ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS

INTERPRETACIÓN DE LA MECÁNICA CUÁNTICA CONSIDERANDO LA AUSENCIA DE IDENTIDAD INTRÍNSECA DE LA REALIDAD

PROYECTO PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE FÍSICO

JUAN CARLOS VILLACRÉS BOLAÑOS

DIRECTOR: DR. MARCO BAYAS

QUITO, FEBRERO 2011

DECLARACION

Yo, JUAN CARLOS VILLACRÉS BOLAÑOS, declaro bajo juramento que el trabajo aquí escrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

A través de la presente declaración cedo mis derechos de propiedad intelectual correspondientes a este trabajo, a la Escuela Politécnica Nacional, según lo establecido por la Ley de Propiedad Intelectual, por su reglamento y por la normatividad institucional vigente.

____

JUAN CARLOS VILLACRÉS BOLAÑOS

CERTIFICACIÓN

Certifico que el presente trabajo fue desarrollado por JUAN CARLOS VILLACRÉS BOLAÑOS bajo mi supervisión.

Dr. Marco Bayas

DIRECTOR DE PROYECTO

AGRADECIMIENTOS

A mis Padres, a la vida que me ha enseñado a alejarme de la dualidad y a sincronizarme con la impermanencia, a mis amigos que son como mis hermanos y siempre han creído en mí, a Marco Bayas por ser mi amigo, a mi gato que también es mi maestro

JUAN CARLOS

DEDICATORIA

A mis Padres quienes me enseñaron el camino del amor, de la ternura, de la paciencia, a ellos que les debo todo y nunca sabre como pagarles.

RESUMEN

En este trabajo se analizan varias interpretaciones del formalismo mecánico cuántico con sus respectivas formas de abordar los dos principales problemas conceptuales de la mecánica cuántica. Dichos problemas son: El de la medición y el de la justificación de los fenómenos no locales. Entendiéndose por fenómenos no locales a la correlación que guardan dos partes de un sistema (como dos electrones) sin importar que estas no se puedan comunicar entre sí. Al problema de la medición se lo aborda explicando las dos formas en las que cambia la función de onda. La primera es una evolución continua como lo dicta la ecuación de Schrodinger, la otra es un cambio abrupto que se da en el momento de la medición. Al segundo problema se lo resuelve planteando una interpretación de la función de onda, que soporta y justifica los fenómenos no locales, los cuales se han verificado experimentalmente y están en perfecta concordancia con las predicciones del formalismo mecánico cuántico.

Se estudian las interpretaciones de Schrödinger, Madelung, De Broglie, Bohm, las cuales relacionan a la función de onda con un campo extendido en el espacio. Así también se analiza la interpretación de Copenhague, la cual relaciona a la función de onda con nuestro estado de conocimiento del sistema en estudio. Otras interpretaciones presentadas como las basadas en la teoría de la información parten de la cuantificación de nuestra ignorancia acerca del sistema, para así justificar el formalismo mecánico cuántico.

Finalmente, se propone un marco conceptual y formal basado en la suposición de que la realidad carece de identidad intrínseca. A partir de dicha propuesta se resuelven los problemas estudiados en la primera parte, se da una justificación alternativa de las ecuaciones de: Schrödinger, Klein-Gordon y Klein-Gordon para una partícula en presencia de un campo electromagnético; y se plantea un método para obtener las ecuaciones cuánticas a partir de sus correspondientes ecuaciones clásicas.

ÍNDICE DE CONTENIDO

Introducción

Un rasgo distintivo de las teorías físicas es que el experimento delimita su rango de funcionalidad. Ésta afirmación genera la noción de que estas teorías son objetivas, puesto que se basan en los hechos de la experiencia obtenidos mediante observación o experimentación. Sin embargo, notemos que es en el marco del realismo que nuestras experiencias humanas reflejan total o parcialmente una realidad independiente del observador. Es decir la afirmación de que las teorías físicas son objetivas está basada en una postura realista.

El realismo asume que cada suceso y entidad tiene una esencia, es decir, una identidad y existencia propias e independientes [1]. Sin embargo, dichos sucesos y entidades pueden ser entendidos partiendo de otras posturas, siendo así ¿Por que la ciencia, específicamente la física ha sido desarrollada bajo el marco del realismo? A mi parecer existen dos respuestas. La una es que antes de la llegada de la mecánica cuántica los físicos daban por sentado al realismo como la postura más funcional para describir la realidad [2], de tal forma que ni siquiera se consideraba la posibilidad de cuestionarlo. La otra es que existe un grupo de científicos y filósofos, a quienes Chalmers llama inductivistas ingenuos [3], según los cuales no importa cuál sea la suposición que se haga acerca de la realidad, porque la física parte de la observación.

Según los inductivistas ingenuos, la ciencia parte del método inductivo, por lo que las observaciones efectuadas por un observador imparcial y sin prejuicios proporcionan la base del conocimiento científico; sin embargo, esta postura es insostenible. El observador no puede ser completamente imparcial ya que las expectativas del experimentador y la teoría direccionan el tipo de experimentos a realizar y el tipo de resultados a buscar o refutar. Por ejemplo, Hertz, al efectuar experimentos para producir y detectar ondas de radio, si hubiera sido completamente imparcial se habría visto obligado a registrar no sólo las lecturas en varios contadores, la presencia o ausencia de chispas en diversos lugares críticos en los circuitos eléctricos, sino también el color de los contadores, las dimensiones del laboratorio, el estado del tiempo, el tamaño de sus zapatos, etc [3].

Existe otro grupo de científicos y filósofos a los cuales Chalmers denomina inductivistas sofisticados [3], según los cuales existe diferencia entre como se genera una nueva teoría y como se la amplía y verifica. Para éstos, las nuevas teorías pueden surgir en un momento de inspiración, es decir, los actos creativos implican la intervención de la psicología individual de los científicos. Mientras que la verificación y ampliación de una teoría hace uso del método inductivo. Así, por ejemplo, Newton al formalizar sus ideas estableció una relación biunívoca entre la posición de un objeto y un punto de una curva. Y puesto que para ese entonces ya se contaba con las herramientas necesarias para analizar por completo a las curvas, el análisis de una curva se convertía en el análisis del comportamiento de un objeto [4]. La suposición sutil e implícita que hizo Newton es considerar que lo que ve es la posición propia o intrínseca del objeto, esto permite hacer una biyección entre la posición observada del objeto con un punto. Esta suposición implica una postura acerca de la realidad, de lo que puede conocer y del método para hacerlo.

De todo lo dicho se concluye que no se puede evitar hacer suposiciones acerca de la realidad al desarrollar una teoría científica. Es más, el conjunto de símbolos matemáticos que corresponden a las teorías físicas deben ser interpretados en algún momento para que este formalismo tenga sentido. Esto es de vital importancia, pues el formalismo matemático de la mecánica cuántica todavía no cuenta con un marco conceptual completamente aceptado, como lo tuvo la mecánica clásica [5] [6].

Este trabajo examina algunas de las propuestas que buscan proveer un marco conceptual al formalismo mecánico cuántico, se analiza su funcionalidad al tratar de resolver el problema de la medición, y la justificación que estas brindan a los fenómenos no locales. Posteriormente, se planteará una propuesta basada en la suposición de que la realidad carece de identidad intrínseca, para de esta manera proveer un marco conceptual y formal que busca justificar la ecuación de Schrödinger, la ecuación de Klein-Gordon y la ecuación de Klein-Gordon para una partícula en un campo electromagnético. Finalmente, se busca propone un método que permita realizar la transición de las ecuaciones clásicas a sus correspondientes cuánticas.

Capítulo 1

Primeras Interpretaciones

1.1. Interpretación Electromagnética de Schrödinger

En su artículo [7]: “Cuantización como un problema de valores propios” publicado en 1926, Schrödinger dio la primera interpretación a la función de onda Ψ, a la cual denominó “campo escalar mecánico”; además postula la ecuación que lleva su nombre, la cual es:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi+V\Psi$$

donde $\hbar$ es la constante de plank.

Schrödinger interpretaba a la teoría cuántica como una teoría clásica de ondas. Desde su punto de vista la realidad física consistía únicamente en ondas, una partícula, por ejemplo, era considerada como un paquete de ondas. Con su visión ondulatoria explicaba varios fenómenos cuánticos como por ejemplo el efecto Compton. Dicho efecto era descrito como una reflexión tipo Bragg, entre dos ondas. También planteaba que Ψ describe un campo que se propaga en el espacio. De aquí que, propone interpretar a la expresión $e\Psi\Psi^*$ como la densidad espacial de carga eléctrica, donde e es la carga total. Debido a esto, la ecuación de la conservación de la carga es:

$$\frac{\partial}{\partial t}(e\Psi\Psi^*)=-\nabla J$$

donde $J=\frac{ie\hbar}{2m}(\Psi\nabla\Psi^*-\Psi^*\nabla\Psi)$. Utilizando estas expresiones Schrödinger hace ciertas conclusiones consistentes con la experiencia [7].

Así por ejemplo, notemos que para el caso en el que el sistema es un electrón[1]

$$\Psi=\sum_k c_k u_k(r)\exp(2\pi i(\nu_k t+\theta_k))$$

La densidad de corriente

$$J=\frac{e\hbar}{2m}\sum_{k,m}c_k c_m(u_k\nabla u_m-u_m\nabla u_k)sin[2\pi(\nu_k-\nu_m)t+\theta_k-\theta_m]$$

Y ya que en el estado base de un sistema el término $\nu_k-\nu_m$ se anula, entonces se tendría una distribución de corriente estacionaria. Esto provee una explicación simple a la ausencia de emisión de radiación de un sistema en su estado base [7].

[1] c_k,θ_k son constantes reales y $u_k(r)$ se asume es una función real

Su interpretación de la función de onda se afianzaba a través de la observación de las líneas espectrales en el efecto Zeeman. Notemos que la distribución de carga para el electrón es:

$$\rho = e \sum_{k,m} c_k c_m u_k u_m(r) \exp(2\pi i[(\nu_k - \nu_m)t + \theta_k - \theta_m])$$

y para la componente x del momento dipolar se tiene:

$$M = -2 \sum_{k,m} c_k c_m a_{km}^{(x)} \cos[2\pi(\nu_k - \nu_m)t + \theta_k - \theta_m] + const$$

donde $a_{km}^{(x)} = e \int u_k(r) x u_m(r) dr$. Si $a_{km}^{(x)} = a_{km}^{(y)} = a_{km}^{(z)} = 0$ la línea espectral se predice ausente. Si $a_{km}^{(x)} \neq 0$ pero $a_{km}^{(y)} = a_{km}^{(z)} = 0$ la línea debería estar linealmente polarizada en el eje x. Las conclusiones obtenidas mediante su interpretación concuerdan con lo observado en el efecto mencionado [7].

Sin embargo, la interpretación de Schrödinger enfrentó serias dificultades al ser cuestionadas por Lorentz. Éste argumentaba que la visión de una partícula como un paquete de ondas es insostenible, puesto que dicho paquete no podría mantenerse junto en un volumen mientras se mueve, debido a la dispersión causada por el medio.

Se debe mencionar que la llamada “mecánica matricial” desarrollada por Heisenberg, Born y Jordan es la primera teoría formalmente consistente de los fenómenos cuánticos, sin embargo, como se mencionó anteriormente, Schrödinger provee la primera interpretación de la función de onda. La “mecánica matricial” surge de la idea que empleó Heisenberg para resolver el problema del oscilador anarmónico, la cual consiste en representar a las cantidades físicas por medio de conjuntos de números complejos dependientes del tiempo.

En 1926 Schrödinger descubre que su propio formalismo y el del cálculo matricial de Heisenberg eran matemáticamente equivalentes. Años más tarde Von Neumann ratifica a Schödinger, al demostrar que la mecánica cuántica puede formalizarse como el cálculo de operadores hermíticos en el espacio de Hilbert, y que la teoría de Heisenberg y de Schrodinger son representaciones particulares de este cálculo. Esto se debe a que Heisenberg hace uso del espacio[2] l^2 y Schrodinger del espacio[3] $C^2(-\infty, \infty)$, los cuales son realizaciones de dimensión infinita del mismo espacio de Hilbert, por lo cual son isomorfos e isométricos [7].

[2]Este es el espacio de sucesiones de números complejos cuyas series convergen absolutamente

[3]Es el espacio de funciones cuadrado integrables

1.2. Interpretación hidrodinámica de Madelung

Erwin Madelung presenta en 1926 [7] [8] la primera interpretación hidrodinámica del formalismo mecánico cuántico. Esta se basa en el análisis de dos ecuaciones que se obtienen a partir de la ecuación de Schrödinger. Para obtener dicho par de ecuaciones Madelung plantea que:

$$\Psi = \alpha \exp(i\beta)$$

Donde α y β son funciones que dependen de x, y, z y t. Luego reemplaza esto en la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + V\Psi$$

de donde queda:

$$i\hbar\left[\frac{\partial \alpha}{\partial t} + i\alpha\frac{\partial \beta}{\partial t}\right]\exp(i\beta) = -\frac{\hbar^2}{2m}\left[\Delta\alpha + 2i(\nabla\alpha)\cdot(\nabla\beta) + i\alpha\Delta\beta - \alpha\left(\nabla\beta\right)^2\right]\exp(i\beta) + \alpha V\exp(i\beta)$$

Separando la parte imaginaria de la parte real, se tiene:

$$\hbar\frac{\partial \alpha}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(2(\nabla\alpha)\cdot(\nabla\beta) + \alpha\Delta\beta\right) \tag{1.1}$$

$$\hbar\alpha\frac{\partial \beta}{\partial t} - \frac{\hbar^2}{2m}\Delta\alpha + \frac{\alpha\hbar^2}{2m}\left(\nabla\beta\right)^2 + \alpha V = 0 \tag{1.2}$$

Se multiplica a la ec.(1.1) por 2α, y reemplazando $\varphi = \frac{\hbar}{m}\beta$, tenemos:

$$2\alpha\frac{\partial \alpha}{\partial t} + 2\alpha(\nabla\alpha)\cdot(\nabla\varphi) + \alpha^2\Delta\varphi = 0$$

$$\frac{\partial \alpha^2}{\partial t} + \nabla\cdot\left(\alpha^2\nabla\varphi\right) = 0 \tag{1.3}$$

Luego multiplicando a la ec.(1.2) por $\frac{1}{m\alpha}$ y reemplazando $\varphi = \frac{\hbar}{m}\beta$ nos queda:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\nabla\varphi\right)^2 + \frac{V}{m} - \frac{\hbar^2}{2m^2}\left(\frac{\Delta\alpha}{\alpha}\right) = 0 \tag{1.4}$$

La ec.(1.3) tiene la forma de la ecuación hidrodinámica de la continuidad. En base a esta analogía Madelung interpreta a α^2 como la densidad de masa, y a φ como un potencial de la velocidad del flujo hidrodinámico, el cual está sujeto a la condición dada por la ec.(1.4). Notemos que ésta es similar a la ecuación de Hamilton-Jacobi, sin embargo la ec.(1.4) tiene a: $\frac{\hbar^2}{2m^2}\left(\frac{\Delta\alpha}{\alpha}\right)$ como termino extra. Ahora, si éste junto con V corresponden a un potencial total al cual está sometido el fluido, entonces $\frac{\Delta\alpha}{\alpha}$ estará relacionado con las fuerzas internas del fluido. Siendo así, la ecuación de

Schrödinger describe el movimiento de un flujo hidrodinámico irrotacional sujeto a la acción de fuerzas conservativas [7] [8].

Para Madelung la densidad de masa era proporcional a la densidad de carga de manera que el flujo hidrodinámico corresponde a una distribución continua de corriente. Esta interpretación está basada en la noción idealizada de un fluido continuo, la cual no representa un fluido real, ya que éste es un ensamble discreto de moléculas. Dicha idealización presenta un problema, puesto que ignora a la atomicidad mientras intenta explicar el comportamiento de los átomos [7].

1.3. Interpretación Probabilística de Born

Born fue el primero en proponer la interpretación probabilística de la función de onda, ésta implica que la "micro-física" debe ser considerada como una teoría probabilística. Su propuesta se basa en la relación que Einstein estableció entre las ondas electromagnéticas y los cuantos de luz. Einstein consideraba el campo ondulatorio como una especie de "campo fantasma" cuyas ondas guiaban a los fotones. La intensidad de este campo, es decir el cuadrado de la amplitud, dará la densidad de probabilidad de encontrar a tales fotones [7].

En el artículo: "La mecánica cuántica de los procesos de colisión" [7], Born aplica las ideas de Einstein a la dispersión de electrones. En dicho artículo analiza la dispersión de electrones por una fuerza central con potencial esféricamente simétrico. Para el caso en que un electrón se aproxime por la dirección z a un átomo, se puede considerar a las funciones de onda inicial y dispersada como ondas planas, esto siempre y cuando a las ondas se las analice lejos del centro de dispersion. Es decir, la función de onda del electrón al aproximarse al átomo se la puede ver como [7]:

$$\Psi_o = \exp i(kz - w_o t)$$

y a la función de onda dispersada como:

$$\Psi_s = f(k,\theta)[\frac{\exp i(kr - wt)}{r}]$$

Ahora, aplicando la idea de Einstein, se puede interpretar a la expresión $|f(k,\theta|^2 d\Omega$ como la probabilidad de encontrar al electrón dispersado en un elemento de ángulo sólido $d\Omega$. Born luego extendió esta idea para interpretar a la expresión $\Psi\Psi^* dV$ como la probabilidad de encontrar a la partícula en el elemento de volumen dV [7].

Born no interpreta a Ψ como un ente físicamente extendido en el espacio, como en el caso de la interpretación que hizo Schrödinger. Born más bien relaciona a Ψ con nuestro conocimiento del fenómeno físico. Debido a esto el cambio abrupto en la función de onda, o colapso de la función onda, se debe al cambio abrupto en nuestro conocimiento, al tomar conciencia del resultado de una medición. Notemos que partiendo de esta interpretación Ψ no se dispersaría a causa del medio, superando así el problema que se le imputaba a la interpretación de Schrödinger.

Se intentó encontrar falencias a la interpretación de Born al tratar de explicar el experimento de doble rendija de Feymann. Dicho experimento consiste en dejar pasar un haz de electrones por dos rendijas y luego mirar el patrón que estos dejan en una pantalla ubicada detrás de las rendijas. Dicho patrón es como el que dejaría un haz de luz. Dicho fenómeno induce a pensar que la onda asociada a cada electrón interfiere consigo misma, de esta manera se podría pensar que Ψ estaría relacionada con un campo y no solo sería una representación de nuestro conocimiento acerca del fenómeno [7].

