenta una extensión natural del método de Newton suave para resolver ecuaciones no suaves conservando las principales características del método original, principalmente su rápida convergencia local.

Algoritmo 12. (Método de Newton generalizado)

Datos: $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $\varepsilon > 0$

Paso 1: $k = 0$

Paso 2: Terminar si $G(x_k) = 0$

Paso 3: Seleccionar un elemento $A(x_k, \cdot)$ en $\mathcal{A}(x_k)$ y un vector de $d_k \in \mathbb{B}(0, \varepsilon)$ tal que

$$G(x_k) + A(x_k, d_k) = 0 \quad (6.5)$$

Paso 4: Tomar $x_{k+1} = x_k + d_k$ y $k=k+1$ e ir al Paso 2

Ahora veamos las propiedades acerca de la tasa de convergencia de este algoritmo:

Teorema 13. Sea $G : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, con Ω abierto, una función localmente Lipschitz en una vecindad de x^* satisfaciendo $G(x^*) = 0$. Existe una vecindad $\mathbb{B}(x^*, \delta)$ de x^* tal que si x_0 pertenece a $\mathbb{B}(x^*, \delta)$ entonces el algoritmo (12) genera una sucesión $\{x^k\}$ que converge súper linealmente a x^* . Si la aproximación \mathcal{A} es fuerte la tasa de convergencia es cuadrática.²

Ahora motivados por estas ideas introduzcamos una clase importante de funciones llamadas "Semi-suaves". El Jacobiano Generalizado de Clarke es una herramienta poderosa que nos permite extender a funciones localmente Lipschitz muchos resultados válidos para las funciones suaves. No obstante, el extender el método de Newton para funciones suaves a funciones no suaves en general utilizando el Jacobiano generalizado a menudo falla pues en general un modelo definido por las matrices Jacobianas en $\partial G(x)$ no define un esquema aproximativo de Newton de G , esto es, la condición límite

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{G(x) + H(\bar{x} - x) - G(\bar{x})}{\|x - \bar{x}\|} = 0$$

no necesariamente se cumple para cualquier función Lipschitz G (un ejemplo de este hecho puede ser encontrado en [FP] pg 674).

Las funciones semi-suaves son funciones localmente Lipschitz continuas para las cuales el jacobiano generalizado de Clarke define un esquema de aproximación de Newton legítimo.

La definición formal de este tipo de funciones es la siguiente:

Definición 16. Sea $G : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, con Ω abierto, una función localmente Lipschitz continua en Ω . Decimos que G es semi-suave en un punto $\bar{x} \in \Omega$ si G es direccionalmente diferenciable cerca de \bar{x} y existe una vecindad $\Omega' \subset \Omega$ de \bar{x} y una función $\Delta : (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ con

$$\lim_{t \rightarrow 0} \Delta(t) = 0, \quad (6.6)$$

tal que para cualquier $x \in \Omega'$ diferente de \bar{x} ,

$$\frac{\|G'(x; x - \bar{x}) - G'(\bar{x}; x - \bar{x})\|}{\|x - \bar{x}\|} \leq \Delta(\|x - \bar{x}\|) \quad (6.7)$$

²La demostración a este teorema se encuentra explicada en [FP], TOMO 2 Pg.645

Si adicionalmente el requerimiento anterior puede ser escrito como:

$$\limsup_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{\|G'(x; x - \bar{x}) - G'(\bar{x}; x - \bar{x})\|}{\|x - \bar{x}\|^2} \leq \infty, \quad (6.8)$$

diremos que G es fuertemente semi-suave en \bar{x} . Si G es (fuertemente) semi-suave en cada punto de Ω entonces decimos que G es (fuertemente) semi-suave en Ω .

Por todo lo visto anteriormente podemos decir que para una función semi-suave el Jacobiano generalizado de Clarke $\partial G(x)$ es un esquema de aproximación de Newton de G en x y así podemos esperar asumiendo condiciones de no singularidad que el siguiente algoritmo esta bien definido y es súper linealmente convergente.

Algoritmo 14. (Método de Newton Semi-Suave)

Datos: $x_0 \in \mathbb{R}^n$

Paso 1: $k = 0$

Paso 2: Si $G(x_k) = 0$, terminar

Paso 3: Seleccionar un elemento $H^k \in \partial G(x_k)$. Encontrar una dirección $d_k \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$G(x_k) + H^k d_k = 0 \quad (6.9)$$

Paso 4: $x_{k+1} = x_k + d_k$ y $k=k+1$

Ahora veamos el resultado principal de convergencia de este algoritmo:

Teorema 15. Sea $G : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, con Ω abierto, una función semi-suave en $x^* \in \Omega$ satisfaciendo $G(x^*) = 0$. Si $\partial G(x^*)$ es no singular, existe un $\delta > 0$ tal que si x_0 pertenece a $\mathbb{B}(x^*, \delta)$ entonces el algoritmo (14) genera una sucesión $\{x^k\}$ que converge súper linealmente a x^* . Si G es fuertemente semi-suave en x^* la tasa de convergencia es cuadrática.

6.1.2. Método de Newton Semi Suave en Espacios de Funciones.

Sean X y Z dos espacios de Banach y consideremos la ecuación:

$$F(x) = 0 \quad (6.10)$$

Donde $F : D \subset X \rightarrow Z$ con $D \subset X$ abierto.

Definición 17. La función $F : D \subset X \rightarrow Z$ es llamada Newton diferenciable en un abierto $U \subset D$ si existe una familia de funciones $A : U \rightarrow L(X, Z)$ con $A(x) \in \mathcal{A}$ tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\|h\|} \|F(x+h) - F(x) - A(x+h)h\| = 0 \text{ para todo } x \in U. \quad (6.11)$$

Análogamente a lo presentado en dimensión finita podemos decir que A pertenece a una familia de funciones tal que $\{\|A(x)^{-1}\|\}$ sea acotada de modo que sea útil para definir el modelo de aproximación de Newton

$$F(x_k) + A(x_k)h \quad (6.12)$$

A partir de esto, podemos encontrar x_{k+1} como $x_k + h_k$ donde h_k es un cero de este modelo.

De igual manera, presentamos a continuación un algoritmo que resuelve dicho modelo.

Algoritmo 16. (*Algoritmo de Newton Semi Suave para funciones*)

Datos: $x_0 \in D$

Paso 1: $k = 0$

Paso 2: si $F(x_k) = 0$ terminar.

Paso 3: Elegir $A(x_k) \in \mathcal{A}$. Encontrar una dirección $h_k \in U$ tal que

$$F(x_k) + A(x_k)h_k = 0 \quad (6.13)$$

Paso 4: $x_{k+1} = x_k + h_k$ y $k = k + 1$, ir al paso 2.

Este algoritmo demuestra es súper linealmente convergente como se muestra en el siguiente teorema.

Teorema 17. Sea x^* la solución de (6.10) y F Newton diferenciable en una vecindad abierta U de x^* con derivada $A(x)$ y $\{\|A(x)^{-1}\| : x \in U\}$ acotado. Entonces la iteración de Newton:

$$x_{k+1} = x_k - A(x_k)^{-1}F(x_k) \quad (6.14)$$

converge súper linealmente hacia x^* siempre que $\|x_0 - x^*\|$ sea suficientemente pequeño.

Demostración. Notar que la iteración de Newton satisface

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leq \|A(x^* + h)^{-1}\| \|F(x_k) - F(x^*) - A(x_k)(x_k - x^*)\|, \quad (6.15)$$

dado que $x_k \in U$. Sea $\mathbb{B}(x^*, r)$ tal que este contenida en U y sea M tal que $\|G(x)^{-1}\| \leq M \forall x \in \mathbb{B}(x^*, r)$. Aplicamos (6.11) con $x = x^*$. Sea $\eta \in (0, 1]$ arbitrario. Entonces existe $\rho \in (0, r)$ tal que

$$\|F(x^* + h) - F(x^*) - A(x^* + h)h\| \leq \frac{\eta}{M} \|h\| \leq \frac{1}{M} \|h\| \quad (6.16)$$

Para todo $\|h\| < \rho$. Consecuentemente, si escogemos x_0 tal que $\|x_0 - x^*\| < \rho$ entonces por inducción de (6.15) y (6.16) con $h = x_k - x^*$ tenemos $\|x_k - x^*\| < \rho$ y en particular $x_{k+1} \in (x^*, \rho)$. Se sigue que las iteraciones están bien definidas. Más aún como $\eta \in (0, 1]$ es escogido arbitrariamente $x_k \rightarrow x^*$ converge súper linealmente. \square

Bajo este contexto consideremos la diferenciabilidad de los operadores $\text{máx}(0, \cdot) : L^q(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)$ y $\text{mín}(0, \cdot) : L^q(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)$ que serán utilizados en los siguientes capítulos.

Teorema 18. *Las funciones $\text{máx}(0, \cdot) : L^q(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)$ y $\text{mín}(0, \cdot) : L^q(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)$ con $1 \leq p < q < \infty$ son Newton diferenciables en $L^q(\Omega)$ y tienen como derivada generalizada:*

$$G_{\text{máx},\delta}(y)(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } y(x) > 0 \\ 0 & \text{si } y(x) < 0 \\ \delta & \text{si } y(x) = 0 \end{cases}$$

$$G_{\text{mín},\delta}(y)(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } y(x) < 0 \\ 0 & \text{si } y(x) > 0 \\ \delta & \text{si } y(x) = 0 \end{cases}$$

con $\delta \in \mathbb{R}$.

6.2. Aplicación del método de Newton semi-suave a la desigualdad variacional de Black & Scholes.

6.2.1. Semi discretización en el tiempo.

Antes de abordar el sistema (P) según la estrategia de conjuntos activos e inactivos es necesario hacer una discretización con respecto a la variable temporal; para ello se toma una partición del intervalo $[0, \frac{\sigma^2}{2}T]$ en M sub-intervalos equidistantes, es decir, $\mathcal{P} = \{0 = t_0, t_2, \dots, t_M = \frac{\sigma^2}{2}T\}$ con $t_{i+1} = t_i + \Delta t$ y $\Delta t = \frac{\sigma^2}{2}TM^{-1}$. Luego usamos el método de Euler para plantear el sistema:

Llamaremos u^i a la aproximación de la solución de u , además:

$$d^i = \frac{u^{i+1} - u^i}{\Delta t} \tag{6.17}$$

$$u^{i+\theta} = (1 - \theta)u^i + \theta u^{i+1} \tag{6.18}$$

$$f^{i+\theta} = (1 - \theta)f^i + \theta f^{i+1} \tag{6.19}$$

Con $f^i = f(t_i, \cdot)$.

Reemplazando (6.17), (6.18) y (6.19) en (P) y utilizando un esquema implícito, es decir $\theta = 1$, se obtiene:

$$\begin{cases} \left(\frac{u^{i+1}-u^i}{\Delta t}, w \right) + a(u^{i+1}, w) - (\lambda^{i+1}, w) = (f^{i+1}, w) \text{ para todo } w(t) \in H_0^1(\Omega). \\ u^{i+1} \in \mathcal{K}_0 \\ \lambda^{i+1} \in L^2(0, \frac{\sigma^2}{2}T; L^2(\Omega)) \\ \mathcal{C}(u, \lambda) = 0 \end{cases}$$

Observación 12. *Es importante recalcar que para cada tiempo fijo el algoritmo resolverá según la estrategia de conjuntos activos e inactivos un problema estático.*

A continuación se describe el algoritmo según la estrategia de los conjuntos activos e inactivos:

6.2.2. Algoritmo de Conjuntos Activos e Inactivos. (ACAI)

1. Elegir $i = 0$
2. $u^0 = 0$ y $k = 0$
3. Elegir $A_{k+1} = \{(x) : (\bar{\lambda} - \gamma u_k^i)(x) > 0\}$ $I_{k+1} = \Omega - A_{k+1}$
4. Resolver para $u_{k+1}^{i+1} \in H_0^1(\Omega)$

$$\left(\frac{u^{i+1} - u^i}{\Delta t}, w \right) + a(u^{i+1}, w) - (\bar{\lambda} - \gamma u_{k+1}^{i+1}, \mathcal{X}_{A_{k+1}} w) = (f^{i+1}, w) \quad (6.20)$$

5. Elegir

$$\lambda_{k+1}^{i+1} = \begin{cases} 0 & \text{en } I_{k+1} \\ \bar{\lambda} - \gamma u_{k+1}^{i+1} & \text{en } A_{k+1} \end{cases}$$

6. Terminar o $k = k + 1$ y regresar a 3.
7. Si “terminar” actualizar $i = i + 1$ y regresar a 2.

Ahora estableceremos la relación entre (ACAI) y el SSNM aplicado a nuestro sistema de optimalidad.

Definamos:

$$\begin{aligned} \hat{A} : H_0^1(\Omega) &\rightarrow H^{-1}(\Omega) \text{ tal que} \\ \langle \hat{A}u, w \rangle &= \left(\frac{u}{\Delta \tau}, w \right) + a(u, w) \end{aligned}$$

Introducimos la función no lineal:

$$F : H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega) \text{ tal que}$$

$$F(u, \lambda) = \begin{pmatrix} \hat{A}u - \frac{u^i}{\Delta\tau} - \lambda - f^{i+1} \\ \lambda - \text{máx}(0, \bar{\lambda} - \gamma u) \end{pmatrix}$$

Una derivada generalizada G en el esquema de aproximaciones \mathcal{A} de F en el sentido de la definición de Newton diferenciabilidad y correspondiendo a (6.12), del teorema (18) con $\delta = 0$ está dada por:

$$G(u_k, \lambda_k) = \begin{pmatrix} Ah_1 - h_2 \\ h_2 - \gamma \mathcal{X}_{A_{k+1}} h_1 \end{pmatrix}$$

con $h = (h_1, h_2) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

Por el teorema (17) del presente capítulo tenemos que el paso de Newton viene dado por:

$$\begin{pmatrix} u_{k+1}^{i+1} \\ \lambda_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_k^{i+1} \\ \lambda_k \end{pmatrix} - G^{-1}(u_k^{i+1}, \lambda_k) F(u_k^{i+1}, \lambda_k)$$

Para guardar consistencia con el Algoritmo (16) se requiere que $h_1 = u_{k+1}^{i+1} - u_k^{i+1}$ y $h_2 = \lambda_{k+1} - \lambda_k$. Para obtener la equivalencia entre el método de Newton y nuestro Algoritmo partamos de la ecuación (6.12)

$$F(u_k, \lambda_k) + G(u_k, \lambda_k) \begin{pmatrix} u_{k+1}^{i+1} - u_k^{i+1} \\ \lambda_{k+1} - \lambda_k \end{pmatrix} = 0 \quad (6.21)$$

Sean $\delta u^{i+1} = u_{k+1}^{i+1} - u_k^{i+1}$ y $\delta \lambda = \lambda_{k+1} - \lambda_k$

$$\begin{cases} \hat{A}\delta u^{i+1} - \delta \lambda = -\hat{A}u_k^{i+1} + \lambda_k + f^{i+1} + \frac{u^i}{\Delta\tau} \\ \delta \lambda - \gamma \mathcal{X}_{A_{k+1}} \delta u = -\lambda_k + \text{máx}(0, \bar{\lambda} - \gamma u) \end{cases}$$

o equivalentemente

$$\begin{cases} \hat{A}\delta u^{i+1} - \delta \lambda = -\hat{A}u_k^{i+1} + \lambda_k + f^{i+1} + \frac{u^i}{\Delta\tau} \\ \delta \lambda = -\lambda_k \text{ en } I_{k+1} \\ \delta \lambda - \gamma \delta u^{i+1} = -\lambda_k + \bar{\lambda} + \gamma u_k \text{ en } A_{k+1} \end{cases}$$

Este nuevo sistema coincide con los pasos (3) y (4) del algoritmo de conjuntos activos e inactivos. Estableciéndose la equivalencia de ambos métodos.

