

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS

**APRENDIZAJE AUTOMÁTICO Y MODELOS DE CLASIFICACIÓN.
APLICACIÓN EN LA CALIFICACIÓN CREDITICIA DE LOS
GOBIERNOS AUTÓNOMOS DESCENTRALIZADOS MUNICIPALES
COMO CLIENTES DEL BANCO DEL ESTADO**

**PROYECTO DE TITULACIÓN PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE
INGENIERO MATEMÁTICO**

JAIRO MAURICIO CERVANTES PUENTE

jairomcervantes@hotmail.com

DIRECTOR: JAIME ANDRADE GONZÁLEZ MSc.

jaime.andrade@epn.edu.ec

2012

DECLARACIÓN

Yo, Jairo Mauricio Cervantes Puente, declaro bajo juramento que el trabajo aquí descrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentada para ningún grado o calificación profesional; y, que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

La Escuela Politécnica Nacional puede hacer uso de los derechos correspondientes a este trabajo, según lo establecido por la Ley de Propiedad Intelectual, por su Reglamento y por la normatividad institucional vigente.

Jairo Mauricio Cervantes Puente

CERTIFICACIÓN

Certifico que el presente trabajo fue desarrollado por Jairo Mauricio Cervantes
Puente, bajo mi supervisión.

Mat. Jaime Andrade González MSc.

DIRECTOR

AGRADECIMIENTOS

A mis padres, por apoyarme incondicionalmente y brindarme una vida llena de oportunidades, en base a mucho esfuerzo y amor. A mi familia, por su preocupación y compañía en todos estos años.

A la Gerencia de Riesgos del Banco del Estado, por su apoyo y su colaboración en este proyecto.

A mi Tutor: Matemático Jaime Andrade, por su paciencia y sabios consejos para la realización de este proyecto.

A todos los que ingratamente olvido nombrar, pero que contribuyeron de alguna u otra forma al logro de esta gran meta.

DEDICATORIA

A mis padres, Mariana y Alex, pilares fundamentales de mi vida.

ÍNDICE DE CONTENIDO

LISTA DE FIGURAS	i
LISTA DE TABLAS	iv
LISTA DE ANEXOS	vi
RESUMEN.....	vii
ABSTRACT.....	viii

1	INTRODUCCIÓN	1
1.1	ANTECEDENTES	1
1.2	PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	9
1.3	OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN	11
1.3.1	OBJETIVOS GENERALES	11
1.3.2	OBJETIVOS ESPECÍFICOS	12
2	MARCO TEÓRICO	13
2.1	ANÁLISIS DISCRIMINANTE	13
2.1.1	INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS MULTIVARIANTE	13
2.1.2	MODELO MATEMÁTICO PARA EL ANÁLISIS DISCRIMINANTE	16
2.1.3	ANÁLISIS DISCRIMINANTE PARA DOS GRUPOS	17
2.1.3.1	Discriminador lineal	17
2.1.3.2	Regla de la máxima verosimilitud	18
2.1.3.3	Regla de Bayes	18
2.1.3.4	Ejemplo	19
2.1.4	ANÁLISIS DISCRIMINANTE PARA GRUPOS NORMALES	20
2.1.4.1	Discriminador lineal	20
2.1.4.2	Regla de Bayes	21
2.1.4.3	Probabilidad de clasificación errónea	21
2.1.4.4	Discriminador cuadrático	22
2.1.4.5	Clasificación cuando los parámetros son estimados	22
2.1.5	GENERALIZACIÓN DEL ANÁLISIS DISCRIMINANTE EN EL CASO DE K GRUPOS	23
2.1.5.1	Discriminadores lineales	23
2.1.5.2	Regla de la máxima verosimilitud	24
2.1.5.3	Regla de Bayes	25
2.2	MÁQUINAS DE VECTORES DE SOPORTE	26
2.2.1	MÁQUINAS DE VECTORES DE SOPORTE LINEALES	27
2.2.1.1	Caso linealmente separable	27
2.2.1.1.1	Ejemplo	35
2.2.1.2	El caso no separable	37
2.2.2	MÁQUINAS NO LINEALES DE VECTORES DE SOPORTE	43

2.2.3	MÁQUINAS DE VECTORES DE SOPORTE PARA LA MULTICLASIFICACIÓN	47
2.2.4	FUNCIONES NÚCLEOS	54
3	METODOLOGÍA.....	63
3.1	ANÁLISIS DE DATOS Y DEFINICIÓN DE VARIABLES.....	63
3.2	SELECCIÓN DE LAS VARIABLES MÁS REPRESENTATIVAS.....	65
3.3	DETERMINACIÓN DEL GRUPO DE PERTENENCIA DE LOS GOBIERNOS AUTÓNOMOS DESCENTRALIZADOS MUNICIPALES POR LA SIMILITUD DE LA INFORMACIÓN	71
3.4	ANÁLISIS DISCRIMINANTE.....	75
3.4.1	SELECCIÓN DE LAS VARIABLES INDEPENDIENTES Y DEPENDIENTE	75
3.4.2	SELECCIÓN DEL MÉTODO DE CLASIFICACIÓN	76
3.4.3	VALIDACIÓN DE LAS FUNCIONES DISCRIMINANTES	77
3.4.4	VALORACIÓN DE LA CAPACIDAD PREDICTIVA.....	79
3.5	MÁQUINAS DE VECTORES DE SOPORTE.....	88
3.5.1	TRANSFORMACIÓN DE LOS DATOS AL FORMATO DEL SOFTWARE UTILIZADO	89
3.5.2	SELECCIÓN DEL NÚCLEO	90
3.5.3	SELECCIÓN DEL TIPO DE PRUEBA PARA EL CLASIFICADOR	92
3.5.4	ENTRENAMIENTO.....	92
4	RESULTADOS Y DISCUSIONES.....	106
4.1	PRUEBAS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS DEL ANÁLISIS DISCRIMINANTE.....	107
4.2	PRUEBAS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS DE LAS MÁQUINAS DE VECTORES DE SOPORTE	109
4.3	ANÁLISIS COMPARATIVO DE LOS RESULTADOS DEL ANÁLISIS DISCRIMINANTE Y DE LAS MÁQUINAS DE VECTORES DE SOPORTE.....	111
4.4	ASIGNACIÓN DE LA CALIFICACION A NUEVOS GOBIERNOS AUTÓNOMOS DESCENTRALIZADOS MUNICIPALES UTILIZANDO LOS MÉTODOS: ANÁLISIS DISCRIMINANTE Y MÁQUINAS DE VECTORES DE SOPORTE.....	121
5	CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	124

5.1	CONCLUSIONES	124
5.2	RECOMENDACIONES	126
	REFERENCIAS	128
	ANEXOS	131

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Evolución del monto de créditos aprobados a los Gobiernos Autónomos Descentralizados Municipales (MM USD)	11
Figura 2.1 – Por medio de líneas se genera una posible clasificación de los puntos según su comportamiento.	28
Figura 2.2 – Concepto básico para entender el problema de clasificación a partir de las máquinas de vectores de soporte.	29
Figura 2.3 – Ejemplo de hiperplanos cuando los datos no son linealmente separables	38
Figura 2.4 – Presentación del parámetro de error ξ_i en el error de clasificación.....	39
Figura 2.5 – Idea del uso de un núcleo para la transformación del espacio de los datos. ...	45
Figura 2.6 – Idea del uso de un núcleo para la transformación del espacio de los datos. ...	57
Figura 2.7 – Las máquinas de vectores soporte transforman, inicialmente, el espacio de entradas en un espacio característico de dimensión superior y entonces construye la función de clasificación lineal óptima dentro de este nuevo espacio.	59
Figura 2.8 – Representación gráfica de funciones de núcleos para las máquinas de vectores de soporte.....	60
Figura 3.1 – GADM con calificación A.	82
Figura 3.2 – GADM con calificación B.	83
Figura 3.3 – GADM con calificación C.	84
Figura 3.4 – GADM con calificación D.	85
Figura 3.5 – GADM con calificación E.....	86
Figura 3.6 – Diagrama de dispersión de los cinco grupos de GADM en las dos funciones discriminantes.....	87
Figura 3.7 – Datos representados gráficamente en WEKA.....	90
Figura 3.8 – Resultados de las configuraciones para las MVS.	93
Figura 3.9 – Solución gráfica a la clasificación de los grupos A y B. Los puntos (●) en azul representan al grupo A y los puntos (*) en rojo al grupo B. Los puntos en círculos representan los vectores de soporte.	95

Figura 3.10 – Solución gráfica a la clasificación de los grupos A y C. Los puntos (●) en azul representan al grupo A y los puntos (✱) en celeste al grupo C. Los puntos en círculos representan los vectores de soporte.	96
Figura 3.11 – Solución gráfica a la clasificación de los grupos A y D. Los puntos (●) en azul representan al grupo A y los puntos (✱) en gris al grupo D. Los puntos en círculos representan los vectores de soporte.	97
Figura 3.12 – Solución gráfica a la clasificación de los grupos A y E. Los puntos (●) en azul representan al grupo A y los puntos (✱) en rosado al grupo E. Los puntos en círculos representan los vectores de soporte.	98
Figura 3.13 – Solución gráfica a la clasificación de los grupos B y C. Los puntos (●) en rojo representan al grupo B y los puntos (✱) en celeste al grupo C. Los puntos en círculos representan los vectores de soporte.	99
Figura 3.14 – Solución gráfica a la clasificación de los grupos B y D. Los puntos (●) en rojo representan al grupo B y los puntos (✱) en gris al grupo D. Los puntos en círculos representan los vectores de soporte.	100
Figura 3.15 – Solución gráfica a la clasificación de los grupos B y E. Los puntos (●) en rojo representan al grupo B y los puntos (✱) en rosado al grupo E. Los puntos en círculos representan los vectores de soporte.	101
Figura 3.16 – Solución gráfica a la clasificación de los grupos C y D. Los puntos (●) en celeste representan al grupo C y los puntos (✱) en gris al grupo D. Los puntos en círculos representan los vectores de soporte.	102
Figura 3.17 – Solución gráfica a la clasificación de los grupos C y E. Los puntos (●) en celeste representan al grupo C y los puntos (✱) en rosado al grupo E. Los puntos en círculos representan los vectores de soporte.	103
Figura 3.18 – Solución gráfica a la clasificación de los grupos D y E. Los puntos (●) en gris representan al grupo D y los puntos (✱) en rosado al grupo E. Los puntos en círculos representan los vectores de soporte.	104
Figura 3.19 – Gráfico con errores de clasificación.	105
Figura 4.1 – Curva ROC.	107
Figura 4.2 – Curva ROC para el análisis discriminante	108
Figura 4.3 – Curva ROC para las máquinas de vectores de soporte.	110

Figura 4.4 – Curva ROC para el análisis discriminante y las máquinas de vectores de soporte.	112
---------------------------------------------------------------------------------------------------	-----

LISTA DE TABLAS

Tabla 2.1 – Resultados del ejemplo, sobre la morosidad de un cliente en función de la edad y los ingresos.....	37
Tabla 3.1 – KMO y prueba de Bartlell	66
Tabla 3.2 - Matriz de correlaciones	67
Tabla 3.3- Varianza total explicada.....	68
Tabla 3.4- Matriz de componentes	69
Tabla 3.5 - Matriz de puntajes en las tres componentes principales	70
Tabla 3.6 - Matriz de GADM con los mayores puntajes en las tres componentes principales	71
Tabla 3.7 - Centros de los conglomerados finales.....	72
Tabla 3.8 - Número de GADM en cada conglomerado.....	73
Tabla 3.9 - Puntajes obtenidos en cada conglomerado para cada componente.....	73
Tabla 3.10- Estadísticos de cada grupo	76
Tabla 3.11- Valores Propios	78
Tabla 3.12- Lambda de Wilks	78
Tabla 3.13- Matriz de estructura.....	79
Tabla 3.14- Funciones en los centroides de los grupos	80
Tabla 3.15- Estadísticas por casos	80
Tabla 3.16- Coeficientes de las funciones de clasificación.....	88
Tabla 3.17- Resultado de varias configuraciones propuestas.....	94
Tabla 3.18- Vectores de soporte para las calificaciones A – B	94
Tabla 3.19- Vectores de soporte para las calificaciones A – C	95
Tabla 3.20- Vectores de soporte para las calificaciones A – D.....	96
Tabla 3.21- Vectores de soporte para las calificaciones A – E	97
Tabla 3.22- Vectores de soporte para las calificaciones B – C	99
Tabla 3.23- Vectores de soporte para las calificaciones B - D.....	100
Tabla 3.24- Vectores de soporte para las calificaciones B – E.....	101
Tabla 3.25- Vectores de soporte para las calificaciones C – D.....	102

Tabla 3.26- Vectores de soporte para las calificaciones C – E.....	103
Tabla 3.27- Vectores de soporte para las calificaciones D – E	104
Tabla 4.1- Resultado de la clasificación del análisis discriminante	108
Tabla 4.2- Área bajo la curva	109
Tabla 4.3- Resultado de la clasificación de las máquinas de vectores de soporte.....	110
Tabla 4.4- Área bajo la curva	111
Tabla 4.5- Categorías de provisión.....	114
Tabla 4.6- Ponderación de riesgo	115
Tabla 4.7- Calificación de Cartera al 31-Dic-2011 (Caso inicial análisis discriminante). 116	
Tabla 4.8- Calificación de Cartera al 31-Dic-2011 (Caso predicción análisis discriminante)	118
Tabla 4.9- Calificación de Cartera al 31-Dic-2011 (Caso inicial máquinas de vectores de soporte).....	119
Tabla 4.10- Calificación de Cartera al 31-Dic-2011 (Caso predicción máquinas de vectores de soporte).....	121
Tabla 4.11- Predicción de la calificación a nuevos GADM	123

LISTA DE ANEXOS

Anexo A - Indicadores de Gestión Administrativa y Financiera.....	132
Anexo B – Matriz de puntajes en las tres componentes principales	137
Anexo C - Calificación de los Gobiernos Autónomos Descentralizados Municipales obtenidas por el método de conglomerados.	141
Anexo D – Estadísticas por casos.....	145
Anexo E – Resultado de las 36 configuraciones propuestas para las máquinas de vectores de soporte con función de núcleo de base radial.	149
Anexo F – Resultados para 12 configuraciones de las máquinas de vectores de soporte.	150

RESUMEN

El presente proyecto tiene como propósito implementar varias metodologías de clasificación, para establecer la predicción de la calificación de riesgo de crédito de los Gobiernos Autónomos Descentralizados Municipales. El documento presenta las características más importantes de los modelos de clasificación basados en análisis discriminante y máquinas de vectores soporte, siendo el análisis discriminante un método que permite identificar las características que diferencian a dos o más grupos, y crear una función capaz de distinguir con la mayor precisión posible a los miembros de uno u otro grupo. Por otro lado las máquinas de vectores de soporte constituyen nuevas estructuras de aprendizaje automático que han demostrado un excelente desempeño en aplicaciones de clasificación. Se basan en transformar el espacio de entrada en otro de dimensión superior en el que el problema puede ser resuelto mediante un hiperplano óptimo, por medio de una función núcleo. La información utilizada para el entrenamiento y validación de las metodologías propuestas, está constituida por un conjunto de indicadores de gestión administrativa y financiera correspondientes a 221 Gobiernos Autónomos Descentralizados Municipales. Una vez obtenidas las funciones discriminantes y los hiperplanos óptimos, los indicadores de gestión administrativa y financiera son utilizados en el entrenamiento y la validación de los modelos de predicción. Como resultado se observa una eficiencia del 90,6% de clasificados correctamente.

Palabras clave: Análisis discriminante. Máquinas de vectores de soporte.

ABSTRACT

This project aims to implement various classification methodologies to establish the prediction of credit risk rating of Decentralized Autonomous Municipal Government. The paper presents the main features of classification models based on discriminant analysis and support vector machines, with the discriminant analysis method to identify the characteristics that differentiate two or more groups, and create a function that can distinguish the accurately as possible to members of either group.

On the other hand, support vector machine are machine learning new structures that have demonstrated excellent performance in classification applications. Are based on the input space transform in another of higher dimension in which the problem can be solved by an optimal hyperplane, using a kernel function.

The information used for training and validation of the methodologies proposed, consists of a set of administrative and financial management for Decentralized Autonomous Municipal Government 221. After obtaining the discriminant function and the optimal hyperplane, indicators of administrative and financial management are used for training and validation of prediction models. As a result there is an efficiency of 90.6% correctly classified.

Keywords: Discriminant analysis. Support vector machines.

1 INTRODUCCIÓN

1.1 ANTECEDENTES

El sistema financiero tiene un papel importante en el funcionamiento de la economía. Instituciones financieras sólidas y solventes permiten que los recursos financieros fluyan eficientemente desde los agentes superavitarios a los deficitarios.

La principal cualidad del sistema financiero es su alto grado de regulación. La regulación bancaria tiene como propósito la búsqueda del buen funcionamiento del sistema, las diferentes regulaciones se han interesado por la solvencia de las entidades financieras y han desarrollado un número importante de normas que tratan de salvaguardar este objetivo. La manera de evitar casos de insolvencia es a través de una buena gestión del sistema financiero, en situaciones de problemas económicos los bancos suelen experimentar importantes pérdidas y padecer problemas de solvencia. Esta situación es menos alarmante si las entidades disponen de recursos propios suficientes con los que pueda cubrir dichas pérdidas. Por lo tanto los recursos propios actúan a modo de protección ya que cubre pérdidas inesperadas y evita que éstas recaigan sobre los depositantes. A raíz de la crisis bancaria en EE.UU. en 1929 se reconoce la importancia de que las instituciones bancarias tengan un respaldo financiero de sus propietarios suficiente para soportar pérdidas inesperadas.

Estas regulaciones se convierten cada vez más en una herramienta indispensable para las entidades financieras, ya que una inadecuada gestión de este riesgo puede avocarlas a una situación de insolvencia e insostenibilidad financiera.

La colocación de créditos es la tarea principal del sistema bancario y es aquella que mejor la define y a la que dedica la mayor parte de sus esfuerzos, la que genera la mayor parte de sus beneficios y los mayores riesgos. Normalmente la

palabra riesgo tiene una relación negativa (algo que se debe evitar) frente a la creencia tradicional basada en no asumir aquellas negociaciones que no ofrecen plenas garantías. Sin embargo, el negocio bancario supone precisamente eso, la gestión de riesgos con el objetivo de obtener una rentabilidad que compense adecuadamente. Un banco es fundamentalmente una máquina de gestión de riesgos en busca de rentabilidad. De todos los riesgos a los que está expuesto el negocio bancario, el principal es el riesgo de crédito.

El riesgo de crédito es el tipo de riesgo más importante al que debe enfrentarse cualquier entidad financiera. Frente al dogma tradicional basado en no asumir riesgos o minimizarlos y rechazar aquellas operaciones que no ofrecían plenas garantías, la gestión del riesgo de crédito establece como objetivo gestionar el riesgo para obtener una rentabilidad acorde con el nivel de riesgo asumido, manteniendo al mismo tiempo un capital adecuado y cumpliendo con la normativa. Esto significa que una operación crediticia con una mayor probabilidad de impago, no tiene por qué ser mal negocio, si se obtiene una rentabilidad que compensa suficientemente dicho riesgo.

El organismo de control del sistema financiero en el Ecuador es la Superintendencia de Bancos y Seguros, y considerando el papel que debe desarrollar como ente regulador se presentan algunos aspectos importantes encontrados en dicha institución¹.

- La Superintendencia de Bancos y Seguros es una institución de regulación y supervisión, que realiza la vigilancia e inspección de bancos, instituciones de crédito, cooperativas, empresas financieras, entidades afianzadores de seguros y las demás que la ley disponga, que desempeña su mandato constitucional y legal según las mejores prácticas.
- La misión de la Superintendencia de Bancos y Seguros es vigilar por la seguridad, estabilidad, transparencia y solidez de todo el sistema financiero

¹ Superintendencia de Bancos y Seguros. *Generalidades*. <http://www.sbs.gob.ec/practg/sbs>

público y privado, mediante un eficiente y eficaz proceso de regulación y supervisión para proteger los intereses del público e impulsar el desarrollo del país.

- El objetivo estratégico de la Superintendencia de Bancos y Seguros es lograr una adecuada administración de riesgos mediante el fortalecimiento de los procesos de supervisión. Desarrollando medidas para prevenir y cuantificar el riesgo de crédito, por ser el principal motivo de pérdida para las entidades financieras.

El Comité de Basilea en cooperación de los bancos más importantes del mundo han constituido varias medidas. Así el Comité de Basilea entre sus principales funciones tiene la de fomentar la cooperación monetaria y financiera a nivel internacional, realizar la función de banco para los bancos centrales de diferentes países del mundo, promover el debate y facilitar los procesos de adopción de decisiones entre los distintos bancos centrales.

Esta organización, además de determinar el capital necesario para hacer frente al riesgo de crédito, está promoviendo que los organismos controladores o supervisores de entidades financieras en todo el mundo, promuevan prácticas sanas para administrar el riesgo de crédito.

A pesar de que los altos jefes y los encargados del área de riesgos son los responsables finales de un sistema eficaz de la administración del riesgo de crédito, la Superintendencia de Bancos y Seguros como parte de sus actividades habituales de supervisión, tiene la obligación de evaluar el sistema de las entidades financieras para identificar, medir, monitorear y controlar el riesgo de crédito. Adicionalmente, se debe verificar si el directorio de la entidad financiera supervisada cumple efectivamente el proceso de administración del riesgo de crédito y si la gerencia monitorea las posiciones de riesgo y el cumplimiento, de acuerdo a las políticas establecidas.

La Superintendencia de Bancos y Seguros considerando²:

- Que según lo dispuesto en la letra b) del artículo 180 de la Ley General de Instituciones del Sistema Financiero, corresponden a la autoridad de control del sistema financiero velar por la estabilidad, solidez y correcto funcionamiento de las instituciones sujetas a su control.
- Que las instituciones del sistema financiero deben contar con un proceso de administración integral de riesgos que les permita identificar, medir, controlar/mitigar, monitorear y reportar los riesgos, las exposiciones de riesgo que enfrentan, con la finalidad de proteger los intereses del público.
- Que para una adecuada administración integral de riesgos, es necesario introducir cambios en la estructura organizativa de las instituciones del sistema financiero, a fin de establecer las unidades administrativas y operativas requeridas para la valoración, control y monitoreo de los niveles de riesgo asumidos en el desarrollo de sus operaciones.
- Que es necesario que las instituciones del sistema financiero establezcan mecanismos y procesos, y, cuenten con recursos humanos calificados y experimentados en el control de los riesgos generados por sus operaciones, con el propósito de que logren identificar, medir, controlar/mitigar, y monitorear claramente los diferentes tipos de riesgo a que están expuestas.
- Que se requiere el establecimiento de estándares mínimos prudenciales para las instituciones del sistema financiero, realicen de manera adecuada la gestión y control de las exposiciones y por ende de los riesgos que enfrentan en el desarrollo de sus negocios.

En el presente proyecto se mencionan algunos puntos que resuelve la Junta Bancaria³ considerando lo antes expuesto:

² Superintendencia de Bancos y Seguros (2003). *De la gestión y administración de riesgos*. Resolución N° JB-2003-601.

³ Superintendencia de Bancos y Seguros (2004). *De la gestión integral y control de riesgos*. Resolución N° JB-2004-631.

Capítulo I.- De la gestión integral y control de riesgos.

Sección I.- Alcances y definiciones.

Artículo 1.- Las instituciones del sistema financiero controladas por la Superintendencia de Bancos y Seguros, deberán establecer esquemas eficientes y efectivos de administración y control de todos los riesgos a los que se encuentran expuestas en el desarrollo del negocio, conforme su objeto social, sin perjuicio del cumplimiento de las obligaciones que sobre la materia establezcan otras normas especiales y/o particulares.

La Junta Bancaria⁴ considerando otros aspectos resuelve incluir en la resolución JB-2003-601 como capítulo II “De la administración de riesgo de crédito” fundamentándose en varias secciones, las siguientes disposiciones:

Sección I.- Alcance y definiciones

Artículo 1.- Las disposiciones de la presente norma son aplicables al Banco Central del Ecuador, a las instituciones financieras públicas y privadas, a las compañías de arrendamiento mercantil, a las compañías emisoras y administradoras de tarjetas de crédito, y a las corporaciones de desarrollo de mercado secundario de hipotecas, cuyo control compete a la Superintendencia de Bancos y Seguros y que en el texto de este capítulo se las denominará como instituciones controladas.

Artículo 2.- Se considerarán las siguientes definiciones para efecto de la aplicación de las disposiciones contenidas en este capítulo:

Riesgo de crédito.- Es la posibilidad de pérdida debido al incumplimiento del prestatario o la contraparte en operaciones directas, indirectas o de derivados que

⁴ Superintendencia de Bancos y Seguros (2003). *De la administración del riesgo de crédito*. Resolución N° JB-2003-602.

conlleva el no pago, el pago parcial o la falta de oportunidad en el pago de las obligaciones pactadas;

Incumplimiento.- Es no efectuar el pago pactado dentro del período predeterminado; o, efectuarlo con posterioridad a la fecha en que estaba programado, o, en distintas condiciones a las pactadas en el contrato.

Probabilidad de incumplimiento (p_i).- Es la posibilidad de que ocurra el incumplimiento parcial o total de una obligación de pago o el rompimiento de un acuerdo del contrato de crédito, en un período determinado.

Nivel de exposición del riesgo de crédito (E).- Es el valor presente (al momento de producirse el incumplimiento) de los flujos que se espera recibir de las operaciones crediticias.

Sección II.- Administración del riesgo de crédito

Artículo 1. - Las instituciones controladas deben establecer esquemas eficientes de administración y control del riesgo de crédito al que se expone en el desarrollo del negocio.

Cada institución controlada tiene su propio perfil de riesgo según las características de los mercados en los que opera y de los productos que ofrece; por lo tanto, al no existir un modelo único de administración del riesgo de crédito, cada entidad debe desarrollar su propio esquema.

Sección III.- Metodología y procesos de administración del riesgo de crédito

Artículo 1.- Las instituciones controladas deberán contar con un sistema para monitorear los niveles del riesgo de crédito en forma permanente a través de las diferentes metodologías adoptadas por cada entidad para cada modalidad de crédito (comercial, consumo, vivienda y microcrédito), dentro de las cuales se determinarán los principios y criterios generales para la evaluación del riesgo de crédito.

Artículo 2.- Las metodologías implantadas deben considerar la combinación de criterios cuantitativos y cualitativos, de acuerdo con la experiencia y las políticas estratégicas de la entidad; deben permitir monitorear y controlar la exposición crediticia de los diferentes portafolios. Esta metodología debe ser evaluada periódicamente a fin de garantizar la idoneidad de la misma, al igual que la relevancia de las variables utilizadas.

Una de las instituciones financieras que está sujeta a las regulaciones de la Superintendencia de Bancos y Seguros es el Banco del Estado. El Banco del Estado en su condición de banca de desarrollo y con la finalidad de contribuir al crecimiento sustentable del país, otorga créditos a los Gobiernos Autónomos Descentralizados financiando proyectos de inversión en infraestructura y servicios públicos.

El Banco del Estado ofrece diversos instrumentos de financiamiento y asistencia técnica, con el propósito de financiar los requerimientos de inversión que los Gobiernos Autónomos Descentralizados, y sus respectivos organismos tienen en materia de infraestructura y servicios públicos.

Para ello otorga apoyos financieros destinados a la ejecución de obras y/o proyectos de infraestructura que deriven directa o indirectamente de concesiones, contratos de prestación de servicios y obra pública. El Banco del Estado apoya el financiamiento de obras y proyectos pertenecientes a los siguientes sectores:

- Saneamiento Ambiental.- Obras de captación, conducción potabilización y distribución de agua potable, colectores, subcolectores y redes de alcantarillado, plantas de tratamiento de aguas residuales.
- Manejo y disposición de residuos sólidos.- Equipamiento, camiones, barredoras, rellenos sanitarios, plantas de tratamiento de desechos peligrosos, etc.
- Equipamiento urbano.- pavimentación, ornatos, banquetas.

- Patrimonio.- rehabilitación de sitios y edificios históricos, parques y plazas públicas.
- Vialidad.- Infraestructura carretera entre otras.

A continuación se presentan algunas políticas de crédito que tiene el Banco del Estado⁵ para el otorgamiento de créditos.

En el Capítulo I de las políticas generales señala:

- Las operaciones crediticias se enmarcarán en la Ley de Régimen Monetario y Banco del Estado, Ley General de Instituciones del Sistema Financiero y Resoluciones de la Junta Bancaria, normas emitidas por el Directorio y la Gerencia General.
- Se diversificarán los créditos evitando la concentración de recursos, a fin de contribuir al desarrollo del país en forma equilibrada de las regiones, provincias y municipalidades.
- Se calificará el riesgo crediticio con la metodología de calificación de riesgo establecida para el efecto y se determinará el cupo de endeudamiento de la entidad solicitante.

En el Capítulo II de políticas específicas señala:

- Podrán acceder al financiamiento las entidades de acuerdo con lo establecido en el Art. 118 de la Constitución y en la Ley de Régimen Monetario y Banco del Estado, tales como Gobiernos Autónomos Descentralizados Municipales, Provinciales, Junta Parroquiales, Universidades, Empresas Mixtas a quienes el Estado haya delegado la prestación de servicios y las instituciones privadas con finalidad social y pública que reciban rentas del Estado.
- Serán sujetos de crédito del Banco del Estado, para proyectos de preinversión, inversión y fortalecimiento institucional, las entidades que tengan capacidad de

⁵ Banco del Estado. *Reglamento General de Operaciones de Crédito del Banco del Estado.*

endeudamiento, que califiquen de acuerdo con los niveles de riesgo establecido por el Banco, y que demuestren su capacidad financiera.

- El cobro de las obligaciones de las entidades prestatarias se realizará mediante el fideicomiso automático, a través del Convenio de débito automático de los recursos de las cuentas corrientes que la entidad prestataria mantenga en cualquiera de las instituciones del Sistema Financiero Privado o de los Bancos estatales, a ser suscrito a favor del Banco del Estado.

1.2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El problema que se plantea en el presente proyecto surge de los requerimientos necesarios para la implantación de políticas de riesgo de crédito en el sector financiero, donde las entidades financieras están obligadas a crear sus propios modelos para evaluar, calificar y controlar los riesgos, de manera que se cumpla con lo establecido por el organismo de control.

Las calificaciones crediticias constituyen un elemento importante para los Gobiernos Autónomos Descentralizados Municipales que buscan financiamiento a través de Organismos Multilaterales, Banca Estatal y Privada en mejores condiciones financieras. Algunos autores consideran incluso que la calificación de riesgo es una aproximación de la probabilidad de incumplimiento y, en ese sentido, es un buen indicador de la salud financiera de las entidades públicas. Los órganos reguladores también están interesados en monitorear el desempeño de las finanzas públicas con el fin de detectar problemas de insolvencia e incumplimiento potencial que pueda poner en riesgo al sistema financiero.

En estudios de riesgos de crédito para clientes de créditos de tipo comercial, consumo, vivienda y microcrédito se han usado distintos métodos de clasificación para estimar la calificación crediticia, tales como el Análisis Discriminante, modelos de variable dependiente limitada (entre los que se destacan los modelos Probit Ordenados y Logísticos) y Redes Neuronales. Sin embargo muy poco se ha hecho respecto al estudio de riesgo crediticio en las entidades públicas en el

Ecuador y la literatura formal al respecto es prácticamente inexistente. En razón a lo mencionado surge la inquietud de realizar una investigación tendente a utilizar Máquinas de Vectores de Soporte como técnica de clasificación de la calificación de riesgo de crédito y compararla con el método de Análisis Discriminante.

La identificación y calificación del riesgo de crédito es el primer componente de una administración de riesgo eficiente. Por ello, las instituciones financieras deben contar con un sistema de gestión del riesgo de crédito que produzca una calificación correcta y oportuna. Contribuyendo a una adecuada ejecución de funciones, tales como:

- Determinación de la tasa de interés del préstamo. El precio del préstamo debe ser suficiente como para compensar el riesgo para las ganancias y el capital de la institución.
- Reserva para pérdidas en préstamos y suficiencia del capital. La calificación de créditos individuales sostiene la constitución de la reserva. Al atribuir una calificación a un crédito, es preciso considerar la pérdida inherente y constituir una provisión, ya sea individualmente o en forma conjunta.
- Sistemas de información para la gestión de cartera e informes para la alta dirección. Los informes de calificación de crédito suman y estratifican el riesgo y describen las tendencias del mismo dentro de la cartera. La calificación de crédito ejerce una gran influencia en las decisiones de una institución financiera respecto de la compra, venta, mantenimiento y protección de líneas de crédito.

Los Gobiernos Autónomos Descentralizados tienen como su principal fuente de financiamiento al Banco del Estado. Dicha institución financiera en su condición de banca de desarrollo otorga créditos financiando proyectos de inversión en infraestructura y servicios públicos, sujetándose a las regulaciones dictadas por el organismo de control.

La cartera de crédito de los Gobiernos Autónomos Descentralizados en los últimos 10 años ha tenido importantes variaciones en el Banco del Estado, el incremento del monto de los créditos aprobados del Banco del Estado para el año 2010 fue de 195% con respecto al año 2009. Este comportamiento permitió que la cartera de crédito institucional alcance los 884 millones de dólares, creciendo en un 20% y su valor total representa el 77% de los activos, equivalente a 1,137 millones de dólares.

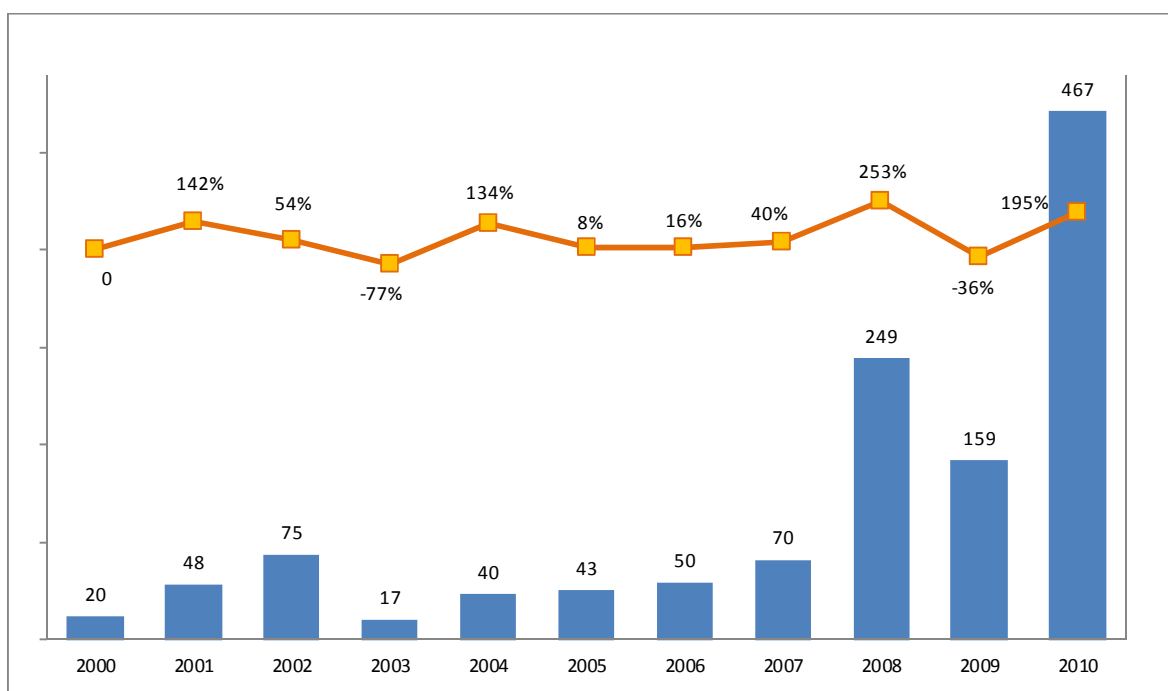


Figura 1.1 – Evolución del monto de créditos aprobados a los Gobiernos Autónomos Descentralizados Municipales (MM USD)

Fuente: Banco del Estado

Elaborado por: Jairo Cervantes

1.3 OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

1.3.1 OBJETIVOS GENERALES

Determinar y analizar la calidad de la predicción del Análisis Discriminante y Máquina de Vectores de Soporte para la calificación crediticia de los Gobiernos Autónomos Descentralizados Municipales.

1.3.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Desarrollar una batería de indicadores financieros y de gestión administrativa de los Gobiernos Autónomos Descentralizados Municipales para obtener una calificación crediticia.
- Utilizar la metodología de Análisis Discriminante para realizar la calificación de riesgo de Gobiernos Autónomos Descentralizados Municipales a partir de indicadores financieros del año 2010.
- Utilizar la metodología de Máquinas de Vectores de Soporte para determinar las calificaciones de riesgo de Gobiernos Autónomos Descentralizados Municipales a partir de indicadores financieros del año 2010.
- Comparar los resultados obtenidos mediante los métodos de Análisis Discriminante y Máquina de Vectores de Soporte.

2 MARCO TEÓRICO

El objetivo de este capítulo es presentar algunos de los principios y criterios matemáticos usados en la cuantificación del riesgo de crédito, lo que permitirá al lector formularse una idea general sobre estos. Las bases matemáticas que se van a revisar en este proyecto son el análisis discriminante y las máquinas de vectores de soporte.

2.1 ANÁLISIS DISCRIMINANTE

2.1.1 INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS MULTIVARIANTE

El análisis multivariante tiene como objetivo esencial el estudio simultáneo de varias variables por medio de un conjunto de técnicas y métodos. Los orígenes del análisis multivariante se encuentran en los primeros años del siglo XX. Nace como teoría matemática que trata de explicar el concepto de inteligencia dentro del área de la psicología. Los primeros estudios multivariantes formales se refieren a la generalización de los análisis de correlación y regresiones realizados por los científicos ingleses Galton, Pearson y Spearman.

Francis Galton⁶ introduce el concepto de recta de regresión y las primeras ideas de correlación entre variables, conceptos que surgen de investigaciones sobre la tendencia de la talla de los seres humanos hacia la estatura promedio de la población a la cual pertenece. Karl Pearson⁷ realiza un importante aporte a la estadística al proponer el contraste ji-cuadrado de independencia y se enfrentó al problema de determinar si dos grupos de personas, de los que se conoce sus medidas físicas, pertenecen a la misma raza. Presentando como primera medida de distancias multivariante el coeficiente de parecido racial. Charles Spearman⁸

⁶ Galton, F. (1889). *Natural Inheritance*. Inglaterra, Londres.

⁷ Pearson, K. (1901). *The scientific life in a statistical age*. Inglaterra, Cambridge.

⁸ Spearman, C. (1904). *General intelligence, objectively determined and measured*. Inglaterra.

estima la inteligencia de niños desarrollando el primer modelo de análisis de factores, en el que propone que los resultados de cualquier test sicométrica se pueden expresar como una combinación lineal de un factor común a todas las pruebas que incluye el test y un factor específico para cada prueba.

En la década de los años 30 se producen grandes contribuciones a la estadística multivariante, se plantea el problema del análisis de componentes principales como un procedimiento de reducción de variables. Mahalanobis⁹ publica un estudio de otro índice de distancia. Fisher¹⁰ propone la idea de que la distancia multivariante intragrupos se tradujese en una combinación lineal de variables para la discriminación intragrupos.

En los años 60 empiezan a utilizarse los ordenadores en el proceso de análisis de datos. El proceso mecánico deja de tener importancia y empieza a aplicarse el análisis multivariante a la psicología, educación, biología, medicina, economía, geología, etc.

Según la existencia de variables dependientes e independientes se puede aplicar diferentes técnicas de clasificación, a continuación se describe brevemente algunos de estas técnicas:

- Modelos de regresión lineal: Se trata de cuantificar la influencia que ejercen variables explicativas de distintos tipos (continuos y categóricos) sobre una variable dependiente de carácter continuo.
- Análisis multivariante de la varianza: Se trata de determinar la influencia de uno o más factores (variables categóricas) sobre más de una variable dependiente.
- Análisis canónico: Se trata de establecer la interdependencia entre dos conjuntos de variables.

⁹ Mahalanobis, A. (1930). *Prasanta Chandra Mahalanobis*. India.

¹⁰ Fisher, R. (1936). *The use of multiple measurements in taxonomic problems*. Inglaterra, Londres.

- **Análisis discriminante:** El análisis discriminante se aplica para caracterizar mediante un conjunto de variables las diferencias existentes entre distintos grupos (análisis discriminante descriptivo) y también para clasificar observaciones cuando se desconoce el grupo al que pertenecen (análisis discriminante predictivo). La variable dependiente es pues de naturaleza categórica.
- **Análisis factorial:** Tiene por finalidad la reducción de datos. Se formula un modelo teórico en que se explica el comportamiento de variables observables mediante factores comunes y factores únicos no observables que se obtienen en el proceso de análisis de datos.
- **Análisis de correspondencias:** Es un método de reducción de datos aplicable a variables categóricas.
- **Escalas multidimensionales:** Es un conjunto de técnicas que utilizan las proximidades entre objetos para realizar una representación espacial de los mismos.
- **Análisis de conglomerados:** El objetivo aquí es la partición de un conjunto de objetos en grupos tales que los objetos pertenecientes a un mismo grupo sean muy similares entre si pero muy diferentes a los objetos pertenecientes a otros grupos.