Debido a dicha argumentación, Heisenberg adoptó la interpretación de Born adjudicando a Ψ cierto tipo de realidad objetiva. Para Heisenberg, Ψ además de reflejar nuestro conocimiento acerca del sistema, también era una formulación cuantitativa del concepto de posibilidad. Dicha posibilidad se refiere a que los eventos no están determinados de una manera definitiva, sino más bien a que la tendencia de que un evento se de tiene cierto grado de realidad objetiva, una realidad intermedia entre las ideas y lo material. Este concepto de posibilidad es el mismo concepto de *potentia* que Aristóteles tenía en su filosofía [7] [9].

1.4. Interpretación de De Broglie

En 1927 De Broglie propone la teoría de “la doble solución” [7]. En ésta se considera que Ψ describe una onda que guía la trayectoria de las partículas. Según De Broglie: tanto en óptica como en “micro-mecánica” las soluciones continuas de la ecuaciones de onda únicamente dan información estadística; una descripción microscópica exacta requiere del uso de soluciones singulares, que representen la naturaleza discreta de la materia y de la radiación [7] [10].

De Broglie partió de la ecuación de Klein-Gordon[4]

$$\Box\Psi = \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\Psi$$

y supone que ésta admite dos tipos de soluciones. Debido a que De Broglie consideró a las partículas como concentraciones de energía en las singularidades del campo de la onda, una de las soluciones:

$$u = f(x,y,z,t)\exp\left(i\frac{Et-\mathbf{pr}}{\hbar}\right)$$

[4]Para ese tiempo se suponía que dicha ecuación describía el comportamiento de los electrones.

corresponde a dichas singularidades, y la otra:

$$\Psi = a \exp\left(i\frac{Et - \mathbf{pr}}{\hbar}\right)$$

era una función continua con relevancia estadística [7].

En la interpretación de De Broglie, la densidad de probabilidad es

$$P(x,t) = a^2 = |\Psi|^2$$

y la velocidad de la partícula es

$$\mathbf{v} = -\nabla\frac{\varphi}{m}$$

con $\varphi = Et - \mathbf{pr}$.

Esta fórmula para la velocidad, que puede considerarse como la extrapolación cuántica de la conocida $\mathbf{p} = -\nabla S$, donde S es la acción, nos daría la trayectoria de la partícula. Debido a esto, esta interpretación preserva la naturaleza clásica de las partículas. Por otra parte, la onda guía presenta fenómenos de difracción e interferencia, por lo que las partículas que están siendo guiadas estarán ausentes en los lugares donde exista interferencia destructiva, y se acumularán en los lugares con interferencia constructiva, lo cual explicaría los patrones de interferencia presentados por los electrones [7] [10].

1.5. Interpretación de Copenhague

La interpretación de Copenhague se caracteriza por los siguientes 5 puntos [7][9][11]:

1. El principio de incertidumbre. El cual implica que en un ensamble de partículas, no se pueden medir simultáneamente con total precisión dos observables que no conmuten.

2. La interpretación estadística de la función de onda. Según el cual solo se pueden hablar de las probabilidades de que un evento ocurra. Debido a esto las predicciones se las hace en función del comportamiento promedio de un grupo similar de eventos.

3. El principio de complementaridad. El cual se plantea como un principio general que incluye tanto a la dualidad onda-partícula, como al principio de incertidumbre.

4. La identificación de la función de onda con el conocimiento del sistema. Según el cual, el hecho de que la función de onda sea distinta a cero en alguna

región del espacio, no implica que una onda se encuentre objetivamente ahí, sino más bien refleja que nuestro conocimiento del sistema indica que existe la posibilidad de que dicho sistema se encuentre en esa región. Es decir Ψ no es una entidad extendida en el espacio, sino más bien una expresión que contiene de manera codificada nuestro conocimiento del sistema.

5. La actitud positivista de Bohr y Heisenberg.

1.5.1. El principio de Incertidumbre

Según Heisenberg, la teoría hace predicciones de lo que podemos conocer, o experimentar con nuestros sentidos, y no necesariamente refleja el comportamiento objetivo de un fenómeno. Consideraba que el formalismo mecánico cuántico refleja que somos incapaces de predecir con certeza la trayectoria, si es que tuviera sentido hablar de una. Esto lo embarcó en la búsqueda de un principio fundamental que pudiera explicar, o al menos ser consistente, con dicha falta de certeza. Para esto se planteó dos problemas

1. ¿El formalismo matemático predice que se puede determinar en un momento dado, la posición y la velocidad solo con cierto grado limitado de precisión?

2. ¿Dicha imprecisión, si es que es admitida por la teoría, es compatible con la precisión óptima obtenida en mediciones experimentales?

Para responder al primer problema, toma para su análisis una distribución gaussiana de la posición [7], por lo que la función de onda está dada por la expresión[5]:

$$\psi(q) = \text{const} \exp\left[\frac{-q^2}{2(\delta q)^2}\right]$$

donde δq es la mitad del ancho de la cresta de la Gaussiana, que según la interpretación probabilística de Born vendría a ser el intervalo en el que con mayor probabilidad encontremos al electrón, y por lo tanto la menor indeterminación acerca de la posición, además $\delta q = \sqrt{2}\Delta q$, donde Δq es la desviación estandard. Ahora la distribución del momento es $|\varphi(p)|^2$, donde $\varphi(p)$ se obtiene de una transformada de Fourier [7]:

$$\varphi(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[\frac{-2i\pi pq}{h}\right] \psi(q)\, dq$$

[5]Por comodidad en esta sección, en la sección 4,2 y en los apéndices se trabajará en una dimensión, sin embargo los resultados pueden ser generalizados a tres dimensiones

Reemplazando ψ en esta ecuación se tiene:

$$\varphi(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{const} \exp\left[\frac{-2i\pi pq}{h} - \frac{q^2}{2(\delta q)^2}\right] dq$$

o expresado de una forma más conveniente:

$$\varphi(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{const} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{q}{\delta q} + \frac{2i\pi p\delta q}{h}\right)^2\right] \exp\left[\frac{-2\pi^2 p^2(\delta q)^2}{h^2}\right] dq$$

Ahora haciendo:

$$y = \frac{q}{\delta q} + \frac{2i\pi\delta q}{h}$$

e integrando se obtiene:

$$\varphi(p) = \text{const} \exp\left[\frac{2\pi^2 p^2(\delta q)^2}{h^2}\right]$$

Esto quiere decir que existe indeterminación en el momento, y esta es:

$$\delta p = \frac{h}{2\pi\delta q}$$

o usando desviaciones estandard:

$$\Delta p\Delta q = \frac{h}{4\pi}$$

De aquí se ve que la primera pregunta que se planteó Heisenberg tiene una respuesta afirmativa.

Ahora, con respecto a la segunda pregunta, Heisenberg parte de su concepción de que los conceptos físicos y su formulación matemática corresponden a las relaciones definidas por las impresiones sensoriales del observador. En sus palabras: “Las leyes naturales que formulamos matemáticamente en teoría cuántica no tratan acerca de las partículas en sí, pero sí hablan de nuestro conocimiento acerca de las partículas elementales ... El concepto de realidad objetiva ... se evapora en las matemáticas que ya no representan más el comportamiento de las partículas elementales, sino más bien el conocimiento de ese comportamiento” [11]. Notemos que en ésta cita no niega la posibilidad de una realidad más allá de la percepción, de hecho la acepta sutilmente al hablar de “las partículas en sí”.

De todo lo dicho, para Heisenberg, definir un concepto significa prescribir un experimento para medir la cantidad referida por el concepto. Así por ejemplo, para entender el significado de la posición de un electrón podemos imaginar un experimento en el cual lo iluminamos, y lo observamos por medio de un microscopio. Sin embargo, debido al efecto Compton, al determinar la posición estaremos cambiando el momento del electrón. Ahora, según las leyes de la óptica, la precisión en la resolución aumentará mientras más pequeña sea la longitud de onda λ de la radiación. Debido a esto mientras más precisamente se determine la posición habrá un mayor cambio en el momento del electrón [7]. Este experimento mental, conocido como “el experimento del microscopio de rayos gamma”, ayudó a Heisenberg a resolver su segundo problema.

Para analizar dicho experimento mental, podemos partir de la teoría de difracción óptica de Abbe, en la cual el poder de resolución de un microscopio está dada por $\frac{\lambda}{2\sin\epsilon}$, donde ϵ es el ángulo subtendido entre el objeto y el diámetro del lente. Esto implica que cualquier medición de la posición involucra una indeterminación $\Delta x = \frac{\lambda}{2\sin\epsilon}$. Ahora, el momento total antes de la colisión, entre el electrón y el fotón usado para observarlo, es $\pi = \frac{h}{\lambda} + p_x$, donde p_x es el momento del objeto en la dirección x. Después de la colisión debido al efecto Compton, el fotón tendrá un momento entre $\frac{-h\sin\epsilon}{\lambda'}$ y $\frac{h\sin\epsilon}{\lambda''}$. Por lo que, después de la colisión debido a la conservación del momento lineal se tiene que: $p_x^{'} - \frac{h\sin\epsilon}{\lambda'} = \pi = p_x^{''} + \frac{h\sin\epsilon}{\lambda''}$. de donde se obtiene que [7]:

$$\Delta p_x = \frac{2h\sin\epsilon}{\lambda}$$

debido a que solo nos interesa el orden de magnitud, $\lambda^{'}$ y $\lambda^{''}$ han sido reemplazados por λ. De las relaciones de Δx y Δp_x se obtiene:

$$\Delta p_x \Delta x = h$$

con lo que resuelve su segundo problema de manera afirmativa. Al responder de manera afirmativa, las dos preguntas, Heisenberg resume sus conclusiones en el principio de incertidumbre.

1.5.2. El principio de Complementaridad

Cuando Bohr formuló el principio de complementaridad no lo hizo basándose en el principio de incertidumbre, sino más bien lo planteó como un principio más profundo el cual abarca al principio de incertidumbre. Para explicar la complementaridad usa el siguiente ejemplo: Un electrón pasa por una abertura hecha en un diafragma, el cual a su vez está firmemente sujeto a un marco. Dicho marco está escalado y además tiene un reloj. Para Bohr, si se especifica la posición y el instante en el electron que atraviesa el diafragma, se pierde la información exacta de la transferencia de momento y energía entre el electrón y el diafragma, debido a que éste está rigidamente conectado al marco. Por otra parte si el diafragma estuviera suspendido por medio de resortes débiles al marco, entonces se podría determinar el intercambio de energía y momento (debido al movimiento del diafragma), pero se renuncia a determinar la posición y el tiempo exactos debido a la posición indeterminada del diafragma [7].

Para Bohr, cada observación traía consigo un incontrolable nuevo elemento, donde la perturbación causada por la medición es siempre desconocida. Esto no implica que se deba revisar los conceptos clásicos de trayectoria (análisis que hizo Heisenberg), posición, momento, sino más bien la concepción clásica de explicar. En sus palabras: el postulado cuántico[6] nos "fuerza a adoptar un nuevo modelo de descripción designado como complementaridad, en el sentido de que cualquier aplicación de los conceptos clásicos excluye el uso simultáneo de otros conceptos clásicos, los cuales con una relación distinta son igualmente necesarios para elucidar el fenómeno" [7]. Así, por ejemplo, si vamos a describir un fenómeno usando el cuadrivector posición se está excluyendo la descripción a través del cuadrivector momento. En este sentido, el principio de complementaridad implica una limitación en la descripción, y una renunciación a la forma clásica de describir.

[6] Para Bohr el postulado cuántico dice que: todo proceso atómico esta caracterizado por una discontinuidad esencial.

Capítulo 2

El problema de la medición y el de los fenómenos no locales

2.1. El problema de la medición

La interpretación de Copenhague, en general, hace referencia al modo de conocer y sus limitaciones, evitando hablar de "la realidad en si misma". Este énfasis en la forma de adquirir conocimiento da pie al análisis del acto de medir, interactuar u observar. Para analizar la medición vamos a basarnos en la definición de Von Neumann [12]. Primero notemos que al realizar un experimento el experimentador toma datos del aparato de medida π, para así inferir el comportamiento del sistema medido ϑ. Dichos datos son los valores propios de cierto observable A con funciones propias α_k. A partir de esos valores propios se conocen los valores propios correspondientes al observable B del sistema, con funciones propias σ_k [12].

Según Von Neumann, la medición es una interacción que cambia el estado[1] $\sigma_k\alpha$ del sistema compuesto $\pi + \vartheta$, al estado $\sigma_k\alpha_k$ [7][12]. Implícitamente en está definición se esta asumiendo que al realizarse la medición, ϑ está en un estado propio correspondiente al observable medido. Esto quiere decir que sin importar cual sea el estado en el que se encuentre ϑ antes de la medición, al momento de realizarse ésta, dicho estado cambiará a un estado propio del observable que se mide. Esto implica que la función de onda evoluciona de las siguientes dos formas:

1. De manera continua como lo dicta la ecuación de Schrödinger

2. De una forma abrupta conocida como reducción o colapso de la función de onda, al hacerse una medición

El problema de la medición radica en plantear un marco conceptual que explique por qué al momento de medir, la función de estado deja de evolucionar de la forma 1 y lo hace de la forma 2.

Para ilustrar mejor el problema se plantea el siguiente ejemplo. Imaginemos un haz de electrones del cual se va a medir la componente z del spin a través de un detector situado frente a un aparato de Stern-Gerlach. Las funciones propias del operador[2] S_z serán notadas como Z_+ correspondiente al valor propio $+\frac{1}{2}\hbar$, y Z_- con valor propio $-\frac{1}{2}\hbar$. El detector puede ser una pared en donde impactará el haz de

[1] Al producto tensioral $a \bigotimes b$ se lo notará simplemente ab

[2] El operador spin será notado con la letra S y la dirección de la componente que se mide se la pondrá como subíndice

electrones. Dependiendo de si todo el haz llega a un punto superior se dirá que el valor de la componente z del spin del haz es $+\frac{1}{2}\hbar$, y si todo el haz llega a un punto inferior, el valor de dicha componente será $-\frac{1}{2}\hbar$. De aquí que el observable que se mide en el detector será la "posición de los electrones en la pared", el cual tiene tres funciones propias: χ_o, el estado del detector antes de registrar a los electrones, χ_+ correspondiente al registro del haz en el punto superior y χ_- correspondiente al registro del haz en el punto inferior.

Notemos que si el haz está en el estado caracterizado por la función propia Z_+, entonces el estado del sistema conjunto electrones-detector antes de la medición se encontrara en el estado $\psi_o = Z_+\chi_o$, y después de la medición el estado será $\psi_+ = Z_+\chi_+$. De igual manera si el estado del haz es Z_-, el estado del sistema conjunto antes de la medición es $\psi_o = Z_-\chi_o$, y después de la medición el estado será $\psi_- = Z_-\chi_-$. Ahora, si el estado del haz es de la forma

$$Z = \frac{Z_+ + Z_-}{\sqrt{2}}$$

el estado del sistema conjunto antes de la medición será

$$\psi_o = \frac{(Z_+ + Z_-)\chi_o}{\sqrt{2}}$$

Por otra parte, notemos que después de la medición se observará una mezcla estadística de estados, es decir en este caso la mitad de las componentes z de los electrones con sus respectivas posiciones en la pared estarán descritas por $Z_+\chi_+$ y la otra mitad por $Z_-\chi_-$. Este comportamiento corresponde al tipo de evolución 2. Mientras que debido a la evolución temporal descrita por la ecuación de Schrödinger (evolución tipo 1) y a la linealidad del producto tensorial, el estado del sistema conjunto tendría que ser

$$\psi = \frac{z_+\chi_+ + z_-\chi_-}{\sqrt{2}}$$

es decir un estado puro, donde todas y cada una de las componentes z del spin de los electrones y todas y cada una de las posiciones de estos en la pared están descritos por ψ.

Para resolver el problema de la medición, se debe explicar dónde y por qué colapsa la función de onda. En todos los casos que conozco[3], los lugares donde ocurre el colapso son o en el observador o en el aparto de medida. A continuación se va a mostrar algunas propuestas para resolver el problema de la medición.

[3]Con excepción de las interpretaciones relacionadas a la interpretación de Everett

2.1.1. El problema de la medición abordado por la interpretación de Copenhague

Desde el punto de vista de la interpretación de Copenhague, el principio de complementaridad requiere dos descripciones excluyentes y complementarias acerca de la evolución de la función de onda. Según este principio, la evolución continua de la función de onda es una forma de describir su evolución, mientras que el colapso de la misma es la descripción complementaria. El cambio abrupto en la evolución de la función de onda no sólo obedece al principio de complementaridad, sino que también puede ser explicado por la relación entre ésta y nuestro conocimiento acerca del sistema. Esto se debe a que el cambio abrupto en su evolución refleja la adquisición de conocimiento al momento de medir. En este sentido, la función de onda colapsa en el observador. Wigner estaba de acuerdo en que la medición se realiza en el momento en que la información llega a nuestro cerebro; afirma que: "el solipsismo puede ser lógicamente consistente con la mecánica cuántica, el monismo en el sentido del materialismo no" [6]. De la misma forma, para Von Neumann la medición sólo se completa cuando el observador tiene información del sistema estudiado a través del aparato de medida [7][12].

2.1.2. Grabación Indeleble

A continuación se va a revisar la solución planteada por Belinfante [5]. Recordemos el ejemplo del haz de electrones planteado anteriormente, si el sistema conjunto esta descrito por un estado puro, el valor medio del observable Q viene dado por:

$$< Q >= \frac{1}{2}\int_{\tau}(Z_+^*\chi_+^* + Z_-^*\chi_-^*)Q(Z_+\chi_+ + Z_-\chi_-)d\tau$$

$$< Q >= \frac{1}{2}\int Z_+^*\chi_+^*QZ_+\chi_+d\tau + \frac{1}{2}\int Z_-^*\chi_-^*QZ_-\chi_-d\tau + Re\left[\int Z_+^*\chi_+^*QZ_-\chi_-d\tau\right]$$

Donde $d\tau$ es el volumen que contiene a todas las variables necesarias para especificar a las partículas y al detector. Por otra parte, si consideramos el valor medio de Q, cuando el estado del sistema conjunto es una mezcla estadística tendremos que:

$$< Q' >= \frac{1}{2}\int Z_+^*\chi_+^*QZ_+\chi_+d\tau + \frac{1}{2}\int Z_-^*\chi_-^*QZ_-\chi_-d\tau$$

Como se ve la diferencia entre $< Q >$ y $< Q' >$ es

$$Q_{+-} = \int Z_+^*\chi_+^*QZ_-\chi_-d\tau$$

De aquí podemos decir que si logramos explicar el hecho de que cuando se realice una medición $Q_{+-} = 0$, entonces estaremos justificando el tipo de evolución 2.