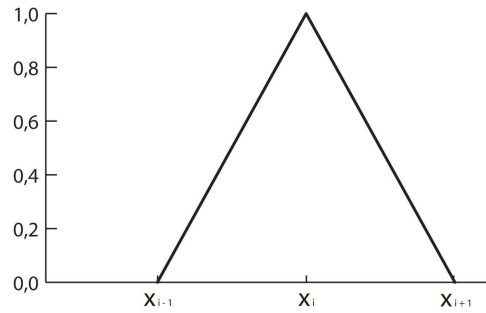


Figura 6.2: Elemento de la base V_h

6.2.3. Método de Elementos Finitos.

Para la implementación numérica de (ACAI) se utiliza el método de elementos finitos, para lo cual se discretiza $H_0^1(\Omega)$ por espacios V_h de funciones polinomiales por pedazos sobre Ω .

Sea $\mathcal{Q}(\Omega) = \{x_{min} = x_0, x_1, \dots, x_{N+1} = x_{max}\}$ una partición de Ω con $h = \frac{(x_{max} - x_{min})}{N}$ y $x_{j+1} = x_j + h$ A lo anterior llamaremos "triangulación de $\bar{\Omega}$ " que denotaremos por \mathcal{T}_h .

Sea $W_h = \{g \in C^0(\bar{\Omega}) : g|_K \in \mathbb{P}_1 \forall K \in \mathcal{T}_h\}$ y $V_h = W_h \cap H_0^1(\Omega)$.

Tomaremos como base de Elementos Finitos de V_h al conjunto $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N\}$ tal que:

$$\varphi_j = \begin{cases} \frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} & \text{si } x_{j-1} \leq x \leq x_j \\ \frac{x - x_{j+1}}{x_j - x_{j+1}} & \text{si } x_j \leq x \leq x_{j+1} \\ 0 & \text{si } x \leq x_{j-1} \text{ o } x \geq x_{j+1} \end{cases}$$

El gráfico de la función φ_i es representado en la figura (6.2.3) :

Observación 13. Si $u(x) = \sum_{j=1}^N u_j(x) \varphi_j(x)$ entonces se cumplen las siguientes propiedades:

- $u(x_j) = u_j \quad 1 \leq j \leq N$
- $u(x_{min}) = u(x_{max})$
- u es continua sobre Ω
- u restringido al intervalo $[x_j, x_{j+1}]$ es un polinomio de grado 1 en x .

Estas propiedades caracterizan el subespacio V_h .

Además se dirá que:

- x_0, x_1, \dots, x_{N+1} son los nodos de la discretización.
- $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_N, x_{N+1}]$ son los elementos geométricos.
- $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$ son las funciones de base del subespacio V_h de tipo elementos finitos (EF).

Así, se aproximará a cada $u(t) \in H_0^1(\Omega)$ por:

$$u_h(t) = \sum_{j=1}^N u_j(t) \varphi_j \quad (6.22)$$

donde los términos $u_j(t)$ son funciones de t a determinarse.

Discretización.

Para empezar con la discretización consideremos la siguiente formulación del problema en el paso 4 de nuestro algoritmo.

Luego, el problema discretizado resultante es:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N u_j(t) \int_{\Omega} \varphi_j \varphi_l dx + \sum_{j=1}^N u_j(t) \int_{\Omega} \varphi_j' \varphi_l' dx - \gamma \sum_{j=1}^N u_j \int_{\Omega} \varphi_j \mathcal{X}_{A_{k+1}} \varphi_l dx = \\ - \int_{\Omega} \left[\frac{\partial g}{\partial \tau}(t) \varphi_l + \frac{\partial g}{\partial x}(t) \varphi_l' \partial x \right] dx + \int_{\Omega} \bar{\lambda} \varphi_l dx \end{aligned} \quad (6.23)$$

Si A es la matriz de *rigidez* $N \times N$ de coeficientes:

$$A_{jl} = \int_{\Omega} \varphi_j' \varphi_l' dx,$$

Si M es la matriz de *masa* de coeficientes

$$M_{jl} = \int_{\Omega} \varphi_j \varphi_l dx.$$

Además si consideremos la matriz M^* que introduce en la resolución por elementos finitos la estrategia de activos inactivos, cuyos coeficientes son

$$M_{jl}^* = \int_{\Omega} \mathcal{X}_{k+1}(j) \varphi_j \varphi_l dx.$$

donde

$$\mathcal{X}_{k+1}(j) = \begin{cases} 1 & \text{si } x(j) \in \mathcal{A}_{k+1} \\ 0 & \text{si } x(j) \in \mathcal{I}_{k+1} \end{cases}$$

Si $\vec{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_N(t))$ y si $\vec{f}(t)$ es el N-vector donde la l-ésima componente es:

$$f_l(t) = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial g(t)}{\partial \tau} \varphi_l - \frac{\partial g(t)}{\partial x} \varphi_l' \right] dx$$

y además:

$$\vec{\lambda}(t) = \int_{\Omega} \bar{\lambda} \varphi_l$$

Entonces la resolución de (6.23) es equivalente a encontrar $\vec{u}(t)$ tal que:

$$\frac{1}{\Delta t} M \vec{u} + A \vec{u} + \gamma M^* \vec{u} = \vec{\lambda} + \vec{f} + \frac{1}{\Delta t} M \vec{u}^{i-1}$$

Por otra parte, se verifica que:

$$\int_{\Omega} \varphi_j' \varphi_l' dx = \begin{cases} \frac{2}{h} & \text{si } j = l \\ -\frac{1}{h} & \text{si } j \neq l, |j - l| = 1 \end{cases}$$

$$\int_{\Omega} \varphi_j \varphi_l dx = \begin{cases} \frac{2}{3}h & \text{si } j = l \\ \frac{1}{6}h & \text{si } j \neq l, |j - l| = 1 \end{cases}$$

y a través del método de los trapecios se tiene:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial g}{\partial \tau}(x) \varphi_l(x) dx = h \frac{\partial g}{\partial \tau}(x_l)$$

$$\int_{\Omega} \bar{\lambda}(x) \varphi_l(x) dx = h \bar{\lambda}(x_l)$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial g}{\partial x}(x) \varphi_l'(x) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial g}{\partial x}(x_{l-1}) - \frac{\partial g}{\partial x}(x_{l+1}) \right].$$

Entonces:

$$A = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 2 & -1 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \\ \vdots & & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M = \frac{h}{6} \begin{pmatrix} 4 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 4 & & 1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$M^* = \frac{h}{6} \begin{pmatrix} 4 * \mathcal{X}_{k+1}(1) & \mathcal{X}_{k+1}(2) & \cdots & 0 \\ \mathcal{X}_{k+1}(1) & 4 * \mathcal{X}_{k+1}(2) & \mathcal{X}_{k+1}(3) & \\ \vdots & & \ddots & \mathcal{X}_{k+1}(N) \\ 0 & \cdots & \mathcal{X}_{k+1}(N-1) & 4 * \mathcal{X}_{k+1}(N) \end{pmatrix}$$

$$f(\vec{t}) = h \begin{pmatrix} f(x_1, t) \\ f(x_2, t) \\ \vdots \\ f(x_N, t) \end{pmatrix}$$

$$\vec{\lambda}(t) = h \begin{pmatrix} \bar{\lambda}(x_1, t) \\ \bar{\lambda}(x_2, t) \\ \vdots \\ \bar{\lambda}(x_N, t) \end{pmatrix}$$

Observación 14. Para la resolución numérica de f es necesario el estudio previo de la función de rentabilidad transformada:

$$g(x, \tau) = e^{\frac{1}{4}(q+1)^2\tau} \max\{e^{\frac{\sigma}{2}(q-1)} - e^{\frac{\sigma}{2}(q+1)}, 0\}.$$

con $q = \frac{2r}{\sigma^2}$ (como $r > 0$ y $\sigma^2 \neq 0$ entonces $q > 0$).

Para todo q se cumple que $q - 1 < q + 1$.

Si $x \in \mathbb{R}^+$, entonces $\frac{\sigma}{2}(q-1) < \frac{\sigma}{2}(q+1)$ y $e^{\frac{\sigma}{2}(q-1)} - e^{\frac{\sigma}{2}(q+1)} < 0$ de donde $g(x, \tau) = 0$.

Si $x = 0$, entonces $g(0, \tau) = e^{\frac{1}{4}(q+1)^2\tau} \max\{1 - 1, 0\} = 0$.

Si $x \in \mathbb{R}^-$, entonces $\frac{\sigma}{2}(q-1) > \frac{\sigma}{2}(q+1)$ y $e^{\frac{\sigma}{2}(q-1)} - e^{\frac{\sigma}{2}(q+1)} > 0$ de donde

$$g(x, \tau) = e^{\frac{1}{4}(q+1)^2\tau} (e^{\frac{\sigma}{2}(q-1)} - e^{\frac{\sigma}{2}(q+1)}).$$

Dado que:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{4}(q+1)^2\tau} (e^{\frac{\sigma}{2}(q-1)} - e^{\frac{\sigma}{2}(q+1)}) = 0$$

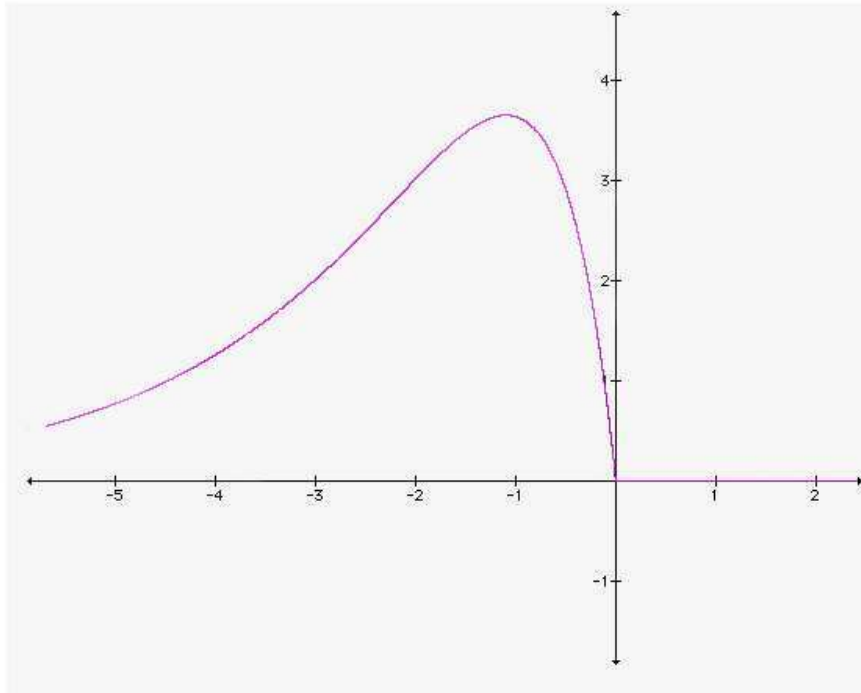


Figura 6.3: Función g

Entonces podemos concluir que $g(x, \tau)$ es continua. Sea τ fijo, el siguiente gráfico representa dicha función.

Adicionalmente, se tiene que:

$$\frac{\partial g(x, \tau)}{\partial x} = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 0 \\ e^{\frac{1}{4}(q+1)^2\tau} \left(\frac{(q-1)}{2} e^{\frac{x}{2}(q-1)} - \frac{(q+1)}{2} e^{\frac{x}{2}(q+1)} \right) & \text{si } j \neq h, |j - h| = 1 \end{cases}$$

De donde:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{4}(q+1)^2\tau} \left(\frac{(q-1)}{2} e^{\frac{x}{2}(q-1)} - \frac{(q+1)}{2} e^{\frac{x}{2}(q+1)} \right) = e^{\frac{1}{4}(q+1)^2\tau} \left(\frac{(q-1)}{2} - \frac{(q+1)}{2} \right) = -e^{\frac{1}{4}(q+1)^2\tau}$$

A partir de este hecho podemos concluir que $\frac{\partial g(x, \tau)}{\partial x}$ no es continua en el punto $(0, \tau)$. Sea τ fijo, el siguiente gráfico representa la función $\frac{\partial g(x, \tau)}{\partial x}$

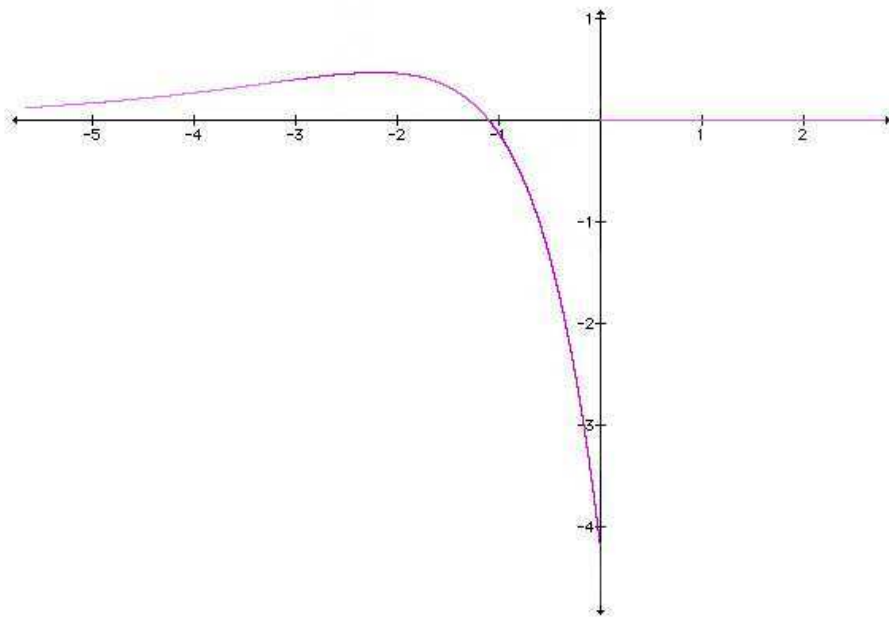


Figura 6.4: Función $\frac{\partial g}{\partial x}$

Capítulo 7

Experimentos Numéricos

En este capítulo se estudia la validez de nuestro esquema de resolución para una opción de compra Americana a través de ejemplos numéricos, los mismos que han sido extraídos de varios trabajos realizados por autores de reconocida trayectoria ver [H], [KIK], [AP] y a su vez hemos realizado un ejemplo adicional de nuestra autoría, esto con el propósito de exponer que el esquema de aproximación obtenido es valedero en diversos escenarios.