Los orígenes y evolución del análisis discriminante surgen en los años 20. Aunque los estudios iniciales de análisis discriminante se aplicaron en las ciencias médicas y biológicas, se fue despertando un gran interés por esta técnica en áreas de estudio como economía, educación, ingeniería, y psicología. Tradicionalmente ha sido utilizado en análisis de mercado para predecir el grado de aceptación de un producto de acuerdo con sus características. Otros ejemplos de aplicación del análisis discriminante son: reconocimiento de falsas obras de arte, sistemas automáticos de concesión de créditos implantados en instituciones financieras, etc.

2.1.2 MODELO MATEMÁTICO PARA EL ANÁLISIS DISCRIMINANTE

A continuación se presenta los elementos teóricos básicos del análisis discriminante¹¹.

Sean Ω_1, Ω_2 dos conjuntos, y X_1, \dots, X_p variables observables, donde $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_p)$ las observaciones de las variables sobre un individuo ω . El problema es asignar ω a uno de los dos conjuntos. Este problema ocurre en muchas situaciones: decidir si se puede conceder un crédito; determinar la morosidad en las instituciones financieras; identificar la calificación de riesgo a la que pertenece una empresa, etc.

El criterio del análisis discriminante es asignar ω , y se plantea mediante una función discriminante $D(x_1, \dots, x_p)$.

Entonces la regla de clasificación es:

$$\text{Si } D(x_1, \dots, x_p) \begin{cases} \geq 0 & \rightarrow \omega \text{ a } \Omega_1, \\ < 0 & \rightarrow \omega \text{ a } \Omega_2 \end{cases}$$

Esta regla divide R^p en dos regiones

$$\begin{aligned} R_1 &= \{\mathbf{x} | D(\mathbf{x}) > 0\} \\ R_2 &= \{\mathbf{x} | D(\mathbf{x}) < 0\} \end{aligned}$$

Es un error de clasificación si asignamos ω a una población a la que no pertenece. La probabilidad de clasificación errónea (pce) es:

$$pce = P(R_2/\Omega_1)P(\Omega_1) + P(R_1/\Omega_2)P(\Omega_2) \quad (2.1)$$

¹¹ Cuadras, C. (2011). *Nuevos métodos de análisis multivariante*. España, Barcelona.

2.1.3 ANÁLISIS DISCRIMINANTE PARA DOS GRUPOS

2.1.3.1 Discriminador lineal

Sean μ_1, μ_2 los vectores de medias de las variables en Ω_1, Ω_2 respectivamente, y se supone que la matriz de covarianzas Σ es común. Las distancias de Mahalanobis de las observaciones $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_p)$ de un individuo ω a las poblaciones son:

$$M^2(\mathbf{x}, \mu_i) = (\mathbf{x} - \mu_i)' \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \mu_i), \quad i = 1, 2.$$

La primera regla de clasificación consiste en asignar ω a la población más próxima:

$$\text{Si } M^2(\mathbf{x}, \mu_1) \begin{cases} < M^2(\mathbf{x}, \mu_2) & \rightarrow \omega \text{ a } \Omega_1, \\ > M^2(\mathbf{x}, \mu_2) & \rightarrow \omega \text{ a } \Omega_2 \end{cases} \quad (2.2)$$

Esta regla expresada como una función discriminante, está dada por:

$$M^2(\mathbf{x}, \mu_2) - M^2(\mathbf{x}, \mu_1) = (\mu_2 - \mu_1)' \Sigma^{-1} (\mu_2 + \mu_1) + 2\mathbf{x}' \Sigma^{-1} (\mu_1 - \mu_2)$$

Definimos la función discriminante

$$L(\mathbf{x}) = \left[\mathbf{x} - \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2) \right]' \Sigma^{-1} (\mu_1 - \mu_2) \quad (2.3)$$

Tenemos que

$$M^2(\mathbf{x}, \mu_2) - M^2(\mathbf{x}, \mu_1) = 2L(\mathbf{x}) - L((\mu_1 + \mu_2)/2)$$

y la regla 2.2 es:

$$Si L(\mathbf{x}) \begin{cases} > 0 & \rightarrow \omega \text{ a } \Omega_1, \\ < 0 & \rightarrow \omega \text{ a } \Omega_2 \end{cases}$$

El discriminador lineal de Fisher es la función lineal dado en 2.3.

2.1.3.2 Regla de la máxima verosimilitud

Supongamos que $f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x})$ son las densidades de \mathbf{x} en Ω_1, Ω_2 . Una regla de clasificación consiste en asignar ω a la población donde la verosimilitud de las observaciones \mathbf{x} es más grande:

$$Si f_1(\mathbf{x}) \begin{cases} > f_2(\mathbf{x}) & \rightarrow \omega \text{ a } \Omega_1, \\ < f_2(\mathbf{x}) & \rightarrow \omega \text{ a } \Omega_2 \end{cases}$$

La función discriminante es:

$$V(\mathbf{x}) = \log f_1(\mathbf{x}) - \log f_2(\mathbf{x})$$

2.1.3.3 Regla de Bayes

En ciertos escenarios, disponemos de las probabilidades a priori de que ω pertenezca a cada una de los grupos ($q_1 = P(\Omega_1)$, $q_2 = P(\Omega_2)$, $q_1 + q_2 = 1$).

Dadas las observaciones $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_p)$ las probabilidades a posteriori de que ω pertenezca a las poblaciones según el teorema de Bayes son:

$$P(\Omega_i/\mathbf{x}) = \frac{q_i f_i(\mathbf{x})}{q_1 f_1(\mathbf{x}) + q_2 f_2(\mathbf{x})}, \quad i = 1, 2.$$

La regla de clasificación de Bayes es:

$$\text{Si } P(\Omega_1/\mathbf{x}) \begin{cases} > P(\Omega_2/\mathbf{x}) & \rightarrow \omega \text{ a } \Omega_1 \\ < P(\Omega_2/\mathbf{x}) & \rightarrow \omega \text{ a } \Omega_2 \end{cases}$$

El discriminador de Bayes es:

$$B(\mathbf{x}) = \log f_1(\mathbf{x}) - f_2(\mathbf{x}) + \log(q_1/q_2)$$

Cuando $q_1 = q_2 = 1/2$, entonces $B(\mathbf{x}) = V(\mathbf{x})$. Este discriminador es óptimo.

2.1.3.4 Ejemplo

La morosidad es un estado de un cliente de una entidad financiera, que al tener un crédito presenta diferentes casos de morosidad. El primer caso es cuando el cliente no ha incumplido sus obligaciones (moroso) y el segundo es aquel cliente que está al día con sus obligaciones (no moroso).

Sobre una muestra de $n_1 = 517$ y $n_2 = 183$ clientes, de los cuales se obtuvieron la siguiente información

$$e = \text{edad del cliente en años}, \quad i = \text{ingresos familiares en miles de \$}$$

Se obtuvo las siguientes medias y matrices de covarianzas:

No moroso	Moroso
$\bar{\mathbf{x}}_1 = (35.51 \quad 47.15)$	$\bar{\mathbf{x}}_2 = (33.01 \quad 8.51)$
$S_1 = \begin{pmatrix} 59.41 & 136.65 \\ 136.63 & 1171.02 \end{pmatrix}$	$S_2 = \begin{pmatrix} 72.55 & 142.83 \\ 142.83 & 1858.95 \end{pmatrix}$

Para el discriminador lineal la estimación de la matriz de covarianza común es:

$$S = (n_1 S_1 + n_2 S_2) / (n_1 + n_2) = \begin{pmatrix} 62.84 & 138.27 \\ 138.27 & 1350.86 \end{pmatrix}$$

El discriminador lineal es:

$$L(\text{edad}, \text{ingresos}) = 0.123 \text{ edad} + 0.001 \text{ ingresos} + 4.353$$

La tabla de clasificación es:

	No moroso	Moroso
No moroso	274	243
Moroso	68	115

2.1.4 ANÁLISIS DISCRIMINATE PARA GRUPOS NORMALES

Para grupos normales suponemos que la distribución de X_1, \dots, X_p en Ω_1 es $N_p(\mu_1, \Sigma_1)$ y en Ω_2 es $N_p(\mu_2, \Sigma_2)$, es decir,

$$f_i(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-p/2} |\Sigma_i^{-1}|^{1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mu_i)' \Sigma_i^{-1} (\mathbf{x} - \mu_i) \right\}$$

2.1.4.1 Discriminador lineal

Si suponemos $\mu_1 \neq \mu_2, \Sigma_1 = \Sigma_2 = \Sigma$, entonces

$$V(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mu_1)' \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \mu_1) + \frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mu_2)' \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \mu_2)$$

$$V(\mathbf{x}) = L(\mathbf{x})$$

Por tanto coinciden los discriminadores máximo verosímil y lineal, con el segundo basado en el criterio de la mínima distancia.

Sea α la distancia de Mahalanobis entre las dos poblaciones

$$\alpha = (\mu_1 - \mu_2)' \Sigma^{-1} (\mu_1 - \mu_2)$$

Si suponemos que \mathbf{x} proviene de $N_p(\mu_2, \Sigma)$, de $\mathbf{x} - \mu_1 = \mathbf{x} - \mu_2 + \mu_2 - \mu_1$ y de $E(\mathbf{x} - \mu_2)(\mathbf{x} - \mu_2)' = \Sigma$, $(\mathbf{x} - \mu_2)' \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \mu_2) \sim X_p^2$ tenemos que la esperanza de $U = (\mathbf{x} - \mu_1)' \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \mu_1)$ es:

$$E(U) = E[(\mathbf{x} - \mu_2)' \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \mu_2) + \alpha + 2(\mathbf{x} - \mu_2)' \Sigma^{-1} (\mu_2 - \mu_1)] = p + \alpha$$

y la varianza de $V = (\mathbf{x} - \mu_2)' \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \mu_2)$ es la misma que la de $L(\mathbf{x})$ y es

$$\text{var}(V) = E[(\mu_2 - \mu_1)' \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \mu_2)(\mathbf{x} - \mu_2)' \Sigma^{-1} (\mu_2 - \mu_1)] = \alpha$$

Entonces determinamos la distribución de la función discriminante $L(\mathbf{x})$.

$$L(\mathbf{x}) \text{ es } \begin{cases} N\left(+\frac{1}{2}\alpha, \alpha\right) & \text{si } \mathbf{x} \text{ proviene de } N_p(\mu_1, \Sigma) \\ N\left(-\frac{1}{2}\alpha, \alpha\right) & \text{si } \mathbf{x} \text{ proviene de } N_p(\mu_2, \Sigma) \end{cases}$$

2.1.4.2 Regla de Bayes

Si suponemos $\mu_1 \neq \mu_2$, $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \Sigma$, y conocemos las probabilidades a priori $q_1 = P(\Omega_1)$, $q_2 = P(\Omega_2)$ entonces

$$B(\mathbf{x}) = L(\mathbf{x}) + \log(q_1/q_2),$$

y la función discriminante de Bayes es el discriminador lineal más la constante $\log(q_1/q_2)$.

2.1.4.3 Probabilidad de clasificación errónea

La probabilidad de asignar \mathbf{x} a Ω_2 cuando proviene de $N_p(\mu_1, \Sigma)$ es:

$$P(L(\mathbf{x}) < 0 | \Omega_1) = P\left(\left(L(\mathbf{x}) - \frac{1}{2}\alpha\right)/\sqrt{\alpha}\right) = \Phi\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\alpha}\right)$$

donde $\Phi(z)$ es la función de distribución $N(0,1)$. La probabilidad de clasificación errónea está dada por:

$$pce = q_1 P(L(\mathbf{x}) < 0 | \Omega_1) + q_2 P(L(\mathbf{x}) < 0 | \Omega_2) = \Phi\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\alpha}\right)$$

Por tanto pce es una función decreciente de la distancia de Mahalanobis α entre los dos grupos.

2.1.4.4 Discriminador cuadrático

Supongamos $\mu_1 \neq \mu_2, \Sigma_1 \neq \Sigma_2$. Entonces el discriminador es proporcionado por criterio de la máxima verosimilitud

$$Q(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}'(\Sigma_2^{-1} - \Sigma_1^{-1})\mathbf{x} + \mathbf{x}'(\Sigma_1^{-1}\mu_1 - \Sigma_2^{-1}\mu_2) + \frac{1}{2} \mu_2' \Sigma_2^{-1} \mu_2 - \frac{1}{2} \mu_1' \Sigma_1^{-1} \mu_1 + \frac{1}{2} \log|\Sigma_2| - \frac{1}{2} \log|\Sigma_1|$$

$Q(\mathbf{x})$ es el discriminador cuadrático. Se puede obtener el discriminador cuadrático de Bayes

$$B(\mathbf{x}) = Q(\mathbf{x}) + \log(q_1/q_2)$$

2.1.4.5 Clasificación cuando los parámetros son estimados

Se considera que $\mu_1, \mu_2, \Sigma_1, \Sigma_2$ son desconocidos y se deben estimar a partir de muestras de tamaños n_1, n_2 de las dos grupos reemplazando μ_1, μ_2 por los vectores de medias $\bar{\mathbf{x}}_1, \bar{\mathbf{x}}_2$ y Σ_1, Σ_2 por las matrices de covarianzas S_1, S_2 . Si se recurre al estimador lineal, entonces la estimación de Σ será:

$$S = \frac{n_1 S_1 + n_2 S_2}{n_1 + n_2}$$

y la interpretación muestral del discriminador lineal es:

$$\hat{L}(\mathbf{x}) = \left[\mathbf{x} - \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{x}}_1 + \bar{\mathbf{x}}_2) \right]' S^{-1}(\bar{\mathbf{x}}_1 + \bar{\mathbf{x}}_2)$$

La distribución muestral de $\hat{L}(\mathbf{x})$ es bastante complicada, pero la distribución asintótica es normal:

$$\hat{L}(\mathbf{x}) \text{ es } \begin{cases} N\left(+\frac{1}{2}\alpha, \alpha\right) & \text{si } \mathbf{x} \text{ proviene de } N_p(\mu_1, \Sigma) \\ N\left(-\frac{1}{2}\alpha, \alpha\right) & \text{si } \mathbf{x} \text{ proviene de } N_p(\mu_2, \Sigma) \end{cases}$$

donde $\alpha = (\bar{\mathbf{x}}_1 + \bar{\mathbf{x}}_2)' S^{-1}(\bar{\mathbf{x}}_1 + \bar{\mathbf{x}}_2)$

2.1.5 GENERALIZACIÓN DEL ANÁLISIS DISCRIMINANTE EN EL CASO DE K GRUPOS

Si se supone que el individuo ω ahora puede provenir de k grupos $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_k$ donde $k \geq 3$. Es preciso construir una regla que permita asignar ω a una de los k grupos sobre la base de las observaciones $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ de p variables.

2.1.5.1 Discriminadores lineales

Si la media de las variables en Ω_i es μ_i , y la matriz de covarianzas Σ es común. Si se consideran las distancias de Mahalanobis de ω a los grupos

$$M^2(\mathbf{x}, \mu_i) = (\mathbf{x} - \mu_i)' \Sigma^{-1}(\mathbf{x} - \mu_i), \quad i = 1, \dots, k$$

un criterio de clasificación consiste en asignar ω al grupo más próximo:

Si $M^2(\mathbf{x}, \mu_i) = \min\{M^2(\mathbf{x}, \mu_1), \dots, M^2(\mathbf{x}, \mu_k)\}$ asignamos ω a Ω_i (2.4).

Introduciendo las funciones discriminantes lineales

$$L_{ij}(\mathbf{x}) = (\mu_i - \mu_j)' \Sigma^{-1} - \frac{1}{2} (\mu_i - \mu_j)' \Sigma^{-1} (\mu_i + \mu_j)$$

la función de decisión equivale a

Si $L_{ij}(\mathbf{x}) > 0$ para todo $j \neq i$, asignamos ω a Ω_i .

Además las funciones $L_{ij}(\mathbf{x})$ verifican:

1. $L_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} [M^2(\mathbf{x}, \mu_j) - M^2(\mathbf{x}, \mu_i)]$
2. $L_{ij}(\mathbf{x}) = -L_{ji}(\mathbf{x})$
3. $L_{rs}(\mathbf{x}) = L_{is}(\mathbf{x}) - L_{ir}(\mathbf{x})$

Es decir, sólo se necesita conocer $k - 1$ funciones discriminantes.

2.1.5.2 Regla de la máxima verosimilitud

Sea $f_i(\mathbf{x})$ la función de densidad de \mathbf{x} en el grupo Ω_i . Se puede obtener una regla de clasificación asignando ω a la población donde la verosimilitud es más grande:

Si $f_i(\mathbf{x}) = \max\{f_1(\mathbf{x}), \dots, f_k(\mathbf{x})\}$, asignamos ω a Ω_i .

Este criterio es más general que el geométrico y está asociado a las funciones discriminantes

$$V_{ij}(\mathbf{x}) = \log f_i(\mathbf{x}) - \log f_j(\mathbf{x})$$

En el caso de normalidad multivariante y matriz de covarianzas común, se verifica $V_{ij}(\mathbf{x}) = L_{ij}(\mathbf{x})$ y los discriminadores máximo verosímiles coinciden con los lineales. Pero si las matrices de covarianzas son diferentes $\Sigma_1, \dots, \Sigma_k$, entonces este criterio dará lugar a los discriminadores cuadráticos

$$Q_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}' (\Sigma_j^{-1} - \Sigma_i^{-1}) \mathbf{x} + \mathbf{x}' (\Sigma_i^{-1} \mu_1 - \Sigma_j^{-1} \mu_2) + \frac{1}{2} \mu_j' \Sigma_j^{-1} \mu_j - \frac{1}{2} \mu_i' \Sigma_i^{-1} \mu_i + \frac{1}{2} \log |\Sigma_j| - \frac{1}{2} \log |\Sigma_i|$$

2.1.5.3 Regla de Bayes

Si además de las funciones de densidad $f_i(\mathbf{x})$ se conocen las probabilidades a priori $q_1 = P(\Omega_1), \dots, q_k = P(\Omega_k)$, la regla de Bayes que asigna ω a la población tal que la probabilidad a posteriori es máxima

Si $q_i f_i(\mathbf{x}) = \max\{q_1 f_1(\mathbf{x}), \dots, q_k f_k(\mathbf{x})\}$, se asigna ω a Ω_i , está asociada a las funciones discriminantes

$$B_{ij}(\mathbf{x}) = \log f_i(\mathbf{x}) - \log f_j(\mathbf{x}) + \log(q_i/q_j).$$

Finalmente, si $P(j/i)$ es la probabilidad de asignar ω a Ω_j cuando en realidad es de Ω_i la probabilidad de clasificación errónea es

$$pce = \sum_{i=1}^k q_i \left(\sum_{j \neq i}^k P(j/i) \right)$$

y se demuestra que la regla de Bayes minimiza esta pce .

2.2 MÁQUINAS DE VECTORES DE SOPORTE¹²

Las máquinas de vectores de soporte son métodos relativamente nuevos para clasificación binaria. La idea básica radica en encontrar un hiperplano que separa los datos perfectamente en dos clases. Y luego la clasificación consiste en observar de qué lado del hiperplano queda el vector que representa un nuevo caso no conocido previamente.

En casos donde las clases no son separables, se introducen cotas de error para permitir que los casos de entrenamiento queden identificadas como pertenecientes a la clase incorrecta, y en muchos casos para poder realizar la clasificación de muestras que no son linealmente separables se introduce la utilización de núcleos con la idea de transformar el conjunto de datos a un espacio de dimensión superior donde este si es perfectamente separable, o bajo una cota de error aceptable. Este tipo de transformación normalmente podría traer complejidades computacionales difíciles de resolver, pero la clave en la utilización de este tipo de metodologías radica en que el espacio nuevo de dimensión no tiene que ser directamente tratado sino que solo es necesario conocer cómo resolver el producto escalar en el mismo.

Las máquinas de vectores de soporte fueron introducidas a finales de los 70 por Vladimir Vapnik¹³, y en los últimos años se produjo un creciente aumento de atención. Las mismas se utilizan para aplicar aprendizaje estadísticos sobre nuevos casos pudiendo realizar clasificación y/o regresión sobre el conjunto tratado. En la mayoría de los casos la generalización es equivalente o significativamente mejor a métodos similares, pero pueden ser bastante lentas en la fase de pruebas.

¹² González, L. *Análisis discriminante utilizando máquinas de vectores soporte. Función núcleo similitud*. España, Sevilla, 2002.

Gunn, S. *Support vector machines for classification and regression*. EEUU, 1998.

Shawe-Taylor. *An introduction to support vector machines*. Inglaterra, 2000.

¹³ Vapnik, V. (1979). *The Nature of Statistical learning theory*. Inglaterra, Londres.

2.2.1 MÁQUINAS DE VECTORES DE SOPORTE LINEALES

Con el objeto de asimilar los conceptos fundamentales involucrados en las máquinas de vectores de soporte, se inicia estudiando las máquinas más simples, para poder comprender mejor su significado y luego poder abordar casos más complejos.

2.2.1.1 Caso linealmente separable

Dado un conjunto de puntos para entrenamiento de dos clases, cada punto de entrenamiento pertenece alguna de las clases (A o B), se le ha dado una etiqueta definida por $Y = \{-1, 1\}$ donde el conjunto de vectores de ensayo está dado por $\{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$, donde $x_i \in R^d$, $y_i \in \{-1, 1\}$, $i = 1, \dots, n$, el conjunto de vectores de ensayo tiene la propiedad de ser un conjunto separable.

La definición de conjunto separable es la siguiente:

Sea un conjunto de vectores $\{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$, $x_i \in R^d$, $y_i \in \{-1, 1\}$, $i = 1, \dots, n$ es separable si existe algún hiperplano (hiperplano separable) en R^d que aisle, los vectores $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ con valor de $y_i = 1$ de aquellos con valor de $y_i = -1$.

Dado un conjunto separable existe un hiperplano que separa los datos,

$$\pi: w \cdot x + b = 0$$

donde $w \in R^d$ es un vector normal (vector perpendicular) al hiperplano π , $|b|/\|w\|$ es la distancia perpendicular del hiperplano π al origen, y $\|w\|$ es la norma euclídea de w . Las máquinas de vectores de soporte buscan entre todos los hiperplanos separadores aquel que maximice la distancia de separación entre los conjuntos las dos clases posibles $\{(x_i, 1)\}$ y $\{(x_i, -1)\}$ (ver figura 2.1).

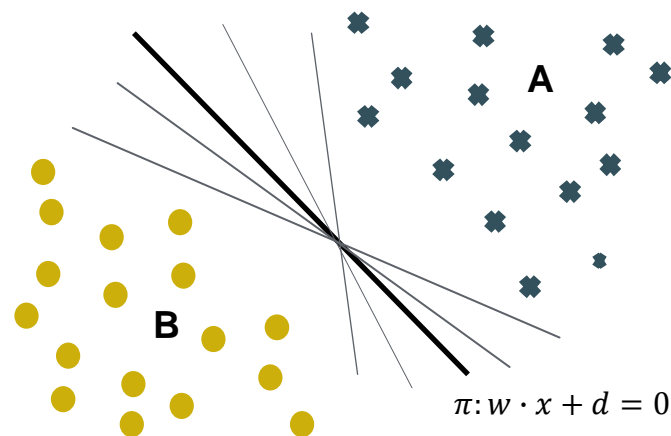


Figura 2.1 – Por medio de líneas se genera una posible clasificación de los puntos según su comportamiento.

Fuente: Las máquinas de soporte vectorial. Betancourt, G.

Elaborado por: Jairo Cervantes

Para plantear el problema de optimización correspondiente siempre es posible reescalar los parámetros w y b fijado un hiperplano separador de tal forma que:

$$x_i \cdot w + b \geq +1 \quad \text{par } y_i = +1 \quad (\text{región A}) \quad (2.5)$$

$$x_i \cdot w + b \leq -1 \quad \text{par } y_i = -1 \quad (\text{región B}) \quad (2.6)$$

De esta forma la mínima separación entre los vectores y el hiperplano separador es la unidad y se simplifican estas dos desigualdades en una única forma:

$$y_i(x_i \cdot w + b) - 1 \geq 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.7)$$

Sean los vectores de etiqueta 1 para los cuales se cumple la igualdad 2.5. Estos puntos pertenecen al hiperplano $\pi_1: x \cdot w + b = 1$, con vector normal w y distancia perpendicular hasta el origen igual a $|1 - b|/\|w\|$. Análogamente, los puntos que cumplen la igualdad 2.6 pertenecen al hiperplano $\pi_2: x \cdot w + b = -1$ con vector normal w y distancia perpendicular hasta el origen igual a $|-1 - b|/\|w\|$. Así se tiene que los hiperplanos π_1 y π_2 son paralelos, y el margen de separación entre ellos es $2/\|w\|$ y cumplen que no existe ningún vector del conjunto de ensayos que se encuentre entre ellos dos (ver figura 2.2).

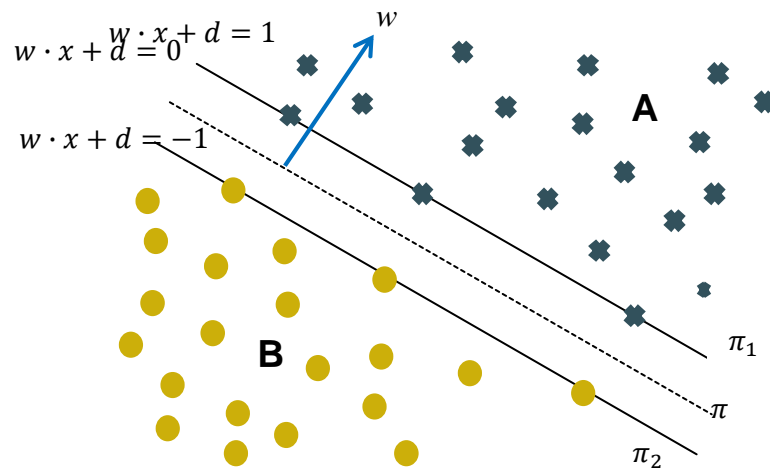


Figura 2.2 – Concepto básico para entender el problema de clasificación a partir de las máquinas de vectores de soporte.

Fuente: Las máquinas de soporte vectorial. Betancourt, G.

Elaborado por: Jairo Cervantes

De entre todas las posibles elecciones de los hiperplanos π_1 y π_2 , parece natural elegir aquella que proporcione una mayor separación entre ellos, ya que permite distinguir de forma más clara una de las regiones donde caen los puntos con distintas etiquetas. Por lo tanto, se plantea el problema de encontrar un par de hiperplanos, π_1 y π_2 , los cuales den el máximo margen (minimizando $\|w\|$ o su cuadrado), sujeto a la restricción 2.7, es decir,

$$\min_{\omega \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{2} \|\omega\|^2 \quad (2.8)$$

$$s. a \quad y_i(x_i \cdot \omega + b) - 1 \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, n$$

En el caso de dos dimensiones la solución puede interpretarse gráficamente a partir de la figura 2.2. En la figura podemos observar que algunos de los vectores de ensayo se encuentran sobre el hiperplano π_1 o sobre el hiperplano π_2 . Estos vectores son llamados vectores de soporte, y son los únicos que intervienen en la definición de los hiperplanos separadores ya que si sobre la figura 2.2 se mueven los restantes vectores, sin desplazar ninguno entre los hiperplano π_1 y π_2 , los

hiperplano separadores no cambian, es decir, la solución del problema 2.8 permanece invariante.

Cabe señalar que si se agregan o elimina cualquier número de puntos que cumplan la desigualdad estricta 2.7 la solución no se altera, sin embargo, basta con agregar un punto que se encuentre en el hiperplano π_1 y π_2 , para que la solución cambie totalmente. Esta propiedad es la característica principal que permite elaborar un algoritmo de búsqueda que obtenga rápidamente la solución al problema 2.8, ya que, si se considera una solución lineal en las entradas, los pesos de las entradas que verifican la desigualdad estricta serían nulos, puesto que no afectan a la posible solución y los que se encuentran sobre los hiperplanos separadores son cero o distinto de cero.

Para la resolución del problema de optimización con restricciones 2.8 se utiliza la técnica de los multiplicadores de Lagrange. Así la función objetivo es:

$$L_p(w, b, \alpha_i) = \frac{1}{2} \|w\|^2 - \sum_{i=1}^n \alpha_i (y_i (x_i \cdot w + b) - 1) \quad (2.9)$$

Se denomina problema primal, al problema de minimizar la función $L_p(w, b, \alpha_i)$ respecto a w y b , y simultáneamente requerir que las derivadas parciales de L_p con respecto a los multiplicadores de Lagrange α_i sean todas nulas, todo ello sujeto al conjunto de restricciones $C_1 = \{\alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, n\}$. Así, el problema inicial queda como un problema de programación cuadrática donde la función objetivo es convexa, y los vectores que satisfacen las restricciones forman un conjunto convexo. Esto significa que se puede resolver el problema dual asociado al problema primal: maximizar la función $L_p(w, b, \alpha_i)$ respecto a las variables duales α_i sujeta a las restricciones impuestas para que los gradientes de L_p con respecto a w y b sean nulos, y sujeta también al conjunto de restricciones $C_2 = \{\alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, n\}$. Esta particular formulación del problema dual se denomina problema dual de Wolfe, y verifica que el máximo de $L_p(w, b, \alpha_i)$ respecto a las variables duales, sujeto a las restricciones C_2 , coinciden con los

mismos valores de w , b y α_i , que el mínimo de $L_p(w, b, \alpha_i)$ respecto a w y b sujeto a las restricciones C_1 es decir, la solución al problema planteado es un punto de apoyo de la función $L_p(w, b, \alpha_i)$.

Sea el vector normal $w \in R^d$ y $b \in R$ ambos desconocidos, y $x_i = (x_{i1}, \dots, x_{id}) \in R^d$, $y_i \in R$, $\forall i = 1, \dots, n$ (donde los x_{ij} denota la componente j -ésima del vector x_i) los vectores de entrenamiento que son conocidos. De esta forma, la función objetivo está dada por:

$$L_p(w, b, \alpha) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d w_j^2 - \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i \left(\sum_{j=1}^d x_{ij} w_j + b \right) + \sum_{i=1}^n \alpha_i$$

Donde se trabaja con la norma euclideana. Las derivadas parciales respecto de w_j para $j = 1, \dots, d$ quedan:

$$\frac{\partial}{\partial w_j} L_p(w, b, \alpha_i) = w_j - \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i x_{ij}$$

Igualando a cero y resolviendo, queda:

$$\begin{aligned} w_j - \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i x_{ij} &= 0 \quad \Rightarrow \\ w_j &= \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i x_{ij} \quad \Rightarrow \\ w &= \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i x_i \quad (2.10) \end{aligned}$$

Así una vez conocidos los multiplicadores de Lagrange podemos calcular el vector de peso w . Por otro lado, la derivada parcial de $L_p(w, b, \alpha)$ respecto de b resulta:

$$\frac{\partial}{\partial b} L_p(w, b, \alpha_i) = w_j - \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i$$

Igualando a cero proporciona la ecuación

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i y_i = 0 \quad (2.11)$$

Ya que estas restricciones son las mismas para el problema dual, se sustituye en 2.9 y se tiene:

$$\begin{aligned} L_p(w, b, \alpha_i) &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \alpha_j y_i y_j x_i x_j - \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i x_i \sum_{i=1}^n \alpha_j y_j x_j - \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i + \sum_{i=1}^n \alpha_i \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i - \sum_{i=1}^n \alpha_i \alpha_j y_i y_j x_i x_j \end{aligned}$$

y la función objetivo dual queda:

$$L_D(\alpha) = \sum_{i=1}^n \alpha_i - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \alpha_j y_i y_j x_i x_j \quad (2.12)$$

Entonces L_P y L_D son dos funciones lagrangianas diferentes, con diferentes restricciones que proviene de la misma función objetivo pero; la solución es buscar el mínimo de $L_P(w, b, \alpha_i)$ respecto de w y b , o el máximo de $L_D(w, b, \alpha_i)$ respecto a α_i , $i = 1, \dots, n$. Se puede notar que si se formula el problema con $b = 0$, lo que significa que todos los hiperplanos pasan por el origen, la restricción 2.11 no aparece. Esto es una restricción débil para los espacios de dimensión superior pero se puede solventar añadiendo al espacio de dimensión superior una dimensión más.

Del conjunto de entrenamiento, los vectores que proporcionen un multiplicador $\alpha_i > 0$ son denominados vectores de soporte, estos vectores se localizan en uno

de los hiperplanos π_1 o π_2 . Para este tipo de máquina de aprendizaje, los vectores de soporte son los elementos críticos ya que ellos son los que proporcionan la aproximación del problema, puesto que si todos los restantes elementos del conjunto de ensayo son eliminados (o son cambiados por otros que no se encuentren entre los dos hiperplanos) y se repite el problema de optimización, se encuentren los mismos hiperplanos separadores.

Esta característica de los modelos de vectores de soporte puede ser utilizada en muchos problemas económicos donde se desea destacar la importancia de determinadas entradas. También si se trabaja con una gran cantidad de entradas, es útil trabajar con los vectores de soporte ya que estos forman un esquema de comprensión que permite reconstruir la solución del problema, es decir, si consideramos exclusivamente los vectores de soporte y descartamos el resto de vectores de entrenamiento se tiene un problema de optimización con menos restricciones que proporciona la misma información.

Las condiciones del problema de optimización conlleva a que se cumple la condición denominada condición (complementaria) de Karush – Kuhn – Tucker (KKT).

$$\alpha_i \cdot (y_i \cdot (x_i \cdot w + b) - 1) = 0 \quad (2.13)$$

Si se toma en cuenta las restricciones de los problemas primal y dual, se anulan en todos los vectores de ensayo.

Siguiendo con las condiciones de Karush – Kuhn – Turker para el problema primal, definido a partir de la función objetivo son las siguientes:

$$\frac{\partial}{\partial w_j} L_P = w_j - \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i x_{ij} = 0 \quad j = 1, \dots, d \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial}{\partial b} L_P = - \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (2.15)$$

$$y_i \cdot (x_i \cdot w + b) - 1 \geq 0 \quad (2.16)$$

$$\alpha_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

$$\alpha_i \cdot (y_i(x_i \cdot w + b) - 1) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (2.17)$$

Si se cumple con las condiciones de Karush – Kuhn – Turker para la solución de cualquier problema de optimización, sea este convexo o no, con cualquier clase de restricciones, siempre que se cumplan que la intersección de los conjuntos de direcciones factibles con el conjunto de direcciones descendentes coinciden con la intersección del conjunto de direcciones factibles por restricciones lineales con el conjunto de direcciones descendentes. Estos supuestos de regularidad se cumplen con todas las máquinas de vectores de soporte, ya que las restricciones impuestas en estos problemas son siempre lineales. Aún más, en el caso de los problemas de máquinas de vectores de soporte, se tiene que las condiciones Karush – Kuhn – Turker son necesarias y suficientes para que w , b y α sea solución. Así resolver el problema de las máquinas de vectores de soporte es equivalente a encontrar una solución a las condiciones de Karush – Kuhn – Turker, lo que en los desarrollos numéricos supone una simplificación del problema original.

De los primeros desarrollos no se tiene una forma explícita de determinar el valor de b de la función solución. Una de las primeras utilidades de la condición de Karush – Kuhn – Turker es precisamente la de poder determinar este valor. Para ello, basta elegir un $\alpha_i > 0$, es decir, un vector de soporte y sustituir en la igualdad $y_i(w \cdot x_i + b) = 1$ y despejar $b = y_i - w \cdot x_i$. Aunque se ha determinado el valor de b a partir de un vector de soporte, es más adecuado realizar cálculos con todos los vectores de soporte y elegir como valor de b un valor promedio de los resultados obtenidos, con objeto de uniformizar los errores intrínsecos asociados a todo método de cálculo numérico (el valor de b es único). Por ejemplo, si se

elige como promedio la media aritmética, se denota por s_i los vectores de soporte y por N_{VS} el número de vectores de soporte se tiene que:

$$b = \frac{1}{N_{VS}} \sum_{i=1}^{N_{VS}} (y_i - w \cdot s_i)$$

Una vez obtenido el vector w y la constante b la solución al problema de optimización consiste en determinar en que lado del hiperplano frontera (el hiperplano que se encuentran justamente en la mitad de los hiperplanos π_1 y π_2) se encuentra la nueva entrada de x y asignar la correspondiente clase (1 ó -1), es decir, asignar la clase

$$y = \text{signo}(w \cdot x + b)$$

a la entrada x .

2.2.1.1.1 Ejemplo

Sean los vectores de entrada dados por¹⁴:

$$X = \{(66, 59), (70, 78), (61, 82), (75, 61), (63, 44), (68, 118), \\ (35, 30), (23, 42), (22, 28), (30, 34), (40, 22), (27, 40)\}$$

e

$$Y = \{-1, -1, -1, -1, -1, -1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$$

La resolución analítica proporciona los siguientes multiplicadores de Lagrange:

$$\{0, 0, 0, 0, -5.74, 0, 4.99, 0, 0, 0, 4.67, 0\}$$

¹⁴ Los datos son tomados de la aplicación del análisis discriminante de la sección anterior, los vectores de entrada son de dimensión dos, donde la primera componente representa la edad y la segunda los ingresos de una persona. Las salidas (etiquetas) corresponde con $y = 1$ si es moroso e $y = -1$ si no es moroso.

con lo que se obtiene tres vectores de soporte que son el quinto, el séptimo y el undécimo vector. La tabla 2.1 muestra los resultados asociados a este ejemplo.

De estos vectores se obtiene:

$$w = 5.74(-1) \begin{pmatrix} 63 \\ 44 \end{pmatrix} + 4.99(1) \begin{pmatrix} 35 \\ 30 \end{pmatrix} + 4.67(1) \begin{pmatrix} 40 \\ 22 \end{pmatrix}$$

$$w = \begin{pmatrix} -0.054 \\ -0.034 \end{pmatrix}$$

y de la condición

$$\alpha_i \cdot (y_i \cdot (x_i \cdot w + b) - 1) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Sea $\alpha_i \neq 0$ para $i = 5, 7, 11$:

$$y_i \cdot (x_i \cdot w + b) - 1 = 0, \quad \text{para } i = 5, 7, 11$$

donde resulta que para $i = 5$ se tiene:

$$-1 \left[(-0.054, -0.034) \begin{pmatrix} 63 \\ 44 \end{pmatrix} + b \right] - 1 = 0$$

se tiene el término independiente b es igual a 3.92. Para los valores $i = 7$ e $i = 11$ se tiene que $b = 3.92$ y $b = 3.92$, respectivamente, por lo tanto en promedio es $b = 3.92$. Como resultado de lo anterior se tiene que el hiperplano separador es:

$$\pi(x_1, x_2): -(0.054 * edad) - (0.034 * ingresos) + 3.92 = 0$$

Tabla 2.1 – Resultados del ejemplo, sobre la morosidad de un cliente en función de la edad y los ingresos.

x_{1i}	x_{2i}	y_i	α_i	$\pi(x_1, x_2)$	Signo (π)
66	59	-1	0	-1.67	-1
70	78	-1	0	-2.54	-1
61	82	-1	0	-1.50	-1
75	61	-1	0	-2.23	-1
63	44	-1	5.74	-1.00	-1
68	118	-1	0	-3.79	-1
35	30	1	4.99	1.00	1
23	42	1	0	1.24	1
22	28	1	0	1.78	1
30	34	1	0	1.14	1
40	22	1	4.67	1.00	1
27	40	1	0	1.10	1

Elaborado por: Jairo Cervantes

Nótese, en la tabla 2.1, como la imagen de cada vector soporte según su plano π es la unidad lo que significa que se encuentra en uno de los hiperplanos separadores.

Si se tiene un nuevo vector de entrada (edad e ingresos de un cliente), con la siguiente información {31, 27}, la solución obtenida se explica a partir del signo de $\pi(31, 27) = 1.32 > 0$, en el ejemplo la etiqueta que se asigna es $y = 1$, es decir, se indicaría que este nuevo cliente es moroso.

2.2.1.2 El caso no separable

En las aplicaciones reales no siempre se tiene conjuntos de vectores de ensayo separables. Por ejemplo en la figura 2.3 se observa que hay dos puntos A dentro de la región correspondiente a los puntos B que nunca podrían ser separados de ellos por medio de hiperplanos. En este caso se dirá que es un conjunto no separable. Ante estos casos, el problema de optimización 2.8 no encuentra una solución factible y ello es evidente sin más que observar como la función objetivo 2.12 crece de forma arbitraria ya que el multiplicador de Lagrange correspondiente a este vector se puede tomar arbitrariamente grande sin que viole las restricciones.

