

**ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL**

FACULTAD DE CIENCIAS

UNA PERSPECTIVA ALGEBRAICA AL PROBLEMA DE  
RECUBRIMIENTO DE CONJUNTOS EN MATRICES  
CIRCULANTES.

PROYECTO PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE MATEMÁTICO

DAVID EMMANUEL PAZMIÑO PULLAS  
matematicoloco@hotmail.com

Director: DR. LUIS MIGUEL TORRES C.  
luis.torres@epn.edu.ec

QUITO, 26 DE JUNIO DE 2012

## DECLARACIÓN

Yo DAVID EMMANUEL PAZMIÑO PULLAS , declaro bajo juramento que el trabajo aquí escrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

A través de la presente declaración cedo mis derechos de propiedad intelectual, correspondientes a este trabajo, a la Escuela Politécnica Nacional, según lo establecido por la Ley de Propiedad Intelectual, por su reglamento y por la normatividad institucional vigente.

---

David Emmanuel Pazmiño Pullas

## CERTIFICACIÓN

Certifico que el presente trabajo fue desarrollado por DAVID EMMANUEL PAZ-MIÑO PULLAS , bajo mi supervisión

---

Dr. Luis Miguel Torres C.  
Director del Proyecto

## AGRADECIMIENTOS

A las canciones y a la poesía  
Que están conmigo día a día  
Compartiendo su alegría,  
Sus sueños, sus utopías  
La resignación y la rebeldía,  
Y las noches de melancolía.

A las dudas y al temor  
Y a toda la gente  
Que con bondad y amor  
Lucidez y fervor  
Me ayuda a seguir de frente  
Para algún día ser mejor.

Y a mis amigos a quienes debo  
Esos momentos que no se olvidan,  
A mis amigos a quienes debo  
Un poco más que la vida.

## **DEDICATORIA**

A quienes me apoyaron en los momentos más importantes.

Do Jednost!

**David Emmanuel**

# Índice general

Índice de figuras . . . . .	VII
<b>Resumen</b>	<b>VIII</b>
<b>Abstract</b>	<b>IX</b>
<b>1. Fundamentos algebraicos</b>	<b>1</b>
1.1. Valores y vectores propios . . . . .	1
1.2. Transformada de Fourier discreta . . . . .	2
1.3. Matrices circulantes . . . . .	3
1.3.1. Propiedades de las matrices circulantes . . . . .	5
<b>2. Recubrimiento de conjuntos</b>	<b>12</b>
2.1. Fundamentos de teoría poliedral . . . . .	13
2.1.1. Poliedros y polítopos . . . . .	13
2.1.2. Programas lineales y enteros . . . . .	17
2.2. Resultados poliedrales para el problema de recubrimiento . . . . .	20
2.2.1. El problema de recubrimiento asociado a matrices circulantes . . . . .	21
<b>3. Propiedades algebraicas de <math>C_n^k</math></b>	<b>29</b>
3.1. Desigualdad de rango generalizada . . . . .	29
3.2. Caracterización de la inversa de $C_n^k$ . . . . .	31
<b>4. Algoritmos</b>	<b>35</b>
4.1. Solución al problema de recubrimiento en $C_n^k$ . . . . .	35
4.2. Algoritmo de separación para menores autoalternantes . . . . .	38

# Índice de figuras

2.1. Camino más corto en $K_{29}^3$ . . . . .	26
4.1. Camino más corto en $G^2$ para la solución de PRC- $C_{11}^3$ . . . . .	37
4.2. Conjunto $W = \{0, 2, 4, 11, 13, 15, 27\}$ que define un menor 3-autoalternante (Ejemplo 4.2.1) . . . . .	39
4.3. Esquema del camino más corto en $A_{29}^5(3, (2, 2, 2), 7)$ . . . . .	42

# Resumen

En el presente trabajo se estudiarán algunas propiedades algebraicas de las matrices circulantes, y su relación con el poliedro de recubrimiento. Se caracterizan las inversas de la clase particular de las matrices circulantes con coeficientes en  $\{0, 1\}$ , y se emplean estos resultados para obtener una nueva familia de desigualdades válidas para el poliedro de recubrimiento asociado a ellas. Por otra parte, se presentan algoritmos polinomiales para la solución del problema de recubrimiento asociado a matrices circulantes con coeficientes en  $\{0, 1\}$ , así como para la separación de una clase específica de desigualdades.

# Abstract

In this paper we study some algebraic properties of circulant matrices, and its relation to the covering polyhedron. We characterize the inverse of a particular class of circulant matrices with coefficients in  $\{0,1\}$ , and use these results to obtain a new family of valid inequalities for the covering polyhedron associated to them. On the other hand, we describe polynomial algorithms for solving the covering problem associated to circulant matrices with coefficients in  $\{0,1\}$ , as well as the separation of a specific class of inequalities.

# Capítulo 1

## Fundamentos algebraicos

En el presente capítulo se revisarán algunos conceptos básicos del álgebra lineal que serán utilizados posteriormente. Esta revisión incluye propiedades de la descomposición espectral de un operador lineal de dimensión finita, las cuales están relacionadas con el estudio de los valores y vectores propios de su matriz asociada. Se realiza además un breve estudio del operador matricial conocido como Transformada de Fourier Discreta y de algunas de sus propiedades. Se describen también las matrices circulantes.

En adelante, los índices de matrices y vectores serán contados desde cero.

### 1.1. Valores y vectores propios

En el presente trabajo se abordará el estudio espectral de las matrices circulantes con el objetivo de explotar sus propiedades algebraicas en el contexto de un problema combinatorio. Para cumplir con este objetivo es necesario recordar primero algunos resultados clásicos del álgebra lineal. Para su demostración ver, por ejemplo, [27], [19].

**Definición 1.1.1.** Sea  $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$  una matriz cuadrada con coeficientes complejos. Se define a su polinomio característico como el polinomio  $p_M(\lambda) = \det(M - \lambda I)$ . Los valores de  $\lambda$  que satisfacen  $p_M(\lambda) = 0$  se llaman valores propios de  $M$ .

A partir de la definición anterior, se sigue que el polinomio  $p_M(\lambda)$  tiene exactamente  $n$  raíces complejas (contando las respectivas multiplicidades). Además, para cada raíz de  $p_M(\lambda)$ , el operador lineal asociado a  $M - \lambda I$  no es biyectivo, por lo cual existe un subespacio vectorial no trivial  $V_\lambda \subset \mathbb{C}^{N \times N}$  tal que  $V_\lambda = \ker(M - \lambda I)$ . Dicho espacio  $V_\lambda$  es conocido como el subespacio propio de  $M$  asociado al valor propio  $\lambda$ , y cada elemento  $v$  de  $V_\lambda$  que por tanto verifica la relación  $Mv = \lambda v$  se dice un vector propio de  $M$  asociado al valor propio  $\lambda$ .

**Proposición 1.1.1.** Para toda matriz cuadrada  $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$  invertible existen una matriz  $J \in \mathbb{C}^{n \times n}$  triangular superior y una matriz ortogonal  $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , tales que  $M = BJB^{-1}$ . La matriz  $J$  se conoce como la forma de Jordan asociada a la Matriz  $M$ .

La forma de Jordan asociada a una matriz  $M$  tiene por elementos de la diagonal los valores propios de  $M$ . En caso de que la matriz  $J$  sea diagonal, se dice que  $M$  es diagonalizable.

**Proposición 1.1.2.** Vectores propios asociados a valores propios distintos son ortogonales.

**Corolario 1.1.3.** Si una matriz  $M$  tiene valores propios distintos dos a dos, entonces  $M$  es diagonalizable.

**Proposición 1.1.4.** Si  $J$  es la forma de Jordan asociada a  $M$ , es decir,  $M = BJB^{-1}$ , entonces, para todo polinomio  $f$ ,  $f(M) = Bf(J)B^{-1}$ . En particular, de esto se sigue además que si  $\lambda$  es valor propio de  $M$ , entonces  $f(\lambda)$  es valor propio de  $f(M)$ .

## 1.2. Transformada de Fourier discreta

Sea  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ . Se define a su Transformada de Fourier Discreta (TFD)  $X = \mathcal{F}(x)$  como el vector  $(X_1, X_2, \dots, X_n) \in \mathbb{C}^n$  cuyas componentes son

$$X_k = \sum_{j=1}^n x_j e^{-\frac{2\pi i}{n}kj}, \text{ para } k = 1, \dots, n.$$

Al ser una aplicación lineal entre espacios de dimensión finita, podemos escribir  $\mathcal{F}(x) = Fx$ , donde la matriz  $F = (f_{st})_{n \times n}$  está dada por  $f_{st} = \xi^{(s-1)(t-1)}$ , y  $\xi = e^{-2\pi i/n}$  es la principal raíz  $n$ -ésima de la unidad.

Puesto que la matriz  $F$  es invertible, se sigue que la Transformada de Fourier Discreta representa un isomorfismo en  $\mathbb{C}^n$ .

En algunos casos, la transformada suele definirse como  $\frac{1}{\sqrt{n}}\mathcal{F}(x)$ , con el objetivo de tener una transformación unitaria, es decir una *isometría*. La TFD ha sido usada extensamente en diversos campos como el procesamiento de señales [18], [20] la digitalización de imágenes [26] y en la resolución de sistemas de ecuaciones. Se describen algunos ejemplos de su aplicación, para más detalles se sugiere al lector revisar las respectivas referencias.

En el procesamiento de señales se usa la TFD para eliminar las ondas de más alta frecuencia de una señal discreta y periódica, o cuando se conocen los valores de una señal continua y periódica en instantes discretos. Dada una señal periódica, su TFD es su representación en una base ortogonal en la que la proyección sobre los vectores propios

asociados a los valores propios de menor módulo corresponden a las altas frecuencias de la señal original; por tanto, al eliminar dichas ondas y usar la inversa de la TFD se obtiene una una señal con ruido reducido. Dentro de este campo, se emplea también una transformada multidimensional, descrita por ejemplo en [15].

En el tratamiento de imágenes digitales es necesario tomar en cuenta que una imagen está formada por píxeles, cada uno de los cuales es representado por un número entero o un vector, dependiendo si la imagen es en escala de grises o a color. En la compresión de imágenes, se calcula la transformada de una imagen dada, que será otra imagen del mismo tamaño. En ésta se eliminan los píxeles correspondientes a las altas frecuencias, y luego se obtiene la imagen comprimida al calcular la transformada inversa. El resultado es una imagen que es similar a la original y cuyo almacenamiento requiere menos memoria [26].

Para la mejora o realce de imágenes se usa una idea similar, ya que un patrón de distorsión en una imagen digital (por ejemplo barras verticales u horizontales) puede ser identificado en la transformada de ésta. Al eliminarlo y aplicar posteriormente la transformada inversa, se obtiene una imagen sin el patrón de distorsión, mejorando así la calidad de la imagen sin influir en la memoria necesaria para almacenarla [26].

Esta transformada es muy usada en conexión con las matrices circulantes, que están definidas en la Sección 1.3. Como se observa en dicha sección, los valores propios de una matriz circulante coinciden con la TFD del vector correspondiente a su primera fila.

En la práctica, se emplea para los cálculos computacionales una variación de la TFD llamada Transformada de Fourier Rápida (FFT por sus siglas en inglés). El algoritmo usado para su cálculo tiene una complejidad computacional de  $O(n \log n)$ , y es computacionalmente más eficiente que el algoritmo usado para el cálculo de la TFD, cuya complejidad es de  $O(n^2)$ .

La transformada de Fourier discreta tiene propiedades análogas a su similar continua la cual es estudiada en análisis, para más resultados referentes a la TFD ver, por ejemplo, [20].

### 1.3. Matrices circulantes

Una matriz circulante  $M \in K^{n \times n}$  es una matriz en la que cada fila se obtiene a partir de la fila anterior, mediante la rotación de un elemento a la derecha. Es decir, si su primera fila es  $c^T = (c_0, c_1, \dots, c_{n-1})$ , su  $j$ -ésima fila esta dada por  $c^T P^{j-1}$ , donde

$P$  es la matriz:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 1 & \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A continuación, se exhiben algunas propiedades básicas de esta matriz  $P$ , las que serán de utilidad a lo largo de la presente sección.

**Proposición 1.3.1.** *Los valores propios de la matriz  $P$  son  $\lambda_j = e^{\frac{2\pi i}{n}j}$ ,  $j = 0, 1, \dots, n-1$ , y sus vectores propios correspondientes son  $w_j = (\exp(\frac{2\pi i}{n}lj))_{l=0}^{n-1}$ .*

*Demostración.* El polinomio característico asociado a la matriz  $P$  es  $p(\lambda) = (1)^n (\lambda^n - 1)$ . Es decir, los valores propios de  $P$  son las raíces  $n$ -ésimas de la unidad.

El espacio propio asociado a  $\lambda_j$  es la solución del sistema  $P - \lambda_j I = 0$ . Este espacio es generado por el vector  $w_j = (\exp(\frac{2\pi i}{n}lj))_{l=0}^{n-1}$ .  $\square$

**Proposición 1.3.2.** *La matriz  $P$  es ortogonal, es decir  $PP^T = P^T P = I$ .*

*Demostración.* Sea  $Q = PP^T$ , puesto que  $P = (\delta_{i,j-1(\text{mod } n)})_{n \times n}$ , entonces  $Q = (q_{ij})_{n \times n}$ , con  $q_{ij} = \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{i,k-1(\text{mod } n)} \delta_{k-1(\text{mod } n),j} = \delta_{ij}$ , es decir  $PP^T = I$ .  $\square$

**Proposición 1.3.3.** *La matriz  $P$  verifica la ecuación*

$$P^n - I = 0.$$

*Demostración.* El polinomio característico asociado a  $P$  es  $p(\lambda) = (1)^n (\lambda^n - 1)$ . De esto se sigue directamente que  $p(P) = P^n - I = 0$ .  $\square$

**Lema 1.3.4.**  $P^{n-k} = (P^k)^T$

*Demostración.* De las proposiciones anteriores, se sigue que la siguiente cadena de igualdades es válida.

$$\begin{aligned} (PP^T)^k &= I \\ P^k (P^k)^T &= I = P^n \\ (P^k)^T &= P^{n-k}. \end{aligned}$$

$\square$

Una matriz circulante tiene la forma

$$C = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-2} & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & c_1 & & c_{n-2} \\ \vdots & c_{n-1} & c_0 & \ddots & \vdots \\ c_2 & & \ddots & \ddots & c_1 \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-1} & c_0 \end{pmatrix}.$$

Observar que  $C$  queda determinada por su primera fila, por lo que se empleará en adelante la notación  $C = \text{Circ}(c_0, c_1, \dots, c_{n-1})$ . Además, se puede verificar que

$$C = \sum_{j=0}^{n-1} c_j P^j. \quad (1.1)$$

Este tipo de matrices son usadas en el procesamiento digital de imágenes [15], [26] debido a que son diagonalizadas por medio de una Transformada de Fourier Discreta. También son usadas en encriptación de datos [23]. Además, estas matrices representan funciones en el grupo cíclico  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Numéricamente, la solución de un sistema de ecuaciones asociado a una matriz circulante es menos compleja computacionalmente que para el caso general, pues se pueden aprovechar las propiedades de la Transformada de Fourier Discreta.

### 1.3.1. Propiedades de las matrices circulantes

A continuación se recopilan algunos resultados relativos a las matrices circulantes en general. Los detalles omitidos en algunas demostraciones pueden ser consultados, por ejemplo, en [17].