7.1. Primer experimento

Consideremos una opción americana de venta con precio de ejercicio $K = 100$ USD, tiempo de madurez $T = 0,5$ años, tasa de retorno libre de riesgo $r = 6\%$, volatilidad $\sigma = 0,04$. Para empezar se hará una comparación de $V(S, 0)$ obtenida mediante nuestro método con los resultados para el mismo problema obtenidos al resolverlo por el Método Binomial y considerado como solución referencial en [H].

Esto se hace, en primera instancia estudiando la diferencia porcentual entre las dos soluciones mencionadas al variar el refinamiento del mallado, el parámetro de penalización, así como Ω . Además se estudian bajo los mismos parámetros el número de iteraciones totales del método y la velocidad de convergencia.

A partir de dicho estudio se puede observar en la tabla 7.1 que la **diferencia porcentual** entre nuestra solución $V(S, 0)$ y la presentada como solución referencial en todos los casos es menor al 4% por lo que se puede comprobar que nuestro esquema aproxima adecuadamente a la solución del problema de opciones americanas. También se observa que dicha diferencia es inversamente proporcional al tamaño del refinamiento del mallado tanto para la parte temporal como para la espacial puesto que como se muestra en ésta tabla para una partición espacial y temporal de 50 nodos cada una la diferencia porcentual es de aproximadamente el

4 % pero con una partición espacial y temporal de 300 nodos cada una la diferencia porcentual disminuye a un valor aproximado de 2,6 %.

En algunos casos al aumentar el tamaño del refinamiento de la malla espacial la diferencia porcentual también aumenta infimamente, como se puede observar para el caso en el que el $N=150$ y M aumenta de 250 a 300 la diferencia porcentual aumenta de 2,49 % a 2,55 %, pero dicho incremento es de orden $10e^{-4}$ por lo que se lo considera imperceptible.

Debemos notar que el incremento en el número de iteraciones mostrado en la tabla 7.1 al aumentar el mallado temporal no implica que la resolución del problema estático se resuelva con más esfuerzo sino que al refinar el mallado temporal se resuelve el problema estático más veces.

$S_{\text{mínimo}} = 78,9, S_{\text{máximo}} = 144, \gamma = 1000$			
M^1	N^2	Diferencia Porcentual	No. iteraciones totales SNNM ³
50	50	0.0433	105
50	100	0.0306	106
50	150	0.0289	106
50	200	0.0252	106
100	100	0.0327	202
100	150	0.031	212
100	200	0.0256	212
100	250	0.0242	212
150	150	0.0317	319
150	200	0.0258	318
150	250	0.0249	319
150	300	0.0255	319
200	200	0.0259	424
200	250	0.0253	425
200	300	0.0258	425
200	350	0.0234	425
300	300	0.0262	638

tabla 7.1: Efecto de la variación del número de iteraciones sobre diferencias % e iteraciones del SNNM

A continuación se presentan varias tablas en las cuales se encuentran detallados los cálculos de los resultados expuestos en la tabla (7.1), en dichas tablas se presentan para diferentes precios en el mercado del activo subyacente el precio de la valoración mediante nuestra aproximación y de la solución referencial, así como el diferencia porcentual puntual producida para cada precio.

Detalle de cálculos

$S_{\text{mínimo}} = 78,9, S_{\text{máximo}} = 144, \gamma = 1000, M = 50, N = 50$					
S	$V(S,0)$ "exacto"	$V(S,0)$	Dif. % puntual	Dif. % global	Iteraciones SMNM
80	21.6059	21.4752	0.0060	0.0433	105
90	14.9187	15.9466	0.0689		
100	9.9458	11.0246	0.01085		
110	6.4352	6.5295	0.014.7		
120	4.0611	3.9863	0.0184		

$S_{\text{mínimo}} = 78,9, S_{\text{máximo}} = 144, \gamma = 1000, M = 50, N = 100$					
S	$V(S,0)$ Binom.	$V(S,0)$	Dif. %	Dif. % global	Iteraciones SMNM
80	21.6059	20.9498	0.0304	0.0306	106
90	14.9187	15.3112	0.0263		
100	9.9458	10.5848	0.0642		
110	6.4352	6.6426	0.0322		
120	4.0611	4.0611	0		

$S_{\text{mínimo}} = 78,9, S_{\text{máximo}} = 144, \gamma = 1000, M = 50, N = 150$					
S	$V(S,0)$ Binom.	$V(S,0)$	Dif. %	Dif. % global	Iteraciones SMNM
80	21.6059	20.7744	0.0385	0.0289	106
90	14.9187	15.0994	0.0121		
100	9.9458	10.4383	0.0495		
110	6.4352	6.6810	0.0382		
120	4.0611	4.063	0.0062		

$S_{\text{mínimo}} = 78,9, S_{\text{máximo}} = 144, \gamma = 1000, M = 50, N = 200$					
S	$V(S,0)$ Binom.	$V(S,0)$	Dif. %	Dif. % global	Iteraciones SMNM
80	21.6059	20,6944	0.0422	0.0252	106
90	14.9187	15.0688	0.0101		
100	9.9458	10.3527	0.0409		
110	6.4352	6.5839	0.0231		
120	4.0611	4.0223	0.0096		

$S_{\text{mínimo}} = 78,9, S_{\text{máximo}} = 144, \gamma = 1000, M = 100, N = 100$					
S	$V(S,0)$ Binom.	$V(S,0)$	Dif. %	Dif. % global	Iteraciones SMNM
80	21.6059	20.9515	0.0303	0.0327	202
90	14.9187	15.3263	0.0273		
100	9.9458	10.6063	0.0664		
110	6.4352	6.6637	0.0355		
120	4.0611	4.0774	0.0040		

$S_{\text{mínimo}} = 78,9, S_{\text{máximo}} = 144, \gamma = 1000, M = 100, N = 150$					
S	$V(S,0)Binom.$	$V(S,0)$	Dif. %	Dif. % global	Iteraciones SMNM
80	21.6059	20.7762	0.0384	0.031	212
90	14.9187	15.1145	0.0131		
100	9.9458	10.4599	0.0517		
110	6.4352	6.7021	0.0415		
120	4.0611	4.1027	0.0102		

$S_{\text{mínimo}} = 78,9, S_{\text{máximo}} = 144, \gamma = 1000, M = 100, N = 200$					
S	$V(S,0)Binom.$	$V(S,0)$	Dif. %	Dif. % global	Iteraciones SMNM
80	21.6059	20.6961	0.0421	0.00256	212
90	14.9187	15.039	0.0111		
100	9.9458	10.3742	0.0431		
110	6.4352	6.6049	0.0264		
120	4.0611	4.0385	0.0056		

$S_{\text{mínimo}} = 78,9, S_{\text{máximo}} = 144, \gamma = 1000, M = 100, N = 250$					
S	$V(S,0)Binom.$	$V(S,0)$	Dif. %	Dif. % global	Iteraciones SMNM
80	21.6059	20.642	0.00446	0.0242	212
90	14.9187	15.0052	0.0058		
100	9.9458	10.3328	0.0389		
110	6.4352	6.6396	0.0318		
120	4.0611	4.00614	0.0001		

$S_{\text{mínimo}} = 78,9, S_{\text{máximo}} = 144, \gamma = 1000, M = 150, N = 150$					
S	$V(S,0)Binom.$	$V(S,0)$	Dif. %	Dif. % global	Iteraciones SMNM
80	21.6059	20.7767	0.0384	0.0317	319
90	14.9187	15.1196	0.0135		
100	9.9458	10.4672	0.0524		
110	6.4352	6.67093	0.0426		
120	4.0611	4.0183	0.00116		

$S_{\text{mínimo}} = 78,9, S_{\text{máximo}} = 144, \gamma = 1000, M = 150, N = 200$					
S	$V(S,0)Binom.$	$V(S,0)$	Dif. %	Dif. % global	Iteraciones SMNM
80	21.6059	20.6967	0.0421	0.0258	318
90	14.9187	15.0890	0.0114		
100	9.9458	10.3814	0.0438		
110	6.4352	6.6120	0.0275		
120	4.0611	4.044	0.00042		

$S_{\text{mínimo}} = 78,9, S_{\text{máximo}} = 144, \gamma = 1000, M = 150, N = 250$					
S	$V(S,0)Binom.$	$V(S,0)$	Dif. %	Dif. % global	Iteraciones SMNM
80	21.6059	20.6425	0.0446	0.0249	319
90	14.9187	15.0103	0.0061		
100	9.9458	10.34	0.0396		
110	6.4352	6.6467	0.0329		
120	4.0611	4.0669	0.0014		

$S_{\text{mínimo}} = 78,9, S_{\text{máximo}} = 144, \gamma = 1000, M = 150, N = 300$					
S	$V(S,0)Binom.$	$V(S,0)$	Dif. %	Dif. % global	Iteraciones SMNM
80	21.6059	20.6064	0.0463	0.0255	319
90	14.9187	14.9579	0.0026		
100	9.9458	10.3124	0.0369		
110	6.4352	6.6701	0.0065		
120	4.0611	4.00822	0.00052		

$S_{\text{mínimo}} = 78,9, S_{\text{máximo}} = 144, \gamma = 1000, M = 200, N = 200$					
S	$V(S,0)Binom.$	$V(S,0)$	Dif. %	Dif. % global	Iteraciones SMNM
80	21.6059	20.6970	0.0421	0.0259	424
90	14.9187	15.01916	0.0116		
100	9.9458	10.3851	0.0442		
110	6.4352	6.6155	0.0280		
120	4.0611	4.0067	0.0035		

$S_{\text{mínimo}} = 78,9, S_{\text{máximo}} = 144, \gamma = 1000, M = 200, N = 250$					
S	$V(S,0)Binom.$	$V(S,0)$	Dif. %	Dif. % global	Iteraciones SMNM
80	21.6059	20.6428	0.0446	0.0253	425
90	14.9187	15.0129	0.0063		
100	9.9458	10.3437	0.04		
110	6.4352	6.6503	0.0334		
120	4.0611	4.0697	0.0021		

$S_{\text{mínimo}} = 78,9, S_{\text{máximo}} = 144, \gamma = 1000, M = 200, N = 300$					
S	$V(S,0)Binom.$	$V(S,0)$	Dif. %	Dif. % global	Iteraciones SMNM
80	21.6059	20.6067	0.0462	0.0258	425
90	14.9187	14.9605	0.0028		
100	9.9458	10.3161	0.0372		
110	6.4352	6.6737	0.03371		
120	4.0611	4.085	0.0059		

$S_{\text{mínimo}} = 78,9, S_{\text{máximo}} = 144, \gamma = 1000, M = 200, N = 350$					
S	$V(S,0)_{\text{Binom.}}$	$V(S,0)$	Dif. %	Dif. % global	Iteraciones SMNM
80	21.6059	20.5853	0.0472	0.0234	425
90	14.9187	14.9661	0.0032		
100	9.9458	10.2892	0.0345		
110	6.4352	6.66237	0.0293		
120	4.0611	4.0520	0.0022		

$S_{\text{mínimo}} = 78,9, S_{\text{máximo}} = 144, \gamma = 1000, M = 300, N = 300$					
S	$V(S,0)_{\text{Binom.}}$	$V(S,0)$	Dif. %	Dif. % global	Iteraciones SMNM
80	21.6059	20.6070	0.0462	0.0262	638
90	14.9187	14.9630	0.003		
100	9.9458	10.3198	0.0276		
110	6.4352	6.6773	0.0376		
120	4.0611	4.0878	0.0066		

A medida que se incrementa el valor de γ , como se muestra en la tabla 7.2, la diferencia porcentual se mantiene estable y con un valor aproximado de 2,57 %, para este ejemplo en particular se observa que la diferencia porcentual se incrementa en un orden de $10e^{-4}$ siendo este valor imperceptible y por lo cual dicho incremento no se considera como significativo para nuestro método.

$S_{\text{mínimo}} = 78,9, S_{\text{máximo}} = 144, M = 100, N = 200$		
γ	Diferencia Porcentual	No. iteraciones totales de SNNM
1	0.0256	200
20	0.0256	206
50	0.0256	210
100	0.0256	211
500	0.0256	212
1000	0.0256	212
5000	0.0257	213
10000	0.0257	218
50000	0.0257	221
100000	0.0257	222
500000	0.0257	239
1000000	0.0257	241

tabla 7.2: Efecto de la variación de γ sobre la diferencia % e iteraciones del SNNM

El número de iteraciones es directamente proporcional al incremento del factor de penalización γ , a su vez, se puede observar que la cardinalidad de los conjuntos activos disminuye

a medida de que este aumenta, lo que verifica que nuestra solución es una mejor aproximación de la solución verdadera a medida que γ tiende al infinito. Como se evidencia en la tabla 7.3 para un valor de $\gamma = 1$ la cardinalidad de los conjuntos activos para $t = 10$ (por ejemplo) es de 24 elementos mientras que para $\gamma = 1000000$ dicha cardinalidad es de 12 elementos para el mismo tiempo.

$S_{\text{mínimo}} = 78,9, S_{\text{máximo}} = 144, M = 100, N = 200$												
γ	1	20	50	100	500	1000	5000	10000	50000	100000	500000	1000000
i=2	50	50	50	50	50	50	49	48	47	47	46	46
i=3	46	46	46	46	46	45	43	42	40	40	39	39
i=4	42	42	42	42	42	40	38	36	35	34	34	33
i=5	39	39	39	38	38	36	33	32	30	29	29	29
i=6	36	36	36	35	35	33	29	28	26	25	25	25
i=7	33	33	33	32	32	29	25	24	22	22	21	21
i=8	30	30	30	29	29	26	22	21	19	18	18	18
i=9	27	27	27	27	27	23	19	18	16	15	15	15
i=10	24	24	24	24	24	20	16	15	13	12	12	12
i=11	21	21	21	21	21	17	13	12	10	10	9	9
i=12	18	18	18	17	17	14	10	9	7	7	7	6
i=13	15	14	14	14	14	10	7	6	5	5	4	4
i=14	11	11	10	10	10	6	4	3	2	2	2	2
i=15	6	6	6	6	5	2	0	0	0	0	0	0
i=16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

tabla 7.3: Efecto de la variación de γ sobre el tamaño de los conjuntos activos

A pesar de las bondades que presenta nuestro sistema de aproximación se observa que al extender el dominio Ω a \mathbb{R} se producen ligeros desajustes con respecto a los valores de la solución referencial, esto ocurre especialmente al extender la frontera izquierda presentándose mayor similitud en los resultados al extender la frontera derecha, como se detalla a continuación en la tabla 7.4 y tabla 7.5. De igual manera se observa que en estos casos cuando se mantiene el mallado espacial y se incrementa el número de nodos en el mallado temporal la diferencia se incrementa; sin embargo, este incremento es de orden de $1e^{-3}$ por lo que se considera que si bien presenta esta falencia, la misma tiene un impacto mínimo en la aproximación de la solución.

