



REPÚBLICA DEL ECUADOR

Escuela Politécnica Nacional

" E SCIENTIA HOMINIS SALUS "

La versión digital de esta tesis está protegida por la Ley de Derechos de Autor del Ecuador.

Los derechos de autor han sido entregados a la "ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL" bajo el libre consentimiento del (los) autor(es).

Al consultar esta tesis deberá acatar con las disposiciones de la Ley y las siguientes condiciones de uso:

- Cualquier uso que haga de estos documentos o imágenes deben ser sólo para efectos de investigación o estudio académico, y usted no puede ponerlos a disposición de otra persona.
- Usted deberá reconocer el derecho del autor a ser identificado y citado como el autor de esta tesis.
- No se podrá obtener ningún beneficio comercial y las obras derivadas tienen que estar bajo los mismos términos de licencia que el trabajo original.

El Libre Acceso a la información, promueve el reconocimiento de la originalidad de las ideas de los demás, respetando las normas de presentación y de citación de autores con el fin de no incurrir en actos ilegítimos de copiar y hacer pasar como propias las creaciones de terceras personas.

Respeto hacia sí mismo y hacia los demás.

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA

MODELACIÓN, IDENTIFICACIÓN Y CONTROL DE ROBOTS MÓVILES

PROYECTO PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE INGENIERA EN ELECTRÓNICA Y CONTROL

ANDALUZ ORTIZ GABRIELA MAGDALENA
andaluzgaby_4@yahoo.com

DIRECTOR: PhD. JORGE ANDRÉS ROSALES ACOSTA
androsaco@gmail.com

Quito, octubre 2011

DECLARACIÓN

Yo, Gabriela Magdalena Andaluz Ortiz, declaro bajo juramento que el trabajo aquí descrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentada para ningún grado o calificación profesional; y, que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

A través de la presente declaración cedo mis derechos de propiedad intelectual correspondientes a este trabajo, a la Escuela Politécnica Nacional, según lo establecido por la Ley de Propiedad Intelectual, por su Reglamento y por la normatividad institucional vigente.

Gabriela Magdalena Andaluz Ortiz

CERTIFICACIÓN

Certifico que el presente trabajo fue desarrollado por Gabriela Magdalena Andaluz Ortiz, bajo mi supervisión.

Andrés Rosales, PhD.
DIRECTOR DEL PROYECTO

AGRADECIMIENTO

Primeramente quiero darle gracias a Dios por darme la vida y haberme permitido alcanzar este meta.

A toda mi familia por estar ahí siempre conmigo apoyándome en los momentos buenos y malos.

Al Instituto de Automática (INAUT) de la Universidad Nacional de San Juan, Argentina en la persona de Dr. Ricardo Carelli por la colaboración y apoyo para la realización de las pruebas experimentales y sobre todo por su calidad humana.

Al Dr. Andrés Rosales muchas gracias por aceptar ser mi tutor, por todo el apoyo y valiosa guía durante el desarrollo de este proyecto de titulación.

A la Escuela Politécnica Nacional por impartirme los conocimientos y ayudar en mi formación como profesional.

A todos mis compañeros y amigos por haber compartido todas las vivencias a lo largo de estos años, especialmente a Diana, Joc, por haber acolitarme siempre y nunca haberme dado un no como respuesta.

A todos mis amigos de Ambato por estar siempre pendientes y preocupados por mí y brindarme su amistad.

A José Luis por su cariño y por ser la persona que me ha apoyado y motivado durante todo este tiempo.

Gabita

DEDICATORIA

Dedicado a Dios por que sin él nada sería posible

A mi mamita linda porque siempre estuvo ahí dándome ánimos e insistiendo a que siga adelante cuando las cosas no iban bien, porque con una palabra me impulsaba a no desmayar, porque siempre ha estado incondicionalmente ahí para mí, porque con su amor, sacrificios he llegado a esta meta, a ella le dedico este logro porque la amo y le quedo profundamente agradecida por todo lo que me ha dado, y estoy muy orgullosa de tenerla en mi vida y ser su niña bonita.

A mi papi (ojitos) que siempre me ha motivado a seguir adelante y me ha inculcado a ser humilde ante todo y no conformarme con lo que tengo, sino a conseguir siempre algo más y pensar siempre positivo que nada es fácil pero que con esfuerzo todo se puede alcanzar.

A mi ñaña que ha estado siempre a mi lado soportando mis buenos o malos momentos, siempre preocupada de cómo me va, gracias por tu apoyo y palabras de aliento te quiero full.

Y por último a mi feito lindo, mi ñaño que nada de esto sería posible sin su apoyo, y ayuda incondicional, sin la paciencia que ha tenido y su colaboración en todo momento. Muchas gracias ñaño te quiero mucho eres un ejemplo a seguir y estoy muy orgullosa de ti.

Gracias a todos Uds. que de una u otra manera fueron mi motor principal para seguir adelante y lograr este peldaño más en mi vida...

CONTENIDO

RESUMEN

PRESENTACIÓN

CAPÍTULO 1

Introducción.....	1
1.1 Introducción General.....	1
1.2 Definiciones Básicas.....	2
1.2.1 Robótica.....	2
1.2.1.1 Leyes de la Robótica.....	2
1.2.2 Robot.....	3
1.2.3 Robot Móvil.....	4
1.3 Breve Historia.....	4
1.4 Robótica Móvil.....	8
1.4.1 Entornos de Operación.....	10
1.4.2 Tipos de Sistemas de Locomoción.....	12
1.4.2.1 Tipos de Ruedas.....	13
1.4.2.2 Disposición de las ruedas sobre la estructura mecánica.....	15
1.4.3 Aplicaciones de los Robots Móviles.....	19
1.4.3.1 Aplicaciones Industriales.....	20
1.4.3.2 Aplicaciones Innovadoras y de Servicio.....	22
1.4.3.3 Aplicaciones de Vigilancia.....	24
1.4.3.4 Aplicaciones Militares.....	25
1.4.3.5 Aplicaciones en Investigación y Desarrollo.....	27

CAPÍTULO 2

Estudio de los sistemas no lineales y su aplicación en la robótica móvil.....	29
2.1 Sistemas no Lineales.....	30
2.1.1 Comportamiento de Sistemas no Lineales.....	32
2.1.2 Propiedades de los Sistemas Lineales.....	32
2.1.3 Comportamientos no Lineales.....	33
2.2 Estabilidad de Lyapunov.....	37
2.2.1 Definiciones y Teoremas.....	38
2.2.2 Definiciones de Estabilidad.....	38
2.2.3 Teoremas de Estabilidad.....	42
2.2.4 Método Directo de Lyapunov.....	47
2.3 Diseño de Sistemas de Control no Lineal: usando Lyapunov.....	50
2.3.1 Diseño de un controlador (regulación a cero).....	50
2.3.2 Diseño de un controlador (posicionamiento en x_d).....	52
2.3.3 Control de un Robot Móvil.....	54

CAPITULO 3

Modelación de Robots Móviles tipo Uniciclo.....	58
3.1 Modelo Cinemático.....	58
3.1.1 Modelo Cinemático 1.....	59
3.1.2 Modelo Cinemático 2.....	61
3.2 Modelo Dinámico.....	62
3.3 Identificación de Parámetros.....	71
3.4 Resultados Experimentales de la Identificación.....	74
3.4.1 Identificación y Validación del Modelo Dinámico del Robot Pioneer P3-AT.....	75
3.4.2 Identificación y Validación del Modelo Dinámico del Robot Pioneer 3-DX.....	77

CAPITULO 4

Estudio e Implementación de los Algoritmos de Control para Robots Móviles Tipo Uniciclo.....	80
4.1 Posicionamiento.....	81
4.1.1 Control de Posicionamiento Sin Orientación Final.....	81
4.1.1.1 Resultado por Simulación.....	84
4.1.1.2 Resultado Experimental.....	85
4.1.2 Control de Posicionamiento Con Orientación Final.....	88
4.1.2.1 Resultado por Simulación.....	89
4.1.2.2 Resultado Experimental.....	88
4.1.3 Control de Posicionamiento con Evasión de Obstáculos.....	91
4.1.3.1 Resultados por Simulación.....	97
4.1.3.2 Resultados Experimental.....	100
4.2 Seguimiento de Trayectoria.....	106
4.2.1 Seguimiento de Trayectoria Cinemático.....	106
4.2.1.1 Compensación Dinámica.....	108
4.2.1.2 Resultados por Simulación.....	111
4.2.1.3 Resultados Experimentales.....	113
4.2.2 Seguimiento de Trayectoria por Linealización del modelo mediante Realimentación de Entrada-Salida.....	129
4.2.1 Ley de Control diseñada considerando la Saturación de los Actuadores.....	131
4.2.1.1 Resultados por Simulación.....	132
4.2.1.2 Resultados Experimentales.....	136
4.3 Seguimiento de Caminos.....	147
4.3.1 Diseño y Análisis del Sistema de Control.....	149
4.3.1.1 Controlador Cinemático.....	149
4.3.1.2 Resultados por Simulación.....	153
4.3.1.3 Resultados Experimentales.....	158

CAPITULO 5

Conclusiones y Recomendaciones.....	170
5.1 Conclusiones.....	170
5.2 Recomendaciones.....	175

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	177
--	------------

ANEXO A

Breve descripción del Robot Móvil utilizado en la experimentación.....	180
--	-----

ANEXO B

Álgebra Matricial.....	192
------------------------	-----

RESUMEN

Desde hace décadas la implantación de la Robótica en la industria es una realidad, sin embargo, el reto actual es su incorporación a la vida cotidiana, fuera de las aplicaciones industriales tradicionales. Para alcanzar este objetivo se requieren robots capaces de realizar tareas de forma autónoma, para manipular objetos, moverse en entornos diseñados para humanos, interactuar y colaborar con personas, etc. Bajo estos requerimientos la robótica está subdividida en dos grupos: 1) Construcción de robots; y 2) Diseño de algoritmos de control que cumplan criterios de estabilidad, robustez operacional y seguridad física elevados.

Los Robots Móviles tipo unicycle, están constituidos básicamente por una estructura mecánica que consta de dos ruedas fijas convencionales sobre el mismo eje, controladas de manera independiente y una rueda local que le confiere estabilidad, permitiéndole navegar a través de un determinado ambiente de trabajo de forma autónoma. Dicha autonomía se refiere a la capacidad de percibir, planificar y actuar sin la intervención del operador humano para alcanzar determinados objetivos. Esta inteligencia es suministrada por el sistema de control del vehículo.

Este proyecto de titulación está enfocado a determinar el modelo dinámico de un robot móvil no holonómico tipo unicycle, y principalmente está orientado en el estudio formal y experimentación de algoritmos de control avanzados para un robot móvil no holonómico tipo unicycle en ambientes parcialmente estructurados, garantizando analíticamente la estabilidad de los sistemas de control propuestos mediante la teoría de Lyapunov.

Además, también se presentan los resultados obtenidos tanto por experimentación y simulación, donde se demuestra que los movimientos del sistema convergen a la trayectoria programada y a los caminos deseados, de acuerdo a lo previsto en los algoritmos propuestos.

PRESENTACIÓN

En el presente trabajo se abordan los procesos de modelación, identificación, y control de un robot móvil no holonómico tipo unicycle, el cual se desenvuelve en ambientes parcialmente estructurados.

En el Capítulo 1 se realiza una introducción del marco teórico necesario para el desarrollo del proyecto. Se trata de forma general los conceptos relacionados con robótica, robots móviles, y la teoría referida a los entornos de operación, tipos de sistemas de locomoción, y aplicaciones de los robots móviles.

En el Capítulo 2 se brinda una introducción rigurosa y los conceptos fundamentales de la teoría de sistemas no lineales y las técnicas modernas de análisis y diseño de sistemas de control no lineal. Debido a que la teoría de estabilidad juega un rol central en teoría de sistemas e ingeniería, en este capítulo se estudia la estabilidad de puntos de equilibrio. Para ello se emplean definiciones y resultados provenientes de la metodología de estabilidad de Lyapunov. Esta metodología se basa en la descripción del sistema por ecuaciones diferenciales, que dan la evolución temporal de las variables de estado. A partir de esta teoría de sistemas no lineales se procede en los siguientes capítulos a la aplicación de dichos conceptos, teoremas y estudios, con el fin de dar una solución al problema de control en los robots móviles e implementar un buen controlador tanto de posicionamiento, seguimiento de trayectoria, así como en el seguimiento de caminos.

En el Capítulo 3 se procede a la modelación matemática tanto de la cinemática como de la dinámica de un robot móvil tipo unicycle, con la finalidad de conocer las velocidades -lineal y angular- a la que se desplaza el robot, así como también su ubicación -posición y orientación-. Adicionalmente, partiendo del modelo dinámico obtenido, se desarrolla la parte teórica de la identificación de los parámetros del robot móvil no holonómico tipo unicycle. Finalmente, se muestran los resultados experimentales de la identificación de los parámetros del modelo

dinámico de los robots Pioneer P3-AT y Pioneer 3-DX con sus respectivas validaciones.

En el Capítulo 4 se realiza el estudio e implementación de los algoritmos de control para robots móviles tipo unicycle. Los problemas principales en el control de movimiento de robots móviles que se tratan en este capítulo son clasificados en tres grupos 1) control de posición – el objetivo es ubicar al robot en un punto de referencia dado, con una orientación deseada; 2) seguimiento de trayectoria – se requiere que el robot siga una referencia parametrizada en el tiempo (con y sin evasión de obstáculos por medio del control de impedancia); 3) seguimiento de caminos – se requiere que el robot converja y siga un camino, sin ninguna especificación temporal. Para cada uno de los algoritmos propuestos se realiza el respectivo análisis de estabilidad aplicando la teoría de Lyapunov estudiada en el Capítulo 2. Además, también se presenta los resultados obtenidos, tanto por experimentación y simulación, donde se demuestra que los movimientos del sistema convergen a la posición, trayectoria y caminos deseados de acuerdo a lo previsto en el desarrollo teórico.

En el Capítulo 5 se presentan las conclusiones y recomendaciones, que se han podido recopilar durante todo el proceso de desarrollo del presente trabajo.

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

1.1 INTRODUCCIÓN GENERAL

La Robótica y la Automatización son dos líneas de investigación fuertemente relacionadas. La Robótica representa un campo de aplicación importante para los Sistemas de Control y plantea el desarrollo de autómatas con altos niveles de destreza y autonomía de movimiento y manipulación, lo que permite su aplicación en sistemas de producción altamente automatizados, así como en tareas y servicios o asistencia en lugares de difícil acceso.

La Robótica, como parte de la automática, es hoy un campo de intensa investigación en todas sus áreas, ocupando una importancia relevante en el campo industrial y concerniente a los procesos de innovación productiva y modernización. Se pueden destacar cuatro ventajas principales de los sistemas robotizados: aumento de la productividad, alta flexibilidad, excelente calidad y mejora de la seguridad. Pero, además, sustituyen tareas penosas por otras que se efectúan en condiciones más ventajosas contribuyendo de esta manera a mejorar la calidad de los ciudadanos [1].

Sin embargo, pese a que la Robótica ha alcanzado un nivel de madurez bastante elevada en los últimos tiempos, y cuenta con un correcto sustento teórico, aún no se han obtenido resultados satisfactorios especialmente en el campo de la robótica autónoma, por ejemplo el intentar reproducir algunas tareas que para los humanos son muy sencillas, como andar, correr o agarrar un objeto sin romperlo. No obstante se espera que el continuo aumento de la potencia de los ordenadores, las investigaciones en inteligencia y visión artificial, así como

también de la robótica autónoma y de otras ciencias paralelas permitan acercarse cada vez a sistemas más inteligentes.

1.2 DEFINICIONES BÁSICAS

1.2.1 ROBÓTICA

La Robótica puede definirse como: El conjunto de conocimientos teóricos y prácticos que permiten concebir, realizar y automatizar sistemas basados en estructuras mecánicas poliarticuladas, dotados de un determinado grado de "inteligencia" y destinados a la producción industrial o a la sustitución del hombre en diversas tareas. Un sistema robótico puede describirse, como "*aquel que es capaz de recibir información, de comprender su entorno a través del empleo de modelos, de formular y de ejecutar planes, y de controlar o supervisar su operación*". [2]

En resumen la Robótica es la ciencia y la tecnología de los robots. Además combina diversas disciplinas como son: la mecánica, la electrónica, la informática, la inteligencia artificial y la ingeniería de control. Otras áreas importantes en la robótica son el álgebra, los autómatas programables y las máquinas de estado. [3]

1.2.1.1 LEYES DE LA ROBÓTICA

Las Leyes de la Robótica fueron popularizadas por el autor de ciencia ficción Isaac Asimov, quien supuso que estas reglas serían en el futuro inscritas *en duro* (*hardware*, no *software*), en los *circuitos positrónicos* del cerebro de los robots. Isaac Asimov, las comenzó a utilizar en una de sus obras en 1942. Éste propuso las **leyes de la robótica**, las cuales en un principio fueron solo tres pero luego añadió una cuarta, llamada ley cero. Estas son:

- LEY CERO: Un robot no puede dañar a la humanidad, o a través de su inacción, permitir que se dañe a la humanidad.

- PRIMERA LEY: Un robot no debe dañar a un ser humano ni, por su pasividad, dejar que un ser sufra daño.
- SEGUNDA LEY: Un robot debe obedecer las órdenes que le son dadas por un ser humano, excepto cuando estas órdenes están en oposición con la primera ley.
- TERCERA LEY: Un robot debe de proteger su propia existencia, siempre y cuando esta protección no esté en conflicto con la primera y la segunda ley.

Estas Leyes de la Robótica son las reglas de comportamiento que deberán respetar los robots cuando sean lo bastante evolucionados para vivir entre los hombres y capaces de tener razonamientos abstractos [4], [5].

1.2.2 ROBOT

El término "robot" se debe a Karel Capek, quien lo utilizó aproximadamente en 1917 por primera vez para denominar a unas máquinas construidas por el hombre y dotadas de inteligencia. Deriva de "robotnik" que define al esclavo de trabajo.

A continuación se citan algunas definiciones de robot según Institutos, Enciclopedias y Diccionarios de prestigio:

- *Instituto de Robótica de América (RIA), 1979*: "Un robot es un 'manipulador reprogramable y multifuncional diseñado para mover materiales, partes, herramientas o artefactos especializados a través de movimientos variables programados para la realización de una variedad de tareas".

- *Enciclopedia Británica*: “Máquina operada automáticamente que sustituye el esfuerzo de los humanos, aunque no tiene que tener apariencia humana o desarrollar sus actividades a manera de humanos”.
- *Diccionario Merrian Webster*: “Máquina que se asemeja a los humanos y desarrolla como ellos tareas complejas como andar o hablar. Un dispositivo que desarrolla de manera automática tareas, a menudo de manera repetitiva guiado por control automático” [6].

1.2.3 ROBOT MÓVIL

- *La norma ISO 8373* define robot móvil como: Robot que contiene todo lo necesario para su pilotaje y movimiento (potencia, control y sistema de navegación).

Para tener una idea más clara de un robot móvil se tiene la siguiente definición y dice:

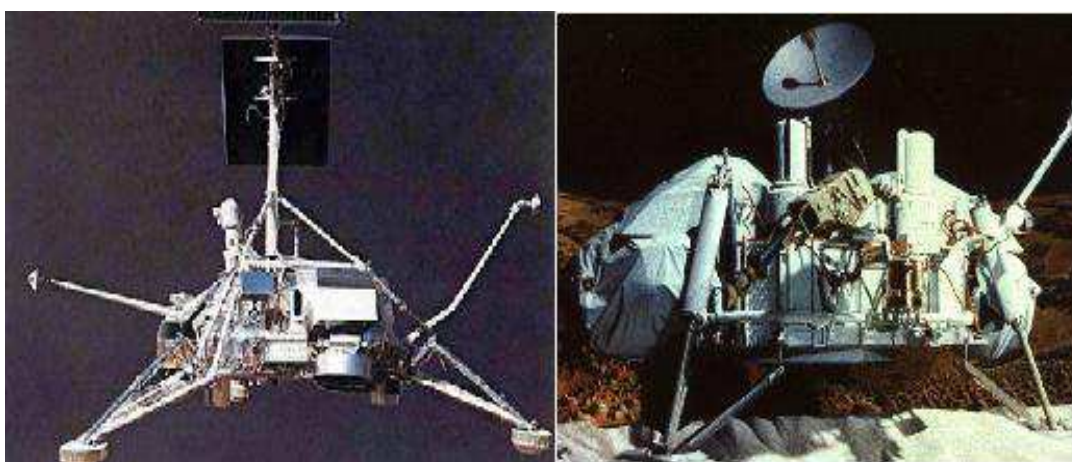
- Los robots móviles son dispositivos de transporte automático, es decir, una plataforma mecánica dotada de un sistema de locomoción capaz de navegar a través de un determinado ambiente de trabajo, dotado de cierto nivel de autonomía para su desplazamiento portando cargas. Sus aplicaciones pueden ser muy variadas y siempre están relacionadas con tareas que normalmente son riesgosas o nocivas para la salud humana, en áreas como la agricultura, en el transporte de cargas peligrosas o en tareas de exploración solitarias o cooperativas junto a otros vehículos no tripulados [1].

1.3 BREVE HISTORIA

Tradicionalmente las aplicaciones de la Robótica y la Automatización estaban centradas en los sectores manufactureros más desarrollados para la producción

masiva: industria del automóvil, transformaciones metálicas, industria química, etc., aunque en la última década el peso de la industria manufacturera ha ido bajando.

Los robots comienzan a fabricarse para tareas muy específicas después de la Segunda Guerra Mundial. Como por ejemplo los que se necesitaban en las investigaciones espaciales (como el Surveyor que aterriza en la Luna, en 1966, o el Viking, que aterriza en Marte diez años después) para aquellas funciones en las que se exigían ciertas destrezas para resolver situaciones no completamente definidas, o las que se requerían para trabajar en ambientes altamente nocivos para la vida humana como las centrales nucleares, en condiciones térmicas no soportable o ciertos ambientes químicos o biológicos de alta toxicidad.



a) Robot Surveyor

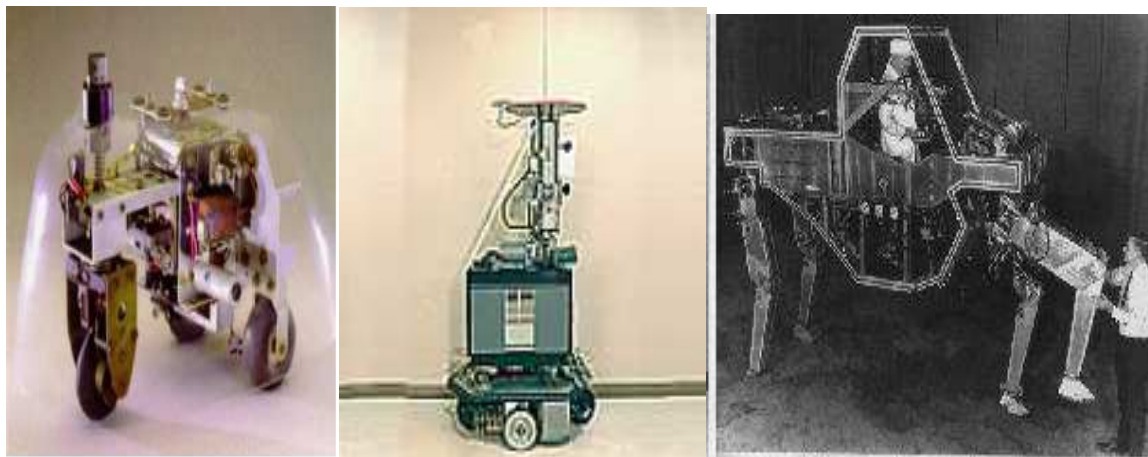
b) Robot Viking

Figura 1.1 Robots de investigaciones especiales a) Aterrizó en la Luna, 1966

b) Aterrizó en Marte, 1976, tomado de [10].

En general, estaban asociados a proyectos de investigación de presupuestos muy elevados, en los que incluir partidas para la construcción de costosos robots resultaba factible. De estas investigaciones también saldrían los diseños de robots aplicados a actuaciones militares. También por estos años surgieron algunos robots orientados a atender ciertas tareas en los procesos de fabricación. Aunque la primera patente de un robot industrial está registrada en Inglaterra en el año 1954, suelen considerarse como primeros robots industriales los Unimates instalados en las fábricas de la General Motors y contruidos por George Devol y

Joe Engelberger (a quienes se conoce como padres de la robótica) a finales de los años cincuenta y primeros de los sesenta.



a) Robot Tortuga

b) Robot Shakey

c) Vehículo eléctrico caminante

Figura 1.2 Robots en la historia de la robótica, tomado de [7], [10].

Tras un lento crecimiento inicial, el uso de los robots industriales experimentó durante los años 70 y 80 un vertiginoso crecimiento desde la aparición de los primeros robots servo-controlados, instalándose con autoridad en muchas de las industrias manufactureras, en particular la del automóvil.

No obstante, desde mediados de los años 80 han surgido otras aplicaciones para los robots, no ligadas a la manufactura, y en la que se busca en el empleo del robot ventajas distintas a la del aumento de la productividad. Estas aplicaciones se caracterizan en muchos casos por desarrollarse fuera del ambiente estructurado propio de una fábrica, por lo que los robots que las desarrollan deben reunir una serie de características particulares. Dado que sus funciones suelen estar ligadas al desarrollo de servicios útiles para los hombres o las máquinas, estos robots se han venido a denominar robots de servicio [7].

En resumen, se puede hacer una distinción de cuatro generaciones, dado que los cambios en Robótica se suceden tan deprisa que ya se ha pasado de unos robots relativamente primitivos a principios de los 70, a una segunda generación.

- La primera generación de robots era reprogramable, de tipo brazo, dispositivos manipuladores que sólo podían memorizar movimientos repetitivos, asistidos por sensores internos que les ayudan a realizar sus movimientos con precisión.
- La segunda generación de robots entra en escena a finales de los 70, tienen sensores externos (tacto y visión por lo general) que dan al robot información (realimentación) del mundo exterior. Estos robots pueden hacer elecciones limitadas o tomar decisiones y reaccionar ante el entorno de trabajo.
- En la tercera generación los robots utilizan las computadoras para su control y tienen cierta percepción de su entorno a través del uso de sensores. Con esta generación se inicia la era de los robots inteligentes y aparecen los lenguajes de programación para escribir los programas de control.
- La cuarta generación se trata de robots altamente inteligentes con más y mejores extensiones sensoriales, para entender sus acciones y captar el mundo que los rodea. Incorporan conceptos modélicos de conductas [5].



a) UNIMATE

b) ROBOT T3

c) ASIMO

Figura 1.3 a) Primer robot industrial b) Manipulador con control por computador

c) Robot humanoide (Honda), tomado de [7].

1.4 ROBÓTICA MÓVIL

En los últimos años la investigación sobre robots móviles está adquiriendo gran desarrollo, en parte esto se debe al abaratamiento del hardware necesario para su construcción, y a la nueva concepción industrial de planta de fabricación flexible, que requiere la reconfiguración de la secuencia de acciones necesarias para una producción variada, lo que a su vez exige facilidad de desplazamiento de los materiales entre cualesquiera puntos de la factoría [8].

La denominación de robot móvil hace referencia a esa capacidad para alcanzar uno o varios objetivos con una intervención muy pequeña de supervisores humanos. Por otro lado, la denominación de vehículo autoguiado está referida a las estructuras móviles que sólo se limitan a seguir caminos preestablecidos (líneas pintadas en el suelo, bandas magnéticas, bandas reflectoras) [1].

Existen diferencias bastante importantes entre los robots manipuladores industriales y los móviles. Para que un robot manipulador sea útil y capaz de evolucionar en el espacio 3D, debe poseer varios grados de movilidad (grados de libertad), sin embargo, un robot móvil con solamente dos grados de libertad puede realizar cosas bastante interesantes sobre una superficie de trabajo. Por otro lado, dado que los robots manipuladores generalmente trabajan en espacios altamente estructurados (fijos y adecuados a las tareas a desarrollar), requieren de un sistema de percepción mucho menos sofisticado [8].



Figura 1.4 Manipulador móvil: robot móvil + brazo robótico.

Los robots móviles operando en grandes ambientes no estructurados deben enfrentarse con significativas incertidumbres en la posición e identificación de objetos. En efecto, la incertidumbre es tal que, trasladarse desde un punto A hasta un punto B es una actividad arriesgada para un robot móvil, una actividad relativamente trivial para un manipulador industrial. En compensación por tener que enfrentarse con más incertidumbres del entorno, no se espera que un robot móvil siga trayectorias o alcance su destino final con el mismo nivel de precisión que se espera de un manipulador industrial (en el orden de las centésimas de milímetro).

Los diferentes índices de operación (medidos por la incertidumbre y precisión requeridas) de los robots móviles en relación a los manipuladores industriales se deben a la existencia de un conjunto diferente de prioridades en investigación.

Las prioridades de los robots móviles están firmemente orientadas en las áreas de sensado y raciocinio. Comenzando con la premisa que la incertidumbre es el problema crucial para un robot móvil, se puede concluir que el robot debe tener las siguientes capacidades básicas:

- Interpretación Sensorial: El robot móvil debe ser capaz de determinar su relación con el entorno mediante su sistema sensorial. Una gran variedad de tecnologías sensoriales están disponibles: odometría, ultrasonido, infrarrojo y láser, visión monocular, binocular y trinocular; todas ellas han sido exploradas. La dificultad está en interpretar estos datos, esto es, qué dice la señal sensorial acerca del mundo exterior (Procesamiento de la Información e Integración Sensorial).
- Raciocinio: El robot móvil debe ser capaz de decidir qué acciones son requeridas para alcanzar su(s) objetivo(s) en un entorno de trabajo determinado. Esto puede involucrar un amplio rango de decisiones desde qué camino seguir hasta qué sensor emplear (Control Basado en Comportamientos). Los comportamientos son niveles del sistema de control que corren en paralelo toda vez que un sensor está activo. La

fusión se realiza a la salida de los comportamientos en lugar de a la salida de los sensores. Todos los comportamientos corren en paralelo, pero los de más alto nivel tienen el poder para suprimir temporalmente los comportamientos de más bajo nivel [9].

1.4.1 ENTORNOS DE OPERACIÓN

Es esta característica la que fija mayores restricciones sobre el robot móvil y se agrupan según el área de trabajo y según los objetos presentes en el entorno.

- Según el área de trabajo

El entorno del área de trabajo del robot puede ser interior o exterior.

Es interior cuando el área de trabajo está claramente definida por paredes y cielorrasos. Además la iluminación es principalmente artificial. Por el contrario es exterior cuando el área de trabajo no está claramente delimitada y el tipo de iluminación es principalmente natural. Ejemplos clásicos de entornos interiores y exteriores son los grandes edificios públicos y los parques o bosques, respectivamente.



a) Robot de Interior-AMIGOBOT b) Robot de Exterior- SEEKUR

Figura 1.5 Entornos de Trabajo, tomado de [7], [10].

- Según los objetos presentes el entorno del robot

Puede ser estructurado o no estructurado.

Es estructurado cuando los objetos presentes en el entorno son estáticos (no cambian de forma ni de posición) y poseen características físicas particulares (forma, color, etc.) que permiten asociarlos con figuras geométricas conocidas como prismas o cilindros o permiten distinguir unos objetos de otros (puertas abiertas, mesas de trabajo, etc.). En el otro sentido el entorno es no estructurado cuando la asociación entre los objetos del entorno y determinadas características físicas no es viable, cuando el entorno es dinámico (que cambia con el transcurrir del tiempo) y estos cambios, además, pueden ser impredecibles. Por ejemplo, una biblioteca es un entorno estructurado, debido al poco movimiento de personas y a que las estanterías están siempre en los mismos lugares. Por el contrario un depósito en una línea de producción es un entorno no estructurado, fundamentalmente porque el entorno cambia a medida que se reciben y envían los pallets [10].



a) Biblioteca

b) Depósito de una fábrica

Figura 1.6 a) Entorno Estructurado b) Entorno no Estructurado, tomado de [10].

1.4.2 TIPOS DE SISTEMAS DE LOCOMOCIÓN

Los robots móviles se pueden clasificar por el tipo de locomoción de acuerdo al entorno al que se desarrollan el más utilizado es el terrestre, en general, los tres medios de movimiento son:

- Locomoción por ruedas (a)
- Locomoción por patas (b)
- Locomoción por orugas (c)



a) i-Bot 3



b) Hermes



c) Surveyor srv-1(juguete)

Figura 1.7 Ejemplos de sistemas de locomoción tomado de [10].

También existe locomoción para entornos:

- Acuáticos,
- Flotantes,
- Submarinos y
- Aéreos.

Cabe señalar que aunque la locomoción por patas y orugas han sido ampliamente estudiadas, el mayor desarrollo se presenta en los Robots Móviles con Ruedas (RMR). Dentro de los atributos más relevantes de los RMR, destacan su eficiencia en cuanto a energía en superficies lisas y firmes, a la vez que no causan desgaste en la superficie donde se mueven, son más robustos (requieren un número menor de partes y menos complejas), son fáciles de controlar (cada rueda posee un

grado de libertad y como máximo el robot suele tener sólo dos grados de libertad), admiten mayores cargas y son más rápidos en comparación con los robots de patas y de orugas, lo que permite que su construcción sea más sencilla [11].

1.4.2.1 TIPOS DE RUEDAS

Entre los robots terrestres con ruedas su movilidad está caracterizada por dos factores: el tipo de ruedas que poseen y su disposición sobre una estructura mecánica.

- *Tipo de ruedas que posee.*

Se distinguen entre dos clases básicas de ruedas: la *rueda convencional* y la *rueda sueca* (swedish wheel). En ambos casos, se supone que el contacto entre la rueda y el terreno se reduce a un único punto del plano.

Para una rueda convencional el contacto entre la rueda y el terreno se supone que satisface la rotación pura sin resbamiento. Esto significa que la velocidad del punto de contacto es igual a cero (tanto la componente paralela como la componente perpendicular al plano de la rueda).

A su vez entre las ruedas convencionales se distinguen tres tipos:

- *Rueda fija:* El eje de la rueda está fijo a la estructura del robot. En general está asociada al sistema de tracción del robot.

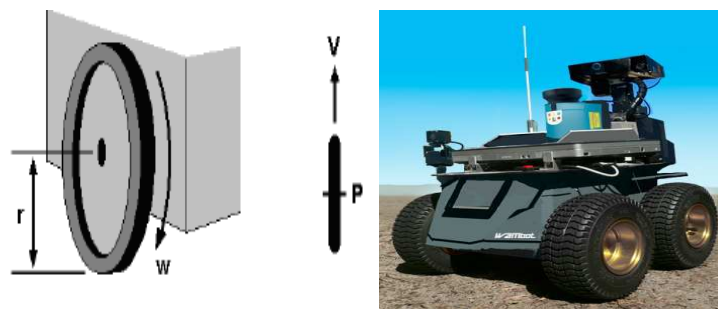


Figura 1.8 Rueda fija, tomado de [10].

- *Rueda orientable centrada*: Es aquella en la que el movimiento del plano de la rueda con respecto a la estructura es una rotación alrededor de un eje vertical que pasa a través del centro de la rueda. Suele cumplir funciones como rueda de dirección o como rueda de tracción dirección.

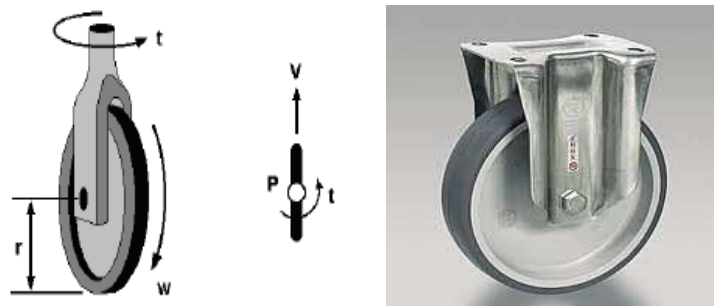


Figura 1.9 Rueda orientable centrada, tomado de [10].

- *Rueda orientable no-centrada (rueda loca)*: También conocida como rueda castor (castor wheel) es una rueda orientable con respecto a la estructura, tal que la rotación del plano de la rueda es alrededor de un eje vertical el cual no pasa a través del centro de la rueda. Su principal función es la de dar estabilidad a la estructura mecánica del robot como rueda de dirección.

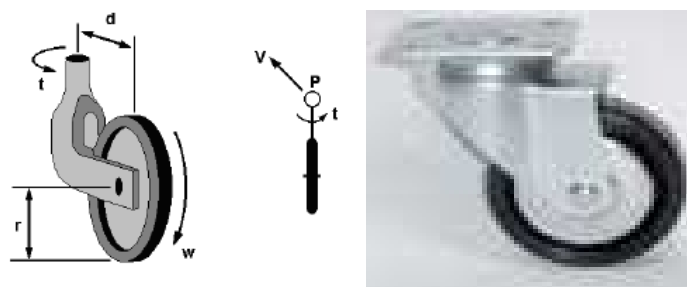


Figura 1.10 Rueda orientable no centrada, tomado de [10].

Para una *rueda sueca* (swedish wheel), solo una componente de la velocidad del punto de contacto de la rueda con el terreno se supone igual a cero a lo largo del movimiento. Esto le permite, gracias a los rodamientos montados en

la superficie de la rueda, desplazarse en dirección perpendicular al plano de la rueda.



Figura 1.11 Rueda Sueca, tomado de [10].

1.4.2.2 DISPOSICIÓN DE LAS RUEDAS SOBRE LA ESTRUCTURA MECÁNICA.

La combinación de los diversos tipos de ruedas lleva a tener una gran variedad de robots móviles que se diferencian por su grado de maniobrabilidad.

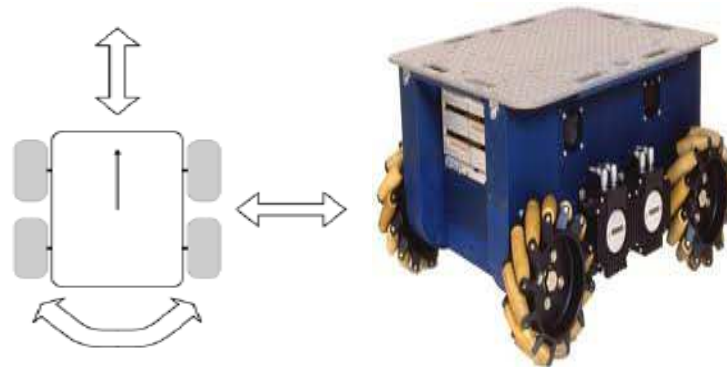
A continuación se presentan brevemente las principales características de diseño de diversos tipos de robot móviles. Esta descripción no pretende ser exhaustiva, sin embargo se la ha limitado a ejemplos concretos de estructuras no singulares y no redundantes.

- *ROBOT OMNIDIRECCIONAL*

Estos robots tienen máxima maniobrabilidad en el plano; esto significa que ellos pueden moverse en cualquier dirección sin necesidad de reorientarse (Figura 1.12 y Figura 1.13). En contraste, los otros tipos de robots tienen una maniobrabilidad restringida.

La Figura 1.12 muestra el robot omnidireccional Uranus desarrollado en la Universidad de Michigan y el conjunto de movimientos posibles que el mismo puede desarrollar. De acuerdo a la rotación de cada una de las

ruedas el robot puede avanzar, girar o desplazarse lateralmente sin necesidad de reorientarse.

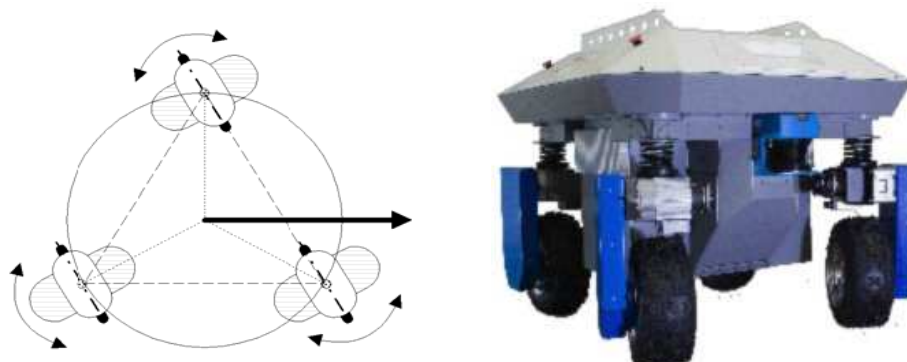


a) Maniobrabilidad

b) Robot Uranus

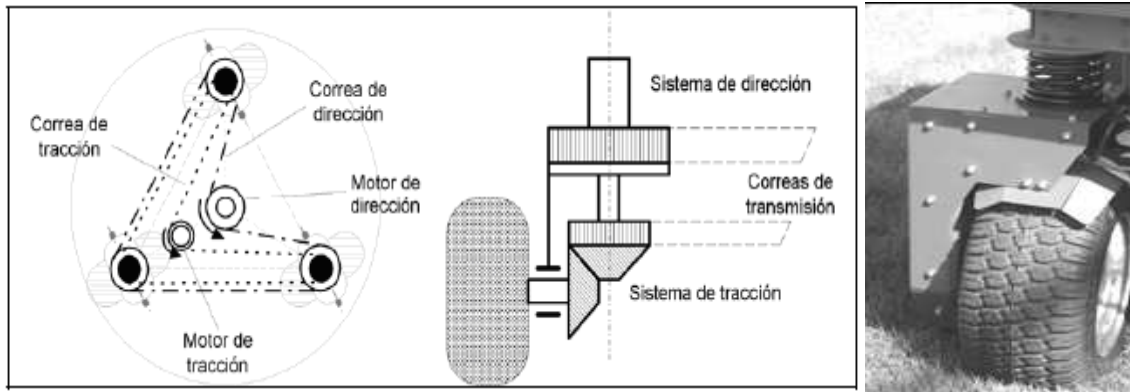
Figura 1.12 Robot Unidireccional con ruedas suecas [10].

En la Figura 1.13 se presenta otra versión de robot omnidireccional con ruedas orientables centradas. En este caso el robot puede cambiar la dirección de su movimiento simplemente cambiando la orientación de las ruedas. Este movimiento sincronizado se puede lograr por medios mecánicos (Figura 1.14 a) empleando sistemas de tracción y dirección por correas o por medios electrónicos (Figura 1.14 b) mediante señales de accionamientos simultáneas a partir de la electrónica que comanda cada uno de los motores en las ruedas.



a) Disposición sobre una estructura mecánica. b) Robot Seekur (ActiveMedia).

Figura 1.13 Robot omnidireccional con ruedas orientables centradas, tomado de [10].



a) Mecánico.

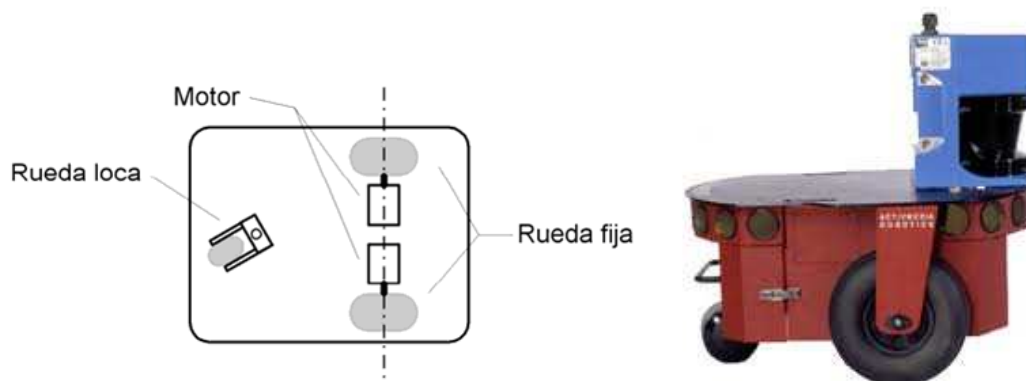
b) Electrónico.

Figura 1.14 Sincronismo entre el sistema de tracción y dirección con ruedas omnidireccionales (synchro drive), tomado de [10].

Las ventajas de un robot omnidireccional se ven desminuidas por la complejidad mecánica y/o electrónica necesarias para conservar una buena coordinación entre las ruedas y evitar derivas en la pose del robot.

- **UNICICLO**

El robot tipo unicycle es, en general, el elegido por los investigadores a la hora de probar nuevas estrategias de control por tener una cinemática sencilla. Es una estructura que consta de dos ruedas fijas convencionales sobre el mismo eje, controladas de manera independiente y una rueda loca que le confiere estabilidad (Figura 1.15).



a) Estructura.

b) Robot Pioneer

Figura 1.15 Uniciclo, tomado de [10].

El sistema de tracción-dirección asociado al robot le permite independizar las consignas de velocidad lineal y angular respectivamente. Las ventajas que se derivan de la estructura mecánica y de la electrónica de control hacen de esta configuración la preferida para robots de laboratorio.

- **TRICICLO**

El robot tipo triciclo está formado por dos ruedas convencionales fijas sobre un mismo eje y una rueda convencional centrada orientable que concentra las funciones de tracción-dirección (Figura 1.16).

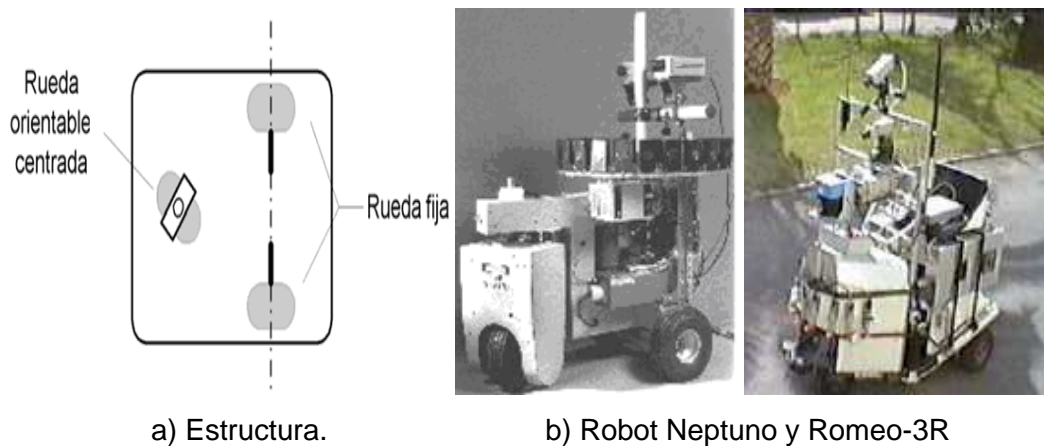


Figura 1.16 Triciclo, tomado de [10].

Al igual que en el caso anterior, la estructura mecánica y la electrónica de control son sencillas, su tratamiento cinemático resulta de interés en áreas específicas del control de robots móviles. En cuanto a aplicaciones industriales esta configuración es apta para el transporte de cargas pesadas a baja velocidad.

- **CUATRICICLO**

Un problema asociado con la configuración tipo triciclo es que el centro de gravedad del vehículo se posiciona, en algunas ocasiones, en los límites de la superficie de equilibrio, definida por las tres ruedas, cuando el vehículo está en movimiento. Esto produce una pérdida de tracción en el vehículo y

es fuente de error a la hora de estimar la posición del robot. Una solución a este problema lo presenta el sistema de *dirección Ackerman*. Como se observa en la Figura 1.17 los ejes de las dos ruedas frontales se interceptan en un punto *C* que pertenece al eje común de las ruedas traseras. El lugar de los puntos en el plano trazados por cada rueda, alrededor de este punto *C*, es un conjunto de arcos concéntricos donde todos los vectores velocidad instantánea son tangente a estos arcos. Esta estructura, además de brindar mayor estabilidad, evita el deslizamiento en la ruedas y por lo tanto reduce los errores de odometría.

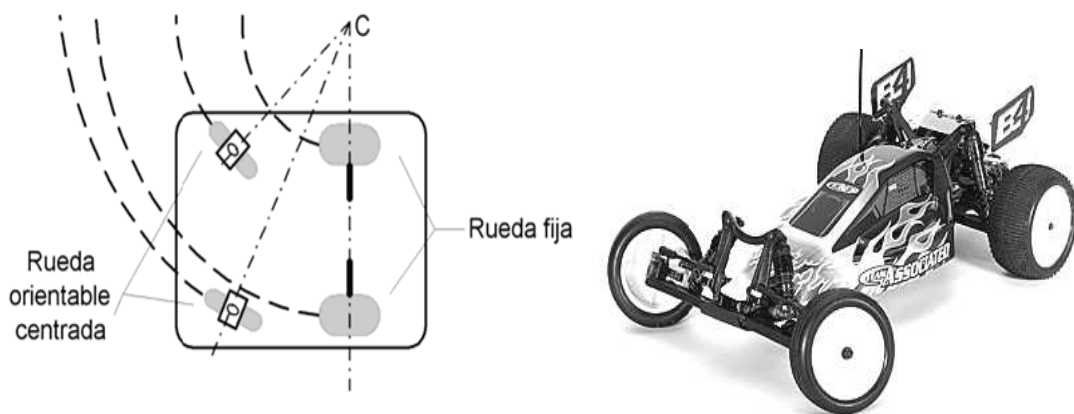


Figura 1.17 Sistema de dirección Ackerman, tomado de [10].

Si bien su cinemática, su estructura mecánica y su electrónica de control no son tan sencillas esta configuración presenta un gran interés para los amantes de los robots todo terreno en donde los principales desarrollos se producen en la recolección de información sensorial y su posterior tratamiento para lograr reconstrucción de entornos o para el control en tiempo real [10].

1.4.3 APLICACIONES DE LOS ROBOTS MÓVILES [7].

La *Robótica Móvil* representa un campo de aplicación importante para los Sistemas de Control, ya que ha generado un creciente impacto en la industria manufacturera y, más recientemente, en la agroindustria y el sector de servicios.

La Robótica plantea el desarrollo de autómatas con altos niveles de destreza y autonomía de movimiento y/o manipulación, lo cual permite su aplicación en sistemas de producción altamente automatizada, tareas y servicios o auxilios en lugares de difícil acceso y ambientes contaminados o riesgosos. Estas aplicaciones han generado un impacto económico y social positivo en los países que las desarrollan.

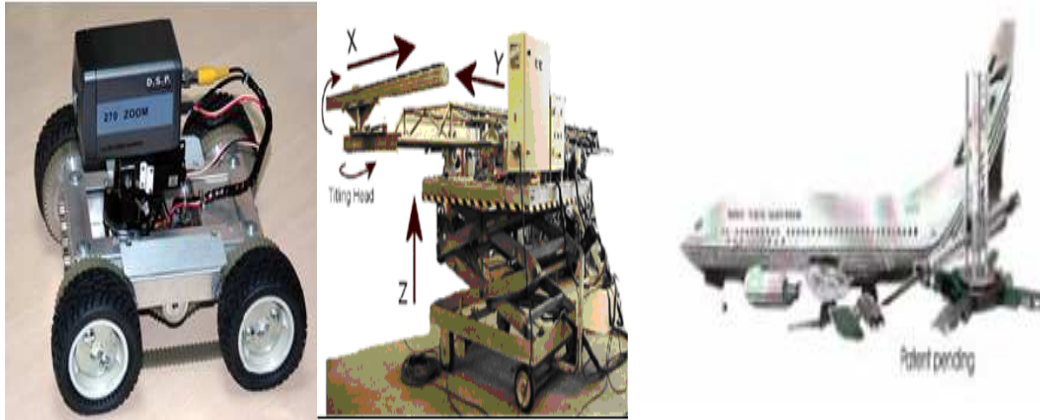
Desde el punto de vista del uso que se da al robot móvil es posible clasificarlos bien en base al sector económico en el que se encuentran trabajando o bien en base al tipo de aplicación o tarea que desarrollan, independientemente de en qué sector económico trabajen.

1.4.3.1 APLICACIONES INDUSTRIALES

La utilización de robots industriales está ampliamente extendida en todo tipo de fábricas y empresas industriales, obteniendo con ellos reducción de costes, aumento de la productividad, mejora de la calidad en la producción y eliminación de condiciones peligrosas de trabajo o mejora de las mismas. De este modo, la empresa industrial, a través de inversiones tecnológicas en el campo de la automatización industrial, podrá aumentar su competitividad en el mercado, corriendo el riesgo de quedarse rezagada en el mercado si descartase la utilización de la robótica en sus procesos de fabricación.

El principal papel de los robots es articular diferentes máquinas y funciones productivas; transporte, manejo de materiales, maquinado, carga y descarga, etc. mediante su capacidad para desempeñar diversas tareas u operaciones. El robot industrial ha sido descrito como el elemento más visible de la fabricación asistida por computador y como la base técnica para la mayor automatización de la producción.

Robots en Limpieza Industrial.



a) i-Bot 3

b)Goya

c) Saams

Figura 1.18 Robos de limpieza: a) de conductos b) de barcos
c) de aviones, tomado de [7], [10].

Robots en Transporte de Mercancías



a) Elevador (AVG)

b)Transportador (AVG)

c)Transportador(LVG)

Figura 1.19 Robot de carga, tomado de [7], [10].

Robots en Agricultura



a) Tractor Autónomo

b) Cosechadora Autónoma

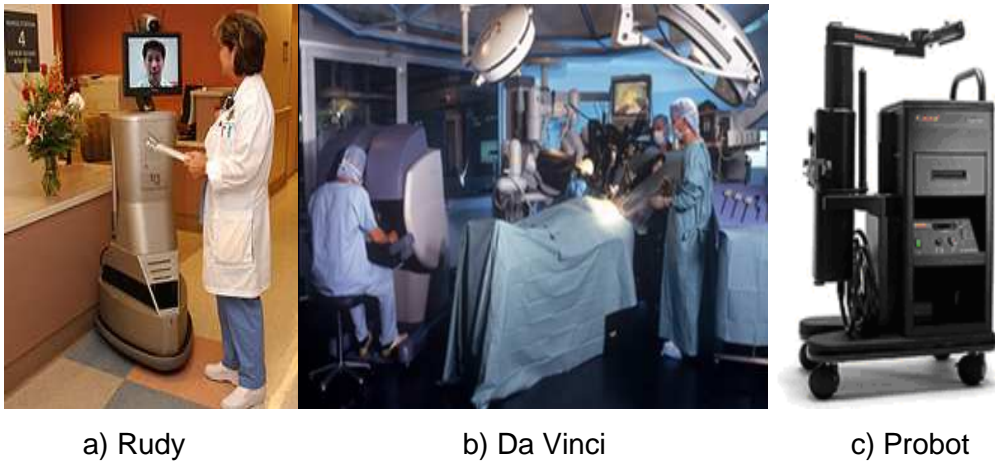
Figura 1.20 Robots en el Sector Agrónomo, tomado de [7].

1.4.3.2 APLICACIONES INNOVADORAS Y DE SERVICIO

El sector servicios está capacitado para razonar ante un conjunto de situaciones o contexto. Este sector de servicios, sea personal como colectivo, es una de las áreas de aplicación más novedosa. Se estima que en los próximos diez años el sector pueda requerir necesidades en robótica con un volumen de negocio comparable con el del sector industrial (tradicional o manufacturero).

Según IEEE (Institute of Electrical and Electronics Engineers), los robots de servicios son aquellos que de forma semiautomática o totalmente automática realizan servicios en beneficio de los humanos o para el mantenimiento de infraestructuras y equipos, excluidas las operaciones de fabricación.

Robots en la Medicina



a) Rudy

b) Da Vinci

c) Probot

Figura 1.21 Robots vinculados a la Medicina

- a) Permite el vínculo entre médico/paciente b) Ayuda a una cirugía asistida por robot
c) Realiza una resección de tejido benigno de la próstata, tomado de [7]. [10].

Robots en el Hogar y Oficina



a) Guardrobo D1

b) MARON-1

c) Roborior

- Figura 1.22 Robots de casa u oficina a) Detecta incendios o escape de agua
b) Robot doméstico de vigilancia c) Detecta Intrusos, tomado de [7].

Robots de Ocio y Entretenimiento



a) Robot QRIO

b) Robot Furby

c) Robosapien

Figura 1.23 Robots de entretenimiento, tomado de [7].

1.4.3.3 APLICACIONES DE VIGILANCIA

En la aplicación de la robótica móvil a la vigilancia se tiene una serie de robots que se crean para cumplir sobre todo con un servicio ordenado y de vigilancia. También se puede realizar un tipo de vigilancia y atención exacta siempre y cuando se tenga un robot vigilante telecontrolado. Cada uno tendrá unas funciones específicas, como encargarse de patrullar por un entorno detectando anomalías, otros se dedicarán a observar una zona concreta para evaluar la situación, otros se usarán como apoyo a los militares en las misiones para controlar una zona ya tomada o buscar objetivos u otras misiones posibles que se les puede asignar.

Además de la propia función de vigilancia también se les podría poner armamento no letal para disuadir en su caso del intruso o para la autoprotección del robot.

Robots en Espacios de Vigilancia



a) Robot (superficies rugosas) b) Bell ojos de Águila c) Madeleine Acuático

Figura 1.24 Robots de Vigilancia: a) Terrestre b) Aéreo c) Acuático, tomado de [7].



a) Robot Ofro

b) Robot Aug-V8

c) Robot Rotundus

Figura 1.25 a) Vigilancia al aire libre. b) Misiones de vigilancia y patrulla en terrenos difíciles y hostiles.

c) Vigilancia de entornos peligrosos, tomado de [7].

1.4.3.4 APLICACIONES MILITARES

El sector militar está muy enfocado en la robótica, porque conseguir grandes avances en ello, repercutiría en un gran ahorro; tanto económicamente ya que el mantenimiento de un ejército de robots sería mucho mejor que el de un ejército de personas, como un gran ahorro en vidas.

Los militares no solo se han interesado en máquinas o robots soldado que hagan el trabajo de la infantería o de otras tropas, si no en todo tipo de tareas en las que los soldados que las realizan estuviesen en gran peligro; como es por ejemplo el espionaje desde el aire, durante la Primera y Segunda Guerra Mundial, miles de pilotos que se dedicaban a la observación de las líneas enemigas perdieron sus vidas mientras realizaban estas misiones. Al igual que ocurre con otras tareas como son la desactivación de minas o de bombas, en las que el más mínimo fallo puede hacer perder la vida al encargado de esa tarea.



a) Robot Talon



b) Robot Com-Bat



c) Robot PackBot EOD



d) Robot ViPer

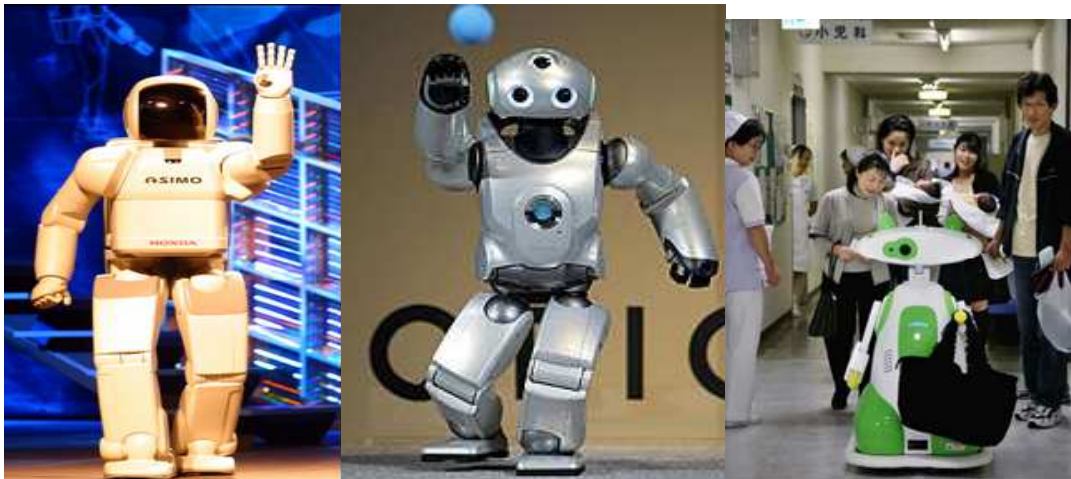
Figura 1.26 a) Robot soldado b) Podría detectar radiación nuclear y gases venenosos c) Desactivado de explosivos d) Dispara y avienta granadas, tomado de [7], [10].

1.4.3.5 APLICACIONES EN INVESTIGACIÓN Y DESARROLLO

Desde los años 60 la inversión en investigación y desarrollo en el campo de la robótica ha tenido un crecimiento exponencial. Puesto que los robots pueden desarrollar complicadas tareas sin problema, supone una ventaja inmediata la inversión de cualquier empresa en un robot. Esto ha motivado dicho crecimiento exponencial para la búsqueda de robots cada vez más rápidos e inteligentes que desarrollen tareas específicas.

Actualmente las líneas de investigación son mucho más amplias dando lugar a todo tipo de robots que puedan solucionar cualquier problema. Desde robots para la limpieza del hogar hasta robots que puedan solventar tareas peligrosas para el ser humano como puede ser la desactivación de explosivos o apagar incendios.