Dado un campo  $K$ , una  $K$ -álgebra  $A$  es un  $K$ -espacio vectorial, en el cual existe además un producto  $\cdot : A \times A \longrightarrow A$  que es bilineal respecto a las operaciones de  $A$  como espacio vectorial. Es decir,

$$\begin{aligned} (\lambda u) \cdot v &= \lambda(u \cdot v), \quad \forall u, v \in A, \lambda \in K, \\ u \cdot (v + w) &= u \cdot v + u \cdot w, \quad \forall u, v, w \in A, \\ (u + v) \cdot w &= u \cdot w + v \cdot w, \quad \forall u, v, w \in A. \end{aligned}$$

Una base para la  $K$ -álgebra es una base de  $A$  como  $K$ -espacio vectorial.

**Observación 1.3.1.** El conjunto  $\mathcal{M}_{n \times n} \subset K^{n \times n}$  de las matrices cuadradas con las operaciones usuales de suma, producto por escalar y producto matricial forma una  $K$ -álgebra de dimensión  $n^2$ .

**Proposición 1.3.5.** Sea  $K$  un campo. El conjunto  $\mathcal{C}_n \subset K^{n \times n}$  de las matrices circulantes con las operaciones usuales de suma, producto por escalar y producto matricial forma una  $K$ -álgebra de dimensión  $n$ . El conjunto  $\mathcal{B} = \{P^j; 0 \leq j \leq n-1\}$  es una base para esta  $K$ -álgebra.

*Demostración.* A partir de (1.1), es inmediato verificar que  $\mathcal{C}_n$  dotado de la suma matricial y el producto por escalar es un  $K$ -espacio vectorial de dimensión  $n$  con base  $\mathcal{B}$ , además, para todo par  $P^k, P^j$  de elementos de  $\mathcal{B}$ , el producto  $P^k P^j = P^{k+j} \in \mathcal{B} \subset \mathcal{C}_n$ . Puesto que el producto de matrices distributivo respecto a la suma y homogéneo respecto al producto por un escalar, se tiene el resultado deseado.  $\square$

**Corolario 1.3.6.** En caso de que una matriz circulante  $C$  sea invertible, su inversa también es una matriz circulante.

*Demostración.* De la proposición anterior y de la observación, se sigue que  $\mathcal{C}_n$  es una subálgebra de  $\mathcal{M}_{n \times n}$ . En particular, puesto que la matriz  $P^0 = I \in \mathcal{C}_n$ , se sigue que  $\mathcal{C}_n$  es un subanillo de  $\mathcal{M}_{n \times n}$ ; por lo cual los inversos multiplicativos de los elementos invertibles de  $\mathcal{C}_n$  (para el producto usual de matrices en  $\mathcal{M}_{n \times n}$ ) pertenecen también a  $\mathcal{C}_n$ .  $\square$

**Proposición 1.3.7.** Sea  $C = \sum_{j=0}^{n-1} c_j P^j \in \mathcal{C}_n$ . Entonces,  $C^T = \sum_{j=0}^{n-1} c_j P^{n-j} \in \mathcal{C}_n$ .

*Demostración.* Sea  $C = \sum_{j=0}^{n-1} c_j P^j$ . Puesto que del Lema 1.3.4 se conoce que  $P^{n-k} = (P^k)^T$ , se sigue directamente que  $C^T = \sum_{j=0}^{n-1} c_j P^{n-j} \in \mathcal{C}_n$ .  $\square$

En nuestro estudio nos limitaremos al caso particular  $K = \mathbb{Q} \subset \mathbb{C}$ . Existen también estudios sobre estas matrices en campos finitos y sobre anillos, ver por ejemplo [8].

Dado un anillo  $A$ , el conjunto de polinomios con coeficientes en  $A$  con las operaciones usuales de suma y producto se denomina el *anillo de polinomios sobre  $A$*  y se denota por  $A[x]$ . Dado un polinomio  $p(x) \in A[x]$ , el anillo  $A[x]/p(x)$  está formado por las clases de equivalencia módulo  $p(x)$ . Dos polinomios  $q(x), r(x)$  están en la misma clase de equivalencia módulo  $p(x)$  si y solamente si  $p(x) | q(x) - r(x)$ .

**Observación 1.3.2.** El anillo  $\mathbb{Q}[x]/(x^n - 1)$  es además un álgebra de dimensión  $n$ . Cada elemento de esta álgebra es la clase de equivalencia representada por un polinomio de grado inferior o igual a  $n-1$ . Una base para esta álgebra está dada por  $\{[x^i] : 0 \leq i \leq n-1\}$ .

**Proposición 1.3.8.** *Existe un isomorfismo  $\varphi$  entre el álgebra de las matrices circulares  $\mathcal{C}_n$  y el álgebra  $\mathbb{Q}[x]/(x^n - 1)$ .*

*Demostración.* Basta tomar el homomorfismo  $\varphi : \mathcal{C}_n \longrightarrow \mathbb{Q}[x]/(x^n - 1)$ , definido por  $\varphi(P^i) = x^i$ ,  $i = 0, \dots, n-1$ .  $\square$

**Observación 1.3.3.** *Un polinomio  $p(x)$  es invertible módulo  $x^n - 1$  si y sólo si  $\gcd(x^n - 1, p(x)) = 1$ . Esto se sigue directamente de la definición del máximo común divisor entre dos polinomios.*

Por la proposición anterior, una matriz circular  $C \in \mathcal{C}_n$  es invertible si y sólo si su polinomio asociado  $\varphi(C)$  es coprimo con  $x^n - 1$ .

**Proposición 1.3.9.** *Si  $n$  es un número primo, los elementos  $C$  de  $\mathcal{C}_n$  que no son invertibles son exactamente aquellos que satisfacen  $\mathbb{1}^T C = 0$ , o aquellos en los que todas las entradas son iguales.*

*Demostración.* Si  $n$  es primo, la única factorización con coeficientes racionales (salvo producto por escalar) de  $x^n - 1$  está dada por  $x^n - 1 = (x - 1) \sum_{k=0}^{n-1} x^k$ .

Por tanto, un polinomio  $p(x)$  en  $\mathbb{C}[x]/(x^n - 1)$  es invertible si y sólo si  $p(x)$  es coprimo con  $q(x) = \sum_{k=0}^{n-1} x^k$  y con  $r(x) = x - 1$ , por lo que los elementos no invertibles son múltiplos de  $r(x)$  o de  $q(x)$ . De la Proposición 1.3.8, se sigue que para  $C = \sum_{k=0}^{n-1} c_k P^k$ , si  $r(x) \mid \varphi(C)$  entonces existe  $d(x) = \sum_{k=0}^{n-1} d_k x^k$  tal que

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} c_k x^k &= (x - 1) \sum_{k=0}^{n-1} d_k x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (d_{k-1} - d_k) x^k, \end{aligned}$$

(donde los índices son tomados módulo  $n$ ). De esto se sigue que

$$\begin{aligned} \mathbb{1}^T C &= \sum_{k=0}^{n-1} c_k \mathbb{1}^T \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (d_{k+1} - d_k) \mathbb{1}^T \\ &= 0. \end{aligned}$$

Recíprocamente, si  $\mathbb{1}^T C = 0$ , tomando  $\phi(x) = \sum_{k=0}^{n-1} d_k x^k$ , con  $d_0 = 0$ ,  $d_{i-1} = d_i + c_i$ ,  $1 \leq i \leq n-1$ , se sigue que  $\varphi(C) = \phi(x)(x - 1)$ .

Análogamente,  $q(x) \mid \varphi(C)$  si y sólo si existe  $d(x) = \sum_{k=0}^{n-1} d_k x^k$  tal que

$$\sum_{k=0}^{n-1} c_k x^k = \sum_{j=0}^{n-1} x^j \sum_{k=0}^{n-1} d_k x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \left( \sum_{j=0}^{n-1} d_j \right) x^k,$$

por tanto,  $c_i = \sum_{j=0}^{n-1} d_j$ ,  $0 \leq i \leq n-1$ . Es decir  $C = \text{Circ}(c_0, \dots, c_{n-1})$  tiene todas sus entradas iguales.  $\square$

**Proposición 1.3.10.** *Los valores propios de una matriz  $C = \text{Circ}(c_0, c_1, \dots, c_{n-1})$  están dados por  $\lambda_m = \sum_{j=0}^{n-1} c_j \exp(\frac{2\pi i}{n} m j)$ , para  $0 \leq m \leq n-1$ , y sus vectores propios correspondientes están dados por  $w_m = (\exp(\frac{2\pi i}{n} m j))_{j=0}^{n-1}$ .*

*Demostración.* Dado que la matriz circulante  $C$  se expresa como  $C = \sum_{j=1}^n c_j P^{j-1}$ , y puesto que los valores propios de la matriz  $P$  son  $\lambda_m = \exp(\frac{2\pi i}{n} m)$ ,  $m = 1, 2, \dots, n$ , el resultado se sigue directamente de la Proposición 1.1.4  $\square$

Se sigue directamente de la definición de la TFD y de la proposición anterior que la transformada de Fourier discreta del vector  $(c_0, c_1, \dots, c_{n-1})$  coincide con la diagonal de la matriz de valores propios de  $C = \text{Circ}(c_0, c_1, \dots, c_{n-1})$ .

Además, de la proposición anterior obtenemos el siguiente resultado:

**Corolario 1.3.11.** *Sea  $C = \text{Circ}(c_0, c_1, \dots, c_{n-1})$  una matriz circulante invertible, entonces*

$$(C)^{-1} = \text{Circ}(\mathcal{F}^{-1} \text{invvec}(\mathcal{F}(c_0, c_1, \dots, c_{n-1}))),$$

donde  $\text{invvec}(v)$  el vector cuyas entradas son los inversos multiplicativos del vector  $v$ .

Para el cálculo de la inversa de una matriz circulante general mediante este método, basta conocer la transformada de Fourier discreta del vector  $(c_0, c_1, \dots, c_{n-1})$ . La complejidad computacional de la inversión depende por tanto del algoritmo que se usa para calcular dicha transformada, y se puede alcanzar el orden  $O(n \log n)$  si se emplea el algoritmo FFT. Esta misma propiedad permite resolver de manera eficiente un sistema de ecuaciones asociado a una matriz circulante.

En el presente trabajo nos concentraremos en una clase particular de matrices circulantes de orden  $n \times n$  cuya primera fila tiene  $k$  1's consecutivos, seguidos de  $n - k$  ceros, con  $0 < k < n$ . Es decir, nos interesan las matrices  $C_n^k \in \mathcal{C}_n$  cuyos elementos están dados por

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } j - i \equiv t \pmod{n}, 0 \leq t \leq k - 1, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Se puede caracterizar la invertibilidad de  $C_n^k$  en una forma similar a la de la Proposición 1.3.9. Para esto demostraremos en primer lugar dos lemas previos.

**Lema 1.3.12.** Sean  $n, k \in \mathbb{Z}$ , entonces  $\gcd(\varphi(C_n^k), x-1) = 1$ .

*Demostración.* Puesto que  $C_n^k = \sum_{j=0}^k P^j$ , se tiene que  $\varphi(C_n^k) = \sum_{j=0}^k x^j$ . Si denotamos  $\gcd(\varphi(C_n^k), x-1) = p(x) \neq 1$ , puesto que  $(x-1)$  es un polinomio de grado 1, esto sucede si y sólo si  $p(x) = x-1$ . Entonces existe  $q(x) \in \mathbb{Z}[x]$ , tal que  $\varphi(C_n^k)(x) = q(x)(x-1)$ , en particular se tendrá que  $\varphi(C_n^k)(1) = q(1)(1-1)$ , lo cual es una contradicción pues  $\varphi(1) = k \neq 0$ , lo que muestra que  $p(x) = 1$ .  $\square$

**Lema 1.3.13.** Sean  $n, k \in \mathbb{Z}$ , tales que  $\gcd(n, k) = d$ , entonces  $\gcd(x^n - 1, x^k - 1) = x^d - 1$ .

*Demostración.* Puesto que se conocen todas las raíces del polinomio  $x^n - 1$  en  $\mathbb{C}[x]$ , éste puede ser expresado como producto de polinomios de grado 1, como

$$x^n - 1 = \prod_{j=0}^{n-1} \left( x - e^{\frac{2\pi i}{n}j} \right),$$

de forma similar se tiene que

$$x^k - 1 = \prod_{m=0}^{k-1} \left( x - e^{\frac{2\pi i}{k}m} \right).$$

Por tanto,  $\gcd(x^n - 1, x^k - 1)$  es el producto de los factores comunes de primer grado entre  $x^n - 1$  y  $x^k - 1$ . Un polinomio de primer grado  $x - a$  es divisor común de  $x^n - 1$  y  $x^k - 1$  si y sólo si  $a$  puede ser expresado como  $a = e^{\frac{2\pi i}{n}j} = e^{\frac{2\pi i}{k}m}$ , donde  $0 \leq j \leq n-1$ ,  $0 \leq m \leq k$ . Es decir, los valores  $m, j \in \mathbb{Z}$ , son soluciones de la ecuación diofántica

$$\frac{j}{n} = \frac{m}{k}, \quad 0 \leq j \leq n-1, \quad 0 \leq m \leq k. \quad (1.2)$$

De manera equivalente,  $jk = nm, 0 \leq j < n, 0 \leq m < k$ .

Sean  $n_1, k_1$  tales que  $n = n_1d$  y  $k = k_1d$ , entonces la ecuación toma la forma  $jk_1 = n_1m$  con  $\gcd(n_1, k_1) = 1$ . De aquí se sigue que  $k_1|m$

y  $n_1|j$ . Así, las soluciones para (1.2) están dadas por  $j = tn_1, m = tk_1, 0 \leq t < \frac{k}{k_1} = \frac{n}{n_1} = d$ . Por tanto, las raíces de  $\gcd(x^n - 1, x^k - 1)$  son  $\left\{ e^{\frac{2\pi i}{n}tn_1} \right\}_{t=0}^{d-1} = \left\{ e^{\frac{2\pi i}{d}t} \right\}_{t=0}^{d-1}$ , y entonces,  $\gcd(x^n - 1, x^k - 1) = \prod_{t=0}^{d-1} \left( x - e^{\frac{2\pi i}{d}t} \right) = x^d - 1$ .  $\square$

**Lema 1.3.14.** Una matriz  $C_n^k$  es invertible si y solamente si  $\gcd(n, k) = 1$ .

*Demostración.* Sea  $d = \gcd(n, k)$ . Partiendo del hecho que  $\varphi(C_n^k) = \sum_{j=0}^{k-1} x^j$ , se sigue que  $(x-1)\varphi(C_n^k) = x^k - 1$ . Del Lema 1.3.13 se tiene que  $\gcd((x^n - 1), (x^d - 1)) = \gcd((x-1)\varphi(C_n^k), (x-1)\sum_{j=0}^{n-1} x^j) = x^d - 1 = (x-1)\sum_{j=0}^{d-1} x^j$ . De esto se sigue que  $\gcd(\varphi(C_n^k), \sum_{j=0}^{n-1} x^j) = \sum_{j=0}^{d-1} x^j$ . Por el Lema 1.3.12,  $\gcd(\varphi(C_n^k), x-1) = 1$ , y por tanto,  $\gcd(\varphi(C_n^k), x^n - 1) = \sum_{j=0}^{d-1} x^j$ . En particular,  $\gcd(\varphi(C_n^k), x^n - 1) = 1$  si y sólo si  $d = 1$ . De la Observación 1.3.3 se sigue el enunciado.  $\square$

**Proposición 1.3.15.** Los valores propios de una matriz circulante  $C_n^k$  están dados por  $\lambda_m = \sum_{j=0}^{k-1} \exp(\frac{2\pi i}{n}mj)$ , para  $0 \leq m \leq n-1$ .