Notemos que a $|Q_{+-}|^2$ se le puede interpretar como una cantidad proporcional a la probabilidad de transición entre los estados $Z_+\chi_+$ y $Z_-\chi_-$, debida a la medición del observable Q. Por lo que, nuestro requerimiento de que $Q_{+-} = 0$, se cumple si es que los electrones alteran el estado del detector de una manera irreversible, de tal forma que éste no tenga posibilidad de variar espontáneamente su estado, es decir se realizaría una grabación indeleble [5]. Dicha grabación es una propiedad que se esperaría de un aparato de medida, es decir se espera que registre el resultado hasta que una acción externa lo regrese a su estado inicial. De aquí que, el colapso de la función de onda es inducido por el acto de grabar. Debido a esto, un observador o un detector serán los responsables del colapso de la función de onda siempre y cuando tengan la propiedad de grabar. Sin embargo a esta propuesta se le puede objetar que ningún proceso es completamente irreversible.

2.1.3. Mediciones Clásicas

Esta propuesta plantea que la mecánica clásica no sólo es el límite de la mecánica cuántica, sino también una teoría independiente en la cual existe certeza acerca de las mediciones a realizarse. De aquí que la función de onda obedece él tipo de evolución 1 mientras el sistema estudiado no se relaciona con un objeto macroscópico. El tipo de evolución 2 surge debido a que al momento de hacer la medición, la función de onda ya no obedece a las leyes inferidas del comportamiento de la ecuación de Schrödinger. Según Landau [13] la medición en mecánica cuántica es la interacción entre objetos clásicos y objetos cuánticos, la cual ocurre independientemente del observador. El principal problema de esta propuesta es que no se tiene un método para, en la practica, diferenciar el límite entre los objetos macroscópicos y microscópicos.

2.1.4. La interpretación de Everett

Everett hace su propuesta con la intención de aplicar adecuadamente la teoría cuántica a la relatividad general. Al tratar de responder cómo aplicar la formulación cuántica a la geometría espacio-temporal, encuentra el problema de que no se podría dar una descripción cuántica adecuada del universo, puesto que no habría nada afuera de él que produzca la transición de un estado a otro, o que en otras palabras: colapse la función de onda. Incluso se cuestiona cómo un observador debe describir cuánticamente a un sistema que lo incluya. Es decir, se plantea cómo describir cuanticamente un sistema que no esta sujeto a observación externa.

Para poder describir este tipo de sistema, Everett propone que la función de onda de cualquier sistema físicamente aislado evoluciona en todo instante, es decir, antes y durante la medición, únicamente como lo dicta la ecuación de Schrödinger. Es decir la medición no genera el tipo de evolución 2. Además propone que todo sistema sujeto a observación externa puede ser considerado como parte de un sistema aislado más grande [14]. De aquí, en esta interpretación, la función de onda es independiente del observador, es decir, es objetiva.

Ahora, tomemos un electrón del ejemplo del haz de electrones y recordemos que según el tipo de evolución 1 después de la medición dicho electrón se encontrará en el estado puro

$$\psi = \frac{Z_+\chi_+ + Z_-\chi_-}{\sqrt{2}}$$

Según Everett cada una de las componentes de ψ, es decir, $Z_+\chi_+$ y $Z_-\chi_-$, suceden simultáneamente y son igualmente reales [14]. Esto se explica argumentando que cada componente corresponde a una historia o mundo diferente[4]. En esta ramificación de mundos, cada mundo evoluciona independiente e indiferentemente del otro, de tal forma que ningún observador es consciente de dicha ramificación. Es decir que cada mundo obedece la ecuación de Schrödinger con total indiferencia del otro. Esto se debe a que se asume que se ha hecho una grabación indeleble, es decir, se supone que los términos $Z_+\chi_+$, $Z_-\chi_-$ son ortogonales entre sí, por lo que el término Q_{+-} relacionado a los fenómenos de interferencia es cero. En el caso de nuestro electrón se tiene que en el mundo A su estado es $Z_+\chi_+$ y en el mundo B su estado es $Z_-\chi_-$.

A partir del marco conceptual que Everett plantea, éste llega a la interpretación estadística de la función de estado de Born. Debido a esto, en la interpretación de Everett, el cuadrado de los coeficientes de cada estado nos dará la probabilidad de que un electrón tenga ese estado. Lo cual quiere decir que para el haz de electrones se tiene que la primera mitad de los electrones del haz se encontrará en el estado $Z_+\chi_+$ en el mundo A, mientras otra versión de esos electrones se encontrará en el mundo B con $Z_-\chi_-$. La otra mitad de los electrones se encontrarán en el mundo A con $Z_-\chi_-$ y otra versión de esos electrones se encontrará en el mundo B con $Z_+\chi_+$.

[4]En este contexto, un mundo es un conjunto cerrado de subsistemas, como por ejemplo el sistema a medirse y un observador

2.2. No localidad

2.2.1. Paradoja Einstein-Podolsky-Rosen

Einstein nunca creyó que la mecánica cuántica ofreciera una descripción completa de la realidad y buscó incansablemente inconsistencias internas en la teoría cuántica. Durante esta búsqueda mantuvo un largo debate con Bohr, el cual inició en 1913 y tuvo su punto culminante en 1935 cuando Einstein, Poldosky, y Rosen[5] (EPR) publican su artículo: "¿Puede ser considerada completa la descripción Mecánico-Cuántica de la realidad física?". Einstein tenía una postura realista[6] y no podía aceptar, por ejemplo, que una partícula no pudiera tener intrínseca y simultáneamente dos propiedades físicas como la posición y el momento. Y ya que desde el punto de vista de Eistein la mecánica cuántica difería de dicha postura realista[7], entonces la mecánica cuántica no ofrecía una descripción fiel de esa realidad objetiva que el suponía que existe.

El objetivo de EPR era demostrar que la mecánica cuántica no era una teoría completa. EPR afirmaban que para que una teoría sea completa es necesario que: "todo elemento de la realidad física[8] debe tener su contraparte en la teoría física" [15]. Ahora, para saber si existe o no un elemento de la realidad física EPR plantean que: Si es que no se perturbo al sistema de ninguna forma, y podemos predecir con certeza el valor de una cantidad física, entonces existe un elemento de realidad física correspondiente a dicha cantidad física [15].

Para demostrar que la mecánica cuántica no es completa EPR plantean dos afirmaciones que son mutuamente excluyentes:

1. La descripción de la realidad ofrecida por la función de onda tal como lo dicta la mecánica cuántica no es completa

2. Cuando dos operadores correspondientes a dos cantidades físicas no conmutan estas cantidades no pueden ser reales simultaneamente

Notemos que 1 y 2 son mutuamente excluyentes ya que 1 implica que las dos cantidades son reales simultáneamente y 2 dice que las cantidades no son reales si-

[5] De aquí en adelante me referiré a ellos como EPR

[6] Esto se puede ver en la siguiente afirmación: "Cualquier consideración seria de una teoría física debe tomar en cuenta la distinción entre la realidad objetiva, la cual es independiente de la teoría, y los conceptos físicos con los que la teoría opera" [15]

[7] Según EPR la conclusión usual en mecánica cuántica es que cuando el momento de una partícula es conocido, sus coordenadas no tienen realidad física [15]

[8] Cuando EPR hablan de realidad se refieren a una realidad objetiva independiente del observador

multáneamente. De aquí que, el objetivo de EPR consiste en demostrar que 2 es falsa.

Para demostrar que 2 es falsa, EPR plantean el siguiente ejemplo: Imaginemos que a dos partículas se les deja interactuar por un instante, y luego de dicho instante ya no interactúan más. El sistema conformado por las dos partículas es descrito por la función

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_p(x_2) u_p(x_1) dp = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(x_2-L)p/\hbar} e^{ix_1p/\hbar} dp$$

donde x_1 y x_2 son las coordenadas usadas para describir la primera y segunda partícula respectivamente, L es una constante.

Ahora, notemos que $u_p = e^{ix_1p/\hbar}$ es función propia del operador momento P_1, si medimos P_1 sobre el sistema conjunto y obtenemos el valor propio p_o, entonces después de esta medición el sistema conjunto es descrito por

$$\Psi_P = e^{-i(x_2-x_1-L)p_o/\hbar}$$

Dicha función Ψ_P es función propia del operador momento P_2, con valor propio $-p_o$. Notemos que esto significa que sin tener que hacer otra medición, es decir sin afectar el estado Ψ_P sabemos con certeza cual es el momento de la partícula 2. Esto quiere decir que el observable P_2 tiene realidad física.

Expresemos a Ψ en la base del operador posición Q_1 con funciones propias

$$v(x_1) = \delta(x_1 - x)$$

$$\varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(x-x_2+L)p/\hbar} dp = 2\pi h \delta(x - x_2 + L)$$

entonces

$$\Psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x_2) v(x_1) dx$$

Notemos que φ es función propia del observable posición Q_2, y que si por ejemplo medimos Q_1 y obtenemos x_o la función que describe al sistema conjunto después de la medición será

$$\Psi_Q = \delta(x_o - x_2 + L)$$

De aquí que, sin tener que afectar el estado descrito por Ψ_Q, sabemos con seguridad que la posición de la partícula 2 será $x_o + L$. De aquí que, al igual que con el operador P_2, el operador Q_2 tiene realidad física.

Ahora, EPR hacen uso de la idea de localidad. El término localidad implica que: Dos partes separadas de un sistema, se mantienen correlacionadas sólo mientras se comuniquen entre sí. Que las partes se comuniquen entre sí quiere decir que estas interactúan entre sí, de forma que dichas interacciones no excedan la velocidad de la luz. La localidad asume que una vez que las partes se aíslen de tal forma que éstas no se puedan comunicar, la única forma en que éstas se mantengan correlacionadas es a través de la “memoria” del contacto previo [2][11][16][17]. Debido a esto, el término no local implica la correlación de las partes aún cuando éstas no puedan comunicarse. También implica que dicha correlación no se debe a la “memoria” de su contacto previo.

EPR asumen un comportamiento local, debido a esto, argumentan que dado que las partículas se encuentran suficientemente alejadas y no interactúan entre sí, la realidad física de la partícula 2 no debería afectarse por la elección del observable a medirse sobre la partícula 1 [15]. En este caso los observables a los que se refieren son P_1 y Q_1. De lo que concluyen que las funciones de onda Ψ_P y Ψ_Q deben describir la misma realidad física de la partícula 2. Es decir según EPR Ψ_P y Ψ_Q reflejan distintos aspectos de un grupo de propiedades que existen intrínseca e independientemente del observador en la partícula 2. Por lo tanto, dos observables conjugados, P_2 y Q_2 pueden ser simultáneamente elementos de la misma realidad física. Debido a esto, EPR concluyen que la mecánica cuántica no es una teoría completa.

Desde mi punto de vista, lo que hacen EPR es mostrar que si existiera una realidad objetiva entonces la mecánica cuántica no ofrece una descripción completa de dicha realidad. Notemos que cuando EPR hacen la afirmación (1): *Cuando las partículas no interactúan entre sí, la realidad física de la partícula 2 no debería afectarse por la elección del observable a medirse sobre la partícula* 1; ellos asumen implícitamente que la partícula 2 tiene realidad física antes de realizar la medición en la partícula 1. Ahora, tomando en cuenta la afirmación (2): *Si es que no se perturbó al sistema de ninguna forma, y podemos predecir con certeza el valor de una cantidad física, entonces existe un elemento de realidad física correspondiente a dicha cantidad física*. Entonces, la suposición de que la partícula 2 tiene una realidad física antes de hacer la medición sobre la partícula 1 carece de base fuera de la postura realista, ya que las predicciones hechas sobre la partícula 2 se las hace en base a las mediciones realizadas en la partícula 1. Por lo tanto, la afirmación (1) sólo es válida dentro de una postura realista y local.

A pesar de que la postura realista y local[9] de EPR influye en el desarrollo lógico de su demostración y en la conclusión a la que llegan, la influencia de dicha postura no es explícita en su trabajo. Sin embargo años después Bell nos muestra el tipo de

[9] De aquí en adelante, a las teorías que se basen en el realismo y en la idea de localidad se las denominará: teorías realistas-locales.

predicciones a las que tendrían que llegar el conjunto de teorías realistas-locales con respecto al experimento planteado aquí. Esto nos permite comparar las predicciones de las teorías realistas-locales y las predicciones de la mecánica cuántica, con los resultados experimentales. A continuación vamos a ver una versión simplificada del experimento planteado por EPR, el cual es más fácil de reproducir en el laboratorio.

2.2.2. La versión de Bohm

En 1959 Bohm [16] propone una versión simplificada del artículo publicado por EPR usando como observables las componentes de spin de dos partículas de spin $1/2$. Bohm considera a un par de partículas que se alejan entre sí, donde el sistema conjunto tiene spin total nulo. A cierta distancia de la fuente F se encuentran dos observadores A (Alicia) y B (Bernardo) equipados con aparatos de Stern-Gerlach que les permite analizar el signo de la componente de spin. El analizador de Alicia puede rotarse 90^o y permite medir la componente z o x [16]. La función que describe a las dos partículas expresado en la base del observable S_{z1} es:

$$\Psi_o = \frac{1}{\sqrt{2}}(Z_+Z_- - Z_-Z_+)$$

Ahora, supongamos que Alicia mide el observable S_{z1} y obtiene el valor $+\frac{\hbar}{2}$, por lo que al realizar la medición la función se reduce a $\Psi = Z_+Z_-$. Esto quiere decir que Bernardo podría predecir con certeza, y sin perturbar al sistema, que el valor del spin de la componente z que obtendrá es $-\frac{\hbar}{2}$. Por lo que S_{z2} tiene realidad física para Bernardo.

Ahora, si expandemos a Ψ_o en la base del observable S_{x1} tenemos que[10]:

$$\Psi_o = \frac{1}{2}(X_+Z_- + X_-Z_- - X_+Z_+ + X_-Z_+)$$

Si Alicia mide el observable S_{x1} y obtiene el valor $-\frac{\hbar}{2}$ entonces Ψ_o se reduce a

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_-Z_- + X_-Z_+) = X_-X_+$$

De aquí que Bernardo puede predecir el valor de la componente x del spin de la partícula 2, sin afectar el estado de la partícula y por lo tanto S_{x2} tiene realidad física. Aquí se tiene el mismo caso que el propuesto por EPR, ya que si asumimos la postura realista-local, entonces la decisión sobre qué observable se mide en la partícula 1 no debe afectar al estado de la partícula 2, por lo que S_{x2} y S_{z2} deberían ser elementos de la misma realidad física. De lo que se concluiría que la mecánica cuántica no es una teoría completa.

[10]Para esto hemos usado el hecho de que: $Z_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_+ + X_-)$ y $Z_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_+ - X_-)$ [16].

2.2.3. Desigualdad de Bell

En 1965 John Bell aplica las ideas del realismo-local al experimento planteado por Bohm. De esta manera obtiene una desigualdad que deben cumplir todas las teorías realistas-locales, y nos permite comparar los resultados experimentales con las predicciones de dichas teorías y las predicciones de la mecánica cuántica. De esta manera pone al alcance de la experimentación el debate filosófico iniciado por Bohr y Einstein.

Imaginemos el ejemplo planteado por Bohm, vamos a notar como $A(\hat{a})$ al resultado de la medida de Alicia del spin, en la dirección $\hat{a}$ de la partícula 1, y $B(\hat{b})$ al resultado de la medida de Bernardo del spin, en la dirección $\hat{b}$ de la partícula 2. Para reflejar la postura realista vamos a plantearnos que existe un grupo de propiedades objetivas que están representadas por el grupo de variables ocultas λ. Estas variables se llaman ocultas debido a que corresponderían a las propiedades inherentes de las partículas, que no son explícitas o que no se las conoce por completo. Notemos que λ también se caracteriza por poder permanecer fija mientras $\hat{a}$ varía. En esta postura el resultado de una medida depende de λ y de la orientación del analizador. Es decir $A = A(\hat{a}, \lambda)$, $B = B(\hat{b}, \lambda)$ y[11] $AB = AB(\hat{a}, \hat{b}, \lambda)$ [2][16][17].

Para exigir un comportamiento local Bell se plantea que: El resultado B para la partícula 2 no debe depender de la dirección $\hat{a}$ en la que se decida medir el spin de la partícula 1, de igual forma A no debe depender de $\hat{b}$ [17]. Esto quiere decir que:

$$AB(\hat{a}, \hat{b}, \lambda) = A(\hat{a}, \lambda)B(\hat{b}, \lambda) \tag{2.1}$$

Ahora, tomemos como unidad de spin a $\frac{\hbar}{2}$, con lo que los posibles resultados de las medidas de spin son:

$$A(\hat{a}) = \pm 1, B(\hat{b}) = \pm 1 \tag{2.2}$$

Además en el estado singlete en el que se preparan a las partículas se cumple que[12]:

$$A(\hat{a}) + B(\hat{a}) = 0 \tag{2.3}$$

Notemos que, en virtud de ec(2.1) el valor medio de AB es:

$$E(\hat{a}, \hat{b}) = \int_{\lambda} A(\hat{a}, \lambda)B(\hat{b}, \lambda)\rho(\lambda)d\lambda$$

donde $d\rho = \rho d\lambda$ es la probabilidad de que se de cierto valor de AB en el intervalo $[\lambda, \lambda + d\lambda]$.

[11] Aquí AB es el producto de dos números reales, A multiplicado por B, no representa producto tensorial

[12] Esta relación se cumple para todas las direcciones

Supongamos que Alicia y Bernardo pueden hacer mediciones del spin en las direcciones $\hat{a}$, $\hat{b}$ o $\hat{b'}$. Bell mostró que los valores medios correspondientes a dichas medidas satisfacen la desigualdad [2][5][16][17]:

$$|E(\hat{a},\hat{b}) - E(\hat{a},\hat{b'})| - E(\hat{b},\hat{b'}) \leq 1 \tag{2.4}$$

Para esto partió de la expresión $E(\hat{a},\hat{b}) - E(\hat{a},\hat{b'})$, usando la ec(2.3) se tiene que:

$$E(\hat{a},\hat{b}) - E(\hat{a},\hat{b'}) = \int_\lambda \left[A(\hat{a},\lambda)B(\hat{b},\lambda) - A(\hat{a},\lambda)B(\hat{b'},\lambda)\right]\rho(\lambda)d\lambda$$

$$= -\int_\lambda \left[A(\hat{a},\lambda)A(\hat{b},\lambda) - A(\hat{a},\lambda)A(\hat{b'},\lambda)\right]\rho(\lambda)d\lambda$$

Ahora partiendo de la ec(2.2) se tiene que $A(\hat{b},\lambda)A(\hat{b},\lambda) = 1$, entonces:

$$E(\hat{a},\hat{b}) - E(\hat{a},\hat{b'}) = -\int_\lambda A(\hat{a},\lambda)A(\hat{b},\lambda)\left[1 - A(\hat{b},\lambda)A(\hat{b'},\lambda)\right]\rho(\lambda)d\lambda$$

Y ya que $A(\hat{a},\lambda)A(\hat{b},\lambda) = \pm 1$ se tiene que:

$$|E(\hat{a},\hat{b}) - E(\hat{a},\hat{b'})| \leq \int_\lambda \left[1 - A(\hat{b},\lambda)A(\hat{b'},\lambda)\right]\rho(\lambda)d\lambda = 1 + E(\hat{b},\hat{b'})$$

Con lo que queda demostrada la desigualdad (2.4) la cual es la llamada desigualdad de Bell.