Robots Humanoides



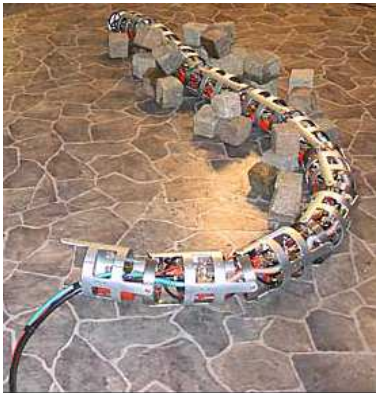
a) ASIMO

b) QRIO

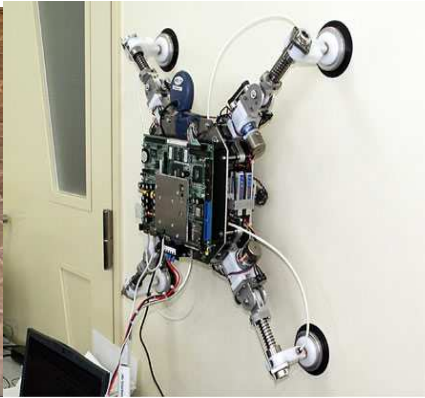
c) RIDC-01

Figura 1.27 a) Primer robot Humanoide (HONDA) b) Humanoide con buena estabilidad (SONY) c) Robot recepcionista, tomado de [7].

Robots con forma de animal



a) Anna Konda



b) Robot Araña



c) AIBO

Figura 1.28 a) Creado para combatir el fuego b) Se moviliza por las paredes realiza vigilancia c) Perro guardián, tomado de [7].

CAPITULO 2

ESTUDIO DE LOS SISTEMAS NO LINEALES Y SU APLICACIÓN EN LA ROBÓTICA MÓVIL

La teoría de sistemas de control se ocupa del análisis y el diseño de componentes interactuantes de un sistema en una configuración que brinde un comportamiento deseado. La configuración esencial usada en teoría de sistemas de control se basa en el concepto fundamental de *realimentación*, que consiste en el proceso de medir las variables de interés en el sistema y usar esa información para controlar su comportamiento. La teoría y la práctica del control tienen un amplio rango de aplicaciones en los campos de la ingeniería aeronáutica, química, mecánica, ambiental, civil y eléctrica, así como en muchas otras disciplinas no ingenieriles. Las ventajas del control eficiente en la industria son inmensas, e incluyen mejoras en la calidad de los productos, reducción en el consumo de energía, minimización de los materiales de desecho, mayores niveles de seguridad y reducción de la contaminación.

El punto de partida en el análisis de un sistema de control es su representación por un modelo matemático, generalmente como un operador entre entradas y salidas del sistema, o como un conjunto de ecuaciones en diferencia y/o diferenciales. La mayoría de los modelos matemáticos usados tradicionalmente por teóricos y prácticos del control son lineales. De hecho, los modelos lineales son mucho más manejables que los no lineales, y pueden representar en forma precisa el comportamiento de sistemas reales en muchos casos útiles. Sin embargo, los avances tecnológicos actuales han generado una enorme variedad de nuevos problemas y aplicaciones que son no lineales en esencia. Por ejemplo, fenómenos no lineales tales como equilibrios múltiples, ciclos límite, bifurcaciones, corrimiento de frecuencias y caos, se observan comúnmente en aplicaciones modernas importantes en ingeniería, tales como sistemas de comando de vuelo, control de robots, sistemas de autopistas automatizadas, estructuras de ala de avión, y sistemas de inyección de combustible de alto rendimiento. Tales

fenómenos no lineales no se pueden describir mediante dinámica de modelos lineales — una razón ineludible para el uso de modelos no lineales y el desarrollo de conceptos y herramientas de sistemas no lineales de control.

Este capítulo brinda una introducción rigurosa y los conceptos fundamentales de la teoría de sistemas no lineales y a técnicas modernas de análisis y diseño de sistemas de control no lineal.

La teoría de estabilidad juega un rol central en teoría de sistemas e ingeniería. Existen distintos tipos de problemas de estabilidad en los sistemas dinámicos. En este capítulo se va a tratar la estabilidad de puntos de equilibrio. Para ello se emplean definiciones y resultados provenientes de la metodología de estabilidad de Lyapunov. Esta metodología se basa en la descripción del sistema por ecuaciones diferenciales, que dan la evolución temporal de las variables de estado.

2.1 SISTEMAS NO LINEALES [12], [13].

Un sistema no lineal es aquél que no verifica el principio de superposición.

La justificación del estudio de los sistemas no lineales se fundamenta en numerosas razones. Desde la óptica del control automático pueden mencionarse las siguientes:

- Virtualmente todos los sistemas físicos son *de naturaleza no lineal*. A veces es posible describir la operación de un sistema físico por un modelo lineal, por ejemplo ecuaciones diferenciales ordinarias lineales. Este es el caso cuando la operación del sistema no se desvía demasiado del punto de operación nominal. Por esto el análisis de sistemas lineales es importante en la teoría y práctica del control. Sin embargo, otras veces el modelo linealizado no es adecuado. Esto tiene que ver también con el desempeño deseado del sistema de control.

- *Mejoramiento de sistemas de control existentes.* Los controladores no lineales pueden manejar no linealidades en un amplio rango de operación del sistema. Esto puede ser ejemplificado con el caso del robot. En altas velocidades las fuerzas no lineales de Coriolis y centrífugas (que son funciones cuadráticas de la velocidad) se manifiestan con intensidad. En este caso, un controlador no lineal denominado de par calculado puede mejorar notablemente el desempeño respecto de un controlador de movimiento de tipo lineal.
- *Análisis de no linealidades fuertes.* Una suposición del control lineal es que el modelo es linealizable. Sin embargo existen no linealidades cuya naturaleza discontinua no permite la aproximación lineal. Ejemplos de éstas son la fricción de Coulomb, la saturación, las zonas muertas, la histéresis, que son frecuentemente encontradas en ingeniería. Estas no linealidades causan efectos no deseables como inestabilidades y ciclos límites, por lo que sus efectos deben ser predecidos y compensados.
- *Incertidumbres en el modelo.* Cuando se diseñan sistemas lineales se asume que los parámetros del modelo son suficientemente bien conocidos. Sin embargo, a veces esto no ocurre, lo cual puede deberse a variaciones lentas o abruptas de esos parámetros. En estos casos pueden incorporarse intencionalmente no linealidades al sistema de control a fin de que esas incertidumbres sean bien toleradas. Ejemplos son los sistemas de control robusto y los adaptables.
- *Simplicidad de diseño.* En algunos casos un buen diseño de control no lineal puede ser más simple que la contraparte lineal, porque el diseño no lineal está asociado a la física misma del sistema. También, un diseño no lineal puede permitir el uso de componentes de control menos costosos, al no requerir que los sensores y actuadores sean de comportamiento estrictamente lineal.
- *Facilidades computacionales.* Los avances en las tecnologías de cómputo facilitan la aplicación de controladores no lineales.

2.1.1 COMPORTAMIENTO DE SISTEMAS NO LINEALES

Los sistemas físicos son inherentemente no lineales. Sin embargo, si las no linealidades son suaves y el rango de operación del sistema es pequeño, el sistema puede ser aproximado por un modelo lineal.

Las no linealidades pueden *clasificarse* como:

- *naturales o inherentes*: naturalmente incluidas en el sistema, como las fuerzas centrípetas, fricción de Coulomb, etc. Usualmente tienen efectos indeseables y los sistemas de control deben compensarlas.
- *artificiales o intencionales*: son introducidas intencionalmente por el diseñador, como las leyes de control adaptable.
- *discontinuas*: no pueden ser localmente aproximadas por funciones lineales, ej., la histéresis, la fricción estática...
- *continuas*: pueden ser localmente linealizadas.
- *estáticas*: representables por ecuaciones algebraicas o por curvas.
- *dinámicas*: representables por ecuaciones diferenciales, en diferencias...

2.1.2 PROPIEDADES DE LOS SISTEMAS LINEALES

Sea el sistema lineal dado por:

$$\dot{x} = Ax$$

donde:

A : matriz constante

x : vector de estados

Tiene un único equilibrio si A no es singular.

- El equilibrio es estable si los autovalores de A tienen parte real negativa, independientemente de las condiciones iniciales.
- La respuesta se compone de los modos naturales del sistema.
- En presencia de entradas externas, el sistema satisface el principio de superposición; la estabilidad asintótica implica que a entrada acotada corresponde salida acotada; a entrada senoidal corresponde salida senoidal de igual frecuencia.

2.1.3 COMPORTAMIENTOS NO LINEALES

- a. Considérese la ecuación que representa el movimiento de un vehículo submarino en forma simplificada:

$$\dot{v} + |v|v = u$$

donde v es la velocidad y u la propulsión. Para dos entradas distintas resultan los siguientes valores de velocidad en estado permanente v_s :

$$\begin{aligned} u = 1: & \quad 0 + |v_s|v_s = 1 \quad \Rightarrow \quad v_s = 1 \\ u = 10: & \quad 0 + |v_s|v_s = 10 \quad \Rightarrow \quad v_s = \sqrt{10} \end{aligned}$$

Respuestas típicas se observan en la Figura 2.1.

- El comportamiento al escalón positivo es más rápido que al escalón negativo.

- El comportamiento no es proporcional al valor del escalón.

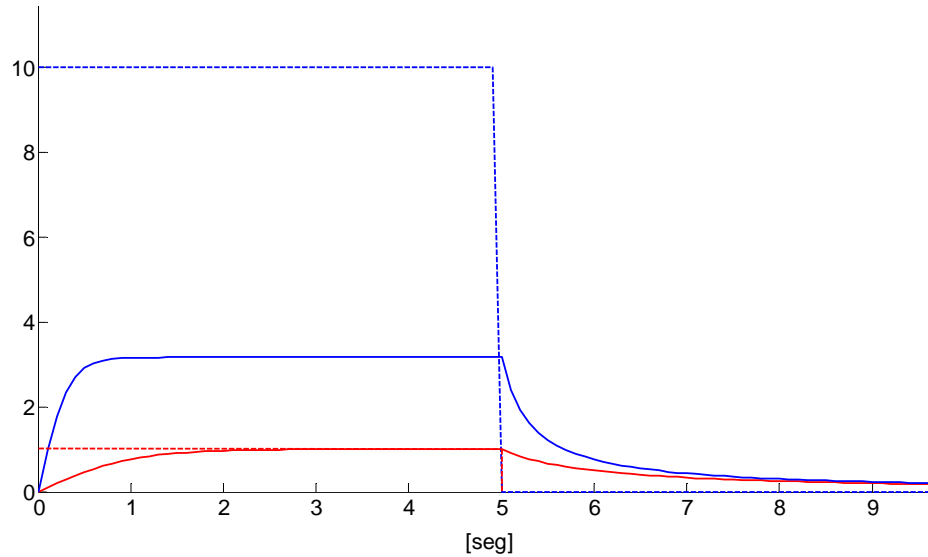


Figura 2.1 Ejemplo de un comportamiento no lineal

b. Múltiples puntos de equilibrio

$$\dot{x} = -x + x^2; \quad x(0) = x_0$$

La solución es:

$$x(t) = \frac{x_0 e^{-t}}{1 - x_0 + x_0 e^{-t}}$$

Según se ve en la Figura 2.2 se tienen dos equilibrios, uno en $x = 0$ y el otro en $x = 1$. El primero corresponde al del sistema linealizado en $x = 0$. También se observa que para condiciones iniciales mayores que 1, se tiene un "tiempo de escape" finito para las soluciones del sistema.

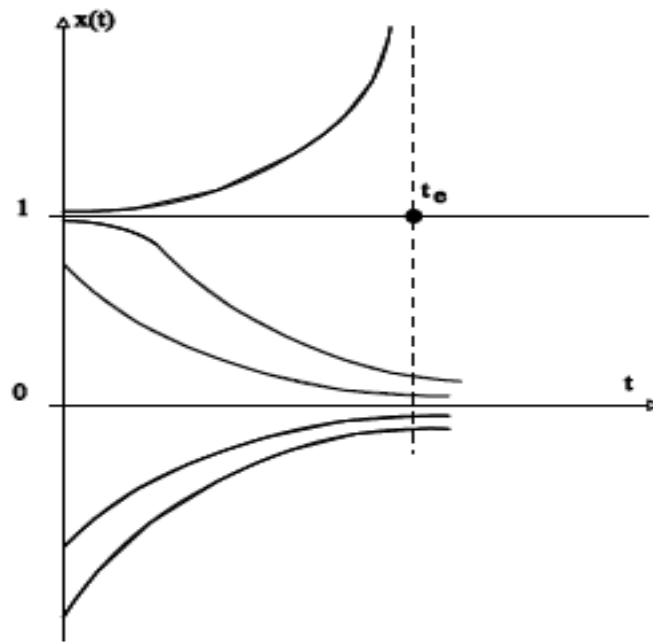


Figura 2.2 Representación de múltiples puntos de equilibrio

- c. Para entradas u externas acotadas, la salida puede ser acotada o no, dependiendo del valor de la entrada.

$$\dot{x} = xu$$

$$u = 1 \quad \Rightarrow \quad |x| \rightarrow \infty$$

$$u = -1 \quad \Rightarrow \quad |x| \rightarrow 0$$

- d. Ciclos límites.

Oscilaciones de amplitud y período fijos sin excitación externa.

$$m\ddot{x} + 2c(x^2 - 1)\dot{x} + kx = 0 \quad \text{Van der Pol}$$

$$m, c, k \geq 0$$

Sistema con amortiguamiento que depende de la posición. Para pequeños desplazamientos la fricción es negativa y la amplitud crece, para

desplazamientos grandes es positiva y la amplitud decrece. El sistema presenta una oscilación sostenida independientemente de las condiciones iniciales (diferente de las oscilaciones de sistemas lineales marginalmente estables).

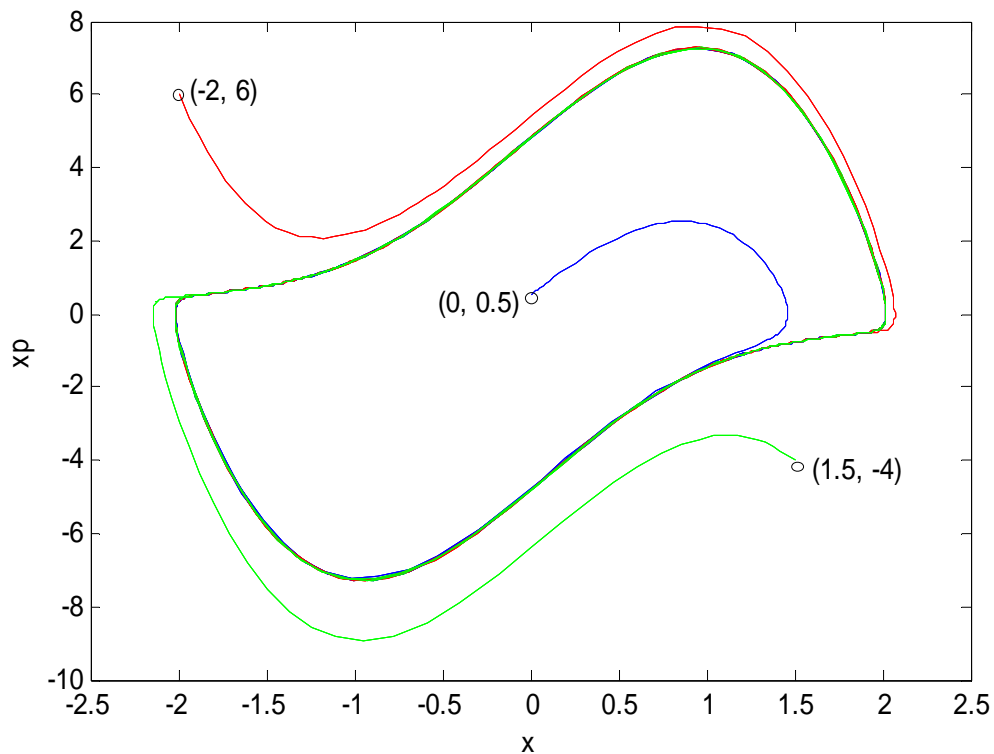


Figura 2.3 Comportamiento de la ecuación de Van der Pol, para distintos valores iniciales

e. Caos.

Para sistemas lineales, pequeñas diferencias en las condiciones iniciales causan pequeñas diferencias en la salida. En sistemas no lineales, la salida puede ser extremadamente sensible a las condiciones iniciales, por lo que la misma se vuelve impredecible. Este fenómeno se denomina caos.

Observaciones

De los sistemas no lineales se puede concluir que:

- Los sistemas no lineales presentan una riqueza dinámica y comportamientos complejos que no tienen los sistemas lineales.
- En general no es posible resolverlos analíticamente. Para su análisis se requieren herramientas matemáticas más complejas que para los sistemas lineales y no admiten un análisis general.
- La simulación es un complemento valioso en su estudio.

2.2 ESTABILIDAD DE LYAPUNOV [12], [13].

La estabilidad de puntos de equilibrio generalmente se caracteriza en el sentido de *Lyapunov*, un matemático e ingeniero ruso que estableció las bases de la teoría que hoy lleva su nombre. Un punto de equilibrio se dice *estable* si todas las soluciones que se inicien en las cercanías del punto de equilibrio permanecen en las cercanías del punto de equilibrio; de otro modo el punto de equilibrio es *inestable*.

Considérense ecuaciones diferenciales no lineales del tipo,

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad x(0) = x_0 \quad (2.1)$$

donde:

$$x \in \mathfrak{R}^n, \quad t \in \mathfrak{R}_+, \quad f : \mathfrak{R}_+ \times \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n.$$

2.2.1 DEFINICIONES Y TEOREMAS

- **Autonomía**

El sistema (2.1) se dice autónomo si f no depende explícitamente de t , o sea,

$$\dot{x}(t) = f(x(t))$$

- **Punto de equilibrio**

Un vector $x^* \in \mathfrak{R}^n$ es un punto de equilibrio de (2.1) si,

$$f(t, x^*) = 0, \quad \forall t \geq t_0$$

2.2.2 DEFINICIONES DE ESTABILIDAD.

Aquí se supone que el origen es un equilibrio de (2.1), o sea $x^* = 0$. Esto no implica pérdida de generalidad, ya que mediante cambios de coordenadas un equilibrio de (2.1) se puede trasladar al origen.

- **Equilibrio estable**

El origen es un equilibrio estable (2.1) si, dado cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $\delta(t_0, \varepsilon) > 0$ tal que,

$$\|x(t_0)\| < \delta(t_0, \varepsilon) \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0$$

El equilibrio es uniformemente estable si, dado cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que,

$$\|x(t_0)\| < \delta(\varepsilon), t_0 \geq 0 \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0$$

o sea δ puede elegirse independientemente de t_0 .

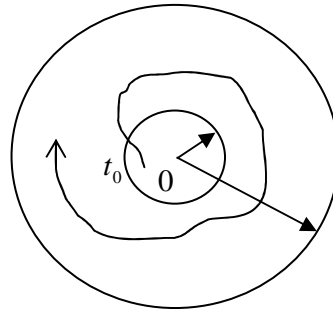


Figura 2.4 Equilibrio estable

- **Equilibrio inestable**

El origen es inestable si no es estable.

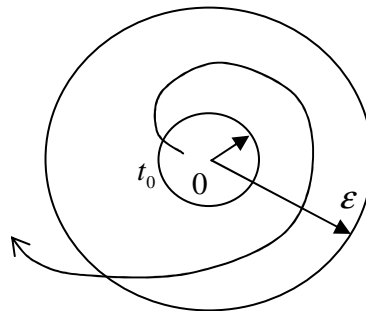


Figura 2.5 Equilibrio Inestable

- **Equilibrio asintóticamente estable**

El origen es un equilibrio asintóticamente estable si,

a) Es estable.

b) Es atractivo: Existe un número $\delta_I(t_0) > 0$ tal que,

$$\|x(t_0)\| < \delta_I(t_0) \Rightarrow \|x(t)\| \rightarrow 0 \text{ con } t \rightarrow \infty.$$

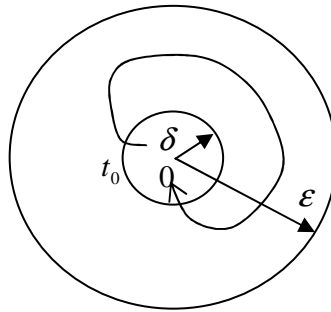


Figura 2.6 Asintóticamente Estable

El origen es un equilibrio **uniformemente asintóticamente estable** si,

a) Es un equilibrio uniformemente estable.

b) Es uniformemente atractivo: Existe un número $\delta_I > 0$ tal que,

$$\|x(t_0)\| < \delta_I, t_0 \geq 0 \Rightarrow \|x(t)\| \rightarrow 0 \text{ con } t \rightarrow \infty \text{ uniformemente.}$$

O bien,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists T(\varepsilon) \text{ tal que } \|x_0\| < \delta_1, t_0 \geq 0 \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq T(\varepsilon)$$

- **Equilibrio globalmente asintóticamente estable**

El origen es un equilibrio globalmente asintóticamente estable de (2.1) si,

a) Es estable.

b) $\|x(t)\| \rightarrow 0$ con $t \rightarrow \infty \quad \forall x_0$.

En este caso el único equilibrio es el origen y la propiedad de estabilidad se atribuye al sistema.

El origen es un equilibrio **globalmente uniformemente asintóticamente estable** si:

a) Es uniformemente estable

b) Es uniformemente globalmente atractivo:

$$\forall M, \varepsilon > 0, \exists T = T(M, \varepsilon) \text{ tal que}$$

$$\|x_0\| < M, t_0 \geq 0 \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \forall t \geq T(M, \varepsilon)$$

- **Equilibrio exponencialmente estable**

El origen es un equilibrio exponencialmente estable de (2.1) si existen constantes positivas α, β, δ tal que si $\|x_0\| < \delta$ entonces,

$$\|x(t)\| < \alpha \|x_0\| e^{-\beta(t-t_0)}, \quad \forall t \geq t_0$$

El origen es **globalmente exponencialmente estable** si es exponencialmente estable para toda condición inicial x_0 .

Ejemplo:

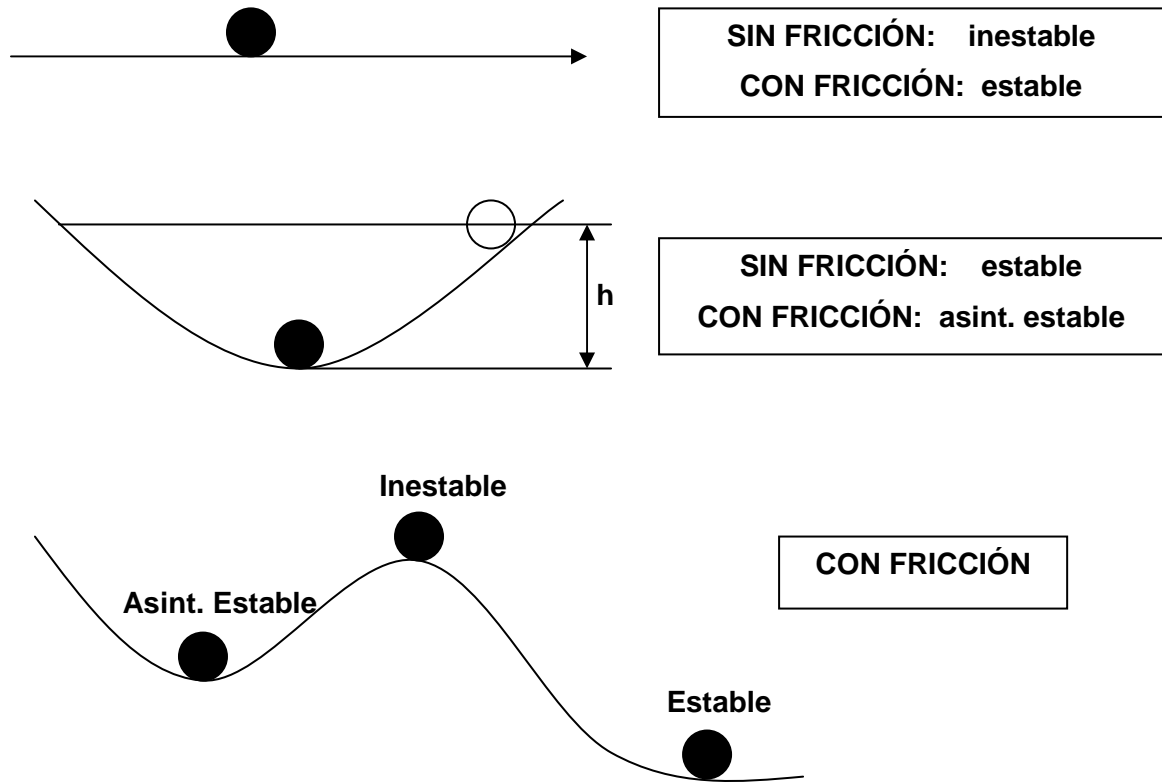


Figura 2.7 Ejemplos de Equilibrio

2.2.3 TEOREMAS DE ESTABILIDAD

- **Función localmente definida positiva**

Una función continua $W : \mathfrak{X}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ es una función localmente definida positiva si,

- $W(0) = 0$
- $W(x) > 0 \quad \forall x \neq 0, x \in B_r = \{x : \|x\| \leq r\}$

- **Función globalmente definida positiva**

Si las condiciones anteriores se verifican para todo $x \in \mathfrak{R}^n$ y además

a) $W(x) \rightarrow \infty$ con $\|x\| \rightarrow \infty$.

entonces $W : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ es globalmente definida positiva.

- **Función temporal localmente definida positiva**

Una función continua $V : \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}_+ \rightarrow \mathfrak{R}$ es localmente definida positiva si,

a) $V(0,t) = 0, t \geq 0$

b) $V(x,t) \geq W(x) \quad \forall x \in B_r, t \geq 0$ con $W(x)$ definida positiva.

- **Función temporal globalmente definida positiva**

Si las condiciones de la definición anterior se verifican para todo $x \in \mathfrak{R}^n$ con $W(x)$ globalmente definida positiva, entonces $V : \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}_+ \rightarrow \mathfrak{R}$ es globalmente definida positiva.

- **Función de clase K**

Una función continua $\alpha : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ es de clase K si,

a) $\alpha(\cdot)$ no es decreciente

b) $\alpha(0) = 0$

c) $\alpha(p) > 0$ si $p > 0$.

- **Función decreciente**

Una función continua $V(t, x) : \mathfrak{R}_+ \times \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ es decreciente si existe una función $\beta(\cdot)$ de clase K tal que

$$V(t, x) \leq \beta(\|x\|), \quad \forall t \geq 0, \quad \forall x \in B_r$$

con B_r una vecindad del origen en \mathfrak{R}^n .

- **Función candidata de Lyapunov**

Una función continua $V : \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}_+ \rightarrow \mathfrak{R}$ es una función candidata de Lyapunov si,

a) $V(x, t)$ es una función definida positiva en B_r .

b) $\frac{\partial V(x, t)}{\partial t}$ y $\frac{\partial V(x, t)}{\partial x}$ existen en B_r y son continuas con respecto a x y t .

En adelante supóngase que está resuelto el problema de existencia y unicidad de soluciones de (2.1) en un entorno del origen $B_r \in \mathfrak{R}^n$ y para $t \geq t_0$. Además se supone que el origen $x = 0$ es un equilibrio de (2.1).

- **Derivada de una función candidata de Lyapunov**

Sea $V(x, t)$ una función candidata de Lyapunov. La derivada de $V(x, t)$ a lo largo de las trayectorias de (2.1) está dado por,

$$\dot{V}(x, t) = \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} f(t, x) + \frac{\partial V(x, t)}{\partial t} = \Delta V \cdot f + \frac{\partial V}{\partial t}$$

- **Teorema. Estabilidad**

El equilibrio en el origen es estable si existe una función continuamente diferenciable, localmente definida positiva V y $r > 0$ tal que:

$$\dot{V}(t, x) \leq 0, \quad \forall t \geq t_0, \quad \forall x \in B_r.$$

- **Teorema. Estabilidad uniforme**

El equilibrio en el origen es uniformemente estable si existe una función continuamente diferenciable, localmente definida positiva y decreciente V y un $r > 0$ tal que:

$$\dot{V}(t, x) \leq 0 \quad \forall t \geq 0, \quad \forall x \in B_r$$

- **Teorema. Estabilidad asintótica**

El equilibrio en el origen es uniformemente asintóticamente estable si existe una función localmente definida positiva y continuamente diferenciable y decreciente V tal que $-\dot{V}(x, t)$ es localmente definida positiva.

- **Teorema. Estabilidad asintótica global**

El equilibrio en el origen es globalmente uniformemente estable si existe una función definida positiva, continuamente diferenciable, decreciente V tal que $-\dot{V}(x, t)$ es definida positiva.

▪ **Teorema. Estabilidad exponencial**

Si existe en alguna vecindad del origen $B_r \in \mathfrak{R}^n$ una función $V(x,t)$ continuamente diferenciable y existen constantes positivas α, β, γ tal que,

a) $\alpha \|x\|^p \leq V(x,t) \leq \beta \|x\|^p, \forall x \in B_r$

b) $\dot{V}(x,t) \leq -\gamma \|x\|^p \quad \forall t \geq 0, \forall x \in B_r$

entonces el origen es un equilibrio exponencialmente estable.

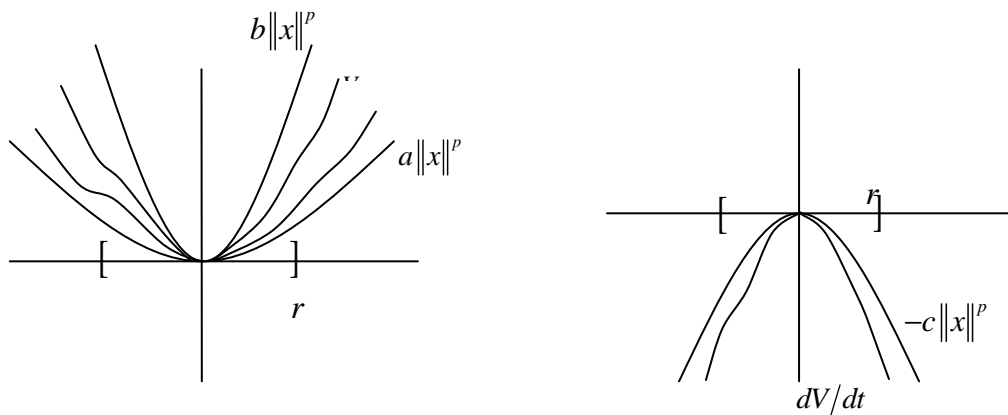


Figura 2.8 Estabilidad Exponencial

La verificación de estas condiciones en todo el espacio de estados conduce a estabilidad exponencial global.

▪ **Teorema. Extensión de LaSalle(Conjunto Invariante Local)**

Supóngase que el sistema (2.1) sea autónomo y que existe una función escalar $V(x)$ con primeras derivadas parciales continuas. Asíumase que $\dot{V}(x) \leq 0$ en \mathfrak{R}^n y $V(x) \rightarrow \infty$ con $\|x\| \rightarrow \infty$. Sea R el conjunto de estados donde $\dot{V}(x) = 0$ y M el mayor

conjunto invariante en R . Entonces todas las soluciones convergen asintóticamente a M con $t \rightarrow \infty$.

Si M es el origen, entonces puede concluirse que $x(t) \rightarrow 0$ con $t \rightarrow \infty$, o sea se verifica estabilidad asintótica.

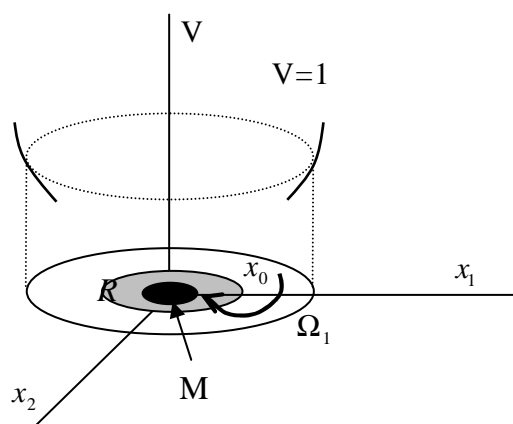


Figura 2.9 Teorema de LaSalle

2.2.4 MÉTODO DIRECTO DE LYAPUNOV

Considérese el sistema masa-resorte-amortiguador no lineal:

$$m\ddot{x} + b\dot{x}|\dot{x}| + k_0x + k_1x^3 = 0$$

Supóngase que se desplaza la masa del equilibrio y se la suelta.

Examinando la **energía del sistema**:

$$V(x) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \int_0^x (k_0x + k_1x^3) dx = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k_0x^2 + \frac{1}{4}k_1x^4$$

Se observa que:

- Energía cero corresponde al punto de equilibrio en el origen.
- Estabilidad asintótica implica la convergencia de la energía a cero.
- Inestabilidad está relacionada con el crecimiento de la energía.

Entonces, las propiedades de estabilidad pueden caracterizarse por la *variación de la energía con el tiempo*. Esta variación temporal en las trayectorias se calcula como:

$$\dot{V}(x) = m\dot{x}\ddot{x} + (k_0x + k_1x^3)\dot{x} = \dot{x}(-b\dot{x}|\dot{x}|) = -b|\dot{x}|^3 \leq 0$$

O sea que la energía del sistema no podrá crecer, garantizando que el equilibrio no es inestable.

La aplicación del teorema de conjunto invariante permite obtener estabilidad asintótica:

- Para $l > 0$, Ω_l acotado, $\dot{V} \leq 0$
- Conjunto R: $\dot{V} = 0$, $\dot{x} = 0$
- Conjunto M: para $R(\dot{x} = 0)$ se observa que la aceleración

$$\ddot{x} = -\frac{k_0}{m}x - \frac{k_1}{m}x^3 - b\dot{x}|\dot{x}| \text{ es cero sólo si } \dot{x} = 0, x = 0$$

⇒ El único conjunto invariante en R es $(0,0)$. Aplicando el teorema de conjunto invariante resulta que $x(t) \rightarrow 0$ con $t \rightarrow \infty$ (estabilidad asintótica)

Observaciones generales

- Ventajas del uso de los teoremas de Lyapunov: se puede concluir sobre la estabilidad de los equilibrios sin resolver el sistema.
- Desventajas: la búsqueda de una función de Lyapunov.
- Debe recordarse que se trata de condiciones suficientes.
- La condición de función candidata de Lyapunov "decreciente" se corresponde con la estabilidad uniforme. Si el sistema es autónomo, dicha función candidata será obviamente decreciente y las condiciones de estabilidad serán siempre uniformes.
- Algunas funciones de Lyapunov pueden dar más información que otras. Ejemplo: en el caso del péndulo con fricción

$$\ddot{\theta} + \dot{\theta} + \sin\theta = 0$$

$$V(x) = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}(\dot{\theta} + \theta)^2 + 2(1 - \cos\theta)$$

$$\dot{V}(x) = -(\dot{\theta}^2 + \theta \sin\theta)^2 < 0 \text{ (localmente)}$$

Con esta función de Lyapunov (que no tiene significado físico) se concluye estabilidad asintótica local. Si se toma $V(x) = K + P$ (energías), $\dot{V}(x) = -\dot{\theta}^2 \leq 0$ y sólo se concluye estabilidad.

2.3 DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL NO LINEAL: USANDO LYAPUNOV [12], [13], [14].

Diseño: Dado un sistema físico (normalmente su modelo dinámico y sus restricciones) y su comportamiento deseado (especificaciones), obtener una ley de control de modo que el sistema realimentado se comporte como se desea.

Si las tareas del sistema de control involucran grandes excursiones de las variables o alta velocidad, muy probablemente deba recurrirse a un diseño de control no lineal a fin de alcanzar las especificaciones.

2.3.1 DISEÑO DE UN CONTROLADOR (REGULACIÓN A CERO)

Dado el sistema

$$\ddot{x} - \dot{x}^3 + x^2 = u$$

Se propone la siguiente estructura de controlador para regulación a cero ($x = 0$)

$$u = u_1(\dot{x}) + u_2(x)$$

Entonces, el sistema de lazo cerrado resulta:

$$\ddot{x} - (\dot{x}^3 + u_1(\dot{x})) + (x^2 - u_2(x)) = 0$$

$$\ddot{x} - b(\dot{x}) + c(x) = 0$$

Se considera que el origen es un equilibrio

$$\begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se propone una función candidata de Lyapunov

$$V = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \int_0^x c(y)dy \quad x.c(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$$

$$\dot{V} = \dot{x}b(\dot{x})$$

Para asegurar la estabilidad del equilibrio

$$\dot{V} \leq 0 \Rightarrow \dot{x}b(\dot{x}) = \dot{x}(\dot{x}^3 + u_1(\dot{x})) < 0 \quad \forall \dot{x} \neq 0$$

Entonces $u_1(\dot{x}), u_2(x)$ se debe elegir de manera que

$$\dot{x}b(\dot{x}): \dot{x}(\dot{x}^3 + u_1(\dot{x})) < 0 \quad \forall \dot{x} \neq 0$$

$$xc(x): x(x^2 + u_2(x)) < 0 \quad \forall x \neq 0$$

Por ejemplo,

$$u_1(\dot{x}) = -2\dot{x}^3$$

$$u_2(x) = -x - x^3$$

\Rightarrow Estabilidad. La aplicación del teorema de conjunto invariante permite obtener estabilidad asintótica:

- Para $l > 0$, Ω_l acotado, $\dot{V} \leq 0$
- Conjunto R: $\dot{V} = 0$, $\dot{x} = 0$
- Conjunto M: para $R(\dot{x}=0)$ se observa que: $\ddot{x} = u + \dot{x}^3 - x^2$, donde
 $u = u_1(\dot{x}) + u_2(x)$, $u = -2\dot{x}^3 - x - x^3$ es cero sólo si $\dot{x} = 0$ y $x = 0$

⇒ El único conjunto invariante en \mathbb{R} es $(0,0)$. Aplicando el teorema de conjunto invariante resulta que $x(t) \rightarrow 0$ con $t \rightarrow \infty$ (estabilidad asintótica).

2.3.2 DISEÑO DE UN CONTROLADOR (POSICIONAMIENTO EN x_d)

Dado el sistema

$$\ddot{x} - \dot{x}^3 + x^2 = u$$

Se propone la siguiente estructura de controlador

$$u = u_1(\dot{x}) + u_2(\tilde{x}) \qquad \tilde{x} = x - x_d$$

El sistema de lazo cerrado resulta:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - (\dot{x}^3 + u_1(\dot{x})) + (x^2 - u_2(\tilde{x})) &= 0 \\ \ddot{x} - b(\dot{x}) + c(\tilde{x}) &= 0 \end{aligned}$$

Definiendo los estados:

$$\begin{aligned} x_1 &= \tilde{x} \\ x_2 &= \dot{x} \end{aligned} \qquad \tilde{x}^2 = x^2 - 2xx_d + x_d^2$$

El sistema en lazo cerrado resulta:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \dot{x}^3 + u_1(x_2) - (x_1 + x_d)^2 + u_2(x_1) \end{aligned}$$

Se supone que el origen es un equilibrio:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ahora se elige una función candidata de Lyapunov:

$$V = \frac{1}{2} \dot{x}^2 + \int_0^{\tilde{x}} (x^2 - u_2(\tilde{x})) d\tilde{x}; \quad (x^2 - u_2(\tilde{x})) \tilde{x} > 0 \quad \forall \tilde{x} \neq 0$$

O bien, usando $x = \tilde{x} + x_d$

$$(\tilde{x}^2 + 2\tilde{x}x_d + x_d^2 - u_2(\tilde{x})) \tilde{x} > 0 \quad \forall \tilde{x} \neq 0$$

La derivada temporal de V es

$$\dot{V} = \dot{x}\ddot{x} + (x^2 - u_2(\tilde{x}))\dot{x}$$

$$\dot{V} = \dot{x}(\dot{x}^3 + u_1(\dot{x}) - x^2 + u_2(\tilde{x})) + x^2\dot{x} - u_2(\tilde{x})\dot{x}$$

$$\dot{V} = \dot{x}b(\dot{x})$$

Sí,

$$\dot{x}b(\dot{x}): \quad \dot{x}(\dot{x}^3 + u_1(\dot{x})) < 0 \quad \forall \dot{x} \neq 0$$

Entonces $\dot{V} \leq 0$ y el equilibrio $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ es estable.

Una posible elección para $u_1(\dot{x}), u_2(\tilde{x})$ es

$$u_1(\dot{x}) = -2\dot{x}^3$$

$$u_2(\tilde{x}) = x_d^2 + 2\tilde{x}x_d + \tilde{x}^2 - \tilde{x}^3$$

⇒ Estabilidad. La aplicación del teorema de conjunto invariante permite obtener estabilidad asintótica:

- Para $l > 0$, Ω_l acotado, $\dot{V} \leq 0$
- Conjunto R: $\dot{V} = 0$, $\dot{x} = 0$
- Conjunto M: para $R(\dot{x} = 0)$ se observa que: $\ddot{x} = u + \dot{x}^3 - x^2$, donde $u = u_1(\dot{x}) + u_2(\tilde{x})$, $u = -2\dot{x}^3 + x_d^2 + 2\tilde{x}x_d + \tilde{x}^2 - \tilde{x}^3$ es cero sólo si $\dot{x} = 0$ y $\tilde{x} = 0$

⇒ El único conjunto invariante en R es (0,0). Aplicando el teorema de conjunto invariante resulta que $\tilde{x}(t) \rightarrow 0$ con $t \rightarrow \infty$ (estabilidad asintótica)

2.3.3 CONTROL DE UN ROBOT MÓVIL [14].

Ecuaciones cinemáticas

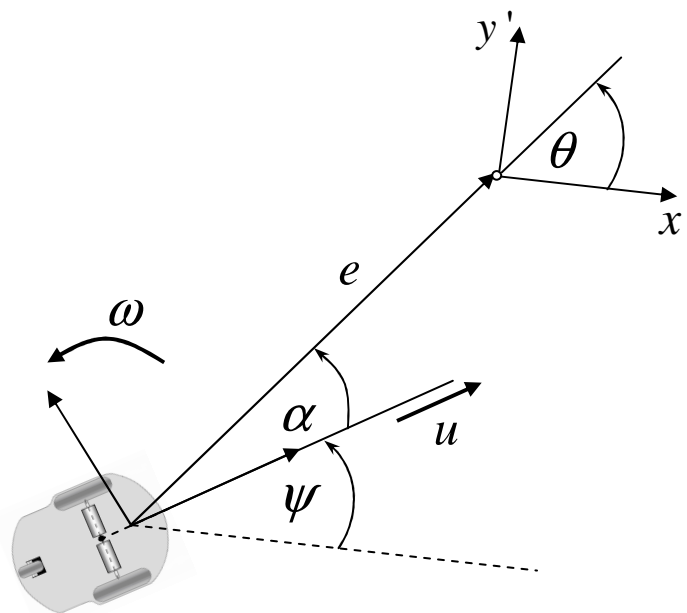


Figura 2.10 Representación del Robot Móvil en Coordenadas Cartesianas y Polares.

De la Figura 2.10, las ecuaciones cinemáticas en coordenadas Cartesianas son:

$$\begin{cases} \dot{x} = u \cos \varphi \\ \dot{y} = u \operatorname{sen} \varphi \\ \dot{\varphi} = \omega \end{cases}$$

o bien, en coordenadas polares en función de e, α, θ

$$\dot{e} = -u \cos \varphi$$

$$\dot{\alpha} = -\omega + u \frac{\operatorname{sen} \varphi}{e}$$

$$\dot{\theta} = u \frac{\operatorname{sen} \varphi}{e}$$

A continuación se analiza el problema de control de *posicionamiento final* sin prescribir orientación final. Se asume que e y α son variables medibles. Una estructura posible de control es:

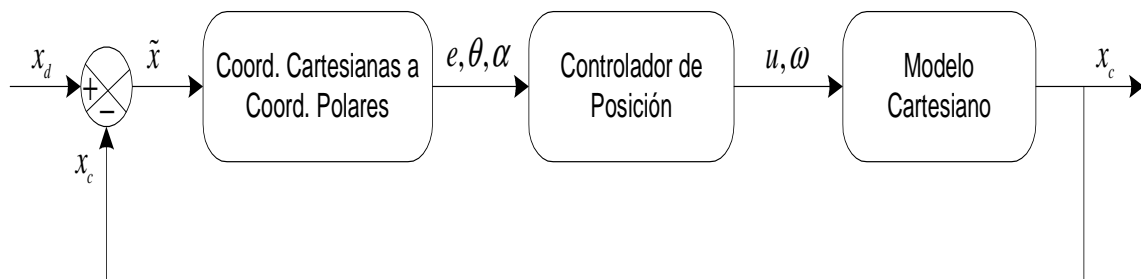


Figura 2.11 Esquema de Control para el robot móvil en coordenadas polares

Como no se prescribe la orientación final, se consideran sólo las variables de estado e y α .

Diseño del controlador:

Considérese la función candidata de Lyapunov

$$V(e, \alpha) = V_1 + V_2 = \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}\alpha^2$$

$$\dot{V}(e, \alpha) = e\dot{e} + \alpha\dot{\alpha}$$

$$\dot{V}(e, \alpha) = e(-\omega \cos \alpha) + \alpha \left(-\omega + u \frac{\text{sen} \alpha}{e} \right) = \dot{V}_1 + \dot{V}_2$$

\dot{V}_1 puede hacerse no positiva eligiendo

$$u = \gamma e \cos \alpha$$

Entonces:

$$\dot{V}_2 = \alpha(-\omega + \gamma \text{sen} \alpha \cos \alpha)$$

Que puede también hacerse no positivo tomando

$$\omega = k\alpha + \gamma \text{sen} \alpha \cos \alpha, \quad k > 0$$

Entonces:

$$\dot{V}(e, \alpha) = e^2 \cos^2 \alpha - k\alpha^2$$

Lo cual implica que:

$$e(t), \alpha(t) \rightarrow 0 \quad \text{con } t \rightarrow \infty$$

Si las tareas del sistema de control involucran grandes excursiones de las variables o alta velocidad, muy probablemente deba recurrirse a un diseño de control no lineal a fin de alcanzar las especificaciones deseadas.

A partir de esta teoría de sistemas no lineales se procederá en los siguientes capítulos a la aplicación de dichos conceptos, teoremas y estudios, con el fin de dar una solución al problema de control en los robots móviles e implementar un buen controlador tanto de posicionamiento, seguimiento de trayectoria, así como en el seguimiento de caminos.

Un objetivo de control adicional particularmente es el de mantener los objetivos básicos de diseño ante la presencia de incertidumbres en el modelo matemático del sistema, para lo cual se procederá a la aplicación de los conceptos de estabilidad ya estudiados en este capítulo relacionados a la teoría de Lyapunov.

CAPITULO 3

MODELACIÓN DE ROBOTS MÓVILES TIPO UNICICLO

Aunque el robot móvil sea el mismo, los modelos matemáticos que existen para representarlo son muy variados. Cada modelo matemático tiene características diversas a tal punto que ellos representan diversas propiedades cinemáticas y dinámicas del mismo robot móvil. Por lo tanto, cada uno de los modelos matemáticos presentados tendrá una utilidad diferente de acuerdo a las propiedades o comportamientos que el usuario necesita observar. En este capítulo se procede a la modelación matemática tanto de la cinemática como de la dinámica de un robot móvil tipo unicycle, con la finalidad de conocer las velocidades -lineal y angular- a la que se desplaza el robot, así como también su ubicación -posición y orientación.

El robot móvil tipo unicycle presenta las ventajas de alta movilidad, alta tracción con ruedas neumáticas y una simple configuración de ruedas; debido a estas ventajas es que esta configuración es la más utilizada tanto para investigación como para aplicaciones industriales.

3.1 MODELO CINEMÁTICO [15].

Los modelos cinemáticos de un robot móvil son usados dentro del diseño de controladores cuando el robot desempeña tareas o misiones a baja velocidad y con poca carga en relación a su estructura.

La expresión del robot móvil tipo unicycle es utilizado para identificar a los robots de conducción que puede girar libremente alrededor de su eje. Los robots móviles de tipo unicycle son los más utilizados para investigación y desarrollo, los mismos que están conformados por dos ruedas, las cuales son controladas de manera independiente por dos motores de corriente continua y una rueda loca que le

confiere estabilidad. La posición del robot móvil está definida por su centro de masa, el cual puede estar ubicado en diferentes lugares de acuerdo a su construcción.

3.1.1 MODELO CINEMÁTICO 1

En este tipo de modelos se considera una masa puntual, por lo que ésta no ejerce efecto alguno sobre la estructura, anulando las perturbaciones a ella asociadas (momentos de inercia y rozamientos).

La Figura 3.1 muestra la geometría de un robot móvil tipo unicyclo, donde la posición del robot móvil la define el punto P, ubicado en el centro del eje que une las dos ruedas

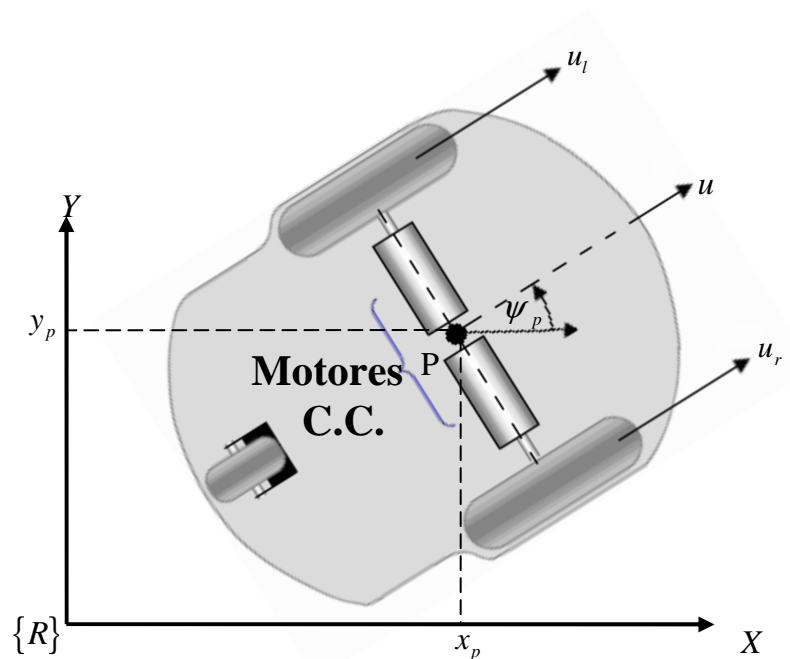


Figura 3.1 Modelo de la estructura mecánica del robot móvil

donde $\{R\}$ representa el sistema de referencia coordenadas globales, (x_p, y_p) que definen la posición del robot respecto a $\{R\}$ y ψ_p determina la orientación del robot respecto a $\{R\}$.

La velocidad lineal del robot móvil se determina promediando la velocidad de la rueda derecha y la velocidad de la rueda izquierda de la siguiente forma

$$u = \frac{u_r + u_l}{2} \quad (3.1)$$

donde, u representa la velocidad lineal del robot móvil, u_r y u_l son las velocidades lineales de desplazamiento de la rueda derecha e izquierda, respectivamente.

Por otro lado, si un observador se sitúa sobre la rueda izquierda, vería que la rueda derecha pasa a una velocidad $(u_r - u_l)$. Por lo tanto la velocidad angular del robot se puede definir como,

$$\omega = \frac{u_r - u_l}{d} \quad (3.2)$$

donde, ω es la velocidad angular del robot móvil y d la distancia entre las ruedas.

La cinemática de un robot móvil -con el punto de control ubicado en el centro del eje que une las ruedas- puede ser modelada por la ec. (3.3)

$$\begin{cases} \dot{x} = u \cos \psi \\ \dot{y} = u \sin \psi \\ \dot{\psi} = \omega \end{cases} \quad (3.3)$$

donde, \dot{x} y \dot{y} representan las velocidad del robot respecto a los ejes x y y , respectivamente, del sistema de coordenadas globales.

3.1.2 MODELO CINEMÁTICO 2

La Figura 3.2, muestra uno de los robots móviles de tipo unicycle donde la posición del robot móvil está definida por el punto G .

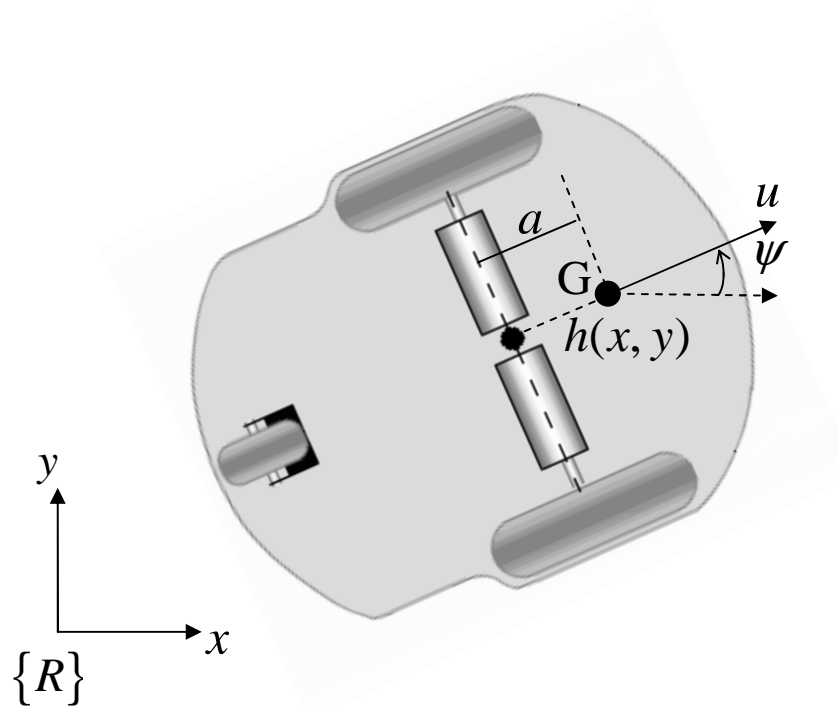


Figura 3.2 Robot móvil tipo unicycle

donde G representa el centro de masa y se encuentra ubicado a una distancia a por delante del centro del eje que une las ruedas, siendo x y y la posición del punto G respecto al sistema de referencia global, y ψ define su orientación respecto a $\{R\}$.

La restricción de velocidad no holonómica del robot móvil determina que sólo se puede mover perpendicularmente al eje que une las ruedas, y está dada por:

$$\dot{x}\sin(\psi) - \dot{y}\cos(\psi) + a\dot{\psi} = 0 \quad (3.4)$$

Por lo que, el modelo cinemático del robot móvil (Figura 3.2), considerando la restricción no holonómica, puede ser representado por

$$\begin{cases} \dot{x} = u \cos(\psi) - a\omega \sin(\psi) \\ \dot{y} = u \sin(\psi) + a\omega \cos(\psi) \\ \dot{\psi} = \omega \end{cases} \quad (3.5)$$

El movimiento de un robot móvil tipo unicycle es representado por los estados $[x, y, \psi]$ y las entradas $[u, \omega]$.

3.2 MODELO DINÁMICO [16].

Basado en los aportes del trabajo de Zhang *et al.*, (1998) se obtienen modelos con diferentes entradas a las usadas por Zhang y con ligeras modificaciones que permiten anular el vector de incertidumbres cuando las variables medidas son despreciables. A continuación se presenta el modelado dinámico de un robot móvil tipo unicycle.

El robot móvil es ilustrado en la Figura 3.3, donde:

- G es el centro de masa,
- B es el centro de la línea que une a las dos ruedas,
- $h = [x \quad y]^T$ es el punto que se requiere siga una trayectoria,
- u y \bar{u} son las velocidades longitudinal y lateral del centro de masa,
- ω y ψ son la velocidad angular y orientación del robot móvil,
- d, b, a, e y c son distancias,
- $F_{rx'}$ y $F_{ry'}$ son fuerzas longitudinal y lateral en el neumático de la rueda derecha,
- $F_{rlx'}$ y $F_{rly'}$ son fuerzas longitudinal y lateral en el neumático de la rueda izquierda,

$F_{cx'}$ y $F_{cy'}$ son fuerzas longitudinal y lateral ejercidas sobre C por la rueda libre,

$F_{ex'}$ y $F_{ey'}$ son fuerzas longitudinal y lateral ejercidas sobre E por la herramienta (por ejemplo un brazo robótico),

τ_e es el momento ejercido por la herramienta.

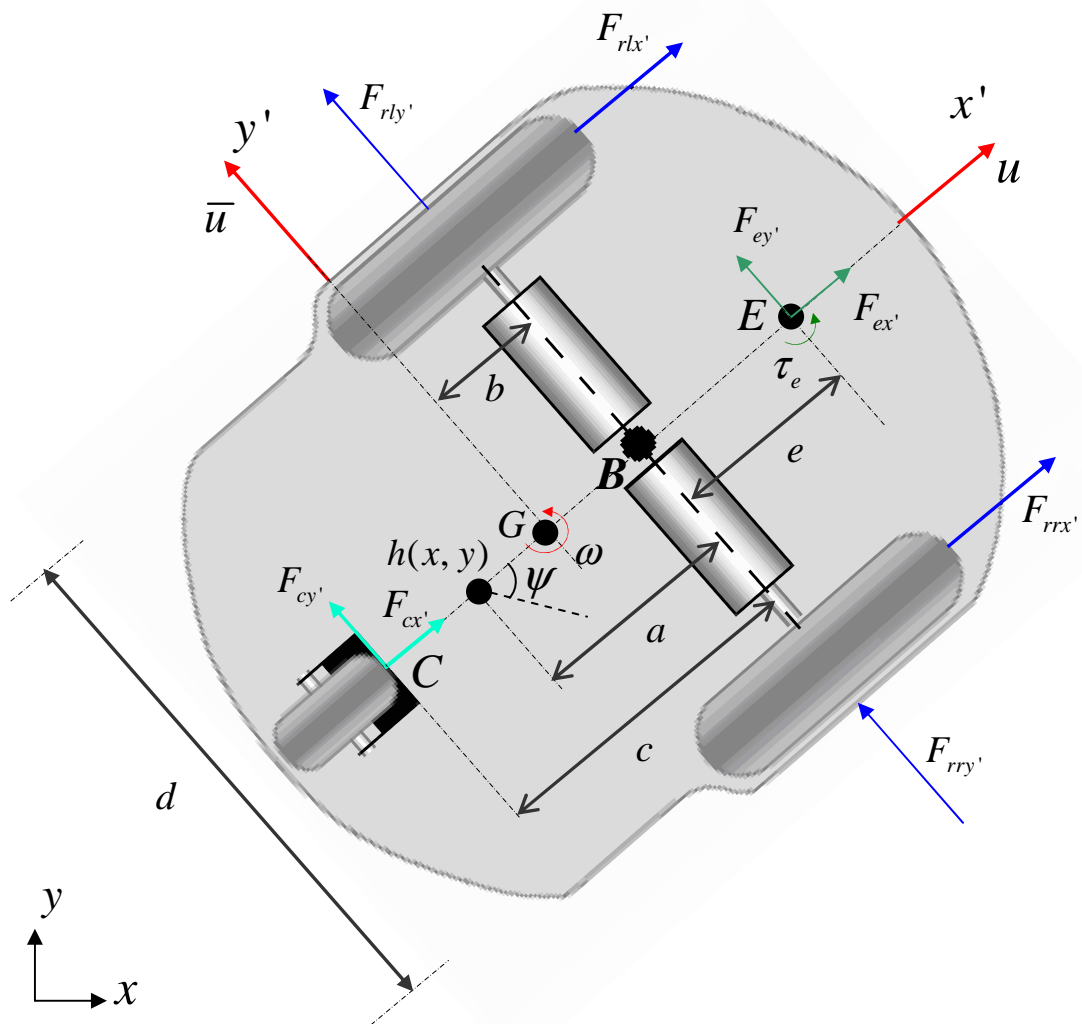


Figura 3.3 Parámetros del robot móvil tipo unicyclo.

Las ecuaciones de fuerzas y momentos (Newton-Euler) para el robot son:

$$\begin{aligned}
 \sum F_{x'} &= m(\dot{u} - \bar{u}\omega) = F_{rlx'} + F_{rrx'} + F_{ex'} + F_{cx'} \\
 \sum F_{y_i} &= m\left(\dot{\bar{u}} - u\omega\right) = F_{rly'} + F_{rry'} + F_{ey'} + F_{cy'} \\
 \sum M_z &= I_z \dot{\omega} = \frac{d}{2}(F_{rrx'} - F_{rlx'}) - b(F_{rly'} - F_{rry'}) + \\
 &\quad + (e-b)F_{ey'} + (c-b)F_{cy'} + \tau_e
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

donde m es la masa del robot y I_z momento de inercia alrededor del eje vertical que pasa por el punto G . La cinemática del punto h es

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= u \cos \psi - \bar{u} \sin \psi - (a-b) \omega \sin \psi \\
 \dot{y} &= u \sin \psi + \bar{u} \cos \psi + (a-b) \omega \cos \psi
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

De acuerdo a Zhang, las velocidades u , ω y \bar{u} incluyendo las velocidades de deslizamiento, son:

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{1}{2} \left[r(\omega_r + \omega_l) + (u_r^s + u_l^s) \right] \\
 \omega &= \frac{1}{d} \left[r(\omega_r - \omega_l) + (u_r^s - u_l^s) \right] \\
 \bar{u} &= \frac{b}{d} \left[r(\omega_r - \omega_l) + (u_r^s - u_l^s) \right] + \bar{u}^s
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

donde, r es el radio de la rueda izquierda y derecha; ω_r y ω_l son las velocidades angulares de la rueda izquierda y derecha, respectivamente; u_r^s y u_l^s son las velocidades de deslizamiento longitudinal de la rueda izquierda y derecha, respectivamente y \bar{u}^s es la velocidad de deslizamiento lateral de las ruedas.