*Demostración.* Se sigue directamente de la Proposición 1.3.10.  $\square$

**Proposición 1.3.16.** Para toda matriz circulante  $C_n^k$ , el espacio propio asociado al valor propio  $\lambda_0 = k$ , es el espacio de dimensión 1 generado por  $\mathbb{1} \in \mathbb{R}^n$ . Además, no existe otro vector propio de  $C_n^k$  que tenga todas sus coordenadas positivas.

*Demostración.* Los valores propios de  $C_n^k$  están dados por la fórmula

$$\lambda_j = \sum_{l=0}^{k-1} e^{2\pi \frac{jl}{n}l}, \quad j = 0, \dots, n-1.$$

De esto se sigue que para  $j = 0$  se tiene el valor propio  $\lambda_0 = k$ , además, para  $j \neq 0$ ,  $|\lambda_j| < \sum_{l=0}^{k-1} \left| e^{2\pi \frac{jl}{n}l} \right| = k$ . Es decir, el valor propio  $\lambda_0 = k$  tiene multiplicidad uno.

De la Proposición 1.1.2, los vectores propios asociados a  $\lambda_j$ ,  $1 \leq j \leq n-1$ , son todos ortogonales al vector  $\mathbb{1}$ . Por lo tanto, ninguno de éstos tiene todas sus coordenadas positivas.  $\square$

De la definición de las matrices  $C_n^k$ , además se verifica que si  $(C_n^k)^T = d_{ij}$

$$d_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i - j \equiv t \pmod{n}, \quad 0 \leq t \leq k-1, \\ 0, & \text{en caso contrario;} \end{cases}$$

por tanto se puede expresar la transpuesta de una matriz  $C_n^k$  como

$$(C_n^k)^T = P^{1-k} C_n^k. \quad (1.3)$$

**Proposición 1.3.17.** Los valores propios de la matriz  $(C_n^k)^T$  son los conjugados de los correspondientes valores propios de  $C_n^k$ .

*Demostración.* Sea  $\lambda_j = \sum_{l=0}^{k-1} e^{2\pi \frac{jl}{n} i}$  un valor propio de  $C_n^k$ . De las Proposiciones 1.3.15 y 1.3.7 se sigue que el correspondiente valor propio de  $(C_n^k)^T$  es

$$\begin{aligned}\mu_j &= \sum_{l=0}^{k-1} e^{2\pi \frac{(n-j)l}{n} i} \\ &= \sum_{l=0}^{k-1} e^{2\pi \frac{-jl}{n} i} \\ &= \sum_{l=0}^{k-1} \overline{e^{2\pi \frac{jl}{n} i}} \\ &= \overline{\lambda_j}.\end{aligned}$$

□

# Capítulo 2

## Recubrimiento de conjuntos

Dados un conjunto  $S$ , con  $|S| = m$ , una familia  $\mathcal{T} = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  de subconjuntos de  $S$ , y un vector de pesos  $c \in \mathbb{R}^n$ , el problema de recubrimiento consiste en encontrar una subfamilia  $\mathcal{M} \subset \mathcal{T}$  de peso  $\sum_{X_i \in \mathcal{M}} c_i$  mínimo tal que todo elemento de  $S$  pertenezca al menos a un conjunto en  $\mathcal{M}$ , es decir, tal que  $\bigcup_{X_i \in \mathcal{M}} X_i = S$ . Este problema puede formularse como un programa lineal entero

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & c^T x, \\ & Ax \geq \mathbb{1}, \\ & x \in \{0, 1\}^n, \end{aligned} \tag{PR}$$

donde las columnas de  $A \in \{0, 1\}^{m \times n}$  son los vectores de incidencia de cada miembro de  $\mathcal{T}$  y las variables de decisión indican cuáles conjuntos de  $\mathcal{T}$  son seleccionados dentro de la subfamilia  $\mathcal{M}$ :

$$x_i = 1 \iff X_i \in \mathcal{M}.$$

El problema de recubrimiento de conjuntos es un problema clásico de optimización combinatoria y se presenta en diversas aplicaciones, en especial las que tienen que ver con la ubicación estratégica de objetos dentro de una red, como por ejemplo el enrutamiento vehicular [11], la localización de antenas transmisoras [16], de estaciones de radio [29], localización de guardias en galerías de arte [22], [28], asignación de horarios [24], [25] entre otros.

Es conocido que este problema es NP-difícil, por lo que es poco probable encontrar un algoritmo eficiente para su solución general. Aún así, algoritmos polinomiales han sido formulados para ciertos casos particulares (ver, por ejemplo, [9]).

## 2.1. Fundamentos de teoría poliedral

En esta sección se exponen algunos conceptos y resultados básicos que serán usados en el resto del documento, en especial en lo referente a la geometría poliedral, así como algunos teoremas fundamentales de la programación lineal.

Recordemos que un programa lineal puede formularse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \text{máx } & c^T x, \\ & Ax \leq b, \\ & x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

donde  $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{Q}^m$  y  $c \in \mathbb{Q}^n$ . Es decir, un programa lineal consiste en optimizar una función lineal sobre una *región factible*  $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$  definida por restricciones lineales. Este conjunto  $P$  se conoce como *poliedro* y a continuación se describen algunas propiedades del mismo.

### 2.1.1. Poliedros y polítopos

En adelante,  $V$  denotará un espacio vectorial sobre el campo de los reales y  $X := \{x_i\}_{i=1}^k$  un subconjunto finito de  $V$ .

Una *combinación afín* es una combinación lineal  $x = \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i$  tal que  $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$ . Un conjunto  $W \subset V$  cerrado para la operación de combinación afín se llama *espacio afín*. La *envolvente afín* de un conjunto  $X \subset V$ , es el conjunto

$$\text{aff}(X) = \left\{ \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i : \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1, x_i \in X \right\}.$$

Un conjunto  $X = \{x_i\}_{i=1}^k$  se dice *afínmente independiente*, si ninguno de sus elementos puede ser descrito como combinación afín de los demás.

Dado un espacio afín  $A$ , se conoce que la cardinalidad de cualquier conjunto  $X \subset A$  afínmente independiente y maximal respecto a la inclusión es la misma. Este valor se emplea para definir la dimensión de  $A$  por

$$\dim(A) = |X| - 1.$$

Un conjunto  $\{x\}$  formado por un sólo punto es un espacio afín de dimensión 0. Por otra parte, dados  $x, b \in \mathbb{R}^n$  la recta  $\langle x \rangle + b = \{tx + b, t \in \mathbb{R}\}$  es un espacio afín de dimensión 1. Finalmente, si  $c \in \mathbb{R}^n, d \in \mathbb{R}$ , el hiperplano  $\{x : c^T x = d\}$  es un espacio afín de dimensión  $n - 1$ .

Dado  $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}^n$ , se define la dimensión de su envolvente afín por

$$\dim(\text{aff}(M)) = \dim(\langle M - x \rangle),$$

donde  $x$  es un elemento fijo, pero arbitrario, de  $M$ ,  $M - x =: \{y - x : y \in M\}$ , y  $\langle Y \rangle$  indica el espacio vectorial generado por  $Y$ .

Una *combinación cónica* de elementos de  $X = \{x_i\}_{i=1}^k$  es una combinación lineal  $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$  con coeficientes no negativos. Análogamente, la *envolvente cónica* de  $X$  es el conjunto

$$\text{cone}(X) = \left\{ \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i : x_i \in X, \alpha_i \geq 0 \right\}.$$

La dimensión de un cono se define como la dimensión de su envolvente afín.

Un conjunto  $M \subset \mathbb{R}^n$  se dice *convexo* si para todo par de puntos  $x, y \in M$ , y para todo  $t \in [0, 1]$ ,  $tx + (1 - t)y \in M$ .

**Proposición 2.1.1.** *Sea  $\{M_i\}_{i \in I}$  una familia de conjuntos convexos, entonces  $M = \bigcap_{i \in I} M_i$  es un conjunto convexo.*

*Demostración.* Sean  $x, y \in M$ . Entonces,  $x, y \in M_i$ , para todo  $i \in I$ . Por tanto, para todo  $t \in [0, 1]$ , y para todo  $i \in I$  se tiene  $tx + (1 - t)y \in M_i$ . Es decir,  $tx + (1 - t)y \in M$ , y  $M$  es convexo.  $\square$

Por otra parte, la unión de conjuntos convexos no necesariamente es convexa. Por ejemplo, si  $x \neq y \in \mathbb{R}^n$ ,  $\{x\}$  e  $\{y\}$  son convexos mientras que  $\{x\} \cup \{y\} = \{x, y\}$  no lo es.

**Definición 2.1.1.** *Dado  $X = \{x_i\}_{i=1}^k \subset \mathbb{R}^n$ , se define a la envolvente convexa de  $X$  como el conjunto*

$$\text{conv}(X) = \left\{ \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i : \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0, x_i \in X \right\}.$$

**Definición 2.1.2.** *Sean  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  y  $b \in \mathbb{R}^m$ . El conjunto  $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ , el cual es la intersección de un número finito de semiespacios afines cerrados de  $\mathbb{R}^n$ , se conoce como poliedro.*

Un poliedro acotado se conoce como *polígono*.

**Proposición 2.1.2.** *Un poliedro es un conjunto convexo.*

*Demostración.* Por la Proposición 2.1.1, basta verificar que cada semiespacio afín de  $\mathbb{R}^n$  es un conjunto convexo. En efecto, si  $H = \{x \in \mathbb{R}^n : c^T x \leq d\}$ , tomando cualquier

par de puntos,  $x, y \in H$  y para todo  $t \in [0, 1]$  se verifica

$$c^T (tx + (1 - t)y) = tc^T x + (1 - t)c^T y \leq td + (1 - t)d = d,$$

de donde  $tx + (1 - t)y \in H$ . □

Dados dos conjuntos  $A, B \subset \mathbb{R}^n$ , se define su suma de Minkowski como

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}.$$

El siguiente resultado es una caracterización fundamental de los poliedros. Expresa que todo poliedro puede considerarse alternativamente como una intersección finita de semiespacios cerrados o la suma de Minkowski entre la envolvente convexa y la envolvente cónica de dos conjuntos finitos. (Para la demostración de este resultado, ver, por ejemplo [31]).

**Teorema 2.1.3.** *Un conjunto  $P \subset \mathbb{R}^n$  es un poliedro si y sólo si existen conjuntos finitos  $V, Y \subset \mathbb{R}^n$  tales que  $P = \text{conv}(V) + \text{cone}(Y)$ .*

Debido a que un polítopo es un conjunto acotado, mientras que un cono no lo es, se tiene la siguiente observación.

**Observación 2.1.1.** *Todo polítopo puede ser expresado como la envolvente convexa de un número finito de puntos.*

La dimensión de un poliedro  $P \subset \mathbb{R}^n$ , se define como la dimensión de su envolvente afín,  $\dim P := \dim(\text{aff}(P))$ . Si  $\dim P = n$  se dice que  $P$  es de dimensión completa.

**Definición 2.1.3.** *Sean  $c \in \mathbb{R}^n, d \in \mathbb{R}$ , y  $P$  un poliedro en  $\mathbb{R}^n$ . Se dice que la desigualdad lineal  $c^T x \leq d$  es válida para  $P$  si todo punto de  $P$  la satisface, es decir, si  $c^T x \leq d, \forall x \in P$ .*

**Proposición 2.1.4.** *Dado un conjunto  $\{c_{(i)}^T x \leq d_i\}_{i=1}^k$ , de desigualdades válidas para un poliedro  $P$ , y dado  $t \in \mathbb{R}_+^k$ , la desigualdad  $\sum_{i=1}^k t_i c_{(i)}^T x \leq \sum_{i=1}^k t_i d_i$  es válida para  $P$ .*

*Demostración.* Puesto que  $t_i \geq 0$ , para todo  $1 \leq i \leq k$ , se tiene que  $\forall x \in P, t_i c_{(i)}^T x \leq t_i d_i$ . Sumando estas desigualdades válidas se sigue que  $\sum_{i=1}^k t_i c_{(i)}^T x \leq \sum_{i=1}^k t_i d_i$  es válida para  $P$ . □

**Definición 2.1.4.** *Una desigualdad válida  $c^T x \leq d$  se dice desigualdad de soporte si existe  $\hat{x} \in P$  tal que  $c^T \hat{x} = d$ . El hiperplano definido por  $c^T x = d$  se llama entonces hiperplano de soporte del poliedro  $P$ .*

**Definición 2.1.5.** Un conjunto de la forma

$$F := P \cap \{x \in \mathbb{R}^n : c^T x = d\},$$

donde  $c^T x \leq d$  es una desigualdad válida para  $P$  se llama una cara de  $P$ .

Observar que  $F = P \cap \{x \in \mathbb{R}^n : c^T x \leq d\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n : -c^T x \leq -d\}$ , por lo que una cara de un poliedro es en sí misma un poliedro. Consecuentemente, la dimensión de una cara es la dimensión de su envolvente afín:  $\dim F := \dim(\text{aff}(F))$ .

El poliedro  $P$  en sí mismo es una cara de  $P$ , pues la desigualdad  $0x \leq 0$  es válida para  $P$ . Además, debido a que la desigualdad  $0x \leq 1$  es válida, se tiene que el conjunto vacío es también siempre una cara de  $P$ . El resto de caras de un poliedro son llamadas caras propias.

Las caras de dimensión 0, 1 y  $\dim(P)-1$ , se denominan respectivamente, vértices, aristas y facetas de  $P$ . En particular, las facetas son las caras propias maximales. Si  $\{x \in \mathbb{R}^n : c^T x = d\}$  es el hiperplano de soporte de una faceta  $F$  de  $P$ , se dice entonces que la desigualdad  $c^T x \leq d$  induce una faceta.

A continuación se revisan algunas propiedades de las caras de un poliedro  $P$ .

**Proposición 2.1.5.** Sean  $F_1, F_2$  caras de un poliedro  $P$ , entonces  $F = F_1 \cap F_2$  es una cara de  $P$ .

*Demostración.*  $F_1$  y  $F_2$  pueden ser descritas como  $\{x \in \mathbb{R}^n : c_1^T x = d_1\} \cap P = F_1$  y  $P \cap \{x \in \mathbb{R}^n : c_2^T x = d_2\} = F_2$ , respectivamente, donde las desigualdades  $c_1^T x \leq d_1$  y  $c_2^T x \leq d_2$ , son válidas para  $P$ . Se tendrá entonces que para todo  $x \in F$ ,  $c_1^T x + c_2^T x = d_1 + d_2$ , y por la Proposición 2.1.4 se sigue que  $c_1^T x + c_2^T x \leq d_1 + d_2$  es una desigualdad válida para  $P$ . Luego  $F = P \cap \{x \in \mathbb{R}^n : c_1^T x + c_2^T x = d_1 + d_2\}$  es una cara de  $P$ .  $\square$

**Proposición 2.1.6.** Sea  $P$  un poliedro de dimensión  $d$ . Toda faceta  $F$  de  $P$  contiene  $d$  puntos afínmente independientes

*Demostración.* Por la definición de faceta,  $\dim(F) = d - 1$ . Luego,  $F$  tiene  $d$  puntos afínmente independientes.  $\square$

Finalmente, se presenta un resultado de gran importancia para la programación lineal, para su demostración, ver, por ejemplo, [13, sección 6.2].