Variación de límites en la frontera. Efectos sobre la diferencia porcentual

$S_{máximo} = 144, h = 0,006, \gamma = 1000$				
$S_{mínimo}$	N	Dif. Porcentual $M = 50$	Dif. Porcentual $M = 100$	Dif. Porcentual $M = 200$
78.9	100	0.0306	0.0327	0.0338
70	121	0.0532	0.0545	0.0555
60	146	0.0611	0.0631	0.0641
50	176	0.0597	0.0616	0.0626
40	214	0.0622	0.0642	0.0652
30	262	0.0621	0.0640	0.0650
20	330	0.0626	0.0645	0.0654
10	445	0.0614	0.0633	0.0643
1	829	0.0602	0.0632	0.0643

Tabla 7.4: Variación de la frontera izquierda

$S_{mínimo} = 144, h = 0,006, \gamma = 1000$				
$S_{máximo}$	N	Dif. Porcentual $M = 50$	Dif. Porcentual $M = 100$	Dif. Porcentual $M = 200$
144	100	0.0306	0.0327	0.0338
150	108	0.0351	0.0371	0.0381
160	118	0.0458	0.0476	0.0485
170	128	0.0482	0.0498	0.0507
180	137	0.0509	0.0525	0.0533
190	147	0.0469	0.0485	0.0493
200	156	0.0454	0.047	0.0478
250	193	0.0467	0.0483	0.0491
300	223	0.048	0.0496	0.0504
500	308	0.0485	0.0501	0.0509
1000	424	0.048	0.0496	0.0504

Tabla 7.5: Variación de la frontera derecha

A su vez se observa que el radio de convergencia tiende a cero en todos los pasos temporales, de donde podemos concluir que la convergencia es super lineal evidenciándose una ventaja en cuanto a la velocidad de convergencia pues en [H1] al resolver el mismo ejemplo por el método de multi-mallado monótono para discretizaciones B-spline se muestran tasas de convergencia de 0,27, es decir, converge más lentamente.

Esto se puede evidenciar en la siguiente tabla en la cual se presenta detallados para cada paso temporal los valores del residuo⁴ así como el radio de convergencia final (T C) para cada tiempo.

⁴el residuo está definido como $R = \|u_{k+1}^i - u_k^i\|$

$S_{\text{mínimo}} = 78,9, S_{\text{máximo}} = 144, \gamma = 1000$ Iteraciones totales $SNNM = 212$										
M	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Res.	0	0.0254	0.0447	0.0616	0.0770	0.0913	0.1049	0.1179	0.1304	0.1425
	0	0.0002	0.0003	0.0004	0.0004	0.0003	0.0003	0.0002	0.0002	0.0001
	0	0	0	$9,2e^{-7}$	$4,4e^{-7}$	0	$4,4e^{-7}$	$1,36e^{-6}$	0	0
T C	0	0	0	0.0023	0.0011	0	0.0015	0.0068	0	0
M	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Res.	0.1542	0.1656	0.1767	0.1876	0.1982	0.2086	0.2189	0.2289	0.2388	0.2486
	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0	0	0	0	0
	0	0	0	0.0000	0	0	0	0	0	0
T C	0	0	0	0.0000	0.0000	0	0	0	0	0
M	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Res.	0.2582	0.2676	0.2769	0.2861	0.2952	0.3042	0.3130	0.3217	0.3304	0.3389
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
T C	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
M	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
Res.	0.3473	0.3556	0.3639	0.3720	0.3800	0.3880	0.3958	0.4036	0.4113	0.4189
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
T C	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
M	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
Res.	0.4264	0.4338	0.4412	0.4484	0.4556	0.4627	0.4698	0.4767	0.4836	0.4904
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
T C	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
M	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
Res.	0.4972	0.5039	0.5105	0.5170	0.5235	0.5299	0.5362	0.5424	0.5486	0.5548
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
T C	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
M	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
Res.	0.5608	0.5668	0.5787	0.5728	0.5845	0.5903	0.5960	0.6016	0.6072	0.6127
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
T C	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
M	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
Res.	0.6182	0.6236	0.6290	0.6343	0.6395	0.6447	0.6499	0.6549	0.6600	0.6650
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
T C	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
M	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
Res.	0.6699	0.6748	0.6796	0.6844	0.6892	0.6939	0.6985	0.7031	0.7076	0.7121
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
T C	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
M	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
Res.	0.7166	0.7210	0.7254	0.7297	0.7340	0.7382	0.7424	0.7466	0.7507	0.7588
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
T C	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

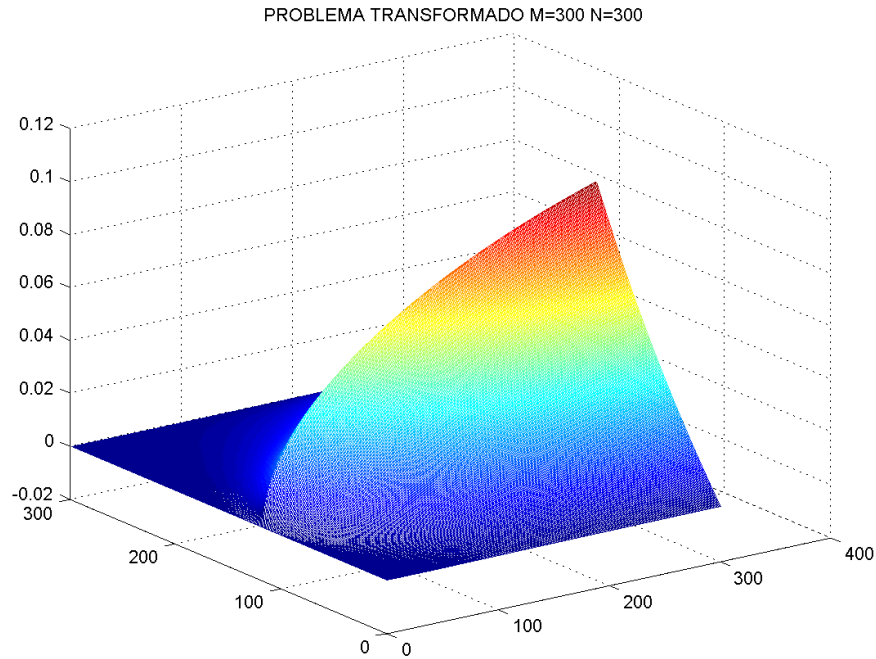


Figura 7.1: Ejemplo 1: Resolución del problema en sus variables transformadas

A continuación se presentan gráficos que muestran la solución del problema transformado, la solución del problema en sus variables originales a través del tiempo y un gráfico que muestra la Solución del problema $V(S, 0)$.

En el gráfico 7.1 se presenta la solución obtenida mediante nuestro esquema de aproximación en las variables transformadas $u(x, \tau)$; el cual, como se puede observar en el dibujo es mayor que cero en $[x_{\text{mín}}, x_{\text{máx}}] \times [0, \frac{\sigma^2}{2}T]$. En el gráfico 7.2 se presenta el Multiplicador de Lagrange el cual, como se había evidenciado en la teoría es siempre mayor o igual a cero y a su vez se puede observar que $(u, \lambda) = 0$.

En el gráfico 7.3 se presentan los conjuntos activos e inactivos, se puede observar que la cardinalidad de los mismos va disminuyendo a medida que se va avanzando en el mallado temporal, siendo a partir del nodo 50 este valor idénticamente cero.

En el gráfico 7.4 se presenta la solución al problema de valoración en sus variables originales $V(S, t)$ y en el gráfico 7.5 se presenta la imagen de la solución en sus variables originales pero para el tiempo 0.

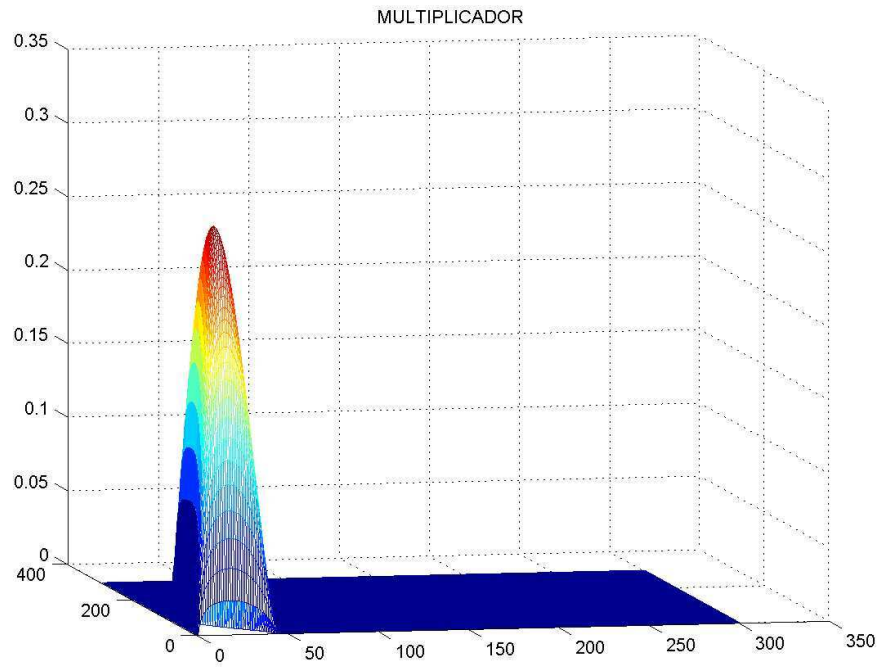


Figura 7.2: Ejemplo 1: Multiplicador de Lagrange

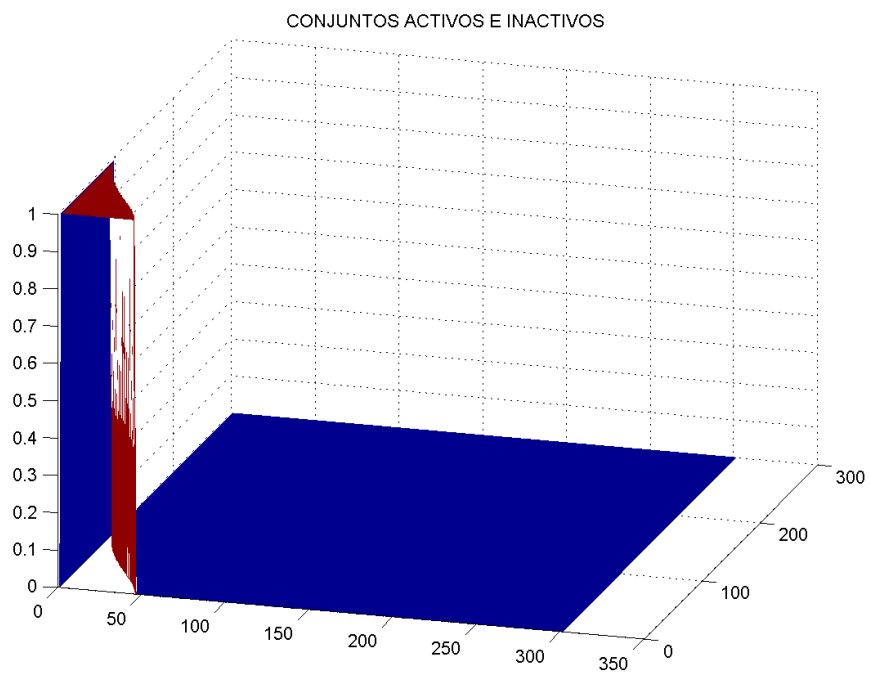


Figura 7.3: Ejemplo 1: Conjuntos Activos e Inactivos

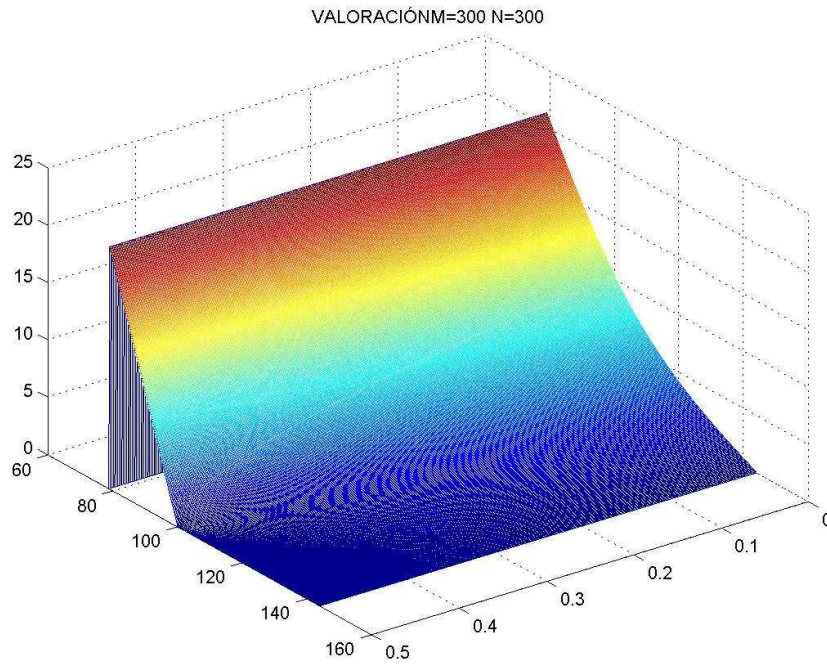


Figura 7.4: Ejemplo 1: Solución del problema en sus variables originales

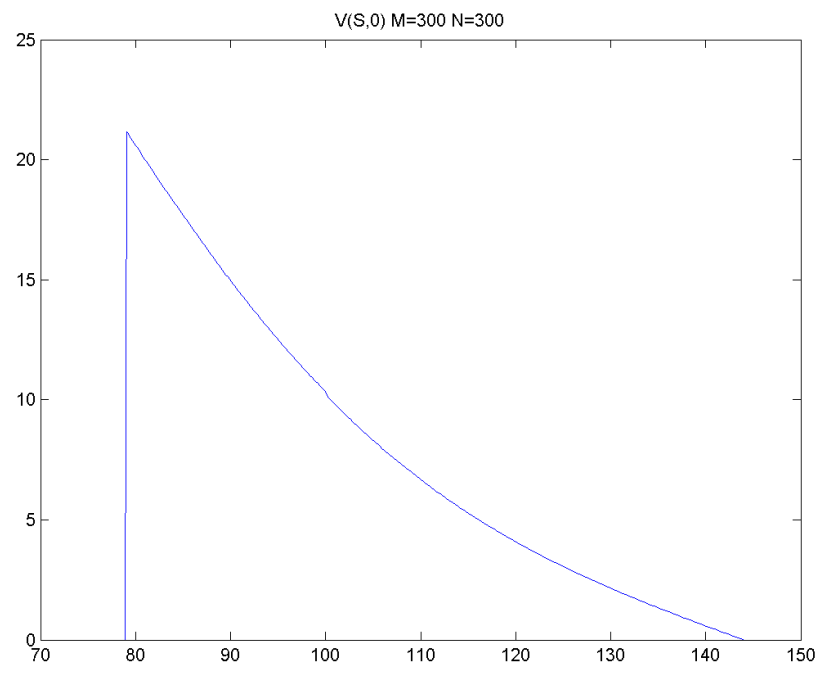


Figura 7.5: Ejemplo 1: Solución del problema en $V(S,0)$

7.2. Segundo Experimento

Este experimento consiste en considerar una opción americana de venta con tiempo de madurez $T = 1$ año, con volatilidad $\sigma = 0,2$, tasa de retorno libre de riesgo $r = 0,04\%$ y precio de ejercicio $K = 100$ USD, dicho ejemplo se exhibe en [AP], para el cual se profundizará en aspectos numéricos como número de iteraciones que se efectúan en cada paso temporal al variar el mallado espacial para un M fijo. Luego se evidencia, mediante tablas y gráficamente, cómo se comportan los conjuntos activos e inactivos en el experimento al variar el refinamiento de las mallas así como el factor γ .