En realidad, esta es una de las desigualdades desarrolladas por Bell. Otros desarrollaron desigualdades basadas en las ideas de Bell por lo que a todas éstas se les llama desigualdades de Bell. Notemos que, en el caso que se acaba de ver, A y B son variables binarias. Sin embargo, si tomaramos en cuenta el hecho de que los detectores del spin pueden influenciar en el resultado de la medición, entonces resulta más conveniente trabajar con $\overline{A}$ y $\overline{B}$, las cuales son las observaciones promediadas sobre los grados de libertad ocultos de los instrumentos. De aquí que $-1 \leq \overline{A} \leq 1$ y $-1 \leq \overline{B} \leq 1$. Al trabajar con $\overline{A}$ y $\overline{B}$, y basándonos en las mismas ideas utilizadas para llegar a la desigualdad (2.4), se tiene un caso más general para el cual se cumple la siguiente desigualdad:

$$-2 \leq C \equiv E(\hat{a},\hat{b}) - E(\hat{a},\hat{b'}) + E(\hat{a'},\hat{b}) + E(\hat{a'},\hat{b'}) \leq 2 \tag{2.5}$$

La desigualdad (2.4) es más restrictiva al momento de hacer experimentos, y se la puede ver como una desigualdad aplicada al caso determinista. Con determinista se quiere expresar que, en este caso, A y B toman con certeza los valores ± 1. Mientras que la desigualdad (2.5) correspondería al caso no determinista, puesto que A y B se comportan como variables aleatorias de las cuales no conocemos con certeza sus resultados. Este indeterminismo se debe a los grados de libertad ocultos de los detectores.

A continuación vamos a analizar, desde el punto de vista de la mecánica cuántica, las relaciones que deben cumplir los valores medios involucrados en las desigualdades (2.4) y (2.5). Para esto primero notemos que el valor medio del observable S_aS_b es $E_{mc}(\hat{a},\hat{b}) = -cos\theta_{ab}$ [5], donde θ_{ab} es el ángulo que existe entre las direcciones $\hat{a}$ y $\hat{b}$. Para el caso particular en que $\hat{a}$, $\hat{b}$ y $\hat{b'}$ forman 60^o entre sí tenemos que: $E_{mc}(\hat{a},\hat{b}) = E_{mc}(\hat{b},\hat{b'}) = -\frac{1}{2}$ y $E_{mc}(\hat{a},\hat{b'}) = \frac{1}{2}$ por lo que:

$$|E(\hat{a},\hat{b}) - E(\hat{a},\hat{b'})| - E(\hat{b},\hat{b'}) = \frac{3}{2} > 1$$

Como se ve, la mecánica cuántica no satisface la desigualdad (2.4).

Ahora, para comparar las predicciones de la mecánica cuántica con la desigualdad (2.5), vamos a imaginar que las coordenadas de Alicia $\hat{a}$ y $\hat{a'}$ son coplanares y ortogonales entre sí, y lo mismo entre las coordenadas de Bernardo $\hat{b}$ y $\hat{b'}$. Además, vamos a imaginar que el sistema de Bernardo se encuentra rotado un ángulo ϕ con respecto al sistema de Alicia, con $0 \leq \phi \leq 2\pi$. En este caso

$$C_{mc}(\phi) = \cos(3\phi) - 3\cos(\phi)$$

donde C_{mc} son los valores que toma C, de la desigualdad (2.5), según la mecánica cuántica.

Existe una amplia gama de valores de ϕ para los cuales se viola la desigualdad (2.5), por ejemplo para $\phi = 45^o$ $C_{mc} = -2\sqrt{2} < -2$. Es decir, la mecánica cuántica tampoco satisface la desigualdad (2.5).

A partir de mediados de los años setenta hay una gran cantidad de soporte experimental [2][5][16][18] que confirma las predicciones de la mecánica cuántica. En la mayoría de los experimentos se han usado fotones, y en vez de medirse el spin se detecta la polarización. Los fotones en muchos casos han sido producidos por decaimientos atómicos en cascada. Sin embargo, es desde la experiencia de Aspect en 1980, que la mayoría de la comunidad científica concuerda con que los hechos experimentales confirman las predicciones de las mecánica cuántica [16].

Los partidarios de las teorías realistas-locales niegan que los resultados experimentales confirmen los resultados de la mecánica cuántica, argumentando que los experimentos realizados hasta la fecha:

1. Usan una muestra muy pequeña de detecciones y se tiene que asumir que dicha muestra es una muestra representativa.

2. El sistema (fotones en general) se comunica con el aparato de detección de manera que el sistema prepara con anticipación una correlación entre sus partes, de tal forma que estas tomen en cuenta la disposición del aparato.

Con respecto a la primera objeción existe ya un experimento que no tiene este problema. En el 2001 se hizo un experimento con iones de Be^+, en el cual se detectaron todos los pares originalmente enlazados. La objeción 2 fue superada al elegir las direcciones de medida al azar mientras los fotones están en vuelo, logrando así eliminar una posible conexión causal entre las medidas de polarización en los extremos del aparato [16]. Sin embargo hasta la fecha no se ha hecho un experimento que supere ambas objeciones simultáneamente.

Notemos que la objeción 1 no es una objeción fuerte, como diría Bell refiriéndose a esta objeción: "… es difícil creer que la mecánica cuántica trabaje tan bien para arreglos experimentales ineficientes y que vaya a fallar cuando los refinamientos suficientes sean hechos" [16]. De hecho, la evidencia experimental a favor de la mecánica cuántica ha sido tan fuerte que actualmente las constataciones de la violación de la desigualdad de Bell han pasado a un segundo plano. El interés en estos tiempos se ha volcado al desarrollo de nuevas tecnologías que hagan uso de los fenómenos no locales como la computación cuántica, comunicaciones y procesamiento de información por medios ópticos [16].

2.2.4. El análisis de Stapp

Para finalizar esta sección vamos a mostrar el análisis que hace Henry Stapp sobre los fenómenos no locales [19][20]. Stapp no usa el razonamiento de Bell en el que plantea que los resultados de los experimentos AB son de la forma $AB = AB(\hat{a}, \hat{b}, \lambda)$, puesto que no considera plausible el uso de variables ocultas. Esto se debe a que, según él, la mecánica cuántica nos indica que los aparatos de medida deben ser considerados partes integrales de toda la situación experimental y por lo tanto del sistema a medirse, entonces no se puede esperar que haya algo tal como variables ocultas que estén fijas mientras el experimento cambia.

Vamos a basarnos en el ejemplo de Bohm. Según Stapp, en este caso los resultados de las mediciones no dependen de λ. Los resultados de las mediciones de Alicia en la dirección $\hat{a}$ son $A(\hat{a})$, y las de Bernardo en la dirección $\hat{b}$ son $B = B(\hat{b})$. Supongamos que se van a usar N pares de partículas de las cuales se van a medir las componentes de spin en las direcciones $\hat{a}$, $\hat{a'}$, $\hat{b}$, $\hat{b'}$. Para un N suficientemente grande según la mecánica cuántica se tendrá que aproximadamente se cumple [19][20]:

$$\frac{1}{N}\sum_{j}^{N} A_j(\hat{a},\hat{b})B_j(\hat{a},\hat{b}) = -\cos(\theta)_{ab} \tag{2.6}$$

Donde $A_j(\hat{a},\hat{b}) = \pm 1$ especifica el resultado obtenido por Alicia para el par jota-esimo si es que se mide la componente $\hat{a}$ en el un extremo y $\hat{b}$ en el otro extremo, lo mismo para los resultados de Bernardo $B_j(\hat{a},\hat{b}) = \pm 1$.

Ahora vamos a suponer que el ángulo que existe entre la dirección $\hat{a}$ y la línea de vuelo de las partículas es $\theta_a = 0^o$, el ángulo correspondiente a la dirección $\hat{a'}$ es $\theta_{a'} = 90$, el correspondiente a la dirección $\hat{b}$ es $\theta_b = 0^o$, y el correspondiente a $\hat{b'}$ es $\theta = 135^o$, finalmente notemos que $\theta_{ab} = \theta_a - \theta_b$. Para estos casos la ec(2.6) queda:

$$\frac{1}{N}\sum_{j}^{N} A_j(\hat{a},\hat{b})B_j(\hat{a},\hat{b}) = -1 \tag{2.7}$$

$$\frac{1}{N}\sum_{j}^{N} A_j(\hat{a'},\hat{b})B_j(\hat{a'},\hat{b}) = 0 \tag{2.8}$$

$$\frac{1}{N}\sum_{j}^{N} A_j(\hat{a},\hat{b'})B_j(\hat{a},\hat{b'}) = 1/\sqrt{2} \tag{2.9}$$

$$\frac{1}{N}\sum_{j}^{N} A_j(\hat{a'},\hat{b'})B_j(\hat{a'},\hat{b'}) = -1/\sqrt{2} \tag{2.10}$$

Ahora, para exigir la propiedad de localidad, se debe reflejar el hecho de que los resultados de Alicia no deben depender de qué componente de spin elige medir Bernardo, por lo que dicha propiedad se la va a expresar a través de:

$$A_j(\hat{a},\hat{b}) = A_j(\hat{a},\hat{b'}) \equiv A_j \tag{2.11}$$

$$A_j(\hat{a'},\hat{b}) = A_j(\hat{a'},\hat{b'}) \equiv A'_j \tag{2.12}$$

$$B_j(\hat{a},\hat{b}) = B_j(\hat{a'},\hat{b}) \equiv B_j \tag{2.13}$$

$$B_j(\hat{a},\hat{b'}) = B_j(\hat{a'},\hat{b'}) \equiv B'_j \tag{2.14}$$

A continuación se va a probar que la propiedad de localidad no es compatible con los resultados de la mecánica cuántica. Para esto vamos a reemplazar las ecuaciones (2.11), (2.12), (2.13), (2.14) en las ecuaciones (2.7),(2.8), (2.9) y (2.10), de donde se tiene que:

$$\frac{1}{N}\sum_{j}^{N} A_jB_j = -1 \tag{2.15}$$

$$\frac{1}{N}\sum_{j}^{N} A'_jB_j = 0 \tag{2.16}$$

$$\frac{1}{N}\sum_{j}^{N} A_jB'_j = 1/\sqrt{2} \tag{2.17}$$

$$\frac{1}{N}\sum_{j}^{N} A'_jB'_j = -1/\sqrt{2} \tag{2.18}$$

De la ec(2.15) se obtiene:

$$A_j = -B_j$$

Luego, reemplazando esto en la ec.(2.16), nos da:

$$\frac{1}{N}\sum_{j}^{N} A'_j A_j = 0 \tag{2.19}$$

Ahora, restando a la ec.(2.17) la ec.(2.18) nos queda:

$$\frac{1}{N}\sum_{j}^{N}(A_j - A'_j)B'_j = \sqrt{2}$$

Usando el hecho de que $A'_j A'_j = 1$ para todo j, esta ecuación queda:

$$\frac{1}{N}\sum_{j}^{N}(A_j A'_j - 1)A'_j B'_j = \sqrt{2}$$

De ésta se puede afirmar que:

$$\frac{1}{N}\sum_{j}^{N}|(A_j A'_j - 1)||A'_j B'_j| \geq \sqrt{2}$$

De aquí se tiene que:

$$\frac{1}{N}\sum_{j}^{N}|(A_j A'_j - 1)| \geq \sqrt{2}$$

A partir de esta se sigue que:

$$\frac{1}{N}\sum_{j}^{N}(1 - A_j A'_j) \geq \sqrt{2}$$

De ésta se tiene que:

$$1 \geq \sqrt{2} + \frac{1}{N}\sum_{j}^{N} A_j A'_j$$

La cual junto con la ec.(2.19) nos da:

$$1 \geq \sqrt{2}$$

Lo cual es falso por lo que se puede concluir que las predicciones de la mecánica cuántica son incompatibles con la idea de localidad [19]. Desde el punto de vista de Stapp la característica no local de la mecánica cuántica implica que: Ninguna teoría local que use variables ocultas está de acuerdo con la mecánica cuántica.

Todos los desarrollos teóricos y experimentales descritos en esta sección, nos plantean la inquietud de si debemos adoptar nuevas perspectivas acerca de la realidad física. O, en palabras de Clauser y Shimony al referirse a las pruebas experimentales a favor de la mecánica cuántica: “Se debe abandonar totalmente la filosofía realista con la cual trabajan la mayoría de los científicos, o se deben modificar dramáticamente nuestros conceptos de espacio-tiempo” [2].

Capítulo 3

Otras interpretaciones

3.1. Interpretación de la Teoría Cuántica en términos de variables ocultas

En 1952, Bohm propone una interpretación de la mecánica cuántica en la cual concibe que cada sistema individual tiene un estado preciso y definible. El considera a las probabilidades de la mecánica cuántica como una necesidad práctica, y no como una manifestación de un inherente indeterminismo. En este contexto la mecánica cuántica es análoga a la física estadística, puesto que aquí se habla en función de probabilidades como una consecuencia de la falta de conocimiento preciso de las propiedades individuales de las partículas [21][22].

Bohm plantea a las variables ocultas como elementos o parámetros que nos permiten dar una descripción causal, detallada y continua de los procesos cuánticos. Según él, siempre que usamos descripciones estadísticas de un proceso es posible expresar dicho proceso en función de tales variables ocultas. Así por ejemplo, desde el punto de vista de la macro-física, las coordenadas y el momento de los átomos individuales corresponden a estas variables ocultas, las cuales a gran escala se manifiestan sólo como promedios estadísticos [21].

Ahora, para plantear su interpretación primero analiza a la ecuación de Schrödinger, de manera similar a como lo hizo Madelung [21]. Primero toma la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + V\Psi$$

Y plantea $\Psi = R\exp(iS/\hbar)$, donde R y S son funciones reales, luego reemplazando esta función en la ecuación de Schrödinger y separando la parte real e imaginaria obtiene:

$$\frac{\partial R}{\partial t} = -\frac{1}{2m}\left[R\Delta S + 2(\nabla R)\cdot(\nabla S)\right] \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\left[\frac{(\nabla S)^2}{2m} + V - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\Delta R}{R}\right] \tag{3.2}$$

Luego plantea que es conveniente escribir $P(x,y,z,t) = R^2(x,y,z,t)$, donde $P(x,y,z,t)$ es la densidad de probabilidad, aplicando esto a (3.1) y (3.2), se obtiene:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \nabla\cdot\left(P\frac{\nabla S}{m}\right) = 0 \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{(\nabla S)^2}{2m}+V-\frac{\hbar^2}{4m}\left[\frac{\Delta P}{P}-\frac{1}{2}\frac{(\nabla P)^2}{P^2}\right]=0 \tag{3.4}$$

Notemos que, al comparar las ecuaciones (1.3) y (1.4) con las ecuaciones (3.3) y (3.4), la diferencia radica en que para Madelung α^2 es la densidad de masa y no la densidad de probabilidad. Ahora, en el límite clásico, cuando $\hbar \to 0$, la ec.(3.4) es la ecuación de Hamilton-Jacobi, debido a esto S será interpretada como la acción. Por otra parte, si imaginamos un ensamble de trayectorias de partículas que sean soluciones a la ecuación del movimiento, y éstas son normales a una superficie con S constante, entonces se sabe que éstas serán normales a todas las superficies con S constante, y $\frac{\nabla S}{m}$ será el vector velocidad $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ para cualquier partícula que pase por el punto $\mathbf{r}=(x,y,z)$. Debido a esto, la ecuación (3.3) puede ser expresada como [21]:

$$\frac{\partial P}{\partial t}+\nabla\cdot(P\mathbf{v})=0 \tag{3.5}$$

La interpretación de Bohm basada en las ecuaciones (3.4) y (3.5) es la siguiente [21]: Cada partícula tiene valores de posición y momento que son precisos y que pueden variar continuamente. La ec(3.4) define un ensamble de posibles trayectorias para la partícula, cada trayectoria se encuentra bajo el efecto de una fuerza debida a V, y de una fuerza asociada al "potencial cuántico":

$$U=-\frac{\hbar^2}{4m}\left[\frac{\Delta P}{P}-\frac{1}{2}\frac{(\nabla P)^2}{P^2}\right]=\frac{-\hbar}{2m}\frac{\Delta R}{R}$$

Ahora, ya que la fuerza total que actúa sobre la partícula depende de R, y de la función de onda Ψ evaluada en la posición de la partícula, entonces Bohm propone la existencia del campo Ψ (análogo al campo electromagnético) actuando sobre las partículas.

El campo Ψ no es una abstracción matemática, sino un campo extendido en el espacio. De la misma forma en que el campo electromagnético obedece las ecuaciones de Maxwell, el campo-Ψ obedece la ecuación de Schrödinger. En ambos casos, una vez que se conoce la función que describe al campo, podemos calcular la fuerza que éste ejerce sobre la partícula, de tal manera que si conocemos su posición y momento iniciales, entonces podremos calcular completamente su trayectoria. En el caso del campo Ψ la fuerza viene dada por la ecuación:

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=-\nabla\left(V-\frac{\hbar^2}{2}\frac{\nabla^2 R}{R}\right)$$

La propagación del campo Ψ en el espacio y en el tiempo corresponde a una onda que guía a las partículas. Esta onda-guía encarna la idea esencial de la interpretación de De Broglie. Notemos que la onda obedece a los fenómenos de difracción e interferencia, sin embargo las partículas siguen una trayectoria definida. Al igual que en la interpretación de De Broglie, si dicha onda está sujeta a una interferencia destructiva en un punto del espacio, dicho punto no formará parte de la trayectoria de la partícula [10].