Los modelos de los motores obtenidos (despreciando los efectos inductivos) son

$$\begin{aligned}\tau_r &= \frac{k_a(v_r - k_b\omega_r)}{R_a} \\ \tau_l &= \frac{k_a(v_l - k_b\omega_l)}{R_a}\end{aligned}\quad (3.9)$$

donde v_r y v_l son los voltajes de entrada aplicada a los motores derecho e izquierdo; k_a es la constante de torque multiplicado por la constante de reducción, k_b es la constante contraelectromotriz por la constante de reducción, R_a es la resistencia eléctrica, τ_r y τ_l son los torques de los motores izquierdo y derecho multiplicados por la constante de reducción.

Las ecuaciones dinámicas de las combinaciones *rueda-motor* son:

$$\begin{aligned}I_e\dot{\omega}_r + B_e\omega_r &= \tau_r - F_{rrx}R_t \\ I_e\dot{\omega}_l + B_e\omega_l &= \tau_l - F_{rlx}R_t\end{aligned}\quad (3.10)$$

donde, I_e y B_e son el momento de inercia y coeficiente de fricción viscosa, respectivamente, de la combinación rotor del motor, caja reducción y rueda, y R_t es el radio nominal del neumático.

De las fórmulas (3.6), (3.7), (3.8), (3.9) y (3.10) se obtiene el siguiente modelo dinámico del robot móvil:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\psi} \\ \dot{u} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \cos \psi - a\omega \sin \psi \\ u \sin \psi + a\omega \cos \psi \\ \omega \\ \frac{\theta_3^0}{\theta_1^0} R_t r \omega^2 - 2 \frac{\theta_4^0}{\theta_1^0} u \\ -2 \frac{\theta_3^0}{\theta_2^0} R_t r u \omega - \frac{\theta_4^0}{\theta_2^0} d^2 \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{2r}{\theta_1^0} & 0 \\ 0 & \frac{2rd}{\theta_2^0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_u \\ v_\omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ 0 \\ \delta_u \\ \delta_\omega \end{bmatrix}\quad (3.11)$$

Las entradas de este modelo son:

$$v_u = \frac{v_l + v_r}{2}, \quad v_\omega = \frac{v_r - v_l}{2} \quad (3.12)$$

Los parámetros del modelo dinámico son:

$$\begin{aligned} \theta_1^0 &= \frac{R_a}{k_a} (mR_r r + 2I_e) \\ \theta_2^0 &= \frac{R_a}{k_a} (I_e d^2 + 2R_r r (I_z + mb^2)) \\ \theta_3^0 &= \frac{R_a}{k_a} (mb) \\ \theta_4^0 &= \frac{R_a}{k_a} \left(\frac{k_a k_b}{R_a} + B_e \right) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Los elementos del vector incertidumbres $[\delta_x \quad \delta_y \quad 0 \quad \delta_u \quad \delta_\omega]^T$ son:

$$\delta_x = -\bar{u}^s \sin \psi, \quad \delta_y = -\bar{u}^s \cos \psi \quad (3.14)$$

$$\delta_u = \frac{1}{\theta_1^0} \left[R_r r \frac{R_a}{k_a} (m\omega \bar{u}^s + F_{ex'} + F_{cx'}) + \theta_4^0 (u_r^s + u_l^s) + I_e \frac{R_a}{k_a} (\dot{u}_r^s + \dot{u}_l^s) \right] \quad (3.15)$$

$$\delta_\omega = \frac{1}{\theta_2^0} \left[\theta_4^0 d (u_r^s - u_l^s) + I_e d \frac{R_a}{k_a} (\dot{u}_r^s - \dot{u}_l^s) - 2R_r r \theta_3^0 \dot{\bar{u}}^s + 2R_r r \frac{R_a}{k_a} (eF_{ey'} + cF_{cy'} + \tau_e) \right] \quad (3.16)$$

El vector de incertidumbres será nulo si se desprecian los deslizamientos de las ruedas, las fuerzas y torques ejercidos en la herramienta, y las fuerzas ejercidas en la rueda libre. Se asume que las fuerzas y torques ejercidas en la herramienta no son medidas por un sensor.

Las aceleraciones $\dot{\omega}$ y \dot{u} no dependen de los estados $[x, y, \psi]$. Luego, las dinámicas de u y ω pueden ser expresadas de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\theta_3^0}{\theta_1^0} R_t r \omega^2 - 2 \frac{\theta_4^0}{\theta_1^0} u \\ -2 \frac{\theta_3^0}{\theta_2^0} R_t r u \omega - \frac{\theta_4^0}{\theta_2^0} d^2 \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2r}{\theta_1^0} & 0 \\ 0 & \frac{2rd}{\theta_2^0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_u \\ v_\omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_u \\ \delta_\omega \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Reordenando y despreciando el vector de incertidumbres, se obtiene la siguiente parametrización lineal:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2r} \dot{u} & 0 & -\frac{R_t}{2} \omega^2 & \frac{1}{r} u \\ 0 & \frac{1}{2rd} \dot{\omega} & \frac{R_t}{d} u \omega & \frac{d}{2r} \omega \end{bmatrix} \theta^0 = \begin{bmatrix} v_u \\ v_\omega \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

donde $\theta^0 = [\theta_1^0 \ \theta_2^0 \ \theta_3^0 \ \theta_4^0]^T$. El vector θ^0 puede ser fácilmente conocido empleando un método de identificación.

La ec. (3.11) del modelo dinámico es útil cuando se pueden manejar directamente los voltajes de los motores; sin embargo, en general, la mayoría de los robots disponibles en el mercado tienen controladores PID de bajo nivel para seguir las entradas de velocidades de referencia y no permiten manejar directamente los voltajes de los motores. Por lo tanto, es muy útil expresar el modelo del robot móvil en una forma más apropiada, considerando como señales de control a las velocidades de referencia lineal y angular. Para este propósito, los controladores de velocidad son incluidos en el modelo y para que éste no sea tan complejo se consideran controladores de velocidad PD con referencias de velocidad constante, como los descritos por la siguiente ecuación:

$$\begin{bmatrix} v_u \\ v_\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{PT} (u_{ref} - u_{me}) + k_{DT} (\dot{u}_{ref} - \dot{u}_{me}) \\ k_{PR} (\omega_{ref} - \omega_{me}) + k_{RT} (\dot{\omega}_{ref} - \dot{\omega}_{me}) \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

donde,

$$u_{me} = \frac{1}{2} [r(\omega_r + \omega_l)], \quad \omega_{me} = \frac{1}{d} [r(\omega_r - \omega_l)]$$

Las variables \dot{u}_{ref} y $\dot{\omega}_{ref}$ son despreciadas en la ec. (3.19) para simplificar aún más el modelo.

A partir de las ecuaciones (3.6), (3.7), (3.8), (3.9),(3.10) y (3.19) se obtiene el siguiente modelo dinámico del robot móvil:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\psi} \\ \dot{u} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \cos \psi - a \omega \sin \psi \\ u \sin \psi + a \omega \cos \psi \\ \omega \\ \frac{\bar{\theta}_3^0}{\bar{\theta}_1^0} \omega^2 - \frac{\bar{\theta}_4^0}{\bar{\theta}_1^0} u \\ -\frac{\bar{\theta}_5^0}{\bar{\theta}_2^0} u \omega - \frac{\bar{\theta}_6^0}{\bar{\theta}_2^0} \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{\bar{\theta}_1^0} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\bar{\theta}_2^0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{ref} \\ \omega_{ref} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ 0 \\ \bar{\delta}_u \\ \bar{\delta}_\omega \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Los parámetros del modelo dinámico son:

$$\bar{\theta}_1^0 = \frac{R_a (mR_t r + 2I_e) + 2rk_{DT}}{2rk_{PT}} \quad (3.21)$$

$$\bar{\theta}_2^0 = \frac{R_a (I_e d^2 + 2R_t r (I_z + mb^2)) + 2rdk_{DR}}{2rdk_{PR}} \quad (3.22)$$

$$\bar{\theta}_3^0 = \frac{R_a mbR_t}{2k_{PT}}, \quad \bar{\theta}_4^0 = \frac{R_a \left(\frac{k_a k_b}{R_a} + B_e \right)}{rk_{PT} + 1} \quad (3.23)$$

$$\bar{\theta}_5^0 = \frac{R_a mbR_t}{dk_{PR}}, \quad \bar{\theta}_6^0 = \frac{R_a \left(\frac{k_a k_b}{R_a} + B_e \right) d}{2rk_{PR} + 1} \quad (3.24)$$

Los dos primeros elementos del vector de incertidumbres $[\delta_x \quad \delta_y \quad 0 \quad \bar{\delta}_u \quad \bar{\delta}_\omega]^T$ son los de la ec. (3.14), y los dos últimos elementos son:

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_u = & \frac{R_r R_a}{2\bar{\theta}_1^0 k_{PT} k_a} (m\omega \bar{u}^s + F_{ex'} + F_{cx'}) + \frac{\bar{\theta}_4^0}{2\bar{\theta}_1^0} (u_r^s + u_l^s) + \\ & + \left(\frac{I_e R_a + r k_a k_{DT}}{2\bar{\theta}_1^0 r k_{PT} k_a} \right) (\dot{u}_r^s + \dot{u}_l^s) \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_\omega = & \frac{\bar{\theta}_6^0}{\bar{\theta}_2^0 d} (u_r^s - u_l^s) + \left(\frac{I_e R_a d + 2r k_a k_{DR}}{2\bar{\theta}_2^0 r k_{PR} k_a d} \right) (\dot{u}_r^s - \dot{u}_l^s) - \frac{\bar{\theta}_5^0}{\bar{\theta}_2^0} \dot{u}^s + \\ & + \frac{R_r R_a}{\bar{\theta}_2^0 d k_{PR} k_a} (e F_{ey'} + c F_{cy'} + \tau_e) \end{aligned} \quad (3.26)$$

En este modelo también, el vector de incertidumbres en la ec. (3.20) no se considerará si las velocidades de deslizamiento de las ruedas, las fuerzas y momentos ejercidos por la herramienta, y las fuerzas ejercidas por la rueda libre no tienen un valor significativo.

El procedimiento para la obtención de la parametrización lineal del modelo es similar al aplicado al modelo anterior. Las aceleraciones \ddot{u} y $\ddot{\omega}$ no dependen de los estados ψ , x y y ; luego, las dinámicas de u y ω pueden ser expresados de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\bar{\theta}_3^0}{\bar{\theta}_1^0} \omega^2 - \frac{\bar{\theta}_4^0}{\bar{\theta}_1^0} u \\ -\frac{\bar{\theta}_5^0}{\bar{\theta}_2^0} u \omega - \frac{\bar{\theta}_6^0}{\bar{\theta}_2^0} \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{\bar{\theta}_1^0} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\bar{\theta}_2^0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{ref} \\ \omega_{ref} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\delta}_u \\ \bar{\delta}_\omega \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

Reagrupando los términos y despreciando $\bar{\delta}_u$ y $\bar{\delta}_\omega$, (3.27) puede ser escrita como

$$\begin{bmatrix} \bar{\theta}_1^0 & 0 \\ 0 & \bar{\theta}_2^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\theta}_4^0 & \bar{\theta}_3^0 \omega \\ \bar{\theta}_5^0 \omega & \bar{\theta}_6^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{ref} \\ \omega_{ref} \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

o en una forma compacta como

$$\mathbf{H}\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{C}(\mathbf{v})\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\text{ref}} \quad (3.29)$$

donde $\mathbf{v}_{\text{ref}} = [u_{\text{ref}} \ \omega_{\text{ref}}]^T$ es el vector de referencias de velocidades, $\mathbf{v} = [u \ \omega]^T$ es el vector que contiene las velocidades reales del robot, y las matrices \mathbf{H} y $\mathbf{C}(\mathbf{v})$ son

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \bar{\theta}_1^0 & 0 \\ 0 & \bar{\theta}_2^0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{C}(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} \bar{\theta}_4^0 & -\bar{\theta}_3^0\omega \\ \bar{\theta}_5^0\omega & \bar{\theta}_6^0 \end{bmatrix}$$

Agrupando los parámetros dinámicos de (3.28) se obtiene la parametrización lineal:

$$\begin{bmatrix} \dot{u} & 0 & -\omega^2 & u & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\omega} & 0 & 0 & u\omega & \omega \end{bmatrix} \bar{\theta}^0 = \begin{bmatrix} u_{\text{ref}} \\ \omega_{\text{ref}} \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

donde: $\bar{q}^0 = \begin{bmatrix} \bar{q}_1^0 & \bar{q}_2^0 & \bar{q}_3^0 & \bar{q}_4^0 & \bar{q}_5^0 & \bar{q}_6^0 \end{bmatrix}^T$

Los modelos presentados describen de mejor manera a los robots reales, dado que no se necesita generar fuerzas a partir de los voltajes o de los equipos adicionales como amplificadores de corriente. Los vectores de parámetros θ^0 y $\bar{\theta}^0$ contienen la mayoría de las constantes de los modelos, incluyendo las constantes de los motores y, en el último modelo, incluyendo las constantes de los controladores PD. Las constantes de los modelos que no contienen θ^0 ó $\bar{\theta}^0$ son fáciles de obtener, a excepción de las constantes que se encuentran en el vector de incertidumbres de dichos modelos. Los vectores θ^0 y $\bar{\theta}^0$ son fáciles de identificar.

3.3 IDENTIFICACIÓN DE PARÁMETROS [17], [18], [19].

La identificación es un campo de la modelación matemática de sistemas a partir de datos experimentales. Se trata de determinar un modelo matemático (estructura y/o parámetros), generalmente dinámico, a partir de un grupo de datos experimentales de entrada y de salida, sin necesidad de conocer las leyes internas que gobiernan el comportamiento del sistema (ver Figura 3.4), que reproduce su conducta con suficiente exactitud para los fines deseados de control.

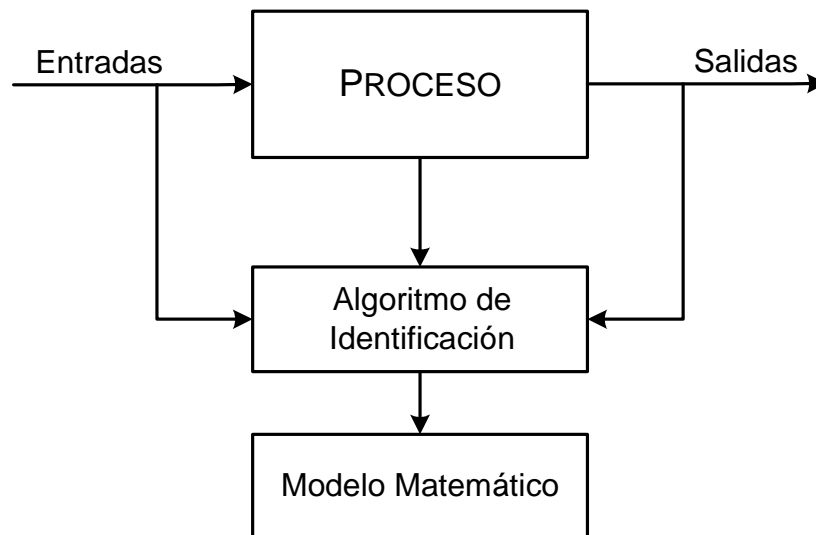


Figura 3.4 Estructura general para la identificación de sistema

A continuación se presenta un procedimiento para la identificación de parámetros del modelo dinámico del robot móvil. Este procedimiento se puede aplicar tanto al modelo (3.11) como al modelo (3.20). Se mostrará dicho procedimiento utilizando el modelo (3.20). La ec. (3.30) se puede expresar de la siguiente forma:

$$T\bar{\theta}^0 = Y \quad (3.31)$$

donde:

$$T = \begin{bmatrix} \dot{u} & 0 & -\omega^2 & u & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\omega} & 0 & 0 & u\omega & \omega \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} u_{ref} \\ \omega_{ref} \end{bmatrix}$$

En la ec. (3.31), T es la matriz de regresión, la cual está compuesta por funciones conocidas, $\bar{\theta}^0$ es el vector de parámetros desconocidos del robot, y Y representa un vector de salida del modelo de regresión.

Para utilizar la ec. (3.31) en la identificación, es necesario medir las aceleraciones, lo que se puede hacer con acelerómetros. Sin embargo, se tiene la opción de usar el modelo de regresión dinámico filtrado. La idea clave es filtrar de ambos lados del modelo de regresión (3.31) con un filtro estable estrictamente propio. Para este fin se utiliza el siguiente filtro:

$$f(s) = \frac{\lambda}{(s + \lambda)}, \quad \text{donde } \lambda > 0 \quad (3.32)$$

Este filtro ha sido utilizado con éxito en Reyes y Kelly, (1997) y Muñoz, (2000). Filtrando a ambos lados de la ec. (3.31) con la ec. (3.32), se obtiene

$$T_F \bar{\theta}^0 = Y_F \quad (3.33)$$

donde,

$$T_F = \begin{bmatrix} \frac{s\lambda}{s+\lambda}u & 0 & \frac{\lambda}{s+\lambda}\omega^2 & \frac{\lambda}{s+\lambda}u & 0 & 0 \\ 0 & \frac{s\lambda}{s+\lambda}\omega & 0 & 0 & \frac{\lambda}{s+\lambda}u\omega & \frac{\lambda}{s+\lambda}\omega \end{bmatrix}$$

$$Y_F = \begin{bmatrix} \frac{\lambda}{s+\lambda}u_{ref} \\ \frac{\lambda}{s+\lambda}\omega_{ref} \end{bmatrix}$$

Con el fin de realizar la identificación, se apilarán las mediciones fundamentales, obtenidas en diferentes instantes de tiempo, de la siguiente forma:

$$T_F = \begin{bmatrix} T_{F1}(0) \\ T_{F1}(q) \\ \vdots \\ T_{F2}(0) \\ \vdots \\ T_{F2}(q) \end{bmatrix}, \quad Y_F = \begin{bmatrix} Y_{F1}(0) \\ Y_{F1}(q) \\ \vdots \\ Y_{F2}(0) \\ \vdots \\ Y_{F2}(q) \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

donde, q es el último período de muestreo del experimento, $T_{Fi}(k)$ es un vector fila formado por la i -ésima fila de la matriz $T_F(k)$ (valor de la matriz T_F en el instante k), $Y_{Fi}(k)$ es el valor de la i -ésima fila del vector $Y_F(k)$ (valor del vector Y_F en el instante k). Luego se tiene:

$$T_{FP} \bar{\theta}^0 = Y_{FP} \quad (3.35)$$

Para estimar los parámetros del modelo se utiliza el método de mínimos cuadrados,

$$MC = \sum_{i=1}^n e_i^2$$

del cual se obtiene la siguiente ecuación.

$$T_{FP}^T T_{FP} \bar{\theta} = T_{FP}^T Y_{FP}$$

Finalmente, la estima de los parámetros se obtiene con la siguiente ecuación (Aström y Wittenmark, 1995):

$$\hat{\theta} = (T_{FP}^T T_{FP})^{-1} T_{FP}^T Y_{FP} \quad (3.36)$$

La calidad de la estima del vector de parámetros depende de los niveles de excitación del regresor. La elección de señales de excitación se hizo evaluando

diversos tipos de señales, las cuales fueron obtenidas a partir de las propuestas de Reyes y Kelly (1997), y Muñoz (2000).

Las señales de excitación elegidas son:

$$\begin{aligned} u_{ref} &= A_1 \text{sen}(\omega_1 t) + A_1 \text{sen}(\omega_2 t) + \dots + A_1 \text{sen}(\omega_6 t) \\ \omega_{ref} &= A_2 \text{sen}(\omega_1 t) + A_2 \text{sen}(\omega_2 t) + \dots + A_2 \text{sen}(\omega_6 t) \end{aligned} \quad (3.37)$$

donde A_i y ω_j son constantes. Las señales u_{ref} y ω_{ref} , son iguales salvo por las ganancias. Esto es valioso en la experimentación debido a que el robot se moverá en una trayectoria circular de radio A_1 / A_2 durante toda la identificación, con lo cual se conocerá a priori el espacio necesario para la identificación.

3.4 RESULTADOS EXPERIMENTALES DE LA IDENTIFICACIÓN.

Se realizó la identificación paramétrica del modelo dinámico de dos robots tipo unicycle. Estos robots son un Pioneer P3-AT y un Pioneer 3-DX, construidos por la empresa Mobile Robots; dichos robots tienen diferentes masas y distintas características dinámicas.

La identificación de los parámetros de los modelos de los robots, se realizó con el ingreso de la señal de excitación u_{ref} y ω_{ref} , que corresponde a la ec. (3.37), cuyos parámetros son:

$$\begin{aligned} A_1 &= 0.15, \quad A_2 = 0.15, \\ \omega_1 &= 0.7, \quad \omega_2 = 0.6, \quad \omega_3 = 0.5, \\ \omega_4 &= 0.4, \quad \omega_5 = 0.3, \quad \omega_6 = 0.2 \end{aligned}$$

Para las pruebas de validación de la identificación de los parámetros de los modelos de los robots antes mencionados, se ingresará una señal de excitación a u_{ref} y ω_{ref} dada por las siguientes ecuaciones.

$$u_{ref} = \sqrt{0.1^2 + (0.1\pi \cos(0.2\pi t))^2} \quad (3.38)$$

$$\omega_{ref} = \frac{-0.15\pi^2 \text{sen}(0.2\pi t)}{1 + \pi^2 \cos^2(0.2\pi t)} \cdot \quad (3.39)$$

3.4.1 IDENTIFICACIÓN Y VALIDACIÓN DEL MODELO DINÁMICO DEL ROBOT PIONEER P3-AT

El robot Pioneer 3-AT posee una computadora interna a bordo, un láser y una cámara como se muestra en la Figura 3.5.



Figura 3.5 Robot Pioneer P3-AT

Los parámetros identificados que se obtuvieron para el modelo de este robot son

$$\begin{aligned} \bar{q}_1^0 &= 0.4072, \bar{q}_2^0 = 0.2937 \\ \bar{q}_3^0 &= -0.0287, \bar{q}_4^0 = 0.9979 \\ \bar{q}_5^0 &= -0.0004, \bar{q}_6^0 = 0.9865 \end{aligned} \quad (3.40)$$

En la Figura 3.6 se muestra la gráfica de la señal de excitación ingresada y la señal obtenida mediante la identificación

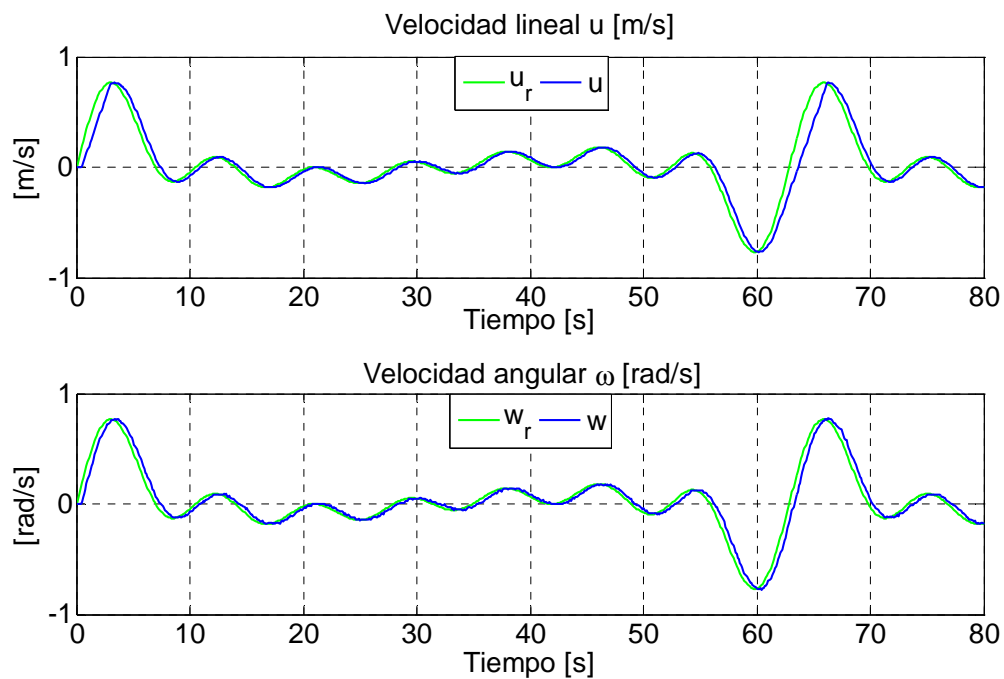


Figura 3.6 Señal de excitación para la identificación del modelo del robot Pioneer P3-AT

Las señales de entrada de la validación de la identificación que están dadas por la ec. (3.37), mueven al robot aproximadamente sobre una trayectoria sinusoidal, los resultados de esta validación se muestran en la Figura 3.7

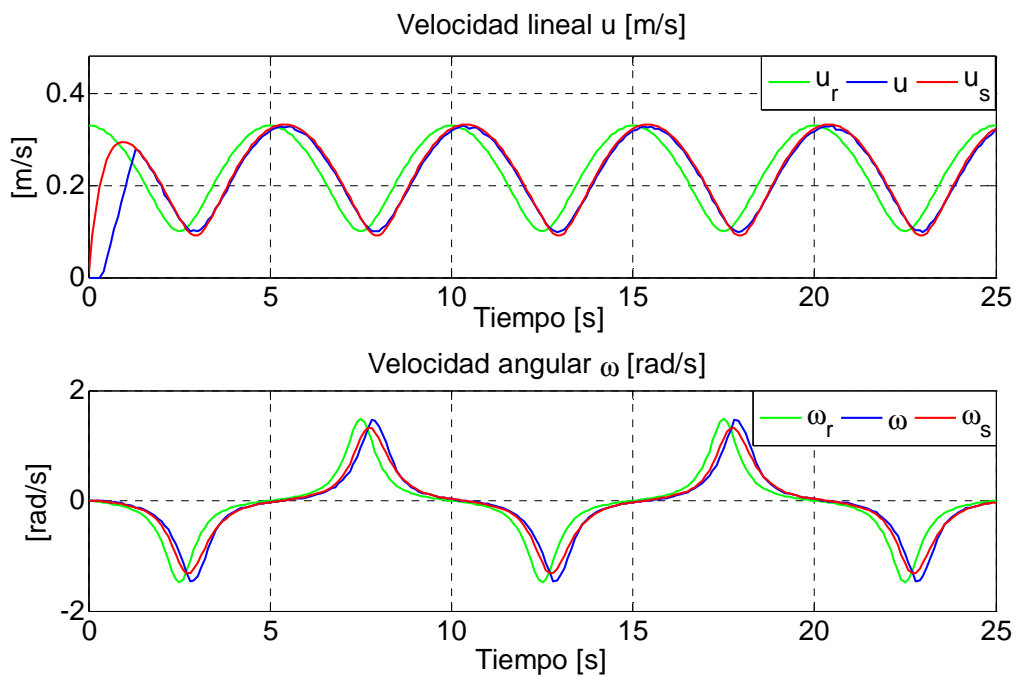


Figura 3.7 Validación del modelo de identificación del robot Pioneer P3-AT

3.4.2 IDENTIFICACIÓN Y VALIDACIÓN DEL ROBOT PIONEER 3-DX

El robot Pioneer 3-DX posee un computador interno como se muestra en la Figura 3.8



Figura 3.8 Robot Pioneer 3-DX

Los parámetros identificados que corresponden al modelo de este robot son:

$$\begin{aligned} \bar{q}_1^0 &= 0.3984, & \bar{q}_2^0 &= 0.2523 \\ \bar{q}_3^0 &= -0.0436, & \bar{q}_4^0 &= 1.0069 \\ \bar{q}_5^0 &= 0.0073, & \bar{q}_6^0 &= 1.0693 \end{aligned} \quad (3.41)$$

Estos parámetros se obtuvieron mediante la respuesta del robot a la señal de excitación ingresada para la identificación, se la puede observar en la Figura 3.9

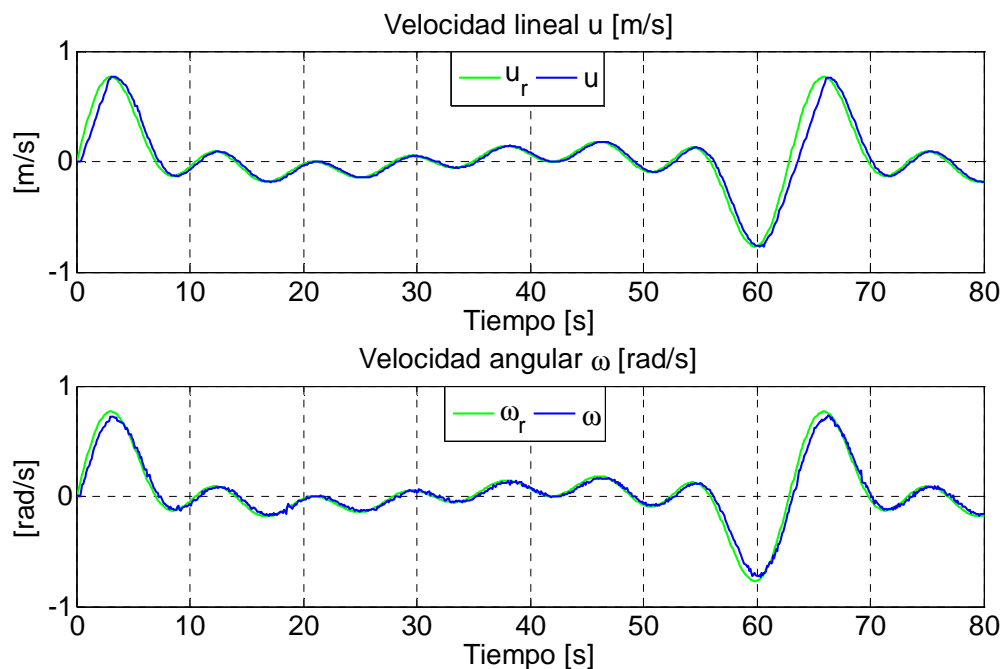


Figura 3.9 Señal de excitación para la identificación del modelo del robot Pioneer 3-DX

Los resultados de la validación se muestran en la Figura 3.10; en ella se puede distinguir que las velocidades longitudinales real y simulada no son iguales al inicio, esto se debe a que el robot limita su aceleración; sin embargo, cuando no se satura la aceleración del robot, las velocidades longitudinales real y simulada son muy aproximadas.

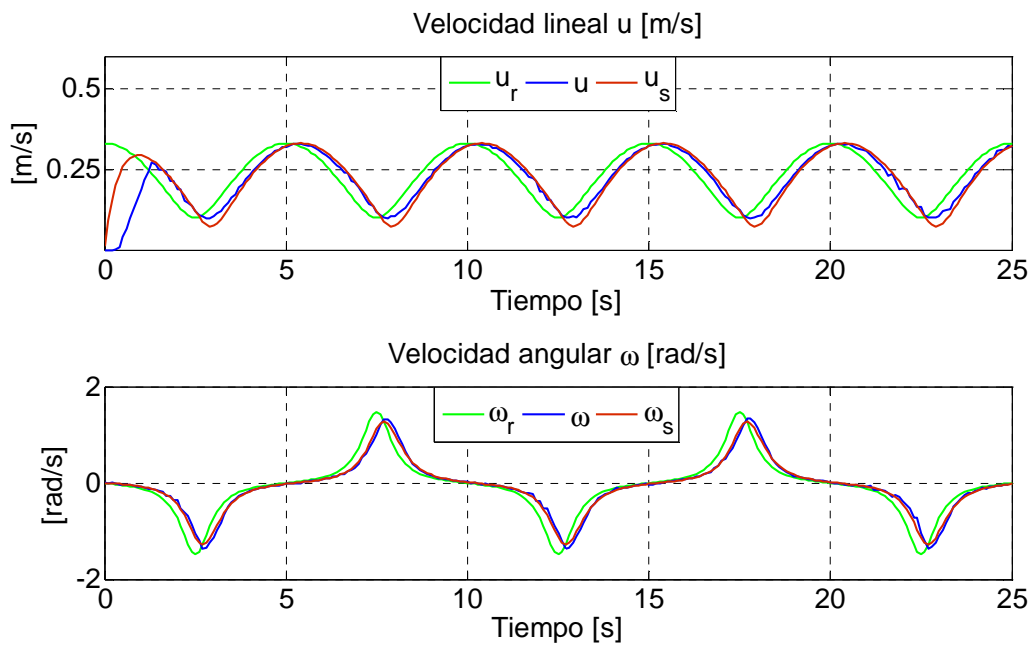


Figura 3.10 Validación del modelo dinámico identificado para el robot Pioneer 3-DX.

Finalmente se puede concluir que los modelos dinámicos obtenidos para los robots Pioneer P3-AT y Pioneer 3-DX representan de buena forma las dinámicas reales existentes en los robots; esto se pudo observar (Figura 3.7 y Figura 3.10) en los resultados obtenidos, en donde los valores reales y simulados se aproximan entre sí.

CAPÍTULO 4

ESTUDIO E IMPLEMENTACIÓN DE LOS ALGORITMOS DE CONTROL PARA ROBOTS MÓVILES TIPO UNICICLO

Los robots móviles y los vehículos autoguiados son dispositivos de transporte autónomo, es decir, una plataforma mecánica dotada de un sistema de *locomoción* capaz de navegar a través de un determinado ambiente de trabajo, proporcionada de cierto nivel de autonomía para su desplazamiento portando cargas. Los robots móviles no holonómicos son sistemas que presentan restricciones en sus movimientos, o sea, únicamente se pueden mover perpendicularmente al eje que une sus ruedas.

El control de robots móviles es un área de la robótica que se ha venido desarrollando para brindar mayor autonomía a los robots móviles, en ambientes estructurados o parcialmente estructurados que interactúan con el hombre, por lo que, la seguridad y estabilidad son aspectos importantes en el diseño de los controladores. Los problemas principales en el control de movimiento de robots móviles pueden ser clasificados en tres grupos, según D. Soetanto, *et al.* (2003):

- 1) control de posición – el objetivo es ubicar al robot en un punto de referencia dado, con una orientación deseada;
- 2) seguimiento de trayectoria – se requiere que el robot siga una referencia parametrizada en el tiempo
- 3) seguimiento de caminos – se requiere que el robot converja y siga un camino, sin ninguna especificación temporal [20].

4.1 POSICIONAMIENTO [21], [22].

El control de postura significa controlar la posición y orientación del robot. Dicho control es complicado de conseguir dada la limitación observada por Brockett (1983): “el objetivo de posicionar y orientar no puede ser alcanzado asintóticamente por una ley de control suave e invariante en el tiempo”.

Uno de los controladores de postura que se encuentran en la literatura es la propuesta de Aicardi *et al.* (1995). Estos autores sostienen que la limitación observada por Brockett es cierta si el robot móvil es localizado en un sistema de coordenadas cartesianas; sin embargo, si una diferente representación de espacio estado es adoptada, un enfoque simple puede ser usado, permitiendo directamente una propiedad de estabilización suave.

4.1.1 CONTROL DE POSICIONAMIENTO SIN ORIENTACIÓN FINAL

Se considera al vehículo posicionado a cualquier distancia distinta de cero del referencial destino $\{Rp\}$ y se asume como vector de variables de estado a $[\rho \ \alpha]^T$, el cual existe para cualquier $\rho > 0$. Luego el sistema de ecuaciones que describe el movimiento del vehículo es:

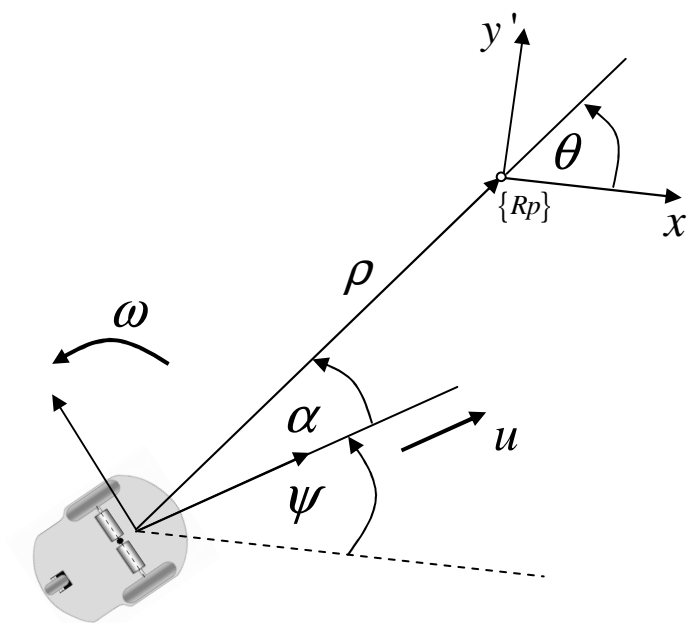


Figura 4.1 Posición y orientación del robot móvil respecto al referencial destino

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= -u \cos(\alpha) \\ \dot{\alpha} &= -\omega + u \frac{\text{sen}(\alpha)}{\rho}\end{aligned}\quad (4.1)$$

Considere la función candidata de Lyapunov

$$V(p, \alpha) = V_1 + V_2 = \frac{1}{2} \rho^2 + \frac{1}{2} \alpha^2 \quad (4.2)$$

La derivada temporal de la ecuación (4.2) está dada por

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \rho \dot{\rho} + \alpha \dot{\alpha} \\ \dot{V} &= \underbrace{\rho(-u \cos(\alpha))}_{V_2} + \alpha \underbrace{\left(-\omega + u \frac{\text{sen}(\alpha)}{\rho}\right)}_{\dot{V}_1}\end{aligned}\quad (4.3)$$

En la ecuación (4.3) puede observarse que el primer término, correspondiente a

\dot{V}_1 , puede ser no positivo si se hace que la velocidad lineal u tenga la forma:

$$u = k_u \tanh(\rho) \cos(\alpha) \quad \text{con } k_u > 0 \quad (4.4)$$

donde el coeficiente $k_u = |u_{\max}|$. De acuerdo a la elección de u dada por la ecuación (4.4), \dot{V}_2 en la ecuación (4.3) es

$$\dot{V}_2 = \alpha \left(-\omega + k_u \frac{\tanh(\rho)}{\rho} \sin(\alpha) \cos(\alpha) \right) \quad (4.5)$$

La ecuación (4.5) puede no ser positiva si se hace que la velocidad angular ω tome la forma

$$\omega = k_\omega \alpha + k_u \frac{\tanh(\rho)}{\rho} \sin(\alpha) \cos(\alpha) \quad (4.6)$$

donde $|\omega_{\max}| = k_\omega \pi + k_u 0.5$, con lo que \dot{V}_2 toma la forma

$$\dot{V}_2 = \alpha \left(-\omega + k_u \frac{\tanh(\rho)}{\rho} \sin(\alpha) \cos(\alpha) \right) = -k_\omega \alpha^2 \quad (4.7)$$

Finalmente se obtiene la expresión para la derivada temporal de la función de Lyapunov original V :

$$\dot{V} = -h_\rho k_u \rho \tanh(\rho) \cos^2(\alpha) - k_\omega \alpha^2 \quad \Rightarrow \begin{cases} \rho(t) \\ \alpha(t) \end{cases} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty$$

La cual resulta ser una forma definida negativa. Esto significa que $\rho(t)$ y $\alpha(t)$ convergen globalmente y asintóticamente a cero.

4.1.1.1 RESULTADO POR SIMULACIÓN

A fin de evaluar y discutir la evolución del controlador de posicionamiento propuesto se desarrolló una plataforma de simulación para robots móviles tipo unicycle con interface en Matlab. Se trata de un simulador en línea, el cual permite al usuario una visión tridimensional del ambiente de navegación del robot móvil.

Se plantea que el robot móvil tipo unicycle cumpla el objetivo de control de posicionarse desde las condiciones iniciales dadas: $x_o = 0[\text{m}]$, $y_o = 0[\text{m}]$ y $\psi_o = 0[\text{rad}]$, hacia una posición final sin orientación final: $x_d = 3.3[\text{m}]$ y $y_d = 3.2[\text{m}]$, con un tiempo de muestreo $t_s = 0.1[\text{s}]$ y con los valores de las constantes de ganancia: $k_u = |u_{\max}| = 0.5$ y $k_\omega = 1$.

En las Figura 4.2 y 4.3 se muestra el movimiento estroboscópico del robot móvil y los errores de control: $\rho(t)$ y $\alpha(t)$ que tienden asintóticamente a cero, respectivamente.

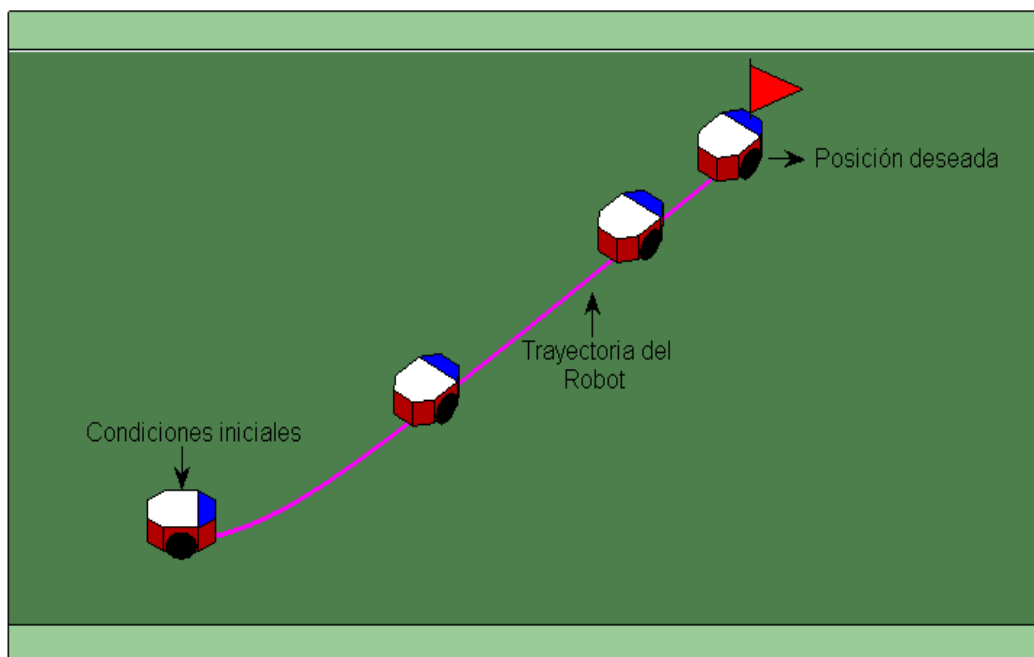


Figura 4.2 Movimiento estroboscópico

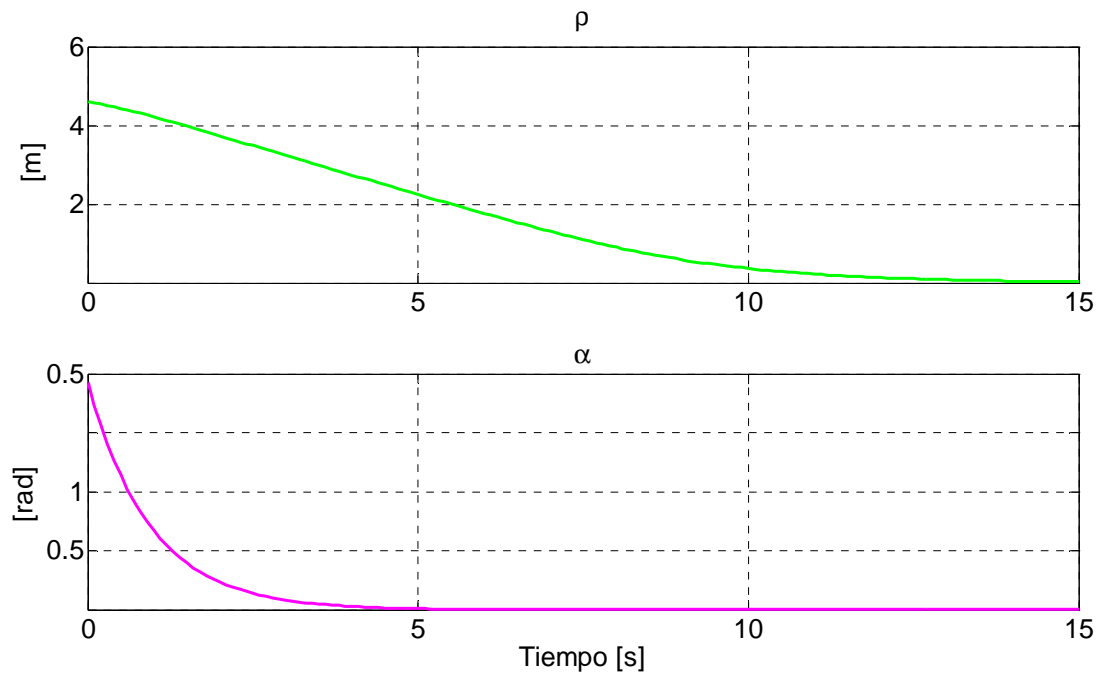


Figura 4.3 Errores de control: $\rho(t)$ y $\alpha(t)$

4.1.1.2 RESULTADO EXPERIMENTAL

El controlador propuesto fue implementado en el robot móvil PIONEER P3-AT, el cual admite como señales de referencia las velocidades lineal y angular. El objetivo de control es trasladar al robot móvil desde una posición inicial $x_o = 0$ [m], $y_o = 0$ [m] y $\psi_o = 0$ [rad] a una posición final sin orientación final: $x_d = 3.3$ [m] y $y_d = 3.2$ [m]. Los valores de las constantes de ganancia son: $k_u = |u_{\max}| = 0.5$ y $k_\omega = 1$.

Las Figuras 4.4 - 4.7 muestran los resultados obtenidos experimentalmente. La Figura 4.4 y 4.5 muestra el movimiento estroboscópico y la trayectoria descrita por el robot móvil, respectivamente. Los errores de control $\rho(t)$ y $\alpha(t)$ tienden asintóticamente a cero como se indica en la Figura 4.6. La Figura 4.7, indica las acciones de control del robot móvil donde se verifica que los valores están dentro del rango predeterminado para el robot móvil.

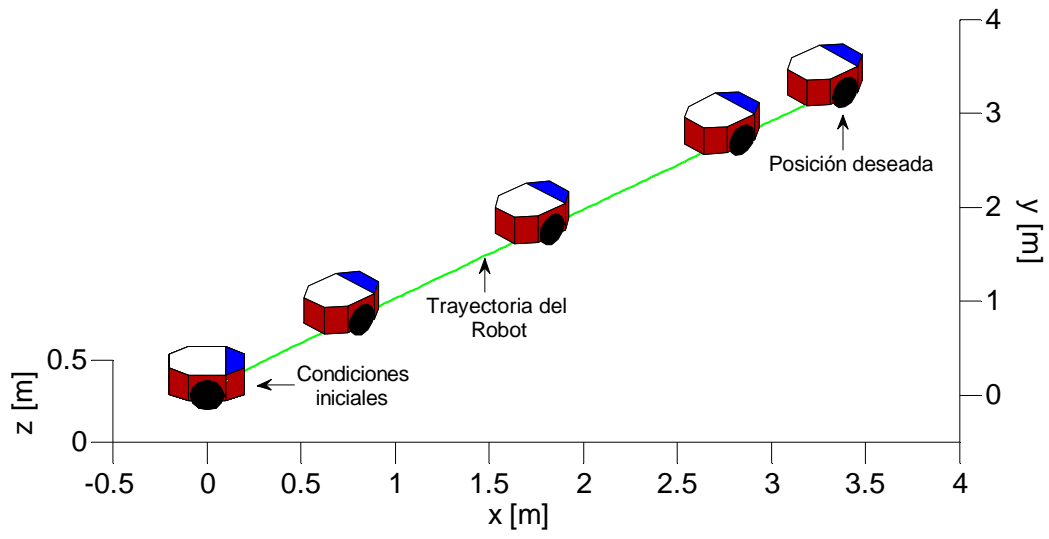


Figura 4.4 Movimiento estroboscópico: Control de posición sin orientación final

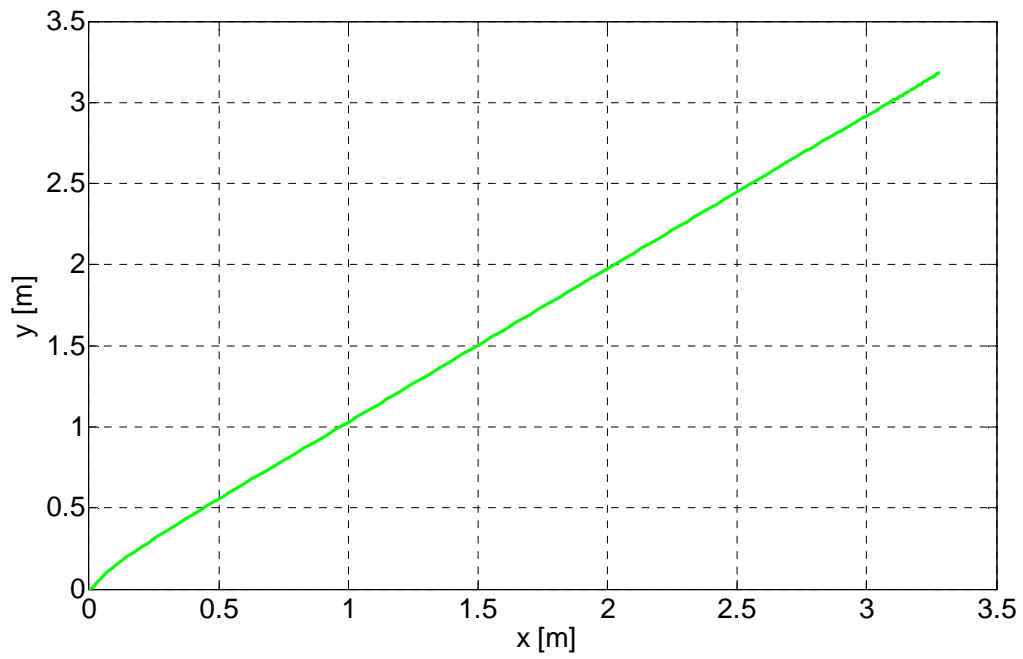


Figura 4.5 Trayectoria descrita por el robot móvil

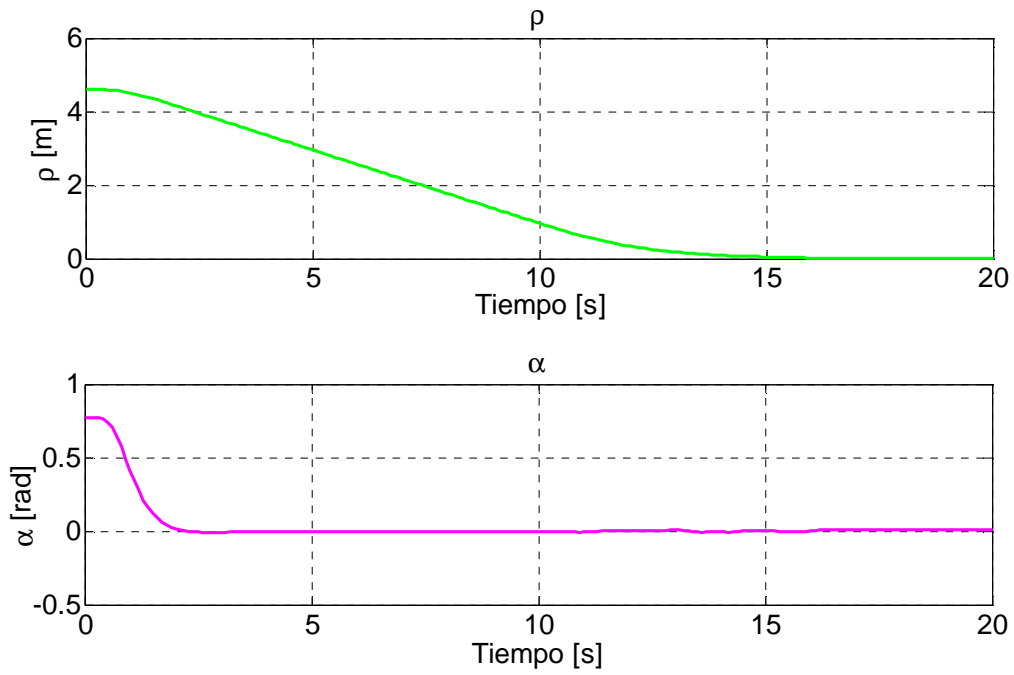


Figura 4.6 Errores de control: $\rho(t)$ y $\alpha(t)$

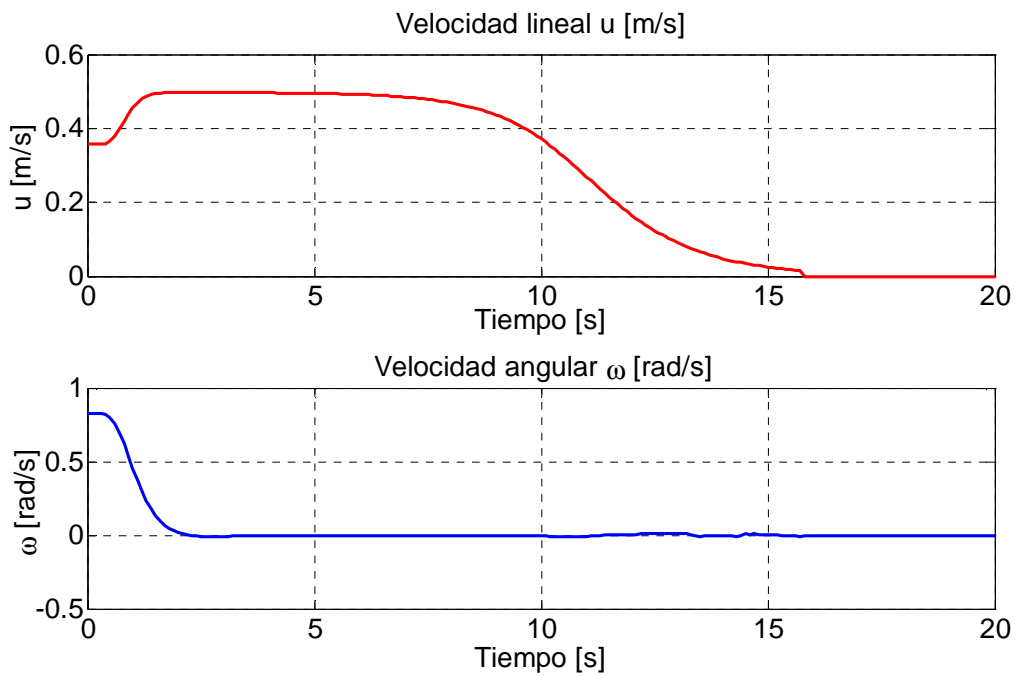


Figura 4.7 Velocidades de referencia: velocidad lineal y velocidad angular

4.1.2 CONTROL DE POSICIONAMIENTO CON ORIENTACIÓN FINAL

Se considera nuevamente un vehículo posicionado a cualquier distancia distinta de cero del referencial destino $\{Rp\}$ y se asume, ahora, como vector de variables de estado a $[\rho \ \alpha \ \theta]^T$, el cual existe para cualquier $\rho > 0$. Luego el sistema de ecuaciones que describe el movimiento del vehículo es:

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= -u \cos(\alpha) \\ \dot{\alpha} &= -\omega + u \frac{\text{sen}(\alpha)}{\rho} \\ \dot{\theta} &= u \frac{\text{sen}(\alpha)}{\rho}\end{aligned}\quad (4.8)$$

Considerando la siguiente función cuadrática candidata de Lyapunov,

$$V(\rho, \alpha, \theta) = V_1 + V_2 = \frac{1}{2} k_u \rho^2 + \frac{1}{2} (\alpha^2 + k_\psi \theta^2); \quad k_u, k_\psi > 0 \quad (4.9)$$

Su derivada temporal \dot{V} en la ecuación (4.8) está dada por

$$\begin{aligned}\dot{V} &= k_u \rho \dot{\rho} + (\alpha \dot{\alpha} + k_\psi \theta \dot{\theta}) \\ \dot{V} &= \underbrace{k_u \rho (-u \cos(\alpha))}_{\dot{V}_1} + \alpha \underbrace{\left[-\omega + u \frac{\text{sen}(\alpha)}{\alpha} \frac{(\alpha + k_\psi \theta)}{\rho} \right]}_{\dot{V}_2}\end{aligned}\quad (4.10)$$

En la ecuación (4.10) se puede observar que el primer término, correspondiente a \dot{V}_1 , puede ser no positivo haciendo que la velocidad lineal u tenga la forma

$$u = k_u \tanh(\rho) \cos(\alpha) \quad \text{con } k_u > 0 \quad (4.11)$$

donde el coeficiente $k_u = |u_{\max}|$. De acuerdo a la elección de u dada por la

ecuación (4.11), \dot{V}_2 en la ecuación (4.10) es

$$\dot{V}_2 = \alpha \left[-\omega + k_u \frac{\tanh(\rho) \cos(\alpha) \sin(\alpha)}{\rho} (\alpha + k_\psi \theta) \right] \quad (4.12)$$

La ecuación (4.12) puede ser no positiva si se hace que la velocidad angular

$$\omega = k_\omega \alpha + k_u \frac{\tanh(\rho) \cos(\alpha) \sin(\alpha)}{\rho} (\alpha + k_\psi \theta); \quad \text{con } k_\omega > 0 \quad (4.13)$$

por lo tanto,

$$\dot{V}_2 = -k_\omega \alpha^2 \leq 0$$

Finalmente se obtiene la expresión para la derivada temporal de la función de Lyapunov V ,

$$\dot{V} = -k_u \rho \tanh(\rho) \cos^2(\alpha) - k_\omega \alpha^2 \quad (4.14)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \rho(t) \\ \alpha(t) \rightarrow 0 \\ \theta(t) \end{cases} \quad \text{con } t \rightarrow \infty$$

La cual resulta ser una forma definida negativa. Esto significa que $\rho(t)$, $\alpha(t)$ y $\theta(t)$ convergen globalmente asintóticamente a cero.

4.1.2.1 RESULTADO POR SIMULACIÓN

Los datos de simulación corresponden al posicionamiento del robot móvil con orientación deseada, desde las condiciones iniciales dadas por: $x_o = 3[\text{m}]$,

$y_o = -2[\text{m}]$ y $\psi_o = 0[\text{rad}]$, con $k_u = |u_{\max}| = 0.5$ y $k_\omega = 1$, $k_\psi = 3$ hacia la posición final deseada: $x_d = -1[\text{m}]$ y $y_d = 3.5[\text{m}]$ $\psi_o = \pi[\text{rad}]$.

En las Figuras 4.8 y 4.9 se muestra el movimiento estroboscópico del robot móvil, y la evolución de los errores de control, respectivamente. Tanto $\rho(t)$ y $\alpha(t)$ tienden asintóticamente a cero cumpliendo así con el fin del control propuesto.