**Proposición 2.1.7.** Si un poliedro tiene un vértice, entonces todas sus caras tienen al menos un vértice.

## 2.1.2. Programas lineales y enteros

En la programación lineal, se estudian problemas de optimización de funciones lineales sobre poliedros. Consideraremos en adelante el siguiente programa lineal, al que llamaremos primal:

$$(PL) \begin{cases} \text{máx} & c^T x, \\ & Ax \leq b, \\ & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

con  $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{Q}^m$  y  $c \in \mathbb{Q}^n$ . El conjunto de soluciones factibles  $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$  es un poliedro. Si  $P = \emptyset$ , se dice que (PL) es un *programa no factible*. Por otra parte, del Teorema 2.1.3, se conoce que existen conjuntos finitos  $V, Y$  tales que  $\text{conv}(V) + \text{cone}(Y) = P$ . Si  $c \in \text{cone}(Y)$ , puede demostrarse que  $P$  contiene una sucesión de puntos  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$  tal que la sucesión correspondiente de valores de la función objetivo  $(c^T x_i)_{i \in \mathbb{N}}$  es no acotada en  $\mathbb{R}$ . En este caso, se dice que (PL) es un *programa no acotado*.

Si (PL) es factible y acotado, entonces puede demostrarse que existe al menos un  $x^* \in P$  tal que  $c^T x \leq c^T x^*, \forall x \in P$ . Un punto  $x^*$  con esta propiedad es una solución óptima de (PL), y  $c^T x^* \in \mathbb{R}$  se conoce como el valor óptimo de (PL). Notar que  $c^T x = c^T x^*$  es un hiperplano de soporte para  $P$ . Luego, el conjunto de las soluciones óptimas para (PL) es una cara de  $P$ . En caso de que  $P$  tenga al menos un vértice, de la Proposición 2.1.7 se sigue que existe un vértice de  $P$  que es solución óptima de (PL). Estas soluciones asociadas a vértices de  $P$  son llamadas soluciones básicas.

Si existe  $y \in \mathbb{R}^m$ ,  $y \geq 0$ , tal que  $A^T y = c$ , se tendrá entonces que  $b^T y \geq (Ax)^T y = x^T A^T y = c^T x$ . Es decir, el valor de  $y^T b$  es una cota superior para el valor óptimo de la función objetivo de (PL).

Con esta motivación se define el *programa dual* a (PL) como el problema de encontrar una cota superior de valor mínimo. El mismo puede formularse como un nuevo programa lineal:

$$(DL) \begin{cases} \text{mín} & b^T y, \\ & A^T y = c, \\ & y \geq 0. \end{cases}$$

Un resultado fundamental de la programación lineal es que los valores óptimos de (PL) y (DL) coinciden. Esto se conoce como *Teorema de la Dualidad* [30, Capítulo 1].

**Teorema 2.1.8.** *Los valores óptimos de la función objetivo de un problema de progra-*

mación lineal y el de su programa dual coinciden, es decir,

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & c^T x \\ \text{s. t.} & Ax \leq b, \\ & x \in \mathbb{R}^n. \end{array} = \begin{array}{ll} \text{mín} & b^T y \\ \text{s. t.} & A^T y = c, \\ & y \geq 0, \\ & y \in \mathbb{R}^m. \end{array}$$

El resultado anterior es el resultado central de la programación lineal e implica que toda solución óptima a un programa lineal posee un “certificado de optimalidad”: una solución factible asociada al programa dual.

Un programa entero es un programa lineal en el que las variables de decisión están sujetas además a restricciones de integralidad, es decir, se exige que éstas tomen únicamente valores enteros.

$$(PE) \left\{ \begin{array}{l} \text{máx} \quad c^T x, \\ \text{s.t.} \quad Ax \leq b, \\ \quad \quad x \in \mathbb{Z}^n, \end{array} \right.$$

con  $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{Q}^m$  y  $c \in \mathbb{Q}^n$ .

Definimos la relajación lineal de (PE) como el programa lineal

$$(PL) \left\{ \begin{array}{l} \text{máx} \quad c^T x, \\ \quad \quad Ax \leq b, \\ \quad \quad x \in \mathbb{R}^n, \end{array} \right.$$

obtenido al eliminar las restricciones de integralidad de (PE).

Si llamamos  $R$  y  $P$  a los conjuntos factibles para (PE) y (PL) respectivamente, se tiene entonces que  $R \subset P$ , lo que implica que el valor de la solución óptima para el programa entero estará acotado por el valor óptimo del programa lineal. Podemos hacer la misma observación para el programa dual, y verificamos que:

$$\begin{array}{llll} \text{máx} & c^T x & \leq & \text{máx} & c^T x & = & \text{mín} & b^T y & \leq & \text{mín} & b^T y \\ & Ax \leq b, & & Ax \leq b, & & A^T y = c, & & A^T y = c, & & A^T y = c, \\ & x \in \mathbb{Z}^n. & & x \in \mathbb{R}^n. & & y \geq 0, & & y \geq 0, & & y \geq 0, \\ & & & & & y \in \mathbb{R}^m. & & y \in \mathbb{Z}^m. & & & \end{array}$$

En general, las desigualdades en esta cadena son estrictas. Es decir, para programas enteros, no existe un equivalente al Teorema de Dualidad. La excepción la conforman casos específicos generalmente asociados a problemas combinatorios clásicos como el de flujo máximo, cuyo problema dual es el de corte mínimo [13, pp. 26, 57].

Considerar el conjunto factible de (PE),  $R = \{Ax \leq b, x \in \mathbb{Z}^n\}$ . Se define al poliedro integral  $P_I$  asociado a (PE) por  $P_I = \text{conv}(R)$ . Es fácil demostrar que  $P_I$  es efectivamente un poliedro. Además, como cada cara de  $P_I$  contiene puntos de  $R$ , será equivalente optimizar sobre  $R$  que sobre  $P_I$ . Como resultado se tiene el siguiente lema:

**Lema 2.1.9.** Sean  $c \in \mathbb{Q}^n$ ,  $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$  y  $b \in \mathbb{Q}^m$ . Entonces:

$$\begin{aligned} \text{máx } c^T x &= \text{máx } c^T x \\ Ax \leq b, & \quad x \in P_I = \text{conv}(\{x \in \mathbb{Z}^n : Ax \leq b\}). \\ x \in \mathbb{Z}^n. & \end{aligned}$$

Puesto que sabemos que  $P_I$  es un poliedro, una estrategia posible para resolver (PE) es describirlo mediante un sistema de desigualdades lineales, para posteriormente aplicar técnicas de la programación lineal. Sin embargo, aunque se conocen algoritmos de transformación entre las representaciones de un poliedro, su orden de complejidad computacional es muy elevado, lo que los vuelve inaplicables en la práctica. Si  $\alpha^T x \leq \beta$  es una desigualdad válida para  $P_I$ , se tiene que la desigualdad  $\lfloor \alpha \rfloor^T x \leq \lfloor \beta \rfloor$  es satisfecha por todos los puntos de  $R$ , y por tanto es también válida para  $P_I$ . De este modo, es posible obtener de forma dinámica nuevas desigualdades válidas para el  $P_I$ , las cuales son añadidas a las restricciones originales creando un programa lineal cuyo conjunto factible  $\hat{P}$  verifica  $P_I \subset \hat{P} \subset P$ . Por tal razón, el valor óptimo de la función objetivo sobre  $\hat{P}$  será una cota superior para (PE), al menos tan ajustada como la obtenida al resolver (PL).

Por otro lado, Chvátal[12] demostró que  $P' = \{x \in \mathbb{R}^n : \lfloor y^T A \rfloor x \leq \lfloor y^T b \rfloor, \forall y \in \mathbb{Q}_+^m\}$  es un poliedro tal que  $P_I \subset P' \subset P$ . Este poliedro se conoce como *clausura de Chvátal* de  $P$ . Repitiendo el proceso recursivamente, se define  $P_{i+1} = (P_i)'$  y entonces se obtiene una sucesión de poliedros,  $\{P_i\}_{i=0}^\infty$  donde  $P_i \supset P_{i+1} \supset P_I \forall i \in \mathbb{N}$ , con  $P_0 = P$ . Un resultado importante descrito en [12] es el hecho de que para todo poliedro  $P$  existe un  $i \in \mathbb{N}$  tal que  $P_i = P_I$ . A partir de este resultado, se define el *rango de Chvátal* de un poliedro  $P$  por

$$\text{Ch}(P) = \text{mín} \{i \in \mathbb{N} : P_i = P_I\}.$$

Aunque existe un algoritmo finito para obtener  $P_I$  a partir del cálculo recursivo de clausuras de Chvátal, el mismo es inaplicable en la práctica debido a su gran complejidad computacional. Sin embargo, el estudio teórico del rango de Chvátal de poliedros asociados a problemas combinatorios puede ser de interés para entender el comportamiento de los algoritmos basados en el esquema de planos cortantes descrito arriba.

## 2.2. Resultados poliedrales para el problema de recubrimiento

Recordemos la formulación del problema de recubrimiento como programa entero:

$$\begin{aligned} \text{mín } & c^T x \\ & Ax \geq \mathbf{1}, \\ & x \in \{0, 1\}^n, \end{aligned} \tag{PR}$$

con  $A \in \{0, 1\}^{m \times n}$  y  $c \in \mathbb{Q}^n$ .

En lo que sigue se denotará al polítopo entero asociado al problema de recubrimiento por

$$Q^*(A) := \text{conv} \{x \in \{0, 1\}^n : Ax \geq \mathbf{1}\}.$$

De manera similar, la relajación fraccionaria de  $Q^*(A)$  se define como la región factible de la relajación lineal de (PR), y la misma será denotada por

$$Q(A) := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq \mathbf{1}, 0 \leq x \leq 1\}.$$

La estructura del poliedro  $Q^*(A)$  ha sido ampliamente estudiada en trabajos anteriores, ver por ejemplo [21], [4], [9]. A continuación se resumen algunos resultados básicos.

Dada una matriz  $A \in \{0, 1\}^{m \times n}$ , se denotará por  $N^i$  al conjunto de las entradas en la fila  $i$  cuyo valor es uno, es decir  $N^i := \{1 \leq j \leq n : a_{ij} = 1\}$ . Se asume que cada fila de  $A$  contiene al menos 2 entradas distintas de 0. Caso contrario, el programa es no factible o puede ser reducido a uno de menor tamaño.

**Proposición 2.2.1.**  $Q^*(A)$  es de dimensión completa.

**Proposición 2.2.2.**  $Q^*(A)$  es monótono hacia arriba. Es decir, si  $x \in Q^*(A)$ , entonces  $y \in Q^*(A)$ ,  $\forall x \leq y \leq 1$ .

**Proposición 2.2.3.** La desigualdad  $x_j \geq 0$  define una faceta de  $Q^*(A)$  si y sólo si  $|N^i \setminus \{j\}| \geq 2$  para todo  $1 \leq i \leq m$ .

**Proposición 2.2.4.** Todas las desigualdades  $x_j \leq 1$  definen facetas de  $Q^*(A)$ .

**Proposición 2.2.5.** Todas las desigualdades que definen facetas  $\alpha^T x \geq \alpha_0$  para  $Q^*(A)$  tienen  $\alpha \geq 0$  si  $\alpha_0 > 0$ .

**Proposición 2.2.6.** Las únicas desigualdades de soporte para  $Q^*(A)$  con coeficientes enteros y lado derecho igual a 1 son las del sistema  $Ax \geq \mathbf{1}$ .

Han sido descritas algunas familias de desigualdades que inducen facetas para  $Q^*(A)$ . Por ejemplo en [21], [4] se presentan algunos resultados concernientes a desigualdades obtenidas por levantamientos.

### 2.2.1. El problema de recubrimiento asociado a matrices circulares

El caso particular del problema de recubrimiento asociado a una matriz circulante  $C_n^k$  ha sido objeto de varios estudios en los últimos años, en los que se han caracterizado facetas y vértices del poliedro  $Q^*(C_n^k)$ , [6], [3]. En la presente sección, se presentan algunos de los resultados más relevantes obtenidos hasta el momento.

Una desigualdad válida para el problema de recubrimiento en matrices circulares es la llamada desigualdad de rango, la cual se escribe como

$$\sum_{i=0}^{n-1} x_i \geq \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil. \quad (2.1)$$

En caso de que  $n \not\equiv 0 \pmod{k}$  esta desigualdad define una faceta de  $Q^*(C_n^k)$  [4].

También se puede ver que para  $k \geq 3$ , la matriz  $C_n^k$  cumple las hipótesis de la Proposición 2.2.3, por lo cual para este caso, las desigualdades de no negatividad inducen facetas.

En [3], las autoras demuestran que para el caso de matrices circulares la Proposición 2.2.5 puede mejorarse. Se tiene en ese caso que  $\alpha_0 = 1$  implica  $\alpha > 0$ . También se presenta una forma alternativa de obtener los resultados de [21] y [4] para el caso de una matriz circulante  $C_n^k$ . En este trabajo, se usan además los resultados de [14] sobre circulares minimamente no ideales para obtener caracterizaciones de nuevas facetas, definidas por lo que se conoce como menores circulares de  $C_n^k$ .

Dados un conjunto  $V$  de vértices, y una familia  $H$  de subconjuntos de  $V$ , el par  $G = (V, H)$  se conoce como *hipergrafo*. Los conjuntos  $h \in H$  son llamados *hiperaristas* de  $G$ , puesto que generalizan la noción de arista en un grafo.

Dada una matriz  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  cuyas entradas son 0 y 1, es posible asociar a  $A$  un hipergrafo dado por  $V = \{1, 2, \dots, n\}$ , y una hiperarista  $h_i$  para cada fila  $i = 1, \dots, m$  de  $A$ , definida por  $j \in h_i \iff a_{ij} = 1, \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Recíprocamente, dado un hipergrafo  $G$ , su matriz asociada  $A$  tiene una columna por cada vértice, y sus filas son los vectores de incidencia de cada hiperarista.  $A$  se conoce como la matriz de incidencia de  $G$ . En caso de que ninguna hiperarista esté contenida en otra se tiene una *familia de Sperner*, también llamada *clutter*. Equivalentemente, esto significa que en la matriz asociada a dicho hipergrafo, no existen filas  $F_i, F_j$  tales que  $F_i \leq F_j$ .

Dados un hipergrafo  $G = (V, H)$  asociado a una matriz  $A$  y un conjunto  $N$  de

vértices de  $G$ , se define al menor  $G/N$  obtenido por la *contracción de  $A$  por  $N$*  como el hipergrafo  $G/N = (V(G/N), H(G/N))$ , donde  $V(G/N) = V \setminus N$ , y  $H(G/N)$  es el conjunto de elementos minimales de  $\{S \setminus N : S \in H(G)\}$ .

Similarmente, el menor obtenido por el *borrado de  $G$  por  $N$* , denotado por  $G \setminus N$ , es el hipergrafo  $G \setminus N = (V(G \setminus N), H(G \setminus N))$ , donde  $V(G \setminus N) = V \setminus N$ , y  $H(G \setminus N) = \{S \in H : S \cap N = \emptyset\}$ . Usaremos en adelante  $A/N$  y  $A \setminus N$  para denotar respectivamente las matrices de incidencia de  $G/N$  y  $G \setminus N$ .

Las operaciones de contracción y borrado tienen interpretaciones desde la teoría poliedral [21]. Si  $A$  es la matriz asociada a un polítopo de recubrimiento  $Q^*(A)$ , entonces

$$Q^*(A \setminus N) \cong \{x \in Q^*(A) : x_i = 1, \forall i \in N\},$$

$$Q^*(A/N) \cong \{x \in Q^*(A) : x_i = 0, \forall i \in N\}.$$

El hipergrafo  $C(C_n^k)$  asociado a  $C_n^k$ , cuyo conjunto de vértices es  $V = \{0, 1, \dots, n-1\}$  y sus hiperaristas están dadas por  $h_i = \{i, i+1, \dots, i+k-1\}$  con  $0 \leq i \leq n-1$ , (en adelante, la suma y resta de índices se entenderán dadas  $\mathbb{Z}_n$ ) es en particular una familia de Sperner.