Empecemos observando en la tabla 7.6 que el número de iteraciones del Algoritmo SNNM es independiente del mallado espacial, en la cual se observa que para $M=10$ y al variar N el número total de iteraciones es de 27 en casi todos los casos, variando únicamente en una iteración en $N = 100$; también se puede observar que cada problema estático se resuelve en un máximo de 4 iteraciones.

$S_{mínimo} = 78,9, S_{máximo} = 144, \gamma = 1000$												
M	N	# t. it.	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$	$i = 6$	$i = 7$	$i = 8$	$i = 9$	$i = 10$	$i = 11$
10	100	26	4	3	4	3	2	2	2	2	2	2
10	150	27	4	4	4	3	2	2	2	2	2	2
10	200	27	4	4	4	3	2	2	2	2	2	2
10	250	27	4	4	4	3	2	2	2	2	2	2

tabla 7.6: Efecto del variación del número de iteraciones sobre iteraciones del SNNM

Haciendo variar el parámetro de penalización γ se observa, en la tabla 7.7, que el número de iteraciones totales es directamente proporcional al incremento de γ . En la tabla 7.8 se puede observar que a medida que se incrementa γ y se avanza en la partición temporal la cardinalidad de los conjuntos activos disminuye, lo que indica que nuestra solución es una mejor aproximación a medida que γ tiende al infinito.

$S_{\text{mínimo}} = 78,9, S_{\text{máximo}} = 144, M = 100, N = 200$	
γ	No. iteraciones totales SNNM
1	200
20	232
50	240
100	243
500	245
1000	245
5000	246
10000	256
50000	287
100000	296
500000	329
1000000	333

tabla 7.7: Efecto de la variación del factor de penalización γ sobre el número de iteraciones totales del SNNM

$S_{\text{mínimo}} = 78,9, S_{\text{máximo}} = 144, M = 100, N = 200$												
γ	1	20	50	100	500	1000	5000	10000	50000	100000	500000	1000000
i=2	61	61	61	61	61	61	60	60	59	59	58	58
i=3	58	58	58	58	58	58	57	56	55	54	54	54
i=4	56	56	56	56	56	56	54	53	51	51	50	50
i=5	54	54	54	54	54	53	51	50	48	48	47	47
i=6	53	53	53	52	52	51	49	48	46	45	45	45
i=7	51	51	51	51	50	50	47	45	44	43	43	43
i=8	50	50	50	50	49	48	45	43	42	41	41	40
i=9	48	48	48	48	47	46	43	41	40	39	39	39
i=10	47	47	47	47	46	45	41	40	38	37	37	37
i=11	46	46	46	46	45	43	39	38	36	36	35	35
i=12	45	45	45	45	43	42	38	36	35	34	34	33
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
i=52	6	6	5	5	2	0	0	0	0	0	0	0
i=53	4	4	4	3	1	0	0	0	0	0	0	0
i=54	3	2	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0
i=55	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

tabla 7.8: Efectos de la variación de γ sobre el tamaño de los conjuntos activos.

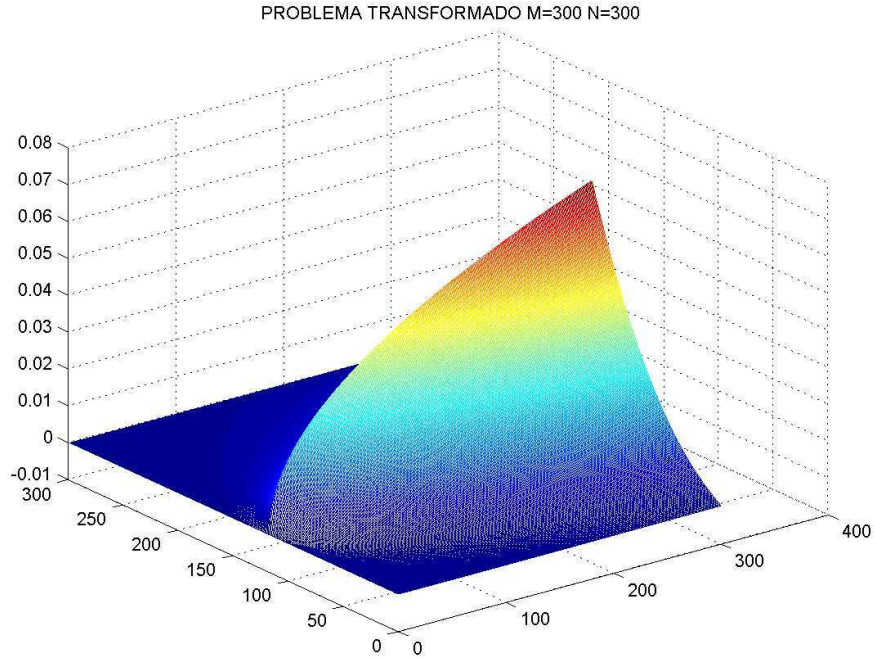


Figura 7.6: Ejemplo 2: Resolución del problema en sus variables transformadas.

En el gráfico 7.6 se presenta la solución obtenida mediante nuestro esquema de aproximación en las variables transformadas $u(x, \tau)$ y en el gráfico 7.7 se presenta el multiplicador de Lagrange obtenido; en los mismos se puede observar, al igual que en el ejemplo 1, que cuando $u(x, \tau)$ es distinto de cero, $\lambda(x, \tau) = 0$ y viceversa, con lo que se verifica que $(u, \lambda) = 0$.

En el gráfico 7.8 se presentan los conjuntos activos e inactivos, de la información presentada en la tabla 7.8 la cardinalidad de los conjuntos activos va disminuyendo a medida que se avanza en la partición temporal, en este gráfico podemos observar que a partir del nodo 56 la cardinalidad tiene un valor idénticamente cero.

El gráfico 7.9 presenta la solución al problema de valoración en sus variables originales $V(S, t)$. En el gráfico 7.10 se presenta la imagen de la solución en las variables originales pero para el tiempo 0.

En el gráfico 7.11 se presenta la diferencia entre $V(S, t)$ y $V(S, 0)$.

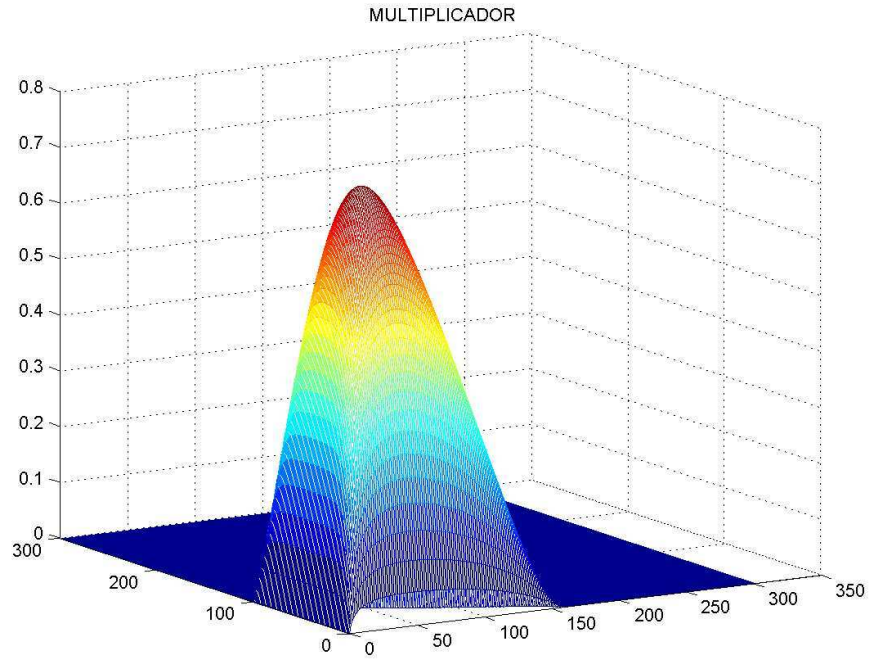


Figura 7.7: Ejemplo 2: Multiplicador de Lagrange.

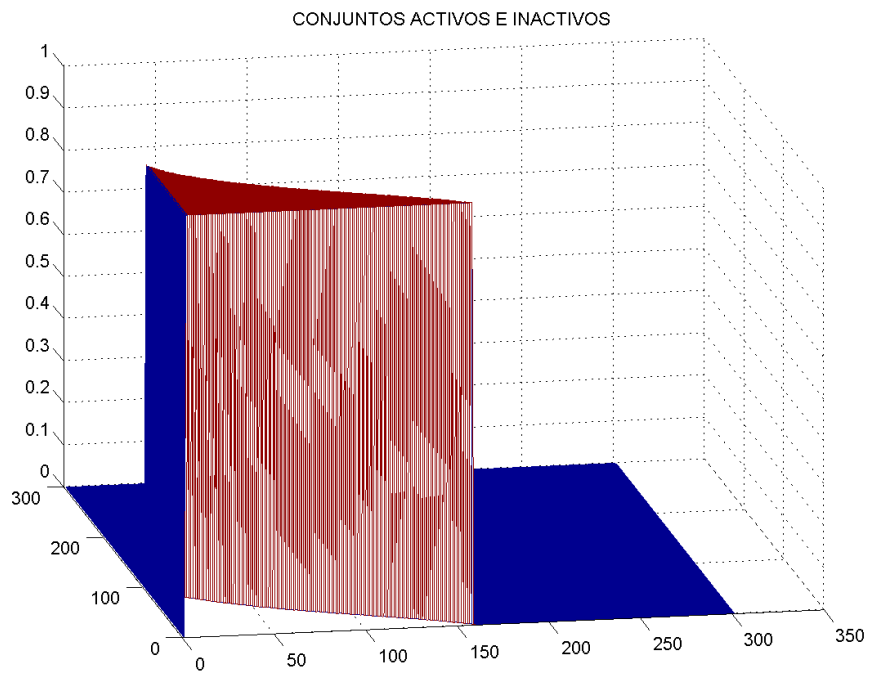


Figura 7.8: Ejemplo 2: Conjuntos Activos e Inactivos.

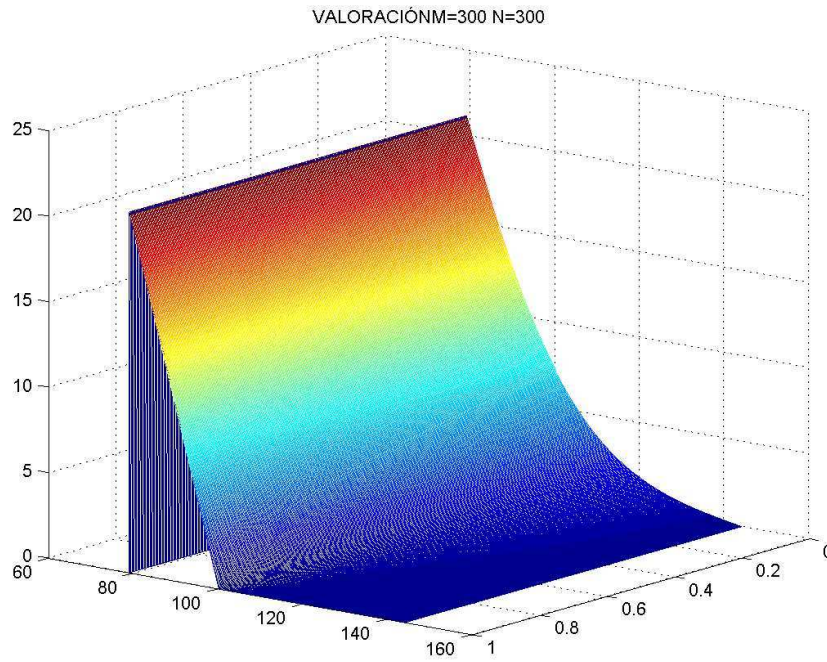


Figura 7.9: Ejemplo 2: Solución del problema en sus variables originales.

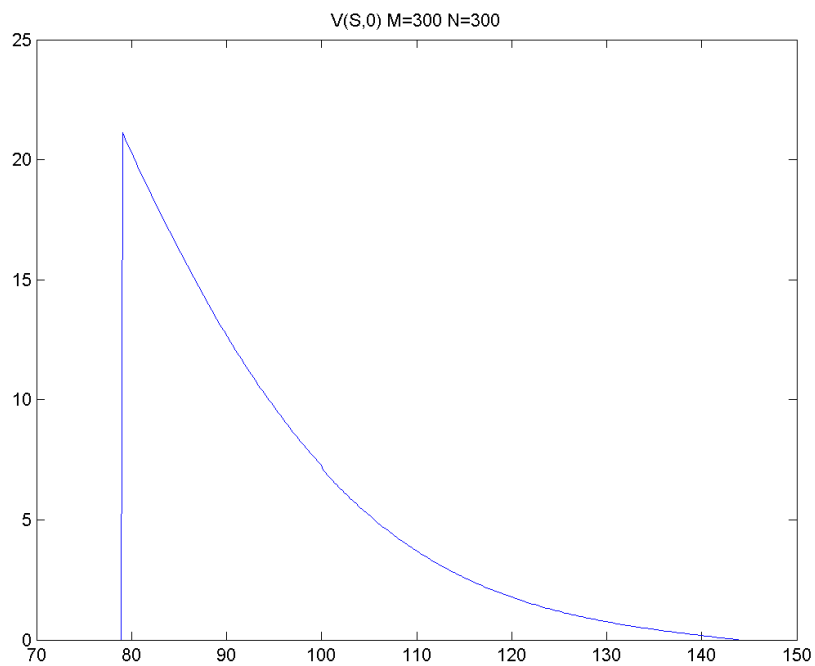


Figura 7.10: Ejemplo 2: Solución del problema en $V(S, 0)$

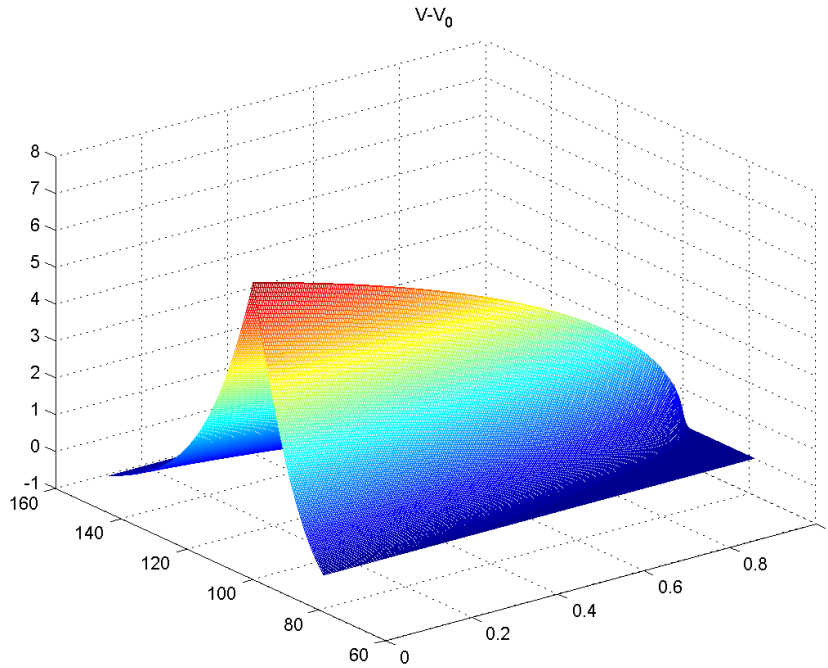


Figura 7.11: Ejemplo 2: $V(S, t) - V(S, 0)$

7.3. Tercer Experimento

Éste experimento, tomado de [KIK], consiste en considerar una Opción Americana de Venta con tiempo de madurez $T = 5$ años, con volatilidad $\sigma = 0,3$, tasa de retorno libre de riesgo $r = 0,06\%$ y precio de ejercicio $K = 10$ USD. Se hará un estudio del efecto en el número de iteraciones de nuestro método al variar el parámetro de penalización γ . Luego se hace un estudio de tasa de convergencia y residuos y se evidencia cómo se comportan los conjuntos activos e inactivos en el experimento.