Ahora, ya que las ecuaciones (3.4) y (3.5) provienen de la ecuación de Schrödinger, se espera que la interpretación de Bohm comparta los mismos resultados que la teoría cuántica. Según Bohm para que esto suceda se tuvo que haber hecho las siguientes tres suposiciones [21][22]:

1. Que el campo-Ψ obedezca la ecuación de Schrödinger
2. Que el momento está dado por $\mathbf{p} = \nabla S$
3. Que no se predice o controla el lugar preciso de una partícula, pero en la práctica se tiene una densidad de probabilidad $P = |\Psi|^2$. El uso de la estadística no es inherente en la estructura conceptual, sino que es una mera consecuencia de nuestra ignorancia de las condiciones iniciales precisas de la partícula

Por otra parte, Bohm también interpreta a $P(\mathbf{r})$ como una coordenada generalizada del campo-Ψ, y a S como su conjugada, es decir su correspondiente momento generalizado. Para ver que dicha suposición es consistente, primero calcula la energía media desde el punto de vista de la mecánica cuántica, es decir:

$$< H >= \int \Psi^* \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V \right) \Psi d\mathbf{r}$$

Reemplazando en esta expresión $\Psi = P^{1/2}\exp(iS/\hbar)$, se obtiene:

$$< H >= \int P(\mathbf{r}) \left[\frac{(\nabla S)^2}{2m} + V + \frac{\hbar^2}{8m}\frac{(\nabla P)^2}{P^2} \right] d\mathbf{r} \tag{3.6}$$

Luego asume que el Hamiltoniano del campo-Ψ viene dado por $< H >$. Siendo así, las ecuaciones del movimiento en términos de $P(\mathbf{r})$ y $S(\mathbf{r})$, son:

$$\dot{P} = \frac{\delta < H >}{\delta S} = -\frac{1}{m}\nabla(P\nabla S)$$

$$\dot{S} = -\frac{\delta < H >}{\delta P} = -\left[\frac{(\nabla S)^2}{2m} + V(x) - \frac{\hbar^2}{4m}\left(\frac{\Delta P}{P} - \frac{1}{2}\frac{(\nabla P)^2}{P^2} \right) \right]$$

Como se puede ver estas son las ecuaciones (3.4) y (3.5), las cuales provienen de la ecuación de Schrödinger.

Bohm justifica el colapso de la función de onda a través del comportamiento del potencial cuántico. Considera una función $\Psi(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', t) = R(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', t)\exp(iS(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', t)/\hbar)$, la cual describe al campo-Ψ, correspondiente al aparato de medida y al sistema a medirse, donde $\mathbf{r}''$ son las coordenadas del aparato de medida y $\mathbf{r}'$ las coordenadas del sistema. El sistema conjunto se encuentra bajo la influencia de un potencial cuántico de la forma [21]

$$U = \frac{\hbar^2}{2mR}(\Delta_{r'}R + \Delta_{r''}R)$$

Según Bohm, este potencial sufre violentas oscilaciones al momento de la interacción entre el aparato de medida y el sistema a medirse. Sin embargo, una vez finalizada dicha interacción, existe una correlación entre los valores del aparato de medida y los valores de la magnitud física del sistema, de tal forma que a un rango $\delta\mathbf{r}''$ de valores, le corresponde un solo valor $\mathbf{r}'$. Según Bohm, esto se debe a que las fluctuaciones en el potencial cuántico cesan de tal forma que los valores de $\mathbf{r}'$ dejan de superponerse [21].

Por otra parte, ya que las ecuaciones sobre las que Bohm basa su interpretación parten de la ecuación de Schrödinger, se espera que su teoría sea no local. Es decir una teoría de variables ocultas no local. De hecho, Bohm sugiere que la no localidad es el reflejo de un fenómeno que sucede en dimensiones superiores. Y que los dos sistemas, por ejemplo fotones o electrones, que se encuentran en "entanglement" corresponden a una misma realidad más profunda. Para clarificar esta idea, Bohm hace una analogía entre los fenómenos no-locales, y lo que le sucede a un pez en una pecera, que está siendo grabado por dos cámaras. Una de las cámaras apunta a su dorso y otra apunta a su frente, y lo que filman las cámaras es proyectado en dos distintos televisores. Cuando el pez se mueva se notará un cambio simultáneo en los dos televisores, y las imágenes estarán correlacionadas, al igual que lo están dos fotones en "entanglement" [23].

3.2. Interpretaciones que usan Teoría de la información

3.2.1. Conceptos de Teoría de la información

Entropía

Sean: x una variable discreta, $p(x)$ la distribución de probabilidad para dicha variable. La entropía $H(p)$ es una medida del promedio de la incertidumbre que se tiene acerca de una variable aleatoria[1] x. En este sentido la entropía es máxima cuando se tiene la máxima incertidumbre. Ésta está definida como:

$$H(p) = -\sum_{x \epsilon \chi} p(x) \log p(x)$$

[1]Ésta se mide en bits cuando la base del logaritmo es 2

Para el caso continuo la entropía es:

$$H(P) = -\int_{-\infty}^{+\infty} P(x) \log P(x) dx$$

donde $P(x)$ es la densidad de probabilidad de x [24][25].

Información de Fisher

Sean θ un parámetro de una población, y los datos de una muestra de dicha población, $P(y|\theta)$ la densidad de probabilidad condicional de que se de y dado θ. La información de Fisher

$$I = \int P(y|\theta) \left(\frac{\partial ln P(y|\theta)}{\partial \theta} \right)^2 dy$$

nos da la cantidad de información acerca del parámetro θ contenida en los datos y [24][26].

Desde el punto de vista realista se puede suponer que $y = \theta + \xi$ donde θ es el valor intrínseco de una magnitud física como por ejemplo el valor objetivo de la posición de cierta partícula, y ξ es el ruido agregado debido al acto de observar o medir [30]. Notemos que en este caso los valores que pueda tomar y solo dependerán de ξ, por lo que $P(y|\theta) = P(\xi)$. Debido a esto la información de Fisher se la puede escribir de la siguiente manera:

$$I = \int P(\xi) \left(\frac{\partial ln P(\xi)}{\partial \xi} \right)^2 d\xi$$

$$I = \int \frac{1}{P(\xi)} \left(\frac{\partial P(\xi)}{\partial \xi} \right)^2 d\xi$$

Esta es la forma paramétrica de expresar la información de Fisher [24].

Para el caso en el que se quiera estimar varios parámetros $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)$ se extiende el concepto de información de Fisher al de matriz de información de Fisher, la cual tiene los elementos [24][26]:

$$I_{ij} = \int P(y|\theta) \frac{\partial ln P(y|\theta)}{\partial \theta_i} \frac{\partial ln P(y|\theta)}{\partial \theta_j} dy$$

Estos elementos en su forma paramétrica serían [30]:

$$I_{ij} = \int P(\xi) \frac{\partial ln P(\xi)}{\partial \xi_i} \frac{\partial ln P(\xi)}{\partial \xi_j} d\xi$$

Principio de Máxima Entropía y Principio de Mínima Información de Fisher

El principio de máxima entropía establece que se debe elegir la probabilidad que bajo ciertas restricciones maximice la entropía. De la misma forma el principio de mínima información de Fisher consiste en escoger la distribución de probabilidad que minimize la información de Fisher, sujeta a restricciones conocidas del sistema. Estos métodos son usados para inferir parámetros estadísticos o probabilidades. Éstos aprovechan nuestra incertidumbre o nuestro estado de conocimiento acerca de un experimento estadístico, para así obtener dichos parámetros [27][28].

Así, por ejemplo, Janes obtiene la función de partición basándose en el método de máxima entropía [28]. Supongamos que tenemos la variable discreta x_i con $i = 1, 2, \ldots, n$ con sus correspondientes probabilidades p_i, las cuales desconocemos. Asumamos también que todo lo que conocemos es que el valor esperado de una función $f(x)$ viene dado por:

$$< f(x) >= \sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i) \tag{3.7}$$

Y que

$$\sum p_i = 1 \tag{3.8}$$

Notemos que esta información es insuficiente para respondernos la pregunta: ¿Cuál es el valor esperado de una función $g(x)$?. Sin embargo, podemos usar el hecho de que no tenemos suficiente información es decir, que tenemos máxima incertidumbre, para así solucionar nuestro problema. Es decir, vamos a maximizar la entropía[2] [28]

$$H(p_1, p_2, \ldots, p_n) = -K \sum_i p_i \ln p_i$$

sujeto a las restricciones dadas por las ec.(3.7) y ec.(3.8), y así encontraremos los valores de p_i y subsecuentemente $< g(x) >$. Para usar el método de los multiplicadores de Lagrange primero establecemos que:

$$G_1(p_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i) - < f(x) >$$

$$G_2(p_i) = \sum p_i - 1$$

Ahora, aplicando el método tenemos que:

$$\nabla H = \alpha \nabla G_1 + \gamma \nabla G_2$$

donde α y γ son constantes.

[2] K es una constante positiva que se la introduce para tener concordancia con la base del logaritmo usado

De esta ecuación obtenemos [28]:

$$p_i = e^{-\lambda-\mu f(x_i)}$$

Las constantes $\lambda = \frac{\gamma+K}{K}$ y $\mu = \frac{\alpha}{K}$ son obtenidas al reemplazar esta ecuación en las ec.(3.7) y ec.(3.8), de donde se obtiene:

$$< f(x) >= -\frac{\partial}{\partial\mu} \ln Z(\mu)$$

$$\lambda = \ln Z(\mu)$$

Donde

$$Z(\mu) = \sum_i e^{-\mu f(x_i)}$$

Como vemos, se obtiene la función de partición, con lo cual se puede obtener $< g(x) >$ y muchos resultados de la física estadística.

El principio de máxima entropía ha probado ser eficiente al ser usado en la mecánica clásica sin embargo, el de mínima información de Fisher ha mostrado ser una fuerte herramienta al relacionarlo con la mecánica cuántica [29]. A continuación se va a mostrar una aproximación a la mecánica cuántica, a través del uso de la información de Fisher.

3.2.2. Principio de mínima información de Fisher y Ecuación de Schrödinger

Marcel Reginatto justifica la ecuación de Schrödinger y la de Klein-Gordon partiendo de dos suposiciones [30]:

1. Que se puede asociar un frente de onda con el movimiento de las partículas.

2. Que la distribución de probabilidad de la posición de una partícula debe satisfacer el principio de mínima información de Fisher.

Las suposiciones de Reginatto implican que antes de realizarse la medición, un ensamble de partículas posee propiedades físicas objetivas, como por ejemplo la posición y la velocidad, y que a su vez tenemos el mínimo conocimiento acerca de estas magnitudes objetivas. Debido a esto para él, el contenido epistemológico de la teoría viene dado por la suposición 2, y el contenido físico de la teoría se encuentra en la suposición 1.

Consideremos un ensamble de partículas descritas por la densidad de probabilidad[3] $P(x^i, t)$. Suponiendo que la densidad de probabilidad se conserva, ésta debe

[3]Se va a conservar la notación tensorial usada en el artículo de Reginatto, la cual nos ayudará a visualizar ciertos aspectos de su propuesta.

satisfacer:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \sum_{i,k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(P v^i\right) = 0 \tag{3.9}$$

Ahora, al igual que lo hizo Bohm, supongamos que las trayectorias de las partículas son normales a una superficie con $S(x^i, t)$ constante, donde S es la acción, entonces su velocidad en el punto x^i es:

$$v^j(x^i, t) = \sum_{k=1}^{3} g^{jk} \frac{\partial S}{\partial x^k}$$

dónde la inversa de la métrica es la matriz diagonal de elementos g^{jk}, dónde los elementos de su diagonal son: $(1/m, 1/m, 1/m)$. Debido a esto la ec.(3.9) queda:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \sum_{i,k=1}^{3} g^{ik} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(P \frac{\partial S}{\partial x^k}\right) = 0 \tag{3.10}$$

Reginatto plantea que esta ecuación puede ser obtenida al minimizar con respecto a S la expresión:

$$\Phi_A = \int P \left(\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{3} g^{ik} \frac{\partial S}{\partial x^i}\frac{\partial S}{\partial x^k} + V\right) d^n x dt \tag{3.11}$$

Notemos que la minimización de esta expresión con respecto a P, nos deja con la ecuación de Hamilton-Jacobi. Es decir, minimizando a la ec.(3.11) con respecto a S y a P obtenemos las ecuaciones del movimiento desde el punto de vista clásico para un ensamble de partículas.

Según Reginatto, en la ec.(3.11) todavía existe una considerable libertad para escoger la densidad de probabilidad, ya que según la suposición 2, se debe restringir las posibles densidades de probabilidad usando el principio de mínima información de Fisher. Sin embargo, antes de hacer uso de dicho principio, Reginatto define a la cantidad de información en P como la contracción de la métrica g^{ik} con los elementos de la matriz de información de Fisher, es decir:

$$\Phi_B = \sum_{i,k=1}^{3} g^{ik} \int \frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial x^i}\frac{\partial P}{\partial x^k} d^n x dt = \sum_{i,k=1}^{3} g^{ik} I_{ik} \tag{3.12}$$

Reginatto afirma que va a aplicar el principio de mínima información de Fisher con la restricción de que la ec.(3.10) se cumpla, para lo cual minimiza el funcional [30]:

$$\Phi = \Phi_A + \lambda\Phi_B = \int P \left(\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{3} g^{ik} \frac{\partial S}{\partial x^i}\frac{\partial S}{\partial x^k} + V\right) d^n x dt + \lambda \sum_{i,k=1}^{3} g^{ik} \int \frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial x^i}\frac{\partial P}{\partial x^k} d^n x dt \tag{3.13}$$

De donde obtiene:

$$\frac{\partial P}{\partial t}+\sum_{i,k=1}^{3} g^{ik}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(P\frac{\partial S}{\partial x^k}\right)=0$$

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\sum_{i,k=1}^{3}\frac{1}{2}g^{ik}\frac{\partial S}{\partial x^i}\frac{\partial S}{\partial x^k}+V-\lambda\sum_{i,k=1}^{3} g^{ik}\left(\frac{2}{P}\frac{\partial^2 P}{\partial x^i\partial x^k}-\frac{1}{P^2}\frac{\partial P}{\partial x^i}\frac{\partial P}{\partial x^k}\right)=0 \tag{3.14}$$

A estas ecuaciones con $\lambda=\hbar/8$ y $\Psi=P^{1/2}\exp(iS/\hbar)$ se las puede obtener partiendo de la ecuación de Schrödinger, y partiendo de ellas se puede recuperar dicha ecuación.

Notemos la semejanza entre la ec.(3.13) y la ec.(3.6), y que las ecuaciones ec.(3.10) y ec.(3.14) son la version tensorial de las ecuaciones ec.(3.3) y ec.(3.4) de la teoría de Bohm. Por otra parte, desde mi punto de vista lo que Reginatto hace es minimizar el funcional Φ_A con la restricción de que la información:

$$\Phi_B = constante$$

Notemos que Reginatto obtiene la ecuación de Schrödinger para una partícula, cuando sus argumentos parten del análisis de un ensamble de partículas, lo cual nos induce a pensar que existe cierta inconsistencia en su deducción.

3.2.3. Principio fundamental de la mecánica cuántica propuesto por Zeilinger

Para Zeilinger [31] nuestra descripción física del mundo se la hace en base a proposiciones. De hecho, la descripción completa de un objeto la plantea en general como una lista de proposiciones. La postura realista considera que estas proposiciones reflejan propiedades que el objeto tiene intrínsecamente antes de, e independientemente de la observación. Sin embargo, notemos que dichas proposiciones se las obtiene en base a la observación, y que tales proposiciones son verificadas en base de futuras observaciones. De aquí que, un objeto es un constructo que conecta varias observaciones.

Si identificamos con el bit 1 a la proposición verdadera y con 0 a la falsa, entonces el principio de cuantización de la información que Zeilinger propone es: Un sistema elemental lleva un bit de información [31]. Por ejemplo, si una partícula de spin $1/2$ se encuentra en el estado Z_+, la proposición verdadera será: La medición del spin realizada sobre el eje z dará con certeza el valor $+\hbar/2$. El spin de esta partícula únicamente lleva la respuesta a la pregunta: ¿Cual es el spin a lo largo del eje z?. Ahora ya que ésta es la única información que el spin lleva, una medición realizada en otras direcciones necesariamente tendrá un elemento de azar. Debido a esto, la aleatoriedad irreducible en las mediciones cuánticas se debe a que un sistema elemental no lleva suficiente información para dar una respuesta definida a todas las preguntas.

El grado de aleatoriedad depende de la orientación relativa entre la dirección de la medición y la dirección correspondiente al estado propio de nuestra partícula. Por simetría, la probabilidad P de encontrar un cierto valor de spin a lo largo de una dirección especificada, dependerá sólo del ángulo θ que se forma entre la dirección de la medición y la dirección del estado propio. Esto concuerda con las predicciones de la mecánica cuántica donde $P = \cos(\theta/2)$, para $\theta = 90^o$ se tiene que $P = 1/2$. Notemos que en este caso la entropía es máxima, o en otras palabras se tiene máxima incertidumbre, es decir el sistema elemental no tiene ninguna información acerca de la medición en esa dirección. Por otra parte, la información que lleva ahora el sistema no es determinada en forma alguna por la información que llevaba antes de la medición. Debido a esto, en esta propuesta la información que el sistema representa ahora es creada espontáneamente al hacerse la medición [31].

Para Zeilinger, la cuantización es una consecuencia de que, lo que se puede decir acerca del mundo está expresado en proposiciones, y puesto que la afirmación más elemental es una única proposición, esto obliga a que cualquier cosa que se diga de un sistema muestre una cuantización. Finalmente, notemos que en esta propuesta, al igual que en la interpretación de Copenhague, el formalismo matemático representa el conocimiento del sistema.

Capítulo 4

Interpretación alternativa considerando la ausencia de identidad intrínseca de la realidad

4.1. Análisis de las interpretaciones presentadas

Hasta aquí hemos revisado algunas interpretaciones que pueden ser clasificadas como:

1. Interpretaciones que consideran que la función de onda describe a un ente o un campo objetivo; tales como la interpretación de Everett, Schrödinger, De Broglie, Madelung, Bohm.

2. La interpretación de Copenhague que relaciona a la función de onda con nuestro estado de conocimiento del sistema.

3. Interpretaciones como las de Reginnato y Zeilinger, que no interpretan directamente a la función de onda.

Con respecto a los casos en que Ψ es interpretado como la descripción de un campo objetivo, se tienen problemas al explicar el colapso de la función de onda. Esto se debe a que mientras no se realiza ninguna medición el campo se encuentra extendido sobre todas las regiones en que $\Psi \neq 0$; sin embargo, al efectuarse una medición el campo deja de existir simultáneamente en todos los puntos del espacio en los que este se encontraba, con excepción de uno. Esto sólo se podría explicar si todos los puntos del campo estuvieran correlacionados en “entanglement”, ya que de otra forma la información de que se está realizando una medición tendría una velocidad finita de propagación, por lo que el campo no podría contraerse simultáneamente.