Generalizando los resultados obtenidos en [14], en [2] se caracterizan aquellos conjuntos  $N \subset V$  para los cuales la matriz  $C_n^k/N$  es también una matriz circulante  $C_{n'}^{k'}$ , llamada en este caso un *menor circulante* de  $C_n^k$ .

Se considera el digrafo  $G(C_n^k)$  definido sobre el conjunto de vértices  $\{0, 1, \dots, n-1\}$  de  $C(C_n^k)$  y cuyos arcos están dados por  $(i, j) \in A \iff k \leq j - i \leq k + 1 \pmod{n}$ . Se busca dentro de este digrafo un conjunto disjunto de circuitos  $(D_l)_{l=1}^d$ , cada uno con el mismo número de vértices. Si  $N_l$  denota el conjunto de vértices de  $D_l$ , entonces  $N := \cup_{l=1}^d N_l$  está asociado a un menor circulante  $C_n^k/N$ . Observar que  $d$  puede ser igual a 1, es decir,  $N$  puede ser el conjunto de vértices de un circuito en  $G(C_n^k)$ .

Llamaremos  $W_l$  al conjunto de vértices en  $N_l$  para los cuales el arco  $(i, j)$  del circuito  $D_l$  verifica  $j - i = k + 1$ , y  $W := \cup_{l=1}^d W_l$ .

El siguiente resultado caracteriza la existencia de menores circulantes en  $C_n^k$ :

**Lema 2.2.7** ([14],[2],[7]). *Sea  $2 \leq k \leq n-2$ .  $C_n^k$  tiene un menor circulante de la forma  $C_{n'}^{k'}$  si y sólo si existen  $n_1, n_2, n_3, d \in \mathbb{N}, n_1 \geq 1, n_1 d < k, (n_2 + n_3) d < n$  tales que*

1.  $nn_1 = kn_2 + (k+1)n_3$ ,
2.  $\gcd(n_1, n_2, n_3) = 1$ ,
3. *en este caso, además,  $n' = n - (n_2 + n_3)d$  y  $k' = k - n_1 d$ .*

Diremos en este caso que  $C_{n'}^{k'}$  es un menor de  $C_n^k$ , asociado a los parámetros  $n_1, n_2, n_3, d \in \mathbb{Z}_+$ .

En el lema anterior, con las notaciones previamente establecidas se tiene que  $|W| = n_3d$ ,  $|N| = (n_2 + n_3)d$  y además se puede ver que cada uno de los  $d$  circuitos tiene  $n_2$  arcos de longitud  $k$ ,  $n_3$  arcos de longitud  $k + 1$  y “envuelve”  $n_1$  veces al grafo  $G(C_n^k)$ .

En [2], el autor define la variable  $m = n_2 + n_3$  y demuestra que la ecuación diofántica en la primera condición del Lema 2.2.7 tiene soluciones si y solamente si

$$\left\lceil \frac{km}{n} \right\rceil = \left\lfloor \frac{(k+1)m}{n} \right\rfloor.$$

De ser éste el caso, las soluciones para dicha ecuación están dadas por

$$n_1d = \left\lceil \frac{km}{n} \right\rceil, \quad n_2d = -n_1n + m(k+1), \quad n_3d = n_1n - mk,$$

donde  $\gcd(n_1, n_2, n_3) = 1$ . Es decir, el valor de  $m$  determina los valores de  $n_1$ ,  $n_2$ , y  $n_3$ .

Asociados a los menores circulantes, se han definido nuevas desigualdades que son válidas para  $Q^*(C_n^k)$ .

**Lema 2.2.8** ([7]). *Dado un menor circulante  $C_{n'}^{k'}$ , de  $C_n^k$ , la desigualdad*

$$2 \sum_{i \in W} x_i + \sum_{i \notin W} x_i \geq \left\lceil \frac{n'}{k'} \right\rceil \quad (2.2)$$

es válida para  $Q^*(C_n^k)$ . Esta desigualdad se conoce como desigualdad de menor asociada a  $C_{n'}^{k'}$ .

En la demostración de este teorema, se puede verificar además que si llamamos  $\mathbb{1}_{N^c}$  al vector de incidencia de los nodos de  $N^c := V \setminus N$ , se tiene que

$$(C_n^k \mathbb{1}_{N^c})^T x = (k' + 1) \sum_{i \in W} x_i + k' \sum_{i \notin W} x_i \geq |N| = n', \quad (2.3)$$

de donde, tras dividir por  $k'$  y tomar la parte entera, se obtiene la desigualdad (2.2).

Diremos que un menor  $C_{n'}^{k'}$  es *relevante* si  $\left\lceil \frac{n'}{k'} \right\rceil > \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$  y  $n' \not\equiv 0 \pmod{k'}$ . Se ha demostrado que si un menor no es relevante, su desigualdad asociada está dominada por la desigualdad de rango y las desigualdades que definen  $Q(C_n^k)$ . En [7] se presenta una condición necesaria y suficiente para que un menor sea relevante para  $Q^*(C_n^k)$ .

**Lema 2.2.9** ([7]). *Un menor  $C_{n'}^{k'}$ , con  $n' = n - (n_2 + n_3)d$  y  $k' = k - n_1d$  es relevante si y sólo si  $dn_3 \geq kr$ , donde  $1 \leq r \leq k' - 1$  y  $n' \equiv r \pmod{k'}$ .*

Además, también se presenta una condición suficiente para que un menor relevante induzca una faceta de  $C_n^k$ .

**Lema 2.2.10** ([3]). *La desigualdad asociada a un menor  $C_{n'}^{k'}$  de  $C_n^k$ , con  $n' \equiv 1 \pmod{k}$  y tal que  $\left\lceil \frac{n'}{k'} \right\rceil > \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$ , induce una faceta de  $C_n^k$ .*

En particular, se ha demostrado [10] que estas desigualdades, junto con aquellas del sistema original y la desigualdad de rango, describen completamente el polítopo  $Q^*(C_n^3)$ .

En base al estudio computacional de diversas instancias específicas del problema, en [10] se conjetura que  $Q^*(C_n^k)$  está completamente descrito por las desigualdades de  $Q(C_n^k)$ , la desigualdad de rango y las desigualdades asociadas a menores circulantes.

En general, el número de facetas de  $Q^*(C_n^k)$  es exponencial respecto a  $n$ . Desde el punto de vista algorítmico, es importante por tanto considerar el *problema de separación*: dado un punto  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ , verificar si  $\bar{x} \in Q^*(C_n^k)$  o caso contrario encontrar un vector  $w \in \mathbb{Q}^n$ , tal que  $w^T \bar{x} < w^T x, \forall x \in Q^*(C_n^k)$ . Los algoritmos de separación se suelen usar dentro de esquemas de solución basados en planos cortantes. Por ejemplo, se puede tomar  $\bar{x}$  como la solución de una relajación del problema original.

En la práctica, se buscan vectores  $w$  asociados a estructuras combinatorias. En el caso particular de  $Q^*(C_n^k)$ , nos interesa verificar si existen o no desigualdades de la forma (2.2) que sean violadas por el punto  $\bar{x}$ .

En [7] se demuestra que en el caso de que los parámetros del menor  $C_{n'}^k$  sean  $d, n_1 = 1, n_2, n_3 \equiv r \pmod{k-d}$ , la desigualdad asociada a tal menor puede ser reescrita como:

$$\sum_{i \in W} (x_i - \beta(d)) \geq \alpha(d, r) - \sum_{i=0}^{n-1} x_i, \quad (2.4)$$

donde  $\alpha(d, r) = \frac{n}{k} - \frac{r}{k-d} + 1, \beta(d) = \frac{1}{k(k-d)}$ .

Por lo cual, el problema en este caso es equivalente a encontrar un conjunto  $W$  asociado a un menor de parámetros  $d, n_1 = 1, n_2, n_3 \equiv r \pmod{k-d}$ , tal que la desigualdad (2.4) sea violada por  $\bar{x}$ . El problema de separación para desigualdades de menor no ha sido resuelto de manera general. Sin embargo, existen algoritmos para ciertos casos particulares. Para el caso  $d = n_1 = 1$ , el único valor posible para  $r$  en (2.4) tal que el menor sea relevante es  $r = 1$ . A partir de esto, en [7], [10] se presenta el siguiente algoritmo:

Fijando el vértice 0 dentro del circuito, se define el grafo  $K_n^k = (V, A)$  por  $V = \{v_i^j, i \in \mathbb{Z}_n, j \in \mathbb{Z}_{k-1}\} \cup \{t\}$  y el conjunto de arcos  $A = A_1 \cup A_2$ , con

- $A_1 = \{(v_i^j, v_l^{j \oplus 1}) : i + k + 1 \leq l \leq n - 1, l - i \equiv 1 \pmod{k}, \}$ .
- $A_2 = \{(v_i^0, t) : i \leq n - (k + 1), n - i \equiv 1 \pmod{k}\}$ .

donde  $\oplus$  indica la suma módulo  $k - 1$ .

Los costos son definidos por  $c(v_i^j, v_m^l) = \bar{x}_m - \beta(d), \forall (v_i^j, v_m^l) \in A, c(v_i^0, t) = \bar{x}_0 - \beta(d), \forall (v_i^0, t) \in A$ .

Se demuestra (Lema 11 de [7]) que un camino de  $v_0^0$  a  $t$  en este grafo corresponde a un conjunto  $W$  asociado a un menor de parámetros  $n_1 = d = 1$  tal que  $0 \in W$ , y que su costo es igual al valor obtenido al evaluar  $\bar{x}$  en el lado izquierdo de (2.4).

De esta forma, se obtiene un algoritmo polinomial para separar desigualdades asociadas a menores con parámetros  $n_1 = d = 1$ : para cada  $0 \leq i \leq n$ , reetiquetar los nodos cíclicamente de forma que  $i$  tenga la etiqueta 0 y al ejecutar el algoritmo de camino más corto de  $v_0^0$  a  $t$  para cada grafo, verificando en cada iteración si el costo del camino obtenido es inferior a  $L^{1,1} := \alpha(1, 1) - \sum_{i=0}^{n-1} \bar{x}_i$ .

**Ejemplo 2.2.11.** Consideremos  $n = 29, k = 3$  y  $N = \{0, 4, 7, 10, 14, 18, 22, 26\}$ . Sea  $\bar{x} \in Q(C_{29}^3)$  el vector dado por  $x_i = 0$  si  $i \in N$ ,  $x_i = \frac{1}{2}$  si  $i \notin N$ . En el grafo  $K_{29}^3$ , el camino más corto tiene por conjunto de vértices  $V = \{v_0^0, v_{10}^1, v_{14}^0, v_{18}^1, v_{22}^0, t\}$  y su costo es  $\sum_{i \in W} (x_i - \beta(d)) = -\frac{5}{6}$ , mientras que  $\frac{29}{3} - \frac{1}{2} + 1 - \frac{21}{2} = -\frac{1}{3}$ . Es decir,  $\bar{x}$  viola la ecuación 2.4 asociada al menor definido por  $W = \{0, 10, 14, 18, 22\}$ .

En [7], se usan las propiedades demostradas en [2] para separar puntos mediante desigualdades correspondientes a un tipo específico de menores circulantes, al que los autores denominan  $d$ -alternantes:

**Definición 2.2.1.** Sea  $W = \{i_s : s \in \mathbb{Z}_{dn_3}\} \subset \mathbb{Z}_n$  con  $0 \leq i_0 < i_1 < \dots < i_{dn_3-1} \leq n-1$  un subconjunto que define un menor relevante de  $C_n^k$  con parámetros  $d \geq 2$ ,  $n_1 = 1$ ,  $n_2, n_3$ . Entonces, el menor definido por  $W$  es un menor  $d$ -alternante si para cada  $j \in \mathbb{Z}_d$ ,  $W^j = \{i_{j+td} : t \in \mathbb{Z}_{n_3}\}$ .

Esto significa que un menor  $d$ -alternante se obtiene a partir de un conjunto de circuitos en  $G(C_n^k)$  tales que cada circuito da una vuelta a  $G'(C_n^k)$  y los arcos de longitud  $k+1$  de cada circuito alternan.

**Ejemplo 2.2.12.** Considerar los menores circulantes de  $C_{33}^6$  inducidos por  $W = W^0 \cup W^1$ :

1.  $W^0 = \{7, 14, 21\}$  y  $W^1 = \{8, 15, 22\}$ ,
2.  $W^0 = \{7, 14, 21\}$  y  $W^1 = \{12, 25, 32\}$ .

El caso (1) corresponde a un menor 2-alternante, mientras que el caso (2) no.

En ambos casos los parámetros asociados al menor son  $d = 2$ ,  $n_1 = 1$ ,  $n_2 = 2$ ,  $n_3 = 3$ .

En efecto, para el caso (1), se verifica la definición de menor 2-alternante, pues en este caso  $i_0 = 7, i_1 = 8, i_2 = 14, i_3 = 15, i_4 = 21, i_5 = 22$  y así  $W^0 = \{i_0, i_2, i_4\}$  y  $W^1 = \{i_1, i_3, i_5\}$ .

Mientras que para el caso (2),  $i_0 = 7, i_1 = 12, i_2 = 14, i_3 = 21, i_4 = 25, i_5 = 32$  y  $W^0 = \{i_0, i_2, i_4\}$  y  $W^1 = \{i_1, i_3, i_5\}$  y por tanto no es un menor 2-alternante.

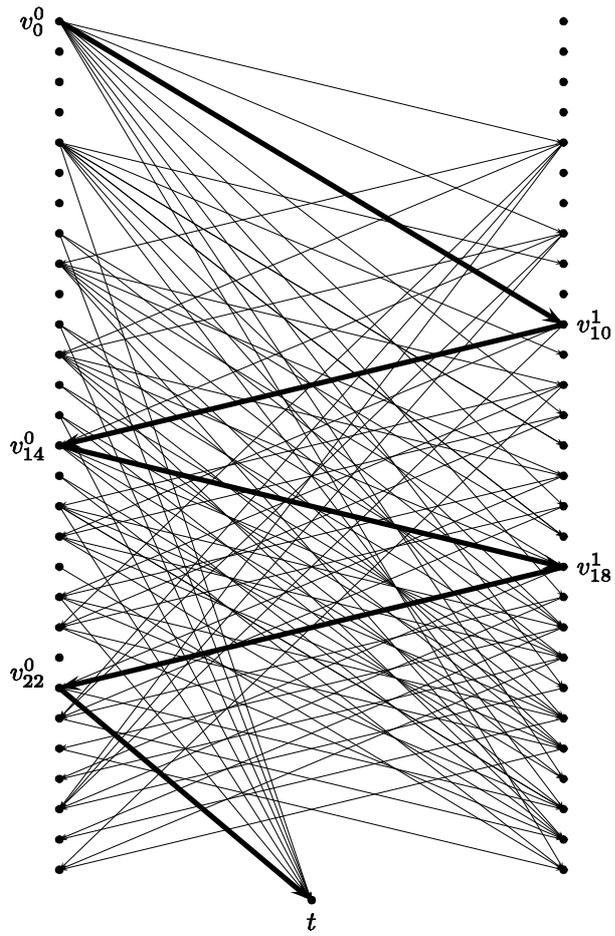


Figura 2.1: Camino más corto en  $K_{29}^3$

Para este tipo de menores, las autoras plantean un algoritmo de separación eficiente, que consiste en construir un nuevo grafo con varias copias de los vértices originales, de forma que los circuitos a separar se transformen en caminos. A continuación se presenta una breve descripción de este algoritmo, para mayores detalles, así como los análisis de validez y complejidad, ver [7].