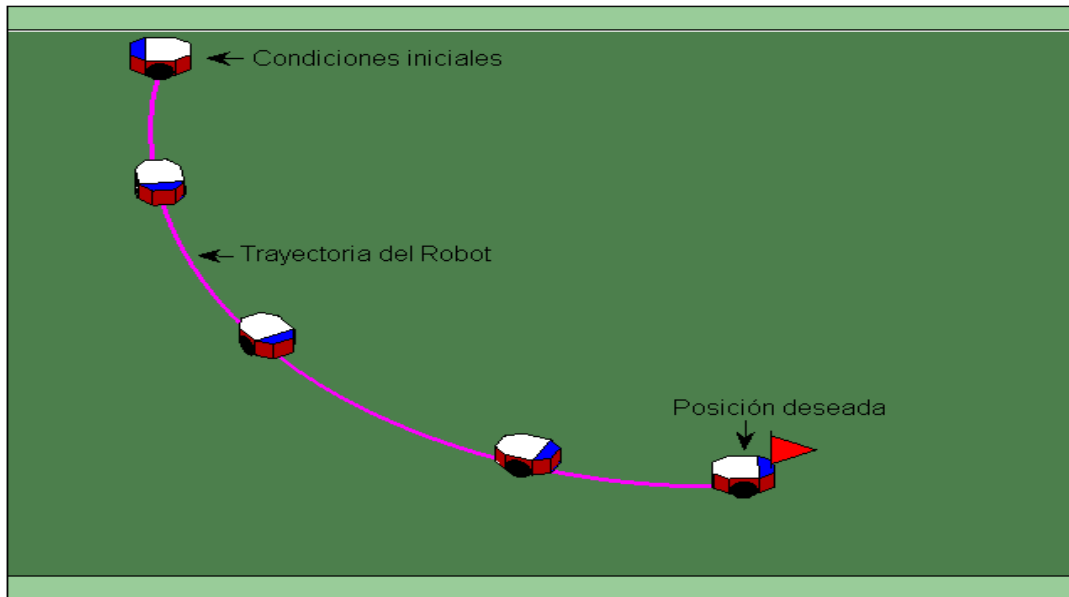


Figura 4.8 Movimiento estroboscópico

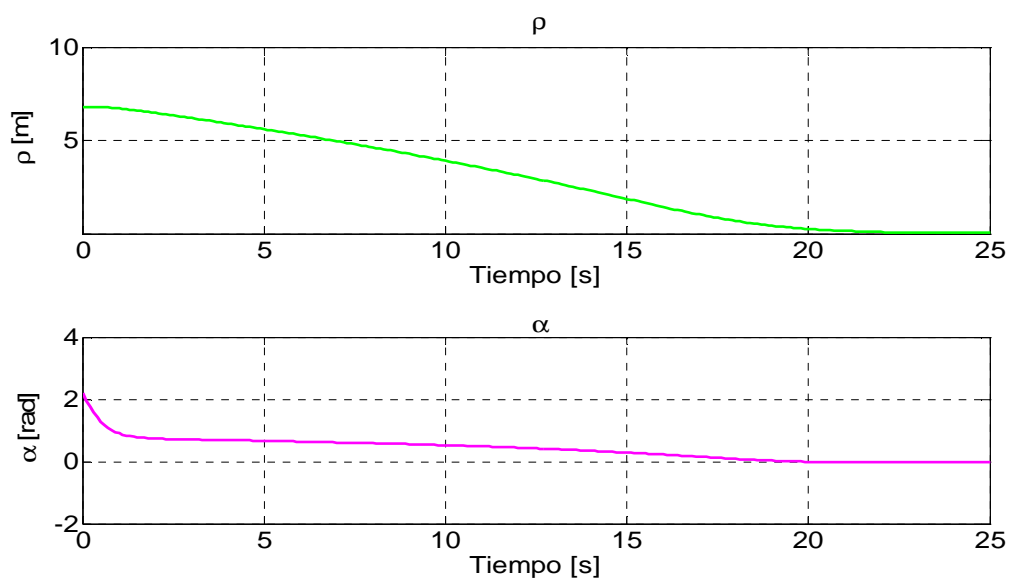


Figura 4.9 Errores de control: $\rho(t)$ y $\alpha(t)$

4.1.2.2 RESULTADO EXPERIMENTAL

El controlador de posicionamiento con orientación final propuesto se implemento en el robot móvil PIONEER P3-AT. El objetivo de control es posicionar y orientar al robot móvil desde una posición inicial $x_o = 0[m]$, $y_o = 0[m]$ y $\psi_o = 0[rad]$ a una posición final con orientación final: $x_d = 3.3[m]$, $y_d = 3.2[m]$ y $\psi_d = 0[rad]$. Los valores de las constantes de ganancia son: $k_u = |u_{max}| = 0.5$, $k_\omega = 1$ y $k_\psi = 3$.

Las Figuras 4.10 - 4.13 muestran los resultados obtenidos experimentalmente. El movimiento estroboscópico y la trayectoria descrita por el robot móvil se muestran en las Figura 4.10 y 4.11, respectivamente. Los errores de control $\rho(t)$ y $\alpha(t)$ tienden asintóticamente a cero como se indica en la Figura 4.12. La Figura 4.13, indica las acciones de control del robot móvil donde se verifica que los valores están dentro del rango predeterminado para el robot móvil.

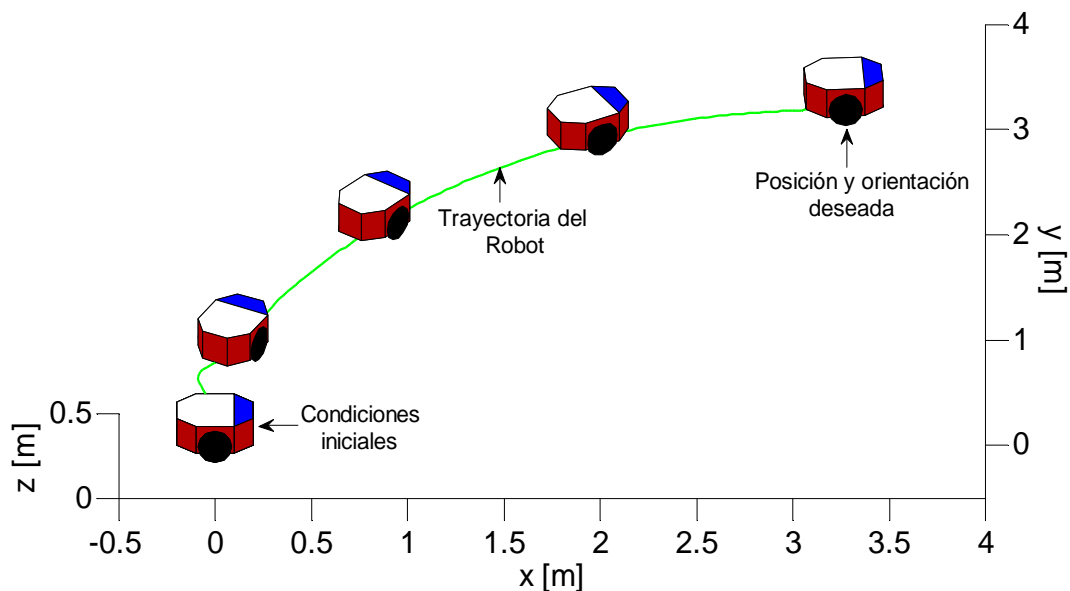


Figura 4.10 Movimiento estroboscópico

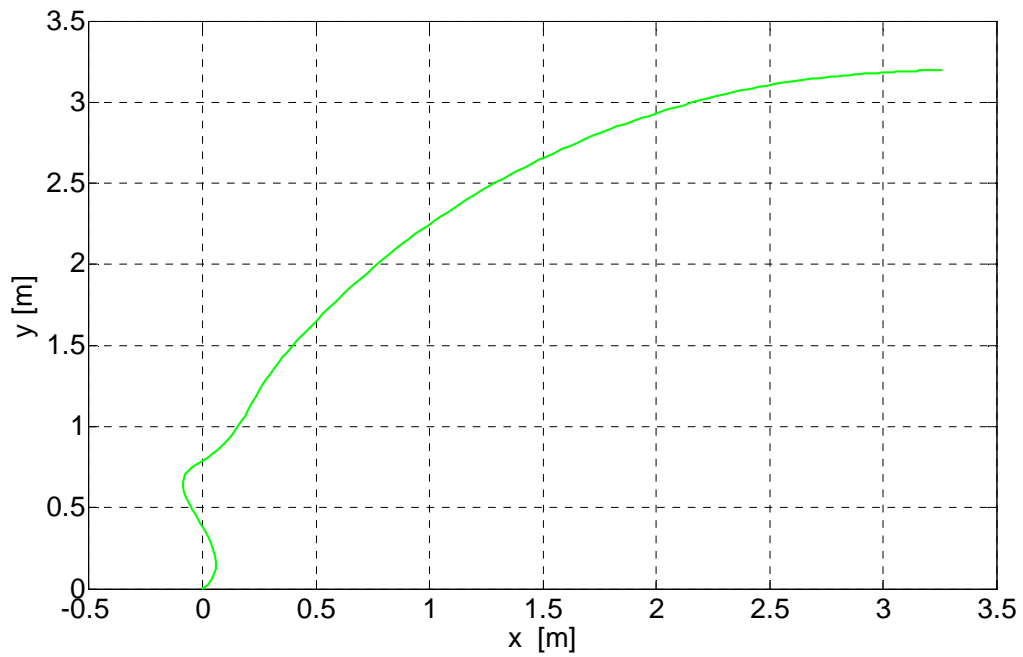


Figura 4.11 Trayectoria descrita por el robot móvil

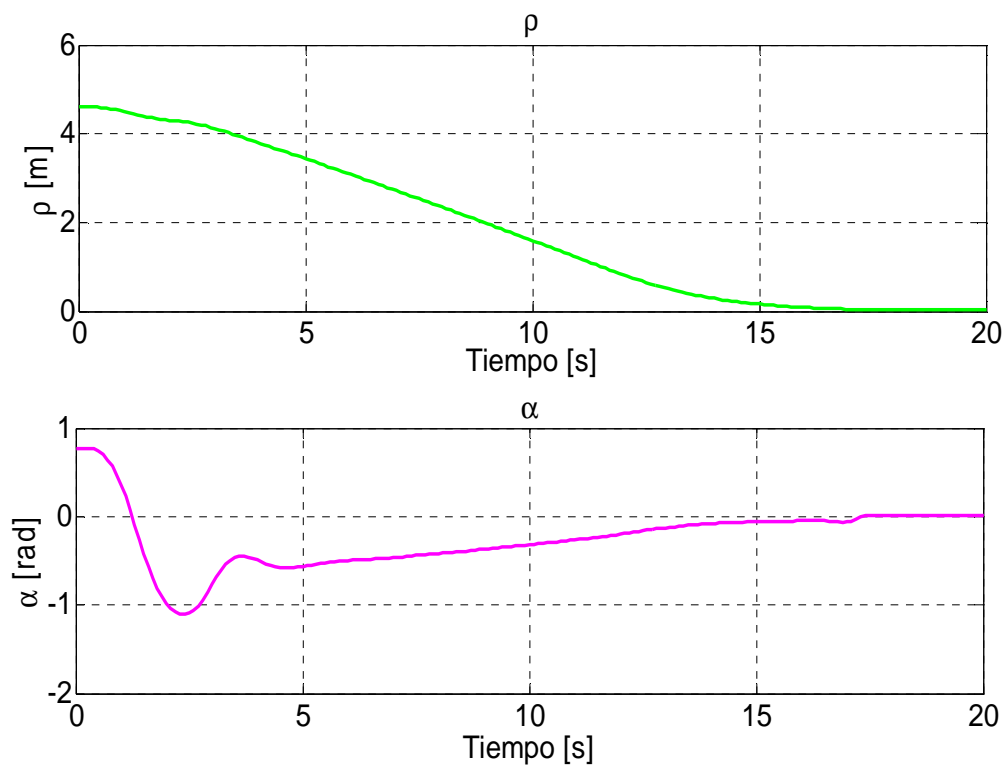


Figura 4.12 Errores de control: $\rho(t)$ y $\alpha(t)$

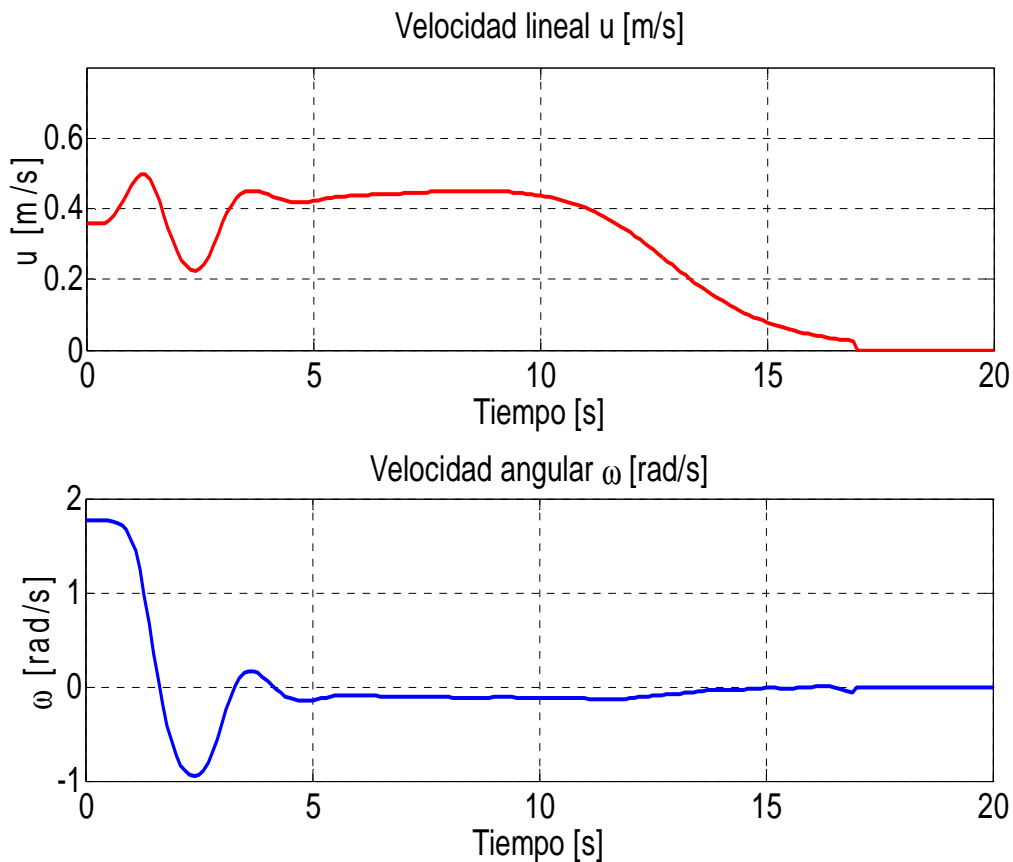


Figura 4.13 Velocidades de referencia: lineal y angular

4.1.3 CONTROL DE POSICIONAMIENTO CON EVASIÓN DE OBSTÁCULOS

En la mayoría de las aplicaciones de robots móviles una de las tareas más importantes que debe desarrollar un robot es la de evitar la colisión con obstáculos que se encuentran en su camino. Esta tarea se puede resolver de dos maneras distintas:

1. Considerar los obstáculos en la misma planificación de trayectorias. Esto implica un completo conocimiento del área de trabajo del robot móvil (Ambientes Estructurados).

2. Considerar que solo existe un conocimiento parcial del área de trabajo (Ambientes Semi-Estructurados). Luego es necesario incluir algún sistema de control que permita al robot móvil modificar su trayectoria en presencia de un obstáculo.

En esta sección se tratará la segunda opción de evasión de obstáculos. Se considera la existencia de un sistema sensorial que le indique al robot móvil que debe modificar su trayectoria con el fin de evadir el obstáculo. El sistema sensorial mide la distancia entre el objeto detectado y el robot móvil, y esta distancia se incorpora al sistema de control.

El problema de control

Considere el modelo cinemático del robot móvil dado por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= -u \cos(\alpha) \\ \dot{\alpha} &= -\omega + u \frac{\text{sen}(\alpha)}{\rho} \\ \dot{\theta} &= u \frac{\text{sen}(\alpha)}{\rho}\end{aligned}$$

La principal característica del problema de control es la relación entre el error de posición y la fuerza de interacción f actuando sobre el robot móvil. Esta fuerza de interacción f es una fuerza ficticia generada a partir de la información de distancia dada por el sistema sensorial entre el robot y un objeto (obstáculo).

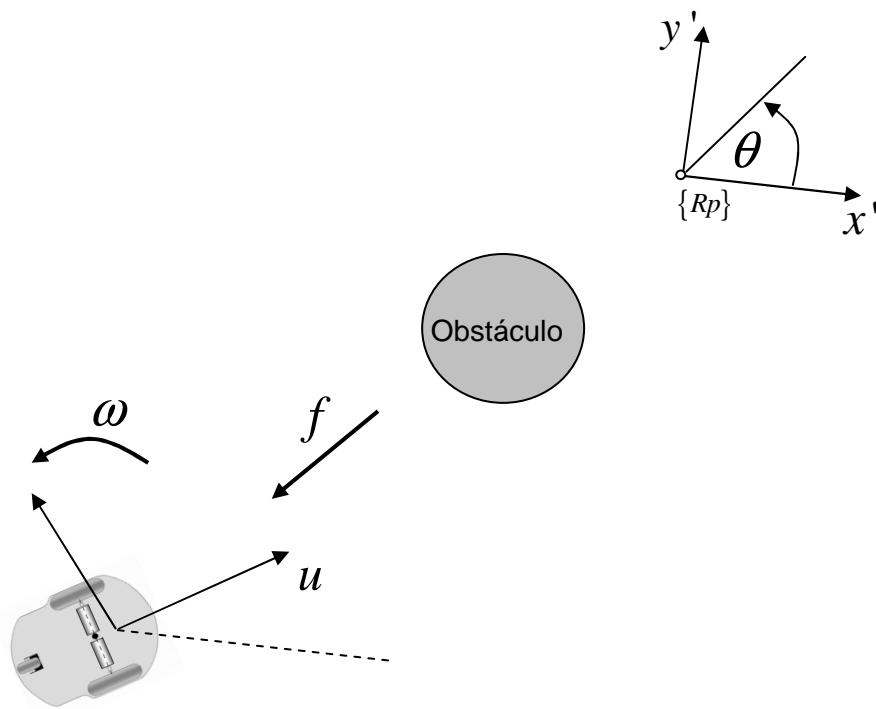


Figura 4.14 Acción de la fuerza ficticia f sobre el robot móvil.

Control de impedancia

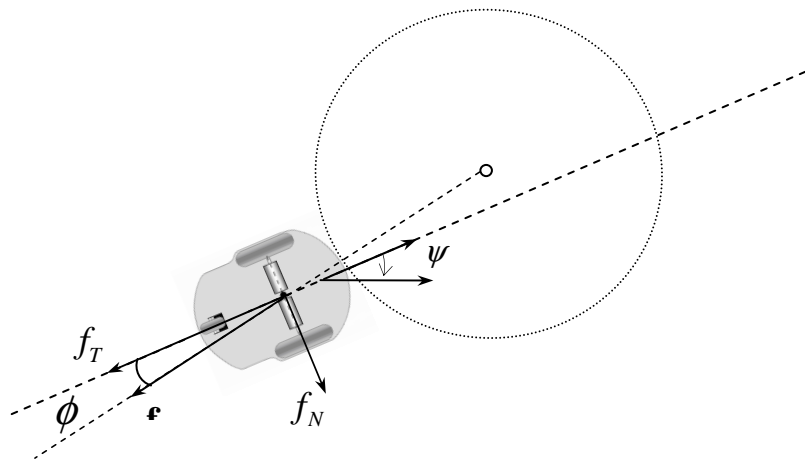


Figura 4.15 Representación del Control de Impedancia.

Se define la impedancia deseada como:

$$x_a = Z^{-1}f \quad (4.15)$$

donde Z representa la impedancia mecánica característica de la interacción robot-medio, la cual es definida como $Z = Is^2 + Bs + K$ con I , B y K , siendo constantes positivas que representan, respectivamente, el efecto de la inercia, la amortiguación y la constante elástica.

La Figura 4.16 muestra el diagrama de bloques del sistema de control propuesto, donde, en el bloque *Control de Movimiento* pueden ir algunas de las leyes de control desarrolladas en las secciones anteriores: 4.1.1 y 4.1.2.

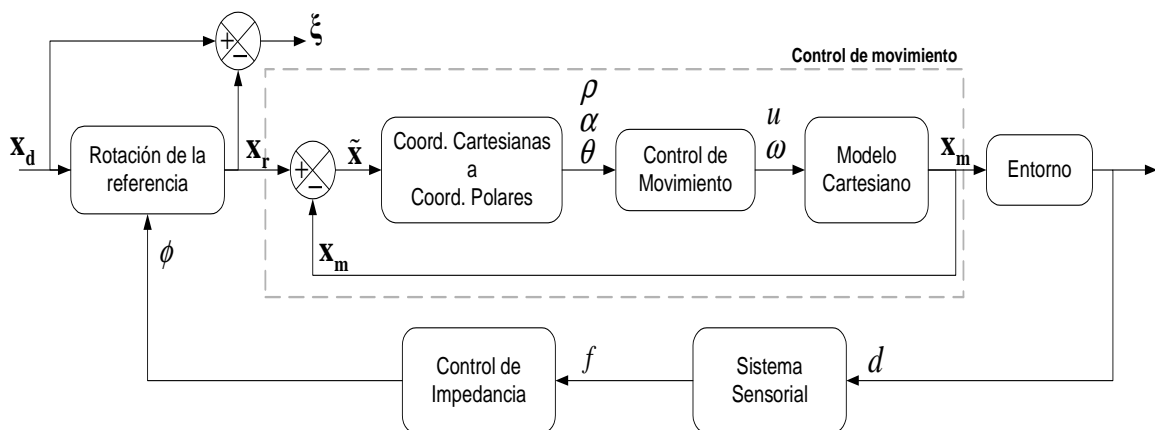


Figura 4.16 Diagrama de bloques del sistema de control propuesto

donde, $\mathbf{x}_d = [x_d \ y_d]^T$ es el vector de la posición deseada, $\mathbf{x}_r = [x_r \ y_r]^T$ es el vector de la posición modificada, ϕ es el ángulo de la rotación de la posición deseada, $\tilde{\mathbf{x}}$ es el vector de error de la posición deseada y ξ es el vector de error de referencia definido como:

$$\xi = \mathbf{x}_d - \mathbf{x}_r .$$

Ahora se define a:

$$\phi = x_a \text{sign}(f_N) \quad (4.16)$$

donde f_N es la componente de f (fuerza ficticia) perpendicular a la dirección del movimiento del robot móvil. La transformación

$$\mathbf{x}_r = \begin{bmatrix} \cos \phi & \text{sen} \phi \\ -\text{sen} \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \mathbf{x}_d \quad (4.17)$$

Es aplicada y el error de posición en coordenadas cartesianas se calcula como

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_r - \mathbf{x}$$

Cuando la fuerza ficticia es cero $\mathbf{x}_r = \mathbf{x}_d$ y el objetivo de lazo cerrado de control de movimiento es ejecutado. Lo que significa que se cumple con el objetivo de control $\tilde{\mathbf{x}} \rightarrow 0$ con $t \rightarrow \infty$.

4.1.3.1 RESULTADOS POR SIMULACIÓN

La simulación que se llevó a cabo tiene como objetivo principal el traslado del robot móvil desde un punto inicial hacia un punto de una posición final deseada, en cuyo trayecto se encuentra un obstáculo, el cual debe ser evitado por el robot móvil mediante la ley de control propuesta.

El punto inicial del robot móvil está dado por: $x_o = -0.5[\text{m}]$, $y_o = -2[\text{m}]$ y $\psi_o = 0[\text{rad}]$ y la posición final deseada es $x_d = 4[\text{m}]$ y $y_d = 2[\text{m}]$. Los valores de las constantes son $k_u = |u_{\max}| = 0.5$ y $k_\omega = 2$, $k_\psi = 3$.

En las Figuras 4.17 y 4.18 se muestra el movimiento estroboscópico del robot móvil y las componentes (normal f_N y tangencial f_T) de la fuerza ficticia f , respectivamente. Los errores de control de $\rho(t)$ y $\alpha(t)$ tienden asintóticamente a cero como se muestra en la Figura 4.19, cumpliendo así con el fin del control propuesto.

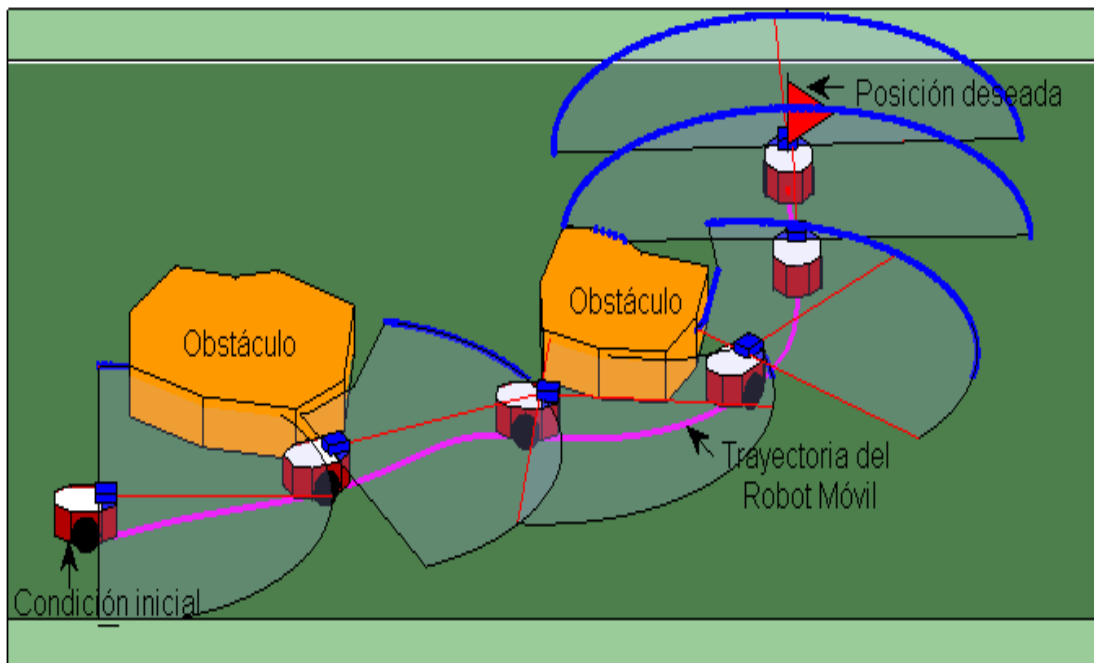


Figura 4.17 Movimiento estroboscópico

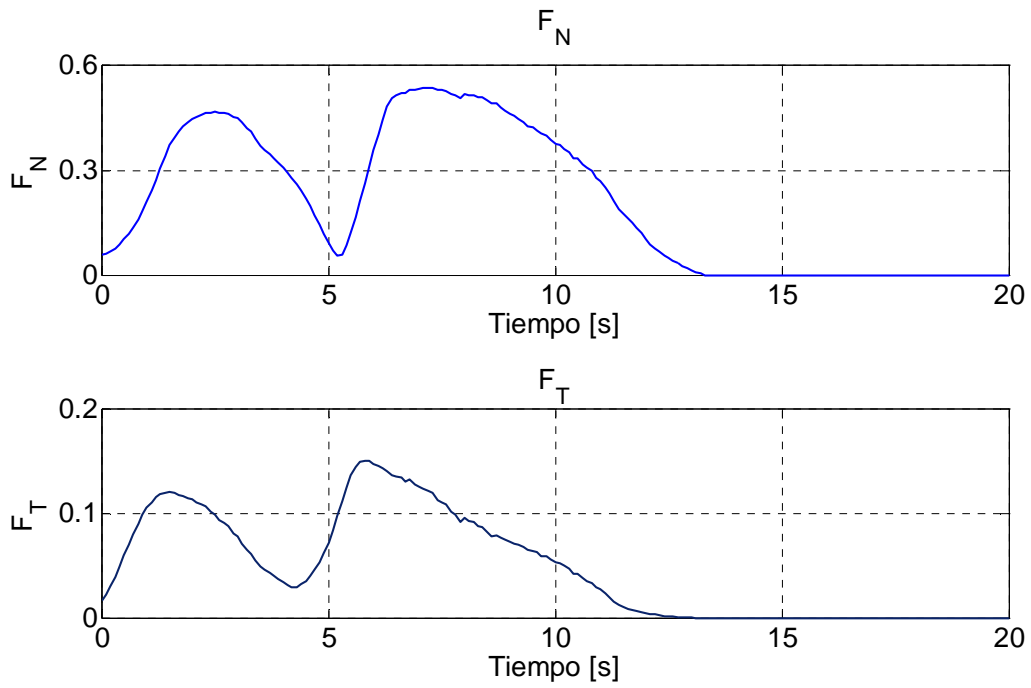


Figura 4.18 Fuerzas ficticias: Tangencial y Normal

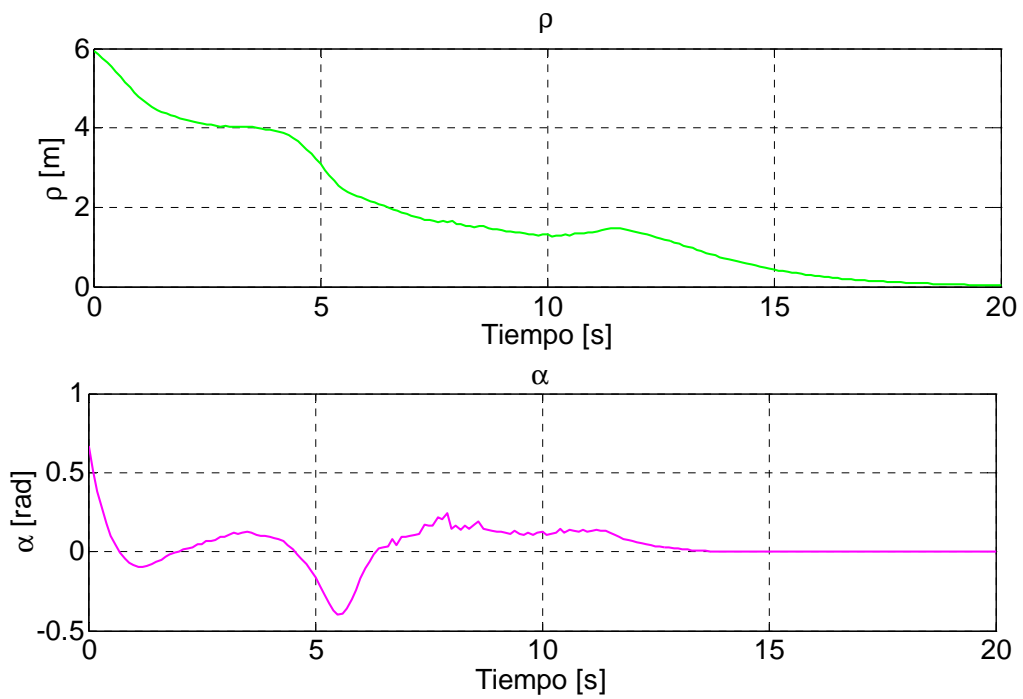


Figura 4.19 Errores de control: $\rho(t)$ y $\alpha(t)$

4.1.3.2 RESULTADOS EXPERIMENTALES

El objetivo de control es alcanzar el punto de coordenadas x_d y y_d evitando los obstáculos presentes a lo largo del trayecto. Se presenta, a través de dos pruebas experimentales, diferentes situaciones para evaluar el desempeño del algoritmo de control propuesto. El controlador propuesto se implementó en el robot móvil PIONEER P3-AT y como sensor sensorial se utilizó el laser SICK (como se muestra en la Figura 4.20)



Figura 4.20 Robot móvil Pioneer P3-AT y laser SICK

Experimento 1

Para el primer experimento, la posición deseada es $x_d = 4.5[\text{m}]$ y $y_d = 0[\text{m}]$. La Figura 4.21 muestra las condiciones iniciales del experimento, las Figuras 4.22 y 4.23, muestra el movimiento estroboscópico y la trayectoria descrita por el robot móvil, respectivamente. La evolución de los errores de control son mostrados en la Figura 4.24, donde se observa que el error tiende a cero asintóticamente cumpliendo así el objetivo de control. Las componentes (normal f_N y tangencial f_T) de la fuerza ficticia f se muestran en la Figura 4.25, y por último en la Figura 4.26 se muestran las velocidades de referencia del robot móvil, las mismas que no sobrepasan sus valores máximos.

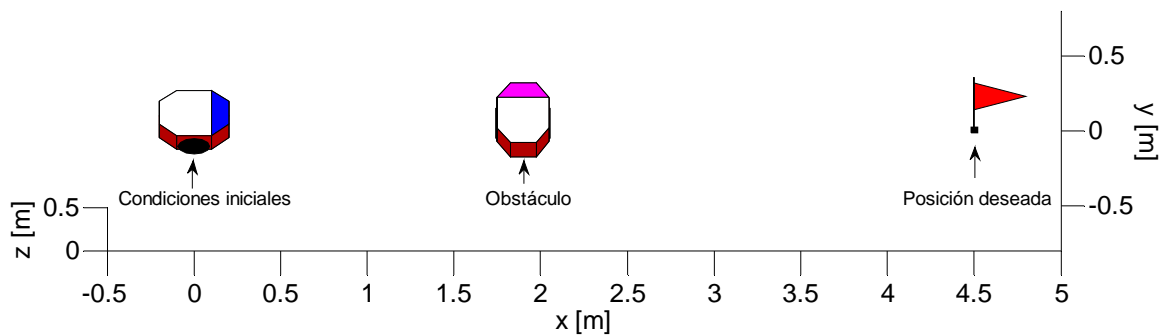


Figura 4.21 Condiciones iniciales

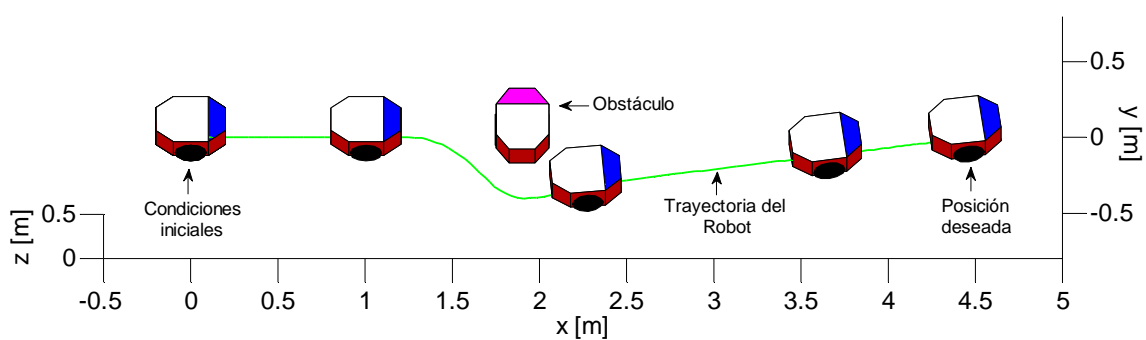


Figura 4.22 Movimiento estroboscópico

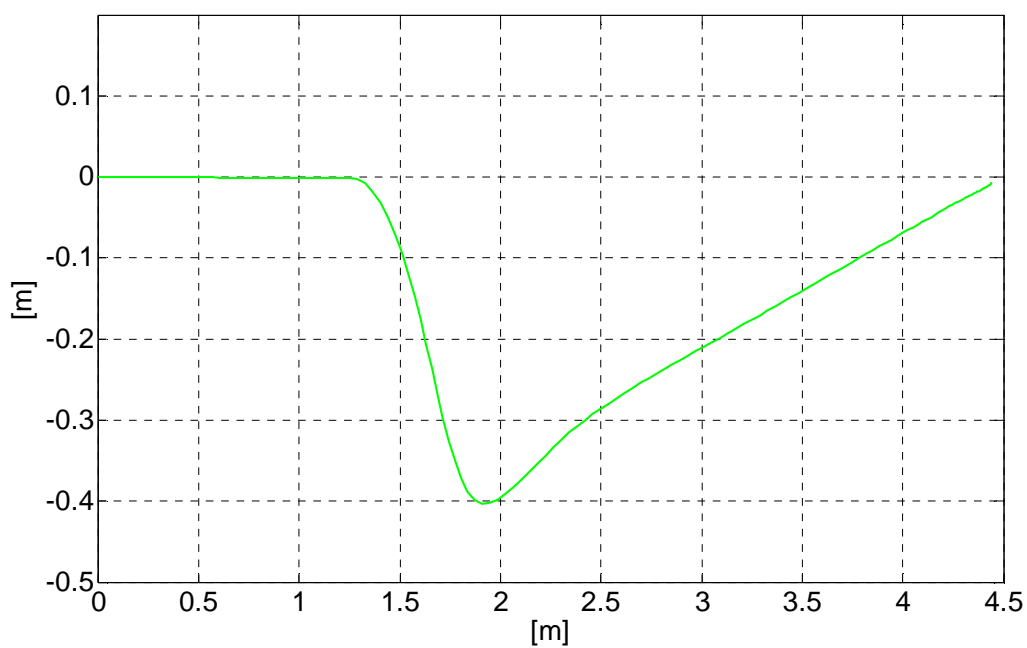


Figura 4.23 Trayectoria descrita por el robot móvil

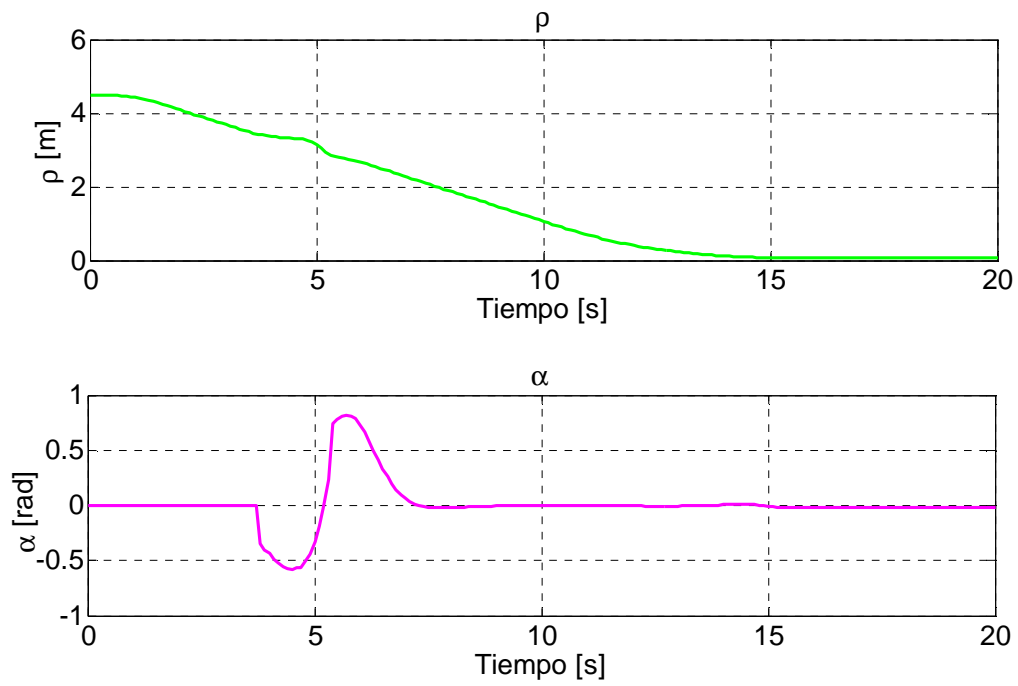


Figura 4.24 Errores de control: $\rho(t)$ y $\alpha(t)$

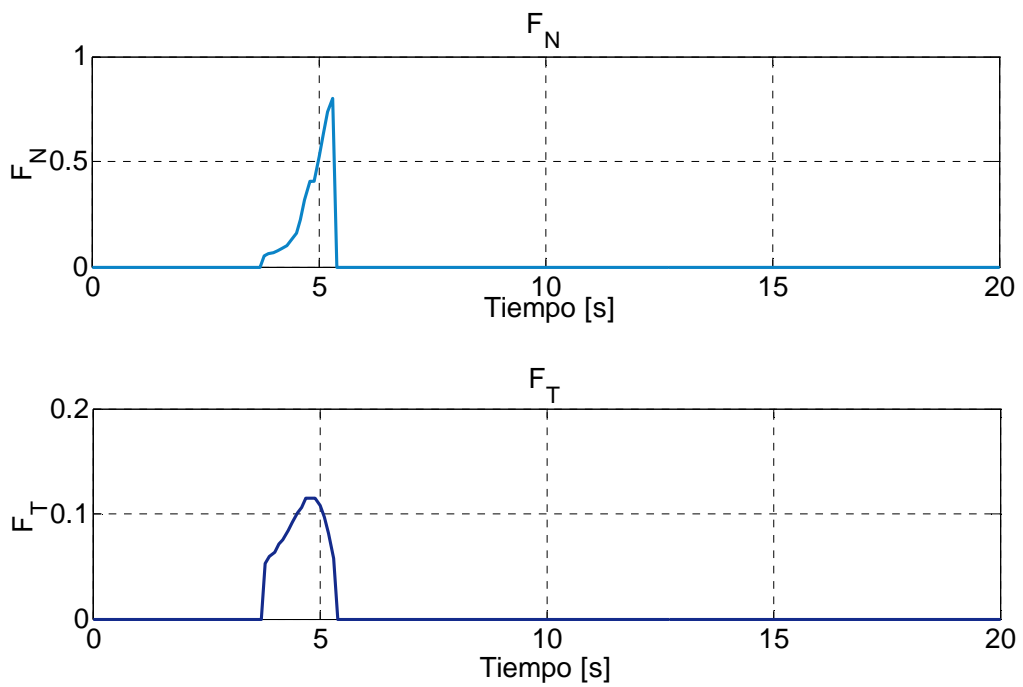


Figura 4.25 Fuerzas ficticias: Tangencial y Normal

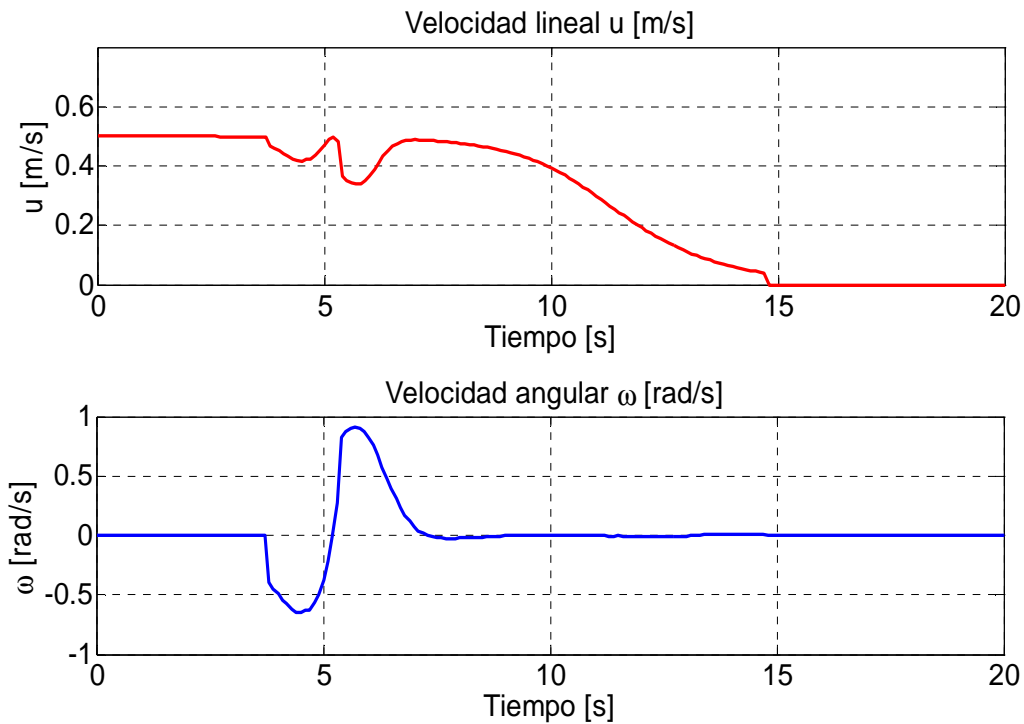


Figura 4.26 Velocidades de referencia: velocidad lineal y velocidad angular

Experimento 2

Se selecciona una posición deseada igual a: $x_d = 5.8[\text{m}]$ y $y_d = 0[\text{m}]$. La Figura 4.27 muestra las condiciones iniciales del experimento, las Figuras 4.28 y 4.29, muestran el movimiento estroboscópico y la trayectoria descrita por el robot móvil, respectivamente. La evolución de los errores de control son mostrados en la Figura 4.30, donde se observa que el error tiende a cero asintóticamente cumpliendo así el objetivo de control. Las componentes (normal f_N y tangencial f_T) de la fuerza ficticia f se muestran en la Figura 4.31 y por último en la Figura 4.32 se muestran las velocidades de referencia del robot móvil, las mismas que no sobrepasan sus valores máximos.

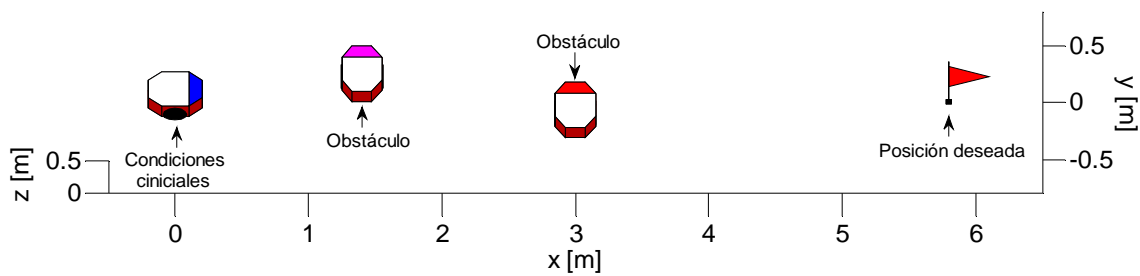


Figura 4.27 Condiciones iniciales

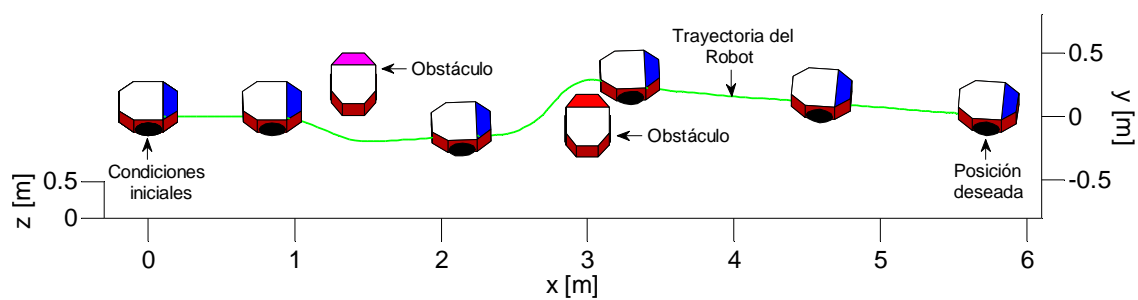


Figura 4.28 Movimiento estroboscópico

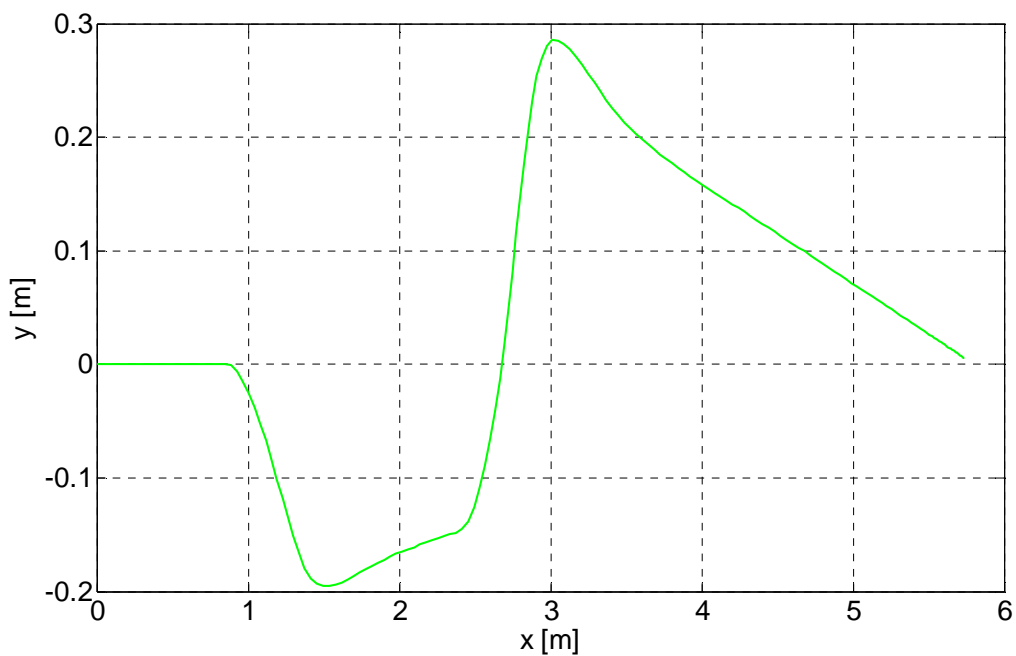


Figura 4.29 Trayectoria descrita por el robot móvil

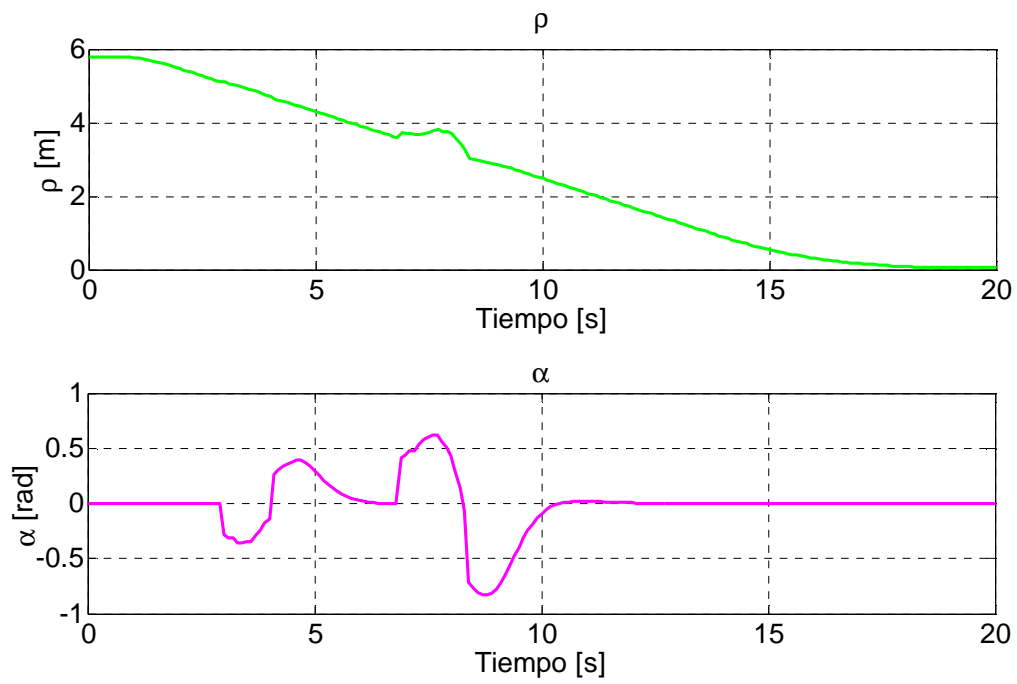


Figura 4.30 Errores de control: $\rho(t)$ y $\alpha(t)$

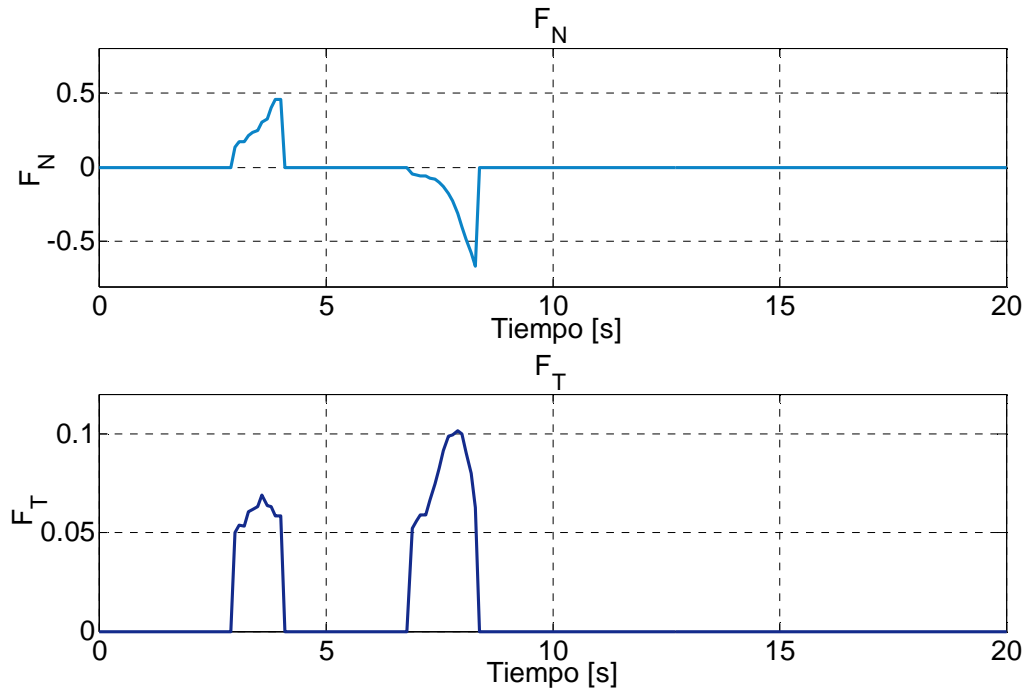


Figura 4.31 Fuerzas ficticias: Normal y Tangencial.

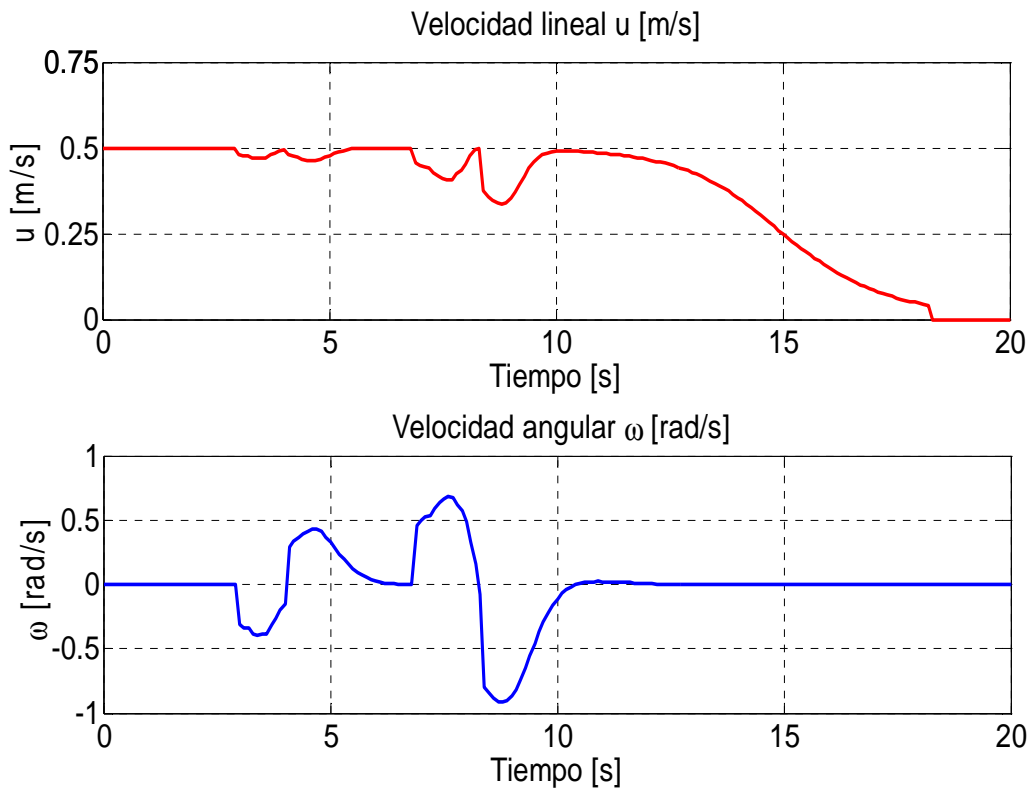


Figura 4.32 Velocidades de referencia: velocidad lineal y velocidad angular

4.2 SEGUIMIENTO DE TRAYECTORIA

4.2.1 SEGUIMIENTO DE TRAYECTORIA CINEMÁTICO

El objetivo del control de seguimiento de trayectoria es conseguir mediante una ley de control, que el robot móvil alcance y siga con error cero estados deseados variantes con el tiempo. Dichos estados describen la trayectoria deseada a seguir.

El sistema de ecuaciones que describe el movimiento del vehículo es:

$$\dot{\mathbf{x}}_{cr} = \dot{\mathbf{x}}_d + \mathbf{K} \tanh(\tilde{\mathbf{x}}) \quad (4.18)$$

donde $\mathbf{x}_d(t) = [x_d(t) \ y_d(t)]^T$ representa el vector de la posición deseada en el tiempo t ; $\dot{\mathbf{x}}_d(t) = [\dot{x}_d(t) \ \dot{y}_d(t)]^T$ es el vector de las velocidades deseadas en el punto $\mathbf{x}_d(t)$. El error de control se define como

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_d - \mathbf{x} \quad (4.19)$$

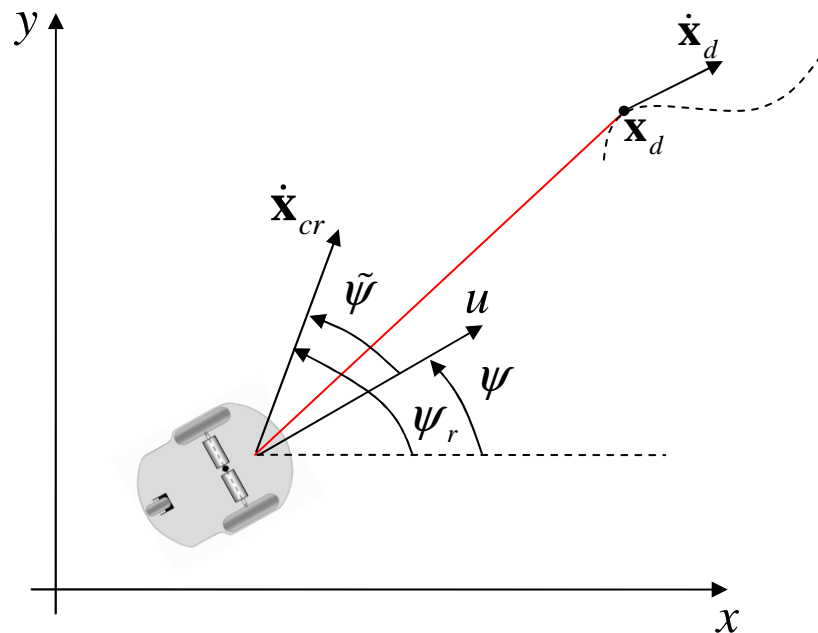


Figura 4.33 Seguimiento de trayectoria

Por otro lado, $\dot{\mathbf{x}}_{cr}$ representa el vector de velocidad de referencia

$$\dot{\mathbf{x}}_{cr} = u_r \angle \psi_r$$

Siendo u_r y ψ_r la velocidad de referencia y la orientación deseada, respectivamente. Para evitar la saturación en las velocidades del robot móvil, se

introduce la función $\tanh(\cdot)$ que limita el error $\tilde{\mathbf{x}}$, y \mathbf{K} es una matriz diagonal definida positiva que precisa los errores de $\tilde{\mathbf{x}}$.

Para el análisis de estabilidad se asume -momentáneamente- seguimiento perfecto de velocidad, o sea $\dot{\mathbf{x}} \equiv \dot{\mathbf{x}}_{cr}$. Ahora, sustituyendo la derivada de (4.19) en (4.18) se tiene,

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} + \mathbf{K} \tanh(\tilde{\mathbf{x}}) = \mathbf{0} \quad (4.20)$$

Ahora, se considera una función candidata de Lyapunov igual a $V(\tilde{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{x}}^T \tilde{\mathbf{x}}$, cuya derivada temporal es, $\dot{V}(\tilde{\mathbf{x}}) = \tilde{\mathbf{x}}^T \dot{\tilde{\mathbf{x}}}$ y remplazando (4.20) se tiene,

$$\dot{V}(\tilde{\mathbf{x}}) = \tilde{\mathbf{x}}^T (-\mathbf{K} \tanh(\tilde{\mathbf{x}})) = -\tilde{\mathbf{x}}^T \mathbf{K} \tanh(\tilde{\mathbf{x}}) < 0$$

Se puede concluir que $\dot{V}(\tilde{\mathbf{x}}) < 0$. O sea, que $\tilde{\mathbf{x}}(t) \rightarrow 0$ con $t \rightarrow \infty$, Con lo que se cumpliría el objetivo de control.

Finalmente considerando las ecuaciones de movimiento se puede proponer la siguiente ley de control

$$\begin{aligned} u_c &= u_r \cos \tilde{\psi} \\ \omega_c &= \dot{\psi}_r + k \tanh(\tilde{\psi}) \end{aligned} \quad (4.21)$$

donde k es una constante positiva de ajuste.

4.2.1.1 COMPENSACIÓN DINÁMICA

En los controladores propuestos anteriormente se consideró que $u \equiv u_c$ y $\omega \equiv \omega_c$ (seguimiento perfecto de velocidad). Sin embargo, esto no siempre es posible en

contextos reales, por lo que, para el caso que no se tenga seguimiento perfecto de velocidad, el error de velocidad se define como:

$$\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v}_c - \mathbf{v} \quad (4.22)$$

Esto motiva a realizar un controlador de compensación dinámica basado en la dinámica inversa del robot móvil, para lo cual se considera que se conoce el modelo exacto del robot móvil. La Figura 4.33, muestra el esquema de control propuesto.