Haciendo variar el parámetro de penalización γ se observa en la tabla 7.9 que el número de iteraciones es directamente proporcional al incremento del factor de penalización γ , a su vez, se puede observar en la tabla 7.10 que la cardinalidad de los conjuntos activos disminuye a medida de que el parámetro de penalización tiende al infinito, con lo que se puede concluir que a medida que se incrementa γ nuestra solución se aproxima de mejor manera a la solución real.

Se puede observar que para un tiempo fijo (por ejemplo $i = 17$) el radio de convergencia tiende a cero conforme la evolución de las iteraciones, como se muestra en la figura 7.12, con lo que se puede evidenciar que la convergencia es super lineal.

$S_{\text{mínimo}} = 5, S_{\text{máximo}} = 15, M = 100, N = 200$	
γ	No. iteraciones totales SNNM
1	286
20	300
50	300
100	300
500	380
1000	396
5000	458
10000	509
50000	636
100000	755
500000	786
1000000	788

tabla 7.9: Efecto de la variación del factor de penalización γ sobre el número de iteraciones totales del SNNM

$S_{\text{mínimo}} = 5, S_{\text{máximo}} = 15, M = 100, N = 200$												
γ	1	20	50	100	500	1000	5000	10000	50000	100000	500000	1000000
i=2	102	102	102	102	101	100	98	98	97	97	96	96
i=3	98	98	98	97	95	94	92	91	90	90	90	89
i=4	95	95	95	94	91	89	87	86	85	85	84	84
i=5	93	92	92	91	87	85	82	81	80	80	80	80
i=6	91	90	89	88	84	82	79	78	77	77	76	76
i=7	89	88	87	86	81	78	75	75	74	73	73	73
i=8	87	86	85	83	78	76	72	72	71	70	70	70
i=9	86	85	83	81	75	73	70	69	68	68	68	68
i=10	84	83	82	79	73	70	67	67	66	65	65	65
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
i=96	20	18	17	16	13	12	10	9	8	8	8	8
i=97	20	18	17	15	13	12	10	9	8	8	8	8
i=98	19	18	16	15	13	12	9	9	8	8	7	7
i=99	19	17	16	15	12	11	9	9	8	7	7	7
i=100	19	17	16	14	12	11	9	8	8	7	7	7
i=101	18	16	15	14	12	11	9	8	7	7	7	7
i=102	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

tabla 7.10: Efectos de la variación de γ sobre el tamaño de los conjuntos activos

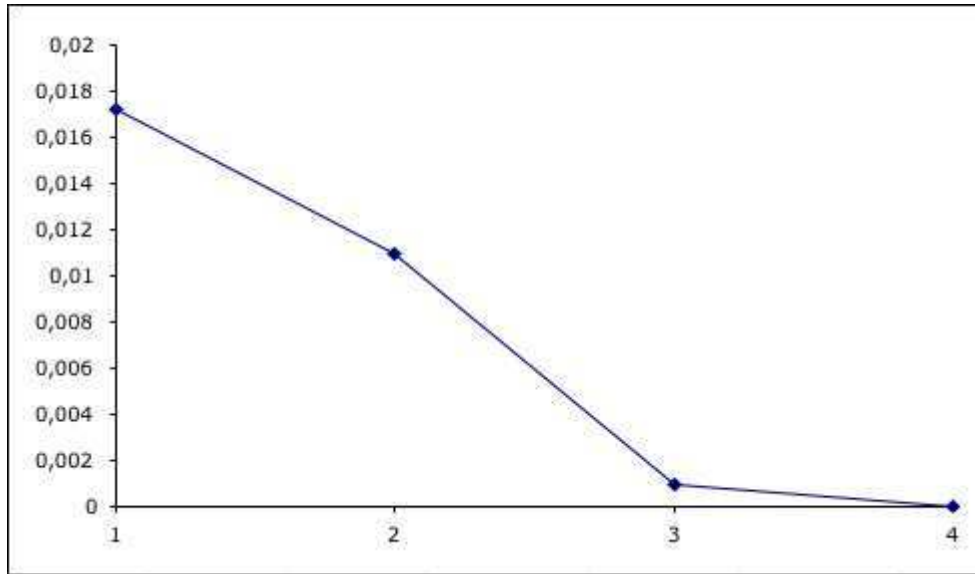


Figura 7.12: Ejemplo 3: Radio de convergencia para $i = 17$

En la figura 7.13 se muestra la solución del problema en sus variables transformadas $u(x, \tau)$, como se puede observar dicha solución siempre es mayor o igual a cero, cumpliendo así con las condiciones de nuestro sistema de optimalidad. Se puede observar como la penalización influye sobre el multiplicador de Lagrange en la figuras 7.14 y 7.15, así, $\lambda(x, \tau)$ es mayor que cero cuando x es elemento del conjunto Activo y es cero cuando x es elemento del conjunto Inactivo.

En el gráfico 7.16 se presenta la solución al problema de valoración en sus variables originales, en el gráfico 7.17 se muestra la solución al problema de valoración en el tiempo 0.

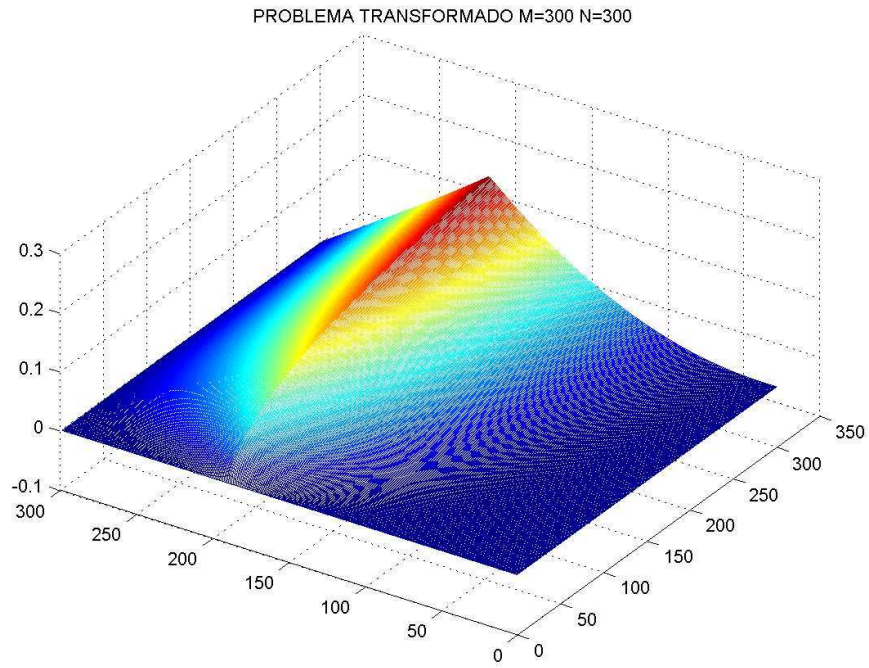


Figura 7.13: Ejemplo 3: Resolución del problema en sus variables transformadas.

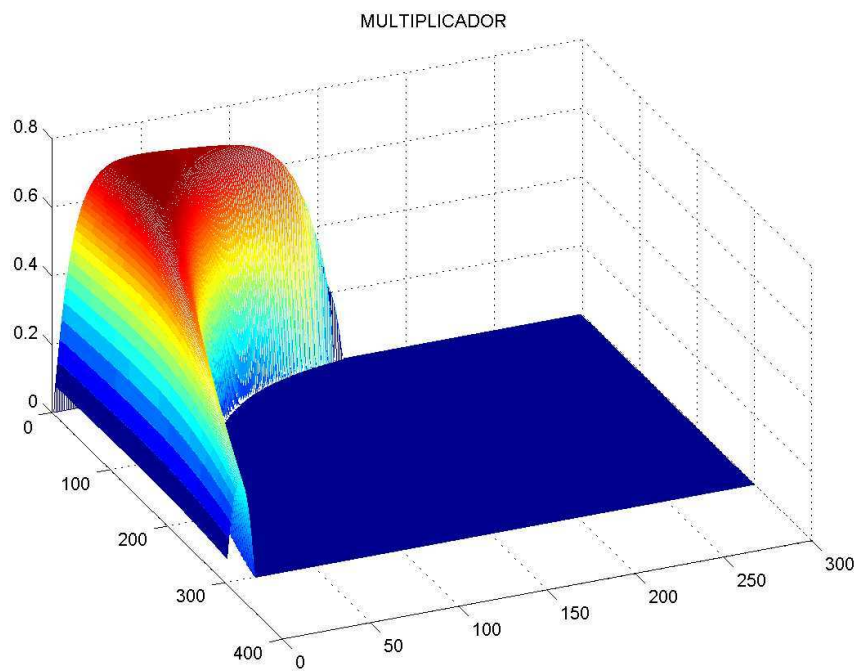


Figura 7.14: Ejemplo 3: Multiplicador de Lagrange.

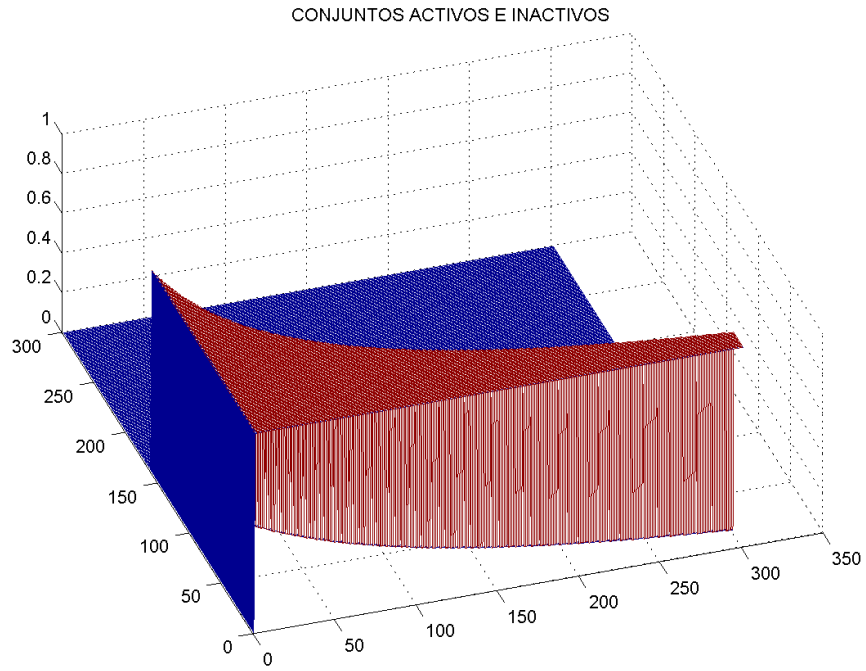


Figura 7.15: Ejemplo 3: Conjuntos activos e inactivos.

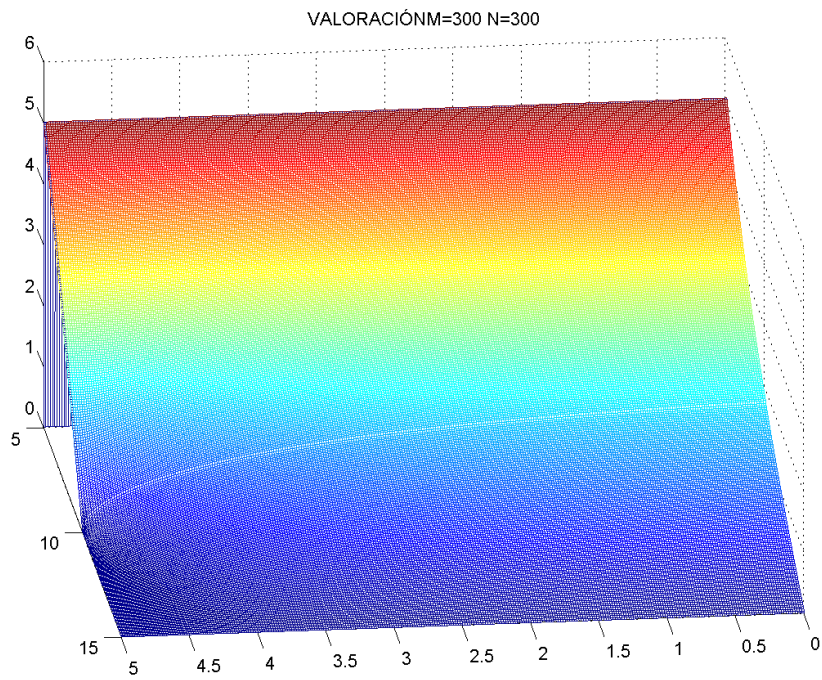


Figura 7.16: Ejemplo 3: Solución del problema en sus variables originales.

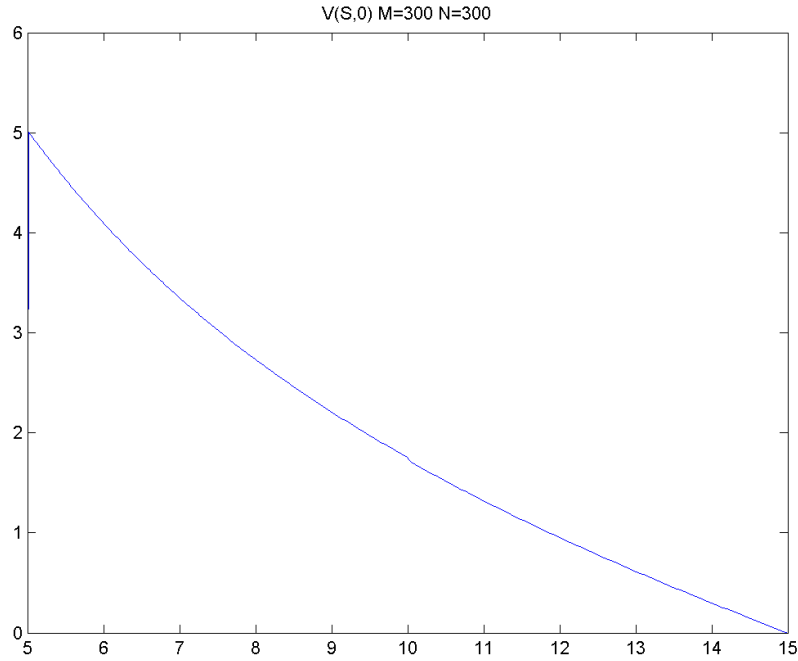


Figura 7.17: Ejemplo 3: Solución del problema en $V(S, 0)$.