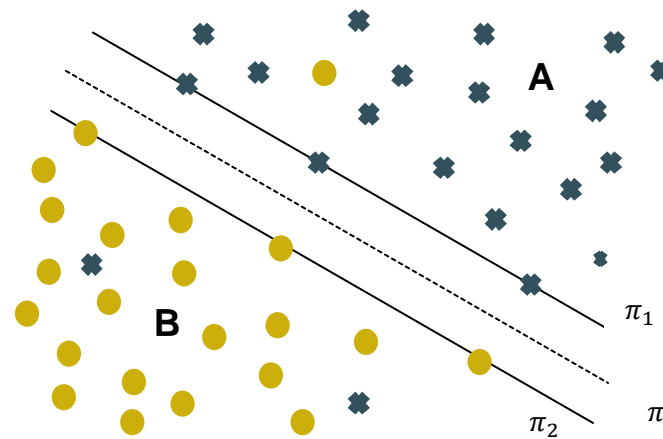


Figura 2.3 – Ejemplo de hiperplanos cuando los datos no son linealmente separables

Fuente: Las máquinas de soporte vectorial. Betancourt, G.

Elaborado por: Jairo Cervantes

Sin embargo, no es difícil emplear las ideas generales del caso separable al caso no separable. Se castigara con un coste adicional la función objetivo cuando no se cumpla con las restricciones. Este castigo se puede indicar de forma explícita introduciendo una variable de holgura ξ_i , $i = 1, \dots, n$ en las restricciones, planteando los siguientes conjuntos de restricciones:

$$\begin{aligned} x_i \cdot w + b &\geq +1 - \xi_i && \text{para } y_i = +1 \\ x_i \cdot w + b &\leq -1 + \xi_i && \text{para } y_i = -1 \\ \xi_i &\geq 0 && \forall i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Ahora tenemos que para producir un error (un vector de entrada que no sea ubicado en su correcta región) es necesario que el valor correspondiente ξ_i sea superior a la unidad (ver figura 2.4). Luego para que se produzca un error se tiene que cumplir que $\xi_i \geq 1$, entonces $\sum_i \xi_i$ es una cota superior del número de errores que se comete dentro del conjunto de ensayo, lo que significa que el castigo está acotado por $\sum_i \xi_i$ y de aquí que el castigo medio por cada vector de ensayo es menor que $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i$.

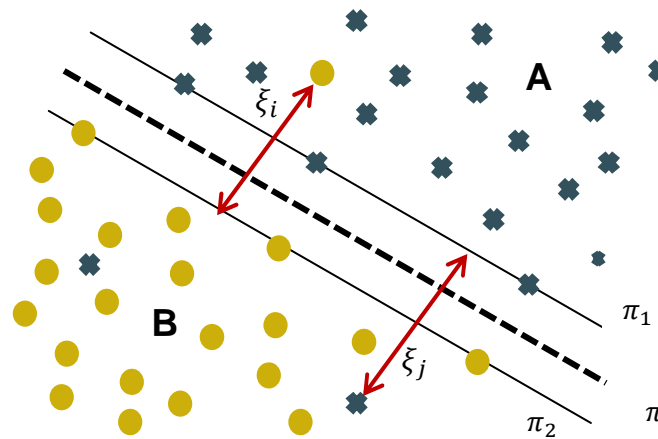


Figura 2.4 – Presentación del parámetro de error ξ_i en el error de clasificación.

Fuente: Las máquinas de soporte vectorial. Betancourt, G.

Elaborado por: Jairo Cervantes

En el caso no separable siempre va a existir errores y parece natural asignar a la función objetivo un castigo extra que penalice los errores. Nótese que con ello se hace uso de una función de pérdida, es decir, una función que cuantifica los errores. Por todo ello, una opción lógica sería plantear el problema de minimizar

$$\frac{1}{2} \|w\|^2 + C \sum_{i=1}^n \xi_i,$$

donde C es un parámetro elegido por el investigador. También se puede tomar una alternativa más general eligiendo como función objetivo

$$\frac{1}{2} \|w\|^2 + C \sum_{i=1}^n \xi_i^r,$$

con $r > 1$. De esta forma se tiene que un valor de C grande, significa que el investigador está asignando un peso a los errores muy altos frente a $\|w\|^2$, y por el contrario si C es pequeño asigna un mayor peso a $\|w\|^2$. Por otra parte si r es grande lo que hacemos es dar más peso a los errores cuantos mayores sean

éstos, puesto que para que haya errores se ha de cumplir que $\xi_i > 1$ y la función $f(x) = x^r$ es creciente si $x > 1$.

Para simplificar el problema, consideramos $r = 1$ para que ningún valor ξ_i y ninguno de sus correspondientes multiplicadores de Lagrange aparezcan en el problema dual, planteando el problema como sigue:

$$\begin{aligned} \min_{w \in R^d} & \frac{1}{2} \|w\|^2 + C \sum_{i=1}^n \xi_i \\ \text{s. a.} & \begin{cases} y_i \cdot (x_i \cdot w + b) - 1 + \xi_i \geq 0, & \forall i \\ \xi_i \geq 0, & \forall i \end{cases} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Por medio de la técnica de los multiplicadores de Lagrange, resulta que la función primal queda:

$$L_p(w, b, \xi) = \frac{1}{2} \|w\|^2 + C \sum_{i=1}^n \xi_i - \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot (y_i \cdot (x_i \cdot w + b) - 1 + \xi_i) - \sum_{i=1}^n \mu_i \xi_i \quad (2.19)$$

donde los α_i son los multiplicadores de Lagrange correspondientes a las restricciones $y_i \cdot (x_i \cdot w + b) - 1 + \xi_i \geq 0$ y los μ_i son los multiplicadores de Lagrange que se introducen para forzar la positividad de los ξ_i . Para resolver el problema de calcular el mínimo de la función primal se calculan las parciales de $L_p(w, b, \xi)$ respecto de w_j , b y ξ_j

$$\frac{\partial}{\partial w_j} L_p = w_j - \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i x_{ij}$$

$$\frac{\partial}{\partial b} L_p = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i} L_p = C - \alpha_i - \mu_i$$

Igualando a cero y sustituyendo en 2.19 se tiene la función dual:

$$L_D(\alpha) = \sum_{i=1}^n \alpha_i - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \alpha_j y_i y_j x_i x_j$$

la cual hay que maximizar respecto de α_i sujeto a

$$\begin{aligned} 0 \leq \alpha_i \leq C, \quad \forall i \\ \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i = 0. \end{aligned}$$

y cuya solución final viene dada por

$$w = \sum_{i=1}^{N_{VS}} \alpha_i y_i s_i$$

Donde N_{SV} denota el número de vectores de soporte y por s_i los vectores de soportes del conjunto $\{x_1, \dots, x_n\}$. Por tanto se verifica que $N_{VS} \leq n$ y una de las características más interesante que se desea conseguir con esta nueva metodología es que N_{VS} sea muy inferior a n , con lo que se consigue una representación escasa de la solución en función de los vectores de ensayo.

Se puede apreciar, que la diferencia respecto a la solución dada en el caso separable es que los multiplicadores de Lagrange α_i están acotados superiormente por la constante C . Para forzar a la máquina a realizar una clasificación sin error se toma $C = \infty$.

Las condiciones de Karush – Kuhn – Turker asociadas a este problema son las siguientes:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial w_j} L_P &= w_j - \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i x_{ij} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial b} L_P &= - \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \xi_i} L_P &= C - \alpha_i - \mu_i = 0\end{aligned}\quad (2.20)$$

$$y_i(x_i \cdot w + b) - 1 + \xi_i \geq 0$$

$$\xi_i, \alpha_i, \mu_i \geq 0$$

$$\alpha_i(y_i(x_i \cdot w + b) - 1 + \xi_i) = 0 \quad (2.21)$$

$$\mu_i \xi_i = 0 \quad (2.22)$$

Al igual que en el caso separable, se pueden usar las condiciones complementarias de Karush – Kuhn – Turker, es decir, las igualdades 2.21 y 2.22, para obtener el valor de b . Además, la ecuación 2.20 combinada con la ecuación 2.22 muestra que, si $\xi_i = 0$, entonces $\alpha_i < C$. Así se puede simplificar el cálculo de b tomando los puntos de ensayo tales que, $0 < \alpha_i < C$ y usar la ecuación 2.22 con $\xi_i = 0$.

En definitiva, en el problema de minimización 2.18 se busca determinar un hiperplano¹⁵ separador óptimo en la forma:

$$\pi \equiv f(x; w, b) = \langle w, x \rangle + b = 0$$

Donde $w \in R^d$ y $b \in R$ son los parámetros que deben ser estimados. Por ello se puede considerar que el conjunto de funciones F sobre la que se busca la solución al problema 2.18 es $F = \{f(x; w, b) = \langle w, x \rangle + b, w \in R^d, b \in R\}$, es decir, se tiene que:

$$\min_{w \in R^d} L_P(x, w, b) = \min_{f \in F} L_P(x, f),$$

¹⁵ Se utilizará indistintamente la notación $w \cdot x$ o $\langle w, x \rangle$ para denotar el producto escalar de dos vectores

Por otro lado, determinado el valor óptimo de w , a partir de las condiciones de Karush – Kuhn – Turker se obtiene el parámetro $w \in R^d$. Este vector de parámetros se obtiene según una combinación lineal de los vectores del conjunto de ensayo por la expresión $w = \sum_{i=1}^N \alpha_i y_i x_i$, de donde se sigue que la función solución al problema de clasificación $f \in F$ se expresa como:

$$f(x) = \alpha_i y_i \langle x_i, x \rangle + b \quad (2.23)$$

En problemas de tipo económicos, donde se trabaje con una gran cantidad de datos, queriendo dar una rápida solución frente a una nueva entrada, este esquema resulta muy atractivo puesto que la cantidad de recursos necesarios para proporcionar una salida es pequeña en comparación con la cantidad de datos de entrenamiento.

2.2.2 MÁQUINAS NO LINEALES DE VECTORES DE SOPORTE

Hasta ahora se ha revisado el caso separable y el caso no separable, dado un conjunto de funciones lineales en los parámetros, las cuales salvando el caso de las funciones constantes, constituye el conjunto de funciones más simple posible. A continuación se aborda el problema de generalizar los desarrollos anteriores para el caso de conjuntos de funciones no necesariamente lineales en los parámetros.

Algunos autores demostraron que se puede conseguir plantear los problemas de optimización de la máquina de vectores de soporte a partir de conjuntos de funciones no lineales en los parámetros y por tanto la solución al problema que se plantea es una solución no lineal. Para conseguir este fin, lo primero es observar que los vectores de entrada ingresan a formar parte de la solución 2.23 del problema de clasificación, a través de los productos escalares $\langle x_i, x \rangle$. Utilizando las ideas dadas por varios autores se sigue el siguiente desarrollo:

Sea una aplicación, a la que se denota por Φ , del conjunto de entrada $\mathcal{X} \subset R^d$ en un espacio vectorial H dotado de un producto escalar:

$$\Phi: \mathcal{X} \subset R^d \rightarrow H$$

Ahora, se consideran los vectores transformados $\{\Phi(x_1), \dots, \Phi(x_n)\}$ en lugar de considerar el conjunto de vectores $\{x_1, \dots, x_n\}$ y se tiene que, si se plantea el problema de optimización original a estos vectores, es decir, se cambia de vectores de entrada y de espacio de entrada, entonces se tiene que los nuevos vectores entran a formar parte de la solución del problema, solo a través del producto escalar definido en H como funciones de la forma $\langle \Phi(x_1), \Phi(x_n) \rangle$. Por tanto si se considera una función

$$k: H \times H \rightarrow R$$

A la que se le denomina función núcleo, tal que

$$k(x_i, x) = \Phi(x_i) \cdot \Phi(x) = \langle \Phi(x_i), \Phi(x) \rangle,$$

Solo es necesario conocer la función núcleo para resolver el algoritmo y no se necesita tener la forma explícita de la aplicación Φ .

Por tanto si se reemplaza $\langle x_i, x \rangle$ por $k(x_i, x)$ en la solución de los problemas de optimización, se habrá conseguido una máquina de vectores de soporte planteada en un espacio de dimensión superior (ver figura 2.5).

Resolviendo el problema de la máquina de vectores de soporte en un espacio de dimensión superior al del espacio de entrada, el cual trabaja con un conjunto de funciones lineales, el resultado es lineal en este espacio, pero no es necesariamente lineal en el espacio de entrada \mathcal{X} , con lo cual se está generalizando el problema a conjuntos de funciones no lineales.

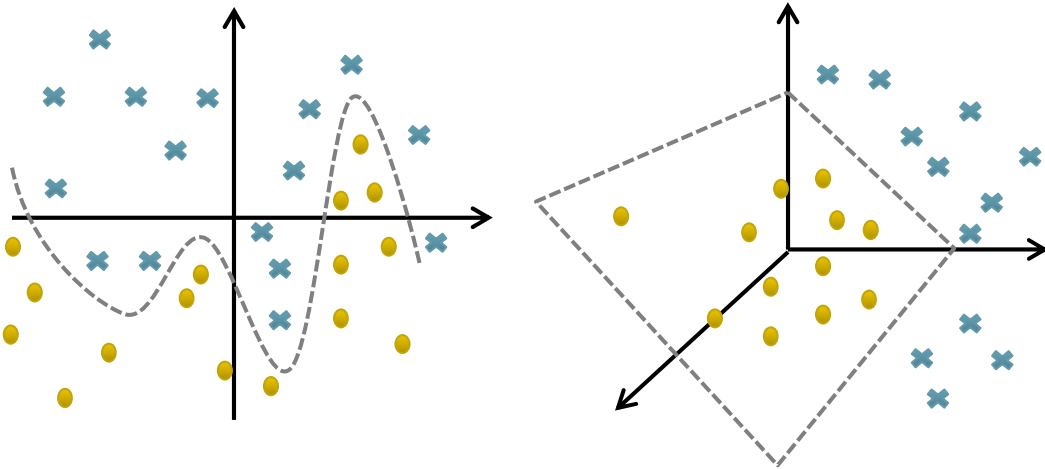


Figura 2.5 – Idea del uso de un núcleo para la transformación del espacio de los datos.

Fuente: Boosting support vector machines. García, E.

Elaborado por: Jairo Cervantes

En los casos anteriores las funciones lineales son de la forma:

$$f(x) = x \cdot w + b = \langle w, x \rangle + b$$

Si transformamos los datos, el vector solución w queda $w = \sum_{i=1}^N \alpha_i y_i \Phi(x_i)$ y en términos de los vectores de soporte

$$w = \sum_{i=1}^N \alpha_i y_i \Phi(s_i) \quad (2.24)$$

Donde por $\Phi(s_i)$ denota los vectores de soporte del conjunto $\{\Phi(x_1), \dots, \Phi(x_n)\}$.

Se puede ver que la aplicación Φ aparece explícitamente utilizada en la solución del vector $w \in H$ dada en 2.24, sobre un nuevo vector de entrada x se realiza la fase de prueba, no es necesario tener identificada la transformación Φ ya que la solución viene dada por:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{N_{VS}} \alpha_i y_i \langle \Phi(s_i), \Phi(x) \rangle + b$$

y escrita en términos de la función núcleo:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{N_{VS}} \alpha_i y_i (s_i, x) + b$$

Se genera un núcleo a partir del producto escalar definido en el espacio de las entradas $\mathcal{X} \subset R^2$.

Se considera la función:

$$k: R^2 \times R^2 \rightarrow R$$

Definida como sigue:

$$k(x_i, x_j) = \langle x_i, x_j \rangle^2 = (x_i \cdot x_j)^2.$$

Si $x_i = (x_{i1}, x_{i2})$ y $x_j = (x_{j1}, x_{j2})$ entonces:

$$k(x_i, x_j) = (x_i \cdot x_j)^2 = (x_{i1}x_{j1} + x_{i2}x_{j2})^2 = x_{i1}^2x_{j1}^2 + 2x_{i1}x_{j1}x_{i2}x_{j2} + x_{i2}^2x_{j2}^2$$

Para todo $x_i, x_j \in \mathcal{X}$ y se obtiene $\Phi: R^2 \rightarrow R^3$ como

$$\Phi(x_i) = \Phi(x_{i1}x_{i2}) = \begin{pmatrix} x_{i1}^2 \\ \sqrt{2}x_{i1}x_{i2} \\ x_{i2}^2 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$\langle \Phi(s_i), \Phi(x) \rangle_{R^3} = (x_i \cdot x_j)^2, \quad \forall x_i, x_j \in \mathcal{X}$$

Y se obtiene que la función k es una función núcleo ya que se corresponde con un producto escalar en R^3 .

Por otro lado, no existe una correspondencia uno a uno entre la función núcleo y la aplicación Φ , ya que puede haber diferentes Φ para un núcleo dado k . Por ejemplo con la función anterior, se podría haber elegido como función Φ las dos siguientes:

$$\Phi(x_i) = \Phi(x_{i1}x_{i2}) = \sqrt{2} \begin{pmatrix} (x_{i1}^2 - x_{i2}^2) \\ 2x_{i1}x_{i2} \\ (x_{i1}^2 + x_{i2}^2) \end{pmatrix}$$

o

$$\Phi(x_i) = \Phi(x_{i1}x_{i2}) = \begin{pmatrix} x_{i1}^2 \\ x_{i1}x_{i2} \\ x_{i1}x_{i2} \\ x_{i2}^2 \end{pmatrix}$$

2.2.3 MÁQUINAS DE VECTORES DE SOPORTE PARA LA MULTICLASIFICACIÓN

En esta sección se estudia máquinas de vectores de soporte para la multclasificación ya que frecuentemente en los problemas reales es necesario discriminar entre más de dos clases ($\ell > 2$), y solo se han considerado problemas de clasificación con dos clases.

Se genera los problemas de clasificación a etiquetas múltiples. Así sea $\{x_i, \dots, x_n\} \subset \mathcal{X} \subset R^n$ un conjunto de vectores de entrada, $\mathcal{Y} = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_\ell\}$ el conjunto de todas las posibles etiquetas, con $\ell > 2$.

En el conjunto de entrenamiento $Z = \{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$ se realiza una partición a partir de los conjuntos

$$Z_k = \{(x_i, y_i), \quad \text{tales que} \quad y_i = \theta_k\}$$

Obteniendo $\bigcup_{k=1}^{\ell} Z_k = Z$ y para cualquier $k \neq h$ se sigue $Z_k \cap Z_h = \emptyset$. Denotando por n_k el número de vectores de entrenamiento del conjunto Z_k con lo que se tiene: $n = n_1 + n_2 + \dots + n_{\ell}$; y por I_k el conjunto de los índices que $(x_i, y_i) \in Z_k$ de donde se sigue que $\bigcup_{i \in I_k} \{(x_i, y_i)\} = Z_k$.

Para resolver problemas de multclasificación, la forma más habitual de utilización de las máquinas de vectores de soporte admiten dos tipos de arquitecturas:

- La primera arquitectura para los problemas de multclasificación son las máquinas de vectores de soporte biclasificadoras generalizadas, en la cual se construyen una función clasificadora global a partir de un conjunto de funciones dicotómicas.
- El segundo tipo de arquitectura son las máquinas de vectores de soporte multclasificadoras, generando una función global directamente considerando todas las clases a la vez.

La solución al problema de multclasificación en las máquinas de vectores de soporte biclasificadoras generalizadas es transformar las ℓ particiones del conjunto de entrenamiento en el conjunto L biparticiones, en las cuales construye la correspondiente función discriminadora (es lo que se denomina esquema de descomposición) obteniendo f_1, \dots, f_L clasificadores dicotómicos o biclasificadores. A continuación mediante un esquema de reconstrucción, se realiza la función de los biclasificadores $f_i, i = 1, \dots, L$ con el objeto de proporcionar como salida final, a una de las ℓ clases posibles, $\{\theta_1, \dots, \theta_{\ell}\}$.

En el esquema de descomposición, las máquinas más utilizadas son las:

- Máquinas de vectores de soporte 1 – c – r (iniciales de uno-contra-resto), donde cada función clasificadora parcial f_i enfrenta la clase θ_i contra el resto de las clases.

- Máquinas de vectores de soporte $1 - c - 1$ (iniciales de uno-contra-uno), donde cada función clasificadora parcial f_{ij} enfrenta la clase θ_i contra la clase θ_j , sin considerar las restantes clases.

El esquema de votación es el método de reconstrucción más habitual, donde solo se considera las etiquetas proporcionadas por las L máquinas biclasificadoras $\{f_1, \dots, f_L\}$. Así, el esquema de reconstrucción parte de un conjunto formado para las etiquetas $\{\theta_k^*\}_{k=1}^L$ donde $\theta_k^* = \theta_i$ para algún $i = 0, 1, \dots, \ell$. A partir de este conjunto se realiza un recuento de todas las etiquetas (sin tener en cuenta, cuando aparezcan, la etiqueta $\theta_0 = \emptyset$):

Etiquetas	Votos
θ_1	m_1
\vdots	\vdots
θ_k	m_k
\vdots	\vdots
θ_ℓ	m_ℓ
	$L - m_0$

donde m_i , con $i = 1, \dots, \ell$ es el número de veces que la máquina $f_k, k = 1, \dots, L$ asigna sus votos a la etiqueta θ_i ; y m_0 es el número de veces que las máquinas $f_k, k = 1, \dots, L$ no asignan ninguna etiqueta concreta.

La máquina de vectores de soporte $1 - c - r$ fue dada por Vapnik. Estas máquinas multclasificadoras construyen ℓ bi-clasificadores donde la función discriminante $f_k, k = 1, \dots, \ell$ discrimina los vectores de entrenamiento de la clase k, Z_k , del resto de vectores de las otras clases Z/Z_k , esto es, si el biclasificador f_k lleva a cabo la discriminación de las clases sin error, entonces $\text{sign}(f_k(x_i)) = 1$, si el vector $x_i \in Z_k$ y $\text{sign}(f_k(x_i)) = -1$, si el vector $x_i \in Z/Z_k$.

Entonces dado una nueva entrada x , la salida numérica de la máquina $f_k(x)$ se interpreta de la siguiente forma:

$$\Theta(f_k(x)) = \begin{cases} \theta_k & \text{sign}(f_k(x_i)) = 1 \\ \theta_0 & \text{sign}(f_k(x_i)) = -1 \end{cases}$$

Este multclasificador debe considerar las siguientes características:

- Se deben resolver ℓ problemas de máquinas de vectores de soporte, es decir, se estimara ℓ funciones biclasificadoras.
- Los biclasificadores disponen de toda información proporcionada por los datos, es decir, en la construcción de los biclasificadores intervienen todos los elementos del conjunto de ensayo Z .

Las principales desventajas que presentan este tipo de máquinas multclasificadoras son:

- Para el caso de conjuntos que tengan dos o más etiquetas empatadas en número de votos, no obtenemos un indicador que nos permita discriminar entre ellos.
- No se puede asignar un nivel de confianza a la salida global, a partir de los ℓ biclasificadores.

Para el problema de multclasificación las máquinas de vectores de soporte $1 - c - 1$ se construyen $L = \frac{\ell \cdot (\ell - 1)}{2}$ biclasificadores donde la función discriminante f_{kh} , $1 \leq k \leq h \leq \ell$ discriminan los vectores de entrenamiento de la clase k, Z_k , de los vectores de entrenamiento de la clase h, Z_h , esto es, si el biclasificador f_{kh} lleva a cabo la discriminación de las clases sin error, entonces $\text{sign}(f_{kh}(x_i)) = 1$, si el vector $x_i \in Z_k$ y $\text{sign}(f_{kh}(x_i)) = -1$, si el vector $x_i \in Z_h$. Los restantes vectores de entrenamiento $Z / \{Z_k \cup Z_h\}$ no se consideran en la construcción del problema de optimización.

Entonces dada una nueva entrada x , la respuesta de la máquina $f_{kh}(x_i)$ es de la siguiente forma:

$$\Theta(f_{kh}(x)) = \begin{cases} \theta_k & \text{sign}(f_{kh}(x)) = 1 \\ \theta_h & \text{sign}(f_{kh}(x)) = -1 \end{cases}$$

Las máquinas de vectores de soporte $1 - c - 1$ tienen las siguientes características:

- Es necesario entrenar $\frac{\ell \cdot (\ell - 1)}{2}$ máquinas de vectores de soporte estándar, es decir, se necesita estimar $\frac{\ell \cdot (\ell - 1)}{2}$ funciones biclasificadoras, aunque con un conjunto de entrenamiento más reducido.
- Utilizando la interpretación probabilística de las máquinas de vectores de soporte es posible asignar un nivel de confianza a la salida global,

Las máquinas de vectores de soporte $1 - c - 1$ presentan los siguientes inconvenientes:

- La varianza es mayor o no proporciona información sobre el resto de clases, para cada uno de los biclasificadores que son entrenados con datos extraídos de solo dos clases del conjunto de entrenamiento.
- Cada máquina f_{kh} entrenada, no utiliza la información disponible en los datos que quedan fuera de las etiquetas θ_k y θ_h , lo que supone una preocupante pérdida de información.

Si el número de etiquetas ℓ es grande, el número de clasificadores es alto si comparamos con el número de clasificadores de las máquinas $1 - c - r$. Por ejemplo, si $\ell = 6$ se tendría que entrenar 15 máquinas.

En la máquinas de vectores de soporte multclasificadoras es posible obtener de forma directa un multclasificador, incorporando en único problema de optimización todas las etiquetas directamente en la configuración.

Se anotan los vectores de entrenamiento por $x_1^1, \dots, x_{n_1}^1, \dots, x_{n_\ell}^1$, donde el superíndice k en x_i^k denota que el vector pertenece a la clase k .

Considerando el conjunto de funciones lineales

$$f_k(x) = w^k \cdot x + b_k, \quad k = 1, \dots, \ell.$$

Para cada vector de entrada x el objetivo es construir ℓ funciones (obtener ℓ pares (w^k, b_k) de parámetros) tales que el clasificador siguiente discrimine adecuadamente todos los vectores de entrenamiento sin error

$$m = \arg \max_{k=1, \dots, \ell} \{w^k \cdot x + b_k\}$$

Esto es, que las desigualdades que se presentan a continuación sean ciertas para todo $k = 1, \dots, \ell$, $m \neq k$ e $i = 1, \dots, n$.

$$w^k \cdot x_i + b_k - w^m \cdot x_i - b_m \geq 1$$

Se elige entre ellas, el par de parámetros (w^k, b_k) , $k = 1, \dots, \ell$ para el cual, el funcional siguiente sea mínimo, siempre que existan soluciones a este problema

$$\sum_{k=1}^{\ell} \|w^k\|^2 = \sum_{k=1}^{\ell} w^k \cdot w^k$$

Por el contrario, el objetivo es minimizar el siguiente funcional si el conjunto de entrenamiento no puede ser discriminado sin provocar error en la clasificación

$$\sum_{k=1}^{\ell} \|w^k\|^2 + C \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{i=1}^n \xi_i^k$$

sujeto a las restricciones $w^k \cdot x_i + b_k - w^m \cdot x_i - b_m \geq 1 - \xi_i^k$, para $i = 1, \dots, n$ y $1 \leq k, m \leq \ell$. Para resolver este problema de optimización se usa las mismas técnicas de optimización que en el caso de las máquinas de vectores de soporte con dos clases y se obtiene que en términos de los vectores de soporte la función $f_k(x)$ presente el siguiente desarrollo:

$$f_k(x) = \sum_{m \neq k} \sum_{i=1}^{n_k} \alpha_i(k, m) x \cdot x_i^k - \sum_{m \neq k} \sum_{i=1}^{n_m} \alpha_i(k, m) x \cdot x_i^m + b_k$$

Los coeficientes $\alpha_i(k, m)$, $k = 1, \dots, m$, $m \neq k$, $i = 1, \dots, n_k$, $j = 1, \dots, n_m$ de este desarrollo tienen que maximizar la forma cuadrática:

$$W(\alpha) = \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{m \neq k} \left[\sum_{i=1}^{n_k} \alpha_i(k, m) - \frac{1}{2} \sum_{m^* \neq k} \left(\sum_{i,j=1}^{n_k} \alpha_i(k, m) \alpha_j(k, m) (x_i^k \cdot x_j^k) + \sum_{i=1}^{n_m} \sum_{i=1}^{n_m^*} \alpha_i(m, k) \alpha_j(m^*, k) (x_i^m \cdot x_j^{km^*}) - 2 \sum_{i=1}^{n_k} \sum_{i=1}^{n_m} \alpha_i(k, m^*) \alpha_j(k, m) (x_i^k \cdot x_j^m) \right) \right]$$

sujeto a las restricciones

$$0 \leq \sum_{m \neq k} \alpha_i(k, m) \leq C$$

$$\sum_{m \neq k} \sum_{i=1}^{n_k} \alpha_i(k, m) = \sum_{m \neq k} \sum_{i=1}^{n_m} \alpha_i(m, k), \quad k = 1, \dots, \ell.$$

Así, se tiene que para $\ell > 2$ se han de estimar simultáneamente $n(\ell - 1)$ parámetros $\alpha_i(k, m)$, con $i = 1, \dots, n_k$, $m \neq k$, $k = 1, \dots, \ell$, donde $n = \sum_{k=1}^{\ell} n_k$.

Para construir una máquina de vectores de soporte no lineal solo se debe reemplazar el producto escalar $x_i^r \cdot x_j^s$ por una función núcleo $k(x_i^r, x_j^s)$ en las ecuaciones correspondientes.

2.2.4 FUNCIONES NÚCLEOS

El objetivo principal de esta sección es ayudar a generalizar los problemas de optimización de las máquinas de vectores de soporte sobre clases de funciones no necesariamente lineales. Definiremos una función real de dos variables con unas características determinadas, a la que se denominará función núcleo. La principal característica de la función núcleo es expresada a través de un producto escalar de una transformación de los vectores de entrada de \mathcal{X} en un espacio característico de dimensión superior H .

El objetivo es buscar el hiperplano separador dentro del siguiente conjunto de funciones lineales:

$$\mathcal{F} = \{f: \mathcal{X} \subset R^d \rightarrow R / f(x) = \langle w, x \rangle + b, \text{ donde } w \in R^d, b \in R\} \quad (2.25)$$

Las funciones quedan determinadas a partir de dos parámetros $w \in R^d$ y $b \in R$. El parámetro w de la solución se expresa en la forma:

$$w = \sum_{i=1}^{N_{VS}} \alpha_i y_i s_i = \sum_{i=1}^n \beta_i x_i$$

El número de vectores de soporte se denota por N_{SV} y los vectores de soporte del conjunto $\{x_1, \dots, x_n\}$ por s_i . Además, se tiene que los β_i son nulos salvo en los vectores de soporte y se cumple la condición:

$$\sum_{i=1}^n \beta_i = 0$$

Una propiedad importante de la representación del vector solución w es si se tiene vectores x_{i_1} y x_{i_2} diferentes, pero para todos x_j $j = 1, \dots, n$ se cumple $\langle x_{i_1}, x_j \rangle = \langle x_{i_2}, x_j \rangle$, entonces su contribución a la solución final es la misma.

A partir de las condiciones de Karush – Kuhn – Tucker se determina el parámetro b , resolviendo para cada vector de soporte una ecuación lineal y tomando como valor b un valor promedio de todas esas soluciones.

Utilizando la linealidad del producto escalar, la solución lineal al problema de optimización se expresa a través de una función, que se puede escribir como sigue:

$$f(x) = \left\langle \sum_{i=1}^n \beta_i x_i, x \right\rangle + b = \sum_{i=1}^n \beta_i \langle x_i, x \rangle + b$$

Así, solo se necesita el producto escalar de los vectores de entrenamiento $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ con el nuevo vector de entrada $x \in \mathcal{X}$ para la representación de la función de decisión, lo que permite generalizar al problema de máquinas de vectores de soporte biclasificadoras a un conjunto de funciones no lineales.

Sea un conjunto de vectores de entrenamiento $Z = \{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\} \subset \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. Se deberá encontrar un hiperplano separador óptimo en un determinado espacio, tal que en dicho espacio el conjunto de entrenamiento fuese separable, con lo que no se tendría ninguna pérdida en la función objetivo.

Para el problema de optimización, sería muy conveniente dado un conjunto de vectores de entrenamiento Z , no necesariamente separable, realizar una transformación ϕ de los vectores de entrada $\{x_1, \dots, x_n\}$ tal que convierta el conjunto transformador en un conjunto separable en un espacio adecuado,

$$Z_\phi = \{(\phi(x_1), y_1), \dots, (\phi(x_n), y_n)\}$$

Aunque la solución a este problema no siempre existirá, si permitirá extender el marco de trabajo al poder considerar otras clases de funciones clasificadoras distintas de las lineales, a la vez que permite retener la capacidad de generalización que proporcionan las funciones lineales en el espacio característico.

El desarrollo formal del problemas es el siguiente: dado el espacio de los vectores de entrada \mathcal{X} se considera una transformación ϕ de este espacio en un espacio vectorial, que se denota por \mathcal{H} y llamará espacio característico (ver figura 2.6), en la forma:

$$\phi: \mathcal{X} \subset R^d \rightarrow \mathcal{H} \subset R^{d'} \quad (2.26)$$

donde normalmente la dimensión de $\mathcal{H}(d')$ es superior a la dimensión del espacio $\mathcal{X}(d \ll d')$. En lugar de la clase de funciones dada en 2.25, se considera la clase a partir de esta transformación ϕ

$$\mathcal{F}_\phi = \{f: \mathcal{X} \subset R^d \rightarrow R / f(x) = \langle w, \phi(x) \rangle_{\mathcal{H}} + b, \text{ donde } w \in R^d, b \in R\}$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$ denota un producto escalar definido en \mathcal{H} .

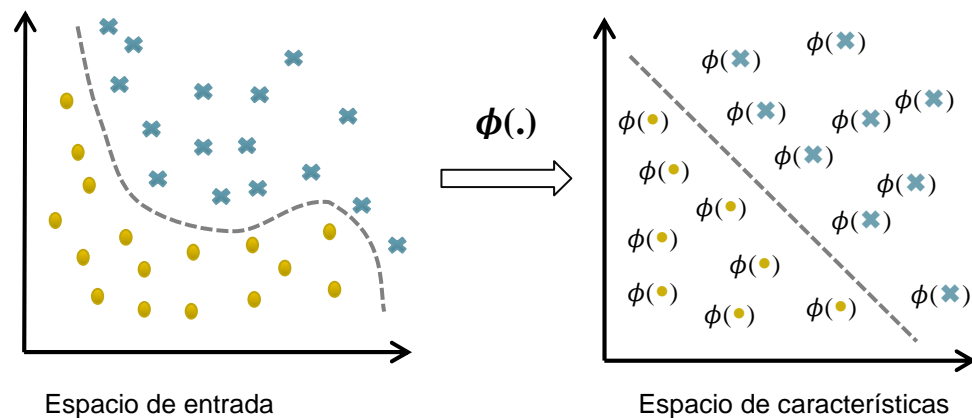


Figura 2.6 – Idea del uso de un núcleo para la transformación del espacio de los datos.

Fuente: Las máquinas de soporte vectorial. Betancourt, G.

Elaborado por: Jairo Cervantes

Se utiliza la siguiente notación para el producto escalar en H , para una mayor simplicidad en los desarrollos:

$$\langle \phi(x), \phi(x') \rangle = k(x, x')$$

Se reemplaza en todos los desarrollos del problema de las máquinas de vectores de soporte biclasificadoras, $\langle x, x' \rangle$ por $k(x, x')$ y se obtiene el siguiente problema de optimización convexa no lineal:

$$\begin{aligned} \min_{w \in \mathbb{R}^{d'}} & \frac{1}{2} \|w\|^2 + C \cdot \sum_{i=1}^n \xi_i \\ \text{s. a.} & \begin{cases} y_i \cdot ((w, \phi(x_i)) - b) - 1 + \xi_i \geq 0 \quad \forall i \\ \xi_i \geq 0 \quad \forall i \end{cases} \end{aligned}$$

cuya solución viene dada por:

$$w = \sum_{i=1}^n \beta_i \phi(x_i)$$

y proporciona la siguiente función en \mathcal{F}_ϕ :

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \beta_i k(x_i, x) + b$$

sin más que cambiar que el producto escalar $\langle x_i, x \rangle$ por $k(x_i, x)$ para $i = 1, \dots, n$.

Así se logra obtener una función núcleo $k(\cdot, \cdot)$, que tiene un rol muy importante en las máquinas de vectores de soporte, y también en todo lo relacionado a la teoría del aprendizaje estadístico, la cual desarrolla muchas investigaciones en la actualidad.

El teorema de Mercer¹⁶ es la definición principal en la función núcleo, y establece que: Una función núcleo es una función real de dos variables, denotada por k , que verifica:

$$k: \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\langle x, x' \rangle \rightarrow k(x, x') = \langle \phi(x), \phi(x') \rangle_H$$

donde ϕ es una aplicación definida en 2.26.

Si se llega a evaluar la función núcleo $k(x, x')$, se puede utilizar k sin tener que utilizar para nada la aplicación ϕ , ya que suele ser difícil tratar con ellas y no siempre es posible determinar en forma explícita.

La figura 2.7 muestra esquemáticamente todo lo revisado hasta el momento. Muestra la idea inicial en las máquinas de vectores de soporte, que es transformar los vectores de entrada $\{x_1, \dots, x_n\}$ en unos nuevos vectores de entrada $\phi(x) = \{\phi(x_1), \dots, \phi(x_n)\}$ dentro de un espacio de características H de dimensión

¹⁶ Henao R. (2004). *Selección de hiperparámetros en máquinas de soporte vectorial*. Colombia, Manizales.

superior, siguiendo una transformación no lineal elegida a priori. Obteniendo un mayor grado de libertad para poder actuar sobre los datos. Luego dentro de este nuevo espacio, se busca el hiperplano separador óptimo como un desarrollo lineal de funciones núcleos donde una de las dos componentes es un vector de entrada del conjunto de entrenamiento.

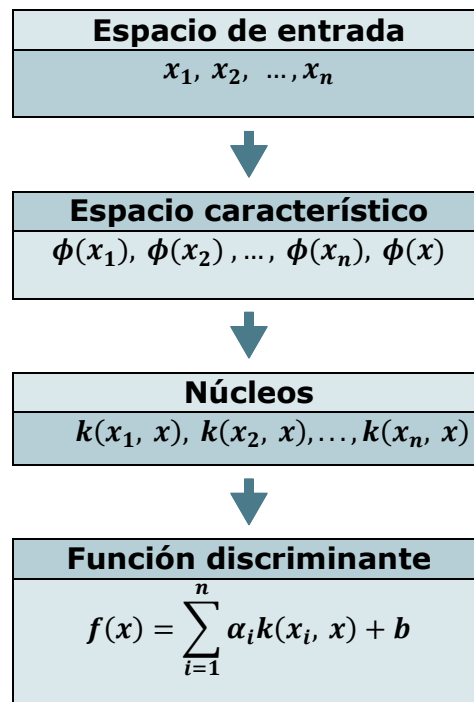


Figura 2.7 – Las máquinas de vectores soporte transforman, inicialmente, el espacio de entradas en un espacio característico de dimensión superior y entonces construye la función de clasificación lineal óptima dentro de este nuevo espacio.

Fuente: Modelos de clasificación basados en máquinas núcleos de vectores soporte. González, L.

Elaborado por: Jairo Cervantes

Entre los núcleos que más se utiliza en la práctica son el núcleo de Gauss (o núcleo de base radial) y núcleo polinomio. Una idea de cómo funcionan estos núcleos está representada en la figura 2.8, en el cual se consideran los vectores de soporte de forma hueca en cada una de las clases.

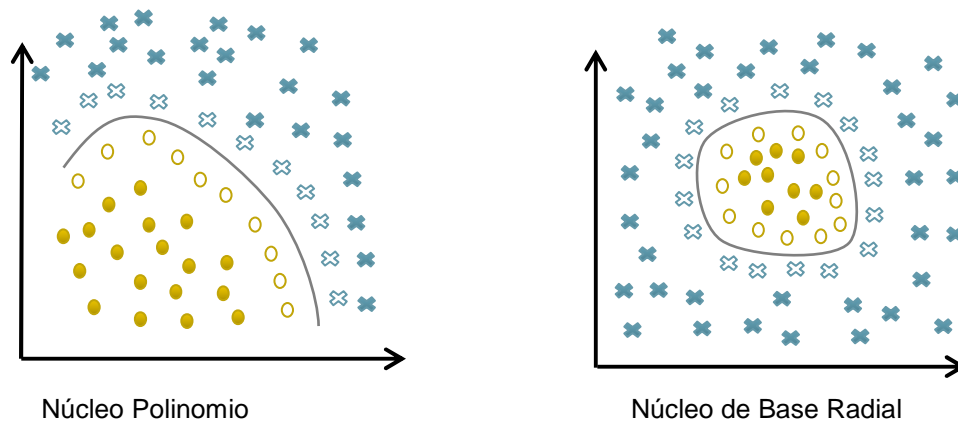


Figura 2.8 – Representación gráfica de funciones de núcleos para las máquinas de vectores de soporte.

Fuente: Boosting support vector machines. García, E.