Sin embargo, la suposición de que el campo se contraiga simultáneamente implica una contradicción con la suposición de que Ψ es objetivo. Esto se debe a que desde el punto de vista de la relatividad, la simultaneidad es relativa, entonces existe un observador B para el cual no se está realizando la medición. Y ya que la medición que realiza un observador A implica un cambio en Ψ, entonces se tiene a dos observadores con dos realidades objetivas distintas, lo cual contradice el concepto mismo de realidad objetiva.

Ahora con respecto a la interpretación de Copenhague considero que no se le puede ver al conocimiento del sistema como una realidad objetiva. Supongamos que el observador Alicia, que está en la region A en un instante t_o (con respecto a su sistema de referencia) realiza una medición. Alicia tendría un conocimiento del sistema distinto a Bernardo que se encuentra en la región B, si suponemos que para él, en el tiempo t_o medido en su sistema de referencia, la función de onda no colapsa. Esto sucede si la región B está lo suficientemente alejada de tal forma que, para el tiempo t_o medido en el sistema de referencia de Bernardo, la luz no llega con la información de lo que le sucede al sistema. De aquí que Ψ no es único, por lo tanto no puede ser objetivo. Sin embargo, para algunos científicos [5][11] es un problema considerar que la función de onda no sea única. Desde mi punto de vista, esto se debe a que consideran que no se va a tener una realidad en común para estudiar. Sin embargo, para tener dicha realidad común no se necesita una realidad objetiva. Solo se necesita que la misma realidad emerja para todos los observadores involucrados[1].

Finalmente, me gustaría aclarar que ni la interpretación de Copenhague, ni mucho menos otra postura presentada aquí, niegan o excluyen una realidad objetiva, como afirman algunos autores [10][32][33]. Desde mi punto de vista, Heisenberg tenía una postura positivista al interpretar el formalismo mecánico cuántico, y una posición realista al analizar la naturaleza de la realidad. Lo cual se puede elucidar en la siguiente afirmación de Heisenberg: La palabra 'suceder' . . . se aplica al suceso físico, no al acto psíquico de observar, y podríamos decir que la transición de lo 'posible' a lo 'real' sucede cuando el objeto interactúa con el aparato de medida, y de este modo el resto del mundo forma parte de esto; dicha transición no tiene que ver con el acto de registrar el resultado por la mente del observador. Sin embargo, el cambio discontinuo en la función de probabilidad tiene que ver con el acto de registrar, porque el cambio discontinuo de nuestro conocimiento en el instante de registrar es el que tiene su imagen en el cambio discontinuo de la probabilidad [9].

De hecho la posición más cercana a excluir el realismo es la de Jordan[2] el cual afirma que: " El electrón es forzado a una decisión. Nosotros lo obligamos a asumir una posición definida, previamente éste no se encontraba, en general, ni aquí ni allá; todavía no había tomado su decisión acerca de su posición definitiva" [7]. Sin embargo, además de asumir la existencia del electrón como un hecho intrínseco de la naturaleza, también rechazaba el hecho de que sus aseveraciones podrían aplicarse a la macro física.

A continuación se propone un marco conceptual y formal para explicar los fenómenos físicos, la cual no está basada en la postura realista.

[1] La explicación de como esto puede suceder se encuentra en la siguiente sección

[2] Dicha postura es conocida como la "formulación máxima de la interpretación de Bohr"

4.2. Propuesta alternativa

"Las cosas no tienen una explicación para que ocurran sino que, simplemente porque ocurren, obtienen una explicación. Pero tal explicación carece de cualquier valor ontológico, no es esencial" [34]

El marco conceptual de esta propuesta se basa en la siguiente afirmación:

Cualquier aspecto de la realidad [3] carece de ser y existencia intrínsecos[4]. Estos emergen de forma condicionada o dependiente, es decir, debido a ciertas condiciones. Esto se aplica incluso a dichas condiciones, y si éstas no emergen, entonces el aspecto de la realidad bajo estudio no se debe considerar como no existente, sino más bien como inefable.

Para aclarar mi posición debo enfatizar que no estoy negando la existencia o la identidad de las cosas, las cosas son y existen pero de manera dependiente. De hecho, la identidad de cierto aspecto de la realidad es un conjunto de características o propiedades que evitan que dicho aspecto sea el resto de aspectos de la realidad. En este sentido, el ser y existencia de cada aspecto de la realidad es dependiente de su contexto y viceversa. Así también, cualquier caracterización como: X existe, X no existe, X existe y no existe, X ni existe ni no existe, surge de manera dependiente.

Afirmar que el ser y la existencia de cualquier aspecto de la realidad emerge de manera dependiente, es una caracterización de la realidad que asume una ley de causa y efecto. Esta ley implica que no sólo cada efecto tiene una causa, sino que el ser y la existencia de cada causa también emerge debido a otra causa. Es decir, cada causa es en sí un efecto. Esto es una serie infinita de eventos relacionados entre sí, donde se excluye la posibilidad de una causa inicial. Desde mi punto de vista el realismo no obedece dicha ley, puesto que asume una causa inicial[5], rompiendo así la cadena de causa y efecto. Por otra parte, argumentar que dicha causa inicial se causa a sí misma no tiene sentido, pues esto implicaría que dicha causa tuvo que existir antes de haber existido.

Debo aclarar que no estoy negando la existencia de patrones en el comportamiento de la naturaleza, sino más bien estoy afirmando que dichos patrones son circunstanciales, es decir, emergen de manera dependiente. Ahora, se va a aplicar estas ideas a la física.

[3] Los términos: "aspecto de la realidad" se refieren a cualquier fenómeno, evento o suceso, cosa o entidad.

[4] Otra forma de expresar esta afirmación es: Cualquier aspecto de la realidad carece de identidad y existencia subyacentes e independientes.

[5] En el caso del realismo la causa inicial sería, por ejemplo: la esencia, la identidad y existencia propias

4.2.1. Procesos

Definición. Un proceso *es el conjunto de todos los eventos o causas debido a los cuales emergen la existencia, y determinado valor de cierta magnitud física. Así también, se llamará proceso al conjunto de todas las causas debido a las cuales emerge la identidad y la existencia de cierto objeto. Donde cada causa es en sí un efecto, y por lo tanto, los procesos se generan o se establecen. El conjunto de todos los posibles procesos que puedan generarse o establecerse será notado como* Λ.

Desde mi punto de vista, la ciencia se basa en las suposiciones que se hagan acerca de la naturaleza de la realidad y en el método inductivo. El método inductivo se basa en la experimentación y ésta a su vez se basa, por ejemplo: en el proceso de percepción humana, la naturaleza de nuestros sentidos, las influencias físicas que se usen. A continuación se plantea un ejemplo donde se muestra cómo depende el experimento de la influencia física usada.

Imaginemos que un cazador dispara a un pájaro que está junto a un murciélago. El orden de los eventos que el cazador ve es: primero la bala sale de su escopeta, y luego el pájaro impactado por la bala muere, ambos eventos en ese orden temporal forman parte de lo que sucede para el cazador. Ahora asumamos que el murciélago usa sonido para conocer su entorno y que la velocidad de la bala es mayor a la del sonido. El orden de los eventos que percibe el murciélago es: primero el pájaro muere, y luego el cazador dispara. Esto se debe a que el pájaro está lo suficientemente cerca al murciélago como para que primero le llegue la información de la muerte del pájaro. Ambos eventos en ese orden temporal forman parte de lo que sucede para el murciélago.

Ahora, basándonos en la postura que se propone aquí, el suceso que emerge para el cazador es equivalente al suceso que emerge para el murciélago, en el sentido de que ninguno tiene una jerarquía de importancia o veracidad con respecto al otro, y no son meras interpretaciones de un único hecho que sucede independientemente del murciélago y del cazador. Además, notemos que los distintos sucesos se deben a las distintas influencias físicas que se han usado, que en este caso son: luz y sonido.

De igual manera, si nos basamos en la postura planteada aquí y en los resultados de la relatividad especial se puede decir que: Una vez que ha emergido la existencia del observador y de lo que se observa, los intervalos de longitud, de tiempo, y en general las magnitudes cinemáticas y dinámicas dependen de la velocidad relativa que hay entre el observador y lo que se observa. Notemos que usando cualquier influencia física se tiene que el tiempo y la simultaneidad son relativos. Es decir, si la luz viajara a una velocidad distinta o si se usara otra influencia física, los intervalos de longitud y de tiempo dependerán, por lo menos, de la velocidad de la influencia física que se use y de la velocidad relativa.

De todo lo dicho se puede plantear que algunos eventos o causas de los que dependen la existencia y los valores que puede tomar cualquier magnitud física son: La influencia física que se elige para percibir el experimento, la naturaleza de nuestros sentidos, la velocidad relativa entre el observador y lo que se observa. Debido a esto, estos eventos forman parte de un proceso.

4.2.2. Inefabilidad

Postulado de Inefabilidad. *Cada magnitud física (como la posición, el momento, el tiempo), y cada objeto emergen*[6] *debido a un proceso, si dicho proceso no se establece, dicha magnitud u objeto es inefable.*

En el postulado, cuando se afirma que: Si no se establece el proceso debido al cual emerge cierta magnitud u objeto, entonces dicha magnitud u objeto es inefable, se quiere decir que en este caso la naturaleza de dicha magnitud u objeto es indescriptible. Así por ejemplo, supongamos que se analiza la posición de un móvil. Según el postulado anterior si no se establece el proceso que haga emerger a la posición, no tiene sentido afirmar que el móvil está, o que no está en alguna posición; así mismo en este caso, carece de sentido decir que el espacio existe, o que no existe, simplemente el espacio es inefable. Debido a esto se puede concluir que:

Conclusión de Inefabilidad. *Los valores de cierta magnitud que emergen debido a determinados procesos no reflejan nada, o en otras palabras no llevan ninguna información, de la naturaleza de dicha magnitud en el estado en el que dichos procesos no se establecen, pues en ese estado la naturaleza de dicha magnitud es inefable.*

Ahora, recordemos que la información de Fisher:

$$I = \int P(y|\theta) \left(\frac{\partial ln P(y|\theta)}{\partial \theta} \right)^2 dy$$

nos da la información acerca de θ contenida en los datos y. Notemos que desde el punto de vista que se propone aquí, y son los valores de una magnitud que emergen debido a que se generan distintos procesos, y θ representa dicha magnitud física en el estado en el que los procesos no se han establecido. Debido a esto, para reflejar

[6] Al decir que cada magnitud física emerge, me refiero a que emergen la existencia y cierto valor que tome dicha magnitud. De la misma forma cuando se dice que el objeto emerge, me refiero a que emergen su identidad y existencia

la conclusión basta exigir que la información de Fisher[7] sea cero, es decir:

$$I = \int \frac{1}{P(y)} \left(\frac{\partial P(y)}{\partial y} \right)^2 dy = 0 \tag{4.1}$$

Ahora ya que dicha conclusión refleja el hecho de que: sin que se den los procesos las magnitudes y objetos son inefables, entonces la ecuación (4.1) a la cual llamaré condición de inefabilidad, formaliza en parte al postulado. Es decir, que para reflejar que la magnitud y es inefable en el estado en el que los procesos no se generan[8], se debe aplicar la condición de inefabilidad a dicha magnitud.

4.2.3. Objetos y Magnitudes Potenciales

Para formalizar completamente el postulado se debe reflejar la situación de que cierta magnitud u objeto emergerá si se establece determinado proceso. Para lograr esto, en primer lugar se debe reflejar formalmente que las magnitudes y objetos se generan, es decir, que de por sí no existen. Para lo cual empezaremos por introducir la siguiente definición:

Definición. Se llamarán magnitud potencial y objeto potencial *a la posible magnitud física y objeto que emergería si es que se estableciera determinado proceso*

En segundo lugar, se hace explícita la relación biunívoca que existe entre los procesos y los valores de las magnitudes a través de la función biyectiva F. La función F es tal que $y = F(r)$, donde $y \epsilon \Omega \subset \mathbb{R}$, toma los valores de cierta magnitud física[9] y $r \epsilon \Lambda$. Notemos que, mientras no se fije el argumento de F, la variable y hará referencia a las magnitudes potenciales.

El conjunto de posibles procesos Λ debe tener ciertas restricciones que sean compatibles con las leyes de la física. La existencia de estas leyes implica que sólo ciertos procesos pueden establecerse simultáneamente. A continuación se harán tres suposiciones acerca del conjunto de procesos y las magnitudes potenciales, de tal forma que se puedan obtener las ecuaciones de Hamilton-Jacobi y la ecuación de la continuidad, las cuales, al ser obtenidas para las magnitudes potenciales, deben ser interpretadas de manera distinta a la usual.

Sea **Q** $\subset \Lambda$ el subconjunto de posibles procesos r_q, donde a cada uno le corresponde un valor de posición potencial, **P** $\subset \Lambda$ el subconjunto de posibles procesos r_p,

[7] Se va a usar la forma paramétrica de la información de Fisher. Vease: Información de Fisher, en el apartado 3.2.1

[8] O en otras palabras, para reflejar que la magnitud y carece de identidad intrínseca

[9] Por facilidad se va a trabajar en una dimensión. Cuando hablemos de posición, momento, tiempo u otras magnitudes usaremos, en vez de y, notaciones usuales como x, p, t, etc.

donde a cada uno le corresponde un valor de momento potencial, **T** $\subset \Lambda$ el subconjunto de posibles procesos r_t donde a cada uno le corresponde un valor de tiempo potencial y **M** $\subset \Lambda$ el subconjunto de posibles procesos r_m donde a cada uno le corresponde un tipo de objeto potencial[10]. Vamos a suponer que:

1. Se pueden establecer simultáneamente los procesos (r_q, r_p, r_m).

2. Λ se mantiene constante en el tiempo.

3. Para cada punto (q, p) existe un volumen infinitesimal dV_o en el espacio de fases potencial que lo contiene.

Vamos a enfocarnos en el objeto potencial γ, el cual surgirá si se establece el proceso $r_{m\gamma}$. Debido a esto los tripletes que se analizaran serán de la forma[11] $(r_q, r_p, r_{m\gamma})$.

Notemos que la suposición (1) implica que para un instante potencial t_o, el número de objetos potenciales γ es igual al número de puntos potenciales (q, p) del espacio de fases potencial. Debido a la suposición (2), el conjunto de todos los posibles tripletes $(r_q, r_p, r_{m\gamma})$ permanecerá constante en el tiempo. Por lo tanto el espacio de fases potencial, y el numero de objetos potenciales γ permanecerá constante en el tiempo. Ahora, considerando al conjunto de objetos potenciales γ en el espacio de fases potencial como un fluido, se tiene que estos cumplen con [36]:

$$\frac{\partial \rho_\gamma}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_\gamma \dot{q})}{\partial q} + \frac{\partial (\rho_\gamma \dot{p})}{\partial p} = 0$$

donde ρ_γ es la densidad de objetos potenciales γ

Tomando en cuenta la suposición (3), y lo dicho en el párrafo anterior podemos concluir que: La densidad de objetos potenciales γ considerada en un punto dado del espacio de fases potencial, permanece constante al pasar el tiempo, y que dicha densidad en ese punto es la misma que en cualquier otro punto. Por lo tanto se tiene que:

$$\frac{d\rho_\gamma}{dt} = 0$$

Ahora, ya que todos los razonamientos hechos hasta aquí se pueden hacer para cualquier tipo de objeto potencial, se tiene que en general las magnitudes y objetos potenciales cumplen con:

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 \tag{4.2}$$

[10] Un tipo de objeto potencial sería ,por ejemplo, un electrón, otro tipo podría ser un átomo

[11] Notemos que, si se generan simultáneamente los procesos $(r_{q_o}, r_{p_o}, r_{m\gamma})$, entonces la posición q_o, el momento p_o y el objeto γ llegarán a existir. Además, el objeto γ ocupará dicha posición y tendrá dicho momento.

y

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \dot{q})}{\partial q} + \frac{\partial(\rho \dot{p})}{\partial p} = 0 \tag{4.3}$$

donde $\rho(q,p)$ es la densidad de objetos potenciales en el espacio de fases potencial.

Ahora desarrollando la ec.(4.2) se tiene

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \dot{q}\frac{\partial \rho}{\partial q} + \dot{p}\frac{\partial \rho}{\partial p} = 0 \tag{4.4}$$

y desarrollado la ec.(4.3) se tiene

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \dot{q}\frac{\partial \rho}{\partial q} + \dot{p}\frac{\partial \rho}{\partial p} + \rho\left[\frac{\partial \dot{q}}{\partial q} + \frac{\partial \dot{p}}{\partial p}\right] = 0 \tag{4.5}$$

Y ya que se cumplen simultáneamente las ecuaciones (4.4) y (4.5), los términos entre corchetes se deben anular. Entonces

$$\frac{\partial \dot{q}}{\partial q} = -\frac{\partial \dot{p}}{\partial p}$$

De aquí que, existe una función H continua y derivable, tal que:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad \text{y} \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

Estos resultados se pueden interpretar como que las suposiciones (1), (2) y (3) restringen al conjunto Λ de tal forma que las magnitudes potenciales se relacionan entre sí como lo dictan las ecuaciones de Hamilton. Ahora, ya que la descripción de los fenómenos a través de las ecuaciones de Hamilton, y la descripción hecha por la ecuación de Hamilton- Jacobi son equivalentes, se hará uso de esta última[12], es decir:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + V = 0 \tag{4.6}$$

donde S es la acción.

Notemos que la suposición (1) implica que para el mismo objeto γ que podrá emerger para un instante dado t_o existen muchas posiciones y momentos por emerger. Sin embargo, de todas las posiciones y momentos posibles sólo emergerá una única posición y un único momento para dicho objeto. Esto no contradice el principio de incertidumbre pues como afirma Griffits: Tanto las mediciones de la posición y de momento dan un valor preciso, la dispersíon se refiere al hecho de que mediciones en sistemas idénticos no dan resultados consistentes. Uno puede preparar al sistema de tal forma que mediciones de posición repetidas den resultados muy cercanos, pero el precio a pagar es que las medidas del momento en este estado darán valores ampliamente dispersos [18].

[12]Por comodidad se usará como coordenada generalizada potencial q a la coordenada potencial x.