Dados  $C_n^k$  y dos enteros  $d, r$  tales que  $2 \leq d \leq k-2, 1 \leq r \leq k-d$ , se buscan todos los subconjuntos  $W \subset Z_n$  que definen un menor  $d$ -alternante de  $C_n^k$  tal que  $|W| = dn_3$ , con  $n_3 = r \pmod{k-d}$ .

Para esto, en primer lugar se define un vector  $\delta = (\delta_i)_{i=1}^{n_3}$  de distancias entre nodos consecutivos de  $W$ . Es decir, si  $W = \{i_0, i_1, \dots, i_{dn_3-1}\}$ ,  $0 \leq i_0 < i_1 < \dots < i_{dn_3-1} \leq n-1$ , entonces  $\delta_s = i_{s+1} - i_s$ . De la definición de menor alternado, se sigue que se verifica la propiedad

$$\delta_s \equiv \delta_{s+d} \pmod{k}, \quad \forall s \in \mathbb{Z}_{n_3}, \quad (2.5)$$

por tanto, basta con tomar vectores de posibles distancias  $a = (a_0, a_1, \dots, a_{d-1})$  tales que

$$k+1 \leq \sum_{s=0}^{d-1} a_s = i_d - i_0 \equiv 1 \pmod{k}. \quad (2.6)$$

El problema de separación  $C_n^k$ -SP( $d, r, a$ ), consiste en determinar si existe un menor  $d$ -alternante  $W$  con  $n_3 \equiv r \pmod{k'}$  tal que  $0 \in W$ ,  $\delta_s \equiv a_s \pmod{k}$ , para  $s \in \mathbb{Z}_d$  y tal que un punto dado  $\bar{x}$  viole la desigualdad (2.4) asociada a dicho menor.

Las autoras presentan una transformación de este problema de separación a un problema de caminos más cortos en un grafo  $K_n^k(d, r, a)$ , definido como se indica a continuación.

El conjunto de vértices de  $K_n^k(d, r, a)$  está dado por:

$$V = \left( \bigcup_{i \in \mathbb{Z}_d, j \in \mathbb{Z}_{k-d+r}} V_j^i \right) \cup \{t\}$$

donde  $V_j^i = \{v_j^i(p) : p \in \mathbb{Z}_n\}$  para todo  $i \in \mathbb{Z}_d, j \in \mathbb{Z}_{k-d+r}$ .

El conjunto de arcos  $A$  de  $K_n^k(d, r, a)$  se define como la unión de los conjuntos presentados a continuación:

- Para  $0 \leq i \leq d-2$

$$A_1^i = \{(v_j^i(p), v_j^{i+1}(q)) : 0 \leq i \leq d-2, p + a_i \leq q \leq n-1,$$

$$q - p \equiv a_i \pmod{k}\}, \text{ si } a_i > 1,$$

$$A_1^i = \{(v_j^i(p), v_j^{i+1}(p+1)) : 1 \leq i \leq d-2\}, \text{ caso contrario.}$$

- $A_2 = \{(v_j^{d-1}(p), v_{j+1}^0(q)) : j \leq k-d+r-2, p + a_{d-1} \leq q \leq n-1,$

$q - p \equiv a_{d-1} \pmod k$ , si  $a_{d-1} > 1$ ,

$A_2 = \{(v_j^{d-1}(p), v_{j+1}^0(p+1)) : j \leq k - d + r - 2\}$ , caso contrario.

- $A_3 = \{(v_{k-d-1}^{d-1}(p), v_0^0(q)) : p + a_{d-1} \leq q \leq n - 1, q - p \equiv a_{d-1} \pmod k\}$ , si  $a_{d-1} > 1$ ,

$A_3 = \{(v_{k-d-1}^{d-1}(p), v_{k-d-1}^0(p+1))\}$ , caso contrario.

- $A_4 = \{(v_{k-d+r-1}^{d-1}(p), t) : p \leq n - 1, n - p \equiv a_{d-1} \pmod k, a_{d-1} \neq 1\}$ , si  $a_{d-1} > 1$ ,

$A_4 = \{(v_{k-d+r-1}^{d-1}(n-1), t)\}$ , caso contrario.

Los costos sobre los arcos  $(v_j^i(p), v) \in A$  están dados por  $c(v_j^i(p), v) = \bar{x}_p - \beta(d)$ .

Puesto que el grafo dirigido presentado anteriormente es acíclico, el problema de caminos más cortos sobre éste puede ser resuelto en tiempo polinomial.

Finalmente, para resolver completamente el problema de separación para menores  $d$ -alternantes de  $C_n^k$ , es necesario resolver el problema de caminos más cortos en  $K_n^k(d, r, a)$  para cada valor de  $1 \leq r \leq k - 1$ , y para cada  $a \in \mathbb{Z}_k^d$  que satisfaga (2.6), verificando en cada iteración si el costo del camino obtenido es inferior a  $L^{d,r} := \alpha(d, r) - \sum_{i=0}^{n-1} x_i$ . Puesto que las autoras demuestran además que el número de vectores  $a \in \mathbb{Z}_k^d$  que verifican (2.6) es polinomial en  $n$ , se obtiene de este modo un algoritmo polinomial para separar desigualdades asociadas a menores con parámetros  $n_1 = 1, n_3 = r \pmod k - d$ .

# Capítulo 3

## Propiedades algebraicas de $C_n^k$

Empleando algunas proposiciones presentadas en el Capítulo 1, al igual que conceptos fundamentales de la teoría de números, en este capítulo se describen nuevos resultados referentes a propiedades algebraicas de  $C_n^k$ , así como las implicaciones para la estructura del poliedro de recubrimiento asociado a matrices circulantes; en algunos casos se proveen demostraciones alternativas de proposiciones conocidas.

Denotaremos en adelante a  $C_n^k$  simplemente por  $C$ . Observar que las desigualdades de la forma  $v^T Cx \geq v^T \mathbf{1}$ ,  $v \in \mathbb{Q}_+^n$  son válidas para  $Q(C_n^k)$ , pues son combinaciones cónicas de las desigualdades del sistema  $Cx \geq \mathbf{1}$ . En particular,  $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^n$  es el vector propio de  $C^T$  asociado al valor propio  $k$ , de lo cual se sigue que

$$k\mathbf{1}^T x = (C^T \mathbf{1})^T x = \mathbf{1}^T Cx \geq \mathbf{1}^T \mathbf{1},$$

lo cual es equivalente a

$$k \sum_{i=1}^n x_i \geq n,$$

de donde se obtiene la desigualdad de rango descrita en la Sección 2.2.1

$$\sum_{i=1}^n x_i \geq \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil.$$

En la siguiente sección se presentan desigualdades similares obtenidas a partir de las propiedades algebraicas de la matriz  $C_n^k$ .

### 3.1. Desigualdad de rango generalizada

Como se señaló en la Sección 2.2.1, se han descrito hasta el momento algunas familias de desigualdades que definen facetas de  $Q^*(C_n^k)$ . Además de las desigualdades de  $Q(C_n^k)$ , se han estudiado la desigualdad de rango y las desigualdades asociadas

a menores. En esta sección, presentamos una clase de desigualdades que generaliza algunas de las familias anteriores. Por su similitud con la desigualdad de rango las hemos denominado *desigualdades de rango generalizadas*. Se expone a continuación una condición suficiente para que una desigualdad de este tipo sea válida para  $Q^*(C_n^k)$ .

**Lema 3.1.1.** *Dados una matriz  $C = C_n^k$ , y un vector  $v \in \mathbb{R}_+^n$ , la desigualdad*

$$w^T x \geq \sum_{i=0}^{n-1} v_i$$

con  $w = Cv$ , es una desigualdad válida para  $Q(C_n^k)$ .

*Demostración.* Basta observar que  $w^T x = v^T C^T x \geq v^T \mathbf{1} = \sum_{i=1}^n v_i$ .  $\square$

A partir de esta desigualdad, si  $w_{\min} = \min_{i=0, \dots, n-1} \{w_i\}$ , se obtiene un corte válido para  $Q^*(C_n^k)$ :

$$\left[ \frac{w^T}{w_{\min}} \right] x \geq \left[ \frac{\sum_{i=0}^{n-1} v_i}{w_{\min}} \right]$$

Las desigualdades asociadas a menores descritas en la sección 2.2.1. constituyen un caso particular de estas desigualdades, con  $v = \mathbf{1}_{N^c}$ , como se puede verificar a partir de la desigualdad (2.3).

A continuación se presenta una condición suficiente para que una desigualdad de la forma  $w^T x \geq v^T \mathbf{1}$  sea válida para  $Q^*(C_n^k)$ .

**Lema 3.1.2.** *Dados una matriz circulante  $C = C_n^k$ , con  $\gcd(n, k) = 1$ , y un vector  $w \in \mathbb{R}_+^n$ , la desigualdad*

$$w^T x \geq \frac{\sum_{i=0}^{n-1} w_i}{k}$$

es una desigualdad válida para  $Q(C_n^k)$  si  $C^{-1}w \in \mathbb{R}_+^n$ .

*Demostración.* Puesto que  $\gcd(n, k) = 1$ , se sigue del Lema 1.3.14 que la matriz  $C$  es invertible. Sea  $v = C^{-1}w \in \mathbb{R}_+^n$ . Del lema anterior y usando el hecho de que  $k$  es el valor propio de  $C^T$  asociado a  $\mathbf{1}$ , se tiene que, para todo  $x \in Q(C_n^k)$ ,

$$\begin{aligned} w^T x &\geq \mathbf{1}^T v \\ &= \frac{1}{k} (C^T \mathbf{1})^T v \\ &= \frac{1}{k} \mathbf{1}^T C v \\ &= \frac{1}{k} \mathbf{1}^T w \\ &= \frac{\sum_{i=0}^{n-1} w_i}{k}. \end{aligned}$$

□

El lema precedente permite obtener una cota inferior para el valor de la solución óptima del problema de recubrimiento asociado a una matriz  $C_n^k$  y a un vector  $w \in \mathbb{Z}_+^n$ :

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & w^T x \\ \text{s.a} \quad & C_n^k x \geq 1 \\ & x \in \{0, 1\}^n. \end{aligned} \tag{PRC}$$

Si  $\gcd(n, k) = 1$ , entonces

$$w^T x \geq \left\lceil \frac{\sum_{i=0}^{n-1} w_i}{k} \right\rceil.$$

Esta última desigualdad es además un corte válido para  $Q^*(C_n^k)$ .

### 3.2. Caracterización de la inversa de $C_n^k$

Como se señaló en la Sección 1.3.1, la matriz  $C_n^k$  es invertible si y solamente si  $n$  y  $k$  son coprimos, es decir, si  $\gcd(n, k) = 1$ . La inversa de  $C_n^k$  puede calcularse empleando la Transformada de Fourier Discreta, conforme se indica en el Corolario 1.3.11. En esta sección, se propone un método alternativo, basado en las propiedades de  $C_n$ , y en resultados elementales de la teoría de números.

**Lema 3.2.1.** *Sean  $n, k \in \mathbb{Z}$ , tales que  $\gcd(n, k) = 1$ . Entonces el morfismo de anillos  $\varphi_k : (\mathbb{Z}_n, +, \cdot) \longrightarrow (\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$  definido por  $\varphi_k(x) = kx$ , es un automorfismo en el grupo aditivo  $(\mathbb{Z}_n, +)$ .*

*Demostración.* Para cada  $x, y \in \mathbb{Z}_n$ ,  $\varphi_k(x + y) = k(x + y) = kx + ky$ , lo que muestra que  $\varphi_k$  es un morfismo de  $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$  en  $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ .

Puesto que  $(n, k) = 1$ , existen  $s, t \in \mathbb{Z}$  tales que  $sn + tk = 1$ . Al tomar  $[t]$  como la clase de equivalencia de  $t$  módulo  $n$ , se tiene que  $\varphi_k([t]) = [1]$ , por lo cual, para  $0 \leq i \leq n - 1$  se tiene que  $\varphi_k([it]) = [i]$ , lo que muestra que  $\varphi_k$  es biyectiva, y por tanto es un automorfismo del grupo  $(\mathbb{Z}_n, +)$ . □

**Lema 3.2.2.** *Sean  $n, k \in \mathbb{Z}$  tales que  $\gcd(n, k) = 1$ . Entonces existen  $s, t \in \mathbb{Z}$  que verifican*

$$\begin{cases} sn + 1 = (t - 1)k, \\ 0 \leq s \leq k - 1 \\ 1 \leq t \leq n \end{cases}$$

*Demostración.* Puesto que  $\gcd(n, k) = 1$ , se sigue que existen  $\hat{s}, \hat{t} \in \mathbb{Z}$  tales que  $\hat{s}n + \hat{t}k = 1$ . El número  $\hat{s}$  puede ser escrito de forma única como  $\hat{s} = hk - s$ , con  $h \in \mathbb{Z}$  y  $0 \leq s \leq k - 1$ . Entonces se verifica que  $sn + 1 = (\hat{t} + hn)k$ . Tomando  $t = \hat{t} + hn + 1$ , puede verse claramente que  $0 \leq (t - 1)k = sn + 1 < (s + 1)n$ , es decir,  $1 \leq t \leq n$  y además  $sn + 1 = (t - 1)k$ , completando la demostración.  $\square$

Como se estableció en la Sección 1.3.1, si la matriz  $C_n^k$  es invertible, entonces su matriz inversa también es circulante. Es suficiente, por tanto, encontrar el vector correspondiente a la primera fila de dicha matriz, o equivalentemente a su primera columna. En lo sucesivo, las sumas de los índices se consideran definidas en  $\mathbb{Z}_n$ .

Sea  $a = (a_0, \dots, a_{n-1})^T$  la primera columna de la matriz  $(C_n^k)^{-1}$ . El producto escalar de  $a$  con la  $j$ -ésima fila de  $C_n^k$ , es igual a  $\delta_{1,j}$ , es decir:

$$\sum_{i=0}^{k-1} a_i = 1, \quad (3.1)$$

y para  $1 \leq j \leq n - 1$ ,

$$\sum_{i=j}^{k+j-1} a_i = 0. \quad (3.2)$$

De las ecuaciones (3.1) y (3.2) se sigue, al restar una ecuación de la siguiente, que para  $i \notin \{n - 1, 0\}$ :

$$a_i = a_{i+k}. \quad (3.3)$$

Además,

$$a_{n-1} + 1 = a_{k-1} \quad (3.4)$$

y

$$a_0 = a_k + 1. \quad (3.5)$$

Consideremos el vector  $\hat{a} = (a_0, a_k, a_{2k}, \dots, a_{(n-1)k})^T$  donde los productos son tomados en  $\mathbb{Z}_n$ . Por el Lema 3.2.1,  $\hat{a}$  es una permutación del vector  $a$ . De las ecuaciones (3.3), (3.4) y (3.5), se sigue que estos vectores tienen solamente dos entradas diferentes.