Elaborado por: Jairo Cervantes

Los Núcleos de Gauss o Núcleos de Base Radial son núcleos invariantes frente a traslaciones y considera el operador pseudodiferencial¹⁷ P cuya norma cuadrática está dada por:

$$\|Pf\|^2 = \int \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma^{2n}}{2^n n!} (O^n f(x))^2 dx$$

con $O^{2n} = \Delta^n$ y $O^{2n+1} = \nabla \Delta^n$, siendo Δ el operador Laplaciano y ∇ el operador de Gradiente. La función asociada a este operador sugerida por Boser¹⁸ con $\sigma > 0$ ($\gamma = \frac{1}{2\sigma^2}$) tiene la forma:

$$k(x) = \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{2\sigma^2}\right)$$

¹⁷ Un operador pseudodiferencial difiere de un operador diferencial en la medida en que este contiene un número infinito de operadores diferenciales, que se corresponde con un desarrollo de Taylor de un operador en un dominio de Fourier. Nótese que se ha de requerir que los argumentos se encuentren dentro del radio de convergencia de la serie.

¹⁸ Boser B., Guyon I., and Vapnik V.(1992). *A training algorithm for optimal margin classifier*. Estados Unidos, Pittsburgh.

y se le denomina núcleo de Gauss o función de base radial (RBF). Además de ser invariante ante traslaciones, este núcleo es invariante frente a rotaciones. Son ampliamente utilizadas las funciones de base radial en otros campos, como por ejemplo en las redes neuronales.

Otro de los núcleos más utilizados en la práctica es el de polinomio. Es un núcleo no invariante ante traslaciones, se definen como sigue: Sea el conjunto \mathbb{N}_0^d de los vectores d –dimensionales de números naturales incluidos el cero. Se denota por $n = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{N}_0^d$ un índice múltiple y se definen $|n| = \sum_{i=1}^d n_i$ y el coeficiente denominado coeficiente multinomial:

$$\binom{p}{n} = \frac{p!}{(p - |n|)!}$$

Sea el funcional

$$D_0^n f = \frac{1}{n_1!} \partial_{x_1}^{n_1} \dots \frac{1}{n_d!} \partial_{x_d}^{n_d} f(x) \Big|_{x=0}$$

y $\{e_n\}_{n=1}^p$ una base ortonormal en el espacio de los polinomios con d variables de grado p , es decir, $\langle e_n, e_{n'} \rangle = \delta_{nn'}$. Entonces se demuestra que el operador

$$P = \sum_{|n| \leq p} e_n \binom{p}{n}^{\frac{1}{2}} D_0^n$$

es un operador de regularización y satisface la condición con la siguiente función:

$$k(x, y) = (\langle x, y \rangle + h)^p$$

Donde $x, y \in \mathbb{R}^d$, $h \in \mathbb{R}$ y $p \in \mathbb{N}$. A este núcleo se le llama núcleo polinomial de grado p . Para $h = 0$, será núcleo polinomial homogéneo, aunque por lo general se considerara $h = 1$.

3 METODOLOGÍA

La propuesta de este trabajo se centra en la predicción de la calificación de riesgo, a través de un estudio comparativo de dos técnicas adecuadas para este análisis, como son el análisis discriminante, tradicionalmente utilizado por las entidades financieras en sus calificaciones de créditos, y una nueva metodología denominada máquinas de vectores de soporte, que presenta ciertas ventajas respecto al anterior. Las metodologías anteriores han sido usadas para la predicción de la calificación de los Gobiernos Autónomos Descentralizados Municipales (GADM), clientes del Banco del Estado.

A continuación se desarrolla el análisis empírico, que comprende una serie de etapas que van desde la búsqueda de la información, la recolección de los datos, el análisis de las variables, hasta la interpretación de los principales resultados obtenidos.

3.1 ANÁLISIS DE DATOS Y DEFINICIÓN DE VARIABLES

La información de gestión administrativa y financiera corresponde al año 2010 y está compuesta por: cédula presupuestaria de ingresos, cédula presupuestaria de gastos, balance de comprobación y cartera vigente de cada uno de los 221 GADM.

Los datos de las cédulas presupuestarias son remitidos por cada GADM al Ministerio de Finanzas de acuerdo a lo establecido en la Ley Orgánica de Responsabilidad, Estabilización y Transparencia Fiscal (LOREYTF) y al Banco del Estado. La cartera vigente de cada GADM se obtiene a través del informe publicado por el Ministerio de Finanzas y está complementada con la información proporcionada por un buró de crédito.

Con la información recabada se construyeron indicadores de gestión administrativa y financiera¹⁹, que se describen a continuación:

- Ingreso propio / Gasto corriente $\left(\frac{Ip}{Gc}\right)$: Este indicador mide la autosuficiencia de la entidad. Mientras mayor sea este indicador mejor será la eficiencia operativa, puesto que podrá cubrir una mayor parte de sus gastos operativos con ingresos propios.
- Transferencias / Ingresos totales $\left(\frac{T}{It}\right)$: Este indicador refleja la dependencia de la entidad en relación con las transferencias que recibe la entidad por parte del Gobierno Central. Una menor dependencia siempre será deseable.
- Gasto corriente / Ingreso total $\left(\frac{Gc}{It}\right)$: Muestra la eficiencia en el uso de los ingresos por parte de la entidad. Mientras menor sea este índice, mayor serán los recursos que se pueden disponer para incrementar el nivel de inversiones de la entidad.
- Inversiones / Gasto total $\left(\frac{I}{Gt}\right)$: La proporción de los gastos de inversión sobre los gastos totales de una entidad brinda una valiosa información para caracterizar el desempeño, dado que este indicador muestra la aplicación de recursos financieros que son destinados a incrementar la obra pública, el patrimonio o el stock físico de una entidad con relación al gasto total. A mayor gasto en inversiones mejor es el desempeño de la entidad.
- Inversiones / Transferencias de capital $\left(\frac{I}{Tk}\right)$: Indica el eficiente uso de las transferencias que recibe por parte del Gobierno Central, por tanto se espera que este índice sea lo mayor posible.
- Ingresos propios / Ingresos totales $\left(\frac{Ip}{It}\right)$: Este indicador determina cuanto del ingreso total son generados por ingresos propios. Esta relación es favorable en la medida que su valor se acerque al 100%.

¹⁹ Barreiros, A. (2005). *Introducción general: Gerencia financiera*. Ecuador, Escuela Politécnica nacional.

Freire, E. (2002). *Análisis discriminante. Una aplicación a los clientes institucionales de un banco*. Ecuador, Quito.

- Servicio de la deuda / Ingresos propios $\left(\frac{Sd}{Ip}\right)$: Con este indicador se consideran de mayor riesgo aquellas entidades muy dependientes de las transferencias de capital y cuya deuda sea alta en relación a sus ingresos propios.
- Cartera vigente / Ingresos totales $\left(\frac{Cv}{It}\right)$: Este indicador considera al monto total de la deuda actual que tiene en este momento la entidad, que es la cartera vigente.
- Cartera vigente / Ingresos propios $\left(\frac{Cv}{Ip}\right)$: A base de razonamientos descritos anteriormente, también se utiliza el índice de cartera vigente sobre ingresos propios como una señal de sobre endeudamiento.
- Servicio de la deuda total / (Ingreso total – Crédito público) $\left(\frac{Sd}{It-Cp}\right)$: Este indicador considera lo dispuesto por el Código Orgánico de Organización Territorial, Autonomía y Descentralización y señala que el monto total del servicio de la deuda, no deberá superar el 25% de los ingresos totales anuales sin incluir crédito público.
- Deuda pública / (Ingreso total – Crédito público) $\left(\frac{Dp}{It-Cp}\right)$: Este indicador también considera lo dispuesto por el Código Orgánico de Organización Territorial, Autonomía y Descentralización y señala que el porcentaje calculado en cada año entre el saldo de la deuda pública y sus ingresos totales anuales, sin incluir crédito público, no deberá ser superior al 200%.

Los indicadores propuestos para los 221 Gobiernos Autónomos Descentralizados Municipales se incluyen en el Anexo A.

3.2 SELECCIÓN DE LAS VARIABLES MÁS REPRESENTATIVAS

En la construcción del modelo de predicción la, selección de las variables más representativas a ser utilizadas es parte fundamental del éxito final del mismo. Al tratarse de un modelo de predicción de la calificación de crédito se deben barajar variables significativas que discriminen la calificación.

En el presente proyecto se realiza el análisis de las variables más representativas, la herramienta estadística adecuada para el análisis, forma parte de los llamados métodos factoriales de análisis de datos.

Los métodos factoriales son un conjunto de técnicas que combinan un conjunto inicial de variables con el objeto de obtener nuevas variables o factores llamadas componentes principales, las mismas que son una combinación ponderada de todas las variables que intervienen en el estudio. Estos factores tienen gran importancia al explicar de forma resumida todas las variables originales.

En el presente proyecto se aplica la metodología de análisis de componentes principales a los 221 GADM, con sus respectivas variables de gestión administrativa y financiera. A continuación se presentan los resultados obtenidos del análisis de componentes principales.

La tabla 3.1 contiene la medida de adecuación muestral de Kaiser – Meyer – Olkin (KMO) y la prueba de esfericidad de Bartlett. Los dos estadísticos permiten evaluar la bondad de ajuste de los datos en un modelo de componentes principales. Para el estudio el KMO es aceptable, ya que con valores menores a 0,6 el estadístico recomienda no utilizar el análisis. El valor asociado al estadístico Ji - cuadrado para la prueba de esfericidad de Bartlett es de 1616,094 y el valor del nivel crítico (Sig.) es bajo. Por lo tanto, se puede rechazar la hipótesis nula de esfericidad y consecuentemente se puede asegurar que el análisis de componentes principales es adecuado para explicar los datos.

Tabla 3.1 – KMO y prueba de Bartlett

Medida de adecuación muestral de Kaiser-Meyer-Olkin.		0,661
Prueba de esfericidad de Bartlett	Ji-cuadrado	1616,094
	Sig.	0,00

Elaborado por: Jairo Cervantes

La tabla 3.2 muestra la matriz de correlación obtenida del análisis. La matriz de correlaciones representa la relación existente entre las variables, en la tabla 3.2 se puede distinguir que existe una alta correlación entre varios indicadores. Como se puede observar, la correlación más positiva (0,79) se da entre los indicadores que miden los ingresos propios con respecto al ingreso total y al gasto corriente, la correlación más negativa (-0,70) se da entre los indicadores que miden la relación del gasto corriente con respecto al ingreso total y el gasto de inversiones con respecto al gasto total.

Tabla 3.2 - Matriz de correlaciones

Variable	$\frac{Ip}{Gc}$	$\frac{T}{It}$	$\frac{Gc}{It}$	$\frac{I}{Gt}$	$\frac{I}{Tk}$	$\frac{Ip}{It}$	$\frac{Sd}{Ip}$	$\frac{Cv}{It}$	$\frac{Cv}{Ip}$	$\frac{Dd}{It - Cp}$	$\frac{Sd}{It - Cp}$
$\frac{Ip}{Gc}$	1,00										
$\frac{T}{It}$	-0,56	1,00									
$\frac{Gc}{It}$	-0,09	-0,13	1,00								
$\frac{I}{Gt}$	0,11	0,15	-0,70	1,00							
$\frac{I}{Tk}$	0,43	-0,38	-0,14	0,50	1,00						
$\frac{Ip}{It}$	0,79	-0,63	0,38	-0,23	0,33	1,00					
$\frac{Sd}{Ip}$	-0,34	0,35	-0,18	0,02	-0,10	-0,38	1,00				
$\frac{Cv}{It}$	0,21	-0,17	-0,03	-0,08	0,15	0,14	0,24	1,00			
$\frac{Cv}{Ip}$	-0,35	0,21	-0,23	0,07	-0,09	-0,42	0,71	0,44	1,00		
$\frac{Dd}{It - Cp}$	0,12	-0,08	0,11	-0,12	0,16	0,15	0,05	0,45	0,19	1,00	
$\frac{Sd}{It - Cp}$	0,12	-0,02	0,05	-0,14	0,15	0,17	0,52	0,70	0,29	0,29	1,00

Elaborado por: Jairo Cervantes

A continuación se presenta la tabla de varianza total explicada (tabla 3.3), donde se ofrece un listado de los valores propios de la matriz de correlaciones y el porcentaje de varianza que representa cada uno de ellos. Note que solo se toman en cuenta aquellos valores propios mayores a 1. En el estudio el primer valor propio es de 3,17 y explica el 28,78% de la varianza total. El segundo valor propio es de 2,58 y explica el 23,43% de la varianza total. El tercer valor propio es de

2,04 y explica el 18,56% de la varianza total. Con los 3 valores propios mayores que 1 se consigue explicar el 70,78% de la varianza de los datos originales.

Tabla 3.3- Varianza total explicada

Componente	Valores Propios		
	Total	% de la varianza	% acumulado
1	3,17	28,78	28,78
2	2,58	23,43	52,22
3	2,04	18,56	70,78

Elaborado por: Jairo Cervantes

En la tabla 3.4 se presenta las correlaciones entre las variables originales y cada uno de las componentes principales, donde se puede apreciar que la primera componente está constituida por las variables ingresos propios sobre ingresos totales e ingresos propios sobre gasto corriente. Estas variables reflejan, en la parte positiva de la primera componente la autosuficiencia que tienen los GADM. La parte negativa de la primera componente está constituida por las variables de transferencias sobre ingresos totales, servicio de la deuda sobre ingresos propios y cartera vigente sobre ingresos propios, reflejando la dependencia y el nivel de endeudamiento que tienen los GADM.

En la segunda componente se observa que las variables con más peso son: cartera vigente sobre ingresos totales, servicio de la deuda y deuda pública sobre ingresos totales sin crédito público. Por lo tanto, esta componente refleja el peso de la deuda que tienen los GADM.

La tercera componente principal está formada por las variables que miden las inversiones sobre gasto total y sobre las transferencias de capital que tienen los GADM, representando el grado de inversión que tienen las entidades. En la parte negativa se encuentra la variable gasto corriente sobre ingreso total, representando la gestión del gasto de funcionamiento de las entidades.

Tabla 3.4- Matriz de componentes

Variable	Componente		
	1	2	3
Ingresos propios / Ingresos totales	0,89	0,2	-0,13
Ingreso propio / Gasto corriente	0,8	0,24	0,29
Transferencias / Ingresos Totales	-0,75	-0,18	-0,03
Servicio de la deuda / Ingreso propios	-0,66	0,52	-0,02
Cartera vigente / Ingreso propios	-0,63	0,56	0,04
Cartera vigente / Ingreso totales	0,04	0,87	-0,06
Servicio de la deuda / Ingresos totales - crédito público	-0,04	0,84	-0,14
Deuda pública / Ingresos totales - crédito público	0,12	0,56	-0,14
Inversiones / Gasto total	-0,13	-0,04	0,94
Gasto corriente / Ingreso total	0,31	-0,05	-0,81
Inversiones / Transferencias de capital	0,44	0,3	0,6

Elaborado por: Jairo Cervantes

La tabla 3.5 muestra los puntajes obtenidos por varios GADM en las tres primeras componentes. Al estudiar los puntajes se puede notar las diferencias que existen entre los GADM de 24 de Mayo y Aguarico, el GADM de 24 de Mayo presenta un valor negativo en la primera componente reflejando una mayor dependencia de las transferencias por parte del Estado en comparación con el GADM de Aguarico que presenta un valor positivo en la primera componente reflejando una mayor autosuficiencia. Los puntajes en la segunda componente determinan que el GADM de 24 de Mayo tiene mayores niveles de endeudamiento que el GADM de Aguarico. En la tercera componente el puntaje del GADM de Aguarico evidencia que tiene una mayor inversión y menor gasto corriente que el GADM de 24 de Mayo.

Al examinar las primeras puntuaciones que obtiene el GADM de Olmedo (Loja) en las dos primeras componentes, se observa que es una entidad con alta dependencia de las transferencias del Gobierno y presenta un elevado nivel de endeudamiento, el puntaje de la tercera componente representa que monto de las inversiones que realiza el GADM es mayor al gasto corriente. (En el Anexo B se presentan las puntuaciones de todos los GADM en las componentes principales).

Tabla 3.5 - Matriz de puntajes en las tres componentes principales

Gobierno Autónomo Descentralizado Municipal	Componente 1	Componente 2	Componente 3
24 De Mayo	-0,78	0,24	-0,82
Aguarico	2,08	-0,84	0,49
Baños	2,70	0,59	1,25
Baquerizo Moreno	-2,25	0,96	-1,29
Colimes	-0,92	-0,06	-0,02
Colta	-0,48	-1,03	0,50
Durán	1,44	0,99	0,50
Echeandía	-0,18	0,26	0,58
Guayaquil	2,24	0,61	-1,60
Huamboya	-0,87	-0,18	-0,01
Isidro Ayora	0,10	-0,45	-0,31
Jama	-0,76	-0,35	0,24
La Maná	0,16	-0,47	0,46
La Troncal	0,95	-0,13	0,40
Machala	1,95	4,48	-0,37
Manta	0,54	0,30	0,25
Nobol	-0,03	-0,42	-1,52
Olmedo (Loja)	-3,33	3,09	0,90
Putumayo	-1,33	-0,97	0,55
Puyango	-0,14	1,48	0,49
Quero	0,09	-0,03	0,22
Rumiñahui	2,81	0,10	0,43
Salcedo	0,72	0,19	0,37
Tosagua	-0,26	-0,36	-0,21
Tulcán	0,47	-0,54	0,92
Urdaneta	-1,29	0,00	-1,07
Valencia	0,25	-0,75	0,43

Elaborado por: Jairo Cervantes

Analizando los valores obtenidos por los GADM en las tres componentes principales, se aprecia que existen GADM con puntajes altos, tanto en la parte positiva como negativa. En la tabla 3.6, se indican los GADM con los puntajes más altos en las componentes principales, se puede observar la autosuficiencia de ingresos propios que tiene el GADM de Samborondón, por otra parte el sobre endeudamiento que tiene el GADM de Cuenca, el abuso del gasto corriente del GADM de Chimbo, etc.

Tabla 3.6 - Matriz de GADM con los mayores puntajes en las tres componentes principales

Gobierno Autónomo Descentralizado Municipal	Componente 1	Componente 2	Componente 3
Samborondón	4,33	1,00	1,68
Quito	3,21	3,34	3,17
Rumiñahui	2,81	0,10	0,43
Baños	2,70	0,59	1,25
Loja	2,46	0,83	-2,42
Guayaquil	2,24	0,61	-1,60
Aguarico	2,08	-0,84	0,49
Daule	2,01	1,88	0,83
Salinas	2,01	1,47	0,13
Cuenca	1,97	4,44	-0,38
Machala	1,95	4,48	-0,37
Ibarra	1,65	1,33	-2,34
Cevallos	1,35	-0,96	2,00
Portoviejo	1,26	0,47	2,24
Latacunga	1,01	-0,21	-2,12
Grl. Antonio E.	0,81	-0,01	-2,11
Buena Fe	0,50	-0,84	-2,66
Montecristi	0,45	0,35	-3,09
Huaquillas	0,36	0,36	-2,03
Jipijapa	0,19	-1,75	-2,34
La Concordia	-0,14	-1,73	-2,23
Puerto López	-0,29	-0,99	-3,19
Chimbo	-0,29	-0,52	-3,17
Chinchiipe	-1,90	2,11	0,07
Sozoranga	-2,21	1,35	-0,74
Baquerizo Moreno	-2,25	0,96	-1,29
Quilanga	-2,35	2,28	0,05
Yacuambi	-2,91	4,54	0,48
Olmedo (Loja)	-3,33	3,09	0,90

Elaborado por: Jairo Cervantes

3.3 DETERMINACIÓN DEL GRUPO DE PERTENENCIA DE LOS GOBIERNOS AUTÓNOMOS DESCENTRALIZADOS MUNICIPALES POR LA SIMILITUD DE LA INFORMACIÓN

Una vez identificados e interpretado los parámetros más representativos de la gestión administrativa y financiera de los GADM, se propone en este apartado agrupar a los GADM en conglomerados homogéneos.

El análisis de conglomerados es una técnica especialmente apropiada para detectar grupos o clases homogéneas a partir de las puntuaciones factoriales previamente asignadas a los GADM. El procedimiento de agrupación utilizado en este proyecto es el de K medias, que es un método de agrupación de casos que se basa en la distancia existente entre ellos.

Partiendo de los resultados del análisis de componentes principales, se considera las 3 componentes y los 192 GADM que no presentan datos atípicos en las componentes ya que los GADM con valores atípicos en cualquiera de las componentes, puede originar una clasificación pobre y grupos con pocos elementos. Los GADM con valores atípicos que no son considerados en esta etapa son los que presentaron los puntajes más altos, tanto en la parte positiva como negativa de las componentes principales. Se formaron 5 conglomerados, ya que representa el número de categorías utilizadas por la Superintendencia de Bancos y Seguros para calificar y provisionar un crédito.

En la tabla 3.7, se presenta los centros de los conglomerados finales. Esta tabla es de gran utilidad para interpretar la constitución de los conglomerados, pues resume los valores centrales de cada conglomerado en las 3 componentes principales.

Tabla 3.7 - Centros de los conglomerados finales

	Conglomerado				
	1	2	3	4	5
Componente 1	-0,135	1,761	1,690	-1,243	-1,755
Componente 2	1,476	1,332	-0,458	-0,976	1,423
Componente 3	0,488	-1,300	0,653	1,149	-1,511

Elaborado por: Jairo Cervantes

En la tabla 3.8, se expone el número de casos asignado a cada conglomerado. En el proyecto, el conglomerado 4 es el de mayor tamaño con el 33% del total de los casos considerados y el conglomerado 5 es el más pequeño de los conglomerados con el 8%.

Tabla 3.8 - Número de GADM en cada conglomerado

Conglomerado	Nº GADM
1	37
2	29
3	48
4	63
5	15
Total	192

Elaborado por: Jairo Cervantes

Una vez culminada la agrupación de los GADM, se aplica el siguiente criterio para determinar la calificación de cada grupo según el comportamiento de las componentes. Se utiliza las medias de las tres componentes dentro de cada grupo otorgando 5 puntos al grupo con una mejor media, 1 punto al grupo con la peor media en cada una de las componentes. En la tabla 3.9, se presenta los puntajes obtenidos en cada conglomerado para cada una de las componentes.

Analizando la tabla 3.7 y 3.9 se observa que el conglomerado 2, obtiene un puntaje de 5 en la componente (1) que manifiesta el comportamiento de autosuficiencia de los GADM, debido a que su centro es el valor más positivo de todos los conglomerados. En la componente (2) que representa el nivel de endeudamiento de los GADM, el conglomerado 4 obtiene un puntaje de 5, ya que presenta el valor más negativo. Y en la componente (3) que representa el grado de inversión que tiene los GADM, el conglomerado 4 obtiene un puntaje de 5, ya que presenta el valor más positivo.

Tabla 3.9 - Puntajes obtenidos en cada conglomerado para cada componente

Conglomerado	Componente 1	Componente 2	Componente 3
1	3	1	3
2	5	3	2
3	4	4	4
4	2	5	5
5	1	2	1

Elaborado por: Jairo Cervantes

Determinados los puntajes, se considera que el conglomerado 3, es el conglomerado que obtuvo mejores puntajes en las tres componentes principales,

seguido por el conglomerado 4, en la tercera posición se encuentra el conglomerado 2, en la cuarta posición el conglomerado 1 y en la última posición el conglomerado 5. Por lo tanto la calificación de los conglomerados es (en el Anexo C se presenta las calificaciones asignadas a cada uno de los Gobiernos Autónomos Descentralizados Municipales):

Conglomerado	Calificación
1	D
2	C
3	A
4	B
5	E

La interpretación de las calificaciones por las características de los conglomerados es:

Calificación A: Son GADM en los cuales el riesgo es el más bajo de todos, dado su buen desempeño en la gestión administrativa financiera, lo que se evidencia en los indicadores de gestión administración y financiera. Las transferencias de capital se destinan en su mayor parte a la inversión. El nivel de endeudamiento es mediano o bajo, pero este endeudamiento es bueno en la medida que se destina a mayores obras de inversión y no implica que a futuro tenga problemas de iliquidez para afrontar el nivel de endeudamiento.

Calificación B: Los GADM con esta calificación de riesgo tienen un mayor peligro que las entidades con calificación A, reflejan un nivel de desempeño mediano tanto en la distribución de sus gastos corrientes y de capital como en sus indicadores de liquidez y autosuficiencia. Las transferencias de capital se destinan en menor porcentaje a inversión.

Calificación C: Estas entidades tienen un mayor riesgo potencial puesto que su nivel de cobertura de los gastos corrientes con los ingresos propios es inferior al del grupo B. Presenta niveles de endeudamiento mediano o alto, pero su endeudamiento no se correlaciona con una buena gestión en inversión pública.

Calificación D: Los GADM tienen un nivel de deuda altos, lo que pone en riesgo la capacidad de poder asumir nuevas deudas. La orientación de los recursos está destinada en su mayor parte hacia el gasto corriente y no al gasto de inversión.

Calificación E: Son entidades de riesgo muy alto que presentan gastos corrientes elevados, indicadores de gestión financiera y administrativa malos, incapacidad de generar ingresos propios y niveles de deuda altos, por lo que no pueden asumir una elevada deuda.

3.4 ANÁLISIS DISCRIMINANTE

El análisis discriminante es una técnica que permite identificar las características que diferencian a dos o más grupos, y a crear una función capaz de distinguir con la mayor precisión posible a los miembros de uno u otro grupo. Para llegar a conocer en qué se diferencian los grupos necesitamos disponer de la información de los casos a ser diferenciados. El análisis discriminante es un método estadístico por el cual se busca conocer las variables que contribuyen en mayor medida a discriminar los grupos.

El objetivo final del análisis discriminante es encontrar la combinación lineal de las variables independientes que permiten diferenciar a los grupos. Una vez encontrada esa combinación, podrá ser utilizada para la asignación de nuevos casos.

3.4.1 SELECCIÓN DE LAS VARIABLES INDEPENDIENTES Y DEPENDIENTE

En el proyecto se debe tener en cuenta que las variables para el cálculo de las funciones discriminantes, son los 11 indicadores de gestión administrativa y financiera utilizados en el análisis de componentes principales. La pertenencia a los grupos, determinada con el análisis de conglomerados se utiliza como variable dependiente.

3.4.2 SELECCIÓN DEL MÉTODO DE CLASIFICACIÓN

La estrategia propuesta como método de clasificación en este proyecto, es considerar todas las variables independientes incluidas en el análisis de componentes principales.

En los estadísticos de grupo (tabla 3.10) se presentan por separado para los cinco grupos los resultados de cada uno, tanto de la media como de la desviación estándar. Analizando las medias entre los diferentes grupos, observamos que el grupo A tiene mejores medias en comparación a los demás grupos, ya que en este grupo se encuentran los GADM con mayor autosuficiencia, menor dependencia, mayor inversión y menor nivel de endeudamiento.

Tabla 3.10- Estadísticos de cada grupo

	Variable	Media	Desviación típica
A	Ingreso propio / Gasto corriente	0,69	0,28
	Transferencias / Ingresos Totales	0,66	0,09
	Gasto corriente / Ingreso total	0,20	0,05
	Inversiones / Gasto total	0,64	0,06
	Inversiones / Transferencias de capital	0,92	0,19
	Ingresos propios / Ingresos totales	0,13	0,05
	Servicio de la deuda / Ingreso propios	0,28	0,18
	Cartera vigente / Ingreso totales	0,07	0,04
	Cartera vigente / Ingreso propios	0,55	0,31
	Deuda pública / Ingresos totales - crédito público	0,15	0,11
	Servicio de la deuda / Ingresos totales - crédito público	0,03	0,02
	B	Ingreso propio / Gasto corriente	0,30
Transferencias / Ingresos Totales		0,77	0,08
Gasto corriente / Ingreso total		0,16	0,05
Inversiones / Gasto total		0,69	0,08
Inversiones / Transferencias de capital		0,84	0,18
Ingresos propios / Ingresos totales		0,04	0,02
Servicio de la deuda / Ingreso propios		0,68	0,44
Cartera vigente / Ingreso totales		0,06	0,03
Cartera vigente / Ingreso propios		1,64	0,96
Deuda pública / Ingresos totales - crédito público		0,14	0,11
Servicio de la deuda / Ingresos totales - crédito público		0,03	0,01

	Variable	Media	Desviación típica
C	Ingreso propio / Gasto corriente	0,47	0,26
	Transferencias / Ingresos Totales	0,67	0,10
	Gasto corriente / Ingreso total	0,30	0,06
	Inversiones / Gasto total	0,50	0,06
	Inversiones / Transferencias de capital	0,76	0,16
	Ingresos propios / Ingresos totales	0,14	0,08
	Servicio de la deuda / Ingreso propios	0,41	0,24
	Cartera vigente / Ingreso totales	0,10	0,04
	Cartera vigente / Ingreso propios	0,95	0,66
	Deuda pública / Ingresos totales - crédito público	0,27	0,17
	Servicio de la deuda / Ingresos totales - crédito público	0,05	0,03
	D	Ingreso propio / Gasto corriente	0,43
Transferencias / Ingresos Totales		0,72	0,08
Gasto corriente / Ingreso total		0,16	0,03
Inversiones / Gasto total		0,69	0,05
Inversiones / Transferencias de capital		0,91	0,20
Ingresos propios / Ingresos totales		0,07	0,04
Servicio de la deuda / Ingreso propios		1,10	0,60
Cartera vigente / Ingreso totales		0,15	0,03
Cartera vigente / Ingreso propios		2,81	1,34
Deuda pública / Ingresos totales - crédito público		0,26	0,13
Servicio de la deuda / Ingresos totales - crédito público		0,07	0,03
E		Ingreso propio / Gasto corriente	0,17
	Transferencias / Ingresos Totales	0,79	0,08
	Gasto corriente / Ingreso total	0,22	0,06
	Inversiones / Gasto total	0,51	0,09
	Inversiones / Transferencias de capital	0,67	0,20
	Ingresos propios / Ingresos totales	0,03	0,02
	Servicio de la deuda / Ingreso propios	1,83	0,78
	Cartera vigente / Ingreso totales	0,14	0,05
	Cartera vigente / Ingreso propios	4,64	1,76
	Deuda pública / Ingresos totales - crédito público	0,34	0,18
	Servicio de la deuda / Ingresos totales - crédito público	0,06	0,03

Elaborado por: Jairo Cervantes

3.4.3 VALIDACIÓN DE LAS FUNCIONES DISCRIMINANTES

En la tabla 3.11, se presenta los valores propios, en la tabla se puede observar qué porcentaje de la varianza explica cada eje discriminante. En el estudio la primera función explica el 44,69% de la varianza total de los datos, la segunda función aporta el 37,36%, la tercera función aporta con el 11,47% y la cuarta aporta con el 6,48% de variabilidad entre grupos. El coeficiente de correlación canónica de la tabla 3.11, mide el poder discriminante de la i -ésima función discriminante, ya que es el porcentaje de la variación total en dicha función, que

es explicada por las diferencias entre grupos. Valores cercanos a 1 indican mayor potencia discriminante de la i –ésima función, en nuestro estudio las funciones tienen valores aceptables.

Tabla 3.11- Valores Propios

Función	Valores propios	% de varianza	% acumulado	Correlación canónica
1	2,47	44,69	44,69	0,84
2	2,06	37,36	82,05	0,82
3	0,63	11,47	93,52	0,62
4	0,36	6,48	100	0,51

Elaborado por: Jairo Cervantes

En la tabla 3.12, se determina si las funciones generadas son estadísticamente significativas, es decir, si el conjunto de las funciones permiten que las medias de los grupos estén separadas. El valor de la lambda de Wilks para el conjunto formado por las cuatro funciones es cercano a cero (0,04), por lo que se puede concluir que las cuatro funciones tienen un alto poder discriminatorio. Esto se corrobora con los p - valores asociados al estadístico Ji – cuadrado, son menores a 0,05.

Tabla 3.12- Lambda de Wilks

Contraste de las funciones	Lambda de Wilks	Ji-cuadrado	gl	Sig.
1 a la 4	0,04	578,1	44	0,0
2 a la 4	0,15	350,59	30	0,0
3 a la 4	0,45	145,77	18	0,0
4	0,74	55,99	8	0,0

Elaborado por: Jairo Cervantes

En la matriz de estructura (tabla 3.13), se observan las correlaciones que hay entre las variables y cada una de las 4 funciones discriminantes. Las variables están agrupadas dentro de cada función según el tamaño de la correlación y están marcadas con un asterisco en la función a la que contribuyen en mayor grado.

La variable gasto de inversiones sobre gasto total, es la que tiene mayor correlación en la primera función. En la segunda función, la variable cartera vigente sobre ingresos propios es la que tiene la correlación más alta. En la tercera función, la variable cartera vigente sobre ingresos totales es la que tiene la correlación más alta. En la última función, la variable ingresos propios sobre gasto corriente es la que tiene la correlación más alta.

Tabla 3.13- Matriz de estructura

Variable	Función			
	1	2	3	4
Inversiones / Gasto total	-0,67*	-0,02	0,3	-0,08
Gasto corriente / Ingreso total	0,60*	-0,19	-0,15	-0,25
Cartera vigente / Ingreso propios	0,01	0,82*	-0,09	0,2
Servicio de la deuda / Ingreso propios	0,01	0,68*	-0,11	0,21
Deuda pública / Ingresos totales - crédito público	0,23	0,26*	0,11	-0,1
Cartera vigente / Ingreso totales	0,2	0,53	0,64*	-0,23
Ingreso propio / Gasto corriente	0,09	-0,38	0,59*	0,39
Servicio de la deuda / Ingresos totales - crédito público	0,18	0,35	0,52*	-0,13
Ingresos propios / Ingresos totales	0,38	-0,47	0,49*	0,12
Transferencias / Ingresos Totales	-0,18	0,26	-0,40*	-0,08
Inversiones / Transferencias de capital	-0,156	-0,124	0,35*	0,079

Elaborado por: Jairo Cervantes

3.4.4 VALORACIÓN DE LA CAPACIDAD PREDICTIVA

En la tabla de centroides (3.14), se muestra que los GADM del grupo C obtiene, en términos generales, mayores puntuaciones que los demás GADM de los otros grupos en la primera función discriminante. En la segunda función, los GADM del grupo A tienen su centroide en la parte negativa y los GADM del grupo E tiene su centroide ubicado en la parte positiva. En la tercera función, el centroide de los GADM del grupo D se sitúa en la parte positiva, por lo que esta función ayuda a discriminar mejor esta calificación, y en la cuarta función, el centroide de los GADM del grupo C se sitúa en la parte negativa, y el centroide de los GADM del grupos A está ubicado en la parte positiva, es razonable que la cuarta función ayude a discriminar mejor a dichos grupos.

Tabla 3.14- Funciones en los centroides de los grupos

Calificación de Riesgo	Función			
	1	2	3	4
A	0,06	-1,58	0,43	0,71
B	-1,53	-0,11	-0,73	-0,26
C	2,9	-0,82	-0,18	-0,78
D	-0,55	1,58	1,26	-0,31
E	1,98	3,2	-1,04	1,07

Elaborado por: Jairo Cervantes

En la tabla 3.15, se presenta la máxima probabilidad a posteriori de pertenecer a un grupo, la mayoría de las probabilidades obtenidas para cada uno de los GADM son altas. Si uno de los casos ha sido clasificado en el mismo grupo que pertenece inicialmente, entonces la función discriminante lo ha clasificado correctamente. Las clasificaciones erróneas son mostradas con un doble asterisco (**), en el estudio existen 18 GADM que fueron mal clasificados. En el Anexo D se presentan los resultados de todos los GADM.

Tabla 3.15- Estadísticas por casos

Gobierno Autónomo Descentralizado Municipal	Grupo real	Grupo pronosticado	Probabilidad a posteriori
24 De Mayo	E	E	1,0
Alausí	A	B **	0,5
Ambato	C	C	1,0
Antonio Ante	A	A	1,0
Biblián	B	A **	0,5
Chunchi	D	D	0,8
Colimes	B	B	0,8
Colta	B	B	1,0
Espindola	D	E **	0,6
Flavio Alfaro	E	E	1,0
Huamboya	B	B	0,5
Isabela	A	A	1,0
Las Naves	C	C	0,4
Limón Indanza	B	B	0,5
Milagro	D	A **	0,9
Mira	B	B	1,0
Naranjito	E	E	0,6
Pallatanga	D	D	0,7
Palora	A	A	1,0
Pelileo	A	A	0,9
Penipe	B	B	1,0
Puyango	D	D	1,0

Gobierno Autónomo Descentralizado Municipal	Grupo real	Grupo pronosticado	Probabilidad a posteriori
Quero	A	A	0,7
Quevedo	C	C	1,0
Quijos	A	A	0,7
Quinindé	C	C	1,0
Quinsaloma	C	C	0,9
Riobamba	C	C	1,0
Riobamba	C	C	1,0
Rioverde	B	A **	0,4
Rocafuerte	B	D **	0,5
Salcedo	A	A	1,0
Salitre	E	E	0,9
San Cristóbal	A	A	0,9
San Vicente	C	C	1,0
Shushufindi	D	D	1,0
Tena	D	D	0,8
Tulcán	A	A	0,9
Urcuquí	A	B **	0,6
Urdaneta	E	E	1,0
Valencia	A	A	0,7
Ventanas	D	D	0,6
Vinces	B	B	0,8
Balsas	B	B	0,6
Yaguachi	B	B	1,0
Yantzaza	D	D	1,0
Zamora	D	D	1,0
Zaruma	A	A	0,9

Elaborado por: Jairo Cervantes

En la figura 3.1 se presenta la ubicación de los GADM del grupo A en las dos primeras funciones discriminantes, se puede observar que este grupo A se ubican en la parte inferior del eje vertical (Función 2). Las particularidades de riesgo por ejemplo de los GADM de Cayambe, La Troncal y Palora son similares dado su buen desempeño en la gestión administrativa financiera, son entidades que destinan la mayor parte de las transferencias de capital a inversión, tienen niveles de endeudamiento medianos o bajos, pero este endeudamiento es bueno en la medida que se destina a mayores obras de inversión y no implica que a futuro tenga problemas de iliquidez para afrontar el nivel de endeudamiento

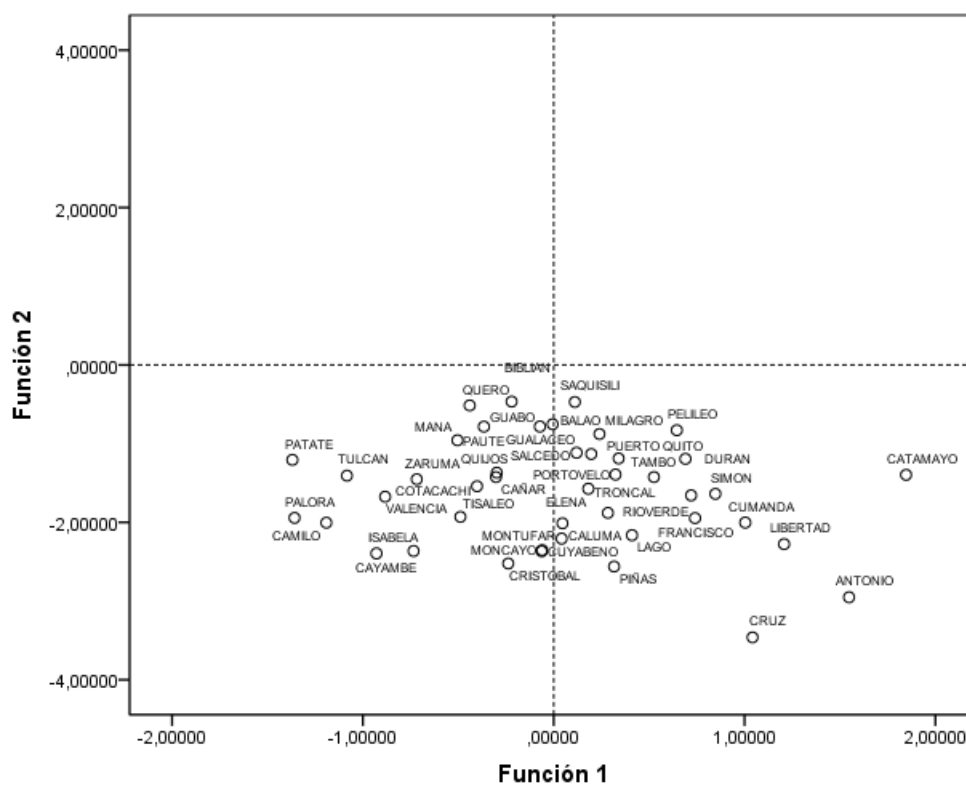


Figura 3.1 – GADM con calificación A.
Elaborado por: Jairo Cervantes

En la figura 3.2, se presenta la ubicación de los GADM del grupo B en las dos primeras funciones discriminantes, este grupo se encuentra ubicado en la parte izquierda del eje horizontal (Función 1). Son entidades que reflejan un mayor riesgo que las entidades del grupo anterior, ya que tienen un desempeño mediano en la distribución de sus gastos corrientes y las transferencias de capital se destinan en menor porcentaje al gasto de inversión.