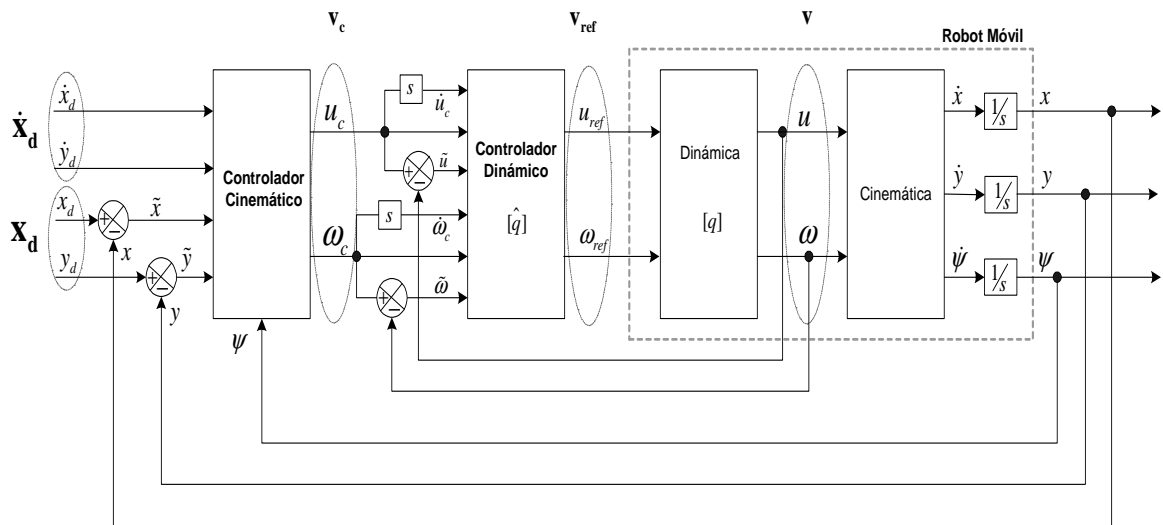


Figura 4.33 Esquema de control en cascada: control cinemático con compensación dinámica (controlador dinámico)

Se define a las velocidades calculadas por el controlador cinemático como $\mathbf{v}_c = [u_c \ \omega_c]^T$, a las velocidades reales del robot como $\mathbf{v} = [u \ \omega]^T$ y a las velocidades de referencia como $\mathbf{v}_{ref} = [u_{ref} \ \omega_{ref}]^T$. Se considera el modelo dinámico representado en la ecuación (3.29).

$$\mathbf{H}\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{C}(\mathbf{v})\mathbf{v} = \mathbf{v}_{ref} \quad (4.23)$$

Se propone la siguiente ley de control

$$\mathbf{v}_{\text{ref}} = \mathbf{H}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{C}(\mathbf{v})\mathbf{v} \quad (4.24)$$

donde, $\mathbf{v}_{\text{ref}} = [u_{\text{ref}} \ \omega_{\text{ref}}]^T$ y $\boldsymbol{\sigma} = \dot{\mathbf{v}}_c + \Gamma(\tilde{\mathbf{v}})$, la matriz $\Gamma(\tilde{\mathbf{v}})$ es definida como

$$\Gamma(\tilde{\mathbf{v}}) = \begin{bmatrix} l_u & 0 \\ 0 & l_\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tanh\left(\frac{k_u}{l_u}\tilde{u}\right) \\ \tanh\left(\frac{k_\omega}{l_\omega}\tilde{\omega}\right) \end{bmatrix}$$

con $k_u > 0$ y $k_\omega > 0$ son ganancias constantes, $l_u \in \mathfrak{R}^+$ y $l_\omega \in \mathfrak{R}^+$ son constantes de saturación. El término $\Gamma(\tilde{\mathbf{v}})$ provoca una saturación en los comandos enviados al robot con el fin de garantizar que estén dentro de los límites aceptados por el robot.

Remplazando (4.24) en (4.23) se tiene

$$\mathbf{0} = \dot{\tilde{\mathbf{v}}} + \Gamma(\tilde{\mathbf{v}}) \quad (4.25)$$

Para el análisis de estabilidad se considera la candidata de Lyapunov $V(\tilde{\mathbf{v}}) = \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{v}}^T\tilde{\mathbf{v}}$. Su primera derivada temporal es $\dot{V}(\tilde{\mathbf{v}}) = \tilde{\mathbf{v}}^T\dot{\tilde{\mathbf{v}}}$, que puede ser escrita como,

$$\dot{V}(\tilde{\mathbf{v}}) = -\tilde{\mathbf{v}}^T\mathbf{T}(\tilde{\mathbf{v}}) < 0$$

Se puede concluir que $\dot{V}(\tilde{\mathbf{v}}) < 0$. O sea, que $\tilde{\mathbf{v}} \rightarrow 0$ con $t \rightarrow \infty$, con lo que se cumpliría el objetivo de control.

Observaciones:

- a) *Control cinemático*, el objetivo principal es el control de movimiento del robot móvil (control de postura, control de seguimiento de trayectoria, control de seguimiento de caminos). Por lo tanto, el objetivo de control es asegurar que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{0}$$

- b) *Compensación dinámica*, cuyo objetivo principal es compensar la dinámica del robot móvil reduciendo así el error de velocidad de seguimiento. Este controlador recibe como entradas las velocidades deseadas calculadas por el controlador cinemático, y genera las velocidades de referencia para el robot móvil. Por lo tanto, el objetivo de control es asegurar que $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{0}$

4.2.1.2 RESULTADOS POR SIMULACIÓN

Se realizaron dos simulaciones con dos trayectorias distintas a seguir por el robot móvil, una de las trayectorias simuladas fue un ocho implementando el control cinemático y una trayectoria sinusoidal con el control cinemático con compensación dinámica.

- a) Control cinemático.

La trayectoria deseada a seguir es descrita por: $x_d = 3 + 2.5 \cos\left(\frac{1}{6}t\right)$ [m] y $y_d = r \sin\left(\frac{1}{3}t\right)$ [m] si $r = 2$; y la posición inicial del robot móvil es $x_o = 2.5$ [m], $y_o = 3$ [m] y $\psi_o = 0$ [rad].

En las figuras 4.34 y 4.35 se muestra el movimiento estroboscópico que realiza el robot móvil y la evolución de los errores de control del eje $\tilde{x}(t)$ y eje $\tilde{y}(t)$, respectivamente.

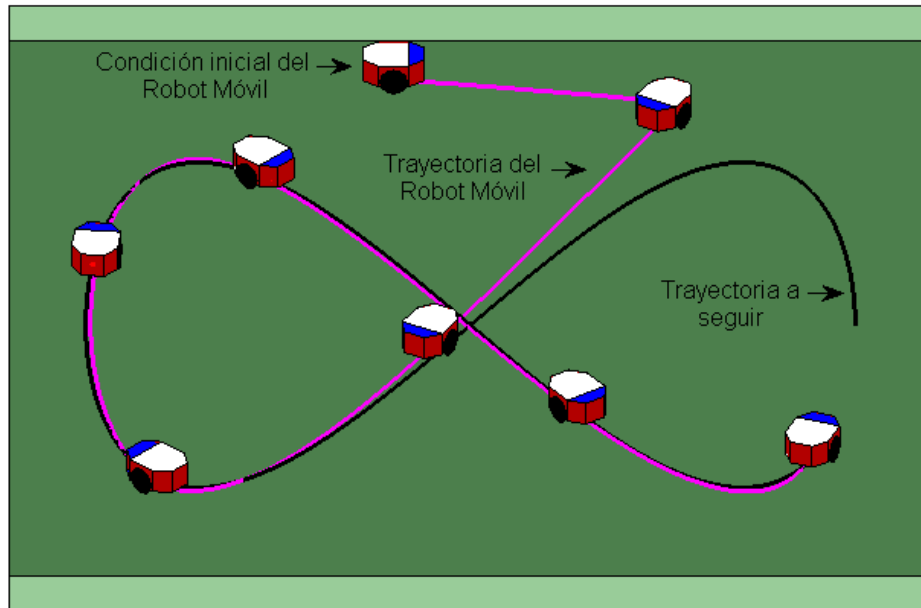


Figura 4.34 Movimiento estroboscópico

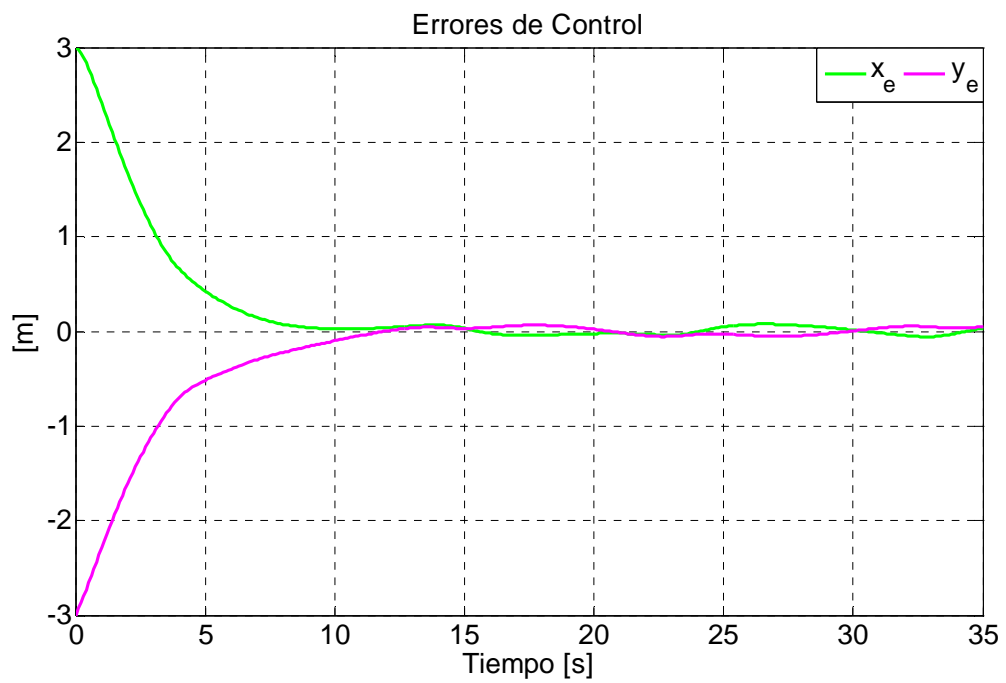


Figura 4.35 Errores de control: eje x y eje y

b) Control Cinemático con compensación dinámica

La trayectoria deseada a seguir esta descrita por: $x_d = \frac{1}{6}t$ [m] y $y_d = 1.3\text{sen}\left(\frac{1}{4.5}t\right)$ [m]; y la posición inicial del robot móvil es $x_o = 0.5$ [m], $y_o = -0.5$ [m] y $\psi_o = 0$ [rad].

En las Figuras 4.36 y 4.37 se muestra el movimiento estroboscópico que realiza el robot móvil y la evolución de los errores de control de las velocidades lineal y angular, respectivamente. La evolución de los errores de control en el eje $\tilde{x}(t)$ y eje $\tilde{y}(t)$ se muestra en la Figura 4.38.

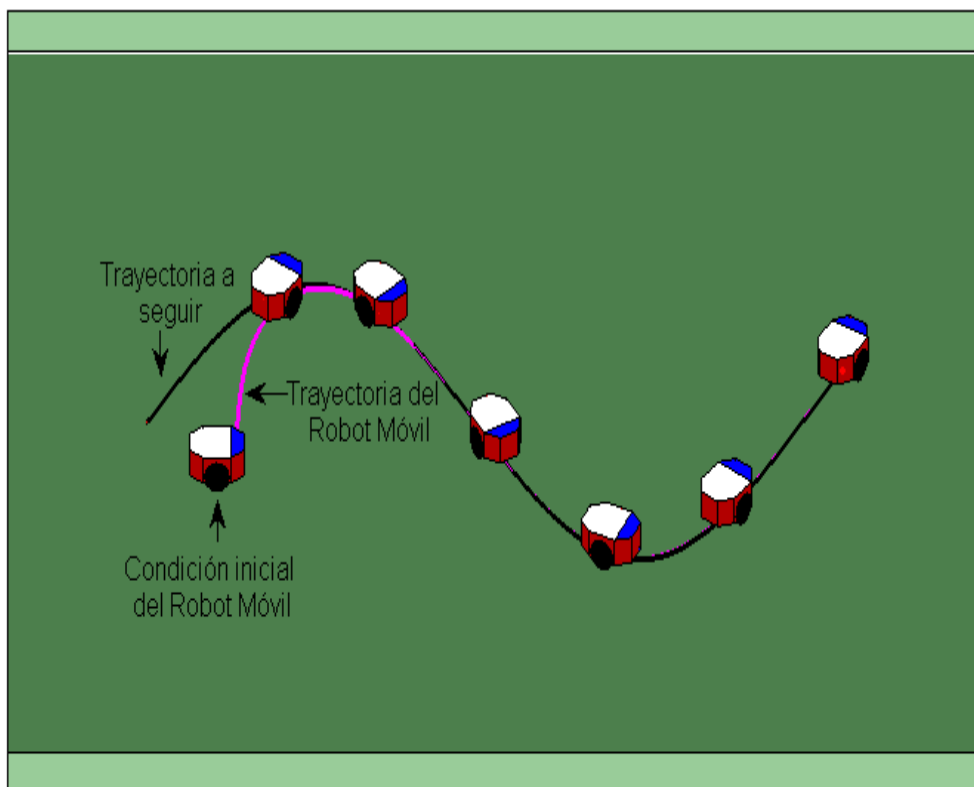


Figura 4.36 Movimiento estroboscópico simulado

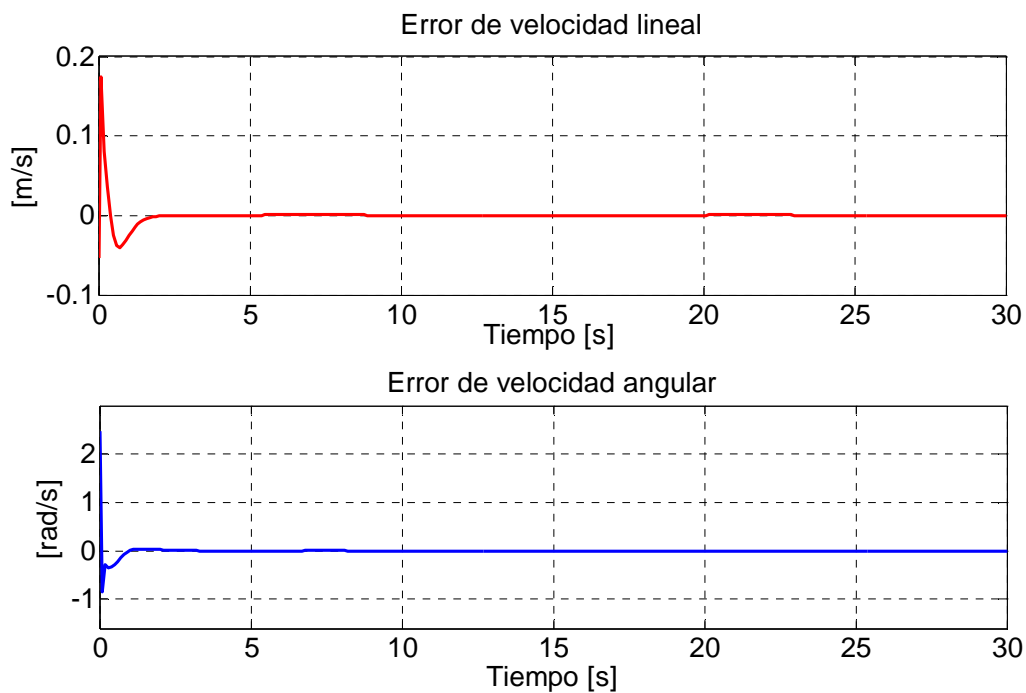


Figura 4.37 Errores de velocidades: lineal y angular

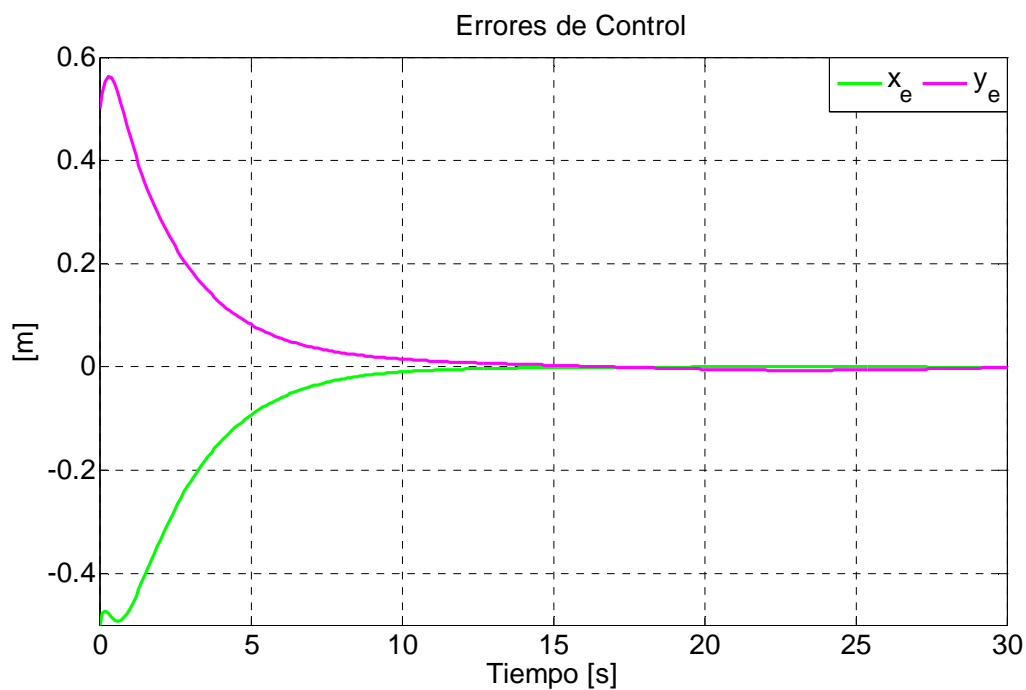


Figura 4.38 Errores de control: eje x y eje y

4.2.1.3 RESULTADOS EXPERIMENTALES

El controlador de seguimiento de trayectoria propuesto se implementó en el robot móvil PIONEER P3-AT. Se realizaron varias pruebas con el fin de determinar la diferencia entre el control de seguimiento de trayectoria cinemático y otro con compensación dinámica. Cabe destacar que los experimentos se realizaron con dos velocidades diferentes.

Experimento 1

La trayectoria deseada a seguir es descrita por: $x_d = \frac{1}{6}t$ [m] y $y_d = 1.3\text{sen}\left(\frac{1}{4.5}t\right)$ [m]; y la posición inicial del robot móvil es $x_o = 0.5$ [m], $y_o = -0.5$ [m] y $\psi_o = 0$ [rad].

a) Control cinemático

Las Figuras 4.39 - 4.40 muestran los resultados obtenidos experimentalmente. El movimiento estroboscópico y la trayectoria descrita por el robot móvil se muestran en las Figuras 4.39 y 4.40, respectivamente. Los errores de control $\tilde{x}(t)$ y $\tilde{y}(t)$ se indican en la Figura 4.41. Las velocidades cinemáticas y reales son presentadas en la Figura 4.42, se puede observar que en $0 \leq t \leq 18$ [s] la velocidad cinemática difiere considerablemente de la velocidad del robot. Los errores de velocidad son presentados en la Figura 4.43. La Figura 4.44, indica las acciones de control del robot móvil, donde se verifica que los valores están dentro del rango predeterminado para el robot móvil.

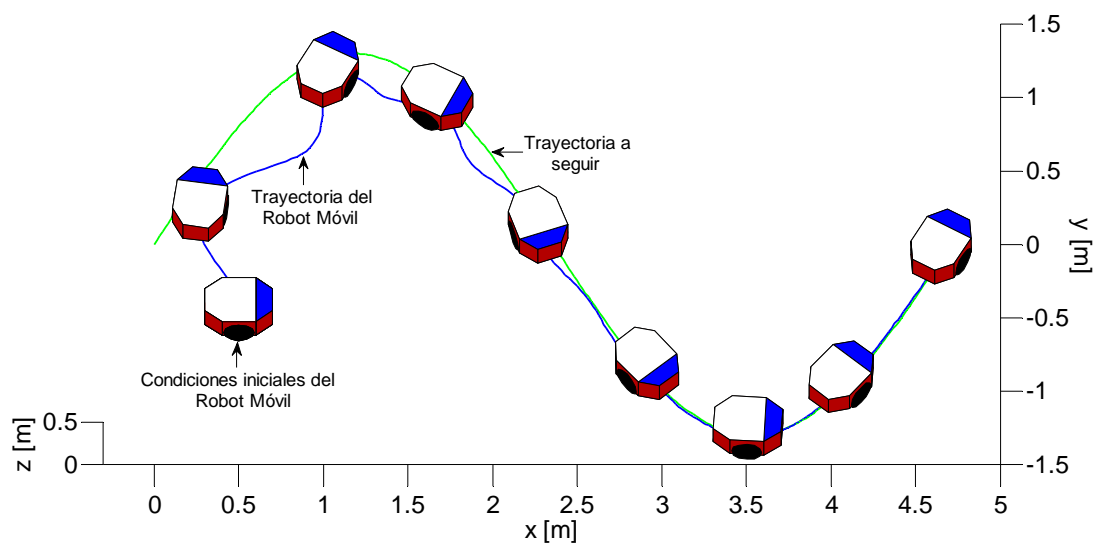


Figura 4.39 Movimiento estroboscópico

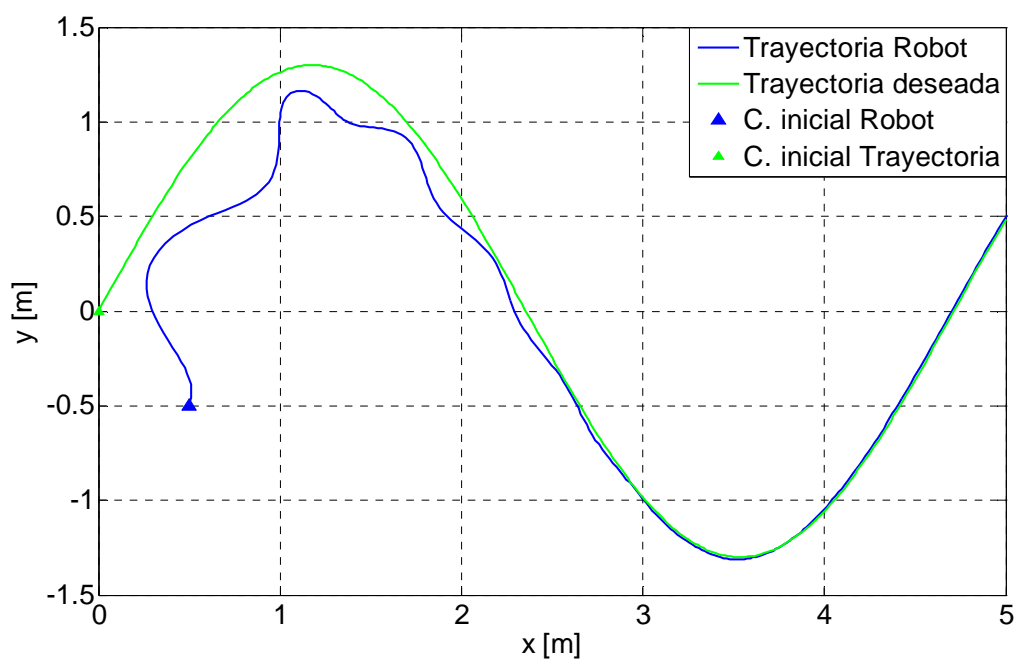


Figura 4.40 Trayectoria descrita por el robot móvil

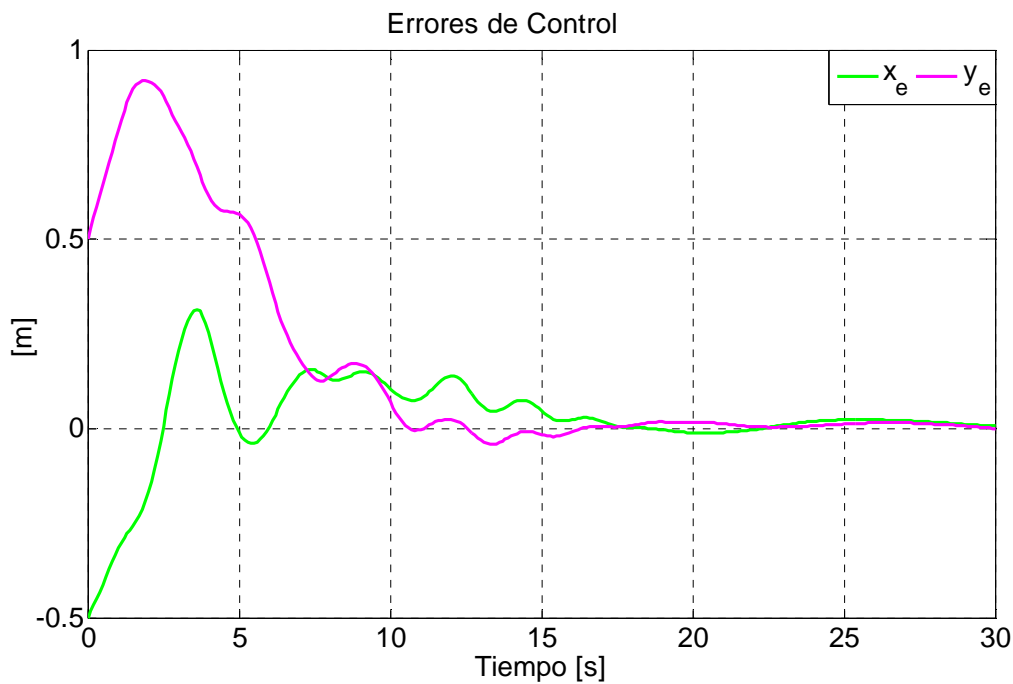


Figura 4.41 Errores de control: eje X y eje y

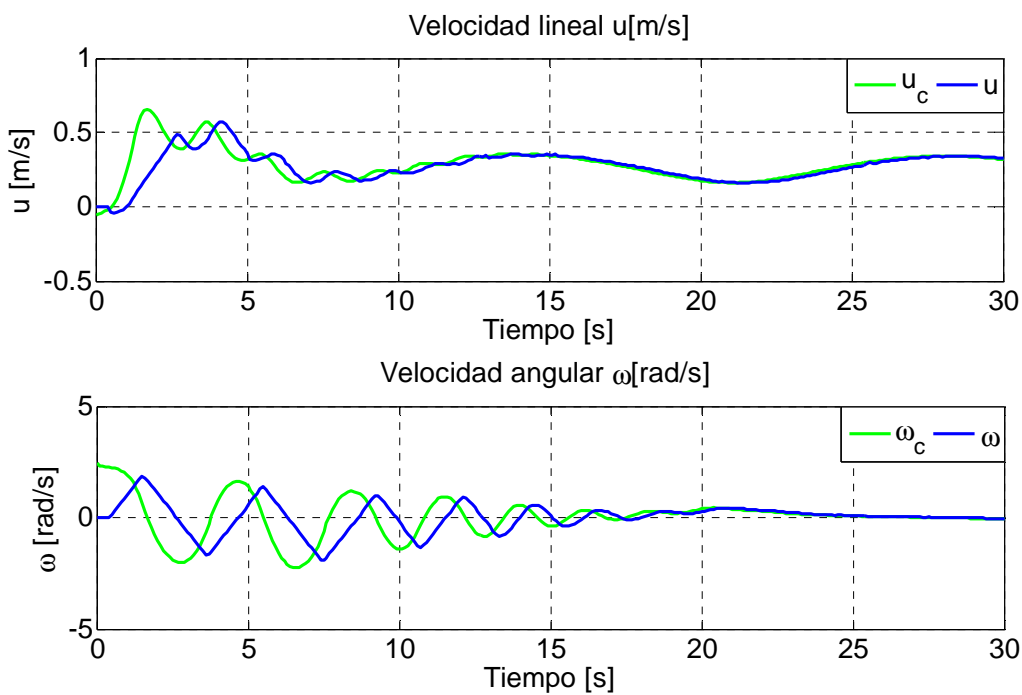


Figura 4.42 Velocidades de lineal y angular

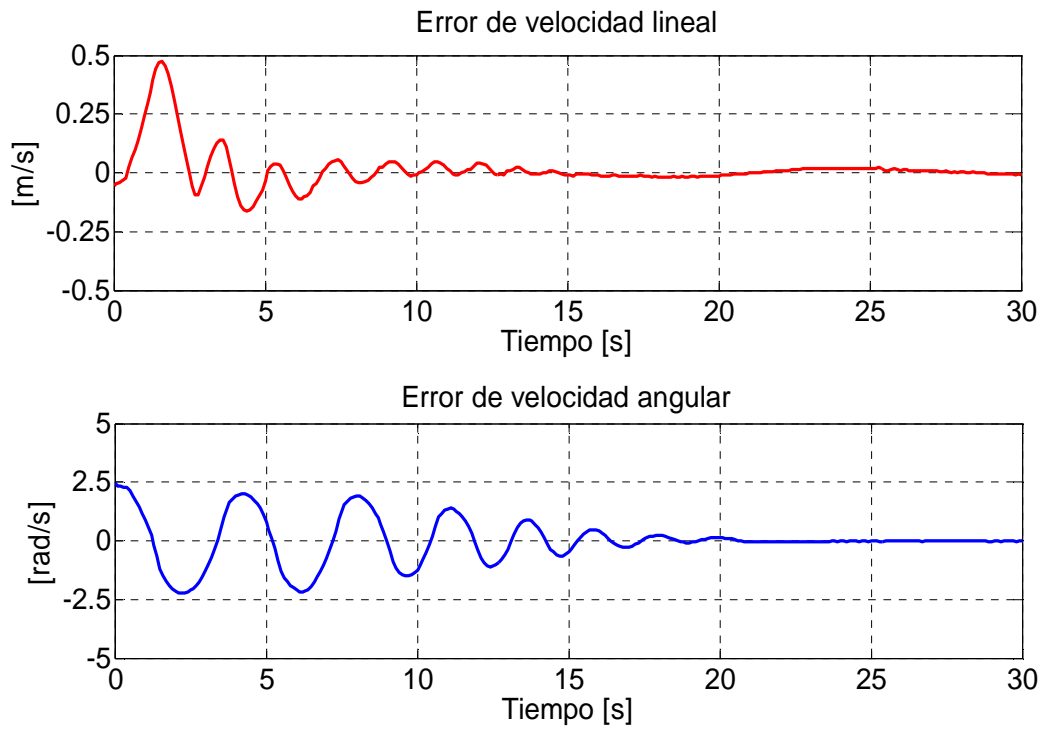


Figura 4.43 Errores de velocidades: lineal y angular

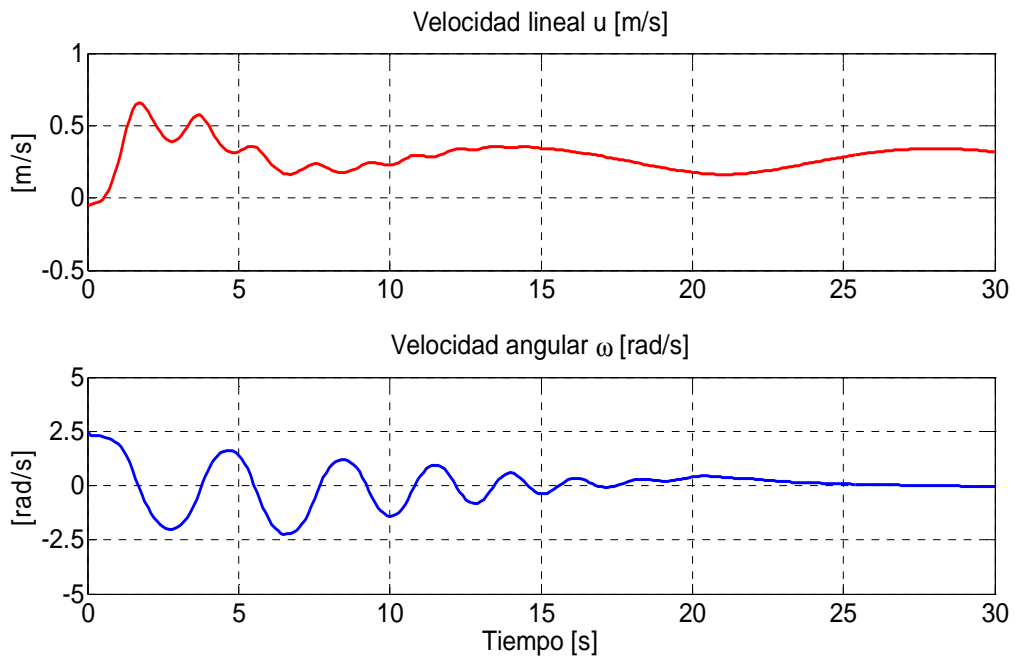


Figura 4.44 Velocidades de referencia: lineal y angular

b) Control cinemático con compensación dinámica

Para este experimento se utiliza el mismo controlador cinemático de trayectoria del experimento anterior y se le incluyó la compensación dinámica propuesta en la Sección 4.2.1.1. Los resultados obtenidos en esta prueba son presentados en las Figuras 4.45 - 4.50. El movimiento estroboscópico y la trayectoria descrita por el robot móvil se muestran en las Figura 4.45 y 4.46, respectivamente. Los errores de control $\tilde{x}(t)$ y $\tilde{y}(t)$ se indican en la Figura 4.47, donde se observa que los errores tienden a cero asintóticamente. Las velocidades cinemáticas y reales son presentadas en la Figura 4.48. Los errores de velocidad tienden a cero asintóticamente como lo muestra la Figura 4.49. La Figura 4.50, indica las acciones de control del robot móvil donde se verifica que los valores están dentro del rango predeterminado para el robot móvil.

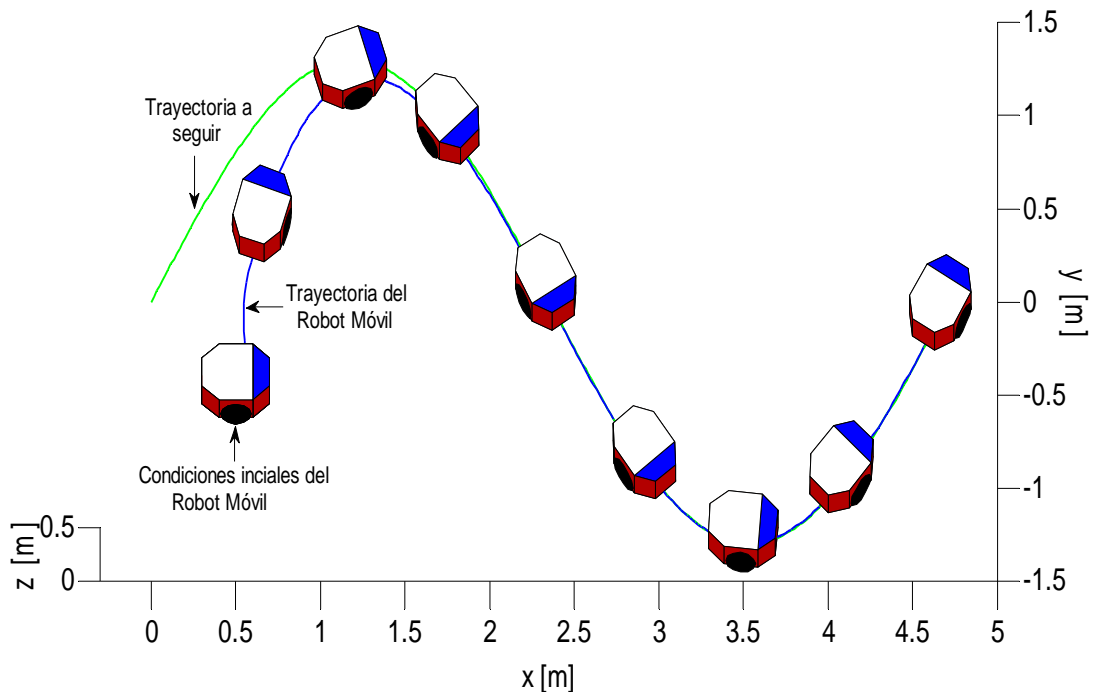


Figura 4.45 Movimiento estroboscópico

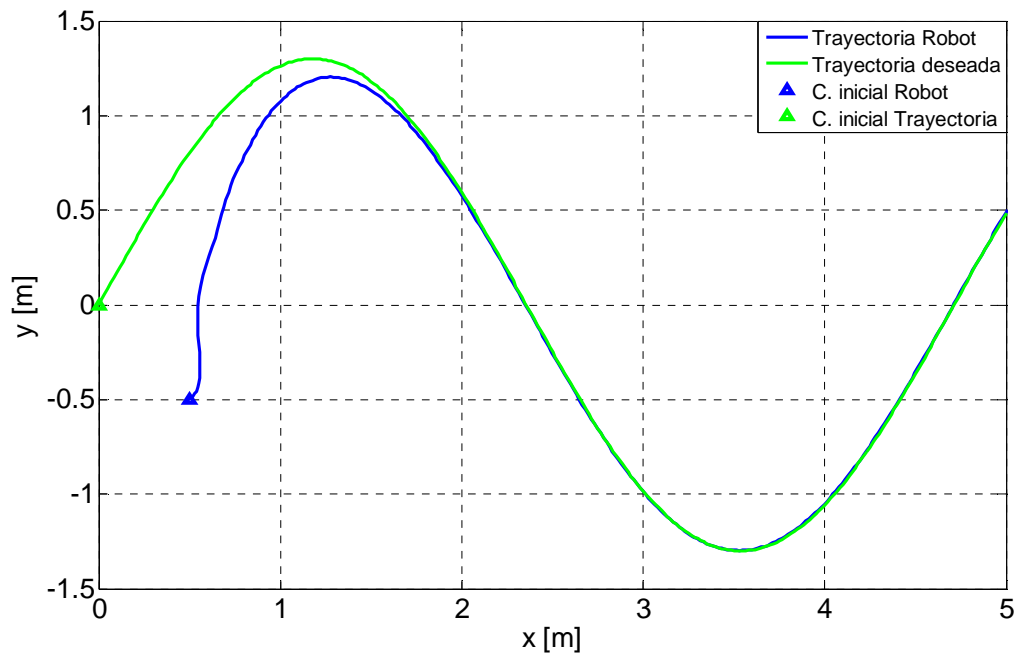


Figura 4.46 Trayectoria descrita por el robot móvil

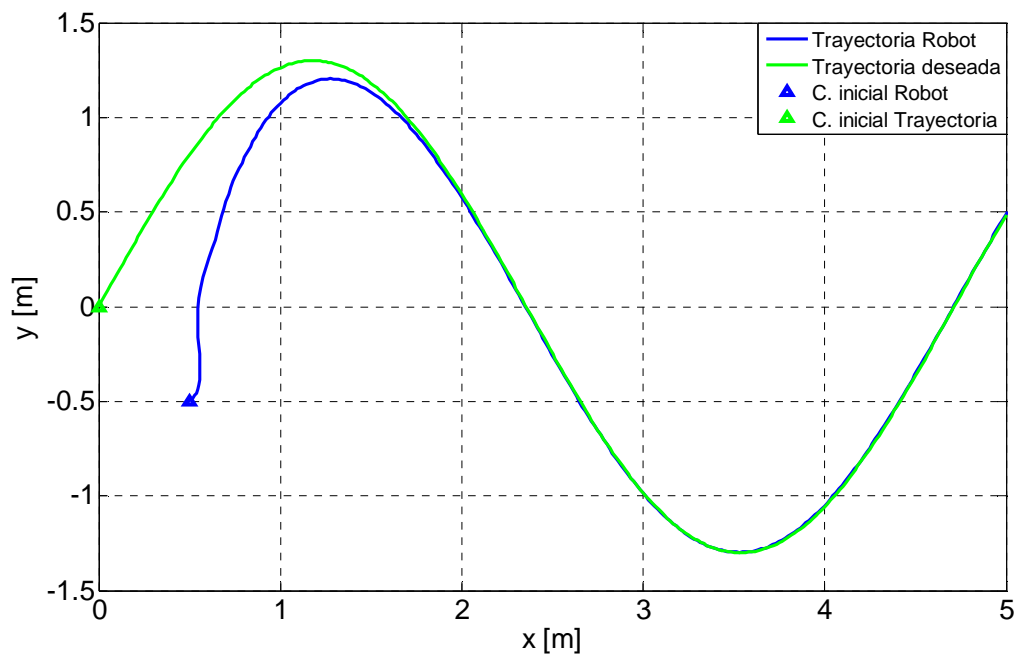


Figura 4.47 Errores de control: eje x y eje y

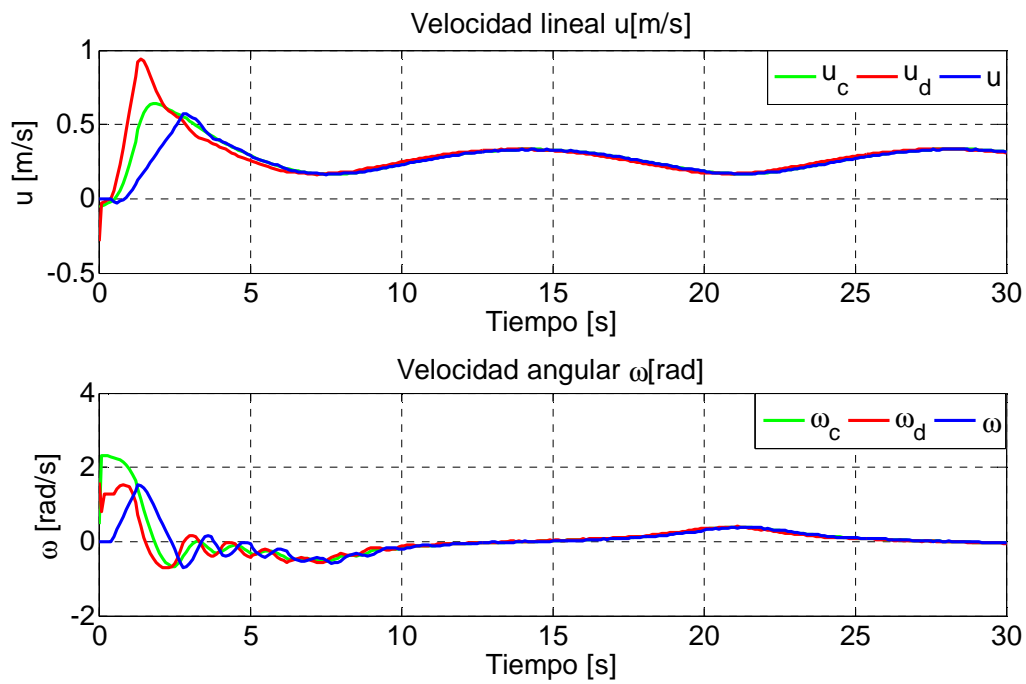


Figura 4.48 Velocidades de lineal y angular

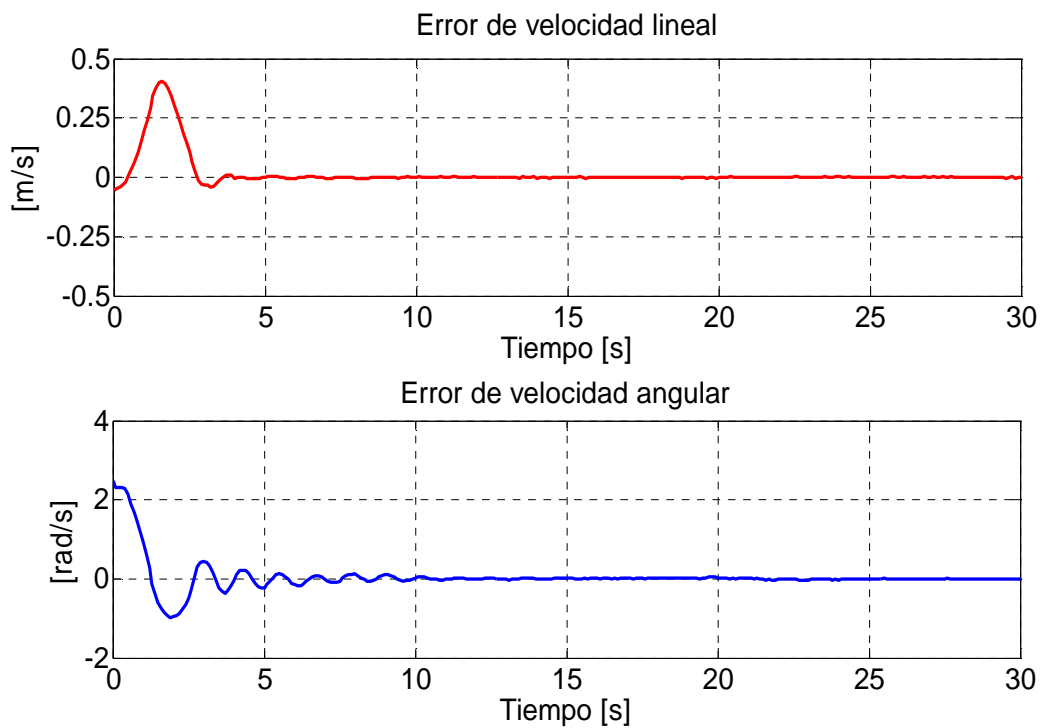


Figura 4.49 Errores de velocidades: lineal y angular

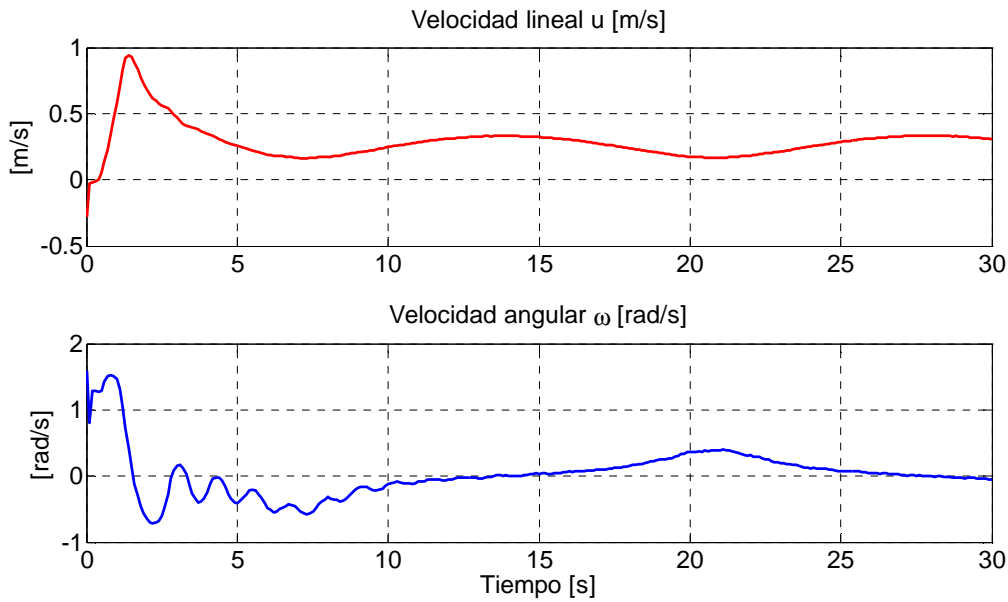


Figura 4.50 Velocidades de referencia: lineal y angular

Experimento 2

La trayectoria deseada a seguir es descrita por: $x_d = \frac{1}{4}t$ [m] y $y_d = 1.3\text{sen}\left(\frac{1}{2.7}t\right)$ [m]; y la posición inicial del robot móvil es $x_o = 0.5$ [m], $y_o = -0.5$ [m] y $\psi_o = 0$ [rad].

a) Control cinemático

Las Figuras 4.51 - 4.56 muestran los resultados obtenidos experimentalmente. La Figura 4.51 muestra el moviendo estroboscópico que realiza el robot móvil; en la Figura 4.52 se puede apreciar que el robot móvil describe una trayectoria diferente a las trayectoria deseada, consecuentemente la Figura 4.53 muestra que los errores de control $\tilde{x}(t)$ y $\tilde{y}(t)$ no tienden a cero. Con lo que se puede concluir que el objetivo de control no se cumple.

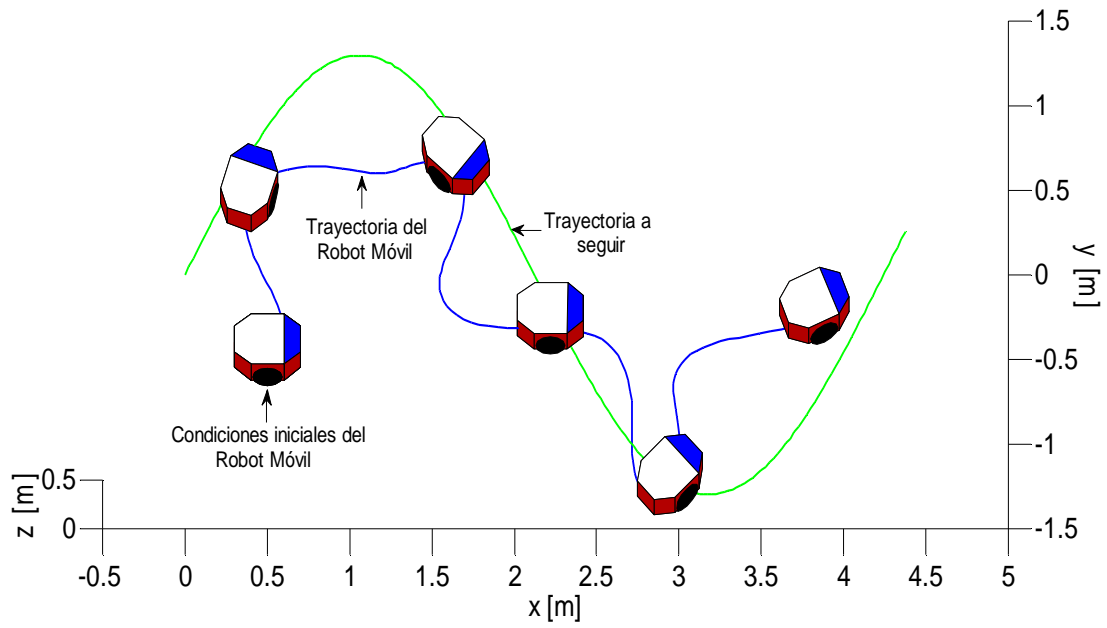


Figura 4.51 Movimiento estroboscópico

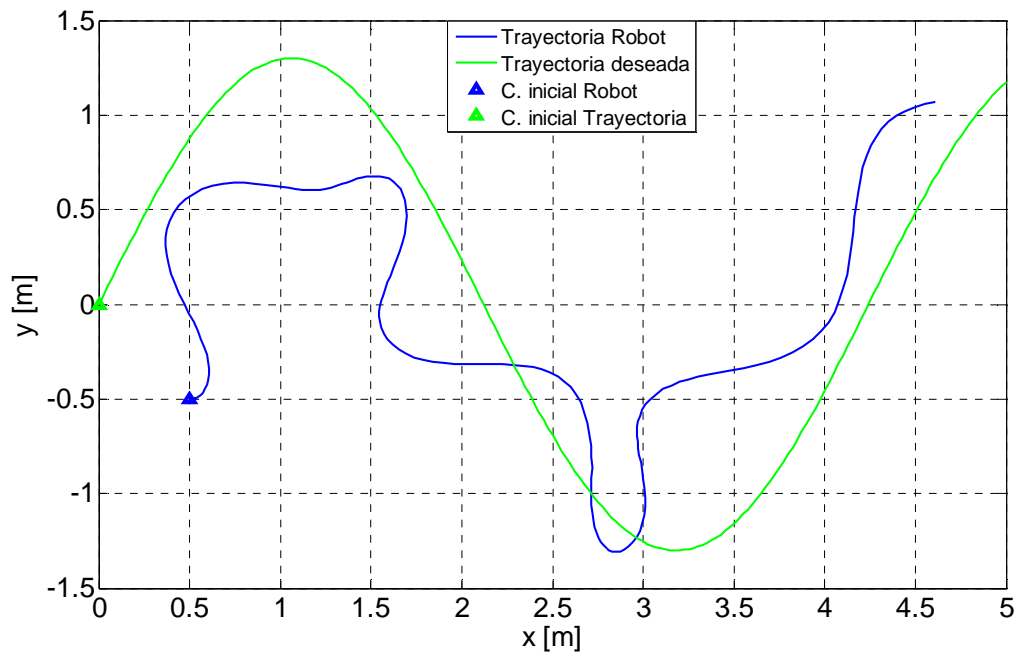


Figura 4.52 Trayectoria descrita por el robot móvil

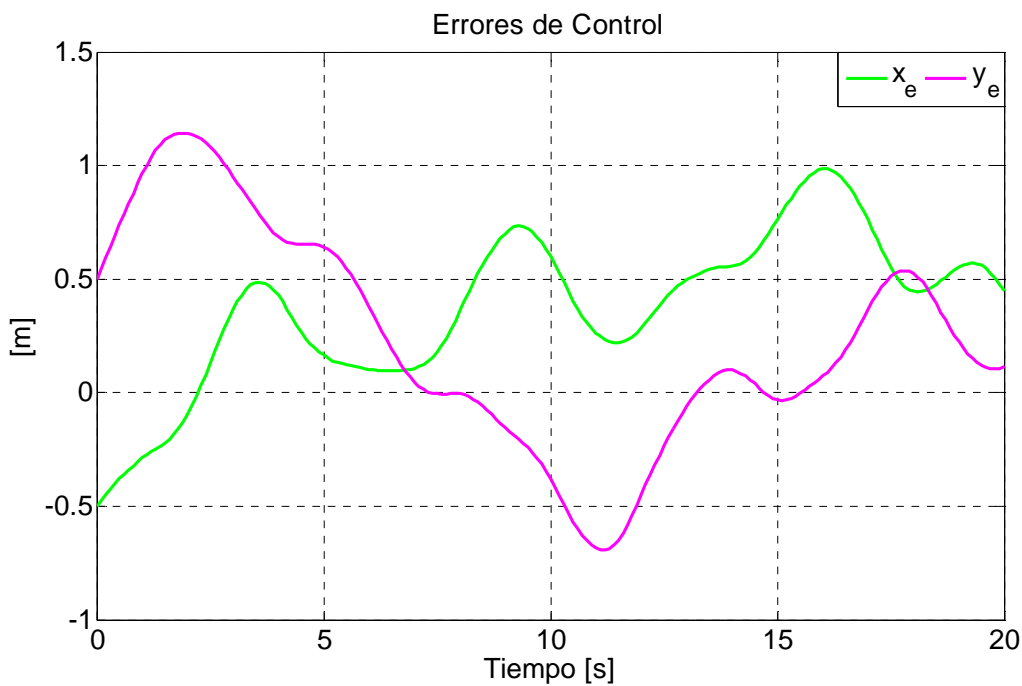


Figura 4.53 Errores de control: eje x y eje y

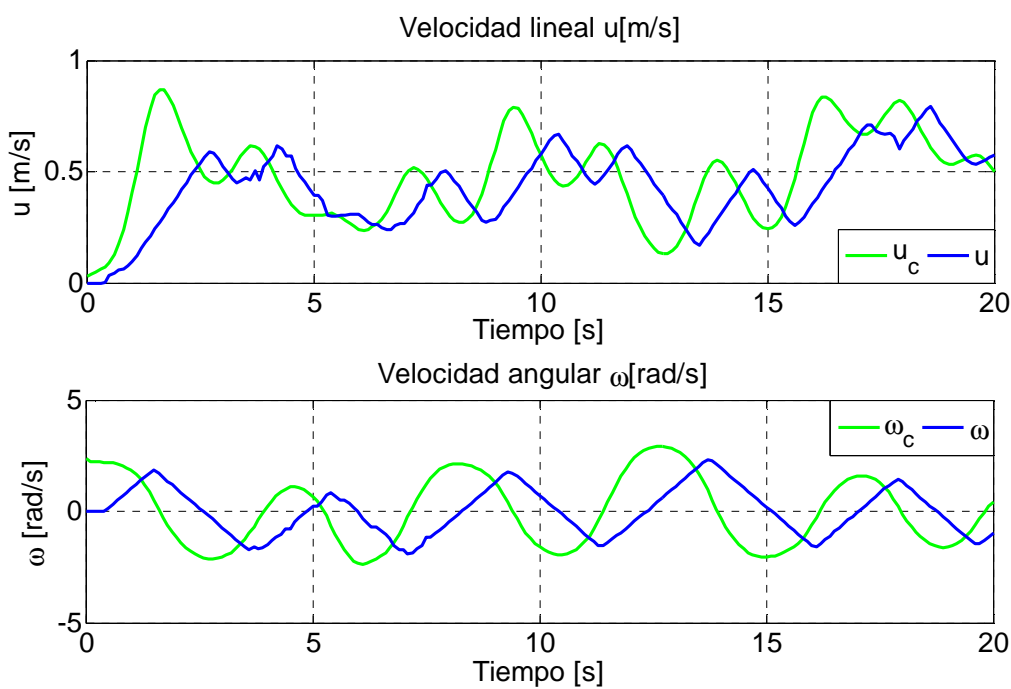


Figura 4.54 Velocidades de lineal y angular

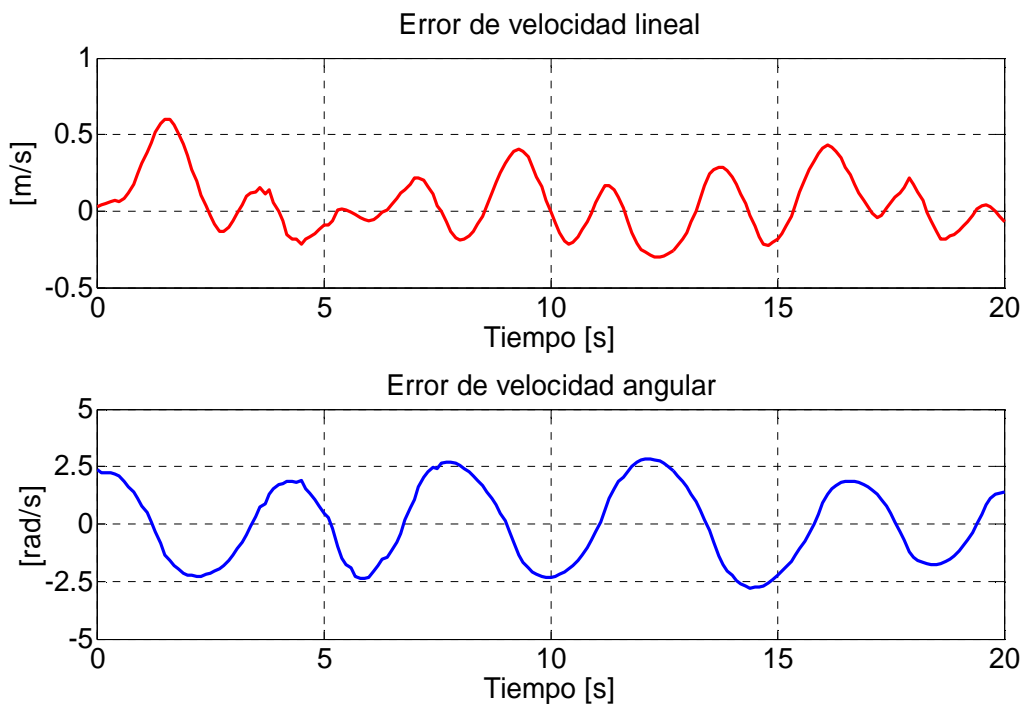


Figura 4.55 Errores de velocidades: lineal y angular

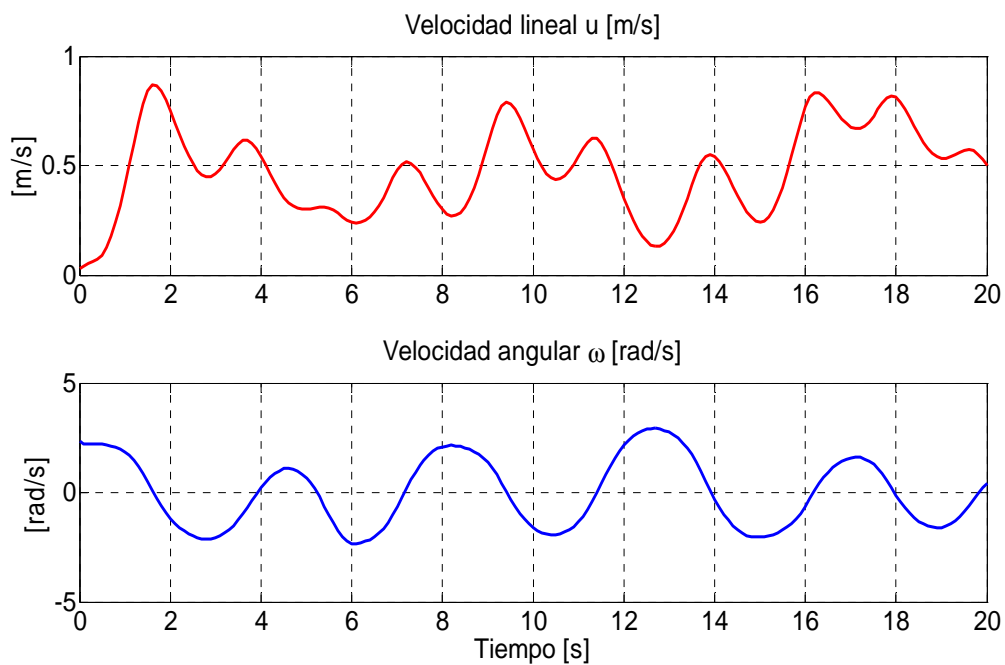


Figura 4.56 Velocidades de referencia: lineal y angular

b) Control cinemático con compensación dinámica

Para este experimento se utiliza el mismo controlador cinemático de trayectoria del experimento anterior y se le incluyó la compensación dinámica propuesta en la Sección 4.2.1.1. Los resultados obtenidos en esta prueba son presentados en las Figuras 4.57 - 4.62.