7.4. Cuarto Experimento

Nuestro último experimento consiste en considerar una Opción Americana de Venta que modele la venta de un barril de petróleo con tiempo de madurez $T = 2$ años, con volatilidad $\sigma = 0,9$, tasa de retorno libre de riesgo $r = 0,07\%$ y precio de ejercicio $K = 38$ USD. Se hará un estudio del efecto del número de iteraciones totales al variar el parámetro de penalización γ . Luego se evidencia cómo se comportan los conjuntos activos e inactivos en el experimento.

Como se observa en la tabla 7.11, el número de iteraciones es directamente proporcional al incremento del factor de penalización γ , el cual estabiliza el número de iteraciones totales a partir de $\gamma = 50000$, lo que nos indica que existe un factor de penalización a partir del cual se garantiza que el algoritmo de conjuntos activos e inactivos converge de la mejor manera posible a la solución.

$S_{\text{mínimo}} = 15, S_{\text{máximo}} = 70, M = 100, N = 200$	
γ	No. iteraciones SNNM
1	209
20	211
50	211
100	213
500	219
1000	221
5000	233
10000	238
50000	265
100000	272
500000	273
1000000	273
5000000	273
10000000	273
50000000	273
100000000	273

tabla 7.11: Efecto de la variación del factor de penalización γ sobre el número de iteraciones del SNNM.

A su vez, en la tabla 7.12 se puede observar que la cardinalidad de los conjuntos activos disminuye a medida de que el parámetro de penalización aumenta, en este ejemplo en particular se puede observar que máximo para 13 nodos en el mallado temporal tienen conjuntos activos no vacíos lo que indica que es una buena aproximación a la solución real.

$S_{\text{mínimo}} = 15, S_{\text{máximo}} = 70, M = 100, N = 200$												
γ	1	20	50	100	500	1000	5000	10000	50000	100000	500000	1000000
i=2	73	73	72	72	69	68	67	66	66	65	65	65
i=3	66	65	64	63	59	57	55	54	54	54	53	53
i=4	60	58	57	55	50	48	46	45	45	45	44	44
i=5	54	52	50	48	42	41	38	38	37	37	37	37
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
i=11	21	18	15	13	10	9	7	6	6	6	5	5
i=12	13	11	8	7	4	4	3	2	2	2	2	1
i=13	4	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
i=14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

7.12: Efectos de la variación de Γ sobre el tamaño de los conjuntos activos

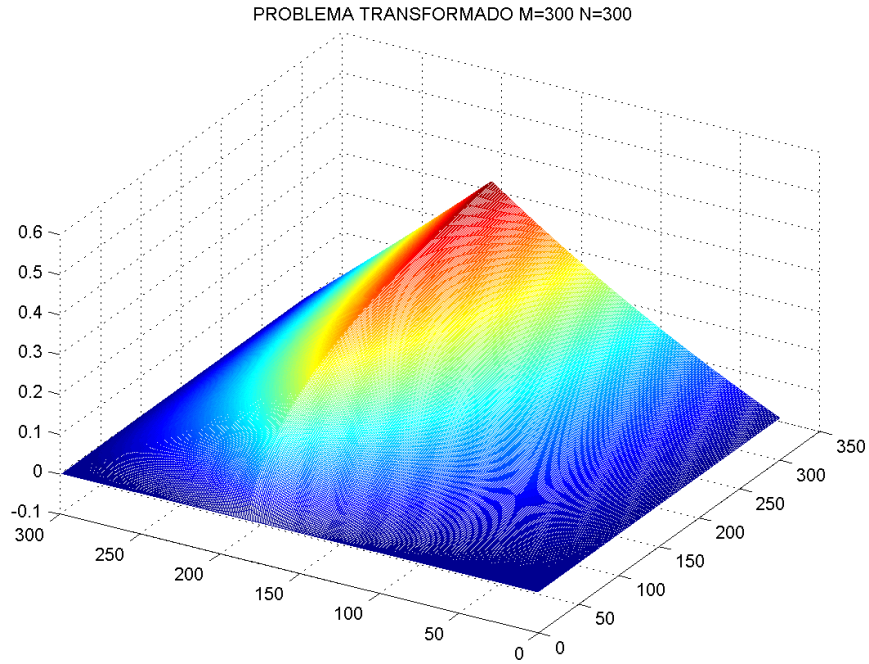


Figura 7.18: Ejemplo 4: Solución del problema en sus variables transformadas.

A continuación se presenta en la figura 7.17 la solución del problema en las variables originales, en la figura 7.18 se presenta el gráfico del multiplicador de Lagrange $\lambda(u, \tau)$

Como se observó en la tablas, para este caso en particular los conjuntos activos son no vacíos máximo para 13 puntos en el mallado temporal, este hecho se puede verificar en el gráfico 7.19.

En el gráfico 7.20 se presenta la solución del problema en sus variables originales así como en el gráfico 7.21 se presenta la imagen de la solución de sus variables originales pero para tiempo cero.

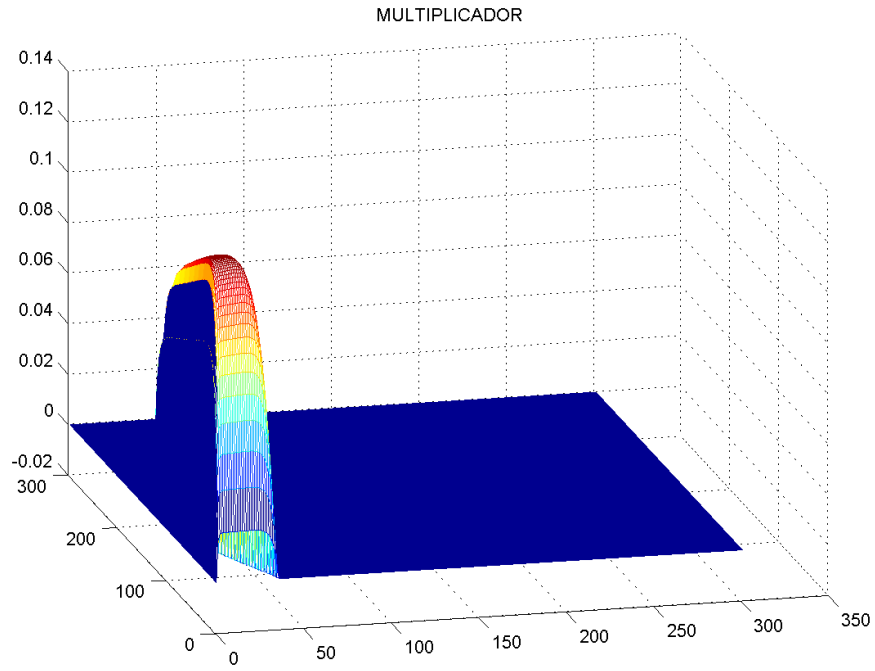


Figura 7.19: Ejemplo 4: Multiplicador de Lagrange.

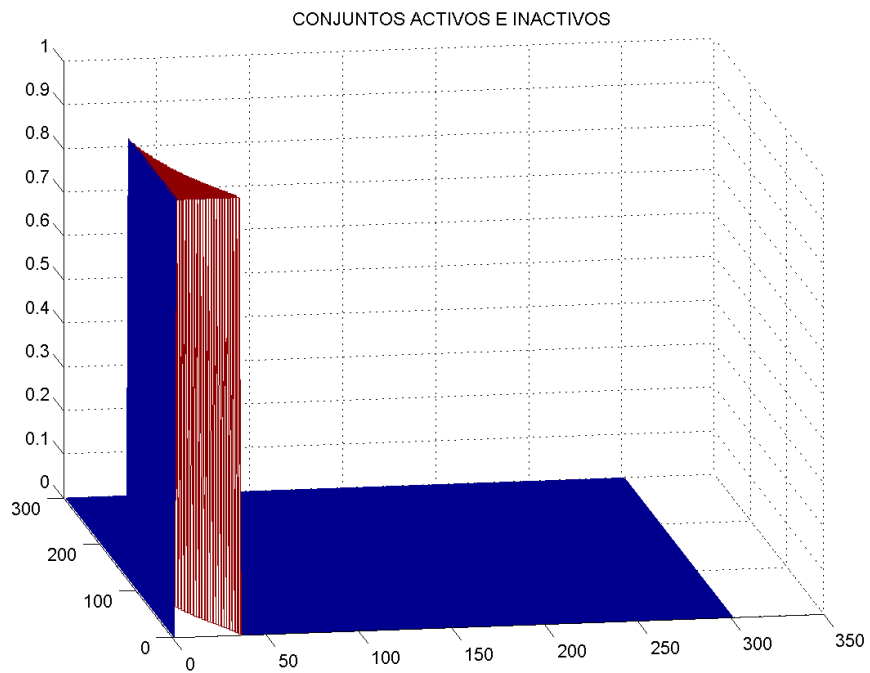


Figura 7.20: Ejemplo 4: Conjuntos activos e inactivos.

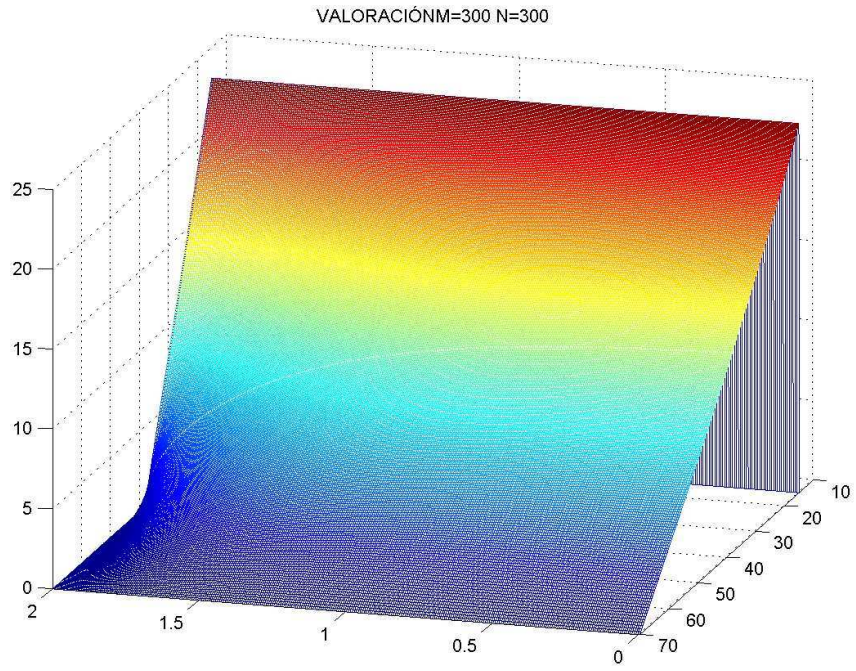


Figura 7.21: Ejemplo 4: Solución del problema en sus variables originales.

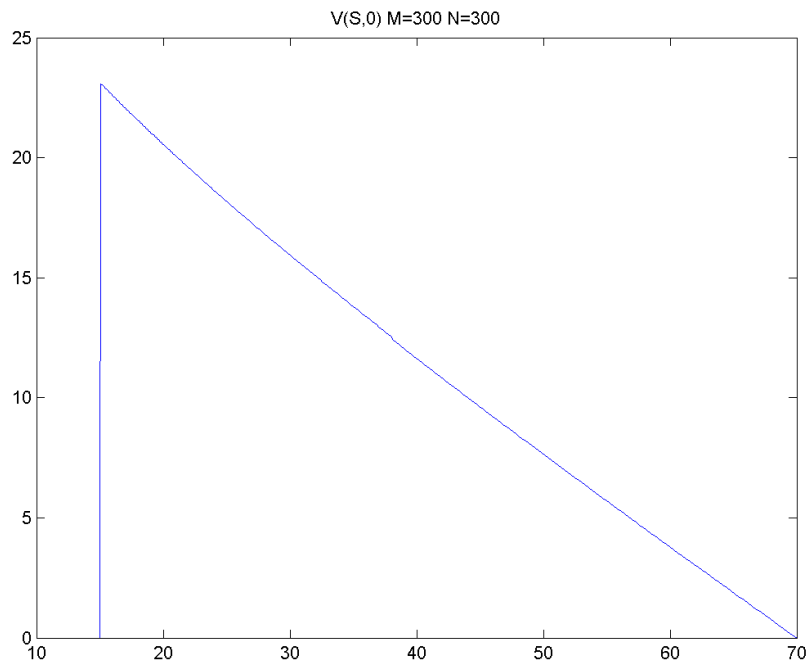


Figura 7.22: Ejemplo 4: Solución del problema en $V = (S, 0)$.

Capítulo 8

Conclusiones

1. El problema a frontera libre (1) está determinado por su condición de obstáculo, el cual determina si la valoración está modelada por la ecuación de Black & Scholes o simplemente por su rentabilidad. Usando cambios de variable, las condiciones del problema se expresaron como una ecuación del calor a valor inicial con condiciones tipo Dirichlet y una función de rentabilidad transformada con condición de obstáculo tipo $u \geq 0$.
2. El problema a frontera libre transformado puede ser expresado como una desigualdad variacional sobre el convexo cerrado no vacío que contiene las condiciones iniciales y de frontera cuya solución débil existe y es única. La técnica de regularización elíptica nos dio un marco apropiado para la demostración de dicho hecho. La existencia también de una solución fuerte que se obtiene como un límite de los problemas regularizados nos da la regularidad necesaria para continuar con el estudio.
3. Dada la suficiente regularidad de $\frac{\partial u^*}{\partial \tau}$, siendo u^* la solución fuerte al problema, fue posible la introducción de un multiplicador de Lagrange con propiedades de regularidad apropiadas para determinar el sistema de complementariedad (P). Para obtener a partir del sistema de complementariedad una función semi suave que nos permita obtener una derivada generalizada para aplicar el método de Newton Generalizado se necesitó regularizar el problema, generando a partir de esto una familia de problemas regularizados y justificar la aplicación del esquema aproximativo.
4. Las soluciones a los problemas regularizados convergen a la solución fuerte de modo que

$$\|u^*(\tau) - u_\gamma(\tau)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{M}{\gamma} \text{ con } \gamma \rightarrow \infty.$$

Este proceso de convergencia es muy importante para la valoración de una opción, pues permite encontrar la superficie $\mathcal{S}(t) = \{V(S, t) = \mathcal{H}(S, t)\}$ que define el tiempo óptimo de parada. Esto es, podemos aproximar $\mathcal{S}(t)$ con tasa $\frac{1}{\gamma}$ tomando $\mathcal{S}(t) = \{\lambda_\gamma = 0\}$.