Ahora, todo lo que puede ser y existir dentro de nuestro universo depende de Λ. De aquí que la suposición (2) es equivalente a suponer que todo lo que nuestro universo permita ser y existir se mantenga constante al transcurrir el tiempo. Por otro lado, todos los valores de posición y momento que se han logrado obtener o medir en algún momento fueron valores de magnitudes potenciales. De aquí que la suposición (3) se cumple.

Finalmente, para formalizar completamente el hecho de que las magnitudes se generan vamos a relacionar la densidad de objetos potenciales $\rho(x,t)$ con la densidad de probabilidad $P(x,t)$. Notemos que, aumenta la probabilidad de que un objeto emerja en un intervalo dx de espacio, mientras más objetos potenciales le corresponden a dicho intervalo. Por lo tanto, vamos a considerar que $P(x,t) = a\rho(x,t)$, donde a es una constate.

4.2.4. Justificación de la Ecuación de Schrödinger

Antes de obtener la ecuación de Schrödinger notemos que el número de objetos potenciales se mantiene constante, independientemente de que ρ sea función de x, p y t, o de que ρ sea función de x y t. De aquí que los objetos potenciales cumplen con:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0$$

Ahora, usando la relación de proporcionalidad entre $P(x,t)$ y $\rho(x,t)$, y la relación $v = \frac{1}{m}\frac{\partial S}{\partial x}$, la cual es una consecuencia de la ecuación de Hamilton-Jacobi, tenemos que a la ecuación anterior se la puede expresar así:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial x}P\frac{\partial S}{\partial x} = 0 \tag{4.7}$$

Ahora, recordemos que al conjunto de objetos potenciales en el espacio de fases potencial lo estamos considerando como un fluido. Notemos que la configuración del fluido se especificará al determinar el par $(v(x,t), \rho(x,t))$. Sin embargo, la velocidad se la puede obtener a través de la acción, y para formalizar de manera adecuada al postulado, $\rho(x,t)$ será reemplazado por $P(x,t)$, es decir la configuración del fluido se obtendrá a través del par $(S(x,t), P(x,t))$, el cual es solución de las ecuaciones (4.6) y (4.7).

A partir de aquí se usa un procedimiento similar al usado por Reginatto [30] para obtener la ecuación de Schrödinger. Notemos que las ecuaciones (4.6) y (4.7) se obtendrán al minimizar el funcional [30]:

$$L_1 = \int P\left(\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + V\right) dxdt$$

Ahora, de acuerdo al postulado de inefabilidad las magnitudes del funcional L_1 son inefables en el estado en el que los procesos no son generados. Para reflejar matemáticamente esto, debemos aplicar la condición de inefabilidad a dichas magnitudes. Notemos que S, P y V dependen de x y t, debido a esto la condición de inefabilidad debe ser aplicada únicamente a éstos. Sin embargo, para obtener la ecuación de Schrödinger se aplicará dicha condición[13] únicamente a x. Por lo tanto el funcional L_1 será restringido exigiendo que se cumpla:

$$\int \frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 dx = 0$$

por lo que el nuevo funcional a minimizar será [37]:

$$L_2 = \int P\left(\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + V\right) + \lambda\frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 dxdt$$

Recordemos que la ecuación de Euler-Lagrange es [37]:

$$F_\mu - \frac{\partial}{\partial x}(F_r) - \frac{\partial}{\partial t}(F_w) = 0$$

donde $r = \frac{\partial\mu}{\partial x}$, $w = \frac{\partial\mu}{\partial t}$, el sub-índice de F indica la derivada parcial de F con respecto a ese sub-índice y F es el integrando del funcional al cual se le aplica esta ecuación. Ahora se va a aplicar la ecuación de Euler-Lagrange a L_2:

Tomando $\mu = P$ se obtiene:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + V - \frac{\lambda}{P^2}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2\lambda}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)\right) = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + V - \frac{\lambda}{P^2}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 - \left[-\frac{2\lambda}{P^2}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + \frac{2\lambda}{P}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right] = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 - \lambda\left(\frac{2}{P}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \frac{1}{P^2}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2\right) + V = 0 \tag{4.8}$$

Ahora, tomando $\mu = S$ se tiene:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{P}{m}\frac{\partial S}{\partial x}\right) - \frac{\partial P}{\partial t} = 0$$

[13] En el caso no relativista no se va a considerar que t carece de identidad intrínseca. Esto implica que, para este caso, consideramos la posibilidad de que t tenga una identidad completamente independiente, es decir, t no dependería ni del sistema de referencia, ni de la velocidad de la luz. En el caso relativista la condición de inefabilidad también será aplicada a la coordenada ct

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial x}P\frac{\partial S}{\partial x} = 0 \tag{4.9}$$

Utilizando las dos ecuaciones de Euler-Lagrange (4.8) y (4.9) conjuntamente con $\lambda = \frac{\hbar^2}{8m}$ y $\Psi = P^{1/2}\exp(iS/\hbar)$ se puede obtener la ecuación de Schrödinger y viceversa[14]. En este sentido las ecuaciones ec.(4.8) y ec.(4.9) son equivalentes a la ecuación de Schrödinger.

De todo lo dicho se ve que para formalizar el postulado se siguió los siguientes pasos:

1. Hacer uso de la condición de inefabilidad.

2. Establecer una relación biunívoca entre los procesos y los valores de las magnitudes.

3. Relacionar a la densidad de objetos potenciales con la densidad de probabilidad de la siguiente manera: $P(x,t) = a\rho(x,t)$, donde a es una constante.

Sin embargo para llegar a obtener las ecuaciones (4.7) y (4.8) también se tuvo que hacer las suposiciones (1), (2), (3) del apartado 4.2.3.

Ahora notemos que el primer término entre paréntesis del funcional L_2 corresponde al lado izquierdo de la ecuación de Hamilton-Jacobi, éste es:

$$H_o = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + V$$

Esto sugiere un método para pasar de las ecuaciones clásicas a su versión cuántica. Si asumimos que la versión clásica viene dada por la ecuación de Hamilton-Jacobi, y reemplazamos su correspondiente H_o en el funcional[15] L_2, entonces al minimizar dicho funcional se obtiene su versión cuántica. Para mostrar la utilidad de este método, en los siguientes párrafos se lo usará para obtener la ecuación de Klein-Gordon, y la ecuación de Klein-Gordon para una partícula en un campo electromagnético.

[14]Este desarrollo lo realizaron Bohm y Madelung. Notemos que en dicho desarrollo no se introduce el término $\Psi = P^{1/2}\exp(iS/\hbar)$, sino que al reconstruir la ecuación de Schrödinger aparece la expresión $P^{1/2}\exp(iS/\hbar)$ a la cual simplemente se la nota como Ψ

[15]También debemos tomar en cuenta que, si nos encontramos en el caso relativista, debemos restringir al funcional L_2 aplicando la condición de inefabilidad a la coordenada ct

4.2.5. Justificación de la ecuación de Klein-Gordon

Para obtener la ecuación de Klein-Gordon se usa las versión relativista de la ecuación de Hamilton-Jacobi[16]. Ésta puede expresarse de la siguiente manera [38]:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 + m_o^2c^2 = 0$$

donde m_o es la masa en reposo de la partícula.

Ahora, reemplazando

$$H_o = \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 + m_o^2c^2$$

en el funcional L_2 y restringiendo a este funcional a través de la condición de inefabilidad aplicada a la coordenada ct, entonces el nuevo funcional a minimizar es:

$$L_3 = \int P\left(\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 + m_o^2c^2\right) + \frac{\lambda}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + \frac{\beta}{c^2P}\left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)^2 dxdt$$

Se va a aplicar Euler-Lagrange a L_3:

Tomando $\mu = P$ se obtiene:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 + m_o^2c^2 + G = 0 \tag{4.10}$$

$$G = \left[-\frac{\lambda}{P^2}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 - \frac{\beta}{c^2P^2}\left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)^2\right] - 2\lambda\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\lambda}\frac{\partial P}{\partial x}\right) - \frac{2\beta}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial t}\right)$$

Ahora desarrollando G nos queda:

$$G = \left[-\frac{\lambda}{P^2}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 - \frac{\beta}{c^2P^2}\left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)^2\right] + \frac{2\lambda}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 - \frac{2\lambda}{P}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{2\beta}{c^2P}\left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)^2 - \frac{2\beta}{c^2P}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}$$

Por lo que la ec.(4.10) queda:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 + m_o^2c^2 - \left(\frac{2\lambda}{P}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{2\beta}{c^2P}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}\right) + \left(\frac{\lambda}{P^2}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + \frac{\beta}{c^2P^2}\left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)^2\right) = 0 \tag{4.11}$$

Ahora tomando $\mu = S$ se tiene:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2P}{m}\frac{\partial S}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{2P}{c^2m}\frac{\partial S}{\partial t}\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(P\frac{\partial S}{\partial x}\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(P\frac{\partial S}{\partial t}\right) = 0 \tag{4.12}$$

[16] Vamos a considerar la ecuación relativista de Hamilton-Jacobi para la partícula libre

A través del par de ecuaciones (4.11) y (4.12), al cual nos referiremos como KGeq, junto con $\lambda = \frac{\hbar^2}{4}$, $\beta = -\frac{\hbar^2}{4}$ y $\Psi = P^{1/2}exp(iS/\hbar)$ se puede obtener la ecuación de Klein-Gordon:

$$\hbar^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - m_o^2 c^2 \Psi = \frac{\hbar^2}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}$$

Dicho desarrollo se muestra en el Apéndice A. Así también, a través de la ecuación de Klein-Gordon se puede obtener el par de ecuaciones KGeq. Debido a esto, el par KGeq es equivalente a la ecuación de Klein-Gordon.

Recordemos que en la teoría cuántica relativista se tiene problemas al tratar de interpretar a la expresión

$$\varrho = \frac{i\hbar}{2m_o c^2} \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \right)$$

como la densidad de probabilidad, esto se debe a que esta expresión puede ser negativa [35]. Sin embargo, desde el punto de vista de la teoría planteada aquí, se obtiene que la densidad de probabilidad es $P = \Psi\Psi^*$.

De hecho si reemplazamos:

$$\Psi = P^{1/2}exp(iS/\hbar)$$

$$\Psi^* = P^{1/2}exp - (iS/\hbar)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = exp(iS/\hbar) \left(\frac{P^{1/2}}{2} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{iP^{1/2}}{\hbar} \frac{\partial S}{\partial t} \right)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = exp(iS/\hbar) \left(\frac{P^{1/2}}{2} \frac{\partial P}{\partial t} - \frac{iP^{1/2}}{\hbar} \frac{\partial S}{\partial t} \right)$$

en la expresión ϱ, ésta queda como:

$$\frac{i\hbar}{2m_o c^2} \left[P^{1/2} \left(\frac{1}{2P^{1/2}} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{iP^{1/2}}{\hbar} \frac{\partial S}{\partial t} \right) - P^{1/2} \left(\frac{1}{2P^{1/2}} \frac{\partial P}{\partial t} - \frac{iP^{1/2}}{\hbar} \frac{\partial S}{\partial t} \right) \right]$$

$$= \frac{i\hbar}{2m_o c^2} \frac{2iP}{\hbar} \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{PE}{m_o c^2}$$

donde E es la energía total, y ya que ésta puede ser positiva o negativa se da una explicación simple al hecho de que ϱ pueda ser negativa.

Por otro lado tomando en cuenta que en el caso no relativista la diferencia entre la energía total E y la energía en reposo $m_o c^2$ es pequeña, se tiene que:

$$\frac{PE}{m_o c^2} \to P$$

Esto explica de manera sencilla del porqué desde el punto de vista de la teoría cuántica relativista ϱ, a pesar de no ser considerada como una densidad de probabilidad, en el limite no relativista tiende a la densidad de probabilidad [35].

4.2.6. Justificación de la ecuación de Klein-Gordon para partículas en Campos Electromagnéticos

Ahora, siguiendo el método propuesto, se parte de la ecuación de Hamilton-Jacobi para una partícula en un campo electromagnético, la cual es [38]:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}-\frac{e}{c}A_x\right)^2-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}+e\phi\right)^2+m_o^2c^2=0$$

Luego reemplazando

$$H_o=\left(\frac{\partial S}{\partial x}-\frac{e}{c}A_x\right)^2-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}+e\phi\right)^2+m_o^2c^2$$

en L_2 y, al igual que en el caso anterior, aplicando la condición de inefabilidad a la coordenada ct y a x, entonces se tiene que el funcional a minimizar es:

$$L_4=\int P\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}-\frac{e}{c}A_x\right)^2-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}+e\phi\right)^2+m_o^2c^2\right]+\frac{\lambda}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2+\frac{\beta}{c^2P}\left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)^2dxdt$$

Aplicando Euler-Lagrange a L_4:

Tomando como $\mu=P$ se obtiene:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}-\frac{e}{c}A_x\right)^2-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}+e\phi\right)^2+m_oc^2-\frac{\lambda}{P^2}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2+\frac{\beta}{c^2P^2}\left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)^2+G=0 \quad (4.13)$$

Donde:

$$G=-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2\lambda}{P}\frac{\partial P}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{2\beta}{c^2P}\frac{\partial P}{\partial t}\right)$$

Desarrollando G:

$$G=\left[\frac{2\lambda}{P^2}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2+\frac{2\beta}{c^2P^2}\left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)^2\right]-\left[\frac{2\lambda}{P}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\frac{2\beta}{c^2P}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}\right]$$

Entonces la ec.(4.13) queda:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}-\frac{e}{c}A_x\right)^2-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}+e\phi\right)^2m_o^2c^2+\left[\frac{\lambda}{P^2}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2+\frac{\beta}{c^2P^2}\left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)^2\right]-\left[\frac{2\lambda}{P}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\frac{2\beta}{c^2P}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}\right]=0 \quad (4.14)$$

Y tomando como $\mu=S$ se tiene:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left[2P\left(\frac{\partial S}{\partial x}-\frac{e}{c}A_x\right)\right]-\frac{\partial}{\partial t}\left[-\frac{2P}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}+e\phi\right)\right]=0$$

$$-\left[\frac{\partial P}{\partial x}\left(\frac{\partial S}{\partial x}-\frac{e}{c}A_x\right)+P\left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}-\frac{e}{c}\frac{\partial A_x}{\partial x}\right)\right]+\frac{1}{c^2}\left[\frac{\partial P}{\partial t}\left(\frac{\partial S}{\partial t}+e\phi\right)+P\left(\frac{\partial^2 S}{\partial t^2}+e\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)\right]=0 \quad (4.15)$$

A partir del par de ecuaciones (4.14) y (4.15), al cual nos referiremos como KGEeq, junto con $\lambda = \frac{\hbar^2}{4}$ $\beta = -\frac{\hbar^2}{4}$ y $\Psi = P^{1/2}\exp(iS/\hbar)$ se puede obtener la ecuación de Klein-Gordon para una partícula en un campo electromagnético, la cual es:

$$\frac{1}{c^2}\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - e\phi\right)^2\Psi = \left[\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial x} + \frac{e}{c}A_x\right)^2 + m_o^2c^2\right]\Psi \tag{4.16}$$

También se tiene que, a partir de ésta ecuación se puede obtener el par KGEeq, dicho proceso se muestra en el Apéndice B. De lo dicho se tiene que, el par KGEeq es equivalente a la ecuación de Klein-Gordon para una partícula en un campo electromagnético.

4.2.7. Problemas de la medición y de Fenómenos no locales

De los desarrollos realizados para obtener la ecuación de Schrödinger, se concluye que la función de onda que obedece esta ecuación es una función de onda potencial puesto que sólo depende de magnitudes potenciales. De aquí que la función de onda potencial es la que evoluciona de manera continua. Por otra parte, debido al postulado de inefabilidad, las magnitudes emergen dependiendo de los procesos. Si un determinado proceso se establece, entonces uno y sólo un valor de una magnitud física emerge. Esto implica que al establecerse un proceso el sistema se encuentra en una función propia del observable medido. Y ya que cada proceso involucra al acto de medir, entonces se tiene que la propuesta planteada, contempla la evolución discontinua, o en otras palabras el colapso de la función de onda. Es decir, la propuesta planteada aquí contempla de manera consistente a las dos formas de evolución de la función de onda. La consistencia se debe a que solo la función de onda potencial obedece el principio de superposición, y por ende sólo un sistema de partículas potenciales pueden estar en un estado puro. En otras palabras, la forma en la que la propuesta planteada aquí resuelve el problema de la medición es obteniendo una función de onda potencial que obedece a la ecuación de Shrödinger, donde los valores de las magnitudes potenciales dejan de ser potenciales cuando se realiza una medición.

Ahora, con respecto a los fenómenos no locales notemos que en esta propuesta, no se necesita que haya una comunicación entre dos partes de un sistema para que los valores de las magnitudes de dichas partes emerjan simultáneamente. Lo que se necesita es que se establezcan simultáneamente los procesos que hagan emerger a dichos valores. Esto implica que las funciones de onda de las partes de un sistema podrán colapsar simultáneamente, de forma correlacionada de manera que no contradigan el estado global que las describe, y sin importar cuán alejadas están entre si. Es decir, el marco conceptual planteado también soporta la existencia de los fenómenos no locales, sin tener que recurrir, por ejemplo, a influencias físicas que superen la velocidad de la luz, o al conocimiento de un sistema con existencia e identidad propias.

Finalmente, notemos que en esta propuesta la función de onda simplemente colapsa, es decir, no tiene sentido hablar del lugar donde colapsa la función de onda. Esto se debe a que según el postulado las magnitudes simplemente emergen, es decir, en esta caracterización de la realidad, no es pertinente aplicar la idea de pertenencia a la existencia. En otras palabras los fenómenos sólo suceden, incluso la propia existencia sólo sucede, no tiene sentido decir que algo le sucede o le pertenece a tal o cual ente.

Capítulo 5

Conclusiones

Las suposiciones acerca de la naturaleza de la realidad influyen en la formalización de las teorías físicas. Dichas suposiciones son muy sutiles en la mera descripción de un fenómeno y en la formalización de éste. Sin embargo, éstas se vuelven relevantes en la generación de un principio, o una teoría. Así, en las interpretaciones que se exploraron en la primera parte de este trabajo vemos un fuerte arraigo a la postura realista. Un ejemplo de ello es la influencia de dicha postura en las conclusiones a las que llegan EPR.

La influencia de las suposiciones acerca de la naturaleza de la realidad en la formalización de una teoría física, se hace explícita con la teoría planteada aquí. Esto se debe a que, partiendo de una postura distinta a la realista, se obtiene el formalismo matemático de la mecánica cuántica y además un marco conceptual consistente, el cual soporta los fenómenos no locales y contempla las dos formas de evolución de la función de onda. La teoría propuesta se basa en el aquí llamado Postulado de la Inefabilidad. Para formalizar dicho postulado se definen las magnitudes potenciales, se establece una relación bi-unívoca entre éstas y los posibles procesos, se relaciona a la densidad de probabilidad $P(x,t)$ con la densidad de objetos potenciales $\rho(x,t)$, y se hace uso de la Información de Fisher.