En efecto, sea  $\hat{i} \in \{0, \dots, n - 1\}$  tal que  $\hat{i}k = n - 1 \pmod{n}$ , cuya existencia y unicidad están garantizadas por el Lema 3.2.1. Entonces, para  $0 \leq i \leq n - 1$ ,

$$\hat{a}_i = a_{ik} = \begin{cases} c, & \text{si } i = 0, \\ c - 1, & \text{si } 1 \leq i \leq \hat{i}, \\ c, & \text{si } \hat{i} < i \leq n - 1. \end{cases}$$

En particular, notar que  $c = a_{k-1} = a_0$  y  $a_k = a_{n-1} = c - 1$ . Es decir, las entradas de  $a$  iguales a  $c$  aparecen en el intervalo circular  $(a_{k-1}, a_{2k-1}, \dots, a_{n-k}, a_0)$

De la ecuación (3.1) si llamamos  $\alpha = |\{0 \leq j \leq k-1 : a_j = c\}|$ , se sigue que

$$\alpha c + (k - \alpha)(c - 1) = 1, \quad (3.6)$$

de donde

$$c = \frac{1}{k}(k - \alpha + 1).$$

Sean  $s, t \in \mathbb{Z}$  los enteros asociados a  $n, k$  en el Lema 3.2.2. Conocemos que  $(t-1)k-1 = sn$ . Notar que el intervalo circular  $(a_{k-1}, a_{2k-1}, \dots, a_{(t-1)k-1} = a_{sn} = a_0)$  corresponde a la sucesión  $(a_{lk-1})_{l=1}^{t-1}$  que contiene a todos los elementos cuyo valor es  $c$ . Para contabilizar el número  $\alpha$  de estos elementos cuyos índices están entre 0 y  $k-1$ , se debe determinar la cantidad de índices  $lk-1$ , con  $1 \leq l \leq t-1$ , cuya clase de equivalencia módulo  $n$  pertenece a  $\{0, 1, \dots, k-1\}$ , es decir,

$$\alpha = |\{1 \leq l \leq t-1 : pn \leq lk-1 \leq pn+k-1, \text{ para algún } 0 \leq p \leq s\}|.$$

Si  $p=0$  y  $l=1$ , obtenemos  $0 \leq k-1 \leq k-1$ . De manera similar, cuando  $p=s$ , y  $l=t-1$ , se verifica  $sn \leq (t-1)k-1 \leq sn+k+1$ . Además, para cada  $0 < p < s$ , existe exactamente un número de la forma  $lk-1$  en el intervalo de  $k$  enteros consecutivos  $\{pn, \dots, pn+k-1\}$ . Por lo tanto,

$$\alpha = s + 1.$$

Es decir, entre 0 y  $k-1$  existen  $s+1$  elementos cuyo valor es  $c = 1 - \frac{s}{k}$ .

Resumimos los resultados expuestos en esta sección en el siguiente teorema:

**Teorema 3.2.3.** *Sean  $0 < k < n \in \mathbb{Z}$ , con  $\gcd(n, k) = 1$ . Entonces la matriz  $C_n^k$  es invertible y su inversa está dada por:*

$$(C_n^k)^{-1} = \text{Circ}(a_0, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1),$$

donde

$$a_i = \begin{cases} 1 - \frac{s}{k}, & \text{si } i = jk - 1 \pmod{n}, \text{ para } 1 \leq j \leq t-1, \\ -\frac{s}{k}, & \text{caso contrario,} \end{cases}$$

y los enteros  $s, t$  son los presentados en el Lema 3.2.2.

Para hallar los enteros  $s, t$  se puede usar, por ejemplo, el algoritmo de la división euclídeana, el cual tiene una complejidad computacional de  $O(\log^2(n))$ . De esta manera, el teorema anterior permite obtener un algoritmo de inversión para matrices  $C_n^k$

cuya eficiencia supera a la del algoritmo basado en FFT presentado en el Corolario 1.3.11.

**Ejemplo 3.2.4.** *La matriz inversa de  $C_{13}^4$  es la matriz circulante*

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

En efecto,  $\gcd(13,4) = 1$ , por lo cual  $C_{13}^4$  es invertible. Además, los enteros  $s = 3$ ,  $t = 11$  verifican las condiciones del Lema 3.2.2. Por tanto, del Teorema 3.2.3  $\{i : a_i = \frac{1}{4}\} = \{4j - 1 \pmod{13}, 1 \leq j \leq 10\} = \{3, 7, 11, 2, 6, 10, 1, 5, 9, 0\}$  mientras que las entradas restantes tienen el valor  $-\frac{3}{4}$ .

# Capítulo 4

## Algoritmos

En este capítulo se presenta un algoritmo combinatorio para la solución del problema de recubrimiento asociado a matrices circulantes. Se describe, además, un algoritmo para la separación de desigualdades asociadas a cierto tipo de menores, los cuales los hemos denominado autoalternantes, por su similaridad con la estructura de los menores alternantes estudiados en [7].

### 4.1. Solución al problema de recubrimiento en $C_n^k$

Consideremos el problema de recubrimiento asociado a una matriz circulante:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & w^T x, \\ \text{s.t} \quad & C_n^k x \geq \mathbf{1}, \\ & x \in \{0, 1\}^n. \end{aligned} \tag{PRC}$$

Presentamos a continuación un algoritmo combinatorio para la solución de PRC, para lo cual se demostrará primero que dicho problema se puede reducir a un conjunto de problemas de caminos más cortos.

En primer lugar, notemos que todo recubrimiento válido asociado a  $C_n^k$ , contiene al menos uno de los nodos del conjunto  $\{0, 1, \dots, k-1\}$ . En efecto, si llamamos  $y = C_n^k x$ , entonces  $y_0 \geq 1$  si y solamente si al menos uno de los valores  $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$  es no nulo.

De manera similar, como  $y_i \geq 1$  para todo  $0 \leq i \leq n$ , se sigue que dentro de cada intervalo cíclico con  $k$  elementos consecutivos en  $\mathbb{Z}_n$ ,  $\{i, i+1, \dots, i+k-1\}$  existe al menos un nodo perteneciente al recubrimiento. (A menos que se indique lo contrario, en adelante asumiremos que las operaciones de suma y resta de índices están definidas sobre  $\mathbb{Z}^n$ ).

A partir de esta observación se obtiene el siguiente lema intuitivo:

**Lema 4.1.1.** *Un vector  $x \in \{0,1\}^n$  es el vector de incidencia de un recubrimiento asociado a  $C_n^k$  si y sólo si  $x \neq 0$  y para todo  $i \in \mathbb{Z}_n$  tal que  $x_i = 1$ , existe  $1 \leq r \leq k$ , tal que  $x_{i+r} = 1$ .*

*Demostración.* Si  $x$  es un recubrimiento, de las observaciones anteriores se sigue directamente que, para cada  $i \in \mathbb{Z}_n$ , existe  $1 \leq r \leq k$ , tal que  $x_{i+r} = 1$ .

Recíprocamente, si  $x \neq 0$  no es el vector asociado a un recubrimiento, entonces existe un intervalo circular  $J = \{j, j+1, \dots, j+k-1\} \subset \mathbb{Z}_n$  tal que  $x_i = 0, \forall i \in J$ . Sea  $t$  el menor entero no negativo tal que  $x_{j-t} = 1$ . Entonces, se tiene además que  $x_{j-t+r} = 0$ , para  $1 \leq r \leq k$ .  $\square$

Definimos el grafo dirigido  $G = (V, A)$ , donde  $V = \{0, 1, \dots, n\}$  y  $(i, j) \in A \iff 1 \leq j - i \leq k$  (con la resta usual en  $\mathbb{Z}$ ). Definimos los costos sobre los arcos como  $c_{ij} = w_i, i = 0, 1, \dots, n-1$ .

**Proposición 4.1.2.** *Las  $n$  primeras componentes de un vector de incidencia  $x$  que marca los nodos de un camino de 0 a  $n$  en  $G$ , representan una solución factible para el problema PRC con  $x_0 = 1$ . Recíprocamente, el vector de incidencia de toda solución factible para PRC con  $x_0 = 1$  puede ser extendido al vector de incidencia de un camino de 0 a  $n$  en  $G$ . El costo del camino y del recubrimiento son ambos iguales a  $\sum_{j=0}^{n-1} w_j x_j$ .*

*Demostración.* Sean  $i, j$  dos nodos consecutivos en un camino  $P$  de 0 a  $n$  en  $G$ . Por construcción se tiene que  $0 \leq j - i \leq k - 1$ . De aquí se sigue que  $P$  contiene al menos un nodo del intervalo  $\{i, i+1, \dots, i+k-1\}$ , para  $0 \leq i \leq n-k$ . Como además 0 pertenece al camino, el vector  $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$  formado por las  $n$  primeras componentes del vector de incidencia de  $P$  verifica las condiciones del Lema 4.1.1, por lo cual representa un recubrimiento. De manera similar, todo vector solución de PRC con  $x_0 = 1$ , puede extenderse al vector de incidencia de un camino de 0 a  $n$  en  $G$  añadiendo la componente  $x_n = 1$ . De la definición de los costos sobre los arcos de  $G$ , se sigue que el costo de  $P$  y el costo de su recubrimiento asociado son ambos iguales a  $\sum_{i=0}^{n-1} w_i x_i$ .  $\square$

De la proposición anterior, se sigue que PRC puede resolverse empleando repetidamente algún algoritmo de caminos más cortos. Para  $0 \leq j \leq k-1$ , definimos el grafo dirigido  $G^j$ , reetiquetando los vértices de  $G$  en forma cíclica, de modo que al vértice  $j$  le corresponda la etiqueta 0. De esta forma, al encontrar el camino más corto de 0 a  $n$  en  $G^j$  obtenemos un recubrimiento de peso mínimo para PRC que satisface  $x_j = 1$ .

Se obtienen así  $k$  recubrimientos de peso mínimo  $S^{(j)}, 0 \leq j \leq k-1$ . Sean  $x^{(j)}$  los vectores de incidencia correspondientes. Como todo recubrimiento factible contiene algún nodo de  $\{0, \dots, k-1\}$ , la solución óptima para PRC está dada por  $x^* = \arg \min \{w^T x^{(j)} : 0 \leq j \leq k-1\}$ .

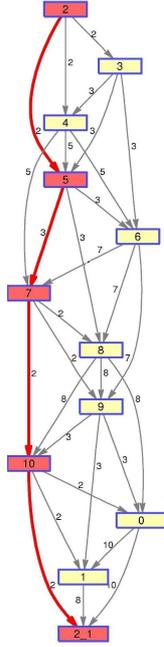


Figura 4.1: Camino más corto en  $G^2$  para la solución de PRC- $C_{11}^3$

Observar que los grafos  $G^j$  son todos acíclicos y contienen cada uno  $O(nk)$  arcos. Esto implica que el algoritmo aquí presentado para (PRC) puede implementarse de tal forma que alcance una complejidad computacional de  $O(nk^2)$ .

**Ejemplo 4.1.3.** Sea  $w = (10, 8, 2, 3, 5, 3, 7, 2, 8, 3, 2)^T$ . Considerar la instancia de PRC, dada por

$$\begin{aligned}
 \text{mín} \quad & w^T x \\
 \text{s.a.} \quad & C_{11}^3 x \geq \mathbb{1}, \\
 & x \in \{0, 1\}^{11}.
 \end{aligned}
 \tag{PRC- $C_{11}^3$ }$$

Se construyen entonces los grafos  $G^j$ ,  $j = 0, 1, 2$  con la estructura mencionada anteriormente. Para este caso, la solución del problema de camino más corto para  $G^2$  es el camino que pasa por los nodos  $\{2, 5, 7, 10\}$  con una distancia total de 9, la cual es menor que los valores de las soluciones óptimas en  $G^0$  y  $G^1$ . Por lo tanto, la solución de PRC- $C_{11}^3$  está dada por  $x^* = (0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1)$  cuyo peso es  $w^T x^* = 9$ .

## 4.2. Algoritmo de separación para menores autoalternantes

Estudiando las idea detrás del algoritmo de separación para menores  $d$ -alternantes propuesto en [7], se describe en esta sección un algoritmo para la separación de desigualdades asociadas a menores  $n_1$ -autoalternantes, los cuales se definen a continuación.

**Definición 4.2.1.** Sea  $W = \{i_s : s \in Z_{n_3}\} \subset Z_n$  con  $0 \leq i_0 < i_1 < \dots < i_{n_3-1} \leq n-1$  un subconjunto que define un menor circulante de  $C_n^k$ , con parámetros  $d = 1, n_1, n_2, n_3$ . Llamaremos entonces al menor definido por  $W$  un menor  $n_1$ -autoalternado si para cada  $0 \leq j \leq n_1 - 1$ ,  $i_{j+tn_1} - i_j \equiv t \pmod k$ , para  $1 \leq t < s = \left\lfloor \frac{n_3}{n_1} \right\rfloor - 1$ .

**Ejemplo 4.2.1.** Considerar los menores circulantes de  $C_{29}^5$  inducidos por  $W$  :

1.  $W = \{0, 2, 4, 11, 13, 15, 27\} = \{0, 11, 27\} \cup \{2, 13\} \cup \{4, 15\}$ ,
2.  $W = \{0, 4, 8, 11, 15, 26, 27\}$ .

Se ve en entonces que el caso (1) corresponde a un menor 3-autoalternante de parámetros  $d = 1$ ,  $n_1 = 3$ ,  $n_2 = 9$ ,  $n_3 = 7$ , puesto que en este caso, el conjunto  $W$  determina un ciclo en  $G(C_n^k)$  en el cual  $i_0 = 0$ ,  $i_1 = 2$ ,  $i_2 = 4$ ,  $i_3 = 11$ ,  $i_4 = 13$ ,  $i_5 = 15$ ,  $i_6 = 27$  y se verifica que  $i_6 - i_0 \equiv 2 \pmod 5$  y además,  $i_5 - i_2 \equiv i_4 - i_1 \equiv i_3 - i_0 \equiv 1 \pmod 5$ .

Por su parte, en el caso (2),  $i_0 = 0$ ,  $i_1 = 4$ ,  $i_2 = 8$ ,  $i_3 = 11$ ,  $i_4 = 15$ ,  $i_5 = 26$ ,  $i_6 = 27$  y se tiene  $i_5 - i_2 = 26 - 8 \equiv 3 \pmod 5$  por tanto  $W$  no define un menor 3-autoalternante.

Observar que cada vuelta del circuito  $W$  contiene  $s + 1$  o  $s + 2$  nodos de  $G$ .

A partir de resultados similares a los presentados en la Sección 2.3 para menores alternantes, en la presente sección se propone un algoritmo de separación eficiente tras convertir el problema de separación en un problema de caminos más cortos.