Las Figuras 4.57 y 4.58 muestran la trayectoria deseada y la trayectoria descrita por el robot donde se puede verificar que una vez que el robot alcanza la trayectoria la sigue perfectamente. Los errores de control $\tilde{x}(t)$ y $\tilde{y}(t)$ tienden a cero como se muestran en la Figura 4.59. Por otro lado, los errores de velocidad $\tilde{v}(t) = [\tilde{u} \ \tilde{\omega}]^T$ se muestran en la Figura 4.60, donde se puede comprobar que los errores tienden a cero asintóticamente.

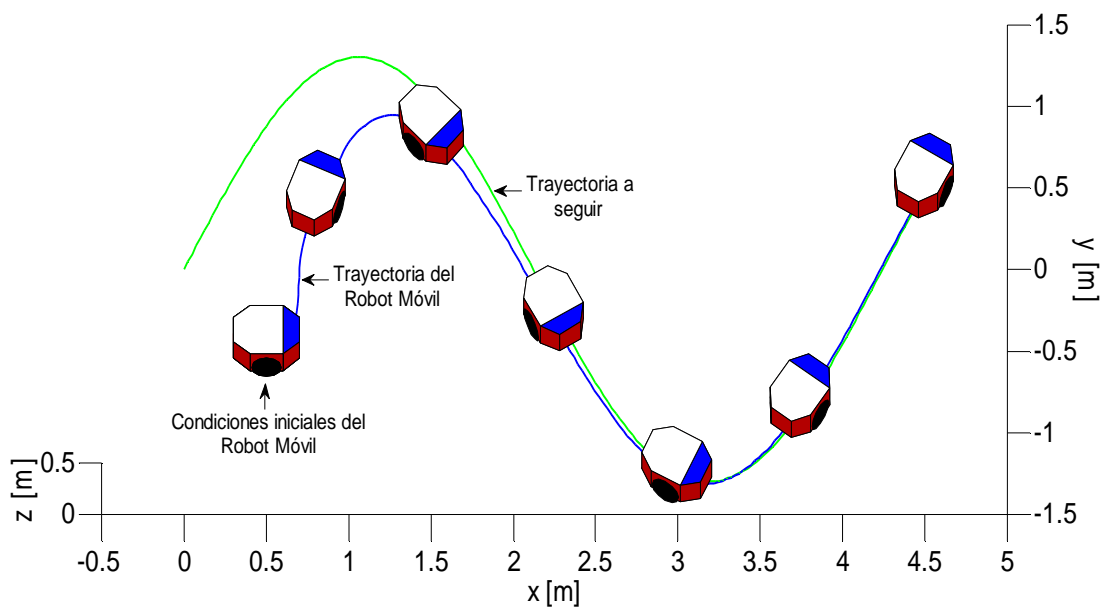


Figura 4.57 Movimiento estroboscópico

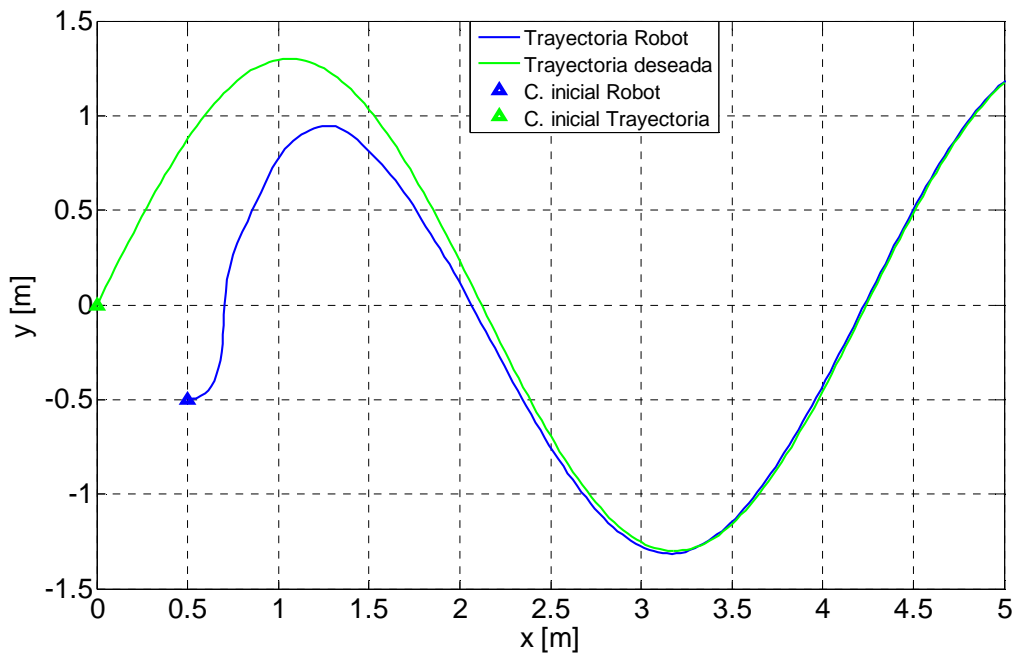


Figura 4.58 Trayectoria descrita por el robot móvil

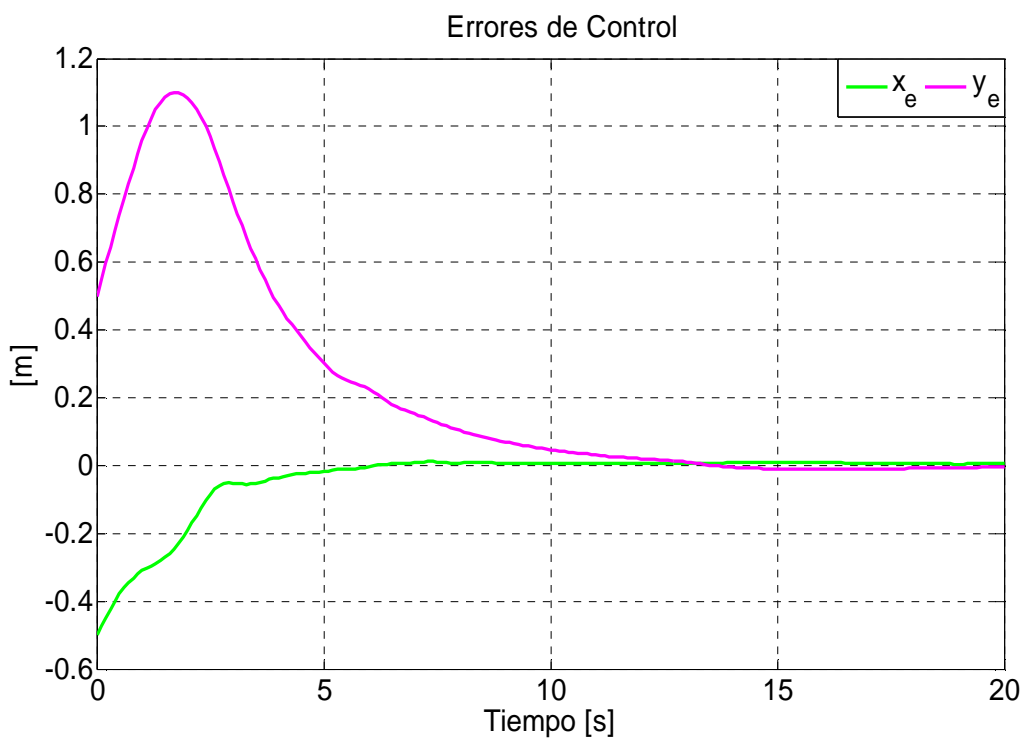


Figura 4.59 Errores de control: eje x y eje y

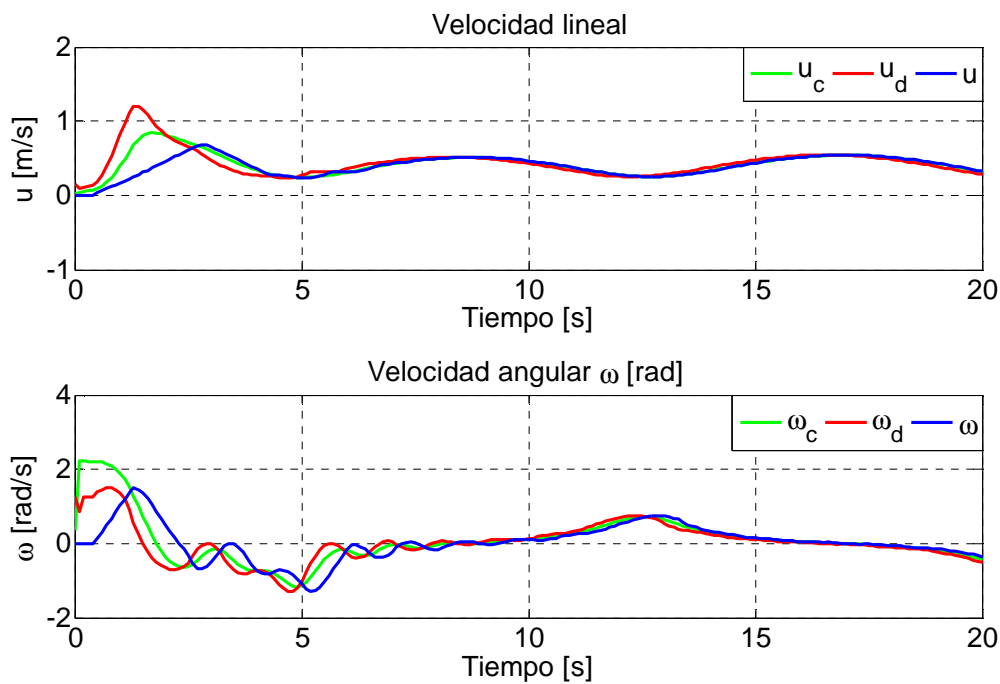


Figura 4.60 Velocidades de lineal y angular

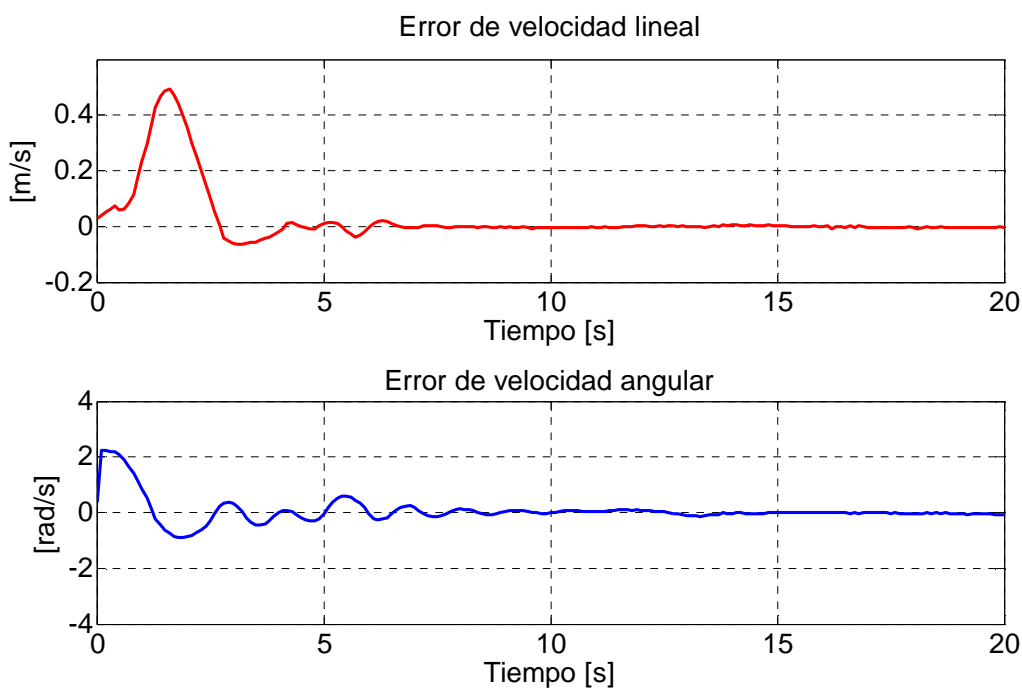


Figura 4.61 Errores de velocidades: lineal y angular

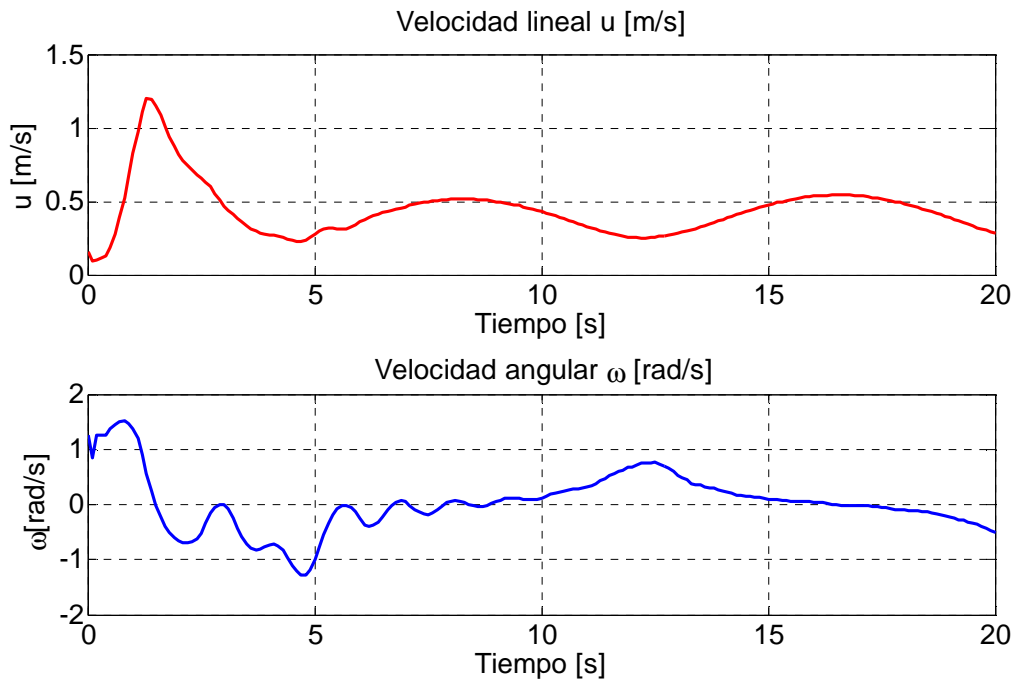


Figura 4.62 Velocidades de referencia: lineal y angular

4.2.2 SEGUIMIENTO DE TRAYECTORIA POR LINEALIZACIÓN DEL MODELO MEDIANTE REALIMENTACIÓN DE ENTRADA-SALIDA

La linealización por realimentación de entrada-salida se puede realizar tanto al modelo (3.11) como al modelo (3.20). A continuación se mostrará la linealización por realimentación del modelo (3.20). Como primer paso se define el vector de salida,

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

Considerando el modelo (3.20), se puede expresar la primera y segunda derivada temporal de la ec. (4.26) como:

$$\dot{\mathbf{h}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \cos \psi - a \omega \sin \psi \\ u \sin \psi + a \omega \cos \psi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

$$\ddot{\mathbf{h}} = \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -u \omega \sin \psi - a \omega^2 \cos \psi \\ u \omega \cos \psi - a \omega^2 \sin \psi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \psi & -a \sin \psi \\ \sin \psi & a \cos \psi \end{bmatrix} * \left(\begin{bmatrix} \frac{\bar{\theta}_3^0}{\bar{\theta}_1^0} \omega^2 & -\frac{\bar{\theta}_4^0}{\bar{\theta}_1^0} u \\ -\frac{\bar{\theta}_5^0}{\bar{\theta}_2^0} u \omega & -\frac{\bar{\theta}_6^0}{\bar{\theta}_2^0} \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{ref} \\ \omega_{ref} \end{bmatrix} \right) + \boldsymbol{\eta} \quad (4.28)$$

donde,

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \cos \psi & -a \sin \psi \\ \sin \psi & a \cos \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\delta}_u \\ \bar{\delta}_\omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\delta}_x \\ \dot{\delta}_y \end{bmatrix}. \quad (4.29)$$

A partir de la ec. (4.27) y la ec. (4.28), se puede notar que el sistema tiene un grado relativo total igual a 4. Considerando la ec. (4.28), se obtiene la siguiente entrada de control de linealización:

$$\begin{bmatrix} u_{ref} \\ \omega_{ref} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\theta}_1^0 & 0 \\ 0 & \bar{\theta}_2^0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ -\frac{1}{a} \sin \psi & \frac{1}{a} \cos \psi \end{bmatrix} * \left(v - \begin{bmatrix} -u \omega \sin \psi - a \omega^2 \cos \psi \\ u \omega \cos \psi - a \omega^2 \sin \psi \end{bmatrix} \right) - \begin{bmatrix} \frac{\bar{\theta}_3^0}{\bar{\theta}_1^0} \omega^2 & -\frac{\bar{\theta}_4^0}{\bar{\theta}_1^0} u \\ -\frac{\bar{\theta}_5^0}{\bar{\theta}_2^0} u \omega & -\frac{\bar{\theta}_6^0}{\bar{\theta}_2^0} \omega \end{bmatrix} \right) \quad (4.30)$$

donde v es la nueva entrada, la cual es definida en el diseño de control. La ec. (4.30) está restringida a un valor de a diferente de cero. Reemplazando la ec. (4.30) en la ec. (4.28), se puede expresar el sistema linealizado por realimentación de entrada-salida.

$$\ddot{\mathbf{h}} = \mathbf{v} + \boldsymbol{\eta} \quad (4.31)$$

4.2.2.1 LEY DE CONTROL DISEÑADA CONSIDERANDO LA SATURACIÓN DE LOS ACTUADORES

El control de seguimiento de trayectoria es fundamental para numerosas aplicaciones. Por ejemplo, en el mantenimiento y construcción automática de autopistas hay tareas que requieren que el robot se mueva sobre la trayectoria de una grieta (Feng y Velinsky, 1997). A continuación se propone una ley de control que contempla la saturación de los actuadores [23].

Para el análisis de la siguiente ley de control se asume $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}$ en la ec. (4.31). A continuación se propone la ley de control de seguimiento de trayectorias:

$$\begin{aligned} v_1 &= l_{11} \tanh\left(\frac{k_{11}}{l_{11}} \tilde{x}\right) + l_{21} \tanh\left(\frac{k_{21}}{l_{21}} \dot{\tilde{x}}\right) + \ddot{x}_d, \quad \tilde{x} = x_d - x \\ v_2 &= l_{12} \tanh\left(\frac{k_{12}}{l_{12}} \tilde{y}\right) + l_{22} \tanh\left(\frac{k_{22}}{l_{22}} \dot{\tilde{y}}\right) + \ddot{y}_d, \quad \tilde{y} = y_d - y \end{aligned} \quad (4.32)$$

donde k_{11} , k_{12} , k_{21} y k_{22} son ganancias mayores que cero; l_{11} , l_{12} , l_{21} y l_{22} son constantes mayores que cero; $[x_d \quad y_d]^T$ es la posición deseada; y $[v_1 \quad v_2]^T = \mathbf{v}$. Reemplazando (4.32) en (4.31), se tiene

$$\begin{aligned} 0 &= l_{11} \tanh\left(\frac{k_{11}}{l_{11}} \tilde{x}\right) + l_{21} \tanh\left(\frac{k_{21}}{l_{21}} \dot{\tilde{x}}\right) + \ddot{x}_d \\ 0 &= l_{12} \tanh\left(\frac{k_{12}}{l_{12}} \tilde{y}\right) + l_{22} \tanh\left(\frac{k_{22}}{l_{22}} \dot{\tilde{y}}\right) + \ddot{y}_d \end{aligned} \quad (4.33)$$

Con el fin de demostrar la estabilidad de la primera ec. (4.33), se considera la siguiente función candidata de Lyapunov y su derivada temporal,

$$V(\tilde{x}, \dot{\tilde{x}}) = \frac{l_{11}^2}{k_{11}} \ln\left(\cosh\left(\frac{k_{11}}{l_{11}} \tilde{x}\right)\right) + \frac{1}{2} \dot{\tilde{x}}^2 > 0$$

$$\dot{V}(\tilde{x}, \dot{\tilde{x}}) = l_{11} \tanh\left(\frac{k_{11}}{l_{11}} \tilde{x}\right) \dot{\tilde{x}} + \dot{\tilde{x}} \ddot{\tilde{x}} \quad (4.34)$$

Reemplazando la primera ec. (4.33) en la ec. (4.34) se tiene:

$$\dot{V}(\tilde{x}, \dot{\tilde{x}}) = -l_{21} \tanh\left(\frac{k_{21}}{l_{21}} \dot{\tilde{x}}\right) \dot{\tilde{x}} \leq 0 \quad (4.35)$$

Sea el conjunto $\Omega = \{(\tilde{x}, \dot{\tilde{x}}) : \dot{V}(\tilde{x}, \dot{\tilde{x}}) = 0\}$. Luego, el mayor conjunto invariante de Ω es $\{(0,0)\}$. Entonces, por el teorema de LaSalle, $\tilde{x} \rightarrow 0, \dot{\tilde{x}} \rightarrow 0$ globalmente con $t \rightarrow \infty$. De manera análoga se puede demostrar que $\tilde{y} \rightarrow 0, \dot{\tilde{y}} \rightarrow 0$ globalmente con $t \rightarrow \infty$.

Las constantes l_{11}, l_{12}, l_{21} y l_{22} son los máximos valores de $\left|l_{11} \tanh\left(\frac{k_{11}\tilde{x}}{l_{11}}\right)\right|, \left|l_{12} \tanh\left(\frac{k_{12}\tilde{y}}{l_{12}}\right)\right|, \left|l_{21} \tanh\left(\frac{k_{21}\dot{\tilde{x}}}{l_{21}}\right)\right|, \left|l_{22} \tanh\left(\frac{k_{22}\dot{\tilde{y}}}{l_{22}}\right)\right|$, respectivamente. De esta forma se limita la influencia de $\tilde{x}, \tilde{y}, \dot{\tilde{x}}, \dot{\tilde{y}}$ en la ley de control de la ec. (4.32), y así indirectamente se satura a las velocidades de control.

4.2.2.2 RESULTADOS POR SIMULACIÓN

Para el control propuesto se realiza dos pruebas de simulación: seguimiento de trayectoria y seguimiento de trayectoria con evasión de obstáculos. Los parámetros que se utilizan son los identificados del modelo dinámico del robot Pioneer P3-AT citado en la ec. (3.40).

$$k_{11} = 1.3, k_{12} = 1.3, k_{21} = 2, k_{22} = 2$$

$$l_{11} = 0.19, l_{12} = 0.15, l_{21} = 0.17, l_{22} = 0.13$$

Estos parámetros del controlador se eligieron cuidando que las velocidades y aceleraciones del robot no se saturan.

a) **Seguimiento de trayectoria**

En la primera simulación el objetivo es seguir una trayectoria circular. La Figura 4.63 muestra el movimiento estroboscópico del robot móvil, y la evolución de los errores de control $\tilde{x}(t)$ y $\tilde{y}(t)$ se muestran en la Figura 4.64, con lo cual se concluye que estos resultados validan los aspectos teóricos del controlador.

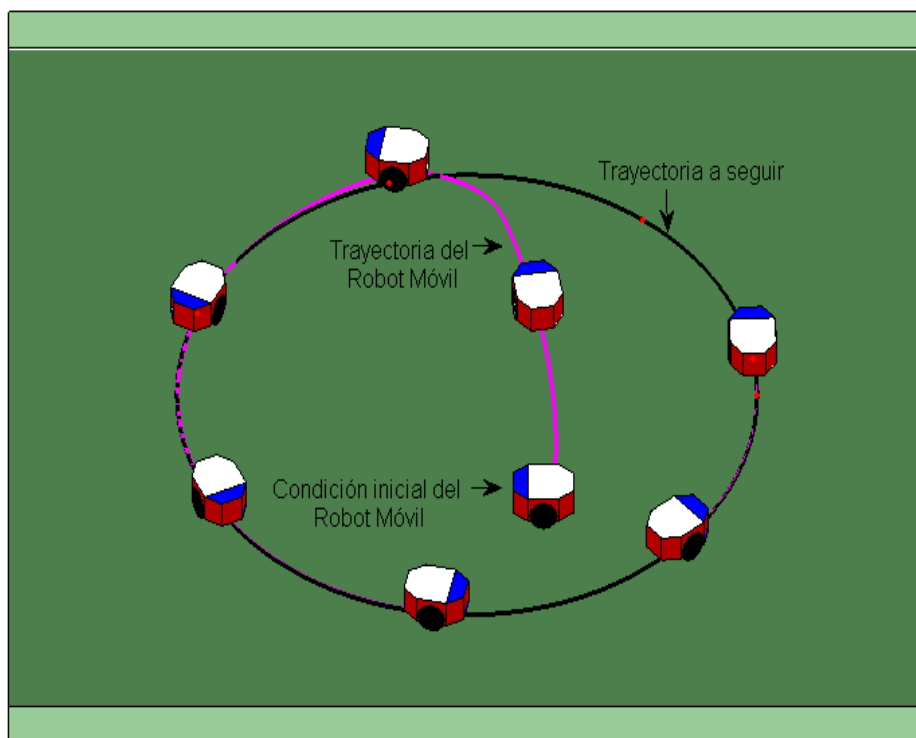


Figura 4.63 Movimiento estroboscópico

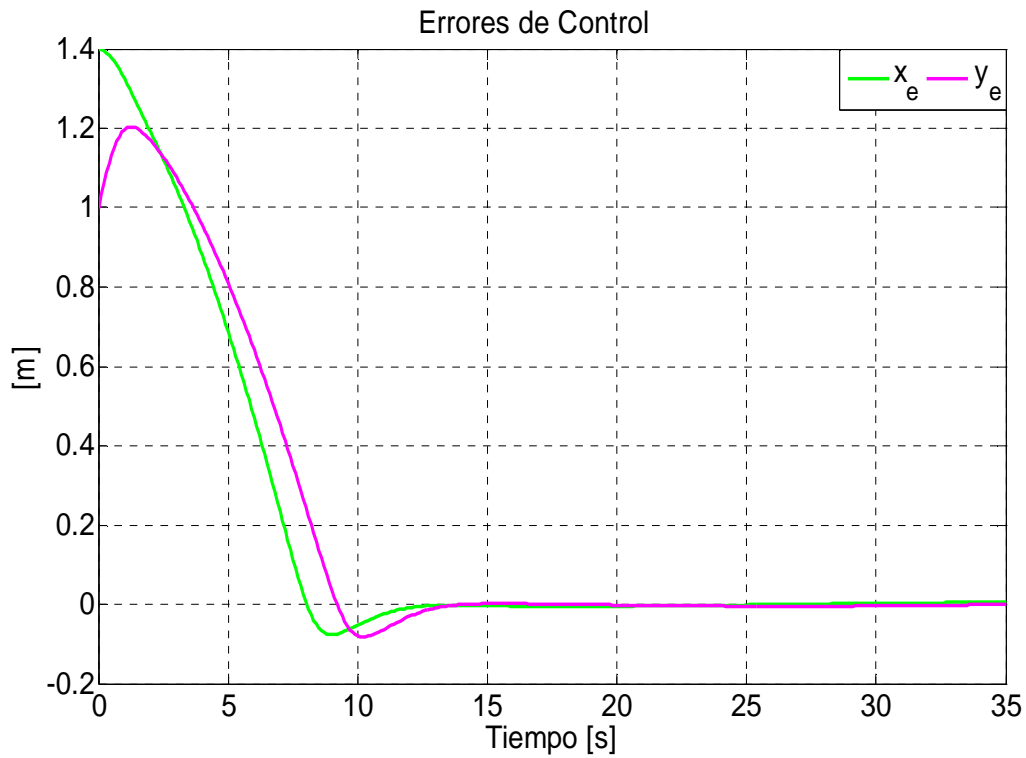


Figura 4.64 Errores de control: $\tilde{x}(t)$ y $\tilde{y}(t)$.

b) **Seguimiento de trayectoria con evasión de obstáculos**

En esta simulación se realizó el seguimiento de trayectoria en la cual se encuentra un obstáculo que debe ser evitado por el robot móvil.

En las Figuras 4.65 y 4.66 se muestra el movimiento estroboscópico del robot móvil y la evolución de los errores de control $\tilde{x}(t)$ y $\tilde{y}(t)$, donde se puede observar que los errores tienden asintóticamente a cero. La Figura 4.67 muestra las componentes de las fuerzas ficticias.

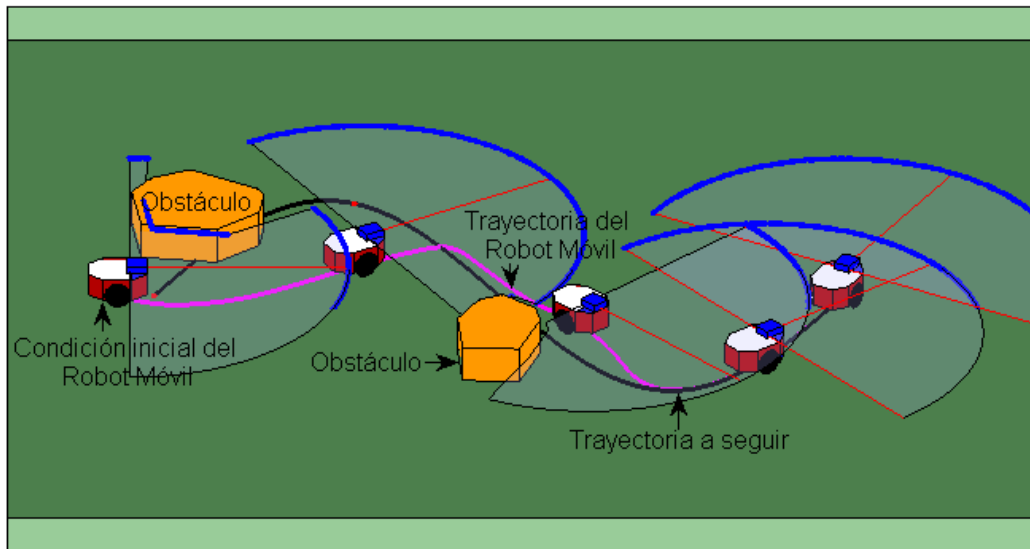


Figura 4.65 Movimiento estroboscópico.

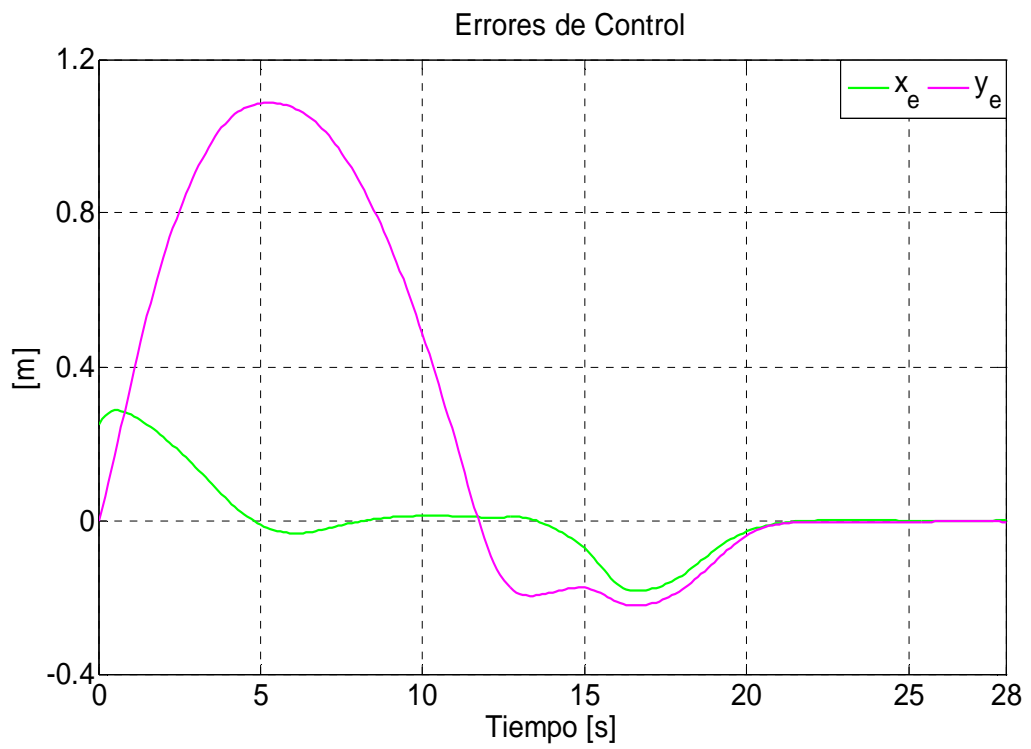


Figura 4.66 Errores de control: $\tilde{x}(t)$ y $\tilde{y}(t)$.

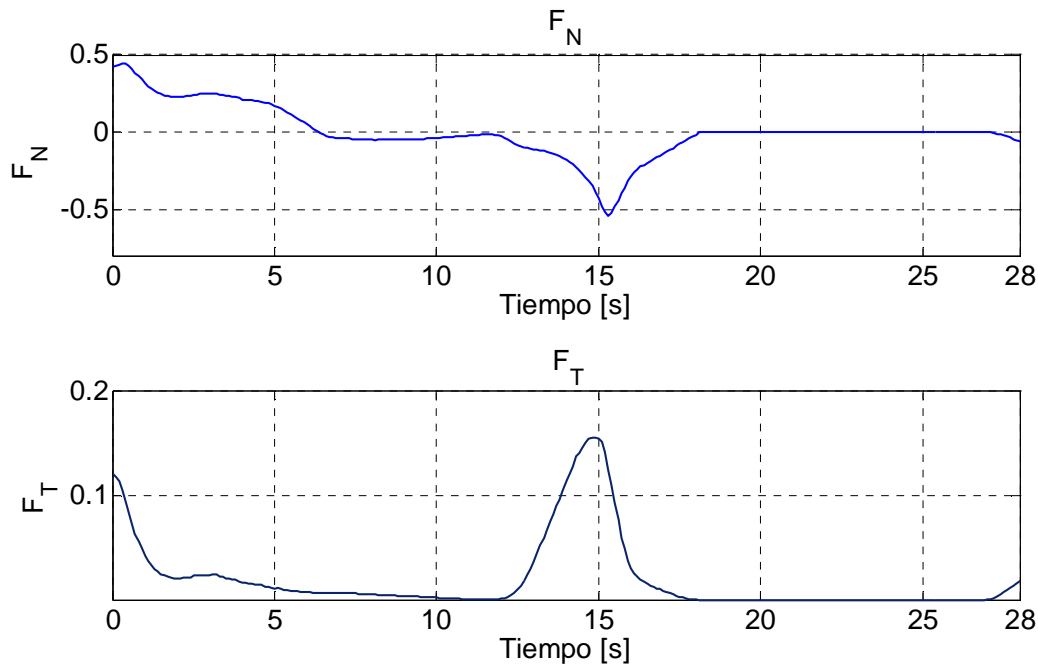


Figura 4.67 Fuerzas ficticias: Normal y Tangencial.

4.2.2.3 RESULTADOS EXPERIMENTALES

En la experimentación se utilizó un robot Pioneer P3-AT. Los parámetros identificados del modelo dinámico del robot se muestran en la ecuación (3.40), con dichos parámetros se implementó el controlador que fue diseñado considerando la saturación de los actuadores (4.32), se tomó como parámetros del controlador los siguientes valores

$$k_{11} = 1, k_{12} = 1, k_{21} = 2, k_{22} = 2$$

$$l_{11} = 0.12, l_{12} = 0.12, l_{21} = 0.1, l_{22} = 0.1$$

Estos parámetros del controlador se eligieron cuidando que las velocidades y aceleraciones del robot no se saturen. Se realizan varios experimentos para evaluar el desempeño del algoritmo de control propuesto.

Experimento 1

El primer experimento es seguir una trayectoria senoidal. Los resultados de la experimentación se muestran en las Figuras 4.68 – 4.71. La trayectoria descrita por el robot es presentada en las Figuras 4.68 y 4.69. Los errores de control $\tilde{x}(t)$ y $\tilde{y}(t)$ se muestran en la Figura 4.70, donde se puede observar que los errores tienden asintóticamente a cero. Las velocidades de referencia lineal y angular son presentadas en la Figura 4.71. Estos resultados validan los aspectos teóricos del controlador.

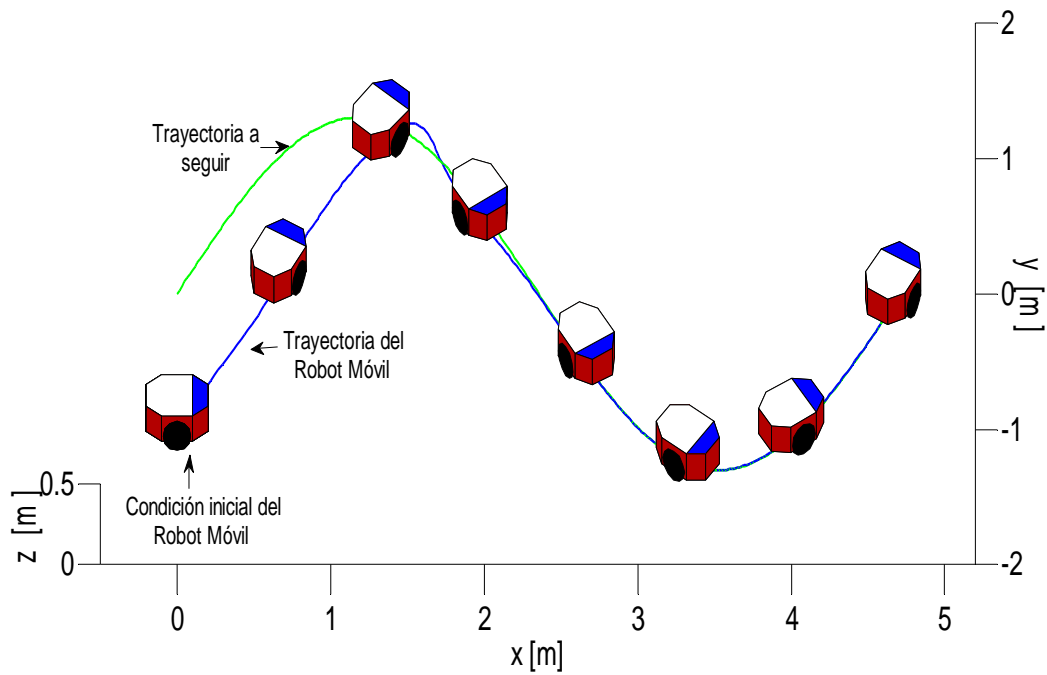


Figura 4.68 Movimiento estroboscópico

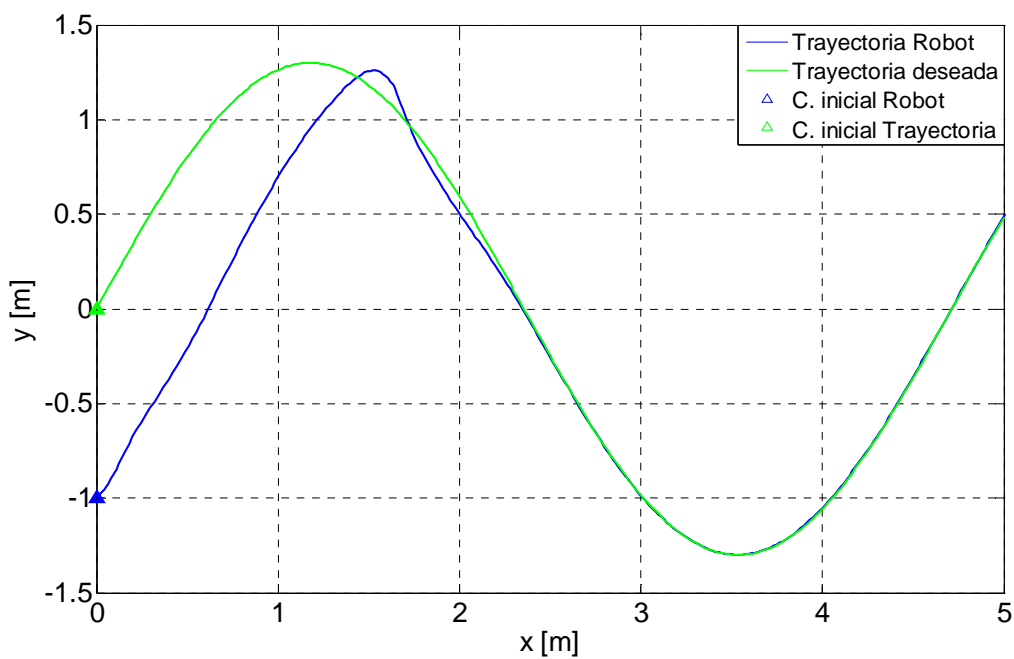


Figura 4.69 Trayectoria descrita por el robot móvil

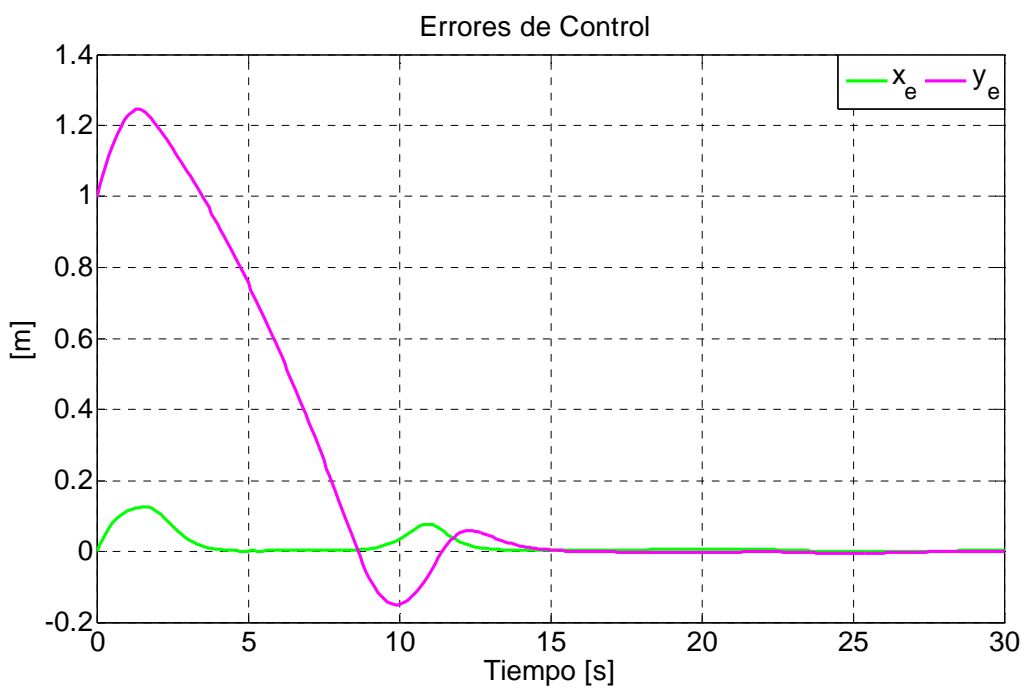


Figura 4.70 Errores de control: $\tilde{x}(t)$ y $\tilde{y}(t)$.

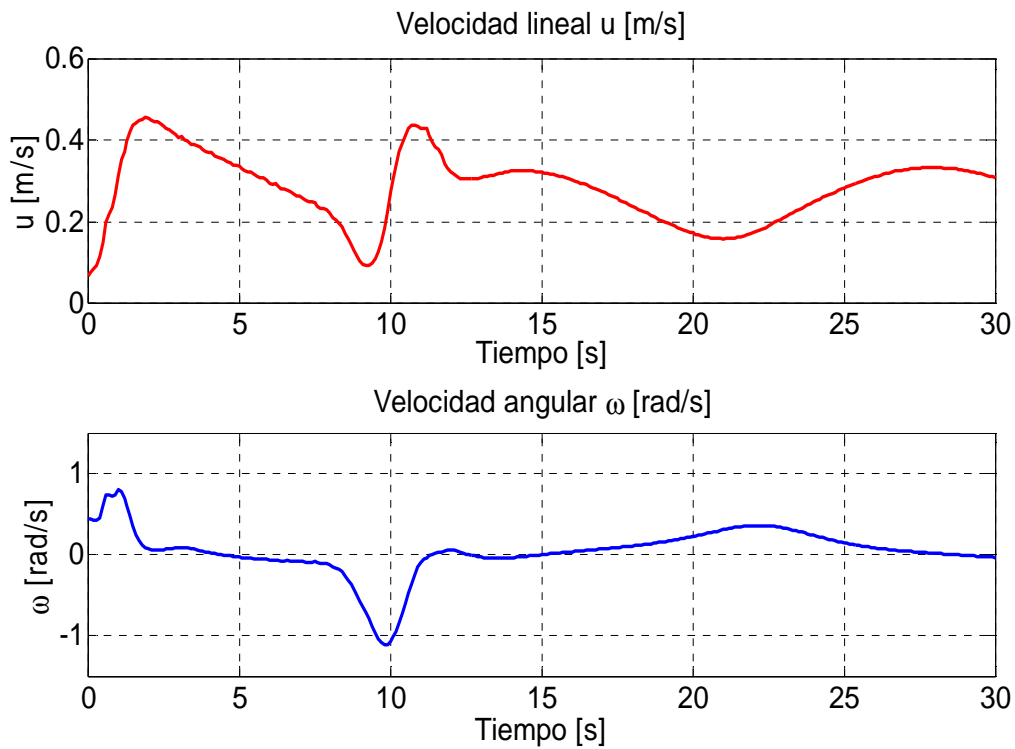


Figura 4.71 Velocidades de referencia: lineal y angular

Experimento 2

El segundo experimento es seguir una trayectoria circular. Los resultados de la experimentación se muestran en las Figuras 4.72 – 4.75. La trayectoria descrita por el robot es presentada en las Figuras 4.72 y 4.73. Los errores de control se muestran en la Figura 4.74, donde se puede observar que los errores tienden asintóticamente a cero. Las velocidades de referencia lineal y angular son presentadas en la Figura 4.75.

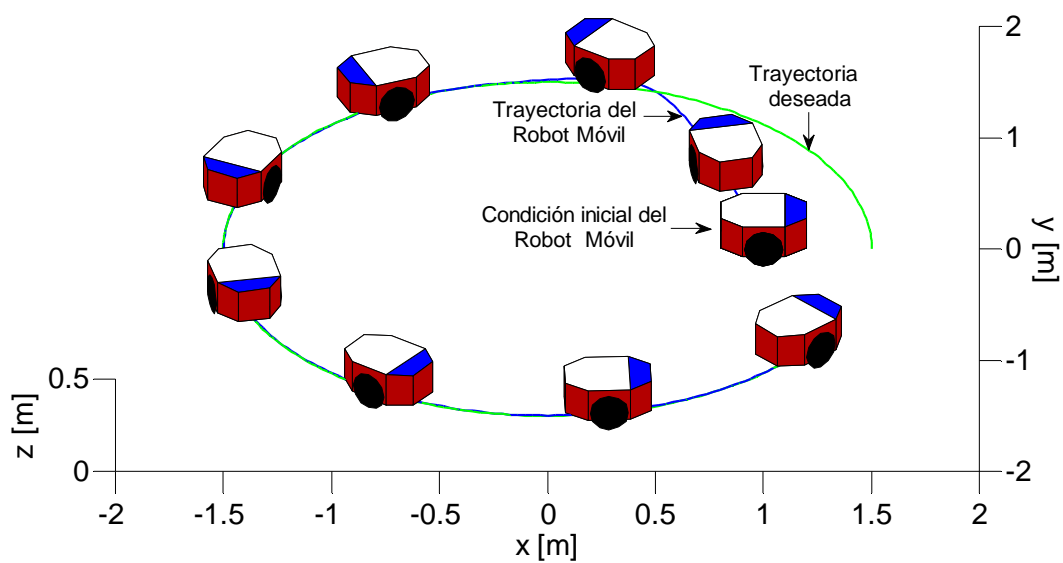


Figura 4.72 Movimiento estroboscópico, (graficado de $0 \leq t \leq 25$ [s])

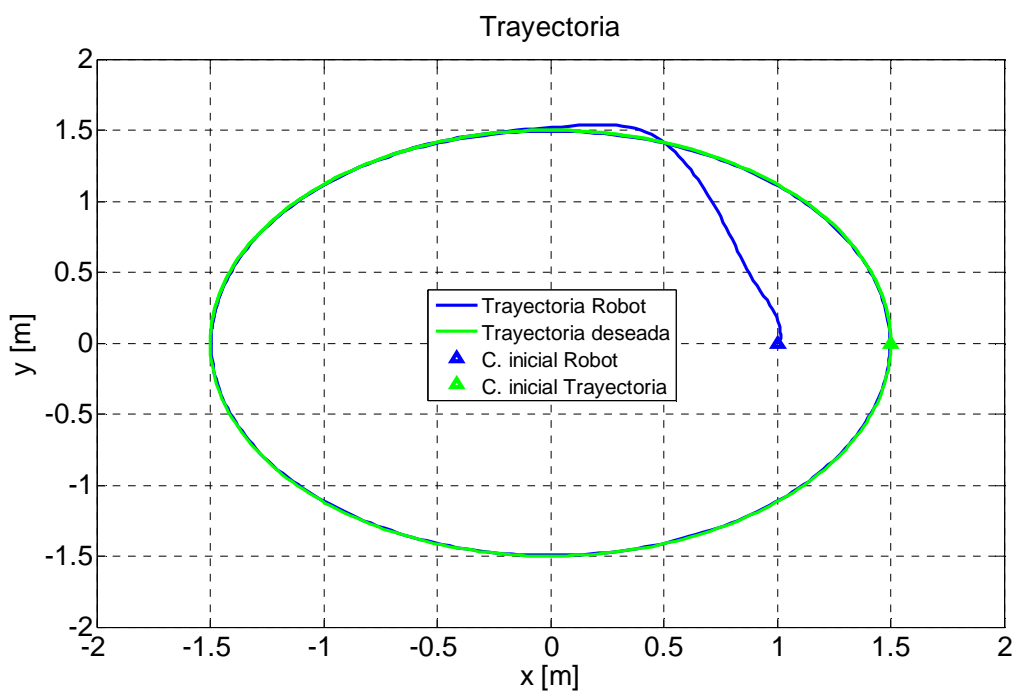


Figura 4.73 Trayectoria descrita por el robot móvil

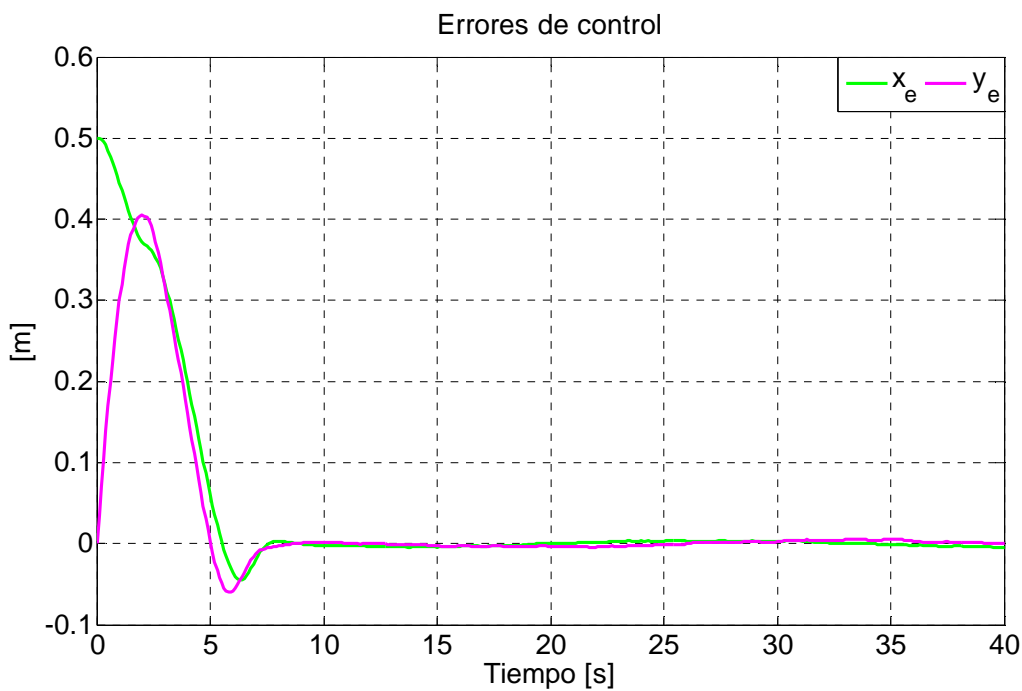


Figura 4.74 Errores de control: $\tilde{x}(t)$ y $\tilde{y}(t)$.

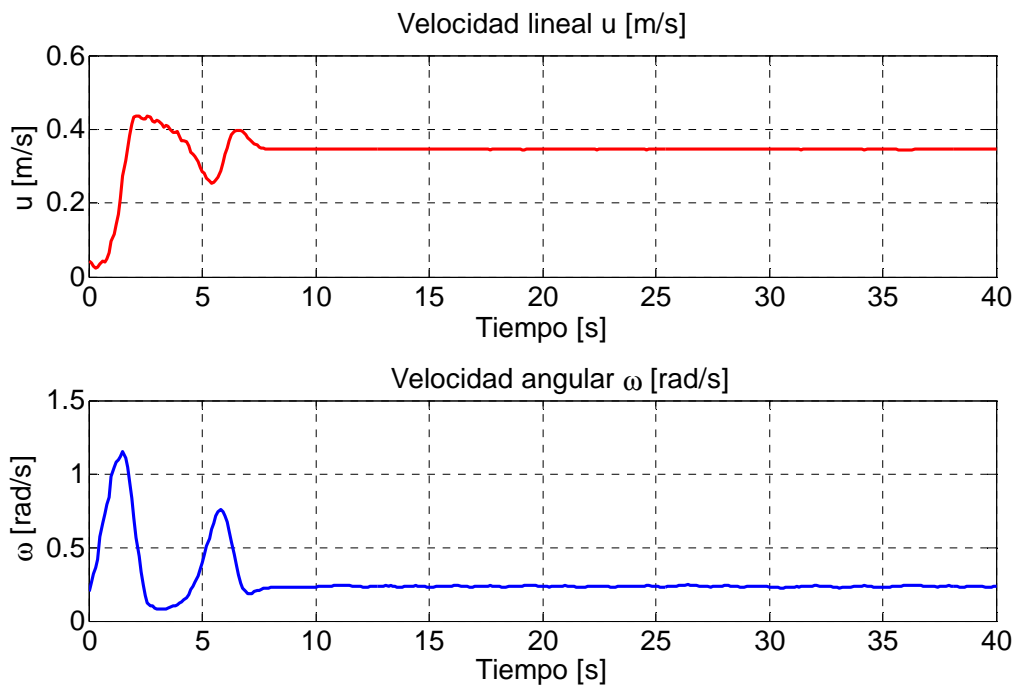


Figura 4.75 Velocidades de referencia: lineal y angular

Experimento 3

En el tercer experimento se realizan dos pruebas que consiste en seguir una trayectoria senoidal en la cual se encuentran obstáculos para ser evitados por el robot móvil. El controlador propuesto fue implementado en el Robot PIONEER P3-AT en el cual se monta un sensor laser SICK (como se muestra en la Figura 4.20).

Los resultados de la primera prueba experimental se muestran en las Figuras 4.76 – 4.79. La trayectoria descrita por el robot es presentada en la Figura 4.76. Los errores de control se muestran en la Figura 4.77, donde se puede observar que los errores tienden asintóticamente a cero. En la Figura 4.78 se muestra las componentes de las fuerzas ficticias. Las velocidades de referencia lineal y angular son presentadas en la Figura 4.79.

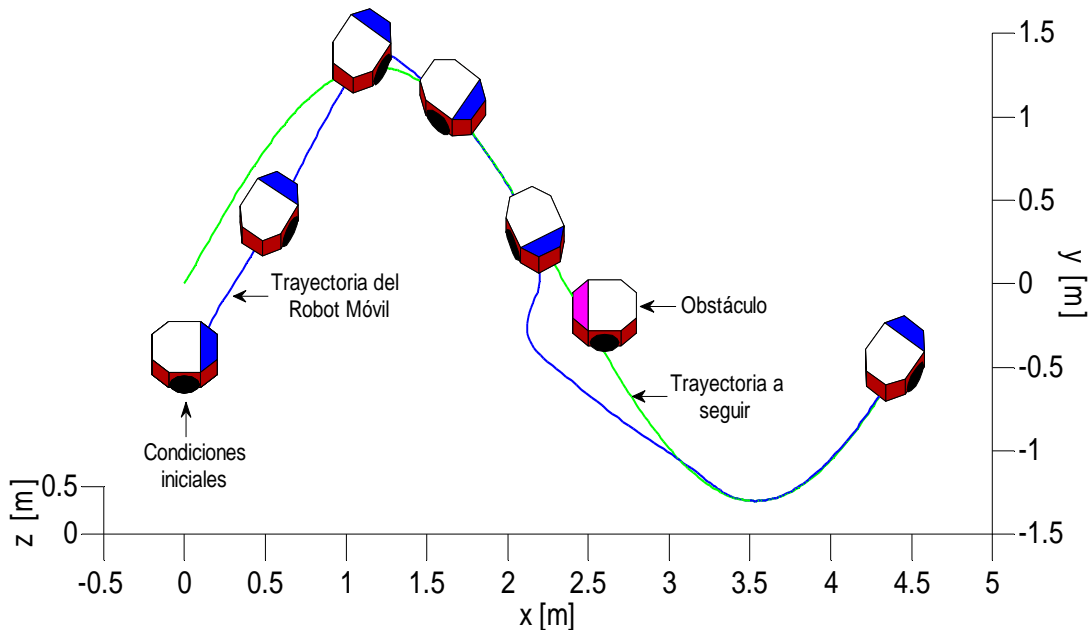


Figura 4.76 Movimiento estroboscópico

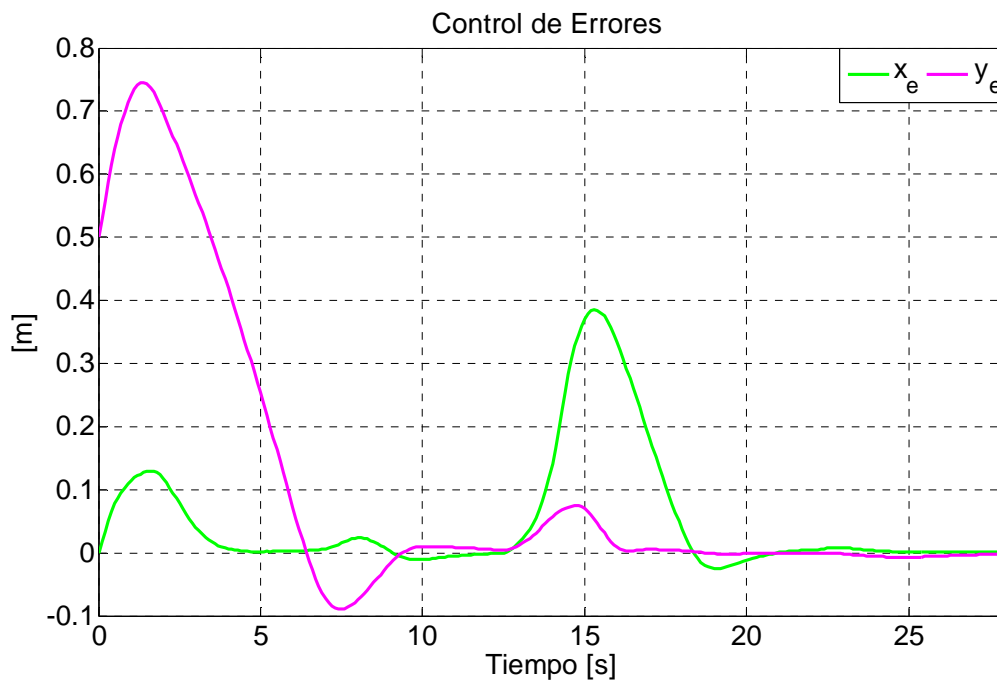


Figura 4.77 Errores de control: eje X y eje y

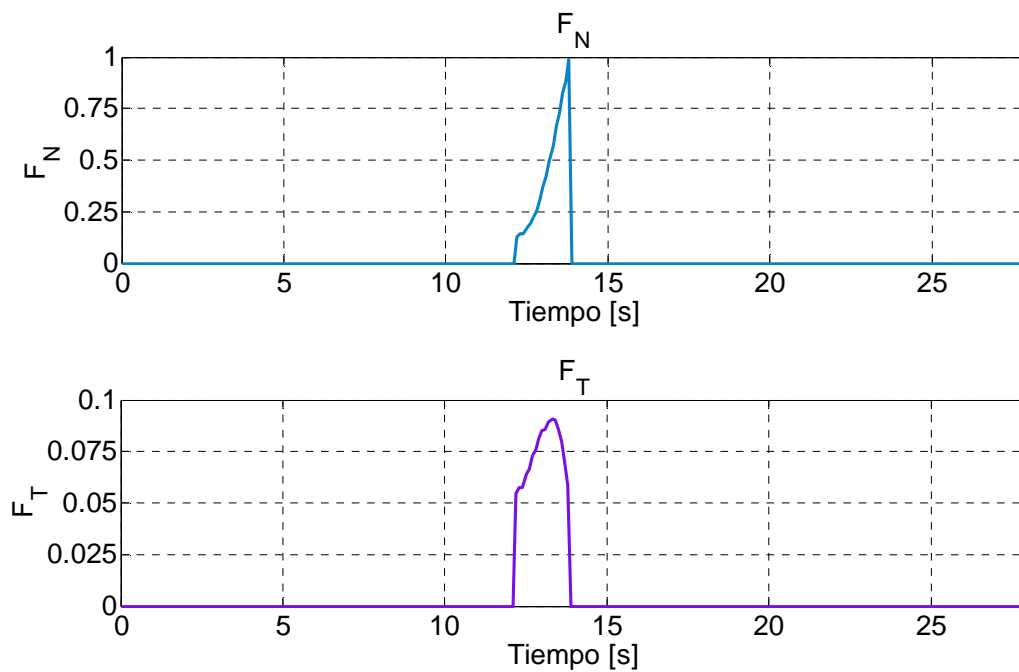


Figura 4.78 Fuerzas ficticias: Normal y Tangencial.