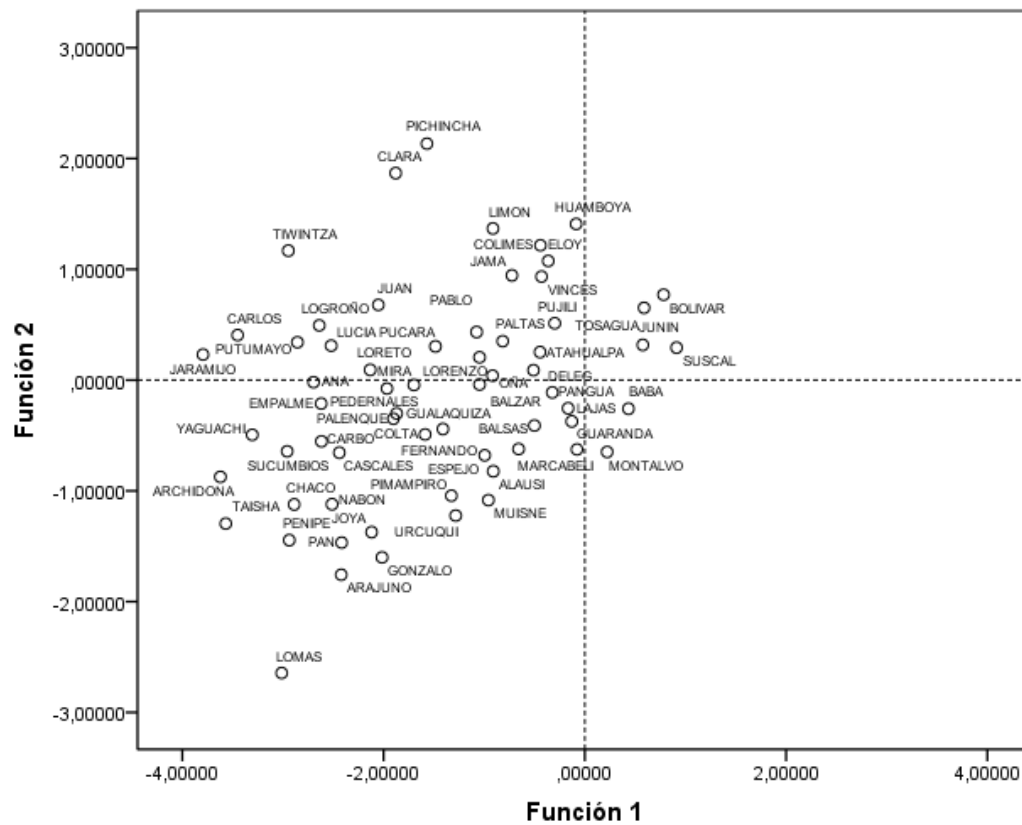


Figura 3.2 – GADM con calificación B.
Elaborado por: Jairo Cervantes

En la figura 3.3, se presenta la ubicación de los GADM del grupo C en las dos primeras funciones discriminantes, los GADM del grupo C se ubican a la derecha del eje horizontal (Función 1). Se puede observar que el GADM de Ambato tienen un mayor riesgo puesto que la cobertura de los gastos corrientes con los ingresos propios es inferior y presenta niveles de endeudamiento mayores que los grupos anteriores.

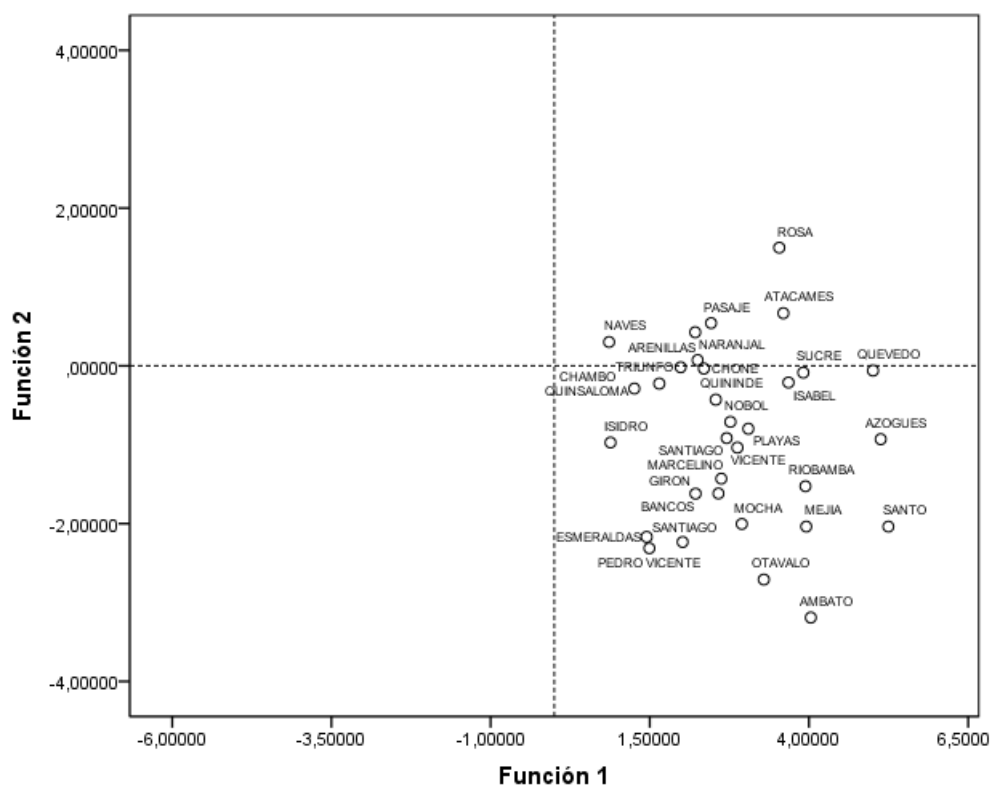


Figura 3.3 – GADM con calificación C.
Elaborado por: Jairo Cervantes

En la figura 3.4, se presenta la ubicación de los GADM del grupo D en las dos primeras funciones discriminantes, estas entidades se ubican en la parte superior del eje vertical (Función 2). Se puede destacar por ejemplo que el GADM de Nangaritza tiene indicadores de endeudamiento altos, los ingresos de la entidad están destinados en su mayor parte hacia el gasto corriente y no al gasto de inversión.

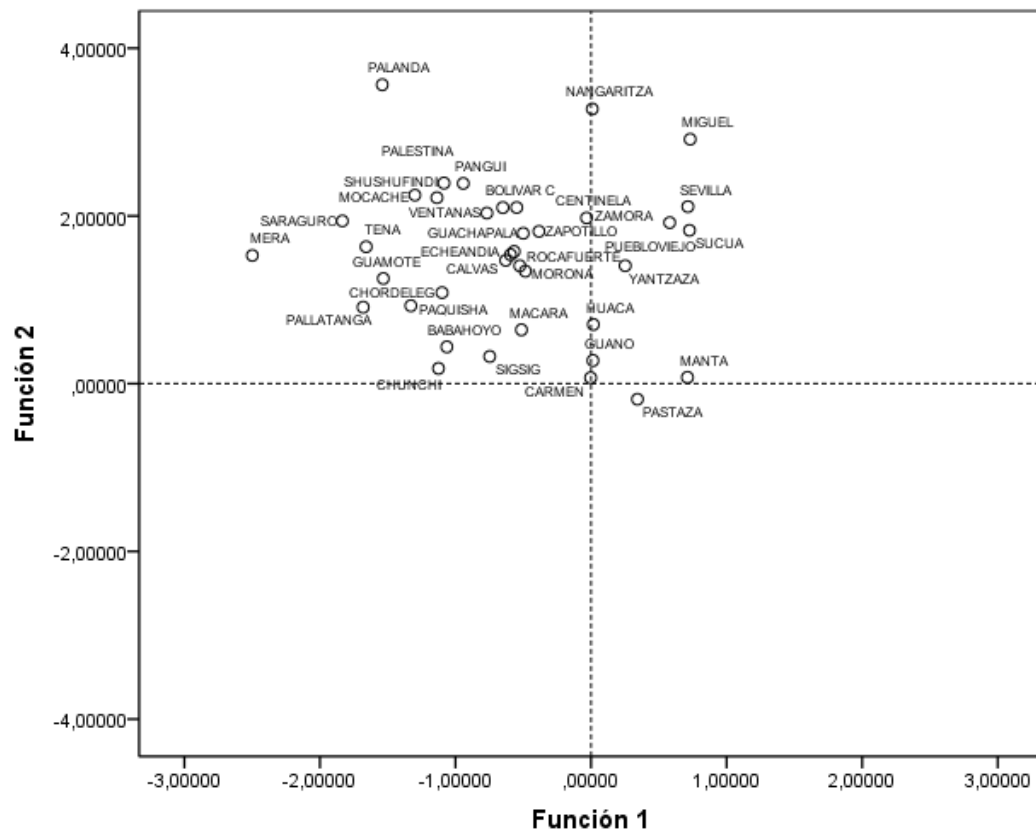


Figura 3.4 – GADM con calificación D.
Elaborado por: Jairo Cervantes

En la figura 3.5, se presenta la ubicación de los GADM del grupo E en las dos primeras funciones discriminantes, se ubican a la derecha del eje horizontal (Función 1) y en la parte superior del eje vertical (Función 2). Serán entidades que por sus características de gestión administrativa y financiera representaran mayor riesgo.

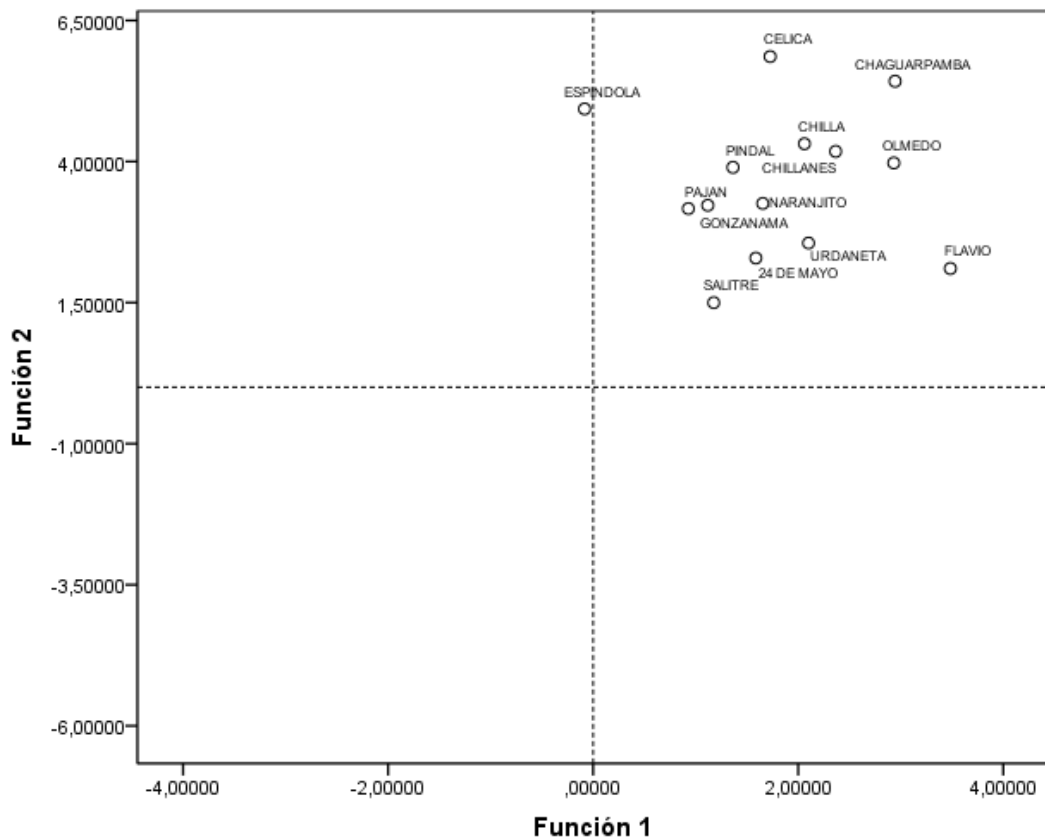


Figura 3.5 – GADM con calificación E.
 Elaborado por: Jairo Cervantes

En la figura 3.6, se presenta el diagrama de dispersión de todos los casos utilizados en el análisis sobre el plano definido por las dos funciones discriminantes. Los casos están identificados por la calificación de los GADM.

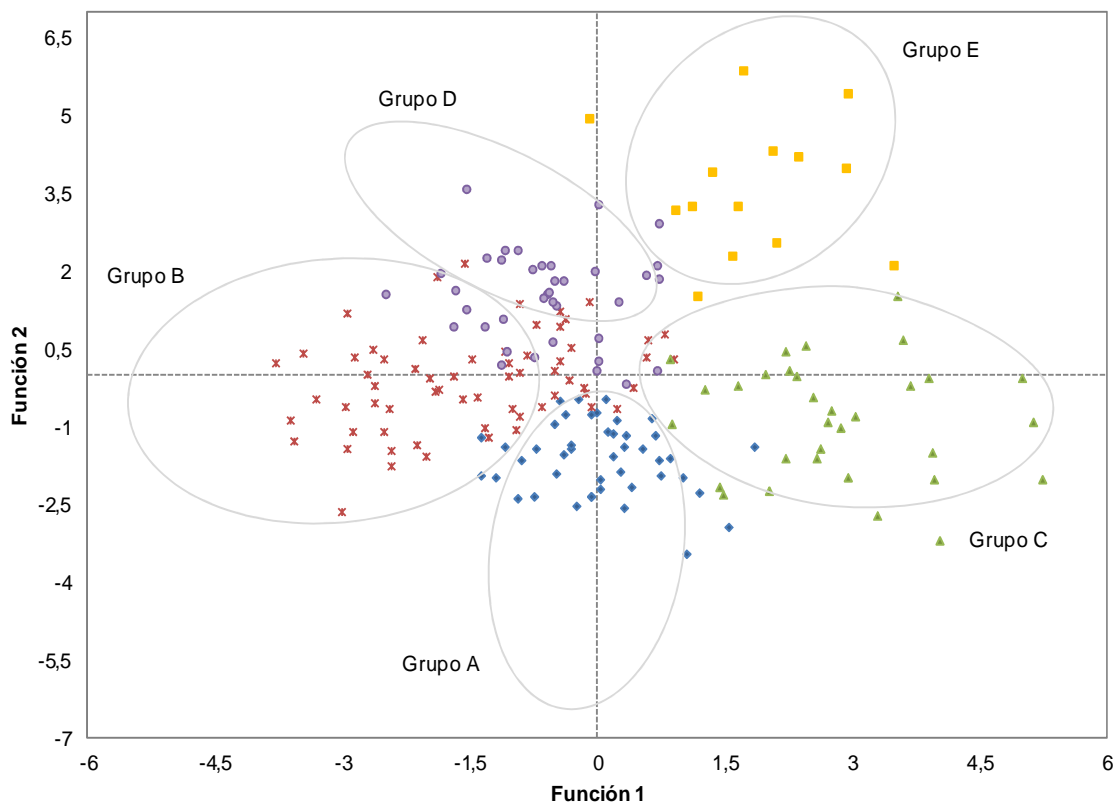


Figura 3.6 – Diagrama de dispersión de los cinco grupos de GADM en las dos funciones discriminantes.

Elaborado por: Jairo Cervantes

La matriz de coeficientes de la función de clasificación se presenta en la tabla 3.16, hay tantas funciones de clasificación como grupos. Estos coeficientes nos permiten construir cada una de las funciones y asignar la calificación de un caso en aquel grupo cuya función de clasificación resulte ser mayor (Ver sección 2.1.3). Resulta de gran utilidad disponer de las 5 funciones de clasificación para clasificar nuevos casos, la asignación de la calificación a nuevos casos se realizará en el siguiente capítulo con los 29 GADM que fueron excluidos. De esta forma, la dos primera función de clasificación proporcionada por el análisis son:

$$F_1 = -114,7 + 83,1 \frac{Ip}{Gc} + 82,7 \frac{T}{It} + \dots - 11,8 \frac{Dp}{It - Cp} - 56,7 \frac{Sd}{It - Cp}$$

$$F_2 = -116,4 + 68,0 \frac{Ip}{Gc} + 92,7 \frac{T}{It} + \dots - 9,70 \frac{Dp}{It - Cp} - 76,5 \frac{Sd}{It - Cp}$$

Tabla 3.16- Coeficientes de las funciones de clasificación

Variable	Calificación de Riesgos				
	A	B	C	D	E
Ingreso propio / Gasto corriente	83	68	73	77	85
Transferencias / Ingresos Totales	83	93	73	85	87
Gasto corriente / Ingreso total	245	207	282	232	271
Inversiones / Gasto total	128	139	124	146	118
Inversiones / Transferencias de capital	12	10	-1	8	2
Ingresos propios / Ingresos totales	-231	-207	-192	-237	-247
Servicio de la deuda / Ingreso propios	3	4	5	3	9
Cartera vigente / Ingreso totales	56	73	76	97	62
Cartera vigente / Ingreso propios	4	4	4	5	7
Deuda pública / Ingresos totales - crédito público	-12	-10	-1	-5	7
Servicio de la deuda / Ingresos totales - crédito público	-57	-77	-47	1	-61
(Constante)	-115	-116	-108	-128	-126

Elaborado por: Jairo Cervantes

3.5 MÁQUINAS DE VECTORES DE SOPORTE

Las máquinas de vectores de soporte (MVS) son métodos de aprendizaje automático relativamente nuevos para el problema de clasificación. La idea básica es encontrar un hiperplano que separa los datos perfectamente en dos grupos para el caso de clasificación binaria.

Para casos donde las clases no son separables, se introducen cotas de error; en casos donde no son linealmente separables, se introduce la utilización de funciones núcleos con la idea de transformar el conjunto de datos a un espacio de dimensión superior, donde es perfectamente separable, o bajo una cota de error aceptable.

Para la aplicación de las máquinas de vectores de soporte en el presente proyecto se recurre al software Weka 3.6.1, el programa es desarrollado por la Universidad de Waikato en Nueva Zelanda. El programa es una implementación en Java de varios algoritmos de clasificación, regresión, conglomerados, asociación y visualización. Tiene grandes ventajas entre las cuales se encuentra

que es de fácil implementación debido a su presentación gráfica y es de libre distribución y difusión.

3.5.1 TRANSFORMACIÓN DE LOS DATOS AL FORMATO DEL SOFTWARE UTILIZADO

Resulta imprescindible transformar los datos al formato compatible con el software. Así los datos de entrada deben estar codificados en un formato específico denominado Attribute Relation File Format (extensión "arff"). En el proyecto se trabaja con ficheros de texto. Los datos están colocados en el fichero de la siguiente forma: cada variable en una fila, y con los atributos separados por comas. El formato del fichero (arff) del proyecto sigue la estructura siguiente:

```
@relation 'Base Final '
@attribute 'Ingreso propio / Gasto corriente' numeric
@attribute 'Transferencias / Ingresos Totales' numeric
.....
.....
@attribute 'calificación' {A,B,C,D,E}
@data
0.35248,0.59065 ,..... ,0.02239,A
.....
.....
```

La figura 3.7 representa gráficamente a los 192 GADM en cada una de las variables. Donde los colores corresponden a cada uno de los grupos, en las 11 variables independientes y en la variable dependiente. Los GADM del grupo A de color azul, los GADM del grupo B de color rojo, los GADM del grupo C de color celeste, los GADM del grupo D de color gris y los GADM del grupo E de color rosado

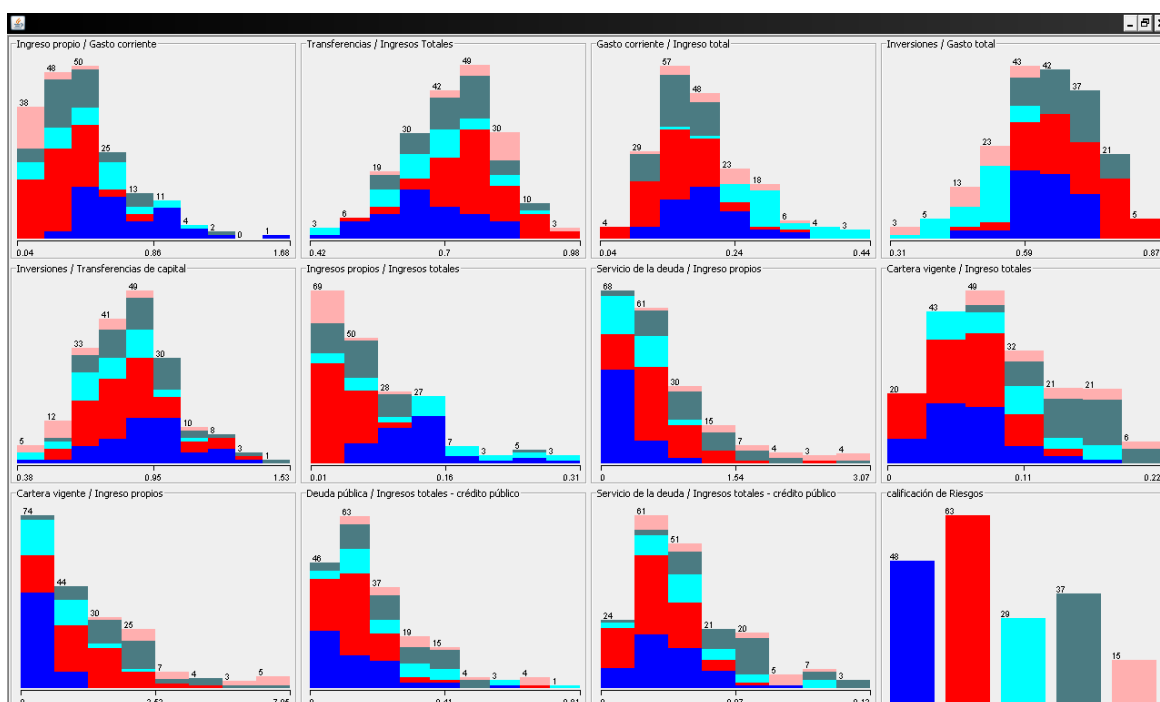


Figura 3.7 – Datos representados gráficamente en WEKA.
Elaborado por: Jairo Cervantes

3.5.2 SELECCIÓN DEL NÚCLEO

Un paso fundamental en la aplicación de las MVS es la selección de la función núcleo, ya que es la que permite la transformación a un espacio de características sin necesidad de que se requiera conocer algún algoritmo explícito y, con esto, manejar datos no separables linealmente de manera mucho más sencilla. Existen diversos tipos de núcleos que son comúnmente utilizados para diferentes tipos de estudio, entre los cuales se destacan el núcleo lineal, polinomial y de base radial. Cada uno tiene una estructura particular y tienen asociado ciertos parámetros.

El núcleo que se utiliza en el presente proyecto, es la función núcleo de base radial, se emplea este núcleo ya que diversos autores²⁰ lo sugieren como una elección razonable para clasificación con MVS. Además este núcleo hace

²⁰ Gonzáles, L. (2001). *Análisisdiscriminate utilizando máquinas de vetores soporte. Función núcleo similitud*. España, Sevilla.

Aranguren, P. *Identificación de patrones de consumo de los venezolanos mediante máquinas de vectores soporte*. Venezuela, Mérida.

corresponder de manera no lineal ejemplos en un espacio de mayor dimensión y tiene menos parámetros asociados a él que otros núcleos, lo que hace menos complejo el modelo. La función del núcleo de base radial que fue presentada en el Capítulo 3, es la siguiente:

$$k(x) = \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{2\sigma^2}\right)$$

Para la función núcleo de base radial se determina el valor del parámetro σ . El valor del parámetro σ debe ser mayor que cero, ya que controla el ancho del núcleo y debe ser ajustado para un adecuado desempeño de la MVS. Los diferentes valores para la configuración del núcleo en el presente proyecto son determinados por $\gamma = \frac{1}{2\sigma^2}$.

Un parámetro adicional en la aplicación de la MVS, es el de penalidad para el error (C). El parámetro C, permite tener cierto error de clasificación a cambio de una mejor generalización de los datos. Sin embargo, el valor del parámetro varía de acuerdo a los datos que se desean clasificar. Por lo tanto, se realiza una búsqueda exhaustiva de un valor adecuado que permita clasificar correctamente la mayor cantidad de casos como sea posible. Es importante tener en cuenta que con un valor muy elevado de C, tiene una alta penalización para puntos no separables y tiende a tener muchos vectores soporte, lo que puede llevar al sobreajuste. Por otra parte, un valor muy pequeño de C, hace que el modelo sea muy rígido, lo que puede conducir a un subajuste.

La determinación de los parámetros es una etapa trascendental en la aplicación de las MVS, por cuanto la obtención de resultados acertados dependerá, en gran parte, de apropiados valores de los parámetros. Por lo tanto, se propone varias configuraciones con la intención de determinar que configuración obtiene mejores resultados en cuanto a errores de clasificación. Tomando esto en cuenta se decidió probar las MVS con configuraciones donde se variaba el valor de C entre 1 hasta 100 y el valor de γ entre 0,01 y 10.

3.5.3 SELECCIÓN DEL TIPO DE PRUEBA PARA EL CLASIFICADOR

Para el estudio se utiliza la prueba con validación cruzada, ya que nos ayuda a medir el desempeño de las distintas configuraciones. En la prueba se define el número de k grupos en los cuales se quiere dividir el total de casos. Entonces, la prueba consiste en realizar el entrenamiento con $k-1$ grupos y la prueba con el grupo restante. Esto se hace k veces para todas las posibles combinaciones y el error de clasificación se obtendrá mediante el promedio de las k pruebas.

3.5.4 ENTRENAMIENTO

Con los datos seleccionados, se realizan los distintos entrenamientos de las MVS, por medio con un clasificador que utiliza algoritmos de optimización mínima secuencial (SMO) por sus siglas en inglés. Este clasificador resuelve los problemas de multclasificación utilizando clasificaciones por pares uno contra uno, determinando el modelo a partir de todas las posibles combinaciones de los diferentes grupos.

Tal como se señaló en el Capítulo 2, el entrenamiento de una MVS requiere la solución de los problemas 2.8 y 2.18 de optimización de programación cuadrática. El clasificador SMO lo que hace es transformar ese problema en una serie de problemas de programación cuadrática pequeños.

Para el clasificador SMO se selecciona el núcleo de base radial, configurado de acuerdo a los distintos parámetros asociados.

Con el entrenamiento del clasificador seleccionado se experimentan las diferentes configuraciones propuestas, luego se calcula el porcentaje de casos clasificados correctamente para cada una de las configuraciones, de cada grupo y para todos los grupos. En la figura 3.8 se presentan los diferentes resultados obtenidos por cada una de las configuraciones propuestas.

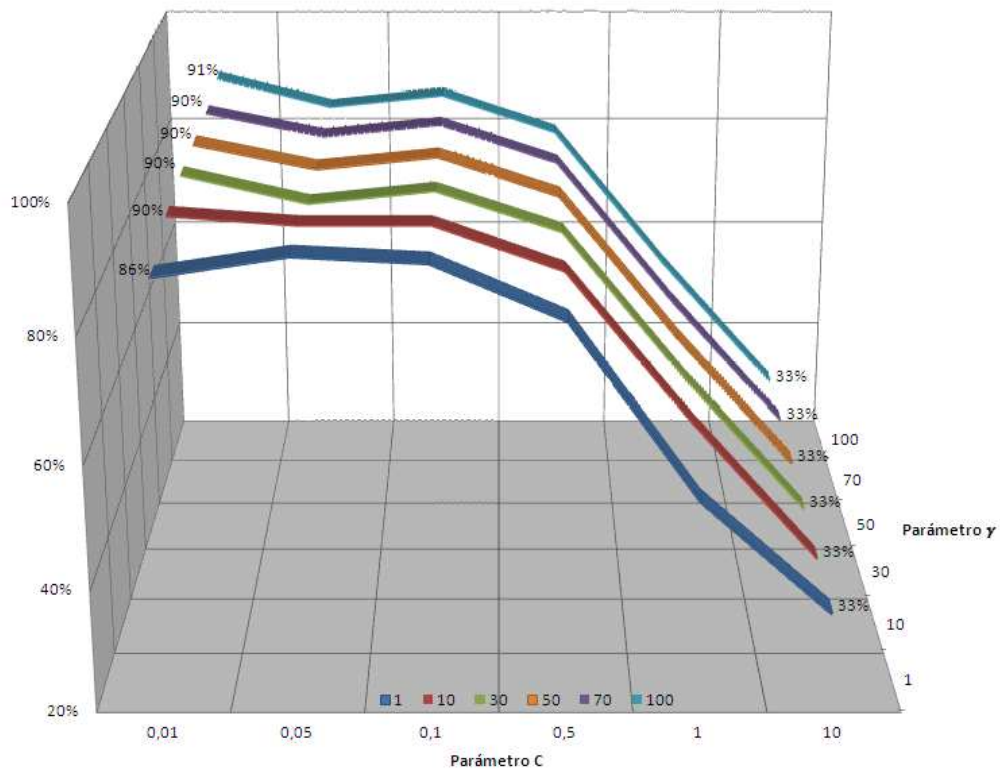


Figura 3.8 – Resultados de las configuraciones para las MVS.
Elaborado por: Jairo Cervantes

Este porcentaje permite determinar las configuraciones que alcanzan mejores resultados, los resultados obtenidos para las configuraciones propuestas se encuentran en la tabla 3.17 (en el Anexo E se presentan los resultados de todas las configuraciones propuestas).

Los resultados señalan que con la configuración 31 obtiene el 91% de GADM clasificados correctamente. Dicha configuración se refiere a un parámetro de regularización C igual a 100 y un parámetro γ de 0,01. A continuación se presentan los resultados de varias configuraciones generadas.

Tabla 3.17- Resultado de varias configuraciones propuestas

Configuración	C	γ	Casos clasificados correctamente					Total
			A	B	C	D	E	
1	1	0,01	96%	95%	83%	81%	40%	86%
2	1	0,05	98%	94%	86%	84%	67%	90%
7	10	0,01	94%	95%	86%	89%	60%	90%
8	10	0,05	90%	92%	86%	87%	73%	88%
13	30	0,01	94%	94%	86%	87%	80%	90%
14	30	0,05	92%	86%	86%	84%	67%	85%
19	50	0,01	96%	91%	90%	89%	67%	90%
20	50	0,05	92%	86%	86%	84%	67%	85%
25	70	0,01	98%	91%	93%	87%	67%	90%
26	70	0,05	92%	86%	86%	84%	68%	85%
31	100	0,01	98%	89%	93%	92%	67%	91%
32	100	0,05	92%	86%	86%	84%	67%	85%

Elaborado por: Jairo Cervantes

Los resultados de la mejor configuración (31) seleccionada se presentan a continuación.

En la tabla 3.18 se presenta la información de los GADM escogidos como vectores de soporte para obtener la primera MVS como función de clasificación entre los grupos A y B. El modelo genera 16 vectores de soporte, 8 son GADM del grupo A y 8 son GADM del grupo B.

Tabla 3.18- Vectores de soporte para las calificaciones A – B

Vectores de soporte	
A	B
Urcuquí	Balsas
Alausí	Biblián
Marcabeli	Tosagua
Quijos	Cañar
Simón Bolívar	Pimampiro
Guaranda	San Fernando
Portovelo	Pedro Carbo
Lago Agrio	Lomas de Sargentillo

Elaborado por: Jairo Cervantes

La figura 3.9 muestra la dispersión entre los grupos A y B, donde se puede observar que existen 2 vectores de soporte (Alausí y Pimampiro) que presentan características similares en sus indicadores de gestión administrativa y financiera.

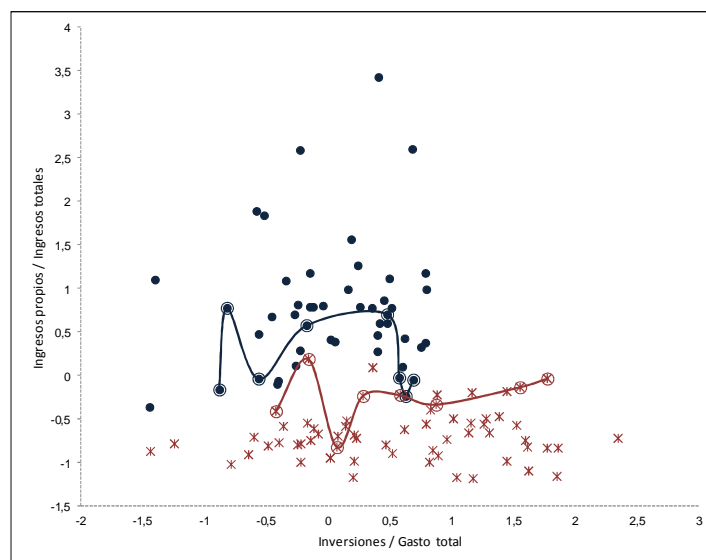


Figura 3.9 – Solución gráfica a la clasificación de los grupos A y B. Los puntos (●) en azul representan al grupo A y los puntos (*) en rojo al grupo B. Los puntos en círculos representan los vectores de soporte.

Elaborado por: Jairo Cervantes

En la tabla 3.19, se presenta la información de los GADM escogidos como vectores de soporte para obtener la segunda MVS como función de clasificación entre los grupos A y C. El modelo genera 12 vectores de soporte, 8 son GADM del grupo A y 4 son GADM del grupo C.

Tabla 3.19- Vectores de soporte para las calificaciones A – C

Vectores de soporte	
A	C
Pedro Vicente M	Quinsaloma
Isidro Ayora	Las Naves
Puerto Quito	Píllaro
Guaranda	Girón
Orellana	
Cumandá	
Gualaceo	
Catamayo	

Elaborado por: Jairo Cervantes

La figura 3.10 muestra la dispersión entre los grupos A y C, donde se puede observar que no existen vectores de soporte que presenten características similares en sus indicadores de gestión administrativa y financiera.

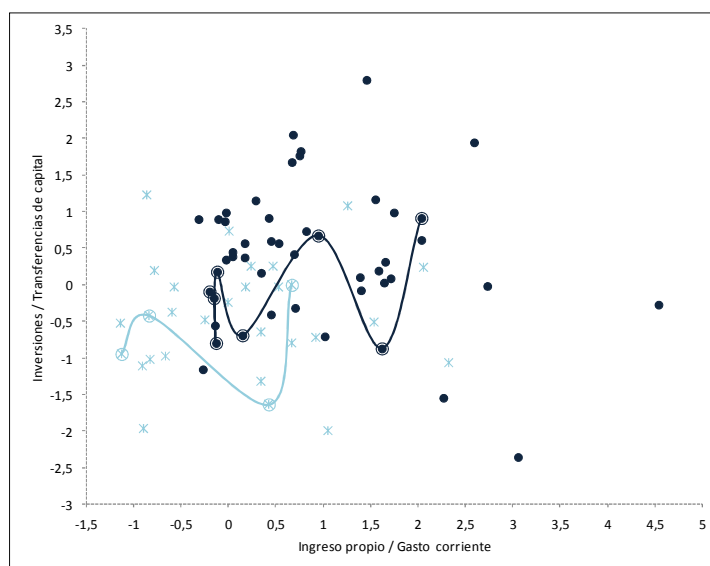


Figura 3.10 – Solución gráfica a la clasificación de los grupos A y C. Los puntos (●) en azul representan al grupo A y los puntos (*) en celeste al grupo C. Los puntos en círculos representan los vectores de soporte.

Elaborado por: Jairo Cervantes

En la tabla 3.20, se presenta la información de los GADM escogidos como vectores de soporte para obtener la tercera MVS como función de clasificación entre los grupos A y D. El modelo genera 10 vectores de soporte, 4 son GADM del grupo A y 6 son GADM del grupo C.

Tabla 3.20- Vectores de soporte para las calificaciones A – D

Vectores de soporte	
A	D
Quero	Echeandía
El Guabo	Sigsig
Manta	Macara
Durán	Pastaza
	El Carmen
	Milagro

Elaborado por: Jairo Cervantes

La figura 3.11 muestra la dispersión entre los grupos A y D, donde se puede observar que no existen vectores de soporte que presenten características similares en sus indicadores de gestión administrativa y financiera.

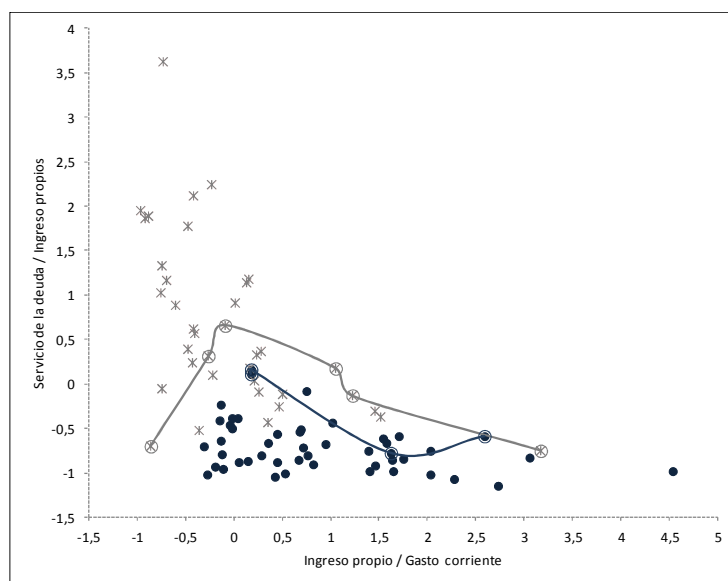


Figura 3.11 – Solución gráfica a la clasificación de los grupos A y D. Los puntos (●) en azul representan al grupo A y los puntos (*) en gris al grupo D. Los puntos en círculos representan los vectores de soporte.

Elaborado por: Jairo Cervantes

En la tabla 3.21 se presenta la información de los GADM escogidos como vectores de soporte para obtener la cuarta MVS como función de clasificación entre los grupos A y E. El modelo genera 6 vectores de soporte, 3 son GADM del grupo A y 3 son GADM del grupo E.

Tabla 3.21- Vectores de soporte para las calificaciones A – E

Vectores de soporte	
A	E
Simón Bolívar	Flavio Alfaro
Puerto Quito	24 De Mayo
Guaranda	Bolívar (Manabí)

Elaborado por: Jairo Cervantes

La figura 3.12 muestra la dispersión entre los grupos A y E, donde se puede observar que no existen vectores de soporte que presenten características similares en sus indicadores de gestión administrativa y financiera. También se observa que los vectores de soporte generan una aceptable frontera de separación entre los dos grupos

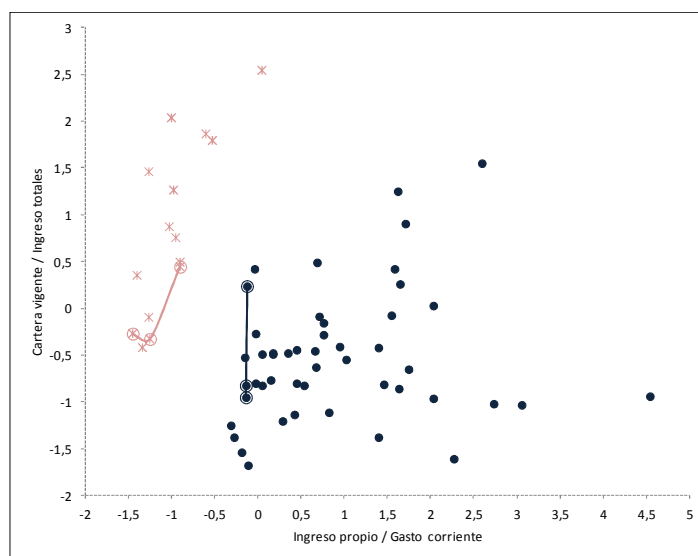


Figura 3.12 – Solución gráfica a la clasificación de los grupos A y E. Los puntos (●) en azul representan al grupo A y los puntos (*) en rosado al grupo E. Los puntos en círculos representan los vectores de soporte.

Elaborado por: Jairo Cervantes

En la tabla 3.22 se presenta la información de los GADM escogidos como vectores de soporte para obtener la quinta MVS como función de clasificación entre los grupos B y C. El modelo genera 10 vectores de soporte, 6 son GADM del grupo B y 4 son GADM del grupo C.

Tabla 3.22- Vectores de soporte para las calificaciones B – C

Vectores de soporte	
B	C
Pujilí	Suscal
Pangua	Píllaro
Junín	Las Naves
Tosagua	Quinsaloma
Baba	
Rocafuerte	

Elaborado por: Jairo Cervantes

La figura 3.13 muestra la dispersión entre los grupos B y C, donde se puede observar que no existen vectores de soporte que presenten características similares en sus indicadores de gestión administrativa y financiera. También se observa que los vectores de soporte generan una aceptable frontera de separación entre los dos grupos.