**Lema 4.2.2.** La desigualdad asociada a un menor circulante de  $C_n^k$ , con  $n \equiv \beta \pmod k$  definido por  $W$  con parámetros  $d = 1, n_1, n_2, n_3$ , con  $n_3 \equiv r \pmod k$  ( $k - n_1$ ) es equivalente a la desigualdad

$$\sum_{i \in W} \left( x_i - \frac{1}{k(k - n_1)} \right) \geq \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor - \frac{r}{k(k - n_1)} + u(r) - \sum_{i=0}^{n-1} x_i, \quad (4.1)$$

$$\text{donde } u(r) = \begin{cases} 2, & \text{si } (k - \beta)(k - n_1) < r, \\ 1, & \text{si } 1 < r \leq (k - \beta)(k - n_1), \\ 0, & \text{si } r = 0 = \beta. \end{cases}$$

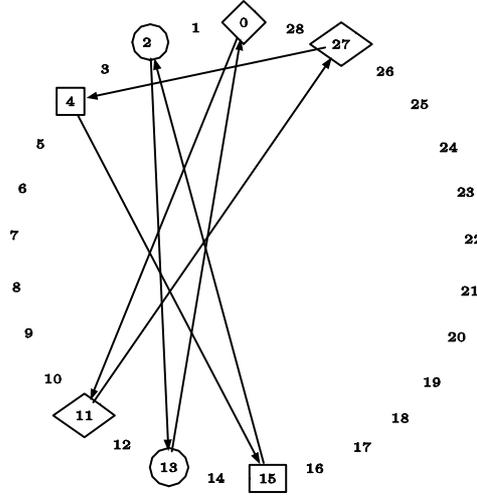


Figura 4.2: Conjunto  $W = \{0, 2, 4, 11, 13, 15, 27\}$  que define un menor 3-autoalternante (Ejemplo 4.2.1)

*Demostración.* Los parámetros asociados al menor verifican las condiciones del Lema 2.2.7, de lo cual se sigue que

$$n(k - n_1) = k(n - (n_2 + n_3)) - n_3$$

Por lo tanto,  $\frac{(n - (n_2 + n_3))}{k - n_1} = \frac{n(k - n_1) + n_3}{k(k - n_1)} = \frac{n}{k} + \frac{n_3}{k(k - n_1)}$ . De esto, si  $n \equiv \beta \pmod{k}$ , y  $n_3 \equiv r \pmod{k(k - n_1)}$ , se sigue que  $\left\lceil \frac{(n - (n_2 + n_3))}{k - n_1} \right\rceil = \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor + \frac{n_3 - r}{k(k - n_1)} + \left\lceil \frac{\beta}{k} + \frac{r}{k(k - n_1)} \right\rceil$ , además,

$$u(r) = \left\lceil \frac{\beta}{k} + \frac{r}{k(k - n_1)} \right\rceil = \begin{cases} 2, & \text{si } (k - \beta)(k - n_1) < r, \\ 1, & \text{si } 1 \leq r \leq (k - \beta)(k - n_1), \\ 0, & \text{si } r = 0 = \beta. \end{cases}$$

Es decir,

$$\left\lceil \frac{(n - (n_2 + n_3))}{k - n_1} \right\rceil = \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor - \frac{r}{k(k - n_1)} + u(r) + \frac{n_3}{k(k - n_1)}.$$

Puesto que  $n_3 = |W| = \sum_{i \in W} 1$ , al reemplazar la ecuación anterior en (2.2) se tiene el resultado deseado.  $\square$

Dados  $C_n^k$  y dos enteros  $n_1, r$  tales que  $2 \leq n_1 \leq k - 2, 1 \leq r \leq k(k - n_1)$ , se buscan todos los subconjuntos  $W \subset Z_n$  que definen un menor  $n_1$ -autoalternante de  $C_n^k$  tal que  $|W| = n_3$  con  $n_3 = r \pmod{k(k - n_1)}$ .

Definimos  $\delta = (\delta_j)_{j=0}^{n_3-1}$  como el vector de distancias entre nodos consecutivos de  $W$ , es decir  $\delta_j = i_{j+1} - i_j$  donde  $W = \{i_0, i_1, \dots, i_{n_3-1}\} \subset \mathbb{Z}_n$ , y  $0 \leq i_0 < i_1 < \dots < i_{n_3-1} \leq n - 1$ . Se verifica entonces que

$$\delta_j \equiv \delta_{j+n_1} \pmod{k}, 0 \leq j \leq n_3 - n_1 - 1.$$

Puesto que además,  $k + 1 \leq \sum_{t=j}^{j+n_1-1} \delta_s \equiv 1 \pmod{k}$ , consideraremos el vector  $a = (a_0, a_1, \dots, a_{n_1-1}) \in \mathbb{Z}_k^{n_1}$  tal que

$$k + 1 \leq \sum_{t=0}^{n_1-1} a_t \equiv 1 \pmod{k}. \quad (4.2)$$

Además, para cada  $j \in \mathbb{Z}_{n_1}$  existe  $0 \leq l \leq n_1 - 2$  tal que  $\sum_{t=0}^l a_{j+t} \equiv s + 1 - n \pmod{k}$  o  $\sum_{t=0}^l a_{j+t} \equiv s + 2 - n \pmod{k}$ , pues esta condición es necesaria para que cada vuelta del circuito asociado al menor se conecte con la siguiente.

Para un punto dado  $\bar{x}$  se define el problema de separación  $C_n^k - (n_1, a, n_3)$ , como el problema de buscar si existe un menor  $n_1$ -autoalternado  $W$  con  $|W| = n_3 \equiv r \pmod{k - n_1}$ , tal que  $0 \in W$ ,  $\delta_s \equiv a_s \pmod{k}$ , para  $s \in \mathbb{Z}_{n_1}$  y tal que  $\bar{x}$  viole la desigualdad (4.1) asociada a dicho menor.

De manera análoga a los resultados de Bianchi et al. [7, Lemas 14 - 17], se convierte este problema de separación en un conjunto de problemas de caminos más cortos sobre un grafo dirigido  $A_n^k(n_1, a, r)$ . Los vértices de  $A_n^k(n_1, a, r)$  están dados por:

$$V = \left( \bigcup_{i \in \mathbb{Z}_{n_1}, j \in \mathbb{Z}_{s+2}} V_j^i \right) \cup \{t\}$$

donde  $V_j^i = \{v_j^i(p) : p \in \mathbb{Z}_n\}$  para todo  $i \in \mathbb{Z}_{n_1}, j \in \mathbb{Z}_s$ .

El conjunto de arcos  $A$  de  $A_n^k(n_1, a)$  es la unión de los siguientes conjuntos de arcos:

- Para cada  $i \in \mathbb{Z}_n$

$$A_1^i = \{(v_j^i(p), v_j^{i+1}(q)) : 1 \leq i \leq d - 2, p + a_i \leq q \leq n - 1, q - p \equiv a_i \pmod{k}\}, \text{ si } a_i \neq 1.$$

$$A_1^i = \{(v_j^i(p), v_j^{i+1}(p + 1)) : 1 \leq i \leq d - 2\}, \text{ caso contrario.}$$

- $A_2 = \{(v_j^{n_1-1}(p), v_{j+1}^0(q)) : p + a_{d-1} \leq q \leq n - 1, q - p \equiv a_{d-1} \pmod{k}\}, \text{ si } a_{d-1} \neq 1.$

$$A_2 = \{(v_j^{n_1-1}(p), v_{j+1}^0(p + 1))\}, \text{ caso contrario.}$$

- $A_3 = \{(v_j^i(p), t) : p \leq n - 1, j > 0, p + j \equiv n \pmod{k}, i \in \{s, s + 1\}\}.$

Asignando a cada  $e = (v_j^i(p), v) \in A$  con  $0 \leq i \leq n_1 - 1, 0 \leq j \leq s - 1, 0 \leq p \leq n - 1$ , un costo  $c_e = \bar{x}_p - \frac{1}{k(k-n_1)}$ , se tendrá que el costo total del camino que pasa por el

conjunto de vértices  $V'$  es:

$$c(V') = \sum_{v_j^i(p) \in V'} \left( \bar{x}_p - \frac{1}{k(k-n_1)} \right),$$

que coincide con el lado izquierdo de (4.1) Notar además que a partir del conjunto  $V'$  se define el conjunto  $W = \{p : v_j^i(p) \in V'\}$  que induce un menor  $n_1$ -autoalternante con parámetros  $(n_1, a, n_3)$ .

Puesto que el grafo dirigido presentado anteriormente es acíclico, el problema de caminos más cortos sobre éste puede ser resuelto en tiempo polinomial.

Finalmente, para resolver completamente el problema de separación para menores  $n_1$ -autoalternados de  $C_n^k$ , es necesario resolver el problema de camino más corto en  $A_n^k(n_1, a, n_3)$  para cada valor de  $a \in \mathbb{Z}_k^d$  que verifique (4.2) y cada valor de  $n_3$  que verifique (2.2) con  $d = \gcd(n_1, n_2, n_3) = 1$ .

**Ejemplo 4.2.3.** Sean  $n = 29$ ,  $N = \{0, 2, 4, 6, 7, 9, 12, 13, 15, 17, 19, 20, 22, 24, 26, 27\}$ ,  $k = 5$ . Sea  $x \in \mathbb{R}^{29}$  el vector cuyas componentes son  $x_i = 0$ , si  $i \in N$ ,  $x_i = \frac{1}{2}$  si  $i \notin N$ .

Separaremos la desigualdad correspondiente a un menor 3-autoalternante con  $a = (2, 2, 2)$  y con parámetros  $d = 1$ ,  $n_1 = 3$ ,  $n_2 = 9$ ,  $n_3 = 7$  y .

Se construye el grafo  $A_{29}^5(3, (0, 2, 2), 7)$  y en este caso, el camino más corto que está asociado al menor 3-autoalternante determinado por  $W = \{0, 12, 14, 16, 18, 10, 22\}$  cuyo costo total es  $c(W) = -\frac{7}{10}$ , mientras que  $\lfloor \frac{29}{5} \rfloor - \frac{7}{5(2)} + 2 - \frac{13}{2} = -\frac{1}{5}$ , lo que prueba que en este caso, la desigualdad (4.1) correspondiente a dicho menor es violada.

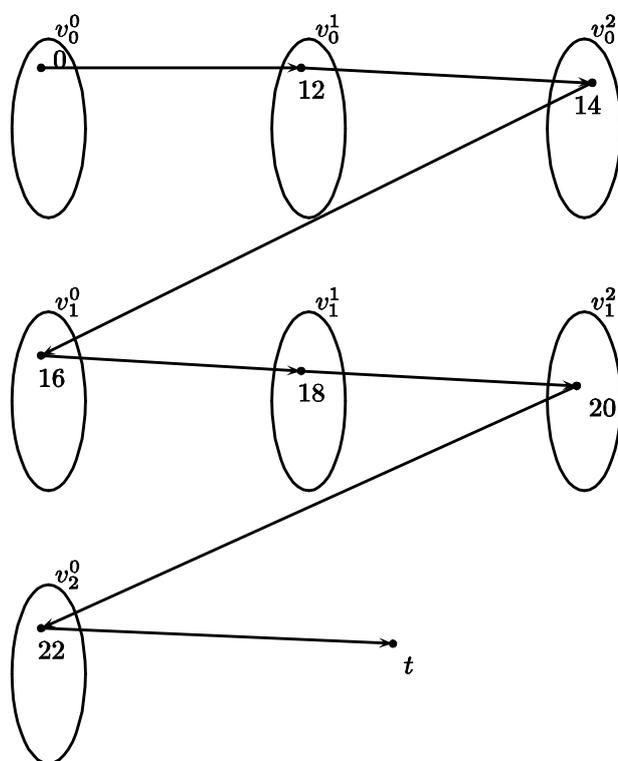


Figura 4.3: Esquema del camino más corto en  $A_{29}^5(3, (2, 2, 2), 7)$

# Bibliografía

- [1] Néstor Aguilera, *Arithmetic relations in the set covering polyhedron of circulant clutters*, Electronic Notes In Discrete Mathematics **30** (2008), 123–128.
- [2] Néstor Aguilera, *On packing and covering polyhedra of consecutive ones circulant clutters*, Discrete Applied Mathematics **158** (2010), 1343–1356.
- [3] Gabriela Argiroffo and Silvia Bianchi, *On the set covering polyhedron of circulant matrices*, Discrete Optimization **6** (2009), 162–173.
- [4] Egon Balas and Shu Ng, *On the set covering polytope: I. all the facet with coefficients in  $\{0,1,2\}$* , Mathematical Programming **43** (1989), 57–69.
- [5] Dimitris Bertsimas and Robert Weismantel, *Optimization over integers*, Dynamic Ideas, 2005.
- [6] Silvia Bianchi, Graciela Nasini, and Paola Tolomei, *The set covering problem on circulant matrices: Polynomial instances and the relation with the dominating set problem on webs*, Electronic Notes In Discrete Mathematics **36** (2).
- [7] ———, *Some advances on the set covering polyhedron of circulant matrices*, Preprint Submitted To Elsevier August 5, 2011 (2011).
- [8] Darío Bini, Gianna Del Corso, Giovanni Manzini, and Luciano Margara, *Inversion of circulant matrices over  $Zm$* , Mathematics Of Computation **70** (2000), 1169–1182.
- [9] Ralf Borndörfer, *Aspects of set packing, partitioning and covering*, Shaker Verlag, 1998.
- [10] M. Bouchakour, T. M. Contenza, C. W. Lee, and A. R. Mahjoub, *On the dominating set polytope*, European Journal Of Combinatorics **29** (2008), no. 3, 652–661.
- [11] J. Cheriyan and R. Ravi, *Approximation algorithms for network problems*, 1998, Disponíble en: [www.math.uwaterloo.ca/~jcheriya/PS\\_files/ln-master.ps](http://www.math.uwaterloo.ca/~jcheriya/PS_files/ln-master.ps).

- [12] V. Chvátal, *Edmonds polytopes and a hierarchy of combinatorial problems*, Discrete Mathematics **4** (1973), 305–337.
- [13] William J. Cook, William H. Cunningham, William R. Pulleyblank, and Alexander Schrijver, *Combinatorial optimization*, Wiley, New York, 1998.
- [14] Gérard Cornuéjols and Beth Novick, *Ideal 0, 1 matrices*, Journal Of Combinatorial Theory (B) **60** (1994), 145–157.
- [15] D. Dudgeon, R. Mersereau, and R. Merser, *Multidimensional digital signal processing*, 1995.
- [16] Majid Ghaderi and Ali Abbasi, *Indoor wireless planning using smart antennas*, Preprint available at: <http://people.ucalgary.ca/mghaderi/docs/globecom11-planning.pdf> (2011).
- [17] Robert M. Gray, *Toeplitz and circulant matrices: A review*, 2005, Disponible en: [ee.stanford.edu/~gray/toeplitz.pdf](http://ee.stanford.edu/~gray/toeplitz.pdf).
- [18] S. Haykin and B. van Veen, *Signals and systems*, Wiley, 2002.
- [19] Bernard Kolman, *Algebra lineal*, Prentice Hall, 1997.
- [20] Richard Lyons, *Understanding digital signal processing*, Prentice Hall, New York, 2001.
- [21] Paolo Nobile and Antonio Sassano, *Facets and lifting procedures for the set covering polytope*, Mathematical Programming **45** (1989), 111–137.
- [22] Joseph O’Rourke, *Art gallery theorems and algorithms*.
- [23] Christof Paar and Jan Pelzl, *Understanding cryptography, a textbook for students and practitioners*, Springer, 2009.
- [24] Ana Paias and J. Paixao, *State space relaxation for set covering problems related to bus driver scheduling*, European Journal of Operational Research **71** (1993), no. 2, 303–316.
- [25] Ferdinando Pezzella and Enrico Faggioli, *Solving large set covering problems for crew scheduling*, TOP: An Official Journal of the Spanish Society of Statistics and Operations Research **5** (1997), no. 1, 41–59.
- [26] William Pratt, *Digital image processing*, Wiley, New York, 2001.
- [27] Steve Roman, *Advanced linear algebra*, Springer, 2008.

- [28] Ana Tomás, António Bajuelos, and Fábio Marques, *Approximation algorithms to minimum vertex cover problems on polygons and terrains*, Computational Science ICCS 2003 (Peter Sloat, David Abramson, Alexander Bogdanov, Jack Dongarra, Albert Zomaya, and Yuriy Gorbachev, eds.), Lecture Notes in Computer Science, vol. 2657, Springer Berlin / Heidelberg, 2003, 10.1007/3-540-44860-8\_90, pp. 652 – 652.
- [29] K. Tutschku, *Demand-based radio network planning of cellular mobile communication systems*, INFOCOM '98. Seventeenth Annual Joint Conference of the IEEE Computer and Communications Societies.
- [30] Robert J. Vanderbei, *Linear programming: Foundations and extensions*.
- [31] Günter Ziegler, *Lectures on polytopes*, Springer Verlag, New York, 1995.