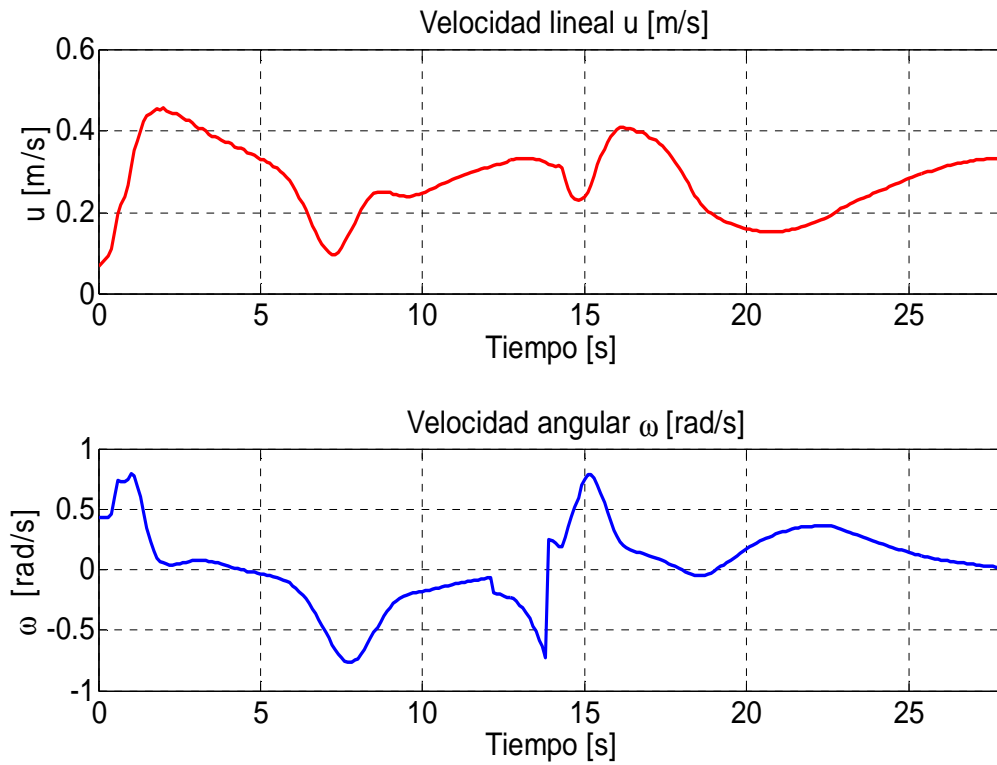


Figura 4.79 Velocidades de referencia: velocidad lineal y velocidad angular

En la segunda prueba se coloca dos obstáculos para ser evitados por el robot. Los resultados de esta prueba experimental se muestran en las Figuras 4.80 – 4.83. La trayectoria descrita por el robot es presentada en la Figura 4.80. Los errores de control se muestran en la Figura 4.81, donde se puede observar que los errores tienden asintóticamente a cero una vez evitado los obstáculos. Las componentes de la fuerza ficticia se muestran en la Figura 4.82. Las velocidades de referencia lineal y angular son presentadas en la Figura 4.83.

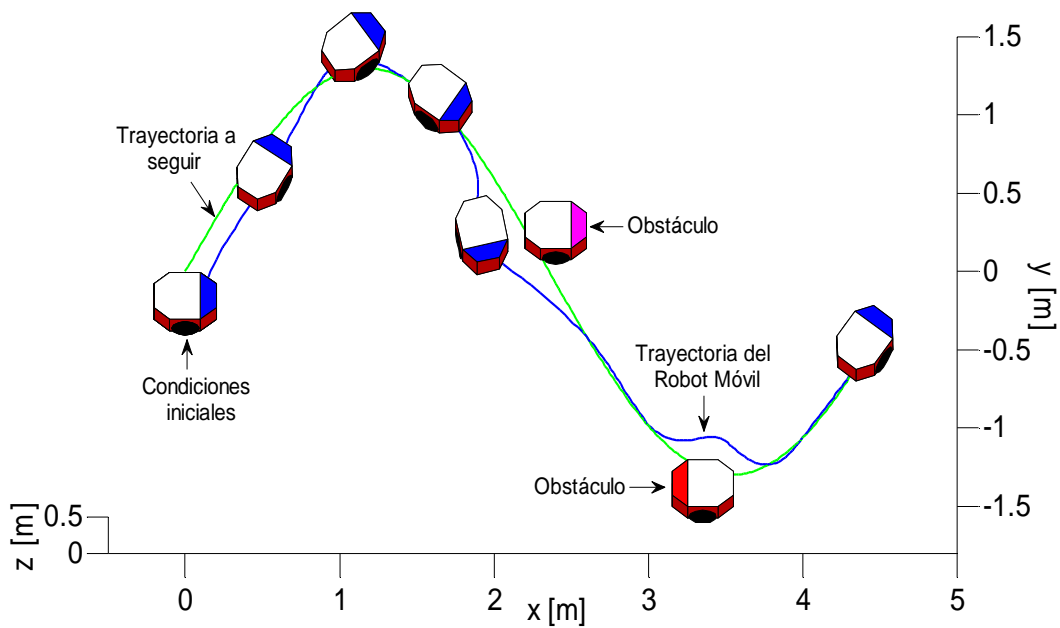


Figura 4.80 Movimiento estroboscópico

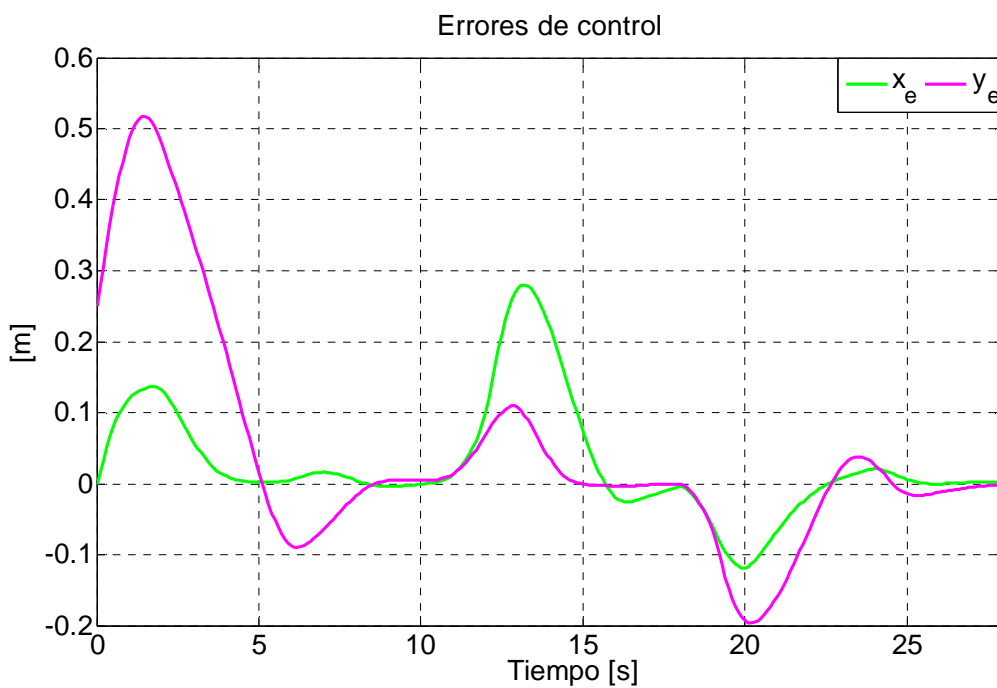


Figura 4.81 Errores de control: eje x y eje y

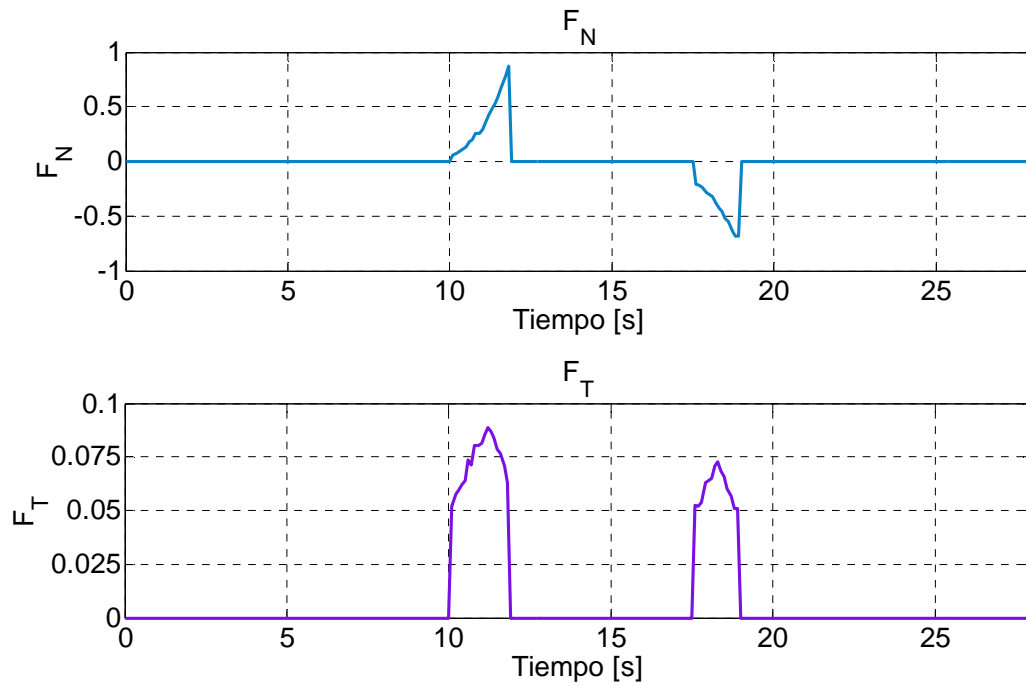


Figura 4.82 Fuerzas ficticias: Normal y Tangencial.

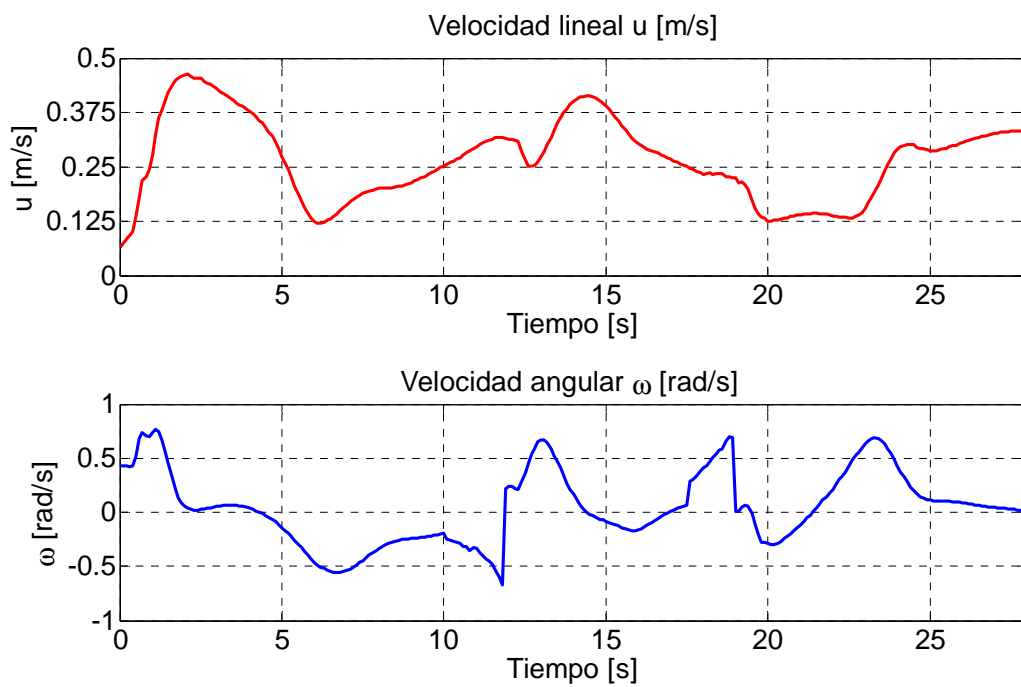


Figura 4.83 Velocidades de referencia: velocidad lineal y velocidad angular

4.3 SEGUIMIENTO DE CAMINOS

Para la solución del problema de seguimiento de caminos de robots móviles se debe reducir a cero tanto: i) la distancia del robot móvil al camino, y ii) el ángulo formado entre el vector de velocidad del robot y la tangente al camino.

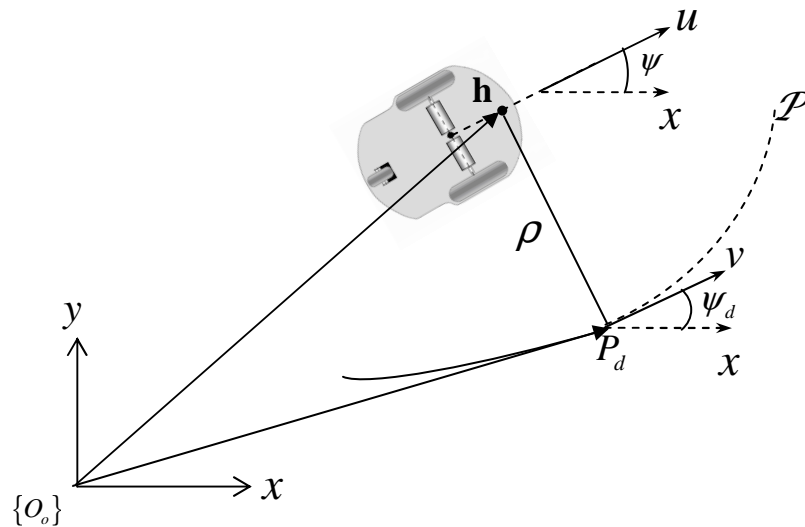


Figura 4.84 Cinemática del movimiento para el seguimiento de caminos

El robot móvil y el camino a ser seguido, denotado por \mathcal{P} , son representados en la Figura 4.84, donde P_d es un punto arbitrario sobre el camino \mathcal{P} y $\mathbf{h} = [x \ y]^T$ es la posición del robot móvil respecto al sistema de coordenadas absoluto $\{O_o\}$, ρ representa la distancia entre \mathbf{h} y P_d , v es el vector de velocidad deseada sobre el camino y ψ_d es el ángulo deseado formado entre el eje x y la tangente al camino \mathcal{P} . Además, el error de orientación se lo define como $\tilde{\psi} = \psi_d - \psi$.

Dado un camino \mathcal{P} en el plano x - y y el módulo de la velocidad deseada sobre el camino v , el problema de seguimiento caminos de robots móviles consiste en encontrar una ley de control,

$$v(t) = k(s, \rho, \tilde{\psi}, v(s))$$

La distancia ρ definida entre los puntos P_d y \mathbf{h} puede ser representada como la norma euclidiana del error $\tilde{\mathbf{h}}$, o sea $\rho = d(P_d, \mathbf{h}) = \|\tilde{\mathbf{h}}\|$, donde:

$$\tilde{\mathbf{h}} = P_d - \mathbf{h}$$

Ahora, considerando el módulo de la velocidad deseada del robot móvil y el camino a seguir \mathcal{P} , se puede determinar las componentes ortogonales del vector de velocidad deseado en el punto P_d . Esto es,

$$v_{x_{pd}} = v \cos(\psi_d)$$

$$v_{y_{pd}} = v \sin(\psi_d)$$

donde el vector de la velocidad deseado en el punto P_d está definido por $v_p = [v_{x_{pd}} \quad v_{y_{pd}}]^T$. Por lo tanto, la posición y velocidad deseada del robot móvil en un punto sobre el camino \mathcal{P} son determinados como: P_d y v_p , respectivamente.

En esta sección se propone un controlador que se basa en el modelo cinemático del robot móvil tipo unicycle no holonómico, el mismo que tiene como entradas a P_d y v_p , que representan la posición y velocidad deseada sobre el camino \mathcal{P} . Además, en el algoritmo de control propuesto se considera la saturación de los comandos de velocidad del robot móvil.

Para este trabajo se elige a P_d como el punto más cercano entre la posición del robot móvil \mathbf{h} y el camino \mathcal{P} . Por lo tanto, se tiene que $P_d = \mathbf{h}_d$ donde \mathbf{h}_d es la posición deseada del robot en el punto P_d . Consecuentemente, si $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{h}}(t) = 0$ entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t) = 0$. Asimismo luego se explicará que esta condición también implica que $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\psi}(t) = 0$ debido a la no holonomía del robot móvil.

4.3.1 DISEÑO Y ANÁLISIS DEL SISTEMA DE CONTROL

Se propone un algoritmo de control dinámico para resolver el problema de seguimiento de camino de un robot móvil, el cual consta de dos subsistemas en cascada:

- i) Controlador cinemático con saturación de los comandos de velocidad, y
- ii) Una compensación dinámica para reducir el error de seguimiento de velocidad producido por la dinámica del robot móvil.

4.3.1.1 CONTROLADOR CINEMÁTICO

El diseño del controlador cinemático considera dos casos: 1) una vez que el robot móvil está en el camino, debe seguir una velocidad deseada; 2) en todo instante el robot móvil debe mantener la velocidad deseada.

CASO 1: Se considera el modelo cinemático del robot móvil con $a \neq 0$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & -a \sin \psi \\ \sin \psi & a \cos \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \omega \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{h}}(t) = \mathbf{J}(\psi) \mathbf{v}(t) \quad (4.36)$$

Considerando la cinemática inversa de la ec. (4.36) se tiene,

$$\mathbf{v}(t) = \begin{bmatrix} u \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ -\frac{1}{a} \sin \psi & \frac{1}{a} \cos \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

Reescribiendo (4.37) en forma compacta, se tiene

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{J}^{-1}(\psi) \dot{\mathbf{h}}(t) \quad (4.38)$$

donde $\mathbf{J}^{-1}(\psi)$ es la inversa de la matriz Jacobiana definida en la ec. (4.36) y $\mathbf{v}(t)$ es el vector de velocidades del robot móvil.

Considerando las relaciones obtenidas anteriormente, se propone la siguiente ley de control

$$\mathbf{v}_c = \begin{bmatrix} u_c \\ \omega_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ -\frac{1}{a} \sin \psi & \frac{1}{a} \cos \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \cos \psi_d + l_x \tanh\left(\frac{k_x}{l_x} \tilde{x}\right) \\ v \sin \psi_d + l_y \tanh\left(\frac{k_y}{l_y} \tilde{y}\right) \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

donde, $\tilde{x} = x_d - x$ y $\tilde{y} = y_d - y$ definen el error de posición del robot $\tilde{\mathbf{h}} = [\tilde{x} \ \tilde{y}]^T$ respecto al camino, ψ_d es el ángulo deseado formado entre el eje x y la tangente a \mathcal{P} en el punto P_d , l_x , l_y , k_x y k_y son constantes positivas de ganancia y v es el módulo de la velocidad deseada sobre el camino. Las funciones $\tanh(\cdot)$ han sido incorporadas para limitar las velocidades de referencia, evitando así la saturación de las velocidades del vehículo. Cabe recalcar que $P_d = \mathbf{h}_d$ es un punto sobre el camino \mathcal{P} , que no depende del tiempo.

Escribiendo la ec. (4.39) en forma compacta se tendría,

$$\mathbf{v}_c = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{v}_p + \mathbf{L} \tanh(\mathbf{L}^{-1} \mathbf{K} \tilde{\mathbf{h}})) \quad (4.40)$$

donde, \mathbf{v}_p representa la velocidad deseada sobre el camino, $\mathbf{L} = \text{diag}(l_x, l_y)$, $\mathbf{K} = \text{diag}(k_x, k_y)$ y $\tanh(\mathbf{L}^{-1} \mathbf{K} \tilde{\mathbf{h}})$ denota una operación componente a componente.

Para el análisis de estabilidad se asume -momentáneamente- seguimiento

perfecto de velocidad $\mathbf{v}_c \equiv \mathbf{v}$, o sea, se considera que $u \equiv u_c$ y $\omega \equiv \omega_c$, lo que significa que los efectos dinámicos del robot móvil son ignorados. Sustituyendo (4.40) en (4.38) se tiene,

$$(\mathbf{v}_p - \dot{\mathbf{h}}) + \mathbf{L} \tanh(\mathbf{L}^{-1} \mathbf{K} \tilde{\mathbf{h}}) = \mathbf{0} \quad (4.41)$$

Ahora, definiendo a γ como la diferencia entre $\dot{\mathbf{h}}_d$ y \mathbf{v}_p

$$\gamma = \dot{\mathbf{h}}_d - \mathbf{v}_p$$

y recordando que $\dot{\tilde{\mathbf{h}}} = \dot{\mathbf{h}}_d - \dot{\mathbf{h}}$, la ecuación de lazo cerrado (4.41) puede ser escrita como:

$$\dot{\tilde{\mathbf{h}}} + \mathbf{L} \tanh(\mathbf{L}^{-1} \mathbf{K} \tilde{\mathbf{h}}) = \gamma \quad (4.42)$$

Nota 1. \mathbf{v}_p es colineal a $\dot{\mathbf{h}}_d$, por lo tanto γ , \mathbf{v}_p y $\dot{\mathbf{h}}_d$ son vectores colineales.

Se considera la siguiente función candidata de Lyapunov para analizar la estabilidad del sistema

$$V(\tilde{\mathbf{h}}) = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{h}}^T \tilde{\mathbf{h}}$$

donde su derivada temporal en las trayectorias del sistema es,

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{\mathbf{h}}) &= \tilde{\mathbf{h}}^T \dot{\tilde{\mathbf{h}}} \\ \dot{V}(\tilde{\mathbf{h}}) &= \tilde{\mathbf{h}}^T \gamma - \tilde{\mathbf{h}}^T \mathbf{L} \tanh(\mathbf{L}^{-1} \mathbf{K} \tilde{\mathbf{h}}) \end{aligned}$$

Una condición suficiente para que $\dot{V}(\tilde{\mathbf{h}})$ sea definida negativa es,

$$|\tilde{\mathbf{h}}^T \mathbf{L} \tanh(\mathbf{L}^{-1} \mathbf{K} \tilde{\mathbf{h}})| > |\tilde{\mathbf{h}}^T \boldsymbol{\gamma}| \quad (4.43)$$

Para valores grandes de $\tilde{\mathbf{h}}$, se puede considerar que $\mathbf{L} \tanh(\mathbf{L}^{-1} \mathbf{K} \tilde{\mathbf{h}}) \approx \mathbf{L}$. La \dot{V} es definida negativa sólo si,

$$\|\mathbf{L}\| > \|\boldsymbol{\gamma}\| \quad (4.44)$$

Por lo tanto, disminuye los errores $\tilde{\mathbf{h}}$.

Ahora, para valores pequeños de $\tilde{\mathbf{h}}$, se puede considerar que $\mathbf{L} \tanh(\mathbf{L}^{-1} \mathbf{K} \tilde{\mathbf{h}}) \approx \mathbf{K} \tilde{\mathbf{h}}$ donde (4.43) se puede escribir como,

$$\|\tilde{\mathbf{h}}\| > \frac{\|\boldsymbol{\gamma}\|}{\lambda_{\min}(\mathbf{K})}$$

Nota 2. Como se indicó anteriormente para pequeños errores de $\tilde{\mathbf{h}}$, $\mathbf{L} \tanh(\mathbf{L}^{-1} \mathbf{K} \tilde{\mathbf{h}}) \approx \mathbf{K} \tilde{\mathbf{h}}$. Por lo tanto, la ecuación de lazo cerrado (4.42) se escribe como,

$$\dot{\tilde{\mathbf{h}}} + \mathbf{K} \tilde{\mathbf{h}} = \boldsymbol{\gamma}$$

donde su transformada de Laplace es,

$$\dot{\tilde{\mathbf{h}}}(s) = (s\mathbf{I} + \mathbf{K})^{-1} = \boldsymbol{\gamma}(s)$$

Por lo tanto, la dirección del vector de errores de control $\tilde{\mathbf{h}}$ tiende a la dirección del vector de error de velocidad $\boldsymbol{\gamma}$. Entonces, para valores finitos de $\tilde{\mathbf{h}}$, su dirección es normal a \mathbf{v}_p (por el criterio de mínima distancia entre \mathbf{h} y el camino \mathcal{P}) y por la definición de $\boldsymbol{\gamma}$ (ver Nota 1); $\tilde{\mathbf{h}}$ tiene que ser cero. Ahora se puede

concluir que $\tilde{\mathbf{h}}(t) \rightarrow 0$ asintóticamente, entonces $\rho(t) \rightarrow 0$ con $t \rightarrow \infty$. Por otra parte, debido a la restricción no holonómica, la orientación del robot móvil una vez alcanzado el camino estará definida por el ángulo formado entre el eje x y la tangente a \mathcal{P} en el punto P_d , o sea, por el ángulo ψ_d . Por lo que se puede concluir, que como $\tilde{\mathbf{h}} \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, entonces $\tilde{\psi} \rightarrow 0$ con $t \rightarrow \infty$. Con lo que se cumpliría el objetivo de control para el seguimiento de caminos de un robot móvil no holonómico.

Caso 2: Para este ítem en el que se desea mantener en todo instante la velocidad deseada sobre el camino, se realiza un análisis similar al Caso 1. La ley de control propuesta para el Caso 2, queda definida como:

$$\mathbf{v}_c = \begin{bmatrix} u_{ref} \\ \omega_{ref} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ \frac{v}{a} \sin(\tilde{\psi}) - \frac{l_x}{a} \sin(\psi) \tanh\left(\frac{k_x}{l_x} \tilde{x}\right) + \frac{l_y}{a} \cos(\psi) \tanh\left(\frac{k_y}{l_y} \tilde{y}\right) \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

Cabe recalcar que la única diferencia entre (4.39) y (4.45), la velocidad lineal de referencia en (4.45) es siempre igual a la velocidad deseada sobre el camino, o sea, $u_c = v$, mientras que la ω_c de la (4.39) y (4.45) son iguales.

4.3.1.2 RESULTADOS POR SIMULACIÓN

Se realizaron dos simulaciones para probar el controlador de seguimiento de caminos propuesto, teniendo en cuenta a ρ como la distancia que existe entre el robot y el punto más cercano perteneciente al camino a seguir.

Camino 1 Sin Compensación

Para el primer camino el robot móvil inicia en la posición: $x=2$ [m], $y=-3$ [m], $\psi=0$ [rad], y debe seguir un camino recto.

Esta prueba se realiza considerando la ley de control (4.45), donde la velocidad deseada en el camino está definida como:

$$v(t) = \frac{0.7}{1+k_v \rho} \text{ [m/s] con } k_v > 0$$

El movimiento estroboscópico del robot móvil se muestra en la Figura 4.85. La Figura 4.86, muestra el error $\rho(t)$ entre la posición del robot móvil y el camino a seguir, donde se puede observar que el error tiende a cero asintóticamente como fue previsto en el análisis teórico. La Figura 4.87 muestra la velocidad deseada $v(t)$ a lo largo del camino y la velocidad del robot $u(t)$.

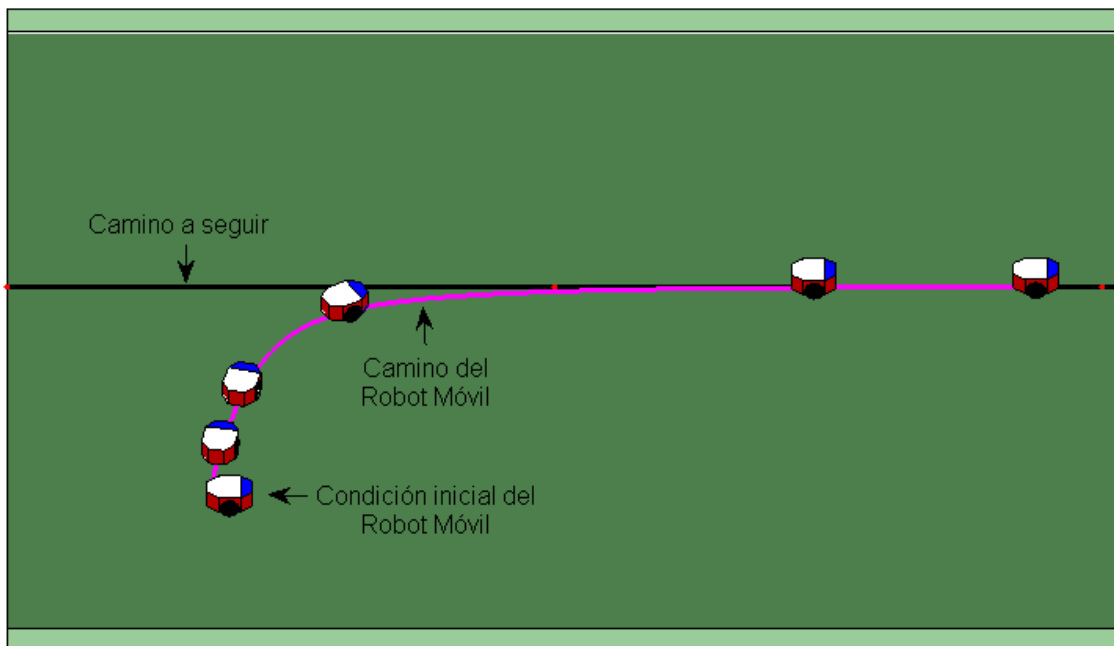


Figura 4.85 Movimiento estroboscópico

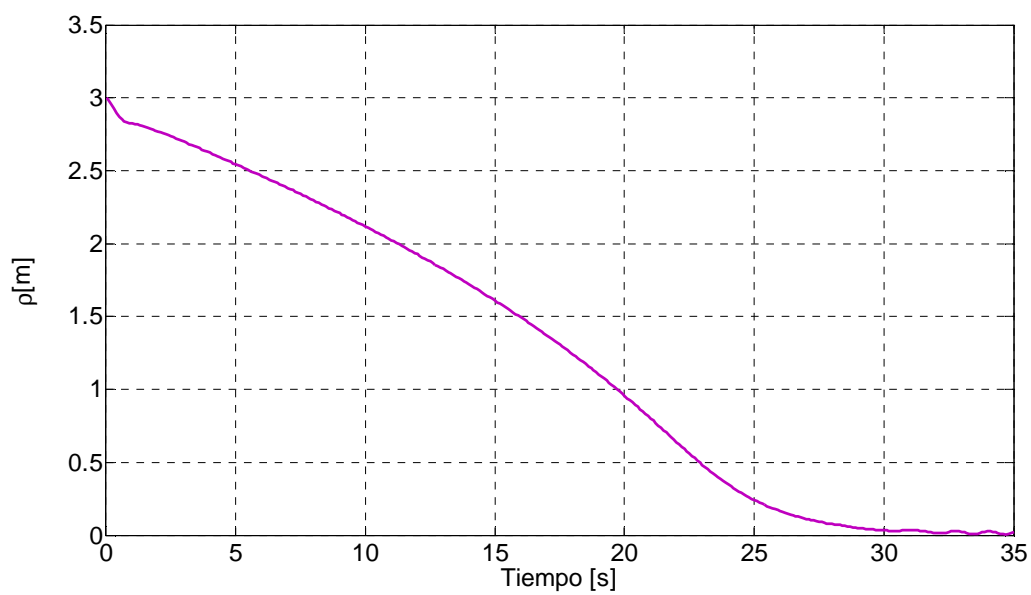


Figura 4.86 Distancia al punto más cercano

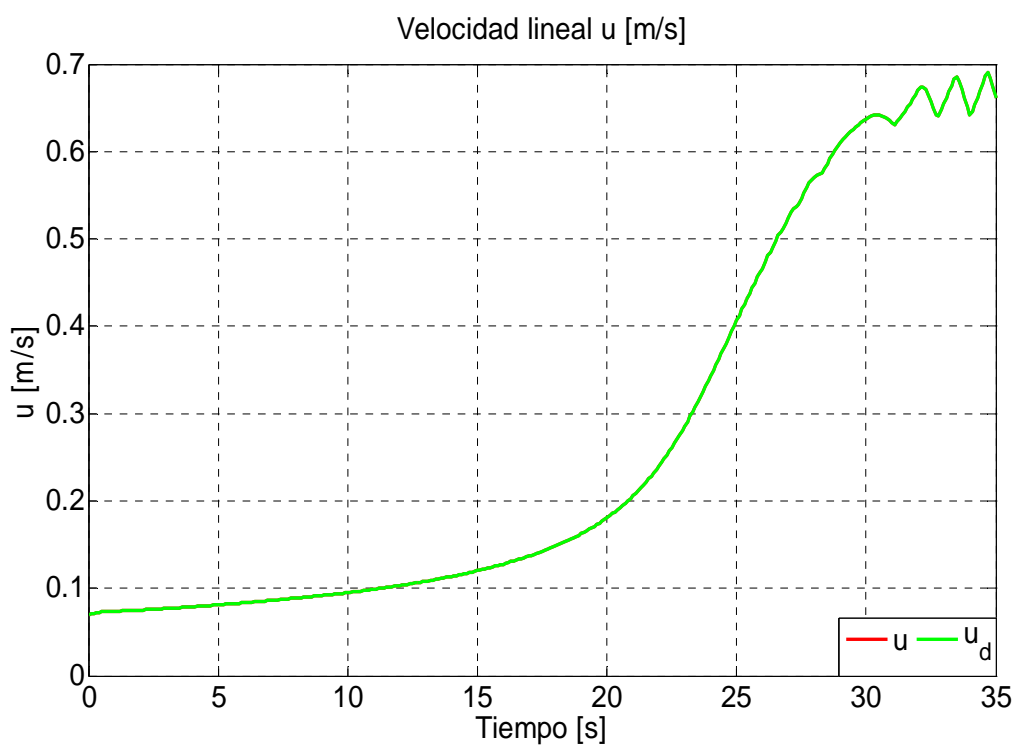


Figura 4.87 Velocidad lineal

Camino 2 Con Compensación

Para el primer camino el robot móvil inicia en la posición: $x=2[\text{m}]$, $y=-3[\text{m}]$, $\psi=0[\text{rad}]$, y debe seguir un camino recto.

Esta prueba se realiza considerando la ley de control (4.39), donde la velocidad deseada en el camino está definida como:

$$v(t) = \frac{0.7}{1+k_v \rho} \text{ [m/s]} \quad \text{con } k_v > 0$$

El movimiento estroboscópico del robot móvil se muestra en la Figura 4.88. La Figura 4.89, muestra el error $\rho(t)$ entre la posición del robot móvil y el camino a seguir, donde se puede observar que el error tiende a cero asintóticamente como fue previsto en el análisis teórico. La Figura 4.90 muestra la velocidad deseada $v(t)$ a lo largo del camino y la velocidad del robot $u(t)$.

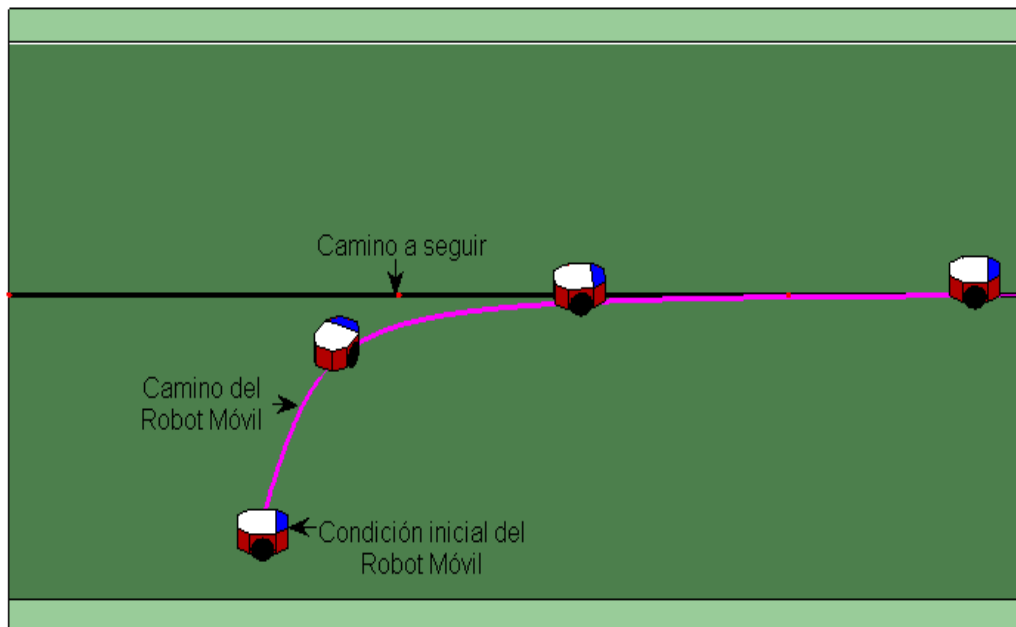


Figura 4.88 Movimiento estroboscópico

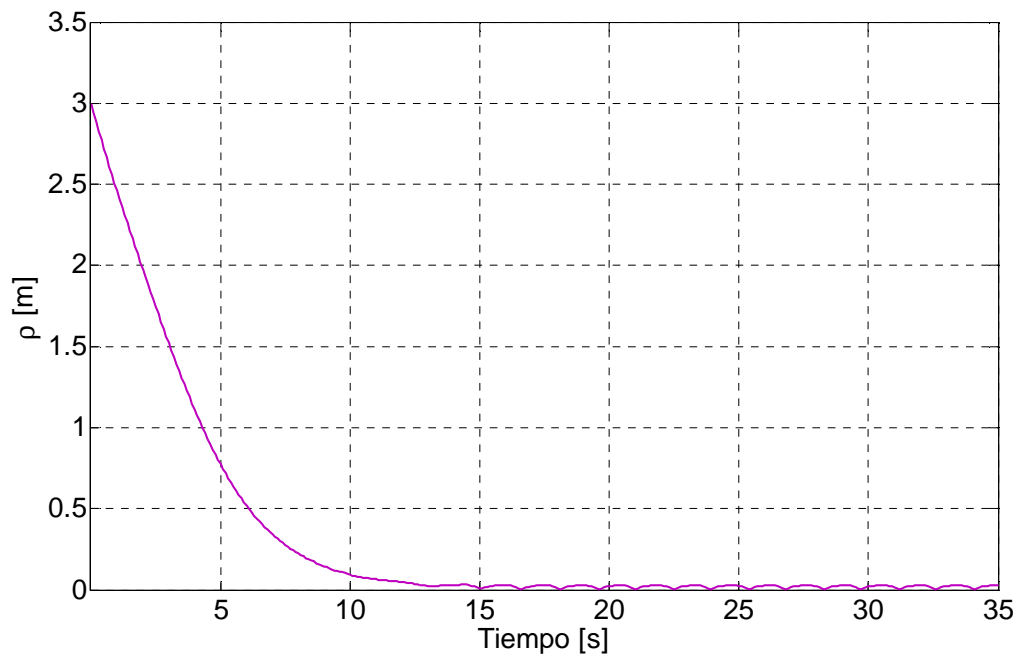


Figura 4.89 Distancia al punto más cercano

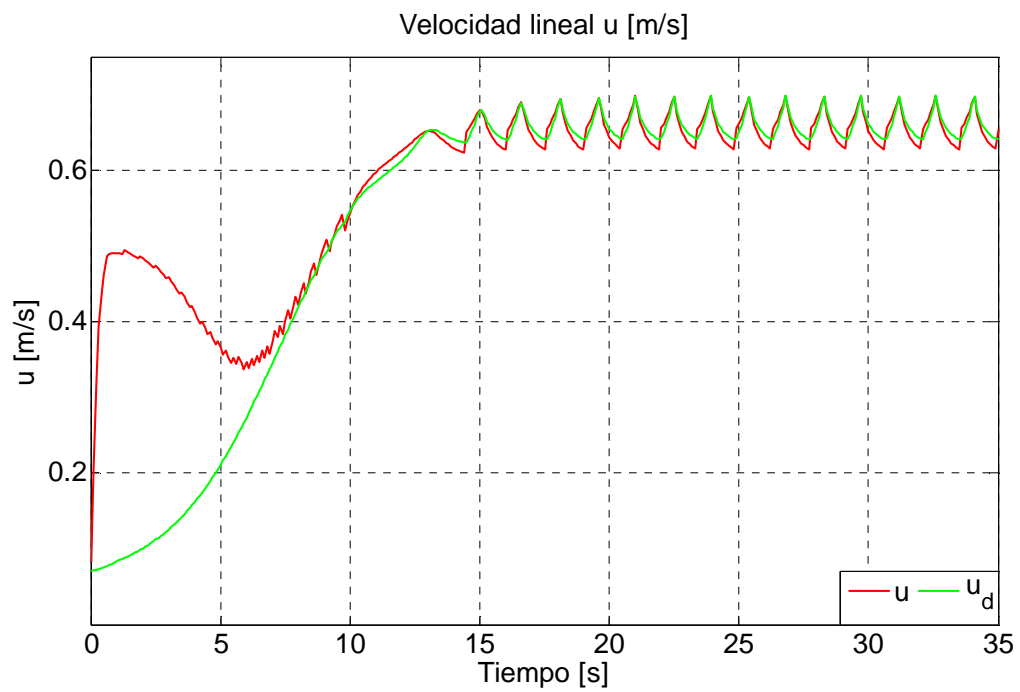


Figura 4.90 Velocidad lineal

4.3.1.3 RESULTADOS EXPERIMENTALES

Los controladores propuestos fueron implementados en el robot móvil PIONEER P3-AT, el cual admite como señales de referencia las velocidades lineal y angular. Se plantea realizar tres pruebas experimentales para probar el desempeño de los controladores propuestos (seguimiento de camino cinemático + compensación dinámica), considerando ρ como la distancia que existe entre el robot y el punto más cercano perteneciente al camino a seguir.

Camino 1

Para el primer camino el robot móvil inicia en la posición: $x=1$ [m], $y=1$ [m], $\psi=0$ [rad], y debe seguir un camino recto como lo indica las Figuras 4.91 y 4.97.

a) Control cinemático ec. (4.39) con compensación dinámica

Esta prueba se realiza considerando la ley de control (4.39), donde la velocidad deseada en el camino es definido como:

$$v(t) = \frac{0.4}{1 + k_v \rho} \text{ [m/s]} \quad \text{con } k_v > 0$$

Las Figuras 4.91 – 4.96 muestran los resultados obtenidos experimentalmente. El movimiento estroboscópico y la trayectoria descrita por el robot móvil se muestran en las Figura 4.91 y 4.92, respectivamente. La Figura 4.93, muestra el error $\rho(t)$ entre la posición del robot móvil y el camino a seguir, donde se puede observar que el error tiende a cero asintóticamente como fue previsto en el análisis teórico. La Figura 4.94 muestra la velocidad deseada $v(t)$ a lo largo del camino y la velocidad del robot $u(t)$. Los errores de velocidad

$\tilde{\mathbf{v}}(t) = [\tilde{\mathbf{u}} \quad \tilde{\boldsymbol{\omega}}]^T$ se muestran en la Figura 4.95, donde se puede comprobar que los errores tienden a cero asintóticamente, y finalmente la Figura 4.96, indica las acciones de control del robot móvil.

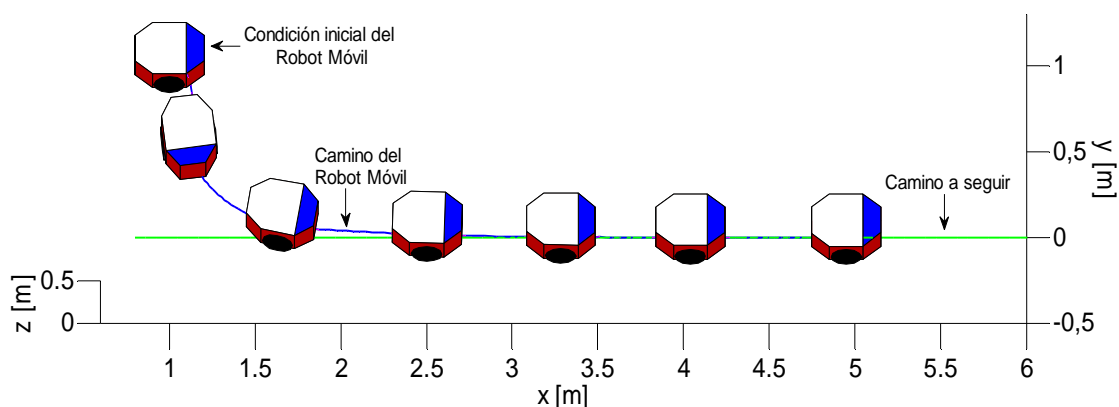


Figura 4.91 Movimiento estroboscópico

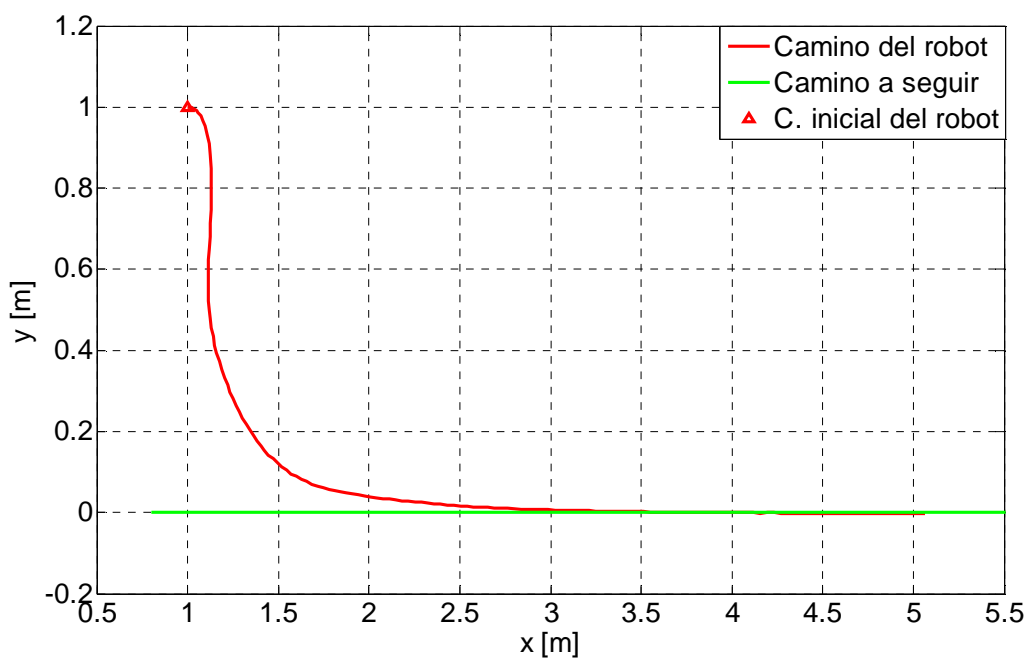


Figura 4.92 Trayectoria descrita por el robot móvil

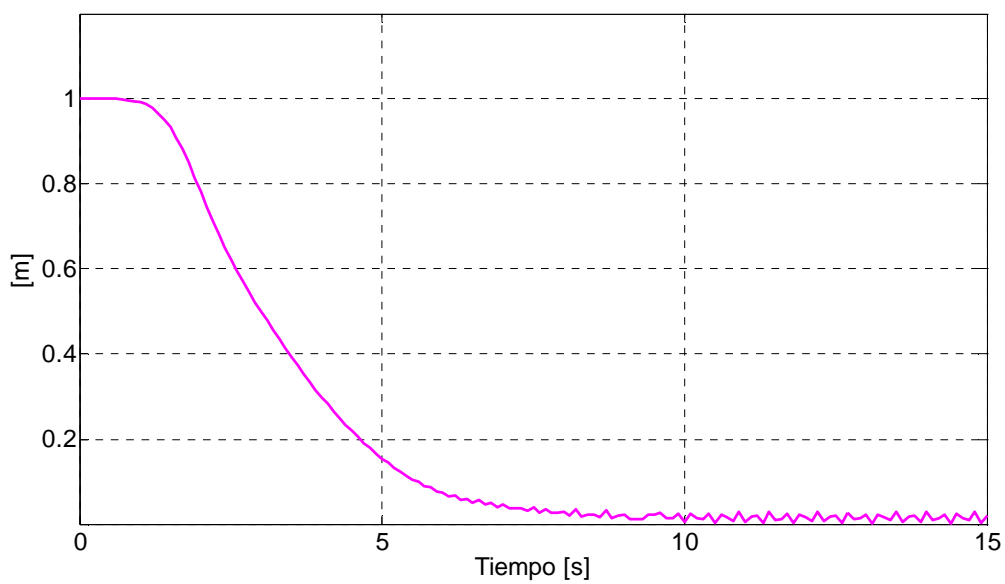


Figura 4.93 Distancia al punto más cercano

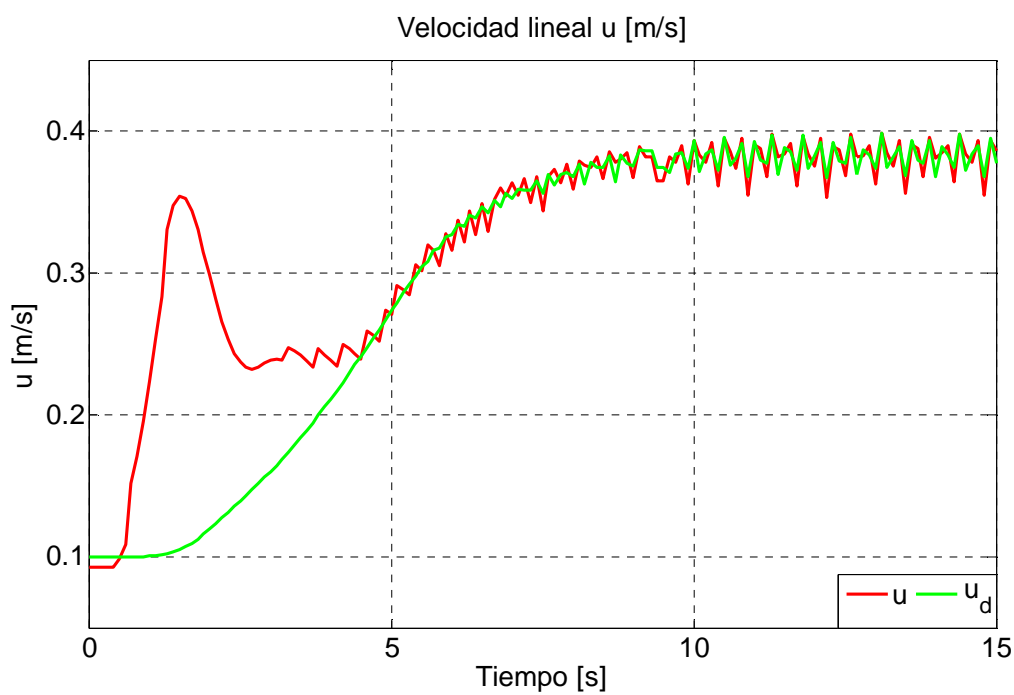


Figura 4.94 Velocidad lineal

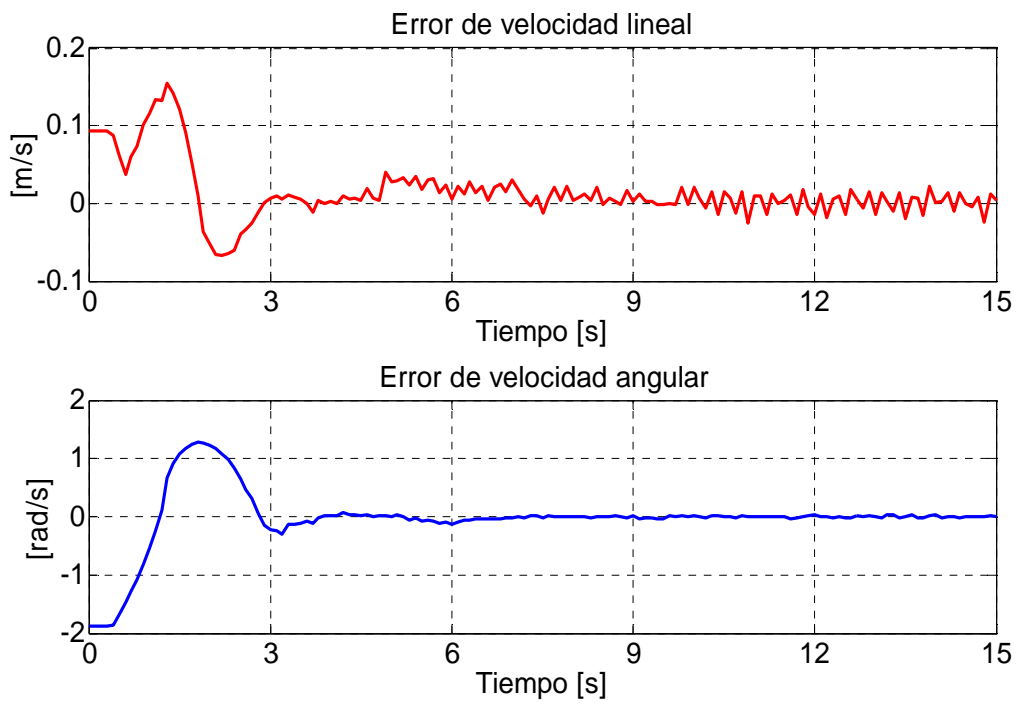


Figura 4.95 Errores de velocidades: lineal y angular

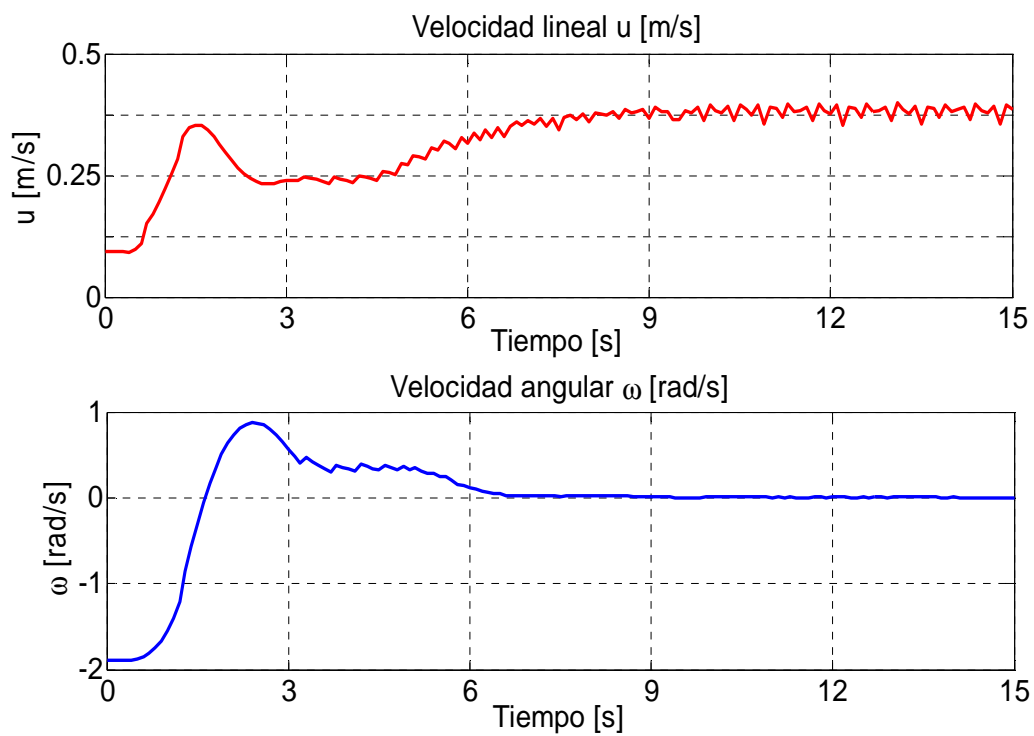


Figura 4.96 Velocidades de lineal y angular

b) Control cinemático ec. (4.45) con compensación dinámica

Esta prueba se realiza considerando la ley de control (4.45), donde la velocidad deseada en el camino es definido como:

$$v(t) = \frac{0.4}{1 + k_v \rho} \text{ [m/s]} \quad \text{con } k_v > 0$$

Las Figuras 4.97 – 4.102 muestran los resultados obtenidos experimentalmente. El movimiento estroboscópico y el la trayectoria del robot móvil se muestran en las Figuras 4.97 y 4.98, respectivamente. El error de control entre la posición del robot móvil y el camino a seguir, tiende a cero asintóticamente como se muestra en la Figura 4.99. La Figura 4.100 muestra la velocidad deseada $v(t)$ a lo largo del camino y la velocidad del robot $u(t)$, se puede observar que en todo instante de tiempo $v(t) = u(t)$. Los errores de velocidad $\tilde{v}(t) = [\tilde{u} \quad \tilde{\omega}]^T$ se muestran en la Figura 4.101, donde se puede comprobar que los errores tienden a cero asintóticamente, y finalmente la Figura 4.102, indica las acciones de control del robot móvil.