5. Al expresarse el sistema de complementariedad (P') en función de los conjuntos activos e inactivos asociados a la condición de obstáculo y su respectivo multiplicador de Lagrange, y realizando una semi-discretización temporal es posible plantear un algoritmo de Conjuntos Activos equivalente al método de Newton Semi-suave.
6. La equivalencia para nuestro problema de la estrategia de Conjuntos Activos y el método de Newton Semi-suave permite garantizar la convergencia súper-lineal del Algoritmo para cada paso en la semi-discretización temporal. Luego, el asumir un esquema Euler-implícito en tal semi-discretización temporal nos garantiza la convergencia del Algoritmo
7. La simulación obtenida presenta una eficiencia numérica considerable. Después de realizar varios experimentos numéricos se observa que la diferencia porcentual producida al comparar el resultado obtenido por nuestro método y el obtenido por el método binomial siempre está bajo el 5%.
8. Según lo expuesto en los ejemplos del capítulo 7, en nuestro esquema aproximativo cada problema estático se resuelve en aproximadamente 3 pasos, lo cual implica que el problema global se resolverá en aproximadamente $3M$ donde M denota el número de particiones en el espacio temporal. De lo anterior podemos comparar este número con el número de iteraciones efectuadas por el método binomial para resolver el mismo problema el cual es de orden de N^2 y con el método de multimallado monótono mostrado en [H] el cual es del orden MN .
9. A medida que el factor de penalización se incrementa, la cardinalidad de los conjuntos activos disminuye con lo que se concluye que mientras mayor sea el valor de γ de mejor manera se aproximará la solución de nuestro problema a la solución real.
10. De manera general, se observa que al incrementarse γ el número de iteraciones en las cuales converge el método aumenta. El mismo efecto se produce cuando se aumenta el refinamiento en el mallado tanto temporal como espacial; sin embargo, existen algunos casos que al incrementar dicho mallado el número de iteraciones disminuye y siendo esta disminución de 4 pasos a lo mucho y se lo atribuye a la naturaleza de la función de rentabilidad transformada $g(x, \tau)$.
11. El método de Newton Semi Suave presenta convergencia superlineal, es decir la tasa de convergencia tiende a cero según transcurren las iteraciones.
12. Al extender la frontera de Ω tanto a la derecha como a la izquierda teóricamente la aproximación mejora (ver [H]), sin embargo la diferencia con el método binomial aumenta y de acuerdo a la teoría se puede asumir que en nuestro caso se obtiene una mejor aproximación.

Apéndice A

Transformación de la ecuación de Black and Scholes a una ecuación parabólica del Calor.

Retomando la ecuación de Black and Scholes tenemos:

$$\mathcal{L}V := \frac{\partial V}{\partial t} + rS \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 V^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV = 0 \quad (\text{A.1})$$

Con las condiciones de frontera:

$$V(S, t) = 0 \text{ para } S \rightarrow \infty \text{ y } 0 \leq t \leq T$$

y la condición final

$$V(S, T) = \mathcal{H}(S, T) \text{ para } S \geq 0.$$

Siempre y cuando V y $\frac{\partial V}{\partial S}$ sean continuas en la frontera libre S_f .

Si asumimos que r y σ son constantes entonces nuestra ecuación puede ser reducida a una ecuación lineal parabólica de la forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a \frac{\partial u}{\partial x} + bu \quad (\text{A.2})$$

Donde a y b son constantes.

Para hacer esto posible tomamos:

- $$S = Ke^x$$
- $$t = T - \frac{\tau}{\frac{1}{2}\sigma^2}$$
- $$V = Kv(x, t)$$

Reemplazando tenemos:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = -\frac{K}{2} \frac{\partial v(x, \tau)}{\partial \tau} \sigma^2$$

$$rS \frac{\partial V}{\partial S} = rS \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial S} = rS \frac{1}{S} \frac{\partial V}{\partial x} = rK \frac{\partial v(x, \tau)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{\partial V}{\partial S} \right) = \frac{1}{S^2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial V}{\partial x} \right) = \frac{1}{S^2} \left(K \frac{\partial^2 v(x, \tau)}{\partial x^2} - K \frac{\partial v(x, \tau)}{\partial x} \right)$$

Reemplazando en la ecuación (A.1):

$$-\frac{K}{2} \frac{\partial v(x, \tau)}{\partial \tau} \sigma^2 + rK \frac{\partial v(x, \tau)}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{1}{S^2} \left(K \frac{\partial^2 v(x, \tau)}{\partial x^2} - K \frac{\partial v(x, \tau)}{\partial x} \right) - rKv(x, \tau) = 0$$

Sea $q = \left(\frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2} \right)$, en la ecuación anterior tenemos:

$$\frac{\partial v(x, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v(x, \tau)}{\partial x^2} + (q - 1) \frac{\partial v(x, \tau)}{\partial x} - qv(x, \tau) \quad (\text{A.3})$$

Toda ecuación que cumple con la forma general de una ecuación lineal parabólica puede ser reducida a una ecuación de difusión de la forma:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (\text{A.4})$$

Para hacer esto posible se elige la sustitución $y(x, t) = u(x, t)l(x)g(t)$. Esta condición puede ser satisfecha tomando:

$$l(x) = \exp\left(\frac{ax}{2}\right)$$

$$g(t) = \exp\left[\left(\frac{a^2}{4} - b\right)t\right]$$

Para nuestra ecuación tenemos:

$$l(x) = \exp\left(\frac{(q-1)x}{2}\right)$$

$$g(t) = \exp\left[\left(\frac{(q-1)^2}{4} + q\right)\tau\right]$$

De donde

$$y(x, \tau) = v(x, \tau)\exp\left(\frac{(q-1)x}{2} + \left[\frac{(q-1)^2}{4} + q\right]\tau\right)$$

o equivalentemente

$$v(x, \tau) = y(x, \tau)\exp\left(-\frac{(q-1)x}{2} - \left[\frac{(q-1)^2}{4} + q\right]\tau\right)$$

Con lo que tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial v(x, \tau)}{\partial \tau} &= \exp\left(-\frac{(q-1)x}{2} - \left[\frac{(q-1)^2}{4} + q\right]\tau\right) \left[\frac{\partial y}{\partial \tau} - y(x, \tau) \left(\frac{(q-1)^2}{4} + q\right)\right] \\ \frac{\partial v(x, \tau)}{\partial x} &= \exp\left(-\frac{(q-1)x}{2} - \left[\frac{(q-1)^2}{4} + q\right]\tau\right) \left[\frac{\partial v(x, \tau)}{\partial x} + y(x, \tau) \left(-\frac{1}{2}(q-1)\right)\right] \\ \frac{\partial^2 v(x, \tau)}{\partial x^2} &= \exp\left(-\frac{(q-1)x}{2} - \left[\frac{(q-1)^2}{4} + q\right]\tau\right) \\ &\quad \left[\frac{\partial^2 y(x, \tau)}{\partial x^2} - (q-1)\frac{\partial y(x, \tau)}{\partial x} + y(x, \tau) \left(-\frac{1}{2}(q-1)\right)^2\right]\end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación (A.3) se obtiene el resultado deseado:

$$\frac{\partial y}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \tag{A.5}$$

Apéndice B

Código fuente del programa resuelto en Matlab

```
clear all

K=input('Precio de ejercicio (USD). K= ');
T=input('Tiempo de expiración del contrato (Anual). T= ');
r=input('Tasa de retorno libre de riesgo (Anualizada). r=');
sigma=input('Volatilidad del precio del activo subyacente (Desv. est. anualizada)=');
M=input('Particiones temporal =');
N=input('Particiones espaciales =');
Smin=input('Precio mínimo =');
Smax=input('Precio máximo =');

xmin=log(Smin/K);
xmax=log(Smax/K);

h=(xmax-xmin)/N;
dt=(sigma^2/2)*(T/M);

x=[xmin:h:xmax];
t=[0:dt:(sigma^2/2)*T];
q=r/sigma^2;

%inicialización de variables
M_U=sparse(N-1,M+1);
M_U(:,1)=zeros(N-1,1);

U_ITERACIONES=sparse(N-1,10);
M_RESIDUOS=sparse(10,M+1);
```

```

RESIDUO=sparse(10,1);

iteraciones=zeros(M+1,1)';

lambda_barra=zeros(N-1,1);
M_LAMBDA=sparse(N-1,M+1);
M_LAMBDA(:,1)=lambda_barra;

G=sparse(N-1,M+1);
for i=1:M
for j=1:N-1
if x(j)<=0 & j<N-1
g(j)=exp((1/4)*((q+1)^2)*t(i+1))*(exp((1/2)*x(j)*(q-1))-exp((1/2)*x(j)*(q+1)));
g1(j)=exp((1/2)*x(j)*(q-1))-exp((1/2)*x(j)*(q+1));
else g(j)=0;
g1(j)=0;
end
end
G(:,1)=g1';
G(:,i+1)=g';
end

%estrategia Active-Inactive Set
for i=1:M
INDICA_IN=zeros(N-1,1);
uk_0=sparse(N-1,1);
for j=1:N-1
if (lambda_barra(j)-gamma*uk_0(j)) > 0
INDICA_IN(j)=1;
end
end
U=uk_0;
[u,lambda,INDICA_OUT]=act_inact(i,N,x,t,dt,h,lambda_barra,gamma,INDICA_IN,M_U,q);
cont=1;
U_ITERACIONES(:,1)=uk_0;
U_ITERACIONES(:,2)=u;

while norm(U-u)>1e-5
INDICA_IN=INDICA_OUT;
U=u;
[u,lambda,INDICA_OUT]=act_inact(i,N,x,t,dt,h,lambda_barra,gamma,INDICA_IN,M_U,q);
cont= cont + 1;
U_ITERACIONES(:,cont+1)=u;
end

```

```

for k=1:cont
RESIDUO(k)=norm(U_ITERACIONES(:,k+1)-U_ITERACIONES(:,k),inf);
end

n1=norm(U_ITERACIONES(:,cont+1)-U_ITERACIONES(:,cont),inf)
n2=norm(U_ITERACIONES(:,cont)-U_ITERACIONES(:,cont-1),inf)
radconvergencia=n1/n2;

M_U(:,i+1)=u;
M_LAMBDA(:,i+1)=lambda;
ACTIVOS(:,i+1)=INDICA_OUT;
iteraciones(i+1)=cont;
tasaconvergencia(i+1)=radconvergencia;
M_RESIDUOS(:,i+1)=RESIDUO;

end

%cambios de variable e incorporación de condiciones iniciales y de frontera
for j=1:N+1
    S(j)=K*exp(x(j));
end

%P_0 según Pironneau
for j=1:N+1
    if K-S(j)>0
        P_0(j)=K-S(j);
    else P_0(j)=0;
    end
end

%transformación a variables originales
for i=1:M+1
TT(i)=T-2*(t(i))/sigma^2;
end

V=sparse(N+1,M+1);
V1=sparse(N+1,M+1);

v=sparse(N+1,1);
v1=sparse(N+1,1);
for i=1:M+1
    for j=1:N-1
        v(j+1)=K*exp((-x(j+1)*(q-1)/2)-(((q+1)^2)/4)*t(i))*( M_U(j,i)+ G(j,i));
        v1(j+1)=v(j+1) - P_0(j);
    end
end

```

```

    V(:,i)=v;
    V1(:,i)=v1;
end

%número de iteraciones
iteraciones

contfinal=0;
for i=1:M+1
    contfinal=contfinal+iteraciones(i);
end
contfinal

%tamaño de los conjuntos activos e inactivos
cardactivos=sparse(1,M+1);

for i=1:M+1
    activos=0;
    for j=1:N-1
        activos=activos + ACTIVOS(j,i);
    end
    cardactivos(i)=activos;
end

cardactivos

figure
mesh(TT,S,V)
title(['VALORACION', 'M=', num2str(M), ' N=', num2str(N)]);

figure
mesh(TT,S,V1)
title('V-V_0')

figure
mesh(M_LAMBDA)
title('MULTIPLICADOR');

figure
mesh(M_U)
title(['PROBLEMA TRANSFORMADO', ' M=', num2str(M), ' N=', num2str(N)]);

figure
mesh (ACTIVOS)

```

```

title('CONJUNTOS ACTIVOS E INACTIVOS');

figure
plot(S,V(:,M))
title(['V(S,0)', ' M=', num2str(M), ' N=', num2str(N)]);

%generación de datos para interpolación

DATA=sparse(5,1);
for i= 1:5
    DATA(i) =interp1(S,V(:,M),80+(i-1)*10,'nearest');
end
DATA

ERROR=sparse(5,1);
HOLTZ=[21.6059, 14.9187, 9.9458, 6.4352, 4.0611];

for i=1:5
    ERROR(i) =abs(HOLTZ(i)-DATA(i))/HOLTZ(i) ;
end
ERROR
ERROR_GLOBAL=mean(ERROR)

```

Bibliografía

- [AP] Achdou, Y., Pironneau, O. *Computational Methods for Option Pricing*. SIAM U.S., 2005.
- [Bré] H. Brézis. *Análisis Funcional. (Teoría y Aplicaciones)*. Alianza Editorial, Madrid, 1984.
- [C] C. Cuenca. *Apuntes Curso de Derivados Financieros*.
- [FP] Facchinei, F. , Pang, J.S. *Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems*. Springer-Verlag, Nueva York, 2003
- [GLT] R. Glowinsky, J.L. Lions, R. Trémolières, *Analyse numérique des inéquations variationnelles I y II* BORDAS, Paris, 1976.
- [H] Holtz M “*The Computation of American Option Price Sensitivities using a Monotone Multigrid Method for Higher Order B-Spline Discretizations*” Institut für Numerische Simulation, Universität Bonn, Wegelerstr. 6, 53115 Bonn, Germany. 2004
- [H1] Holtz M “*Konstruktion B-Spline-basierter monoter Mehrgitterverfahren zur Bewertung*” Angefertigt am Institut für Angewandte Mathematik , Germany. Mai 2004
- [KI] K. Ito, K. Kunisch, *Parabolic Variational Inequalities: The Lagrange Multiplier Approach*.
- [KI1] K. Ito, K. Kunisch, *Augmented Lagrangian Methods for nonsmooth, convex optimization in Hilbert Spaces*, Non linear Analysis 41(2000) 591-616. Elsevier Science Ltd. 2000
- [KIK] K. Ito, K. Kunisch, *Semi-smooth Newton Methods for Variational Inequalities of First Kind*. Mathematical Modelling and Numérical Analysis. Vol. 37, No.1, 41-62, 2003
- [KF] Kolmogorov-Fomín *Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional*. MIR. Moscú, 1972.
- [GL] G. Lebeau. *Théorie es distriburions et anayse de Fourier*. Ecole Polytechnique. Paris, 1999.
- [L] J.L. Lions, *Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations* Springer Verlag, Heidelberg, 1971

- [LS] Lions, J.L., Stampacchia G. *Variational Inequalities*, Comm. Pure Appl. Math., 20:493-519, 1967.
- [P] O. Pauly, *Numerical Simulation of American Options*, Diplomarbeit in Wirtschaftsmathematik, Universität Ulm Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften ,2004.
- [PH] O. Pironneau, F. Hecht, “*Mesh adaptation for the Black & Scholes Equations*”, University of Paris 6, 1999.