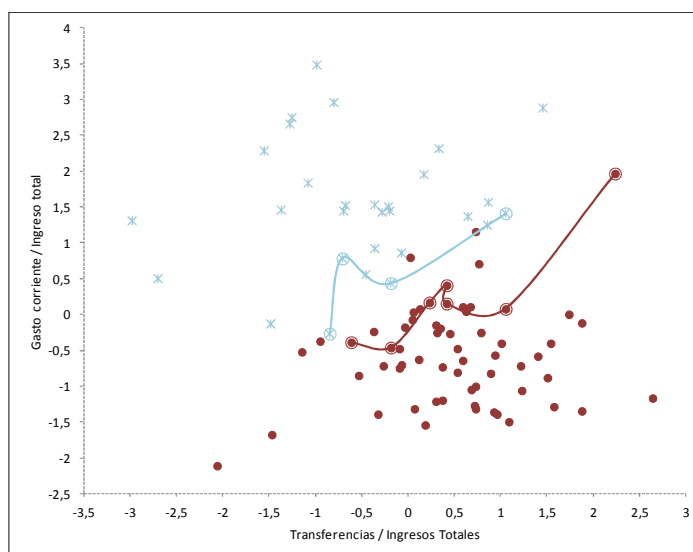


Figura 3.13 – Solución gráfica a la clasificación de los grupos B y C. Los puntos (●) en rojo representan al grupo B y los puntos (*) en celeste al grupo C. Los puntos en círculos representan los vectores de soporte.

Elaborado por: Jairo Cervantes

En la tabla 3.23 se presenta la información de los GADM escogidos como vectores de soporte para obtener la sexta MVS como función de clasificación entre los grupos B y D. El modelo genera 15 vectores de soporte, 7 son GADM del grupo B y 8 son GADM del grupo D.

Tabla 3.23- Vectores de soporte para las calificaciones B - D

Vectores de soporte	
B	D
Tosagua	Sigsig
Colimes	Guano
Mera	Ventanas
Deleg	Bolívar (Carchi)
Limón Indanza	Pallatanga
Rocafuerte	Guamote
San Juan Bosco	Echeandía
	Tena

Elaborado por: Jairo Cervantes

La figura 3.14 muestra la dispersión entre los grupos B y D, donde se puede observar que no existen vectores de soporte que presenten características similares en sus indicadores de gestión administrativa y financiera.

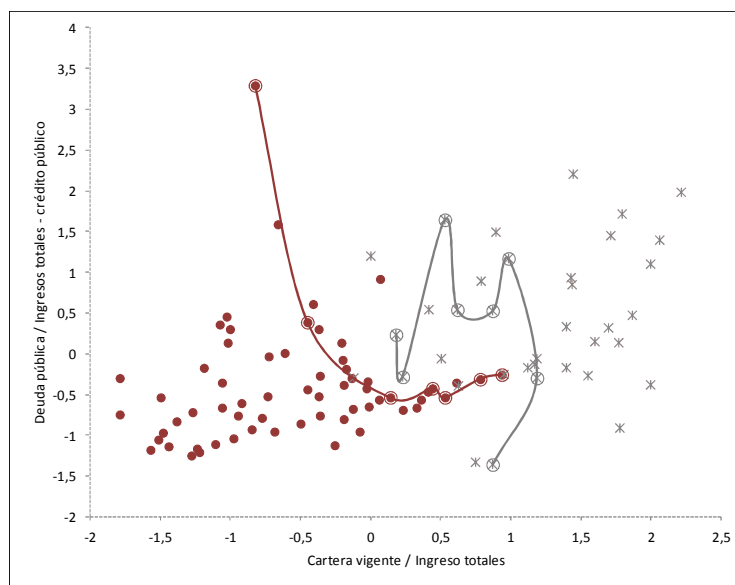


Figura 3.14 – Solución gráfica a la clasificación de los grupos B y D. Los puntos (●) en rojo representan al grupo B y los puntos (*) en gris al grupo D. Los puntos en círculos representan los vectores de soporte.

Elaborado por: Jairo Cervantes

En la tabla 3.24 se presenta la información de los GADM escogidos como vectores de soporte para obtener la séptima MVS como función de clasificación

entre los grupos B y E. El modelo genera 9 vectores de soporte, 5 son GADM del grupo B y 4 son GADM del grupo E.

Tabla 3.24- Vectores de soporte para las calificaciones B – E

Vectores de soporte	
B	E
Junín	24 De Mayo
Tosagua	Flavio Alfaro
Biblián	Bolívar (Manabí)
Limón Indanza	Paján
Rocafuerte	

Elaborado por: Jairo Cervantes

La figura 3.15 muestra la dispersión entre los grupos B y E, donde se puede observar que existen 2 vectores de soporte (Limón Indanza y Bolívar (Manabí)) que presentan características similares en sus indicadores de gestión administrativa y financiera.

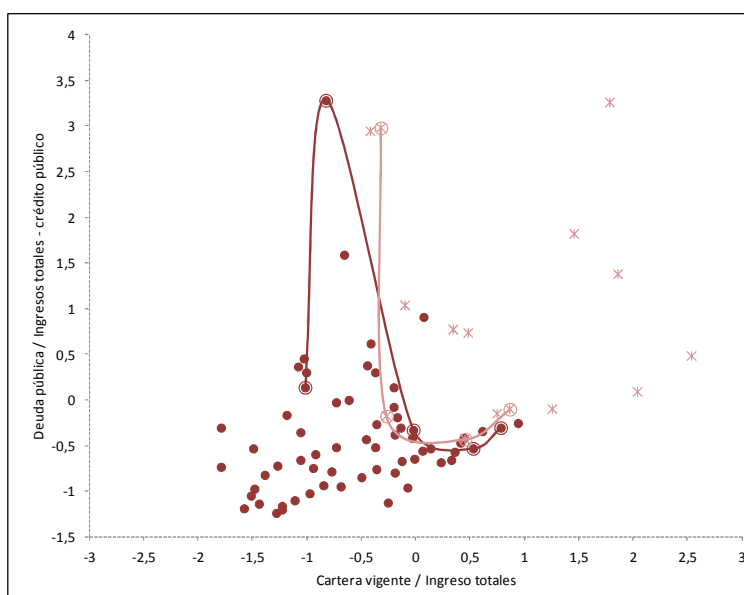


Figura 3.15 – Solución gráfica a la clasificación de los grupos B y E. Los puntos (●) en rojo representan al grupo B y los puntos (*) en rosado al grupo E. Los puntos en círculos representan los vectores de soporte.

Elaborado por: Jairo Cervantes

En la tabla 3.25 se presenta la información de los GADM escogidos como vectores de soporte para obtener la octava MVS como función de clasificación

entre los grupos C y D. El modelo genera 9 vectores de soporte, 4 son GADM del grupo C y 5 son GADM del grupo D.

Tabla 3.25- Vectores de soporte para las calificaciones C – D

Vectores de soporte	
C	D
Las Naves	Guano
Suscal	Ventanas
El Triunfo	Echeandía
Atacames	Milagro
	Sucúa

Elaborado por: Jairo Cervantes

La figura 3.16 muestra la dispersión entre los grupos C y D, donde se puede observar que existen 2 vectores de soporte (Suscal y Guano) que presentan características similares en sus indicadores de gestión administrativa y financiera.

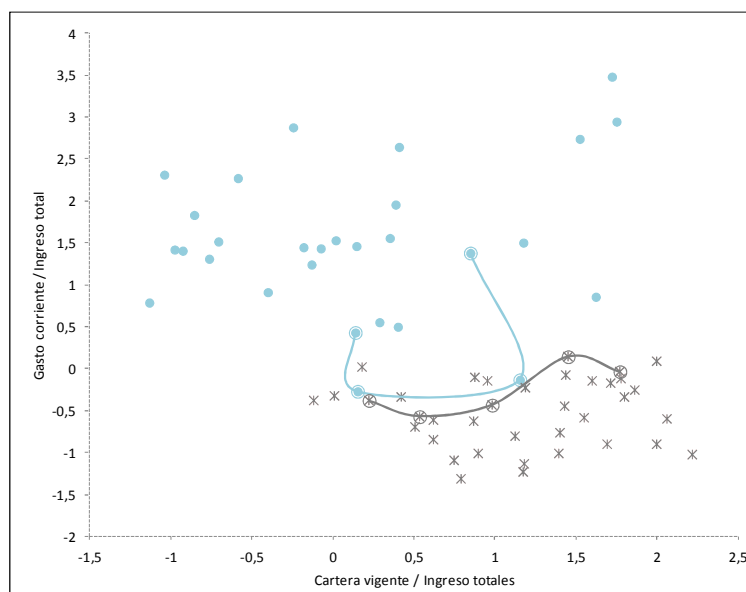


Figura 3.16 – Solución gráfica a la clasificación de los grupos C y D. Los puntos (●) en celeste representan al grupo C y los puntos (*) en gris al grupo D. Los puntos en círculos representan los vectores de soporte.

Elaborado por: Jairo Cervantes

En la tabla 3.26 se presenta la información de los GADM escogidos como vectores de soporte para obtener la novena MVS como función de clasificación

entre los grupos C y E. El modelo genera 9 vectores de soporte, 5 son GADM del grupo C y 4 son GADM del grupo E.

Tabla 3.26- Vectores de soporte para las calificaciones C – E

Vectores de soporte	
C	E
Quinsaloma	24 De Mayo
Quinindé	Flavio Alfaro
Las Naves	Bolívar (Manabí)
Suscal	Santa Rosa
Naranjal	

Elaborado por: Jairo Cervantes

La figura 3.17 muestra la dispersión entre los grupos C y E, donde se puede observar que no existen vectores de soporte que presenten características similares en sus indicadores de gestión administrativa y financiera. También se observa que los vectores de soporte generan una aceptable frontera de separación entre los dos grupos.

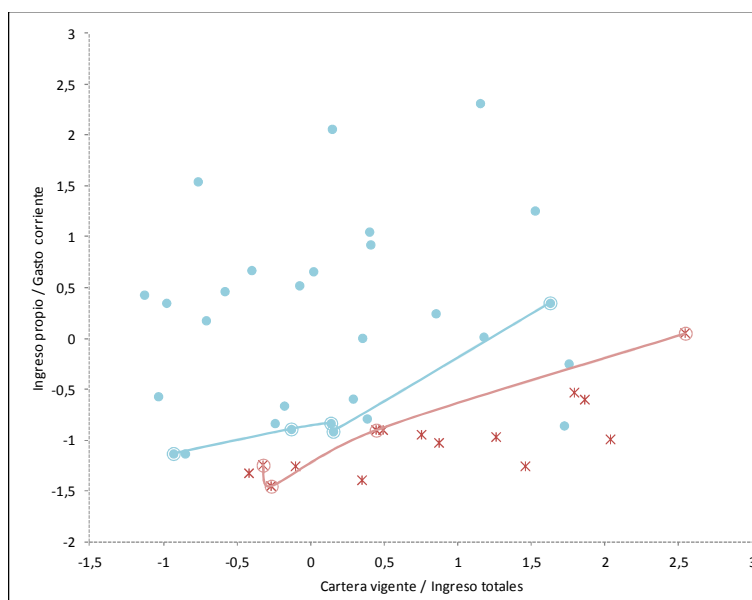


Figura 3.17 – Solución gráfica a la clasificación de los grupos C y E. Los puntos (●) en celeste representan al grupo C y los puntos (*) en rosado al grupo E. Los puntos en círculos representan los vectores de soporte.

Elaborado por: Jairo Cervantes

En la tabla 3.27 se presenta la información de los GADM escogidos como vectores de soporte para obtener la décima MVS como función de clasificación entre los grupos D y E. El modelo genera 8 vectores de soporte, 4 son GADM del grupo D y 4 son GADM del grupo E.

Tabla 3.27- Vectores de soporte para las calificaciones D – E

Vectores de soporte	
D	E
Puebloviejo	Bolívar (Manabí)
Bolívar (Carchi)	Paján
Nangaritzza	Chilla
San Miguel	Naranjito

Elaborado por: Jairo Cervantes

La figura 3.18 muestra la dispersión entre los grupos D y E, donde se puede observar que no existen vectores de soporte que presenten características similares en sus indicadores de gestión administrativa y financiera. También se observa que los vectores de soporte generan una aceptable frontera de separación entre los dos grupos.

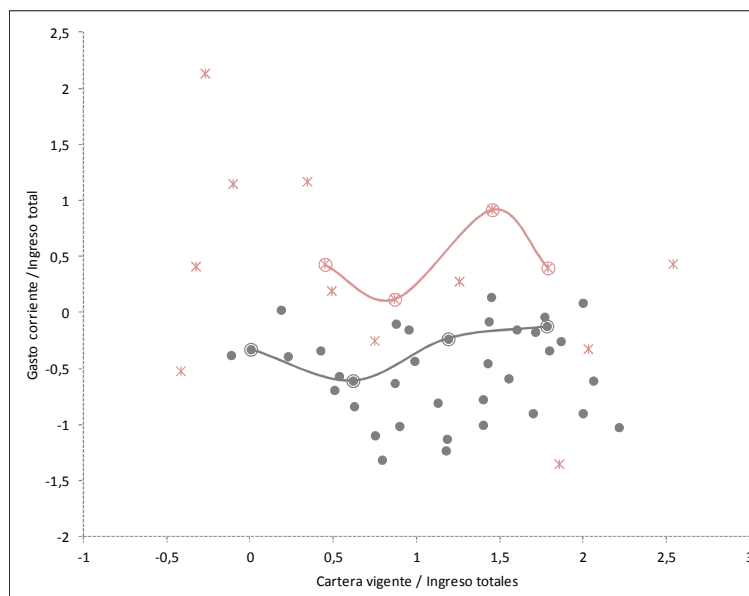


Figura 3.18 – Solución gráfica a la clasificación de los grupos D y E. Los puntos (●) en gris representan al grupo D y los puntos (✱) en rosado al grupo E. Los puntos en círculos representan los vectores de soporte.

Elaborado por: Jairo Cervantes

En la figura 3.19, se representa los errores de clasificación, se observa en la figura que los GADM se encuentran divididos en 5 grupos y cada uno representado por un color. Los GADM clasificados correctamente son representados en forma de cruces y los clasificados incorrectamente son representados con cuadrados. En los grupos C y D existen 5 GADM clasificados incorrectamente. En los grupos C y D existen 5 GADM clasificados incorrectamente. En el grupo C todos los casos mal clasificados son del grupo E y en el grupo D es un caso del grupo A y 4 del grupo B.

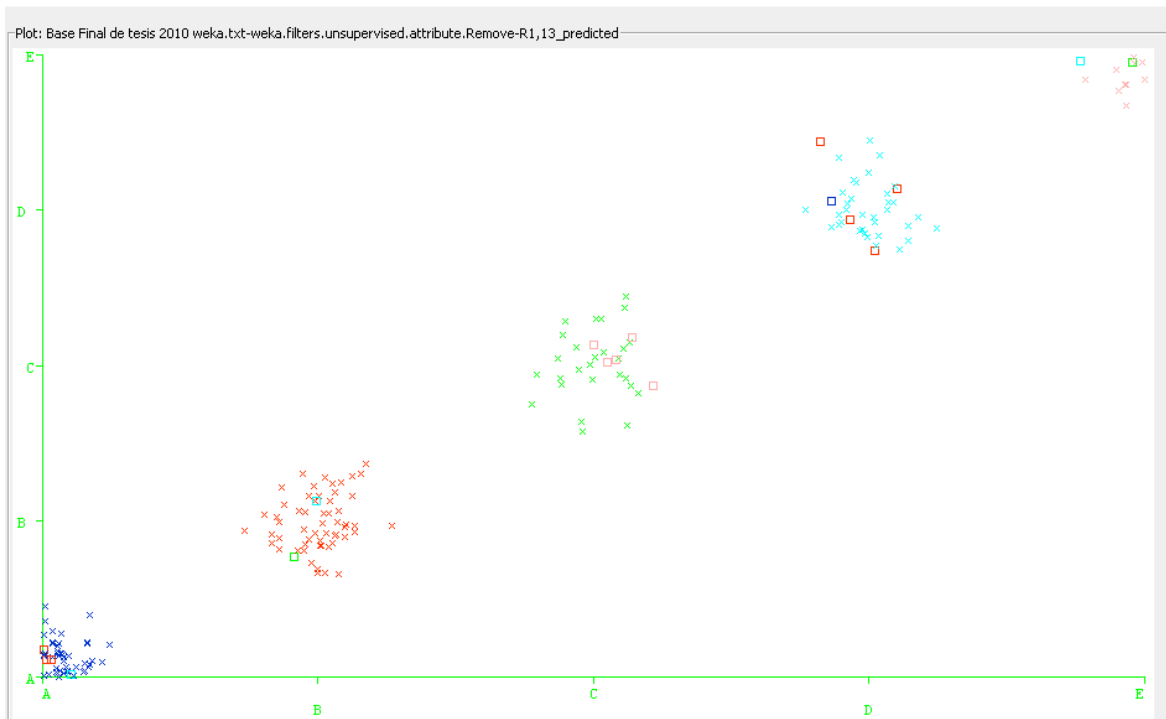


Figura 3.19 – Gráfico con errores de clasificación.

Elaborado por: Jairo Cervantes

En el Anexo F se presenta los resultados para 12 configuraciones propuestas en las máquinas de vectores de soporte con función de base radial.

4 RESULTADOS Y DISCUSIONES

Una vez aplicada la teoría que debe seguirse para desarrollar un modelo de análisis discriminante y de máquinas de vectores de soporte, se procede a discutir los resultados obtenidos. En este capítulo se hace una comparación entre los resultados obtenidos, comparación puramente técnica y estadística

Para determinar la precisión de asignación de la calificación de las metodologías propuestas en el presente proyecto, se analiza la curva ROC y la matriz de confusión como medidas de capacidad de predicción.

La curva ROC (curva Característica de Operación del Receptor) estudia el comportamiento de una función de clasificación entre grupos, ofrece una representación gráfica de la sensibilidad frente a la especificidad de una herramienta, el área existente bajo la curva se considera significativa si está por encima del valor 0,5 del área verdadera. La gráfica nos proporciona en el eje de abscisas la especificidad (proporción de falsos positivos) y en el eje de ordenadas la sensibilidad (proporción de aciertos positivos). El valor del área bajo la curva puede ir de 0 a 1. Cuanto más se acerque a 1 (en caso de ser 1 tendríamos un 100% de aciertos positivos y 0% de falsos positivos) mayor sensibilidad y menor especificidad, esta sería una curva perfecta. Una mala curva es cuando el valor es menor de 0,5 (50% de aciertos positivos y 50% de falsos positivos) o se acerca a 0% (todos falsos positivos). Normalmente se considera adecuada a la curva ROC cuando tiene un área mayor de 0,5. La figura 4.1 representa ejemplos de la curva ROC para diferentes resultados.

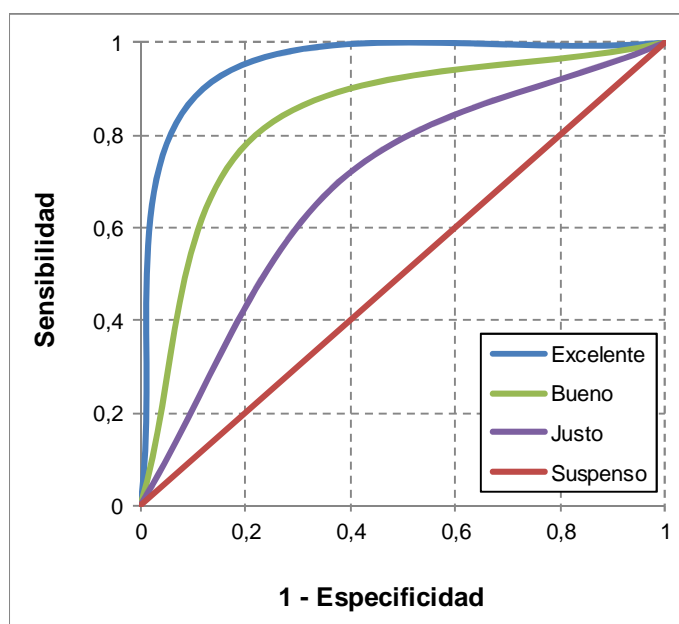


Figura 4.1 – Curva ROC.
Elaborado por: Jairo Cervantes

La matriz de confusión, es una herramienta que permite analizar la cantidad de casos correctamente clasificados por el modelo. Cada columna de la matriz representa el número de predicciones de cada clase, mientras que cada fila representa a los casos en la clase real. Si hay k categorías posibles, es una matriz de $k \times k$ donde las filas denotan la verdadera categoría y las columnas indican la categoría a la que se asigna. Se evalúa el comportamiento de tales sistemas por medio de los datos en la matriz. Aquellos valores en la diagonal de la matriz son clasificaciones correctas. Los valores fuera de la diagonal son errores de clasificación y representan confusión.

4.1 PRUEBAS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS DEL ANÁLISIS DISCRIMINANTE

La tabla 4.1 resume la capacidad predictiva de las funciones discriminantes. Los GADM del grupo A son correctamente clasificados en el 83,3% de los casos; los GADM del grupo B en el 92,1%; los GADM del grupo C en el 96,6%; los GADM del grupo D en el 94,6% y los GADM del grupo E en el 86,7%. En general, las

funciones discriminantes clasifican correctamente en promedio el 90,6% de los GADM, por lo tanto se puede esperar que las funciones discriminantes, clasifiquen correctamente el 90,6% de los futuros casos nuevos que se intenten clasificar.

Tabla 4.1- Resultado de la clasificación del análisis discriminante

Calificación	Grupo Pronosticado					Total	
	A	B	C	D	E		
Real	A	40	4	3	1	0	48
	B	3	58	0	2	0	63
	C	0	1	28	0	0	29
	D	1	0	0	35	1	37
	E	0	1	1	0	13	15
%	A	83,3	8,3	6,3	2,1	0	100
	B	4,8	92,1	0	3,2	0	100
	C	0	3,4	96,6	0	0	100
	D	2,7	0	0	94,6	2,7	100
	E	0	6,7	6,7	0	86,7	100

Elaborado por: Jairo Cervantes

La figura 4.2 representa la curva ROC del análisis discriminante. No está cercana a la diagonal principal, por lo que se puede afirmar que el método que se está empleando tiene una calidad de predicción muy buena.

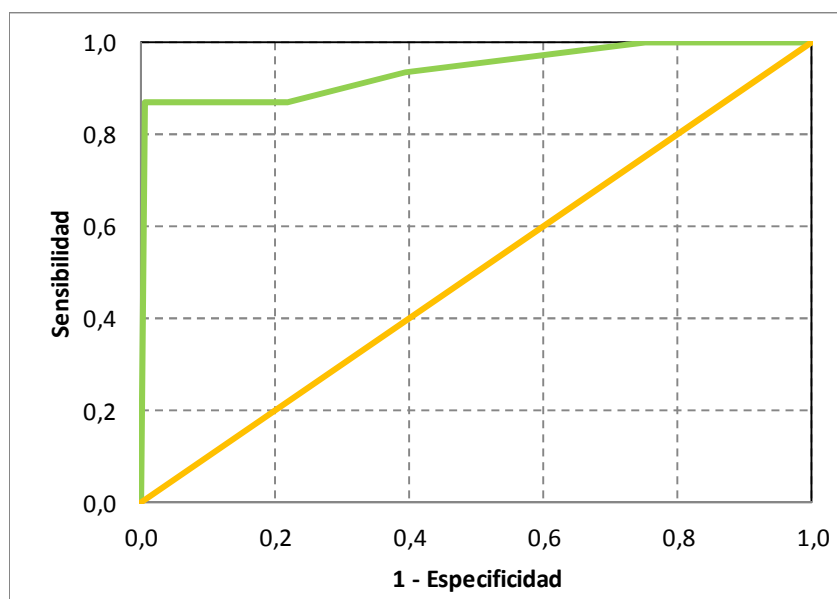


Figura 4.2 – Curva ROC para el análisis discriminante

Elaborado por: Jairo Cervantes

En la tabla 4.2 se presenta los resultados de la curva ROC, el área bajo la curva es de 0,939 que difiere de 0,5 que es el mínimo exigible para un método de predicción. El error estándar es de 0,042, valor que multiplicado por 1,96 (para una confianza del 95%) y sumado y restado de 0,939 nos da el intervalo de confianza que figura al final y que da de límite inferior 0,857 y de límite superior 1. Como el intervalo no contiene al valor 0,5 se puede afirmar que el área bajo la curva ROC de la aplicación del análisis discriminante, es significativamente mayor que lo mínimo exigible.

Tabla 4.2- Área bajo la curva

Área	Error Estándar	Sig. Asintótica	Intervalo de confianza al 95%	
			Límite inferior	Límite superior
0,939	0,042	0,00	0,857	1,00

Elaborado por: Jairo Cervantes

4.2 PRUEBAS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS DE LAS MÁQUINAS DE VECTORES DE SOPORTE

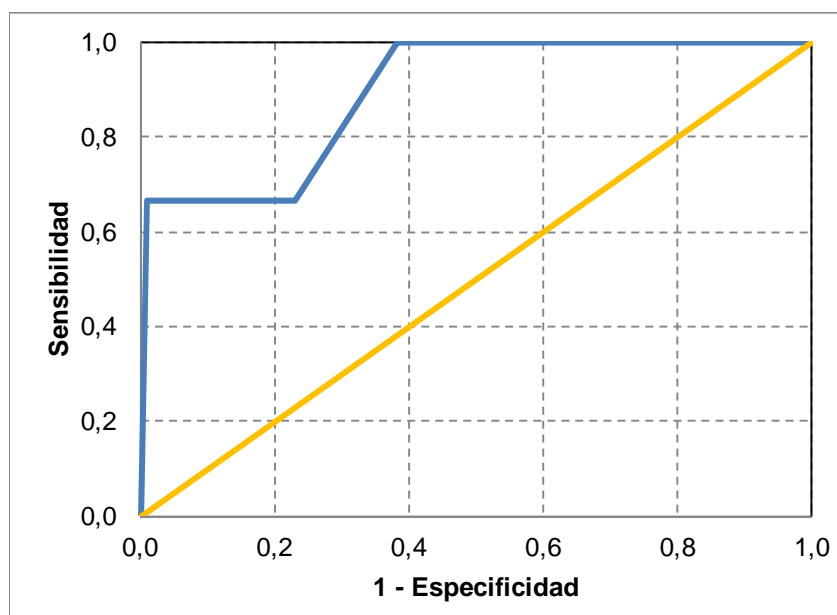
La matriz de confusión (tabla 4.3) obtenida para las máquinas de vectores de soporte presenta los siguientes resultados. Los GADM del grupo A son correctamente clasificados en el 97,9% de los casos; los GADM del grupo B en el 88,9%; los GADM del grupo C en el 93,1%; los GADM del grupo D en el 91,9% y los GADM del grupo E en el 66,7%. En general, las máquinas de vectores de soporte clasifican correctamente en promedio el 90,6% de los GADM, se puede esperar que los hiperplanos óptimos, clasifiquen correctamente el 90,6% de los futuros casos nuevos que se intenten clasificar.

Tabla 4.3- Resultado de la clasificación de las máquinas de vectores de soporte

Calificación		Grupo Pronosticado					Total
		A	B	C	D	E	
Real	A	47	0	0	1	0	48
	B	3	56	0	4	0	63
	C	0	1	27	0	1	29
	D	1	1	0	34	1	37
	E	0	0	5	0	10	15
%	A	97,9	0	0	2,1	0	100
	B	4,8	88,9	0	6,3	0	100
	C	0	3,4	93,1	0	3,4	100
	D	2,7	2,7	0	91,9	2,7	100
	E	0	0	33,3	0	66,7	100

Elaborado por: Jairo Cervantes

La figura 4.3 representa la curva ROC de las máquinas de vectores de soporte. No está cercana a la diagonal principal, por lo que se puede afirmar que el método que se está empleando tiene una calidad de predicción muy buena.

**Figura 4.3** – Curva ROC para las máquinas de vectores de soporte.

Elaborado por: Jairo Cervantes

En la tabla 4.4 se presenta los resultados de la curva ROC, el área bajo la curva es de 0,894 que difiere de 0,5 que es el mínimo exigible para un método de predicción. El error estándar es de 0,039, valor que multiplicado por 1,96 (para

una confianza del 95%) y sumado y restado de 0,894 nos da el intervalo de confianza que figura al final y que da de límite inferior 0,82 y de límite superior 0,97. Como el intervalo no contiene al valor 0,5 se puede afirmar que el área bajo la curva ROC de la aplicación de las máquinas de vectores de soporte, es significativamente mayor que lo mínimo exigible 0,5.

Tabla 4.4- Área bajo la curva

Área	Error Estándar	Sig. Asintótica	Intervalo de confianza al 95%	
			Límite inferior	Límite superior
0,894	0,039	0,000	0,816	0,971

Elaborado por: Jairo Cervantes

4.3 ANÁLISIS COMPARATIVO DE LOS RESULTADOS DEL ANÁLISIS DISCRIMINANTE Y DE LAS MÁQUINAS DE VECTORES DE SOPORTE.

Comparando el funcionamiento del análisis discriminante con las máquinas de vectores de soportes, se determina que ambas predicen adecuadamente la calificación de riesgo de los GADM.

La figura 4.4 representa la curva ROC del análisis discriminante y de las máquinas de vectores de soporte, se puede observar que las curva del análisis discriminante (AD) está más cerca de la esquina superior izquierda del diagrama, obteniendo la mayor área bajo la curva y por lo tanto mayor la discriminación en relación con la curva de las máquinas de vectores de soporte.

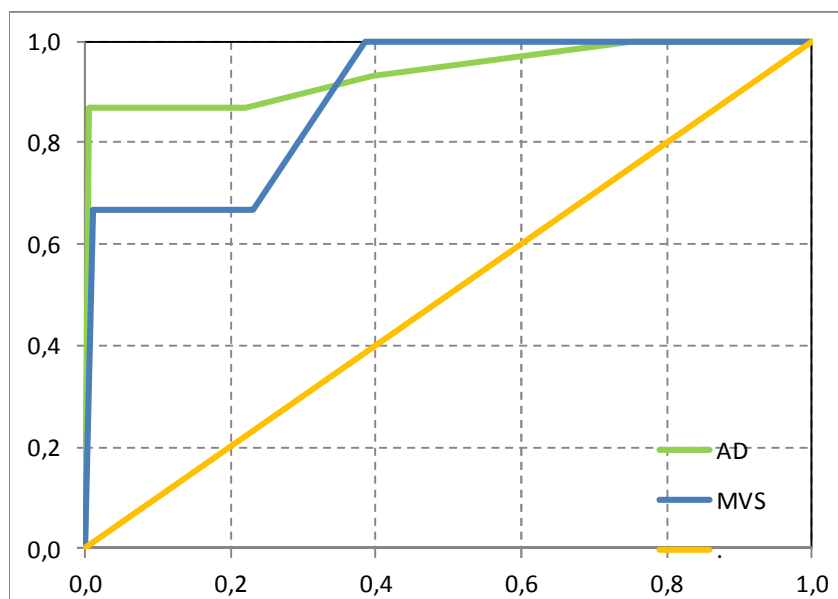


Figura 4.4 – Curva ROC para el análisis discriminante y las máquinas de vectores de soporte.

Elaborado por: Jairo Cervantes

Los promedios de efectividad de las pruebas anteriores son buenos, sin embargo si se compara por ejemplo los resultados de las tablas de confusión, se observa que el análisis discriminante tiene menos errores de clasificación en los GADM del grupo C y las máquinas de vectores de soporte tiene menos errores de clasificación en los GADM del grupo A.

La predicción de la calificación de riesgo B, C y D dada por las máquinas de vectores y el análisis discriminante tienen resultados muy similares. En cambio se comportan de manera distinta las dos metodologías aplicadas en la predicción de las calificaciones A y D.

Las diferentes predicciones dadas por los dos modelos, sirven para realizar un enfoque de su utilidad en el cálculo del monto de provisión que realiza el Banco del Estado, tomando como base la normativa de la Superintendencia de Bancos y Seguros.

La determinación del monto de provisiones son de especial importancia en las instituciones financieras, donde la cartera de créditos es el principal activo, de la

cartera de créditos no se tiene la seguridad absoluta de recuperarla en su totalidad, por tal motivo no debe ser considerada en el estado de situación como un activo completo. De ahí, la calidad de estimar las provisiones de una manera adecuada de modo que no sean insuficientes tal que sobrestimen el valor de los activos, y que no sean excesivas tal que afecten a la rentabilidad de la institución.

La Superintendencia de Bancos y Seguros dispone a las instituciones financieras, realizar la medición adecuada de las provisiones a través de la cuantificación de 3 factores dados en la Resolución N°. JB-2011-1897 de 15 de marzo del 2011. A continuación se describe un extracto de las disposiciones que deben acatar las instituciones del sistema financiero ecuatoriano para la medición de provisiones.

La Superintendencia de Bancos y Seguros dispone a las instituciones financieras en lo referente a crédito de desarrollo de inversión pública que en la evaluación de los sujetos de crédito de desarrollo, se deberá considerar, sin excepción, los siguientes factores para la calificación de la cartera crediticia y contingentes: capacidad de pago, experiencia de pago y riesgo de entorno económico. A continuación se presenta un resumen de los factores de riesgo.

Capacidad de pago y situación financiera del deudor: El objetivo de la evaluación consiste en identificar la estabilidad y predictibilidad de la fuente primaria (capacidad de pago) de reembolso del crédito a través de la evaluación del flujo de caja proyectado y las razones financieras claves, del deudor y/o sus codeudores, teniendo en cuenta las características de la actividad productiva y del crédito, de conformidad con información financiera actualizada, documentada, de calidad y oportuna. El factor capacidad de pago tiene una ponderación máxima del 55%.

Experiencia de pago: El objetivo de este aspecto es evaluar el desempeño de pago del deudor, la voluntad de pago y su carácter o actitud frente a sus deudas, evaluadas a través de su historial de pago en la propia entidad financiera pública (morosidad, comportamiento de pagos e identificación de las formas de pago de

las operaciones abonadas y/o canceladas) y la información crediticia obtenida de los burós de información crediticia. El factor riesgo de experiencia de pago tiene una ponderación máxima del 35%.

Riesgo de entorno económico: El objetivo de este aspecto es establecer y evaluar los principales factores exógenos al deudor que podrían impactar en su capacidad financiera para cumplir con sus obligaciones que se analizará mediante una evaluación del mercado, la industria y el sector económico inherentes al giro del negocio del deudor, que puede estar determinada por una notación que identifique el riesgo del sector establecida por la propia institución financiera pública o a través de fuentes especializadas de información, debidamente aprobadas por el directorio. El factor riesgo de entorno económico tiene una ponderación máxima de 10%.

El análisis en conjunto, de los tres factores permite calificar la cartera crediticia de un deudor de una institución financiera, otorgando a las diferentes categorías de riesgo un porcentaje mínimo y máximo de provisión que a continuación se detallan:

Tabla 4.5- Categorías de provisión

Total	Categorías	Porcentaje de provisión	
		Mínimo	Máximo
99%	A1	0,50%	0,50%
95%	A2	0,51%	0,99%
90%	A3	1%	4,99%
85%	B1	5%	9,99%
80%	B2	10%	19,99%
75%	C1	20%	39,99%
70%	C2	40%	59,99%
65%	D	60%	99,99%
60%	E	100%”	

Fuente: Superintendencia de Bancos y Seguros

Elaborado por: Jairo Cervantes

Dado estos antecedentes y considerando aquellos GADM mal clasificados en cada una de los modelos propuestos, se procede a calificar la cartera crediticia y el monto de provisiones que debe hacer el Banco del Estado para dichas entidades con fecha de corte al 31 de diciembre del 2011.

Para determinar la capacidad de pago y situación financiera del deudor, se utiliza la calificación de riesgo determinada por el análisis discriminante y las máquinas de vectores de soporte, asignando a cada grupo la siguiente ponderación.

Tabla 4.6- Ponderación de riesgo

Capacidad de pago	
A	55%
B	52%
C	49%
D	46%
E	43%

Elaborado por: Jairo Cervantes

Las ponderaciones de experiencia de pago y riesgo de entorno económico de las entidades se obtuvieron del Reporte R04, generado por el Banco del Estado para el Organismo de Control al 31 de diciembre del 2011.

Para el análisis discriminante la tabla 4.7 presenta la información de los 18 GADM que fueron calificados incorrectamente utilizando las funciones discriminantes. En la tabla se considera la calificación real de cada cliente con sus respectivos valores en cada factor de riesgo y la cartera vigente al 31 de diciembre del 2011. La calificación y el porcentaje de provisión se determinan atendiendo el procedimiento establecido por el Organismo de Control. La última columna de la tabla presenta el monto de provisión real de cada GADM.

Tabla 4.7- Calificación de Cartera al 31-Dic-2011 (Caso inicial análisis discriminante)

Gobierno Autónomo Descentralizado Municipal	Calificación Real	Capacidad de Pago real	Riesgo de entorno económico	Experiencia de pago	TOTAL	Calificación de cartera	% de Provisión	Cartera	Monto de provisión
Alausí	A	55%	6%	35%	96%	A2	0,51%	599.412	3.057
Biblian	B	52%	6%	35%	93%	A3	1,0%	531.846	5.318
Bolívar (Manabí)	E	43%	6%	35%	84%	C1	20,0%	819.868	163.974
Cañar	B	52%	5%	35%	92%	A3	1,0%	539.751	5.398
Esmeraldas	A	55%	7%	35%	97%	A2	0,51%	0	0
Espindola	D	46%	5%	35%	86%	B2	10,0%	1.166.646	116.665
Guaranda	A	55%	5%	35%	95%	A2	0,51%	1.932.941	9.858
Isidro Ayora	A	55%	6%	35%	96%	A2	0,51%	221.055	1.127
Manta	A	55%	7%	35%	97%	A2	0,51%	16.737.416	85.361
Marcabelí	A	55%	7%	35%	97%	A2	0,51%	309.340	1.578
Mera	B	52%	7%	35%	94%	A3	1,0%	1.165.405	11.654
Milagro	D	46%	7%	35%	88%	B2	10,0%	4.390.082	439.008
Pedro Vicente M.	A	55%	7%	35%	97%	A2	0,51%	428.541	2.186
Rioverde	B	52%	6%	35%	93%	A3	1,0%	0	0
Rocafuerte	B	52%	7%	35%	94%	A3	1,0%	1.088.023	10.880
Urcuquí	A	55%	6%	35%	96%	A2	0,51%	295.106	1.505
Santa Rosa	E	43%	7%	35%	85%	B2	10,0%	2.837.849	283.785
Suscal	C	49%	5%	35%	89%	B2	10,0%	579.489	57.949

Fuente: Banco del Estado

Elaborado por: Jairo Cervantes

La tabla 4.8, presenta el monto de provisiones de los 18 GADM de la tabla anterior, la tabla considera la calificación obtenida con las funciones discriminantes para dichas entidades.

Comparando las tablas 4.7 y 4.8, se observa que el GADM de Alausí presenta una calificación real de A, con un porcentaje de provisión del 0,5% generando un monto de provisión de 3.057 dólares, utilizando la calificación asignada por las funciones discriminantes, el GADM de Alausí es calificado como B, con un porcentaje de provisión del 1% generando un monto de provisión de 5.994 dólares.

Observando la calificación real y la asignada por las funciones discriminantes del GADM de Bolívar presenta un cambio de calificación de E a B respectivamente, esta predicción de la calificación es muy representativa presentando una variación del porcentaje y monto de provisión del 20% (163.974 dólares) al 1%(8.199 dólares).

Al comparar la variación del monto de provisión generado por la calificación real y la asignada por las funciones discriminantes del GADM de Manta, existe un incremento de 85.361 a 1.673.742 dólares, incremento causado por el crecimiento del porcentaje de provisión obtenido con la calificación determinada con el análisis discriminante.

Las funciones discriminantes asignan una calificación de riesgo de A al GADM de Biblián, calificación que le permite alcanzar un puntaje del 55% en factor de capacidad de pago y una calificación de cartera de A2, produciendo una disminución del 1% al 0.51% en el porcentaje de provisión y una reducción del monto de provisión de 5.318 a 2.712 dólares.

El GADM de Suscal presenta una calificación real de C, con un porcentaje de provisión del 10% generando un monto de provisión de 57.949 dólares, utilizando la calificación asignada por las funciones discriminantes, el GADM de Suscal es

calificado como B, con un porcentaje de provisión del 1% generando un monto de provisión de 5.795 dólares.

Tabla 4.8- Calificación de Cartera al 31-Dic-2011 (Caso predicción análisis discriminante)

Gobierno Autónomo Descentralizado Municipal	Calificación Análisis Discriminante	Capacidad de Pago real	Total	Calificación de cartera	% de Provisión	Cartera	Monto de provisión
Alausí	B	52%	93%	A3	1,0%	599.412	5.994
Biblian	A	55%	96%	A2	0,51%	531.846	2.712
Bolívar (Manabí)	B	52%	93%	A3	1,0%	819.868	8.199
Cañar	A	55%	95%	A2	0,51%	539.751	2.753
Esmeraldas	C	49%	91%	A3	1,0%	0	0
Espindola	E	43%	83%	C1	20,0%	1.166.646	233.329
Guaranda	B	52%	92%	A3	1,0%	1.932.941	19.329
Isidro Ayora	C	49%	90%	B2	10,0%	221.055	22.106
Manta	D	46%	88%	B2	10,0%	16.737.416	1.673.742
Marcabelí	B	52%	94%	A3	1,0%	309.340	3.093
Mera	D	46%	88%	B2	10,0%	1.165.405	116.540
Milagro	A	55%	97%	A2	0,51%	4.390.082	22.389
Pedro Vicente M.	C	49%	91%	A3	1,0%	428.541	4.285
Rioverde	A	55%	96%	A2	0,51%	0	0
Rocafuerte	D	46%	88%	B2	10,0%	1.088.023	108.802
Urcuquí	B	52%	93%	A3	1,0%	295.106	2.951
Santa Rosa	C	49%	91%	A3	1,0%	2.837.849	28.378
Suscal	B	52%	92%	A3	1,0%	579.489	5.795

Fuente: Banco del Estado

Elaborado por: Jairo Cervantes

Para las máquinas de vectores de soporte la tabla 4.9 presenta la información de los 18 GADM que fueron calificados incorrectamente utilizando los hiperplanos óptimos. La tabla considera la calificación real de cada cliente con sus respectivos valores en cada factor de riesgo y la cartera vigente al 31 de diciembre del 2011. La calificación y el porcentaje de provisión se determinan atendiendo el procedimiento establecido por el Organismo de Control. La última columna de la tabla presenta el monto de provisión real de cada GADM.