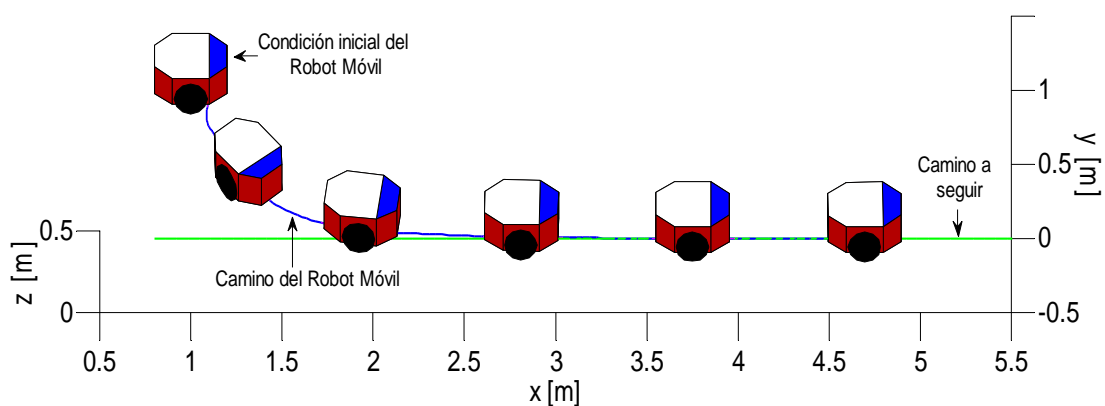


Figura 4. 97 Movimiento estroboscópico

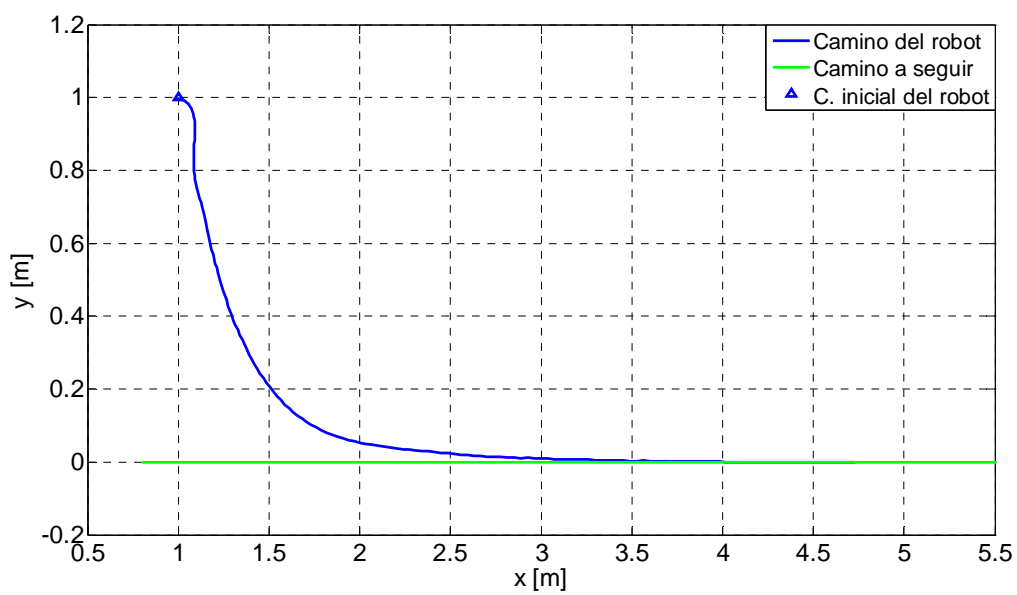


Figura 4.98 Trayectoria descrita por el robot móvil

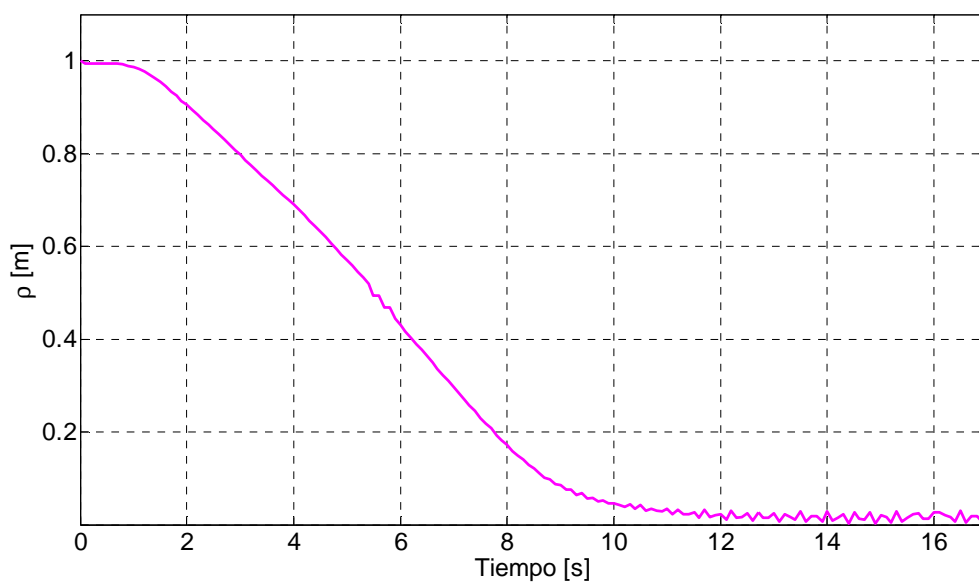


Figura 4.99 Distancia al punto más cercano

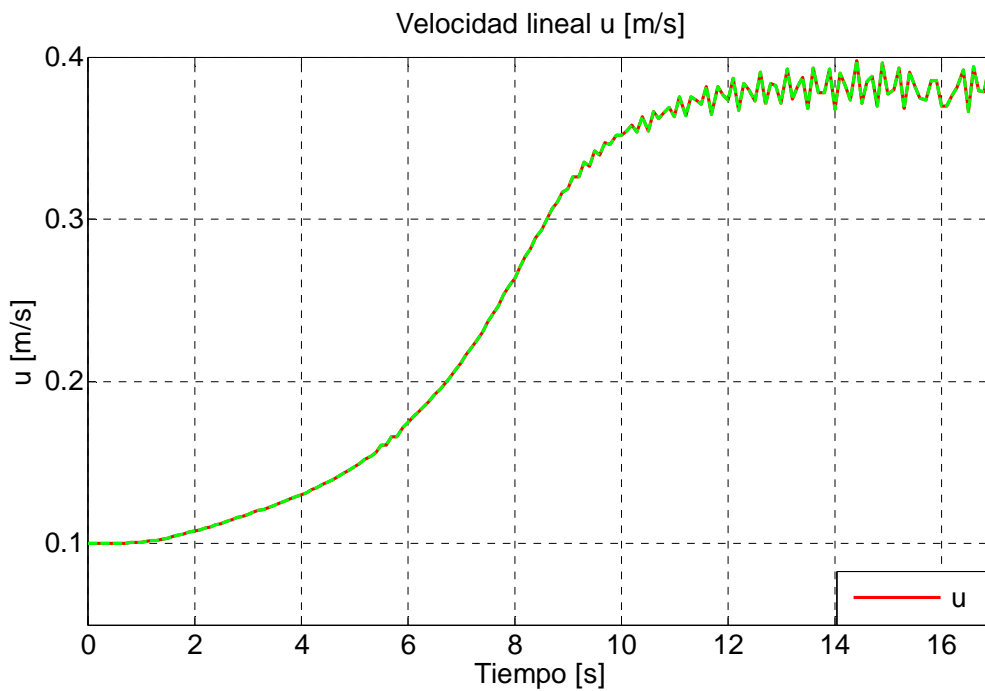


Figura 4.100 Velocidad lineal

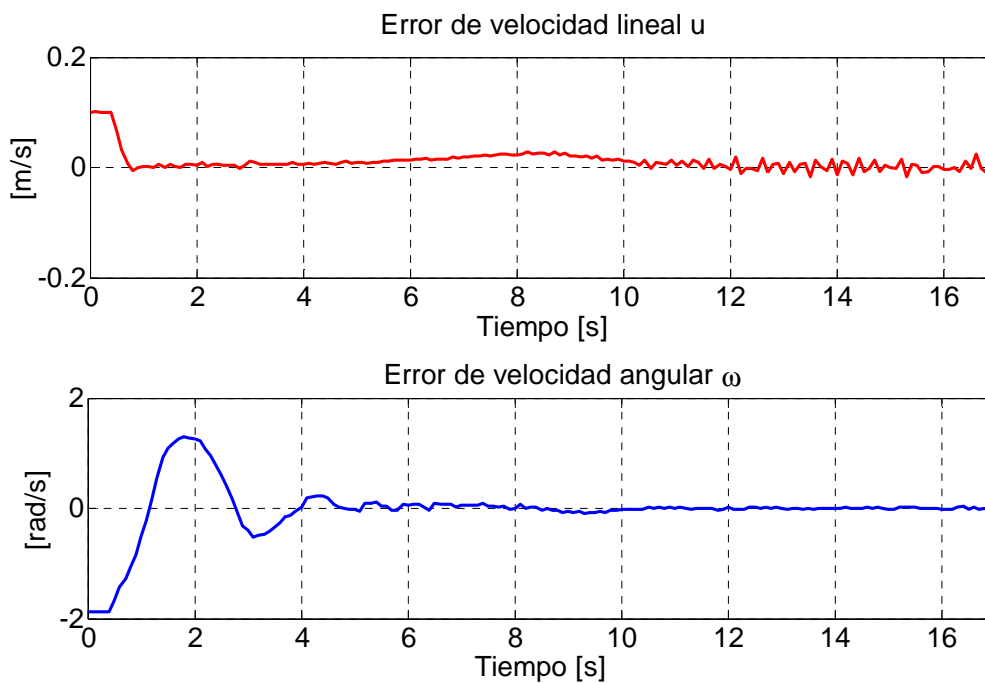


Figura 4.101 Errores de velocidades: lineal y angular

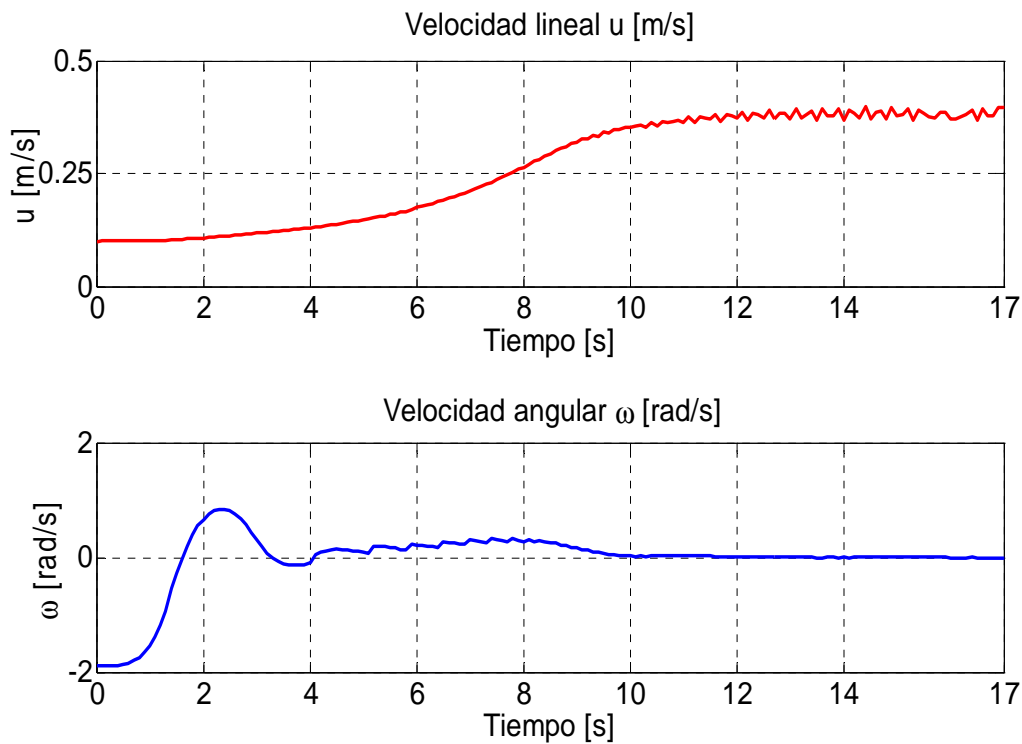


Figura 4.102 Velocidades de lineal y angular

Camino 2 Senoidal

Para este camino el robot móvil inicia en la posición: $x=1$ [m], $y=-1$ [m], $\psi=0$ [rad], y debe seguir un camino senoidal como lo indica la Figura 4.103.

a) Control cinemático ec. (4.45) sin compensación dinámica

Esta prueba se realiza considerando la ley de control (4.45), donde la velocidad deseada en el camino es definido como:

$$v(t) = \frac{0.3}{1 + k_v \rho} \text{ [m/s]} \quad \text{con } k_v > 0$$

Las Figuras 4.103 – 4.108 muestran los resultados obtenidos experimentalmente. El movimiento estroboscópico y el la trayectoria del robot móvil se muestran en las Figuras 4.103 y 4.104, respectivamente. El error de control entre la posición del robot móvil y el camino a seguir se muestra en la Figura 4.105. La Figura 4.106 muestra la velocidad deseada $v(t)$ a lo largo del camino y la velocidad del robot $u(t)$, se puede observar que en todo instante de tiempo $v(t) = u(t)$. Los errores de velocidad $\tilde{v}(t) = [\tilde{u} \quad \tilde{\omega}]^T$ se muestran en la Figura 4.107, donde se puede comprobar que los errores tienden a cero asintóticamente, y finalmente la Figura 4.108, indica las acciones de control del robot móvil.

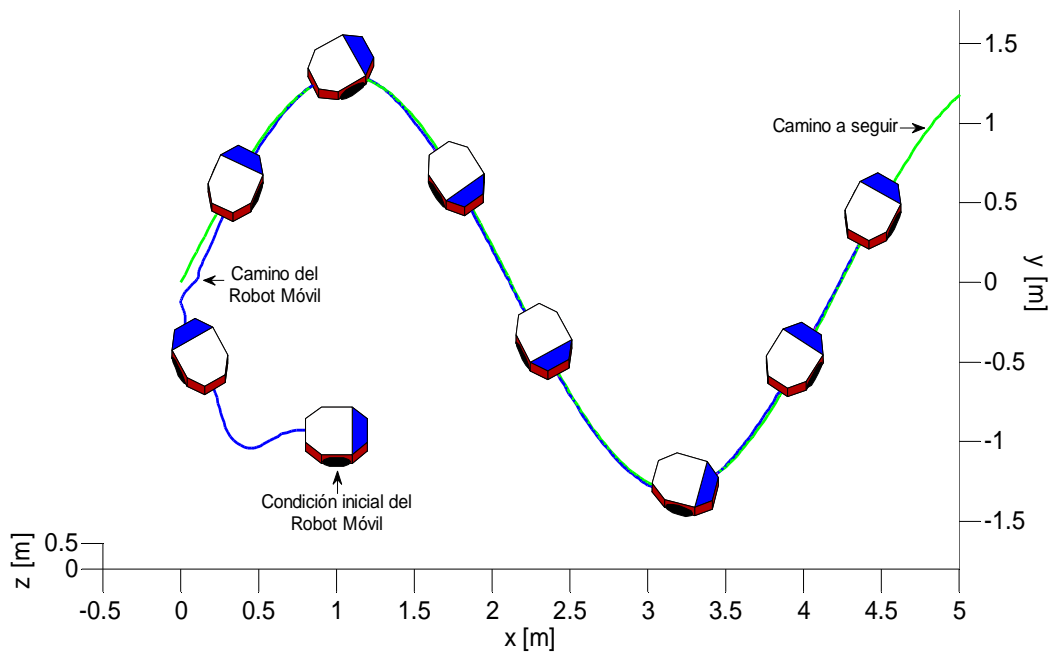


Figura 4.103 Movimiento estroboscópico

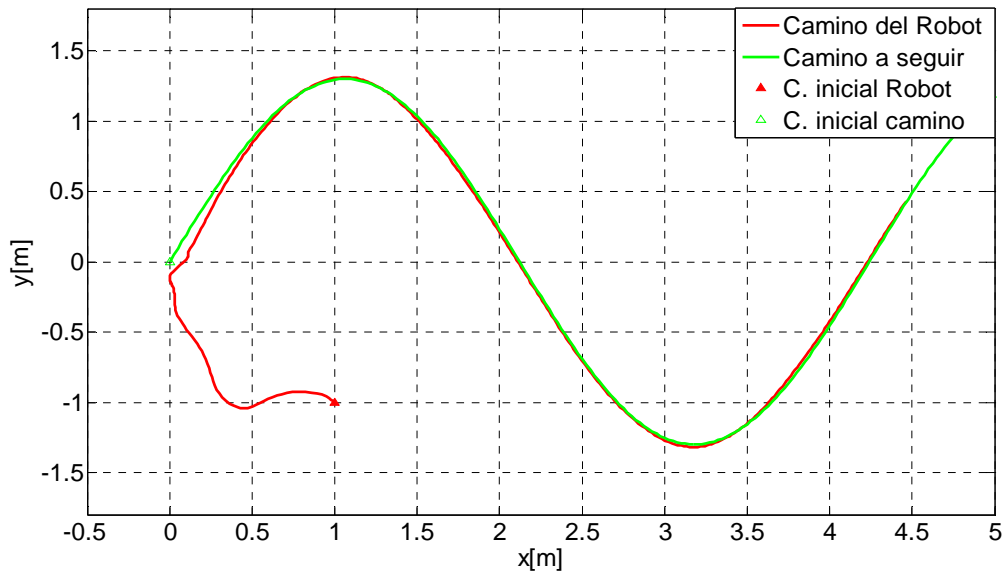


Figura 4.104 Trayectoria descrita por el robot móvil

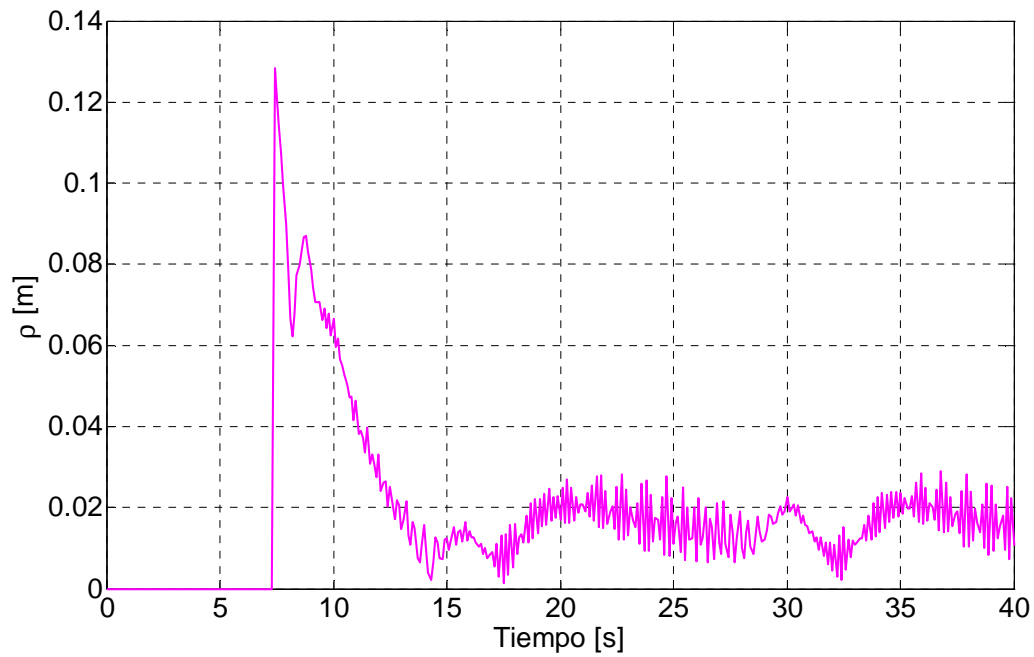


Figura 4.105 Distancia al punto más cercano

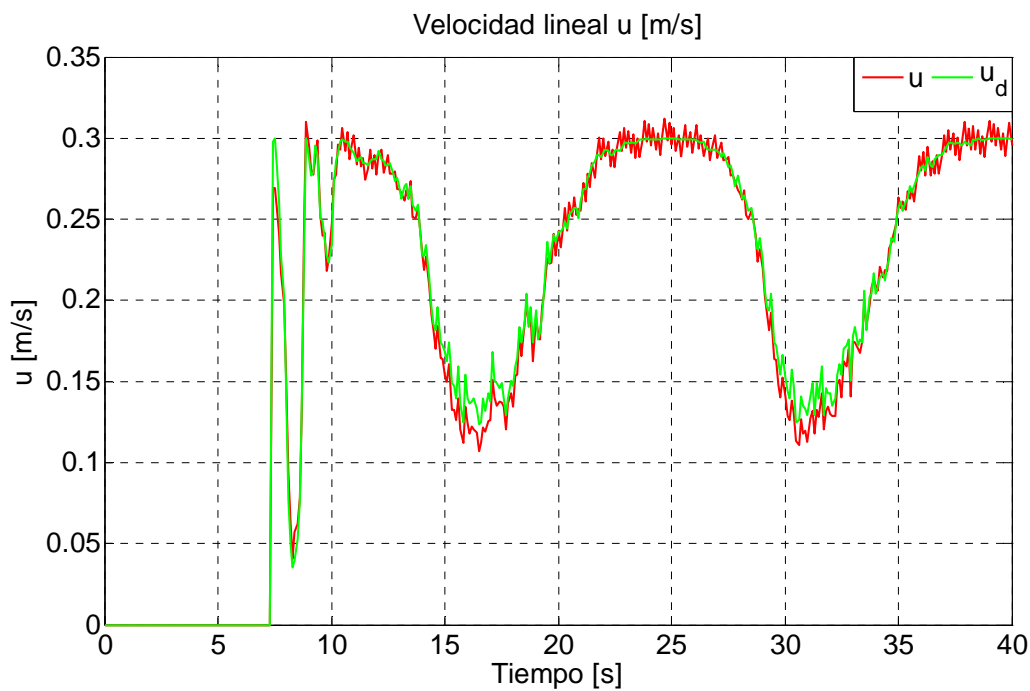


Figura 4.106 Velocidad lineal

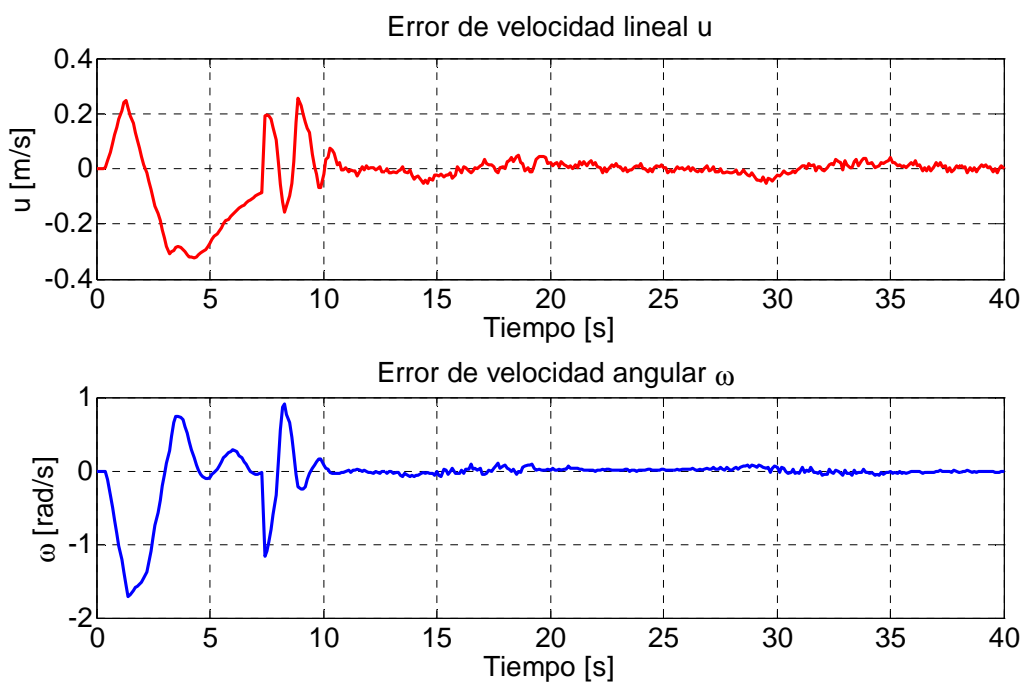


Figura 4.107 Errores de velocidades: lineal y angular

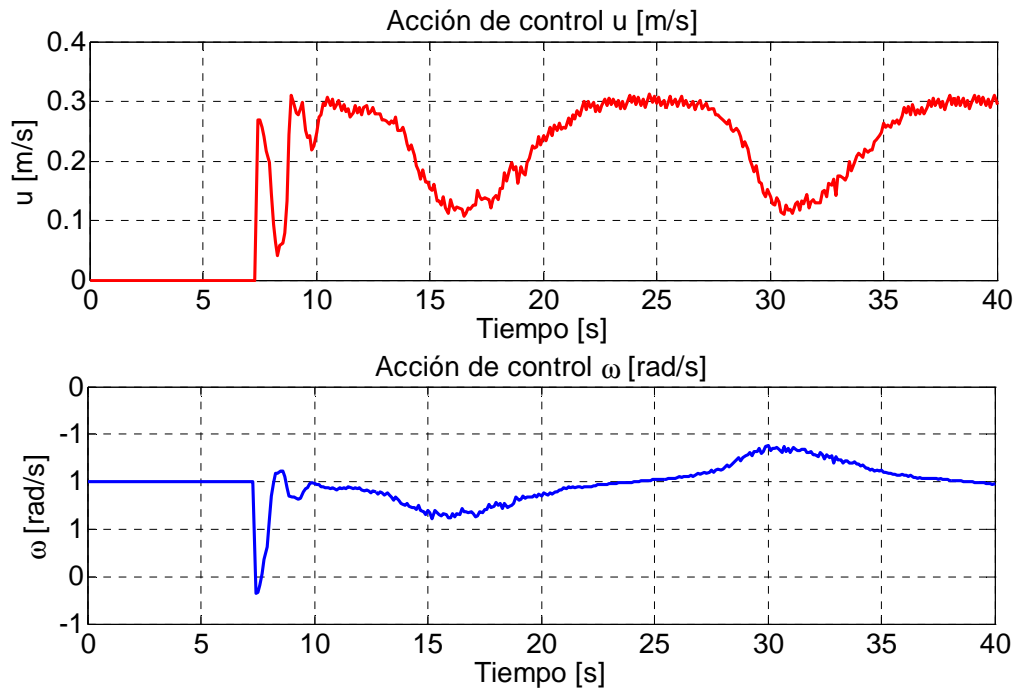


Figura 4.108 Velocidades de lineal y angular

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En este capítulo se presenta las conclusiones y recomendaciones obtenidas durante el desarrollo del proyecto de titulación propuesto.

5.1 CONCLUSIONES

A lo largo del progreso de este trabajo, se desarrolló un modelo matemático que representa el comportamiento dinámico de un robot móvil no holonómico tipo unicycle, este modelo dinámico desarrollado ha sido utilizado en el diseño de los algoritmos de control propuestos en este trabajo. Se han presentado algoritmos avanzados de control para robots móviles no holonómicos tipo unicycle que actúan en medios parcialmente estructurados, considerando tanto la cinemática como la dinámica del robot. Para cada algoritmo de control propuesto se realizó un análisis formal de estabilidad basada en la Teoría de Lyapunov, garantizando analíticamente la convergencia a cero de los errores de control. Se presentan resultados experimentales y de simulación para cada uno de los sistemas de control propuestos, de forma de demostrar el buen desempeño de los mismos.

Las conclusiones más importantes de este trabajo son:

- En el Capítulo 2, se presenta un resumen de los sistemas no lineales, de donde se puede concluir que este tipo de sistemas presentan una riqueza dinámica y comportamientos complejos que no tienen los sistemas lineales. Además un aspecto muy importante en el estudio de un sistema de control es la determinación de si el mismo es estable. En términos muy generales se dice que un sistema es estable si, estando inicialmente cerca del punto de operación deseado, permanece allí.

- En el Capítulo 3, se propone un modelo dinámico para un robot móvil tipo unicycle, el mismo que tiene velocidades de referencia como señales de control para la plataforma móvil, como es común en los robots comerciales. Además, el modelo dinámico propuesto presenta una estructura adecuada para el diseño de distintos algoritmos de control.

- Los parámetros que intervienen en el modelo dinámico de un robot móvil pueden variar de acuerdo al criterio que se utilice para su diseño, en este trabajo se ha considerado que el centro de masa del robot móvil se encuentra ubicado a una distancia “ a ” por delante del centro del eje que une las ruedas, y además, se ha considerado que el robot tiene controladores PD de bajo nivel para seguir las entradas de velocidad de referencia. Bajo estas condiciones de diseño se obtuvo un modelo dinámico, el mismo que tiene seis parámetros dinámicos que representan los parámetros físicos del robot móvil, de los motores DC y de los controladores de velocidad.

- Se realizó la identificación y validación de los parámetros dinámicos de los robots móviles: Pioneer P3-AT y Pioneer 3-DX, ambos robots poseen diferentes masas y distintas características dinámicas. De la identificación y validación se puede concluir que los modelos dinámicos obtenidos para los robots Pioneer P3-AT y Pioneer 3-DX representan de buena forma las dinámicas reales existentes en los robots, esto se puede corroborar en los resultados obtenidos en donde los valores reales y simulados se aproximan entre sí.

- En el Capítulo 4, se desarrollaron algoritmos de control para resolver los problemas de movimiento de un robot móvil, tales como: control de posicionamiento, seguimiento de trayectoria y seguimiento de caminos. En este capítulo se presentan algoritmos de control que se basan en la cinemática y dinámica del robot móvil tipo unicycle. La consideración del modelo cinemático en los algoritmos de control de robots móviles es válido cuando el robot opera a velocidades relativamente bajas y con cargas de escaso peso, y cuando las relaciones de transmisión son altas. En estos casos los acoplamientos

dinámicos y el efecto de la inercia son lo suficientemente bajos como para despreciarlos. Pero en los robots de elevado desempeño, que trabajan a grandes velocidades con cargas relativamente grandes en relación a su estructura mecánica, aparecen fenómenos dinámicos no manifestados en el modelo cinemático del robot móvil.

- El objetivo del control de posición o postura consiste en trasladar al robot móvil desde una posición inicial a una posición final con o sin orientación. Se propusieron algoritmos de basados en el modelo cinemático expresado en coordenadas polares cuyo objetivo de control es llevar las variables de control a cero, es decir, la distancia entre el robot y la posición final deseada $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t) = 0$, y la orientación deseada del robot móvil $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t) = 0$.

- El problema de seguimiento de trayectoria requiere que el robot móvil siga una referencia parametrizada en el tiempo. Para resolver el problema de seguimiento de trayectoria se propusieron algoritmos de control basados en los modelos cinemático y dinámico, con velocidades de referencia del robot móvil. El diseño del algoritmo de control se basa en dos subsistemas, cada uno de ellos tiene su propio controlador: el primero es un controlador cinemático, el mismo que cumple con los objetivos de la tarea; y el segundo es un controlador dinámico que compensa la dinámica del robot móvil. Tanto en el controlador cinemático y el controlador dinámico se prevé la saturación de las velocidades de referencia. Se probó la estabilidad del sistema de control propuesto basado en la Teoría de Lyapunov, concluyendo que los errores de control convergen a cero asintóticamente en ausencia de incertidumbres en el modelo.

- Los algoritmos de control propuestos en este trabajo fueron implementados en los robots móviles Pioneer P3-AT y Pioneer 3-DX, en los cuales se llevaron a cabo varias pruebas con el fin de comprobar la diferencia entre los esquemas de control, basados únicamente en la cinemática del robot y los algoritmos de control que consideran la dinámica del robot. De los resultados obtenidos en las pruebas experimentales se puede concluir que los algoritmos basados en modelo cinemático pueden llegar a cumplir con el objetivo de control, siempre y

cuando las velocidades del robot sean bajas, ya que a altas velocidades el robot móvil describe una trayectoria diferente a la trayectoria deseada, y consecuentemente los errores de control no tienden a cero.

- El problema de seguimiento de camino requiere que el robot converja y siga un camino, sin ninguna especificación temporal. Para resolver este problema de movimiento de los robots móviles se presentó un algoritmo de control que considera la saturación de los comandos de referencia del robot móvil. La principal ventaja de este algoritmo de control radica en su sencillez y facilidad de implementación cuando se la compara con las que se encuentran en la literatura, ya que en el planteamiento del problema no fue necesario considerar el radio de curvatura del camino, sin que ello quite generalidad en la selección del camino ni degrade el desempeño del controlador. Los resultados, que fueron obtenidos mediante experimentaciones reales, muestran el buen desempeño del sistema de control presentado.
- Un problema frecuente al implementar un controlador es que éste no cumpla con la función para la cual fue desarrollado, debido a que en su diseño no se tuvieron en cuenta aspectos tales como las limitaciones físicas de los actuadores, que en nuestro caso se reflejan como las velocidades lineales y angulares máximas que pueden aceptar los robots móviles utilizados en la experimentación, las mismas que fueron saturadas en su máximo valor a fin de proteger al robot por medio de la función tangente hiperbólica: **$\tanh(\cdot)$** .
- En los análisis de estabilidad de los controladores basados únicamente en la cinemática del robot, se asume -seguimiento perfecto de velocidad-, es decir, que la velocidad de referencia en un instante dado es igual a la velocidad real del robot en ese mismo instante, lo que no siempre se consigue en la práctica debido a que el robot real está expuesto a parámetros dinámicos que impiden que dichas velocidades se mantengan iguales. Por lo cual, para poder mantener esa correspondencia de igualdad entre la velocidad de referencia y la velocidad real del robot es necesaria la implementación de una compensación

dinámica cuyo objetivo es suplir la dinámica del robot móvil, reduciendo así el error de velocidad de seguimiento.

- La facilidad de haber utilizado un diseño en cascada ha permitido tener un control independiente tanto en la parte cinemática como en la parte dinámica, debido a que si el diseño del controlador dinámico se cambia por otro, el controlador cinemático no se vería afectado por dicho cambio, e igualmente si se cambia el diseño del controlador cinemático el controlador dinámico no se afectaría.

5.2 RECOMENDACIONES

Las recomendaciones que se han obtenido luego de haber concluido el trabajo son las siguientes:

- Se debe tomar en cuenta que los valores de los parámetros dinámicos obtenidos pueden variar de un robot a otro, esto se debe a que cada robot tiene su propio comportamiento dinámico, ya sea por el tamaño, el peso, las características de sus motores, etc.
- Antes de obtener el modelo dinámico de un robot móvil, se debe considerar el tipo de entradas que éste acepte, y así realizar una modelación acorde al robot a manejar, por ejemplo los algoritmo de control presentados, que se basan en el modelo dinámico, fueron implementados en los robots móviles Pioneer P3-AT y Pioneer 3-DX, y éstos admiten como señales de referencia las velocidades lineal y angular, por lo tanto el modelo dinámico del robot móvil obtenido tienen como entradas a dichas velocidades, en otros casos las entradas suelen ser pares para cada motor del robot, o las tensiones que alimentan a dichos motores, como es común en la literatura.

- En la mayoría de las aplicaciones de robots móviles una de las tareas más importantes que debe desarrollar un robot, es la de evitar la colisión con obstáculos que se encuentran en su camino, para lo cual se debe tener en consideración el ambiente en el cual se va a desenvolver el robot, y así implementar un algoritmo de control adecuado.
- El sensor que se utilizó para la evasión de obstáculos fue el láser de la marca *Sick*, el cual fue colocado sobre la plataforma del robot Pioneer P3-AT debido a que los sensores ultrasónicos de este robot se encontraban desactivados, es por ello que se deben considerar todas las características y condiciones en las que se encuentra el robot que se vaya a utilizar a fin de evitarse contratiempos.
- En las pruebas experimentales que se llevaron a cabo, una de las dificultades que se tuvo fue la duración de las baterías del robot, puesto que los experimentos no podían ser continuos por el desgaste de las mismas, por lo que es necesario tener en cuenta este aspecto durante la fase de experimentación.
- Uno de los problemas presentados al efectuar las pruebas experimentales con los robots móviles es la no consideración del medio donde se va a realizar dichas pruebas, es decir, existen robots móviles para ambientes internos como el Pioneer 3-DX y para ambientes externos como el robot móvil Pioneer P3-AT. La mala selección del tipo de robot genera errores en su odometría.
- Haber diseñado los controladores en cascada ha permitido tener un control independiente tanto del diseño cinemático como del dinámico, permitiendo así poder probar solo el controlador cinemático o sólo el controlador dinámico. Razón por la cual se debe considerar en el diseño a un controlador en cascada.
- Como trabajos futuros de investigación se podría implementar un control visual con el fin de que el robot móvil se desplace por cualquier tipo de ambiente y no sólo se lo restrinja a ambientes semi-estructurados y de esta forma evitar errores de odometría.

- También se podría investigar sobre otro tipo de control para el robot móvil, tomando en cuenta que si se cambia la carga de un robot o se utiliza uno que posea una masa diferente a los que fueron implementados experimentalmente se tendrán otros parámetros distintos en la dinámica del robot, para evitar esto se debería diseñar un control de tipo adaptable con el fin de que la dinámica siempre se compense y no se afecte al control.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- [1] González Javier, Ollero Aníbal, “Estimación de la posición de un robot móvil”, Informática y Automática, España Abril 1996.
- [2] Monografías, “Robótica”,
<http://www.monografias.com/trabajos31/robotica/robotica.shtml>
- [3] Wikipedia, “Robótica”,
http://es.wikipedia.org/wiki/Rob%C3%B3tica#cite_note-0
- [4] Enciclopedia libre Universal en Español. “Tres Leyes de la Robótica”,
http://enciclopedia.us.es/index.php/Tres_leyes_de_la_robotica
- [5] Robótica en Mendoza, “Robótica”,
<http://www.roboticajoven.mendoza.edu.ar/>
- [6] Barrientos A, Peñin L, *et al*, “Fundamentos de Robótica”, Segunda Edición. McGraw-Hill, España 2007.
- [7] Arranz Álvaro, Baliñas Jorge *et al.*, “Aplicaciones de robots móviles”, Universidad de Alcalá, Archivo PDF, Noviembre 2006
- [8] González Víctor, López Antonio, Control y Robótica - Curso en línea “Robots Móviles”,
http://platea.pntic.mec.es/vgonzale/cyr_0708/archivos/_15/Tema_5.5.htm
- [9] Lozano Tomás, “Foreword: Mobile Robot and Robotics”. Autonomous Robot Vehicles. Editores I.J.Cox y G.T. Wilfong. Springer-Verlag, 1990

- [10] Secchi Humberto, "Una Introducción a los Robots Móviles", Universidad Nacional de San Juan, Archivo PDF, 2008
- [11] Silva R., Barrientos V., *et al.*, "Una Panorámica De Los Robots Móviles", Universidad Rafael Belloso Chasín, Archivo PDF, 2007
- [12] Khalil H., "Nonlinear Systems", Second Edition, Prentice-Hall, 1996.
- [13] Carrelli Ricardo "Análisis y control de sistemas no lineales", Universidad Nacional de San Juan, 2004.
- [14] Slotine J., and Lie W., "Applied Nonlinear Control",. Prentice-Hall, 1991.
- [15] Ollero Aníbal Robótica; "Manipuladores y Robots Móviles" Primera Edición, Editorial Alfaomega-Marcombo, España 2001.
- [16] Zhang Y., Kim J., *et al.*, "Dynamic Model Based Robust Tracking Control of a Differentially Steered Wheeled Mobile Robot" Proceedings of the American Control Conference, Philadelphia, Pennsylvania, pp. 850-85, 1998.
- [17] Reyes F. y Kelly R., "On Parameter Identification of Robot Manipulator", IEEE International Conference on Robotics and Automatition, Albuquerque, New Mexico, pp.1910-1915, 1997.
- [18] Muñoz P, "Modelado e Identificación de un Manipulador Industrial de Dos Grados de Libertad", Universidad de San Juan, 2000.
- [19] Aström K., y Wittenmark B., "Adaptive Control", Addison-Wesley, 1995.
- [20] Soetanto D., Lapierre L. and Pascoal A., "Adaptive, Non singular Pathfollowing Control of Dynamic Wheeled Robots", Conference Decision and Control 42nd IEEE,.Hawaii,, December 2003.

- [21] Brockett R., "Asymptotic stability and feedback stabilization", in R. W. Brockett, R.S. Millman and H.J. Sussmann, Ed., *Differential Geometric Control Theory*, Boston; Birkhauser, 1983.
- [22] Aicardi M.,Casalino G., *et al*, "Closed Loop Steering of Unicycle-like Vehicles via Lyapunov Techniques", *IEEE Robotics & Automation Magazine*, pp. 27-35 March 1995.
- [23] Feng X., and Velinsky S., "Development of Distributed Multiple Mobil Robot Control System for Automatic Highway Maintenance and Construction", *IEEE 40th Midwest Symposium on Computational Intelligence in Robotics and Automation*, Banff, Alberta, Canada, 1997.
- [24] <http://www.mobilerobots.com>
- [25] Kuo Benjamín, "Sistemas de Control Automático", séptima edición, Prentice-Hall, 1996.

ANEXO A

BREVE DESCRIPCIÓN DEL ROBOT MÓVIL UTILIZADO EN LA EXPERIMENTACIÓN [24]

Los dos robots utilizados para el desarrollo de la parte experimental de este proyecto de titulación fueron el Pioneer 3-DX y el Pioneer P3-AT, dichos robots pertenecen a la empresa norteamericana ActivMedia.

Las características de versatilidad, fiabilidad y durabilidad que poseen estos robots Pioneer los han convertido en la plataforma de referencia para las investigaciones de la robótica puesto que estos robots son totalmente programables. Se dice que su duración es de años de clase resistente y uso en laboratorio.



Figura A1 Robots Pioneer

A.1 ROBOT PIONEER 3DX

Este es un robot pequeño y ligero, con un PC a bordo que lo hace un completo robot móvil autónomo programable. A diferencia de otros robots disponibles en el

mercado, el tamaño modesto de Pioneer se presta muy bien a la navegación en espacios reducidos y los espacios desordenados, tales como aulas, laboratorios y oficinas pequeñas, es decir es un robot apto para ambientes indoor. Pioneer 3 DX funciona mejor en superficies duras.

▪ Características Físicas

El Pioneer 3DX tiene una longitud de 44.5[cm], una altura de 23.7[cm] y un ancho de 39.3[cm]. Su peso es de 9[Kg] y soporta una carga de hasta 25[Kg]. Este robot es alimentado por un arreglo de 3 baterías de plomo ácido intercambiables en caliente cada una de ellas de 12[V], que le permiten un consumo de 7[A/h], con una autonomía aproximada de 8[h] (o aproximadamente 3[h] cuando se conectan los periféricos).

Este Robot esta equipado con una corona de 16 sensores de ultrasonido que rodean al robot y además dispone de odómetros (encoders) asociados a las ruedas para saber cuanto han girado estas. A continuación se describen las características más sobresalientes de estos sensores y aspectos relevantes del robot.



Figura A2 Robot Pioneer 3-DX

▪ Odómetros (encoders) y Movilidad

El robot PIONEER 3-DX está equipado con tres ruedas que permiten su movilidad y sentido, una de ellas es “loca” y dos traccionadas (Figura A2). Estas últimas son accionadas por dos motores reversibles de CC que permiten que el robot desarrolle una velocidad lineal máxima de 1.4[m/s] y una velocidad angular máxima de 300[°/s] ó 5.23[rad/s].

Los encoders o sensores odómetros constituyen una gran fuente de información al momento de realizar algoritmos de control. Su misión principal es la de estimar la posición (x, y, ψ) del robot dentro de su entorno en cada momento y de ahí estimar la velocidad real del robot. Estos sensores estiman lo que han girado las ruedas izquierda y derecha en un intervalo de tiempo y, conociendo las antiguas coordenadas, es muy fácil sacar la nueva posición del robot. Cabe destacar que la posición estimada por los odómetros es relativa a la posición inicial del robot.



Figura A3 Encoder u odómetro incremental

▪ Sonar

El robot cuenta con 16 sensores de ultrasonido formando una corona que rodea al PIONEER 3-DX, permitiendo una zona de detección de 360°. Las lecturas de estos sonares se realiza de manera multiplexada y el conjunto posee una tasa de disparo de 25[Hz] (aproximadamente 40[ms] por transductor) que puede ser modificada. Poseen un rango de ultrasonido que va desde los 10[cm] a los 4[m],

logrando así la detección de objetos distantes. Los sensores en el PIONEER 3-DX están dispuestos de la siguiente manera (Figura A4):

- 6 sensores en la parte delantera - en intervalos de 20° (a)
- 4 sensores en los laterales (b)
- 6 sensores en la parte trasera - en intervalos de 20° (c)



a) Delantera

b) Lateral

c) Trasera

Figura A4 Configuración del sonar en el Pioneer 3DX.

▪ **Procesador**

El robot móvil posee en su interior un procesador Hitachi H8S2357 con una frecuencia de 18MHz, 32Kb de memoria de datos y 128Kb de memoria Flash de programa.

▪ **Equipo de Comunicación**

El robot posee en su interior un MODEM de frecuencia de operación de 900MHz que permite llevar a cabo una comunicación TDD Full Duplex. En su parte superior, el robot, tiene montada una antena Omnidireccional de 50[Ω] que permite mantener una comunicación inalámbrica con otro dispositivo, con un alcance de 50[m] en ambientes cerrados y 100[m] en ambientes abiertos. Además de las características nombradas el robot posee las siguientes características técnicas:

- Wireless: SSID: Res WaveLAN
Modo: Infraestructura
Velocidad: 1 Mbps
- TCP/IP: Direcciones: 192.168.1.201 (.202, .203,...)
Gateway: 192.168.1.1
Máscara de Subred: 255.255.255.0
Boot protocol: static
- Puerto Serie: Modo consola desactivado
Control de Circulación desactivado
- **Panel de control del usuario**

El Panel de Control (Figura A5) es donde se tiene acceso al microcontrolador a bordo. Se encuentra en el panel lateral izquierdo del Pioneer 3-DX.

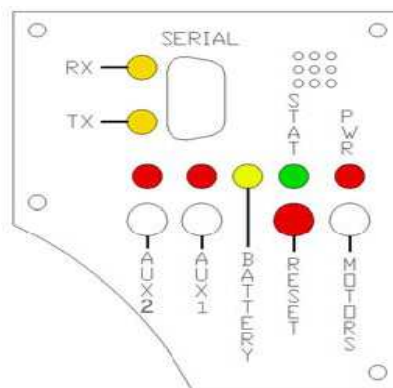


Figura A5 Distribución del Panel de Control del robot Pioneer DX.

Consta de botones de control e indicadores, y un puerto RS-232 compatible de serie (9-pin D-SUB).

Indicadores de encendido y de estado

El rojo LED PWR se enciende cada vez que la alimentación principal se aplica al robot. El STAT LED verde del estado depende del modo de funcionamiento y otras condiciones. Parpadea lentamente cuando el microcontrolador está en espera de una conexión con un cliente y parpadea rápidamente cuando se conecta con un cliente y los motores están comprometidos. También parpadea moderadamente rápido cuando el microcontrolador está en modo de mantenimiento.

El LED de aparente batería depende de la tensión de la batería del robot: verde cuando está completamente cargada ($>12.5[V]$) a través de naranja, y finalmente rojo cuando la tensión cae por debajo de $11.5[V]$. Cuando está en modo de mantenimiento, el LED se ilumina de color rojo brillante BATERÍA sólo, con independencia de carga de la batería.

Zumbador

Un built-in zumbador piezoeléctrico (audible a través de los agujeros justo por encima del STAT y los LEDs PWR) proporciona pistas audibles para el estado del robot, como en el inicio con éxito el microcontrolador y una conexión de cliente.

Puerto Serial

El conector serie, con entrada y salida de datos de indicadores LED (RX y TX, respectivamente), es a través del cual se puede interactuar con el microcontrolador de un equipo fuera del tablero de control, cliente-servidor y para el mantenimiento del software del microcontrolador. El puerto es compartido internamente por el HOST puerto serie, a la que se conecta el ordenador a bordo o de un dispositivo Ethernet a serie. O bien el SERIAL o el conector anfitrión puede ser utilizado para el cliente-servidor y la comunicación de modo de mantenimiento con el microcontrolador.

Interruptores de alimentación

Los interruptores AUX1 y AUX2 en el Panel de Control de Usuario son botones que activan o desactivan la energía a $5[V_{DC}]$ y $12[V_{DC}]$ conectores de la placa del motor-potencia de la cual se puede conectar la energía para diversos accesorios.

Por ejemplo, alimentación de 12 VDC para la cámara PTZ normalmente se enciende con el botón de AUX1. Respectivos LEDs rojos indican cuando está encendido.

Restablecer Motores

El botón RESET roja actúa para restablecer incondicionalmente el microcontrolador, deshabilitar las conexiones activas o los dispositivos conectados, incluyendo los motores. Este botón sirve también para realizar el mantenimiento de forma manual.

▪ **Equipo Panel De Control**

El panel de control se encuentra en el panel lateral derecha del Pioneer 3-DX, este es el medio de comunicación accesible para el usuario y los conectores de control de puertos, interruptores e indicadores para el PC a bordo.

Los controles y los puertos de uso de conectores comunes que posee son: monitor estándar DSUB, conectores PS / 2 para el ratón y el teclado, conector de Ethernet. Además en este panel se localiza el interruptor ON / OFF que controla directamente la energía a bordo de la PC a través de alimentación principal.

El indicador PWR LED se ilumina cuando el equipo tiene el poder.

El HDD LED se ilumina cuando la unidad de a bordo en el disco duro está activo.

El botón RESET reinicia la PC.

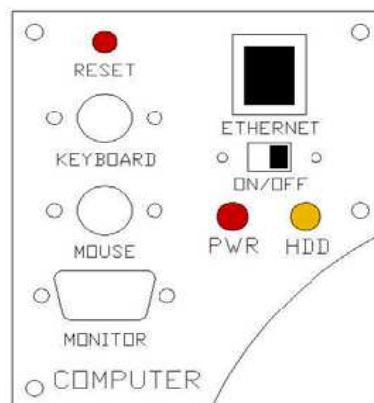


Figura A6 Distribución del Panel de Control del Robot Pioneer 3-DX

A2. ROBOT PIONEER P3-AT

El Robot PIONEER P3-AT viene con una plataforma robótica altamente versátil, posee un software compatible con todos los robots ActivMedia. Es un robot potente y fácil de usar, confiable y flexible, es uno de los preferidos para el desarrollo de investigación especialmente en proyectos que tienen que ver al aire libre pues su diseño y estructura fueron construidos para que este sea un robot outdoor.

▪ Características Físicas

El P3-AT es un robot robusto que posee una longitud de 50.1[cm], un alto de 27.7[cm] y un ancho de 49.3[cm], su estructura es de aluminio con ruedas de diámetro 22[cm]. Su peso es de 14[Kg], a velocidades mas lentas puede transportar cargas de hasta 40[Kg] (en ella se incluyen las baterías, cámaras, etc.)



Figura A7 Robot Pioneer P3-AT

▪ Odómetros (encoders)

El robot PIONEER P3-AT está equipado con motores reversibles de CC que permiten la movilidad de sus cuatro ruedas. Posee encoders u odómetros que cumplen con la misma función que los encoders del Pioneer 3-DX, la diferencia es que este modelo posee una característica especial realiza una corrección inercial por medio de un Giroscopio interno, que es recomendado en la navegación por estima para compensar la dirección deslizante. Además el P3-AT puede girar en su propio eje ya que sus ruedas las mueve de un solo lado para formar un círculo de mas o menos 40[cm] de radio.

Este robot desarrolla una velocidad lineal máxima es 0.7[m/s] y una velocidad angular máxima de 300[°/s].

▪ **Procesador**

Todos los robots P3-AT incluye un procesador interno Hitachi H8S, con una frecuencia de 18MHz, 32Kb de memoria de datos y 128Kb de memoria Flash de programa.

▪ **Equipo de Comunicación**

La comunicación de este robot es similar al 3-DX. Las siguientes características técnicas de este tipo son:

- Wireless: SSID: Res WaveLAN
Modo: Infraestructura
Velocidad: 1 Mbps
- Puerto Serie: Modo consola desactivado
Control de Circulación desactivado

▪ **Equipo Panel de Control y Panel del Usuario**

Estas dos características son idénticas y cumplen la misma función antes detallada en el robot Pioneer 3-DX, lo único que varía es su ubicación en el P3-AT

estos paneles se encuentran juntos y se ubican en la superficie de la plataforma de montaje la misma que se protege con una tapa de plástico con bisagra.

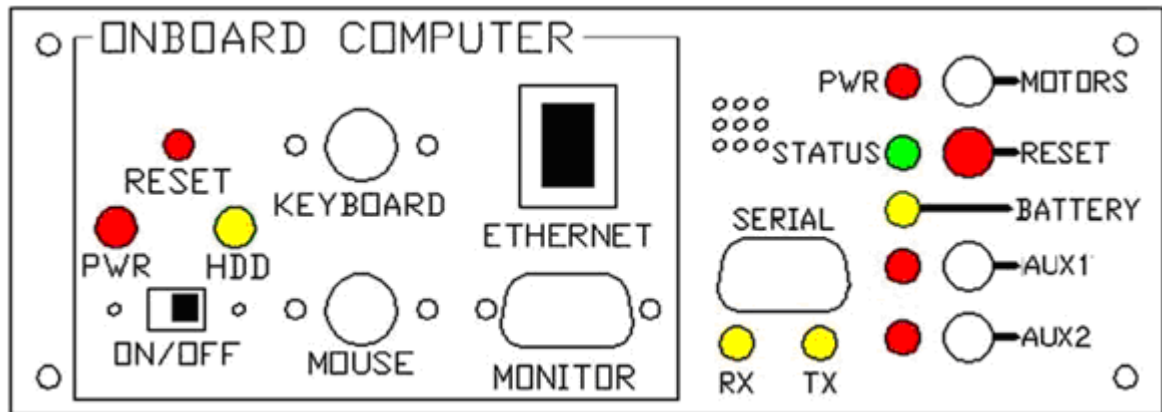


Figura A8 Disposición del panel de control y de usuario del robot Pioneer P3-AT.

La plataforma del 3-DX, P3-AT y en general las plataformas MobileRobots vienen con una serie de aplicaciones avanzadas de control de robots de software cliente y entornos de aplicaciones de desarrollo. Este software es orientado a objetos que hace de interfase para la aplicación de programas de control sobre la línea de robots móviles inteligentes de ActivMedia Robotics. El desarrollo de software incluye una base propia avanzada de interfaz de Robótica para Aplicaciones (ARIA) y ARNetworking.

A3. SOFTWARE ARIA

ARIA es un software *client-side* (del lado del cliente) que permite un acceso fácil y de alta performance para el manejo de servidores robóticos, como así también a los sensores que estos poseen. Es de gran versatilidad y flexibilidad lo cual hace de ARIA una excelente herramienta para aplicaciones robóticas de alto nivel, al proveer Clases capaces de realizar desde típicas tareas hasta complicadas asignaciones sobre el robot.

Este software es parte del Servidor de esta arquitectura y corre por lo tanto en la PC a bordo del robot. ARIA puede correr y en simple o múltiples hilos haciendo

uso de su propia plataforma, la cual utiliza pthreads de LINUX threads de WIN32. La utilización de hilos ayuda a distribuir el control del robot, al separar a éste, en pequeñas y relativamente simples rutinas. Estas rutinas básicamente manejan la comunicación de paquetes de datos con el robot y construyen una imagen interna del estado del robot móvil.

El software ARIA realiza el control de bajo nivel de los robots móviles, esto es, administra la información desde y hacia los actuadores (motores de CC) y los sensores del robot (sensores de ultrasonido, láser, etc.). Debido a esto aplicaciones desarrolladas utilizando ARIA pueden dinámicamente realizar el control de velocidad, orientación, orientación relativa y muchos otros ajustes de navegación, a través de llamadas simples de bajo nivel o a través de su infraestructura de alto nivel "*ArAction*". Esta última es una clase de Acción que permite que el robot realice movimientos.

La clase más importante de este software es la clase "*ArRobot*", esta es la única clase que la mayoría de las personas alguna vez tendrán que usar si deciden utilizar este software. De esta clase derivan muchas clases y muchas también se relacionan con ella, formando de esta manera una potente estructura de software como la que se muestra en la Figura A9.

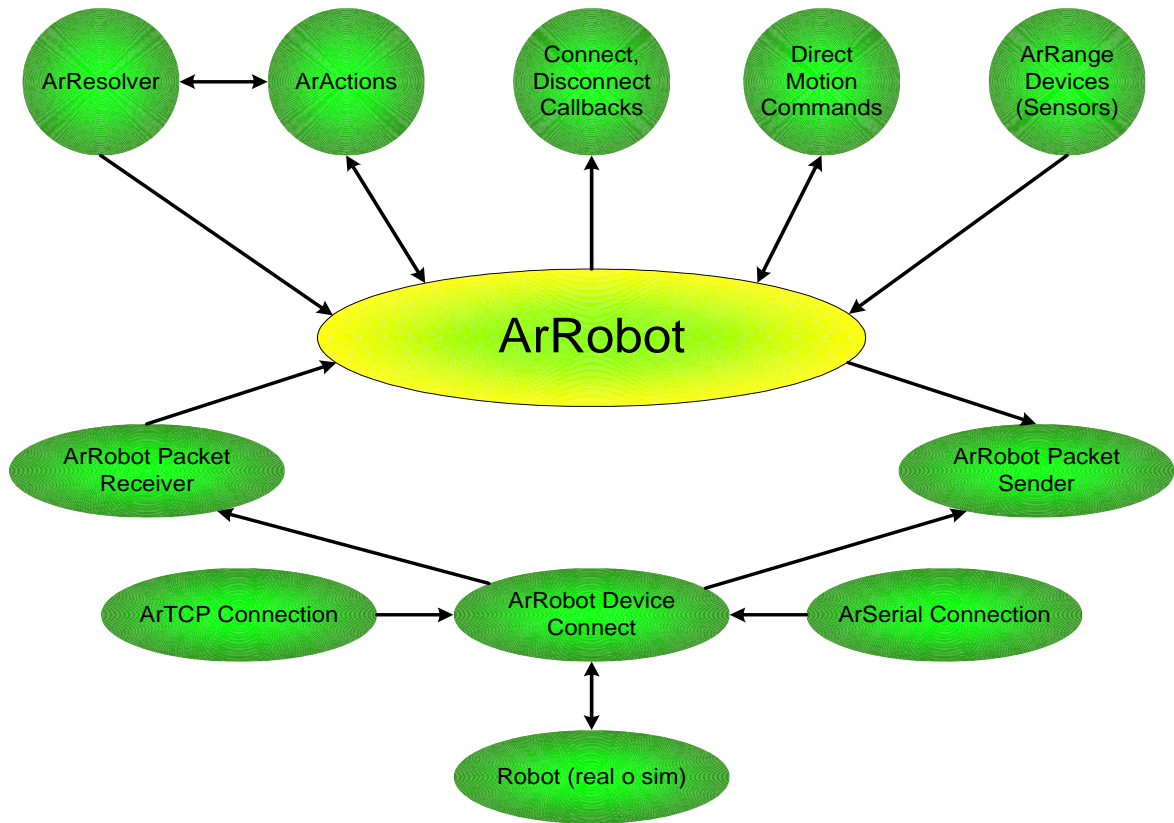


Figura A9 Esquema general del Funcionamiento del ARIA

ANEXO B

ALGEBRA MATRICIAL [25]

Definición de Matriz

Una matriz \mathbf{A} de orden $n \times m$ es un conjunto de elementos a_{ij} ($i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$) dispuestos en m filas y n columnas.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Las matrices se representan en letras mayúsculas en negrita \mathbf{A} . Donde a_{ij} es el elemento que aparece en i -ésima fila de la j -ésima columna de \mathbf{A} .

Vector Columna

Una matriz que consta de m filas y sólo una columna se denomina vector columna

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

Vector Fila

Una matriz que consta de sólo una fila y n columnas se denomina vector fila.

$$\mathbf{A} = (a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n})$$

TIPOS DE MATRICES

Matriz Cuadrada

Es aquella matriz que tiene igual número de columnas que de filas es decir $m = n$, por lo que se puede decir que la matriz es de orden $m \times m$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}_{m \times m}$$

Matriz Diagonal

Es una matriz cuadrada $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m \times m}$ cuyos elementos que no pertenecen a la diagonal principal son nulos o ceros.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

Matriz Identidad

Es una matriz diagonal cuyos elementos de la diagonal principal son todos iguales a uno, se denota con \mathbf{I} .

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz Simétrica

Es una matriz cuadrada de orden m , cuyos elementos satisfacen la condición $a_{ij} = a_{ji}$, además una matriz simétrica es igual a su traspuesta $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$

Matriz Traspuesta

Dada una matriz \mathbf{A} , se llama traspuesta de \mathbf{A} a la matriz que se obtiene cambiando ordenadamente las filas por las columnas. Se representa por \mathbf{A}^T ó \mathbf{A}' .

Matriz Inversa

La matriz inversa de \mathbf{A} es otra matriz que representamos por \mathbf{A}^{-1} y que cumple con:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

Matriz Singular

Es una matriz cuadrada cuyo determinante es igual a cero ($\det \mathbf{A} = 0$)

Matriz Ortogonal

Una matriz de rotación o matriz ortogonal no es más que una matriz cuadrada que cumple la siguiente condición:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{I}$$

La inversa de una matriz ortogonal es igual a su transpuesta. El producto de dos matrices ortogonales es también ortogonal.

Matriz de Rotación

Una matriz \mathbf{A} se define como una matriz de rotación si su determinante es 1 ($\det \mathbf{A} = 1$). La forma general de una matriz de rotación es:

$$\mathbf{R}_z = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\text{sen} \theta \\ \text{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Considerando que el eje de rotación es z .

Valores propios y vectores propios de una matriz

Sea \mathbf{A} una matriz $m \times m$. Se dice que un número, es un valor propio de \mathbf{A} si existe un vector solución \mathbf{v} , no cero, del sistema lineal

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

El vector solución \mathbf{v} se dice que es un vector propio de \mathbf{A} correspondiente al valor propio λ .

A los valores propios y vectores propios se les llama también valores característicos y vectores característicos, respectivamente.

Los valores propios coinciden con las raíces del polinomio característico

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0$$

Matriz definida positiva

Una matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ es *definida positiva* $\mathbf{A} > 0$ si y sólo si existe una constante $\alpha > 0$ tal que $x^T \mathbf{A} x \geq \alpha x^T x = \alpha \|x\|^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Matriz semidefinida positiva

Una matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ es *semidefinida positiva* $\mathbf{A} \geq 0$ si y sólo si $x^T \mathbf{A} x \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Matriz semidefinida negativa

La matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ es *semidefinida negativa* $\mathbf{A} \leq 0$ si $-\mathbf{A}$ es semidefinida positiva.

Derivada de una matriz de funciones

Si $\mathbf{A}(t) = a_{ij}(t)$ es una matriz $m \times n$ cuyos elementos son funciones diferenciables en un intervalo común, entonces se define la derivada de $\mathbf{A}(t)$ como la matriz cuyos elementos son las derivadas de los elementos de $\mathbf{A}(t)$. Es decir:

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt}(t) = \left(\frac{da_{ij}}{dt}(t) \right)_{m \times n}$$

Integral de una matriz de funciones

Si $\mathbf{A}(t) = a_{ij}(t)$ es una matriz $m \times n$ cuyos elementos son funciones continuas en un intervalo que contiene a t y a t_0 , entonces la integral de $\mathbf{A}(t)$ es una matriz

cuyos elementos son las integrales de los elementos de $\mathbf{A}(t)$. Es decir:

$$\int_0^t \mathbf{A}(s) ds = \left(\int_0^t a_{ij}(s) ds \right)_{m \times n}$$

En otras palabras, para derivar o integrar una matriz de funciones, tan sólo hay que derivar o integrar cada uno de sus elementos.