Las magnitudes potenciales son relevantes al resolver los problemas conceptuales. Así, al considerar el problema de la medición concluimos que la ecuación de Schrödinger gobierna el comportamiento de las posibilidades, específicamente describe el comportamiento de las magnitudes y objetos potenciales. En este sentido, no se espera que la función de onda siga una evolución continua al momento de realizarse una medición, puesto que dicha medición implica el paso de lo que puede ser, a lo que es. Además se justifican los fenómenos no locales, considerando que el único requisito para que dos magnitudes potenciales emerjan simultáneamente, de manera correlacionada sin contradecir el estado global que las describe, es que se generen simultáneamente los procesos adecuados. Es decir, gracias a la consideración de las magnitudes potenciales se pudo superar el problema de la medición y explicar los fenómenos no locales.

Por otra parte, la Información de Fisher, adoptada específicamente en la condición de inefabilidad, nos permite obtener resultados formales. Dicha condición formaliza el rasgo fundamental de la propuesta planteada, es decir, refleja la ausencia de identidad intrínseca de las magnitudes y objetos. Esta condición nos ayuda a justificar las ecuaciones cuánticas estudiadas en este trabajo. De hecho, mediante dicha condición generamos un método para pasar de las ecuaciones clásicas a sus correspondientes versiones cuánticas. Debido a esto, se puede decir que lo que diferencia al formalismo matemático clásico del cuántico, es que el formalismo cuántico toma en cuenta la ausencia de identidad intrínseca de las magnitudes físicas. En este sentido la propuesta de que la realidad carece de identidad intrínseca, se convierte en un principio fundamental y profundo que caracteriza a la mecánica cuántica.

La teoría planteada no intenta probar cuál es la naturaleza de la realidad, sino más bien brinda una opción distinta de las teorías basadas en la postura realista para hacer ciencia. Esta teoría es funcional y eficiente, ya que a través de ésta se justifican la ecuación de Shrödinger, la ecuación de Klein-Gordon, la ecuación de Klein-Gordon para campos electromagnéticos, y se propone el método mencionado.

Para terminar, es necesario recalcar la importancia del Postulado de Inefabilidad en el desarrollo del presente trabajo. La formalización de éste no sólo permite resolver en forma natural el problema de la medición y explicar los fenómenos no locales, sino también permite generar el método mencionado. Finalmente, se recomienda que se use dicho método para la ecuación de Hamilton-Jacobi relativista para una partícula en un campo gravitacional, y comparar los resultados con la teoría cuántica de campos. De esta manera se podrá observar si éste sigue siendo efectivo o no.

Apéndice A

Obtención de la ecuación de Klein-Gordon a partir del par KGeq

La ecuación ec.(4.11) con $\lambda = \hbar^2/4$ y $\beta = \hbar^2/4$ queda:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 + m_o^2c^2 - \frac{\hbar^2}{2}\left[\frac{1}{P}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2 P}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}\right] + \frac{\hbar^2}{4}\left[\frac{1}{P^2}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{c^2P^2}\left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)^2\right] = 0$$

Ahora, sumando y restando a ésta ecuación el termino $\frac{1}{4P^2}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2$; sumando y restando el termino $\frac{1}{4P^2}\left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)^2$ y agrupando al lado izquierdo las derivadas con respecto a x y en el lado derecho las derivadas con respecto a t, nos queda:

$$\varpi = \vartheta \tag{A.1}$$

Donde

$$\varpi = \hbar\left[-\frac{1}{2P^2}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2P}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{1}{4P^2}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{\hbar^2}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2\right] - m_o^2c^2$$

$$\vartheta = \frac{\hbar^2}{c^2}\left[-\frac{1}{2P^2}\left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2P}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + \frac{1}{4P^2}\left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{\hbar^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2\right]$$

Reemplazando los siguientes términos:

$$\left(\frac{\partial J}{\partial x}\right)^2 = \frac{1}{4P^2}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2$$

$$\frac{\partial^2 J}{\partial x^2} = -\frac{1}{2P^2}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2P}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$$

$$\left(\frac{\partial J}{\partial t}\right)^2 = \frac{1}{2P^2}\left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)^2$$

$$\frac{\partial^2 J}{\partial t^2} = -\frac{1}{2P^2}\left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2P}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}$$

en la ec.(A.1) nos queda:

$$\hbar^2\left[\frac{\partial^2 J}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial J}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{\hbar^2}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2\right] - m_o^2c^2 = \frac{\hbar^2}{c^2}\left[\frac{\partial^2 J}{\partial t^2} + \left(\frac{\partial J}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{\hbar^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2\right] \tag{A.2}$$

Ahora vamos a usar la ec.(4.12) la cual es:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(P\frac{\partial S}{\partial x}\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(P\frac{\partial S}{\partial t}\right) = 0$$

Desarrollando esta ecuación y pasando al lado derecho de la igualdad a las derivadas con respecto al tiempo, se tiene:

$$P\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}+\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial S}{\partial x}=\frac{1}{c^2}\left[P\frac{\partial^2 S}{\partial t^2}+\frac{\partial P}{\partial t}\frac{\partial S}{\partial t}\right]$$

A ésta ecuación se la puede poner de la siguiente forma:

$$\hbar^2\left[\frac{i}{\hbar}\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}+\frac{2i}{\hbar}\left(\frac{1}{2P}\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial S}{\partial x}\right)\right]=\frac{\hbar^2}{c^2}\left[\frac{1}{\hbar}\frac{\partial^2 S}{\partial t^2}+\frac{2i}{\hbar}\left(\frac{1}{2P}\frac{\partial P}{\partial t}\frac{\partial S}{\partial t}\right)\right]$$

Ahora reemplazando en esta ecuación los siguientes términos:

$$\frac{\partial J}{\partial x}=\frac{1}{2P}\frac{\partial P}{\partial x}$$

$$\frac{\partial J}{\partial t}=\frac{1}{2P}\frac{\partial P}{\partial t}$$

Nos queda:

$$\hbar^2\left[\frac{i}{\hbar}\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}+\frac{2i}{\hbar}\frac{\partial J}{\partial x}\frac{\partial S}{\partial x}\right]=\frac{\hbar^2}{c^2}\left[\frac{1}{\hbar}\frac{\partial^2 S}{\partial t^2}+\frac{2i}{\hbar}\frac{\partial J}{\partial x}\frac{\partial S}{\partial t}\right] \tag{A.3}$$

Ahora sumando las ecuaciones ec.(A.2) y ec.(A.3) nos queda:

$$\hbar^2\left[\left(\frac{\partial^2 J}{\partial x^2}+\frac{i}{\hbar}\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\right)+\left(\frac{\partial J}{\partial x}+\frac{i}{\hbar}\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2\right]-m_o^2c^2=\frac{\hbar^2}{c^2}\left[\left(\frac{\partial^2 J}{\partial t^2}+\frac{i}{\hbar}\frac{\partial^2 S}{\partial t^2}\right)+\left(\frac{\partial J}{\partial t}+\frac{i}{\hbar}\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2\right] \tag{A.4}$$

Ahora multiplicando a ambos lados de la igualdad por

$$\Psi=\exp\left(J+\frac{i}{\hbar}S\right)$$

Y notando que:

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}=\left(\frac{\partial^2 J}{\partial x^2}+\frac{i}{\hbar}\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\right)\Psi+\left(\frac{\partial J}{\partial x}+\frac{i}{\hbar}\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2\Psi$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}=\left(\frac{\partial^2 J}{\partial t^2}+\frac{i}{\hbar}\frac{\partial^2 S}{\partial t^2}\right)\Psi+\left(\frac{\partial J}{\partial t}+\frac{i}{\hbar}\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2\Psi$$

La ecuación ec.(A.4) nos queda:

$$\hbar^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}-m_o^2c^2\Psi=\frac{\hbar^2}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}$$

La cual es la ecuación de Klein-Gordon.

Apéndice B

Obtención del par KGEeq partiendo de la ecuación de Klein-Gordon para una partícula en un Campo Electromangnético

Se va a partir de la ec.(4.16) y se va a llegar a las ecuaciones ec.(4.14) y ec.(4.15).

La ec.(4.16) es:

$$\frac{1}{c^2}\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-e\phi\right)^2\Psi=\left[\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial x}+\frac{e}{c}A_x\right)^2+m_o^2c^2\right]\Psi$$

Luego se va a insertar en esta a

$$\Psi=\exp(J+iS/\hbar)$$

donde $J=\ln P^{1/2}$, para hacerlo primero notemos que:

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-e\phi\right)\Psi=i\hbar\left(\frac{\partial J}{\partial t}+\frac{i}{\hbar}\frac{\partial S}{\partial t}\right)\Psi-e\phi\Psi$$

De aquí que:

$$\frac{1}{c^2}\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-e\phi\right)^2\Psi=\frac{1}{c^2}\left[C+D\right]$$

Donde

$$C=i\hbar\left(i\hbar\left(\frac{\partial^2 J}{\partial t^2}+\frac{i}{\hbar}\frac{\partial^2 S}{\partial t^2}\right)\Psi+i\hbar\left(\frac{\partial J}{\partial t}+\frac{i}{\hbar}\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2\Psi-e\frac{\partial\phi}{\partial t}\Psi-e\phi\left(\frac{\partial J}{\partial t}+\frac{i}{\hbar}\frac{\partial S}{\partial t}\right)\Psi\right)$$

$$D=-e\left(i\hbar\left(\frac{\partial J}{\partial t}+\frac{i}{\hbar}\frac{\partial S}{\partial t}\right)\phi\Psi-e\phi^2\Psi\right)$$

Por otra parte se tiene que:

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial x}+\frac{e}{c}A_x\right)^2\Psi=H+K$$

Donde

$$H=i\hbar\left(i\hbar\left(\frac{\partial^2 J}{\partial x^2}+\frac{i}{\hbar}\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\right)\Psi+i\hbar\left(\frac{\partial J}{\partial x}+\frac{i}{\hbar}\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2\Psi+\frac{e}{c}\frac{\partial A_x}{\partial x}\Psi+\frac{e}{c}A_x\left(\frac{\partial J}{\partial x}+\frac{i}{\hbar}\frac{\partial S}{\partial x}\right)\Psi\right)$$

$$K=\frac{e}{c}\left(i\hbar\left(\frac{\partial J}{\partial x}+\frac{i}{\hbar}\frac{\partial S}{\partial x}\right)A_x\Psi+\frac{e}{c}A_x^2\Psi\right)$$

Entonces la ecuación ec.(4.16) queda:

$$\frac{1}{c^2}\left[C+D\right]=H+K+m_o^2c^2\Psi \tag{B.1}$$

Ahora separando la parte real e imaginaria de esta ecuación tenemos que la parte real es:

$$\zeta+\chi=0 \tag{B.2}$$

Donde

$$\zeta=-\hbar\left[\frac{\partial^2 J}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial J}{\partial x}\right)^2-\frac{1}{\hbar^2}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2\right]-\frac{2eA_x}{c}\frac{\partial S}{\partial x}+\frac{e^2A_x^2}{c^2}+m_o^2c^2$$

$$\chi=\frac{\hbar^2}{c^2}\left[\frac{\partial^2 J}{\partial t^2}+\left(\frac{\partial J}{\partial t}\right)^2-\frac{1}{\hbar}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2\right]-\frac{2e\phi}{c^2}\frac{\partial S}{\partial t}-\frac{e^2}{c^2}\phi^2$$

Ahora ya que $J=\ln P^{1/2}$ se tiene que:

$$\frac{\partial J}{\partial x}=\frac{1}{2P}\frac{\partial P}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 J}{\partial x^2}=-\frac{1}{2P^2}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{2P}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial J}{\partial t}=\frac{1}{2P}\frac{\partial P}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 J}{\partial t^2}=-\frac{1}{2P^2}\left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)^2+\frac{1}{2P}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}$$

Reemplazando estas derivadas en la ec.(B.2) se tiene:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}-\frac{e}{c}A_x\right)^2-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}+e\phi\right)^2 m_o^2c^2+\frac{\hbar^2}{4}\left[\frac{1}{P^2}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2-\frac{1}{c^2P^2}\left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)^2\right]-\frac{\hbar}{2}\left[\frac{1}{P}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2P}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}\right]=$$

Esta es la ec.(4.14) con $\lambda=\hbar^2/4$ y $\beta=-\hbar^2/4$.

Ahora, la parte imaginaria de ec.(B.1) es:

$$-\hbar\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}-2\hbar\frac{\partial J}{\partial x}\frac{\partial S}{\partial x}+\frac{e\hbar}{c}\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{2e\hbar A_x}{c}\frac{\partial J}{\partial x}+\frac{\hbar}{c^2}\frac{\partial^2 S}{\partial t^2}+\frac{2\hbar}{c^2}\frac{\partial J}{\partial t}\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{e\hbar}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t}+\frac{2e\hbar\phi}{c^2}\frac{\partial J}{\partial t}=0$$

Reemplazando aquí las derivadas de J con respecto a x y a t y multiplicando a ambos lados de la ecuación por $P/\hbar$ nos queda:

$$-P\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}-\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial S}{\partial x}+\frac{eP}{c}\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{eA_x}{c}\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{P}{c^2}\frac{\partial^2 S}{\partial t^2}+\frac{1}{cP}\frac{\partial P}{\partial t}\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{eP}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t}+\frac{e\phi}{c^2}\frac{\partial P}{\partial t}=0$$

$$-\left[\frac{\partial P}{\partial x}\left(\frac{\partial S}{\partial x}-\frac{e}{c}A_x\right)+P\left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}-\frac{e}{c}\frac{\partial A_x}{\partial x}\right)\right]+\frac{1}{c^2}\left[\frac{\partial P}{\partial t}\left(\frac{\partial S}{\partial t}+e\phi\right)+P\left(\frac{\partial^2 S}{\partial t^2}+e\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)\right]=0$$

Como vemos esta es la ec.(4.15).

Bibliografía

[1] Ferrater M. (1994), Diccionario de Filosofía. Ariel, España.

[2] Clauser J., Shimony A. (1978), Bell's theorem: experimental test and implication, Rep. Prog. Phys, 4, 1881.

[3] Chalmers A. (1982), ¿Qué es esa cosa llamada Ciencia?, Una valoración de la naturaleza y el estatuto de la ciencia y sus métodos. McGraw-Hill España.

[4] Cajori F., Crawford R. (1964), Newton's Principia. University of California Press, Berkeley.

[5] Greiner W. (2000), Quantum Mechanics an Introduction. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York.

[6] Good I. (1961), The Scientist Speculates. Heinemann, London.

[7] Jammer M. 1974. The Philosophy of Quantum Mechanics: The interpretation of QM in historical perspective. John Wiley and Sons, United States of America-Canada.

[8] Madelung E. (1926), Quantentheorie in hydrodynamischer form, Z. Phys. 40, 322

[9] Heisenberg W. (1958), Physics and Philosophy, The revolution in Modern Science. Harper and Brothers, New York.

[10] Goldstein S. (1998), Quantum theory without observers Part Two, Physics Today

[11] Cramer J. (1986), The transactional interpretation of quantum mechanics, Rev. Mod. Phys. 58:647-685

[12] Wigner E. (1962), The problem of measurement, Am. J. Phys. 31: 6-15.

[13] Landau L., Lifshits E. (1977), Quantum Mechanics, non relativistic theory. Pergamon, NewYork.

[14] Everett H. (1957), "Relative State" formulation of quantum mechanics, Rev. Mod. Phys. 29, 454.

[15] Eintein A. Podolsky B. Rosen N. (1935), Can Quantum-Mechanical description of physical Reality be considered complete?, Phys. Rev, 47, 777.

[16] Abad G. (2007) Paradoja EPR y desigualdades de Bell, pruebas experimentales conociemiento actual [PDF], [Disponible en *www.fing.edu.uy/ abal/trabajos/tdet*].

[17] Bell J. (1987), Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics. Cambridge Univetsity Press, Cambridge.

[18] Griffiths D. (1995), Introduction to Quantum Mechanics. Prentice Hall, New Jersey.

[19] H Stapp. (1979), Whitehedian Approach to Quantum Theory and the Generalized Bell's Theorem, Found. Phys. 9, 1

[20] Stapp H. (1971), S-Matrix Interpretation of Quantum Mechanics Theory, Phys. Rev. D3, 1303

[21] Bohm D. (1952), A suggested interpretation of quantum theory in terms of "hidden" variables I, Phys. Rev. 85, 166

[22] Bohm, D. (1952), A suggested interpretation of quantum theory in terms of "hidden" variables II, Phys. Rev. 85, 180

[23] Bohm, D. (1987), La Totalidad y el Orden Implicado, Kairos, Barcelona.

[24] Cover T. Thomas A. (1991), Elements of Information theory. John Wiley and Sons, New York.

[25] Shannon C. (1948), A mathematical theory of communication. The Bell System Technical Journal. 27: 379-423, 623-656

[26] Kullback S. (1959), Information Theory and Statistics. John Wiley and Sons, New York.

[27] Shore J. (1980), Axiomatic derivation of the principle of maximun entropy and the principle of mínimum cross entropy. IEEE Transactions on information theory. 26, 26.

[28] Janes E. (1957), Information Theory and Statistical Mechanics I. Phys. Rev.106, 620.

[29] Shunlong L. (2002), Maximun Shannon Entropy, Minimun Fisher information, and an elementary game. Found. Phys. 32, 1757.

[30] Reginatto M. (1998), Derivation of the equations of nonrelativistic quantum mechanics using the principle of minimum fisher information, Phys. Rev. A58, 1775.

[31] Zeilinger A. (1999), A foundational principle for Quantum Mechanics. Found. Phys. 29, 631.

[32] Goldstein S. (1998), Quantum theory without observers Part One, Physics Today.

[33] Griffiths R. Omnes R. (1999), Consistent histories and Quantum measurements. Physics Today.

[34] Nagarjuna. (2004), Fundamentos de la via media. Traducción de Juan Arnau. Siruela, Madrid.

[35] Greiner W. (2000), Relativistic Quantum Mechanics. Springer-Verlag, New York.

[36] Hand L. Finch J. (1998), Analytical Mechanics. Cambridge University Press, United States of America.

[37] Elsgoltz L. (1969), Ecuaciones Diferenciales y Calculo Variacional. Editorial Mir, Moscu.

[38] Landau L. Lifshits E. (1994), The Classical Theory of Fields. Buttherworth-Heinemann, NewYork.