Tabla 4.9- Calificación de Cartera al 31-Dic-2011 (Caso inicial máquinas de vectores de soporte)

Gobierno Autónomo Descentralizado Municipal	Calificación Real	Capacidad de Pago real	Riesgo de entorno económico	Experiencia de pago	Total	Calificación de cartera	% de Provisión	Cartera	Monto de provisión
24 De Mayo	E	43%	6%	35%	84%	C1	20,0%	1.289.305	257.861
Bolívar (Manabí)	E	43%	6%	35%	84%	C1	20,0%	819.868	163.974
Chilla	E	43%	5%	35%	83%	C1	20,0%	381.556	76.311
Flavio Alfaro	E	43%	6%	35%	84%	C1	20,0%	614.130	122.826
Guamote	D	46%	6%	35%	87%	B2	10,0%	537.900	53.790
Las Naves	C	49%	5%	35%	89%	B2	10,0%	239.857	23.986
Lomas de Sargentillo	B	52%	7%	35%	94%	A3	1,0%	568.782	5.688
Manta	A	55%	7%	35%	97%	A2	0,51%	16.737.416	85.361
Mera	B	52%	7%	35%	94%	A3	1,0%	1.165.405	11.654
Milagro	D	46%	7%	35%	88%	B2	10,0%	4.390.082	439.008
Naranjito	E	43%	6%	35%	84%	C1	20,0%	1.721.992	344.398
Puebloviejo	D	46%	7%	35%	88%	B2	10,0%	956.372	95.637
Rioverde	B	52%	6%	35%	93%	A3	1,0%	0	0
Rocafuerte	B	52%	7%	35%	94%	A3	1,0%	1.088.023	10.880
San Juan Bosco	B	52%	6%	35%	93%	A3	1,0%	701.044	7.010
Santa Clara	B	52%	6%	35%	93%	A3	1,0%	341.655	3.417
Suscal	C	49%	5%	35%	89%	B2	10,0%	579.489	57.949
Tosagua	B	52%	5%	35%	92%	A3	1,0%	1.920.543	19.205

Fuente: Banco del Estado

Elaborado por: Jairo Cervantes

La tabla 4.10, presenta el monto de provisiones de los 18 GADM de la tabla anterior, la tabla considera la calificación obtenida con los hiperplanos óptimos para dichas entidades.

Comparando las tablas 4.9 y 4.10, los hiperplanos óptimos asignan una calificación de riesgo de E al GADM de Pueblo Viejo, calificación que le permite alcanzar un puntaje del 43% en factor de capacidad de pago y una calificación de cartera de C1, produciendo un aumento del 10% al 20% en el porcentaje de provisión y un incremento del monto de provisión de 95.637 a 191.274 dólares.

Al comparar la variación del monto de provisión generado por la calificación real y la asignada por los hiperplanos óptimos del GADM de Las Naves, existe una disminución de 23.986 a 2.399 dólares, reducción causada por la disminución del porcentaje de provisión obtenido con la calificación establecida con las máquinas de vectores de soporte.

Observando la calificación real y la asignada por los hiperplanos óptimos del GADM de Manta presenta un cambio de calificación de A a D respectivamente, esta predicción de la calificación es muy representativa presentando una variación del porcentaje y monto de provisión del 0.51% (85.361 dólares) al 10% (1.673.742 dólares).

El GADM de Rocafuerte obtiene una calificación de cartera de A3, con un porcentaje de provisión del 1% generando un monto de provisión de 10.880 dólares, utilizando la calificación asignada por los hiperplanos óptimos, el GADM de Rocafuerte alcanza una calificación de cartera de B2, con un porcentaje de provisión del 10% generando un monto de provisión de 108.802 dólares.

El GADM de Suscal presenta una calificación real de C, con un porcentaje de provisión del 10% generando un monto de provisión de 57.949 dólares, utilizando la calificación asignada por los hiperplanos óptimos, el GADM de Suscal es

calificado como E, con un porcentaje de provisión del 20% generando un monto de provisión de 115.898 dólares.

Tabla 4.10- Calificación de Cartera al 31-Dic-2011 (Caso predicción máquinas de vectores de soporte)

Gobierno Autónomo Descentralizado Municipal	Calificación Máquinas de Vectores de Soporte	Capacidad de Pago real 55%	TOTAL	Calificación de cartera	% de Provisión	Cartera	Monto de provisión
24 De Mayo	C	49%	90%	B2	10,0%	1.289.305	128.930
Bolívar (Manabi)	C	49%	90%	B2	10,0%	819.868	81.987
Chilla	C	49%	89%	B2	10,0%	381.556	38.156
Flavio Alfaro	C	49%	90%	B2	10,0%	614.130	61.413
Guamote	B	52%	93%	A3	1,0%	537.900	5.379
Las Naves	B	52%	92%	A3	1,0%	239.857	2.399
Lomas De Sargentillo	A	55%	97%	A2	0,51%	568.782	2.901
Manta	D	46%	88%	B2	10,0%	16.737.416	1.673.742
Mera	D	46%	88%	B2	10,0%	1.165.405	116.540
Milagro	A	55%	97%	A2	0,51%	4.390.082	22.389
Naranjito	C	49%	90%	A3	1,0%	1.721.992	17.220
Puebloviejo	E	43%	85%	C1	20,0%	956.372	191.274
Rioverde	A	55%	96%	A2	0,51%	0	0
Rocafuerte	D	46%	88%	B2	10,0%	1.088.023	108.802
San Juan Bosco	D	46%	87%	B2	10,0%	701.044	70.104
Santa Clara	D	46%	87%	B2	10,0%	341.655	34.165
Suscal	E	43%	83%	C1	20,0%	579.489	115.898
Tosagua	A	55%	95%	A2	0,51%	1.920.543	9.795

Fuente: Banco del Estado

Elaborado por: Jairo Cervantes

4.4 ASIGNACIÓN DE LA CALIFICACION A NUEVOS GOBIERNOS AUTÓNOMOS DESCENTRALIZADOS MUNICIPALES UTILIZANDO LOS MÉTODOS: ANÁLISIS DISCRIMINANTE Y MÁQUINAS DE VECTORES DE SOPORTE

Los porcentajes de aciertos en las clasificaciones nos dan una aproximación a la capacidad predictiva de los modelos. Es conveniente evaluar dicha capacidad sobre observaciones ajenas a los casos analizados, es decir, sobre un segundo grupo de casos.

Se asigna la calificación de los 29 GADM que presentan valores extremos en las componentes principales. Utilizamos las funciones de clasificación obtenidas en el análisis discriminante y los hiperplanos óptimos obtenidos en las máquinas de vectores de soporte, para predecir a qué grupo pertenecen los GADM, empleando cada una de sus variables independientes. En la tabla 4.11 se puede comparar la calificación asignada por los métodos propuestos.

La predicción realizada por los modelos estudiados, designa iguales calificaciones a 22 GADM, lo que representa el 76% de los nuevos datos utilizados. Por otra parte analizando la calificación asignada a los 7 GADM restante, se observa que la calificación asignada a los GADM de Chinchipe, Cuenca y Yacuambi presenta una diferencia mínima entre calificaciones, pero existe una marcada diferencia en la asignación de la calificación para los GADM de Daule, Quito, Machala y Salinas.

La calificación asignada por el análisis discriminante a los GADM de Daule, Quito y Salinas refleja mejor la situación de cada una de las entidades, en comparación con la calificación asignada por las máquinas de vectores de soporte. Son entidades que por sus indicadores tienen las características del grupo A, tienen indicadores de autosuficiencia altos, presentan una dependencia baja, tienen niveles altos de endeudamiento que están destinados a gastos en inversión.

La calificación asignada por el análisis discriminante al GADM de Machala refleja mejor la situación de la entidad, en comparación con la calificación asignada por las máquinas de vectores de soporte. Es una entidad que por sus indicadores tienen las características del grupo D, sus indicadores de autosuficiencia son bajos, presentan una dependencia alta, tiene niveles altos de endeudamiento, dicho endeudamiento no está destinado al gastos en inversión si no al gasto corriente.

Tabla 4.11- Predicción de la calificación a nuevos GADM

Gobierno Autónomo Descentralizado Municipal	Asignación de grupo	
	Análisis Discriminante	Máquinas de Vectores de Soporte
Aguarico	A	A
Baños	A	A
Baquerizo Moreno	E	E
Buena Fe	C	C
Cevallos	A	A
Chimbo	C	C
Chinchipe	E	D
Cuenca	D	C
Daule	A	D
Grl. Antonio E.	C	C
Guayaquil	C	C
Huaquillas	C	C
Ibarra	C	C
Jipijapa	C	C
La Concordia	C	C
Latacunga	C	C
Loja	C	C
Machala	D	A
Montecristi	C	C
Olmedo (Loja)	E	E
Portoviejo	A	A
Puerto López	C	C
Quilanga	E	E
Quito	A	D
Rumiñahui	A	A
Salinas	C	A
Samborondón	A	A
Sozoranga	E	E
Yacuambi	E	D

Elaborado por: Jairo Cervantes

5 CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En este capítulo se exponen las conclusiones y recomendaciones obtenidas del estudio realizado, las mismas que validan las hipótesis propuestas.

Cabe señalar que el estudio tiene como objetivo principal contar con una herramienta de pronóstico de calificación de riesgo, evaluando su desempeño para la calificación de riesgo de los Gobiernos Autónomos Descentralizados Municipales en el año 2010.

Durante el estudio se propuso aplicar un método utilizado frecuentemente para pronosticar la calificación de riesgo como es el análisis discriminante, contra un método nuevo para este tipo de estudios que son las máquinas de vectores de soporte, para ello, se estudió cada arquitectura de manera individual, refinando los algoritmos de entrenamiento, e intentando conseguir el mejor clasificador en cada caso y poder comparar globalmente los resultados que se generan para cada modelo, las conclusiones y recomendaciones se indican a continuación.

5.1 CONCLUSIONES

El desarrollo de la batería de indicadores de gestión administrativa y financiera, para determinar que los Gobiernos Autónomos Descentralizados Municipales son clientes con diferente riesgo, resultó importante. Así, las variables referidas a la dependencia, autosuficiencia, gastos corrientes, de capital y a las de endeudamiento, se incluyen en los modelos propuestos.

El análisis discriminante desarrollado en este proyecto, permite concluir que los grupos obtenidos quedan suficientemente separados por las funciones discriminantes, clasificando correctamente en promedio el 90,6% de los casos y estableciendo que:

Los GADM de los grupos A y B, se caracterizan por presentar mayores ingresos propios, mayores inversiones y niveles de endeudamientos medianos o bajos.

Los GADM del grupo C, se caracterizan por tener altas transferencias, mayor inversión y mayor pago de la deuda.

Los GADM de los grupos E y D, se caracterizan por tener altos niveles de endeudamiento, excesivos gastos corrientes y poca generación de ingresos propios.

Las máquinas de vectores de soporte presentan un buen desempeño en la clasificación de riesgo de crédito de los Gobiernos Autónomos Descentralizados Municipales, la elección del núcleo favoreció en la clasificación y separación de las clases obteniendo resultados satisfactorios.

La función núcleo con el mejor comportamiento fue la función de base radial, la cual fue entrenada con diferentes parámetros, hasta que se alcanzó y se determinó el 90,6% de los casos correctamente clasificados. Las máquinas de vectores de soporte con función núcleo de base radial, mostraron una alta capacidad de generalización, seleccionando efectivamente los hiperplanos óptimos que separan los Gobiernos Autónomos Descentralizados Municipales en 5 grupos de riesgo (A, B, C, D y E).

Un punto que resulta importante remarcar en el funcionamiento del núcleo de base radial en las máquinas de vectores de soporte, es el efecto de aumentar el ancho del núcleo (parámetro γ), es decir, ajustar aún más las fronteras de decisión al conjunto de patrones de entrenamiento, dicho ajuste alcanzó una mejora de resultados.

Al comparar la capacidad predictiva del análisis discriminante y las máquinas de vectores de soporte, se determina que las tasas de clasificación errónea son muy similares y bajas en la mayoría de los escenarios estudiados, esto demuestra que

las dos metodologías son apropiadas para la valoración de la calificación de riesgo de crédito.

Con respecto a la evaluación del funcionamiento de los modelos estimados mediante el análisis discriminante y las máquinas de vectores de soporte, se observa por medio de los estadísticos calculados para valorar la importancia de cada modelo (por ejemplo el área bajo la curva ROC que presenta valores mayores a 0,8) que se obtiene un alto rendimiento de clasificación, lo que significa que las metodologías estudiadas asignan cada uno de los elementos a los grupos originales en la mayoría de los casos.

La conclusión general que se extrae es que, tanto los modelos de análisis discriminantes como las máquinas de vectores de soporte son adecuados para el estudio y predicción de la calificación de riesgo de los Gobiernos Autónomos Descentralizados Municipales, consiguiendo mediante las dos metodologías una elevada eficacia predictiva.

La predicción de las calificaciones realizadas por los modelos propuestos, presentan especial importancia en la medición de la cartera crediticia y el monto de provisiones para el Banco del Estado, puesto que éste realiza el análisis para contar con el capital suficiente para afrontar posibles pérdidas, ya que la estimación de las provisiones sirve para realizar el presupuesto de la entidad.

5.2 RECOMENDACIONES

Trabajos futuros deben enfocarse en comparar el desempeño de las metodologías estudiadas considerando otro tipo de escenarios en los cuales se pueden estudiar aspectos como: mayor número de grupos a clasificar, distintos Gobiernos Autónomos Descentralizados (Provinciales y Parroquiales) de estudio con sus respectivas variables explicativas y medidas de desempeño diferentes a la tasa de clasificación errónea.

Las máquinas de vectores de soporte resultaron de gran utilidad, por lo que se recomienda su aplicación a diferentes campos de estudio, analizando otras funciones núcleos.

En este proyecto las máquinas de vectores de soporte obtuvieron resultados satisfactorios en términos de predicción de clasificación, para nuevas aplicaciones se debe responder la pregunta de cómo seleccionar adecuadamente los parámetros del núcleo con miras a mejorar los resultados obtenidos, ya que la selección de los parámetros tiene un efecto significativo sobre el clasificador propuesto.

Se propone seguir avanzando en el estudio de otros métodos de clasificación no paramétricos (árboles de clasificación y redes neuronales) que permitan contar con herramientas de pronóstico de calificación de riesgo y evaluar sus resultados contra los métodos propuestos.

Finalmente y considerando que el organismo de control, en este caso la Superintendencia de Bancos y Seguros, no posee una metodología específica para este tipo de clientes, se recomienda el análisis y discusión de la metodología propuesta como modelo de medición de la calificación de riesgo de crédito para los Gobiernos Autónomos Descentralizados Municipales.

REFERENCIAS

- Anaya, M. (2006). *La banca de desarrollo en México*. México, Comisión Económica para América Latina.
- Aranguren, P. *Identificación de patrones de consumo de los venezolanos mediante máquinas de vectores soporte*. Venezuela, Mérida.
- Arriaga, E. (2001). *Finanzas públicas en México*. México, Instituto Politécnico Nacional.
- Avila, J. (2005). *Medición y control de riesgos financieros en empresas del sector real*. Colombia, Bogota, Pontificia Universidad Javeria.
- Banco del Estado. *Reglamento General de Operaciones de Crédito del Banco del Estado*.
- Barrera, P. (2002). *Máquinas de vectores de soporte para procesado de secuencias: el kernel de Fisher en secuencias bioinformáticas*. España, Universidad Carlos III de Madrid.
- Barreiros, A. (2005). *Introducción General: Gerencia financiera*. Ecuador, Escuela Politécnica Nacional.
- Boser B., Guyon I., and Vapnik V.(1992). *A training algorithm for optimal margin classifier*. Estados Unidos, Pittsburgh.
- Betancourt, G. (2005). *Las máquinas de soporte vectorial*. Colombia, Pereira.
- Césari, M. (2007). *Aprendizaje automático con WEKA*. España
- Cuadras, C. (2011). *Nuevos métodos de análisis multivariante*. España, Barcelona.
- Estrada, B. Mera, C (2006). *Support Vector Machine*. Colombia: Universidad Nacional de Colombia.
- Fisher, R. (1936). *The use of multiple measurements in taxonomic problems*. Inglaterra, Londres.
- Freire, E. (2002). *Análisis discriminante. Una aplicación a los clientes institucionales de un banco*. Ecuador, Quito.
- Galton, F. (1889). *Natural Inheritance*. Inglaterra, Londres.
- García, C. (2005). *Boosting support vector machines*. Colombia, Bogota.

- González, L. (2001). *Análisis discriminante utilizando máquinas núcleos de vetores soporte. Función núcleo similitud*. España, Sevilla.
- Gunn, S. (1977). *Support vector machines for classification and regression*. EEUU.
- Henao, R. (2004). *Selección de hiperparámetros en máquinas de soporte vectorial*. Colombia, Manizales
- López, E. (2005). *Modelo mixto de Credit Scoring construido con Análisis discriminante y el Algoritmo de Kohonen. Valoración de las componentes de riesgo según Basilea II*. España, Universidad de Sevilla.
- Mahalanobis, A. (1930). *Prasanta Chandra Mahalanobis*. India
- Marck, P. (2007). *WEKA Knowledge flow tutorial for version 3-5-6*. Nevezelandia, University of Waikato.
- Mendoza, A. Gómez, P (2009). *Herramientas para el pronóstico de calificación crediticia de las finanzas Públicas en México: Redes Neuronales Artificiales, Modelo Probit Ordenado y Análisis Discriminante*. México, Tecnológico de Monterrey.
- Nello, C. (2000). *An introduction to support vector machines: and other kernel-based learning methods*. Inglaterra, Cambridge University Press.
- Peña, D. (2002). *Análisis de datos multivariante*. España, Madrid.
- Pearson, K. (1901). *The scientific life in a statistical age*. Inglaterra, Cambridge.
- Superintendencia de Bancos y Seguros (2003). *De la gestión y administración de riesgos*. Resolución N° JB-2003-601.
- Superintendencia de Bancos y Seguros (2003). *De la administración del riesgo de crédito*. Resolución N° JB-2003-602.
- Superintendencia de Bancos y Seguros (2004). *De la gestión integral y control de riesgos*. Resolución N° JB-2004-631.
- Ringeling, E. (2004). *Análisis comparativo de modelos de predicción de quiebra y la probabilidad de banca rota*. Chile, Universidad de Chile.
- Sanchis, A. (1999). *Una aplicación del análisis discriminante a la prevención de insolvencia en la empresas españolas de seguros no-vida*. España, Madrid.
- Shawe -Taylor. (2000). *Na introduction to support vector machines*. Inglaterra.

Spearman, C. (1904). *General intelligence, objectively determined and measured*. Inglaterra.

Torres, F. (2005). *La deuda pública y las calificaciones al riesgo crediticio de las entidades federativas*. México, Benito Juárez.

Vapnik, V. (1979). *The Nature of Statistical learning theory*. Inglaterra, Londres.

http://www.sbs.gob.ec/practg/sbs_index?vp_art_id=6&vp_tip=2

<http://www.utp.edu.co/php/revistas/ScientiaEtTechnica/docsFTP/14513667-72.pdf>.

<http://www.svms.org/tutorials/Gunn1998.pdf>

<http://www.cs.waikato.ac.nz/ml/weka/>

http://www.sbs.gob.ec/practg/sbs_index?vp_art_id=6&vp_tip=2

ANEXOS

Anexo A - Indicadores de Gestión Administrativa y Financiera

Indicadores	
Ingreso propio / Gasto corriente	$\frac{Ip}{Gc}$
Transferencias / Ingresos Totales	$\frac{T}{It}$
Gasto corriente / Ingreso total	$\frac{Gc}{It}$
Inversiones / Gasto total	$\frac{I}{Gt}$
Inversiones / Transferencias de capital	$\frac{I}{Tk}$
Ingresos propios / Ingresos totales	$\frac{Ip}{It}$
Servicio de la deuda / Ingreso propios	$\frac{Sd}{Ip}$
Cartera vigente / Ingreso totales	$\frac{Cv}{It}$
Cartera vigente / Ingreso propios	$\frac{Cv}{Ip}$
Deuda pública / (Ingresos totales - crédito público)	$\frac{Dd}{It - Cp}$
Servicio de la deuda / (Ingresos totales - crédito público)	$\frac{Sd}{It - Cp}$

Gobierno Autónomo Descentralizado Municipal	$\frac{Ip}{Gc}$	$\frac{T}{It}$	$\frac{Gc}{It}$	$\frac{I}{Gt}$	$\frac{I}{Tk}$	$\frac{Ip}{It}$	$\frac{Sd}{Ip}$	$\frac{Cv}{It}$	$\frac{Cv}{Ip}$	$\frac{Dd}{It - Cp}$	$\frac{Sd}{It - Cp}$
24 De Mayo	0,10	0,83	0,22	0,48	0,85	0,02	1,17	0,08	3,44	0,64	0,03
Aguarico	1,70	0,55	0,20	0,63	0,85	0,34	0,02	0,01	0,02	0,02	0,01
Alausi	0,45	0,58	0,15	0,70	0,94	0,07	0,48	0,07	0,96	0,20	0,03
Ambato	0,86	0,42	0,29	0,43	0,75	0,25	0,15	0,05	0,21	0,07	0,04
Antonio Ante	1,68	0,61	0,17	0,67	0,79	0,29	0,11	0,04	0,15	0,04	0,03
Arajuno	0,38	0,66	0,13	0,76	0,87	0,05	0,20	0,02	0,32	0,06	0,01
Archidona	0,35	0,81	0,10	0,82	0,85	0,03	0,51	0,02	0,62	0,08	0,02
Arenillas	0,44	0,81	0,31	0,57	0,80	0,13	0,77	0,11	0,82	0,26	0,10
Atacames	1,07	0,57	0,18	0,55	0,64	0,20	0,26	0,15	0,77	0,81	0,06
Atahualpa	0,23	0,80	0,18	0,57	0,70	0,04	0,73	0,08	2,00	0,15	0,03
Azogues	0,78	0,59	0,39	0,53	1,06	0,31	0,25	0,17	0,56	0,57	0,08
Baba	0,15	0,76	0,21	0,49	0,78	0,03	0,89	0,04	1,18	0,25	0,03
Babahoyo	0,54	0,62	0,18	0,73	1,32	0,10	0,44	0,18	1,86	0,41	0,04
Balao	0,62	0,58	0,18	0,67	1,18	0,11	0,18	0,07	0,62	0,58	0,02
Balsas	0,33	0,68	0,18	0,59	0,85	0,06	0,61	0,09	1,55	0,11	0,04
Balzar	0,35	0,71	0,14	0,62	0,88	0,05	0,63	0,08	1,60	0,22	0,03
Baños	1,31	0,41	0,25	0,65	1,88	0,33	0,19	0,05	0,17	0,13	0,06
Baquerizo Moreno	0,07	0,96	0,25	0,50	0,57	0,02	7,19	0,01	0,70	0,22	0,12
Biblian	0,70	0,77	0,14	0,62	0,50	0,09	0,30	0,09	0,96	0,15	0,03
Bolívar (Carchi)	0,25	0,86	0,15	0,59	0,84	0,04	1,43	0,12	3,32	0,28	0,06
Bolívar (Manabí)	0,19	0,79	0,22	0,56	0,56	0,04	0,65	0,12	2,68	0,14	0,03
Buena Fe	0,37	0,66	0,40	0,30	0,41	0,15	0,23	0,05	0,31	0,17	0,03
Caluma	0,35	0,59	0,23	0,59	1,03	0,08	0,28	0,03	0,35	0,14	0,02
Calvas	0,44	0,67	0,14	0,67	0,86	0,06	1,27	0,16	2,68	0,18	0,08
Camilo Ponce Enríquez	0,66	0,75	0,18	0,68	0,99	0,12	0,15	0,03	0,29	0,11	0,02
Cañar	0,28	0,72	0,25	0,66	0,93	0,07	0,29	0,05	0,75	0,09	0,02
Carlos Julio Arosemena	0,18	0,91	0,10	0,80	0,77	0,02	1,47	0,03	1,63	0,02	0,03
Cascales	0,57	0,82	0,09	0,76	0,64	0,05	0,40	0,04	0,70	0,10	0,02
Catamayo	0,99	0,49	0,19	0,58	1,03	0,19	0,25	0,09	0,48	0,40	0,05
Cayambe	0,82	0,76	0,19	0,71	0,83	0,15	0,11	0,02	0,14	0,03	0,02
Celica	0,27	0,75	0,10	0,50	0,51	0,03	2,88	0,19	7,05	0,40	0,09
Centinel del Condor	0,23	0,84	0,18	0,67	0,81	0,04	1,53	0,14	3,29	0,16	0,07

Gobierno Autónomo Descentralizado Municipal	$\frac{I_p}{G_c}$	$\frac{T}{I_t}$	$\frac{G_c}{I_t}$	$\frac{I}{G_t}$	$\frac{I}{T_k}$	$\frac{I_p}{I_t}$	$\frac{S_d}{I_p}$	$\frac{C_v}{I_t}$	$\frac{C_v}{I_p}$	$\frac{D_d}{I_t - C_p}$	$\frac{S_d}{I_t - C_p}$
Cevallos	0,88	0,39	0,13	0,78	1,43	0,11	0,00	0,00	0,02	0,00	0,00
Chaguarpamba	0,17	0,83	0,17	0,37	0,38	0,03	2,87	0,20	7,00	0,21	0,09
Chambo	0,28	0,67	0,23	0,47	0,77	0,06	0,69	0,11	1,66	0,12	0,05
Chilla	0,10	0,83	0,26	0,55	0,85	0,02	1,43	0,17	6,77	0,47	0,04
Chillanes	0,07	0,73	0,16	0,46	0,57	0,01	1,94	0,07	6,05	0,63	0,02
Chimbo	0,11	0,63	0,40	0,20	0,32	0,04	0,99	0,09	2,05	0,09	0,04
Chinchipe	0,14	0,79	0,16	0,63	0,83	0,02	3,45	0,22	9,82	0,25	0,09
Chone	0,22	0,74	0,33	0,54	0,89	0,07	0,49	0,11	1,50	0,31	0,04
Chordeleg	0,34	0,63	0,16	0,73	1,02	0,06	0,39	0,17	3,01	0,34	0,03
Chunchi	0,85	0,68	0,12	0,68	1,05	0,10	0,48	0,16	1,58	0,25	0,06
Colimes	0,21	0,89	0,19	0,66	0,79	0,04	1,52	0,07	1,71	0,26	0,06
Colta	0,38	0,69	0,09	0,68	0,53	0,04	0,49	0,04	1,21	0,09	0,02
Cotacachi	0,53	0,68	0,19	0,61	0,88	0,10	0,30	0,07	0,67	0,07	0,03
Cuenca	1,12	0,40	0,22	0,51	1,34	0,25	0,62	0,50	1,97	0,62	0,17
Cumanda	0,70	0,61	0,21	0,49	0,98	0,15	0,29	0,07	0,48	0,12	0,04
Cuyabeno	1,06	0,67	0,12	0,63	0,54	0,13	0,05	0,01	0,07	0,02	0,01
Daule	1,51	0,47	0,16	0,68	1,28	0,24	0,44	0,13	0,52	0,66	0,11
Deleg	0,44	0,79	0,20	0,67	0,74	0,09	0,51	0,12	1,30	0,14	0,05
Duran	1,15	0,53	0,17	0,57	1,23	0,20	0,35	0,17	0,87	0,22	0,07
Echeandía	0,20	0,57	0,16	0,68	1,01	0,03	0,28	0,14	4,32	0,37	0,01
El Carmen	0,77	0,77	0,14	0,61	0,70	0,11	0,63	0,12	1,06	0,19	0,07
El Chaco	0,51	0,76	0,11	0,77	0,91	0,06	0,63	0,03	0,52	0,03	0,03
El Empalme	0,27	0,91	0,19	0,75	1,29	0,05	0,98	0,04	0,78	0,27	0,05
El Guabo	0,49	0,77	0,22	0,64	0,92	0,11	0,81	0,07	0,62	0,06	0,09
El Pan	0,26	0,62	0,17	0,75	1,22	0,04	0,31	0,04	0,85	0,15	0,01
El Pangui	0,32	0,75	0,12	0,75	0,71	0,04	0,86	0,14	3,53	0,42	0,04
El Tambo	0,63	0,63	0,20	0,59	0,79	0,12	0,27	0,09	0,71	0,11	0,04
El Triunfo	0,50	0,78	0,29	0,55	0,90	0,15	0,73	0,14	0,92	0,23	0,11
Eloy Alfaro	0,14	0,78	0,20	0,64	0,80	0,03	1,06	0,08	3,07	0,17	0,03
Esmeraldas	0,41	0,80	0,35	0,65	1,03	0,14	0,12	0,01	0,04	0,25	0,02
Espejo	0,14	0,78	0,20	0,64	0,80	0,03	1,06	0,03	0,97	0,02	0,03
Espindola	0,24	0,73	0,13	0,70	0,85	0,03	2,95	0,20	6,34	0,14	0,11
Flavio Alfaro	0,04	0,59	0,35	0,47	1,15	0,01	2,25	0,08	5,47	0,17	0,03
General Antonio Elizalde	0,38	0,66	0,48	0,48	0,72	0,18	0,19	0,15	0,82	0,23	0,04
Girón	0,62	0,68	0,30	0,59	0,85	0,19	0,23	0,09	0,49	0,19	0,04
Gonzalo Pizarro	0,37	0,69	0,14	0,74	0,80	0,05	0,34	0,02	0,34	0,03	0,02
Gonzanama	0,18	0,80	0,18	0,54	0,62	0,03	2,44	0,13	4,19	0,18	0,08
Guachapala	0,33	0,75	0,19	0,71	0,97	0,06	1,06	0,17	2,70	0,33	0,07
Gualaceo	0,87	0,59	0,17	0,68	0,89	0,15	0,30	0,11	0,76	0,16	0,05
Gualaquiza	0,60	0,84	0,12	0,72	0,63	0,07	0,40	0,08	1,16	0,08	0,03
Guamote	0,23	0,79	0,19	0,74	0,97	0,04	1,34	0,14	3,16	0,00	0,06
Guano	0,51	0,78	0,17	0,58	0,73	0,09	0,93	0,10	1,21	0,16	0,08
Guaranda	0,41	0,71	0,20	0,58	0,88	0,08	0,22	0,10	1,29	0,24	0,02
Guayaquil	1,05	0,42	0,34	0,40	0,82	0,36	0,19	0,13	0,35	0,21	0,07
Huaca	0,58	0,70	0,15	0,62	0,66	0,09	0,64	0,17	1,97	0,16	0,06
Huamboya	0,13	0,71	0,18	0,61	0,77	0,02	1,47	0,09	3,66	0,10	0,04
Huaquillas	0,46	0,75	0,37	0,39	0,63	0,17	0,51	0,18	1,03	0,00	0,09
Ibarra	0,73	0,54	0,42	0,38	0,73	0,31	0,33	0,22	0,72	0,24	0,11
Isabela	0,99	0,60	0,14	0,68	0,97	0,14	0,08	0,04	0,32	0,06	0,01
Isidro Ayora	0,40	0,74	0,27	0,64	0,81	0,11	0,46	0,07	0,61	0,16	0,05
Jama	0,15	0,78	0,20	0,69	0,84	0,03	0,95	0,09	3,05	0,14	0,03
Jaramijó	0,40	0,79	0,10	0,87	1,06	0,04	0,48	0,09	2,12	0,16	0,02
Jipijapa	0,13	0,67	0,44	0,37	0,56	0,06	0,00	0,00	0,00	0,03	0,00
Junín	0,11	0,74	0,21	0,56	0,65	0,02	1,07	0,04	1,82	0,22	0,02
La Concordia	0,30	0,79	0,29	0,29	0,29	0,09	0,01	0,01	0,08	0,08	0,00
La Joya de los Sachas	0,73	0,73	0,10	0,78	0,64	0,07	0,16	0,03	0,48	0,04	0,01
La Maná	0,72	0,70	0,15	0,70	0,71	0,11	0,44	0,06	0,59	0,11	0,05

Gobierno Autónomo Descentralizado Municipal	$\frac{Ip}{Gc}$	$\frac{T}{It}$	$\frac{Gc}{It}$	$\frac{I}{Gt}$	$\frac{I}{Tk}$	$\frac{Ip}{It}$	$\frac{Sd}{Ip}$	$\frac{Cv}{It}$	$\frac{Cv}{Ip}$	$\frac{Dd}{It - Cp}$	$\frac{Sd}{It - Cp}$
La Troncal	0,65	0,61	0,25	0,66	1,21	0,16	0,21	0,08	0,53	0,21	0,03
La Libertad	1,18	0,66	0,20	0,70	0,84	0,24	0,01	0,04	0,17	0,31	0,00
Lago Agrio	0,36	0,63	0,20	0,54	0,62	0,07	0,09	0,02	0,29	0,04	0,01
Las Lajas	0,15	0,80	0,24	0,61	0,87	0,04	1,02	0,05	1,35	0,06	0,04
Las Naves	0,21	0,70	0,23	0,55	0,76	0,05	0,39	0,10	2,09	0,33	0,02
Latacunga	0,55	0,43	0,30	0,29	0,47	0,17	0,18	0,13	0,82	0,09	0,03
Limón Indanza	0,34	0,79	0,12	0,64	0,59	0,04	1,08	0,12	2,86	0,12	0,05
Logroño	0,24	0,79	0,10	0,78	0,63	0,02	0,49	0,07	2,68	0,08	0,01
Loja	0,87	0,46	0,49	0,38	0,88	0,42	0,21	0,14	0,33	0,18	0,09
Lomas de Sargentillo	0,41	0,73	0,20	0,81	1,35	0,08	0,00	0,00	0,00	0,09	0,00
Loreto	0,16	0,78	0,15	0,72	0,82	0,02	0,69	0,06	2,39	0,06	0,02
Macara	0,41	0,56	0,13	0,65	0,89	0,06	1,12	0,12	2,25	0,14	0,06
Machala	1,50	0,52	0,19	0,49	1,26	0,28	0,76	0,40	1,44	0,62	0,23
Manta	0,88	0,62	0,15	0,66	0,68	0,13	0,23	0,16	1,20	0,36	0,03
Marcabellí	0,43	0,70	0,19	0,69	0,92	0,08	0,48	0,08	0,95	0,20	0,04
Marcelino Maridueña	0,62	0,68	0,26	0,48	0,69	0,16	0,03	0,07	0,44	0,41	0,01
Mejía	1,00	0,58	0,30	0,51	0,90	0,30	0,13	0,10	0,33	0,41	0,04
Mera	0,40	0,74	0,08	0,81	0,85	0,03	1,42	0,10	2,96	0,12	0,05
Milagro	1,31	0,65	0,20	0,75	1,53	0,27	0,25	0,17	0,63	0,53	0,07
Mira	0,42	0,79	0,12	0,71	0,70	0,05	0,67	0,05	1,10	0,20	0,03
Mocache	0,31	0,77	0,17	0,71	1,24	0,05	0,95	0,19	3,53	0,45	0,06
Mocha	0,53	0,69	0,30	0,46	0,59	0,16	0,24	0,04	0,26	0,12	0,04
Montalvo	0,18	0,79	0,28	0,65	0,95	0,05	0,58	0,04	0,83	0,25	0,03
Montecristi	0,37	0,67	0,37	0,27	0,31	0,14	0,35	0,10	0,70	0,78	0,05
Montufar	0,89	0,65	0,17	0,62	0,85	0,15	0,18	0,05	0,31	0,05	0,03
Morona	0,57	0,74	0,13	0,71	0,57	0,07	0,55	0,18	2,45	0,25	0,04
Muisne	0,21	0,75	0,18	0,62	0,77	0,04	0,21	0,03	0,81	0,18	0,01
Nabón	0,41	0,75	0,11	0,77	0,66	0,04	0,16	0,03	0,61	0,09	0,01
Nangaritza	0,18	0,80	0,18	0,66	0,79	0,03	1,92	0,15	4,93	0,19	0,07
Naranjal	0,53	0,71	0,26	0,53	0,72	0,14	0,56	0,18	1,29	0,31	0,08
Naranjito	0,29	0,84	0,22	0,61	0,77	0,07	1,25	0,18	2,83	0,68	0,08
Nobol	0,26	0,70	0,30	0,41	0,66	0,08	0,56	0,08	1,09	0,16	0,05
Olmedo (Loja)	0,10	0,78	0,11	0,75	0,93	0,01	8,49	0,14	13,48	0,18	0,10
Olmedo (Manabí)	0,06	0,80	0,28	0,55	0,58	0,02	1,62	0,11	6,99	0,31	0,03
Oña	0,23	0,72	0,19	0,63	0,83	0,04	0,67	0,08	1,90	0,19	0,03
Orrellana	0,48	0,67	0,23	0,58	0,71	0,11	0,17	0,05	0,47	0,04	0,02
Otavalo	0,57	0,56	0,36	0,54	0,90	0,20	0,14	0,06	0,31	0,09	0,03
Pablo Sexto	0,26	0,75	0,18	0,70	0,81	0,05	0,70	0,11	2,34	0,10	0,03
Pajan	0,16	0,78	0,20	0,62	0,74	0,03	2,35	0,14	4,31	0,19	0,08
Palanda	0,19	0,82	0,14	0,76	0,93	0,03	1,86	0,15	5,81	0,18	0,05
Palenque	0,15	0,71	0,16	0,66	1,02	0,02	0,52	0,05	2,22	0,12	0,01
Palestina	0,51	0,67	0,12	0,77	0,97	0,06	0,66	0,21	3,36	0,49	0,05
Pallatanga	0,38	0,72	0,15	0,72	1,09	0,06	0,77	0,14	2,44	0,28	0,05
Palora	0,92	0,52	0,11	0,71	1,04	0,10	0,19	0,06	0,57	0,08	0,02
Paltas	0,37	0,71	0,14	0,65	0,65	0,05	0,53	0,11	2,16	0,13	0,03
Pangua	0,22	0,70	0,16	0,51	0,64	0,04	0,55	0,07	2,03	0,09	0,02
Paquisha	0,84	0,80	0,10	0,77	0,74	0,08	0,52	0,13	1,59	0,33	0,05
Pasaje	0,44	0,70	0,30	0,57	0,99	0,13	0,73	0,15	1,15	0,42	0,10
Pastaza	0,73	0,69	0,17	0,64	0,79	0,12	0,82	0,09	0,71	0,16	0,11
Patate	0,64	0,52	0,14	0,69	1,20	0,09	0,66	0,08	0,87	0,09	0,06
Paute	0,63	0,76	0,21	0,67	0,93	0,13	0,40	0,12	0,90	0,13	0,05
Pedernales	0,43	0,87	0,17	0,75	0,99	0,07	0,52	0,07	0,99	0,29	0,04
Pedro Carbo	0,47	0,77	0,16	0,79	1,27	0,08	0,54	0,07	0,97	0,25	0,04
Pedro Mocayo	0,58	0,66	0,22	0,62	0,96	0,13	0,09	0,05	0,38	0,05	0,01
Pedro Vicente Maldonado	0,39	0,82	0,34	0,61	0,83	0,13	0,14	0,01	0,10	0,08	0,02
Pelileo	0,90	0,46	0,15	0,62	0,86	0,13	0,35	0,14	1,06	0,18	0,05

Gobierno Autónomo Descentralizado Municipal	$\frac{I_p}{G_c}$	$\frac{T}{I_t}$	$\frac{G_c}{I_t}$	$\frac{I}{G_t}$	$\frac{I}{T_k}$	$\frac{I_p}{I_t}$	$\frac{S_d}{I_p}$	$\frac{C_v}{I_t}$	$\frac{C_v}{I_p}$	$\frac{D_d}{I_t - C_p}$	$\frac{S_d}{I_t - C_p}$
Pedro Mucayo	0,58	0,66	0,22	0,62	0,96	0,13	0,09	0,05	0,38	0,05	0,01
Pedro Vicente Maldonado	0,39	0,82	0,34	0,61	0,83	0,13	0,14	0,01	0,10	0,08	0,02
Pelileo	0,90	0,46	0,15	0,62	0,86	0,13	0,35	0,14	1,06	0,18	0,05
Penipe	0,30	0,51	0,04	0,75	0,62	0,01	0,12	0,01	0,86	0,03	0,00
Pichincha	0,08	0,82	0,17	0,74	1,07	0,01	0,98	0,06	4,48	0,43	0,01
Píllaro	0,56	0,65	0,25	0,51	0,52	0,14	0,15	0,03	0,24	0,04	0,02
Pimampiro	0,40	0,75	0,18	0,69	0,89	0,07	0,51	0,04	0,64	0,11	0,04
Pindal	0,17	0,81	0,21	0,61	0,80	0,04	3,07	0,16	4,26	0,19	0,11
Piñas	0,52	0,58	0,24	0,61	1,08	0,13	0,22	0,03	0,24	0,06	0,03
Playas	0,49	0,65	0,30	0,56	0,84	0,15	0,25	0,06	0,38	0,55	0,04
Portovelo	1,27	0,84	0,10	0,55	0,38	0,13	0,20	0,04	0,30	0,07	0,03
Portoviejo	0,99	0,42	0,09	0,79	1,61	0,09	0,33	0,10	1,11	0,27	0,04
Pucara	0,25	0,84	0,14	0,58	0,83	0,04	0,90	0,07	2,07	0,12	0,04
Pueblviejo	0,38	0,75	0,17	0,60	0,93	0,06	2,09	0,09	1,45	0,38	0,13
Puerto López	0,14	0,81	0,42	0,22	0,34	0,06	0,26	0,06	1,09	0,27	0,02
Puerto Quito	0,40	0,59	0,15	0,49	0,69	0,06	0,57	0,05	0,81	0,10	0,04
Pujilí	0,28	0,66	0,17	0,62	0,71	0,05	0,54	0,12	2,63	0,15	0,03
Putumayo	0,12	0,98	0,11	0,65	0,83	0,01	1,73	0,02	1,15	0,12	0,02
Puyango	0,48	0,73	0,18	0,69	1,15	0,09	1,44	0,17	1,99	0,22	0,13
Quero	0,49	0,67	0,16	0,59	0,96	0,08	0,78	0,07	0,87	0,21	0,06
Quevedo	0,37	0,64	0,41	0,46	0,75	0,15	0,42	0,18	1,21	0,36	0,06
Quijos	0,56	0,83	0,22	0,68	0,77	0,13	0,37	0,05	0,41	0,06	0,05
Quilanga	0,12	0,90	0,18	0,65	0,96	0,02	6,92	0,12	5,11	0,12	0,16
Quinindé	0,20	0,80	0,28	0,37	0,46	0,06	0,26	0,09	1,55	0,18	0,02
Quinsaloma	0,13	0,82	0,29	0,53	0,66	0,04	0,88	0,04	1,16	0,17	0,03
Quito	3,73	0,55	0,07	0,84	1,69	0,25	0,31	0,38	1,50	0,45	0,09
Riobamba	0,73	0,45	0,23	0,39	0,45	0,17	0,10	0,11	0,68	0,27	0,02
Rioverde	0,09	0,94	0,34	0,57	0,75	0,03	0,05	0,00	0,00	0,16	0,00
Rocafuerte	0,18	0,82	0,20	0,59	0,87	0,04	0,86	0,13	3,59	0,16	0,04
Rumiñahui	1,52	0,32	0,24	0,56	1,29	0,36	0,08	0,06	0,17	0,08	0,03
Salcedo	0,86	0,76	0,21	0,65	1,08	0,18	0,34	0,09	0,50	0,29	0,06
Salinas	1,13	0,54	0,23	0,63	1,29	0,26	0,14	0,08	0,32	1,24	0,04
Salitre	0,19	0,82	0,21	0,45	0,67	0,04	0,99	0,12	2,96	0,31	0,04
Samborondón	2,96	0,37	0,19	0,67	1,58	0,56	0,07	0,10	0,17	0,12	0,04
San Cristobal	0,55	0,69	0,26	0,71	1,03	0,14	0,06	0,03	0,24	0,06	0,01
San Fernando	0,40	0,60	0,16	0,72	1,03	0,06	0,65	0,10	1,51	0,12	0,04
San Juan Bosco	0,44	0,81	0,14	0,72	0,93	0,06	0,60	0,14	2,34	0,16	0,04
San Lorenzo	0,22	0,72	0,20	0,65	0,88	0,04	0,46	0,10	2,43	0,10	0,02
San Miguel	0,20	0,63	0,19	0,61	0,77	0,04	1,88	0,18	5,05	0,07	0,08
San Miguel de los Bancos	0,58	0,65	0,30	0,50	0,84	0,17	0,34	0,09	0,51	0,16	0,06
San Vicente	0,28	0,75	0,36	0,55	0,84	0,10	0,33	0,04	0,38	0,37	0,03
Santa Ana	0,24	0,76	0,14	0,80	1,02	0,03	0,59	0,06	1,77	0,20	0,02
Santa Clara	0,22	0,87	0,13	0,72	0,89	0,03	2,46	0,08	2,76	0,04	0,07
Santa Cruz	0,84	0,52	0,28	0,61	1,40	0,24	0,14	0,05	0,21	0,06	0,04
Santa Elena	0,89	0,62	0,17	0,60	0,91	0,15	0,11	0,11	0,71	0,18	0,02
Santa Isabel	0,21	0,86	0,40	0,51	0,65	0,08	0,49	0,08	0,94	0,30	0,04
Santa Lucia	0,21	0,81	0,15	0,72	1,11	0,03	0,86	0,07	2,31	0,16	0,03
Santa Rosa	0,45	0,71	0,22	0,31	0,38	0,10	0,86	0,22	2,21	0,27	0,09
Santiago	0,13	0,61	0,33	0,49	0,74	0,04	0,74	0,05	1,16	0,12	0,03
Santo Domingo	0,69	0,59	0,38	0,42	0,71	0,26	0,28	0,11	0,43	0,15	0,08
Saquisilí	0,43	0,65	0,21	0,61	1,02	0,09	0,42	0,11	1,26	0,27	0,04
Saraguro	0,33	0,74	0,12	0,73	0,95	0,04	2,02	0,13	3,48	0,01	0,08
Sevilla de Oro	0,48	0,72	0,20	0,64	0,99	0,10	1,42	0,20	2,05	0,36	0,13
Shushufindi	0,32	0,59	0,11	0,75	0,78	0,03	1,09	0,15	4,44	0,18	0,04
Sigchos	0,32	0,73	0,15	0,60	0,90	0,05	1,20	0,09	1,82	0,06	0,06
Sigsig	0,37	0,73	0,20	0,71	1,02	0,07	0,90	0,10	1,42	0,24	0,07

Gobierno Autónomo Descentralizado Municipal	$\frac{Ip}{Gc}$	$\frac{T}{It}$	$\frac{Gc}{It}$	$\frac{I}{Gt}$	$\frac{I}{Tk}$	$\frac{Ip}{It}$	$\frac{Sd}{Ip}$	$\frac{Cv}{It}$	$\frac{Cv}{Ip}$	$\frac{Dd}{It - Cp}$	$\frac{Sd}{It - Cp}$
Simón Bolívar	0,40	0,84	0,29	0,62	0,74	0,12	0,31	0,04	0,37	0,04	0,04
Sozoranga	0,15	0,90	0,15	0,50	0,53	0,02	5,08	0,11	5,18	0,13	0,11
Sucre	0,20	0,62	0,44	0,54	1,09	0,09	0,50	0,18	2,00	0,21	0,05
Sucua	0,27	0,57	0,19	0,60	0,93	0,05	1,26	0,18	3,51	0,22	0,07
Sucumbios	0,39	0,88	0,10	0,73	0,68	0,04	0,36	0,04	1,06	0,05	0,01
Suscal	0,19	0,63	0,17	0,41	0,63	0,03	0,69	0,10	3,02	0,09	0,02
Taisha	0,19	0,57	0,07	0,82	0,86	0,01	0,28	0,01	0,98	0,05	0,00
Tena	0,48	0,87	0,11	0,73	0,62	0,05	0,82	0,15	2,80	0,16	0,05
Tisaleo	0,45	0,67	0,22	0,67	0,92	0,10	0,17	0,05	0,50	0,06	0,02
Tiwintza	0,45	0,83	0,09	0,79	0,84	0,04	0,90	0,11	2,85	0,12	0,04
Tosagua	0,15	0,76	0,22	0,64	0,83	0,03	0,18	0,05	1,46	0,69	0,01
Tulcán	0,82	0,62	0,13	0,71	0,87	0,11	0,25	0,07	0,66	0,10	0,03
Urcuqui	0,43	0,70	0,19	0,70	1,04	0,08	0,41	0,05	0,63	0,16	0,03
Urdaneta	0,09	0,94	0,28	0,56	0,56	0,03	1,72	0,09	3,37	0,35	0,05
Valencia	0,56	0,77	0,21	0,68	0,97	0,12	0,17	0,07	0,58	0,08	0,02
Ventanas	0,24	0,85	0,15	0,68	0,73	0,04	0,68	0,12	3,28	0,44	0,03
Vinces	0,21	0,76	0,18	0,61	0,83	0,04	0,64	0,10	2,62	0,34	0,03
Yacuambi	0,10	0,60	0,13	0,70	0,91	0,01	5,08	0,29	22,08	0,55	0,09
Yaguachi	0,32	0,86	0,15	0,79	1,15	0,05	0,44	0,07	1,39	0,14	0,02
Yantzaza	0,50	0,76	0,18	0,65	0,67	0,09	0,73	0,19	2,16	0,27	0,07
Zamora	0,50	0,67	0,15	0,66	0,91	0,08	0,92	0,20	2,62	0,41	0,08
Zapotillo	0,31	0,72	0,17	0,70	0,98	0,05	1,81	0,11	2,16	0,28	0,10
Zaruma	0,62	0,69	0,21	0,69	1,25	0,13	0,38	0,06	0,46	0,25	0,05

Anexo B – Matriz de puntajes en las tres componentes principales

Gobierno Autónomo Descentralizado Municipal	Componente 1	Componente 2	Componente 3
24 De Mayo	-0,78	0,24	-0,82
Aguarico	2,08	-0,84	0,49
Alausí	0,22	-0,37	0,68
Ambato	1,62	-0,44	-1,11
Antonio Ante	1,69	-0,46	0,65
Arajuno	-0,06	-1,26	1,05
Archidona	-0,58	-1,17	1,39
Arenillas	0,08	0,49	-0,96
Atacames	1,16	1,14	-0,58
Atahualpa	-0,65	-0,53	-0,22
Azogues	1,76	1,33	-1,30
Baba	-0,49	-0,67	-0,62
Babahoyo	0,51	0,86	1,00
Balao	0,81	0,10	0,66
Balsas	-0,16	-0,34	0,06
Balzar	-0,25	-0,29	0,32
Baños	2,70	0,59	1,25
Baquerizo Moreno	-2,25	0,96	-1,29
Biblián	-0,13	-0,60	0,01
Bolívar (Carchi)	-0,96	0,39	0,00
Bolívar (Manabí)	-0,71	-0,40	-0,70
Buena Fe	0,50	-0,84	-2,66
Caluma	0,43	-0,81	0,07
Calvas	-0,35	0,76	0,44
Camilo Ponce Enríquez	0,36	-0,89	0,64
Cañar	-0,01	-0,90	0,08
Carlos Julio Arosemena	-1,24	-0,98	1,15
Cascales	-0,47	-1,05	0,96
Catamayo	1,42	0,45	0,13
Cayambe	0,46	-1,12	0,62
Celica	-1,56	1,72	-0,55
Centinela del Condor	-0,96	0,43	0,15
Cevallos	1,35	-0,96	2,00
Chaguarpamba	-1,75	1,42	-1,51
Chambo	-0,12	-0,18	-0,83
Chilla	-1,14	0,97	-0,69
Chillanes	-1,24	0,51	-0,87
Chimbo	-0,29	-0,52	-3,17
Chinchi	-1,90	2,11	0,07
Chone	0,02	-0,06	-1,00
Chordeleg	-0,07	0,38	0,79
Chunchi	0,39	0,59	0,91
Colimes	-0,92	-0,06	-0,02
Colta	-0,48	-1,03	0,50
Cotacachi	0,26	-0,64	0,17
Cuenca	1,97	4,44	-0,38
Cumanda	0,80	-0,28	-0,30
Cuyabeno	0,50	-1,34	0,39
Daule	2,01	1,88	0,83
Deleg	-0,21	-0,23	0,07
Quito	3,21	3,34	3,17
Durán	1,44	0,99	0,50
Echeandía	-0,18	0,26	0,58
El Carmen	0,03	0,22	0,07
El Chaco	-0,27	-0,89	1,25
El Empalme	-0,45	-0,27	1,01

Gobierno Autónomo Descentralizado Municipal	Componente 1	Componente 2	Componente 3
El Guabo	0,01	-0,05	0,01
El Pan	0,13	-0,78	1,18
El Pangui	-0,72	0,37	0,61
El Tambo	0,47	-0,42	-0,07
El Triunfo	0,25	0,72	-0,85
Eloy Alfaro	-0,81	-0,33	0,01
Esmeraldas	0,47	-0,99	-0,39
Espejo	-0,67	-1,01	0,08
Espindola	-1,37	1,70	0,50
Flavio Alfaro	-0,55	0,36	-0,88
Francisco de Orellana	0,29	-0,98	-0,36
General Antonio Elizalde	0,81	-0,01	-2,11
Girón	0,77	-0,20	-0,63
Gonzalo Pizarro	-0,16	-1,22	0,80
Gonzanamá	-1,28	0,74	-0,57
Guachapala	-0,40	0,80	0,40
Gualaceo	0,77	0,04	0,53
Gualaquiza	-0,45	-0,73	0,66
Guamote	-0,76	0,18	0,68
Guano	-0,27	0,17	-0,17
Guaranda	0,08	-0,37	-0,09
Guayaquil	2,24	0,61	-1,60
Huamboya	-0,87	-0,18	-0,01
Huaquillas	0,36	0,36	-2,03
Ibarra	1,65	1,33	-2,34
Isabela	0,84	-0,83	0,98
Isidro Ayora	0,10	-0,45	-0,31
Jama	-0,76	-0,35	0,24
Jaramijó	-0,48	-0,45	1,76
Jipijapa	0,19	-1,75	-2,34
Junín	-0,70	-0,71	-0,52
La Concordia	-0,14	-1,73	-2,23
La Joya de los Sachas	-0,07	-1,20	1,10
La Maná	0,16	-0,47	0,46
La Troncal	0,95	-0,13	0,40
La Libertad	1,28	-0,61	0,50
Lago Agrio	0,13	-1,38	-0,40
Las Lajas	-0,57	-0,71	-0,21
Las Naves	-0,24	-0,29	-0,51
Latacunga	1,01	-0,21	-2,12
Limón Indanza	-0,86	-0,11	0,17
Logroño	-0,90	-0,91	0,93
Loja	2,46	0,83	-2,42
Lomas de Sargentillo	0,34	-1,26	1,49
Loreto	-0,77	-0,85	0,67
Macara	-0,09	0,37	0,49
Machala	1,95	4,48	-0,37
Manta	0,54	0,30	0,25
Marcabelí	0,06	-0,33	0,42
Marcelino Maridueña	0,68	-0,53	-0,98
Mejía	1,71	0,32	-0,86
Mera	-0,79	0,07	1,33
Milagro	1,78	1,42	1,23
Mira	-0,50	-0,63	0,62
Mocache	-0,36	1,08	0,77
Mocha	0,48	-0,80	-1,32
Mera	-0,79	0,07	1,33
Milagro	1,78	1,42	1,23

Gobierno Autónomo Descentralizado Municipal	Componente 1	Componente 2	Componente 3
Mira	-0,50	-0,63	0,62
Mocache	-0,36	1,08	0,77
Mocha	0,48	-0,80	-1,32
Montalvo	-0,26	-0,70	-0,17
Montecristi	0,45	0,35	-3,09
Montufar	0,72	-0,70	0,34
Morona	-0,37	0,30	0,35
Muisne	-0,33	-1,14	0,05
Nabón	-0,38	-1,30	0,94
Nangaritza	-1,16	0,76	0,10
Naranjal	0,27	0,73	-0,89
Naranjito	-0,58	1,37	-0,58
Nobol	-0,03	-0,42	-1,52
Olmedo (Loja)	-3,33	3,09	0,90
Olmedo (Manabí)	-1,35	0,30	-1,00
Oña	-0,39	-0,42	0,07
Otavalo	1,14	-0,57	-0,95
Pablo Sexto	-0,53	-0,32	0,37
Paján	-1,16	0,78	-0,27
Palanda	-1,28	0,69	0,90
Palenque	-0,43	-0,72	0,60
Palestina	-0,15	1,09	0,99
Pallatanga	-0,23	0,37	0,88
Palora	0,81	-0,54	1,27
Paltas	-0,42	-0,34	0,22
Pangua	-0,48	-0,75	-0,40
Paquisha	-0,15	0,24	0,95
Pasaje	0,42	1,10	-0,78
Pastaza	0,22	0,43	0,13
Patate	0,59	0,07	1,09
Paute	0,25	-0,06	0,28
Pedernales	-0,32	-0,33	0,81
Pedro Carbo	0,04	-0,15	1,35
Pedro Moncayo	0,58	-0,92	0,18
Pedro Vicente Maldonado	0,22	-1,27	-0,68
Penipe	-0,21	-1,42	1,21
Pichincha	-0,93	-0,09	0,82
Pimampiro	-0,14	-0,73	0,51
Pindal	-1,28	1,37	-0,37
Piñas	0,74	-0,78	0,14
Playas	0,70	-0,04	-0,86
Portovelo	0,17	-1,00	0,00
Portoviejo	1,26	0,47	2,24
Pucara	-0,76	-0,49	0,14
Puebloviejo	-0,47	1,19	-0,08
Puerto López	-0,29	-0,99	-3,19
Puerto Quito	0,05	-0,67	-0,37
Pujilí	-0,35	-0,20	0,06
Putumayo	-1,33	-0,97	0,55
Puyango	-0,14	1,48	0,49
Quero	0,09	-0,03	0,22
Quevedo	0,64	0,64	-1,89
Quijos	0,01	-0,74	0,09
Quilanga	-2,35	2,28	0,05
Quinindé	-0,43	-0,87	-1,78
Quinsaloma	-0,59	-0,80	-1,05
Riobamba	1,02	-0,26	-1,39
Rioverde	-0,54	-1,68	-0,91

Gobierno Autónomo Descentralizado Municipal	Componente 1	Componente 2	Componente 3
Rocafuerte	-0,78	-0,01	-0,09
Rumiñahui	2,81	0,10	0,43
Salcedo	0,72	0,19	0,37
Salinas	2,01	1,47	0,13
Salitre	-0,77	0,08	-0,97
Samborondón	4,33	1,00	1,68
San Cristóbal	0,60	-1,04	0,44
San Fernando	0,08	-0,15	0,87
San Juan Bosco	-0,44	0,02	0,80
San Lorenzo	-0,40	-0,47	0,24
San Miguel	-0,83	0,93	-0,09
San Miguel de los Bancos	0,75	-0,10	-0,93
San Miguel de Urcuquí	0,14	-0,56	0,67
San Pedro de Huaca	-0,13	0,35	0,02
San Pedro de Pelileo	0,92	0,36	0,41
San Vicente	0,24	-0,55	-1,11
Santa Ana	-0,46	-0,58	1,19
Santa Clara	-1,28	0,11	0,75
Santa Cruz	1,68	-0,25	0,35
Santa Elena	0,80	-0,29	0,32
Santa Isabel	-0,22	-0,47	-1,73
Santa Lucía	-0,62	-0,38	0,93
Santa Rosa	-0,18	0,96	-1,99
Santiago	-0,05	-0,74	-1,19
Píllaro	0,42	-1,12	-0,89
Santo Domingo	1,30	0,23	-1,88
Saquisilí	0,28	0,04	0,08
Saraguro	-0,88	0,53	0,94
Sevilla de Oro	-0,10	1,72	-0,05
Shushufindi	-0,58	0,47	0,89
Sigchos	-0,46	-0,07	0,24
Sigsig	-0,14	0,25	0,49
Simón Bolívar	-0,04	-0,98	-0,55
Sozoranga	-2,21	1,35	-0,74
Sucre	0,47	0,48	-1,29
Sucua	-0,22	0,98	-0,05
Sucumbios	-0,73	-1,21	0,83
Suscal	-0,45	-0,42	-0,85
Taisha	-0,28	-1,28	1,54
Tena	-0,84	0,09	0,58
Tisaleo	0,31	-0,92	0,32
Tiwintza	-0,80	-0,18	1,28
Tosagua	-0,26	-0,36	-0,21
Tulcán	0,47	-0,54	0,92
Urdaneta	-1,29	0,00	-1,07
Valencia	0,25	-0,75	0,43
Ventanas	-0,83	0,08	0,21
Vinces	-0,54	-0,17	0,02
Yacuambi	-2,91	4,54	0,48
Yaguachi	-0,42	-0,63	1,27
Yantzaza	-0,27	0,66	-0,07
Zamora	-0,09	1,22	0,32
Zapotillo	-0,51	0,91	0,44
Zaruma	0,64	-0,08	0,70

Anexo C - Calificación de los Gobiernos Autónomos Descentralizados Municipales obtenidas por el método de conglomerados.

Gobierno Autónomo Descentralizado Municipal	Calificación
24 De Mayo	E
Alausí	A
Ambato	C
Antonio Ante	A
Arajuno	B
Archidona	B
Arenillas	C
Atacames	C
Atahualpa	B
Azogues	C
Baba	B
Babahoyo	D
Balao	A
Balsas	B
Balzar	B
Biblian	B
Bolívar (Carchi)	D
Bolívar (Manabí)	E
Caluma	A
Calvas	D
Camilo Ponce	A
Cañar	B
Carlos Julio Arosemena	B
Cascales	B
Catamayo	A
Cayambe	A
Celica	E
Centinela del Condor	D
Chaguarpamba	E
Chambo	C
Chilla	E
Chillanes	E
Chone	C
Chordeleg	D
Chunchi	D
Colimes	B
Colta	B
Cotacachi	A
Cumandá	A
Cuyabeno	A
Deleg	B
Durán	A
Echeandía	D
El Carmen	D
El Chaco	B
El Empalme	B
El Guabo	A
El Pan	B
El Panguí	D
El Tambo	A
El Triunfo	C
Eloy Alfaro	B
Esmeraldas	A
Espejo	B
Espindola	D
Flavio Alfaro	E

Gobierno Autónomo Descentralizado Municipal	Calificación
Francisco de Orellana	A
Girón	C
Gonzalo Pizarro	B
Gonzanama	E
Guachapala	D
Gualaceo	A
Gualaquiza	B
Guamote	D
Guano	D
Guaranda	A
Huaca	D
Huamboya	B
Isabela	A
Isidro Ayora	A
Jama	B
Jaramijó	B
Junín	B
La Joya de los Sachas	B
La Maná	A
La Troncal	A
La Libertad	A
Lago Agrio	A
Las Lajas	B
Las Naves	C
Limón Indanza	B
Logroño	B
Lomas de Sargentillo	B
Loreto	B
Macara	D
Manta	A
Marcabelí	A
Marcelino Maridueña	C
Mejía	C
Mera	B
Milagro	D
Mira	B
Mocache	D
Mocha	C
Montalvo	B
Montufar	A
Morona	D
Muisne	B
Nabón	B
Nangaritza	D
Naranjal	C
Naranjito	E
Nobol	C
Olmedo (Manabí)	E
Oña	B
Otavalo	C
Pablo Sexto	B
Paján	E
Palanda	D
Palenque	B
Palestina	D
Pallatanga	D
Palora	A

Gobierno Autónomo Descentralizado Municipal	Calificación
Paltas	B
Pangua	B
Paquisha	D
Pasaje	C
Pastaza	D
Patate	A
Paute	A
Pedernales	B
Pedro Carbo	B
Pedro Moncayo	A
Pedro Vicente Maldonado	A
Pelileo	A
Penipe	B
Pichincha	B
Píllaro	C
Pimampiro	B
Pindal	E
Piñas	A
Playas	C
Portovelo	A
Pucara	B
Puebloviejo	D
Puerto Quito	A
Pujilí	B
Putumayo	B
Puyango	D
Quero	A
Quevedo	C
Quijos	A
Quinindé	C
Quinsaloma	C
Riobamba	C
Rioverde	B
Rocafuerte	B
Salcedo	A
Salitre	E
San Cristóbal	A
San Fernando	B
San Juan Bosco	B
San Lorenzo	B
San Miguel	D
San Miguel de los Bancos	C
San Vicente	C
Santa Ana	B
Santa Clara	B
Santa Cruz	A
Santa Elena	A
Santa Isabel	C
Santa Lucía	B
Santa Rosa	E
Santiago	C
Saquisilí	A
Saraguro	D
Sevilla de Oro	D
Shushufindi	D
Sigchos	B
Sigsig	D
Simón Bolívar	A

Gobierno Autónomo Descentralizado Municipal	Calificación
Santo Domingo	C
Sucre	C
Sucua	D
Sucumbios	B
Suscal	C
Taisha	B
Tena	D
Tisaleo	A
Tiwintza	B
Tosagua	B
Tulcán	A
Urcuquí	A
Urdaneta	E
Valencia	A
Ventanas	D
Vinces	B
Yaguachi	B
Yantzaza	D
Zamora	D
Zapotillo	D
Zaruma	A

Anexo D – Estadísticas por casos.

Gobierno Autónomo Descentralizado Municipal	Grupo real	Grupo pronosticado	Probabilidad a posteriori
24 De Mayo	E	E	1,0
Alausí	A	B **	0,5
Ambato	C	C	1,0
Antonio Ante	A	A	1,0
Arajuno	B	B	0,9
Archidona	B	B	1,0
Arenillas	C	C	1,0
Atacames	C	C	1,0
Atahualpa	B	B	0,9
Azogues	C	C	1,0
Baba	B	B	0,8
Babahoyo	D	D	0,9
Balao	A	A	0,8
Balzar	B	B	0,9
Biblián	B	A **	0,5
Bolívar (Carchi)	D	D	0,5
Bolívar (Manabí)	E	B **	0,4
Caluma	A	A	0,9
Calvas	D	D	1,0
Camilo Ponce	A	A	0,9
Cañar	B	A **	0,5
Carlos Julio Arosemena	B	B	1,0
Cascales	B	B	1,0
Catamayo	A	A	0,9
Cayambe	A	A	1,0
Celica	E	E	1,0
Centinela del Condor	D	D	0,9
Chaguarpamba	E	E	1,0
Chambo	C	C	0,6
Chilla	E	E	1,0
Chillanes	E	E	1,0
Chone	C	C	1,0
Chordeleg	D	D	0,9
Chunchi	D	D	0,8
Colimes	B	B	0,8
Colta	B	B	1,0
Cotacachi	A	A	0,8
Cumandá	A	A	1,0
Cuyabeno	A	A	1,0
Deleg	B	B	0,5
Durán	A	A	1,0
Echeandía	D	D	0,9
El Carmen	D	D	0,5
El Chaco	B	B	0,9
El Empalme	B	B	1,0
El Guabo	A	A	0,8
El Pan	B	B	0,9
El Panguí	D	D	0,9
El Tambo	A	A	0,9
El Triunfo	C	C	0,9
Eloy Alfaro	B	B	0,8
Esmeraldas	A	C **	0,5
Espejo	B	B	1,0
Espindola	D	E **	0,6
Flavio Alfaro	E	E	1,0
Orellana	A	A	0,8

Gobierno Autónomo Descentralizado Municipal	Grupo real	Grupo pronosticado	Probabilidad a posteriori
Girón	C	C	1,0
Gonzalo Pizarro	B	B	0,9
Gonzanamá	E	E	1,0
Guachapala	D	D	1,0
Gualaceo	A	A	0,9
Gualaquiza	B	B	0,9
Guamote	D	D	0,8
Guano	D	D	0,5
Guaranda	A	B **	0,5
Huamboya	B	B	0,5
Isabela	A	A	1,0
Isidro Ayora	A	C **	0,5
Jama	B	B	0,8
Jaramijó	B	B	0,9
Junín	B	B	0,8
La Joya de los Sachas	B	B	0,6
La Maná	A	A	0,8
La Troncal	A	A	1,0
La Libertad	A	A	1,0
Lago Agrio	A	A	0,8
Las Lajas	B	B	0,8
Las Naves	C	C	0,4
Limón Indanza	B	B	0,5
Logroño	B	B	1,0
Lomas de Sargentillo	B	B	0,7
Loreto	B	B	1,0
Macara	D	D	0,9
Manta	A	D **	0,6
Marcabelí	A	B **	0,6
Marcelino Maridueña	C	C	1,0
Mejía	C	C	1,0
Mera	B	D **	0,6
Milagro	D	A **	0,9
Mira	B	B	1,0
Mocache	D	D	1,0
Mocha	C	C	1,0
Montalvo	B	B	0,6
Montufar	A	A	1,0
Morona	D	D	1,0
Muisne	B	B	0,9
Nabón	B	B	1,0
Nangaritza	D	D	0,6
Naranjal	C	C	0,9
Naranjito	E	E	0,6
Nobol	C	C	1,0
Olmedo (Manabí)	E	E	1,0
Oña	B	B	0,9
Otavalo	C	C	1,0
Pablo Sexto	B	B	0,7
Paján	E	E	1,0
Palanda	D	D	1,0
Palenque	B	B	1,0
Palestina	D	D	1,0
Pallatanga	D	D	0,7
Palora	A	A	1,0
Paltas	B	B	0,7
Pangua	B	B	0,8

Gobierno Autónomo Descentralizado Municipal	Grupo real	Grupo pronosticado	Probabilidad a posteriori
Palanda	D	D	1,0
Palenque	B	B	1,0
Palestina	D	D	1,0
Pallatanga	D	D	0,7
Palora	A	A	1,0
Paltas	B	B	0,7
Pangua	B	B	0,8
Paquisha	D	D	0,9
Pasaje	C	C	0,9
Pastaza	D	D	0,6
Patate	A	A	0,9
Paute	A	A	0,6
Pedernales	B	B	0,9
Pedro Carbo	B	B	0,9
Pedro Moncayo	A	A	1,0
Pedro Vicente M.	A	C **	0,7
Pelileo	A	A	0,9
Penipe	B	B	1,0
Pichincha	B	B	0,8
Pimampiro	B	B	0,8
Pindal	E	E	1,0
Piñas	A	A	1,0
Playas	C	C	1,0
Portovelo	A	A	1,0
Pucara	B	B	1,0
Puebloviejo	D	D	0,9
Puerto Quito	A	A	0,8
Pujilí	B	B	0,5
Putumayo	B	B	1,0
Puyango	D	D	1,0
Quero	A	A	0,7
Quevedo	C	C	1,0
Quijos	A	A	0,7
Quinindé	C	C	1,0
Quinsaloma	C	C	0,9
Riobamba	C	C	1,0
Rioverde	B	A **	0,4
Rocafuerte	B	D **	0,5
Salcedo	A	A	1,0
Salitre	E	E	0,9
San Cristóbal	A	A	0,9
San Fernando	B	B	0,6
San Juan Bosco	B	B	0,5
San Lorenzo	B	B	0,8
San Miguel	D	D	0,9
Los Bancos	C	C	1,0
Huaca	D	D	0,9
San Vicente	C	C	1,0
Santa Ana	B	B	1,0
Santa Clara	B	B	0,9
Santa Cruz	A	A	1,0
Santa Elena	A	A	1,0
Santa Isabel	C	C	1,0
Santa Lucía	B	B	1,0
Santa Rosa	E	C **	1,0
Santiago	C	C	1,0

Gobierno Autónomo Descentralizado Municipal	Grupo real	Grupo pronosticado	Probabilidad a posteriori
Píllaro	C	C	0,9
Saquisilí	A	A	0,6
Saraguro	D	D	0,9
Sevilla de Oro	D	D	1,0
Shushufindi	D	D	1,0
Sigchos	B	B	0,7
Sigsig	D	D	0,7
Simón Bolívar	A	A	0,5
Santo Domingo	C	C	1,0
Sucre	C	C	1,0
Sucua	D	D	1,0
Sucumbios	B	B	1,0
Suscal	C	B **	0,4
Taisha	B	B	1,0
Tena	D	D	0,8
Tisaleo	A	A	0,8
Tiwintza	B	B	0,7
Tosagua	B	B	0,8
Tulcán	A	A	0,9
Urcuquí	A	B **	0,6
Urdaneta	E	E	1,0
Valencia	A	A	0,7
Ventanas	D	D	0,6
Vinces	B	B	0,8
Balsas	B	B	0,6
Yaguachi	B	B	1,0
Yantzaza	D	D	1,0
Zamora	D	D	1,0
Zapotillo	D	D	1,0
Zaruma	A	A	0,9

Anexo E – Resultado de las 36 configuraciones propuestas para las máquinas de vectores de soporte con función de núcleo de base radial.

Configuración	C	γ	Casos clasificados correctamente					
			A	B	C	D	E	Total
1	1	0,01	96%	95%	83%	81%	40%	86%
2	1	0,05	98%	94%	86%	84%	67%	90%
3	1	0,1	96%	92%	86%	86%	60%	89%
4	1	0,5	88%	94%	66%	87%	7%	80%
5	1	1	56%	95%	7%	24%	0%	51%
6	1	10	0%	100%	0%	0%	0%	33%
7	10	0,01	94%	95%	86%	89%	60%	90%
8	10	0,05	90%	92%	86%	87%	73%	88%
9	10	0,1	96%	87%	86%	87%	73%	88%
10	10	0,5	85%	95%	69%	87%	13%	81%
11	10	1	58%	94%	21%	38%	0%	56%
12	10	10	0%	100%	0%	0%	0%	33%
13	30	0,01	94%	94%	86%	87%	80%	90%
14	30	0,05	92%	86%	86%	84%	67%	85%
15	30	0,1	96%	86%	86%	87%	73%	88%
16	30	0,5	85%	95%	69%	87%	13%	81%
17	30	1	58%	94%	21%	38%	0%	56%
18	30	10	0%	100%	0%	0%	0%	33%
19	50	0,01	96%	91%	90%	89%	67%	90%
20	50	0,05	92%	86%	86%	84%	67%	85%
21	50	0,1	96%	86%	86%	87%	73%	88%
22	50	0,5	85%	95%	69%	87%	13%	81%
23	50	1	58%	94%	21%	38%	0%	56%
24	50	10	0%	100%	0%	0%	0%	33%
25	70	0,01	98%	91%	93%	87%	67%	90%
26	70	0,05	92%	86%	86%	84%	68%	85%
27	70	0,1	96%	86%	86%	87%	73%	88%
28	70	0,5	85%	95%	69%	87%	13%	81%
29	70	1	58%	94%	21%	38%	0%	56%
30	70	10	0%	100%	0%	0%	0%	33%
31	100	0,01	98%	89%	93%	92%	67%	91%
32	100	0,05	92%	86%	86%	84%	67%	85%
33	100	0,1	96%	86%	86%	87%	73%	88%
34	100	0,5	85%	95%	69%	87%	13%	81%
35	100	1	58%	94%	21%	38%	0%	56%
36	100	10	0%	100%	0%	0%	0%	33%

Anexo F – Resultados para 12 configuraciones de las máquinas de vectores de soporte.

Prueba 1

=== Summary ===

Correctly Classified Instances	166	86.4583 %
Incorrectly Classified Instances	26	13.5417 %
Kappa statistic	0.8193	
Mean absolute error	0.246	
Root mean squared error	0.3255	
Relative absolute error	80.3998 %	
Root relative squared error	83.2542 %	
Total Number of Instances	192	

=== Confusion Matrix ===

a	b	c	d	e	<--	classified as
46	2	0	0	0		a = A
1	60	0	2	0		b = B
2	3	24	0	0		c = C
3	4	0	30	0		d = D
0	4	1	4	6		e = E

Prueba 3

=== Summary ===

Correctly Classified Instances	170	88.5417 %
Incorrectly Classified Instances	22	11.4583 %
Kappa statistic	0.8486	
Mean absolute error	0.2458	
Root mean squared error	0.325	
Relative absolute error	80.3317 %	
Root relative squared error	83.1149 %	
Total Number of Instances	192	

=== Confusion Matrix ===

a	b	c	d	e	<--	classified as
46	1	1	0	0		a = A
3	58	0	2	0		b = B
1	3	25	0	0		c = C
1	3	0	32	1		d = D
0	2	1	3	9		e = E

Prueba 5

=== Summary ===

Correctly Classified Instances	98	51.0417 %
Incorrectly Classified Instances	94	48.9583 %
Kappa statistic	0.2939	
Mean absolute error	0.2804	
Root mean squared error	0.3747	
Relative absolute error	91.6326 %	
Root relative squared error	95.8402 %	
Total Number of Instances	192	

=== Confusion Matrix ===

a	b	c	d	e	<-- classified as
0	48	0	0	0	a = A
0	63	0	0	0	b = B
0	29	0	0	0	c = C
0	37	0	0	0	d = D
0	15	0	0	0	e = E

Prueba 6

=== Summary ===

Correctly Classified Instances	63	32.8125 %
Incorrectly Classified Instances	129	67.1875 %
Kappa statistic	0	
Mean absolute error	0.296	
Root mean squared error	0.395	
Relative absolute error	96.7384 %	
Root relative squared error	101.0319 %	
Total Number of Instances	192	

=== Confusion Matrix ===

a	b	c	d	e	<-- classified as
0	48	0	0	0	a = A
0	63	0	0	0	b = B
0	29	0	0	0	c = C
0	37	0	0	0	d = D
0	15	0	0	0	e = E

Prueba 7

=== Summary ===

Correctly Classified Instances	172	89.5833 %
Incorrectly Classified Instances	20	10.4167 %
Kappa statistic	0.8624	
Mean absolute error	0.2448	
Root mean squared error	0.323	
Relative absolute error	79.9913 %	
Root relative squared error	82.6215 %	
Total Number of Instances	192	

=== Confusion Matrix ===

a	b	c	d	e	<--	classified as
45	2	0	1	0		a = A
1	60	0	2	0		b = B
1	3	25	0	0		c = C
1	2	0	33	1		d = D
0	1	2	3	9		e = E

Prueba 9

=== Summary ===

Correctly Classified Instances	169	88.0208 %
Incorrectly Classified Instances	23	11.9792 %
Kappa statistic	0.8428	
Mean absolute error	0.2469	
Root mean squared error	0.3263	
Relative absolute error	80.6721 %	
Root relative squared error	83.4585 %	
Total Number of Instances	192	

=== Confusion Matrix ===

a	b	c	d	e	<--	classified as
46	1	0	1	0		a = A
3	55	1	4	0		b = B
1	3	25	0	0		c = C
1	3	0	32	1		d = D
0	0	3	1	11		e = E

Prueba 11

=== Summary ===

Correctly Classified Instances	107	55.7292 %
Incorrectly Classified Instances	85	44.2708 %
Kappa statistic	0.3688	
Mean absolute error	0.2775	
Root mean squared error	0.3708	
Relative absolute error	90.6795 %	
Root relative squared error	94.8396 %	
Total Number of Instances	192	

=== Confusion Matrix ===

a	b	c	d	e	<--	classified as
28	20	0	0	0		a = A
4	59	0	0	0		b = B
1	22	6	0	0		c = C
0	23	0	14	0		d = D
0	14	0	1	0		e = E

Prueba 12

=== Summary ===

Correctly Classified Instances	63	32.8125 %
Incorrectly Classified Instances	129	67.1875 %
Kappa statistic	0	
Mean absolute error	0.296	
Root mean squared error	0.395	
Relative absolute error	96.7384 %	
Root relative squared error	101.0319 %	
Total Number of Instances	192	

=== Confusion Matrix ===

a	b	c	d	e	<--	classified as
0	48	0	0	0		a = A
0	63	0	0	0		b = B
0	29	0	0	0		c = C
0	37	0	0	0		d = D
0	15	0	0	0		e = E

Prueba 31

=== Summary ===

Correctly Classified Instances	174	90.625 %
Incorrectly Classified Instances	18	9.375 %
Kappa statistic	0.8775	
Mean absolute error	0.2448	
Root mean squared error	0.3232	
Relative absolute error	79.9913 %	
Root relative squared error	82.6545 %	
Total Number of Instances	192	

=== Confusion Matrix ===

a	b	c	d	e	<-- classified as
47	0	0	1	0	a = A
3	56	0	4	0	b = B
0	1	27	0	1	c = C
1	1	0	34	1	d = D
0	0	5	0	10	e = E

Prueba 33

=== Summary ===

Correctly Classified Instances	168	87.5 %
Incorrectly Classified Instances	24	12.5 %
Kappa statistic	0.836	
Mean absolute error	0.2471	
Root mean squared error	0.3266	
Relative absolute error	80.7402 %	
Root relative squared error	83.532 %	
Total Number of Instances	192	

=== Confusion Matrix ===

a	b	c	d	e	<-- classified as
46	1	0	1	0	a = A
4	54	1	4	0	b = B
1	3	25	0	0	c = C
1	3	0	32	1	d = D
0	0	3	1	11	e = E

Prueba 35

=== Summary ===

Correctly Classified Instances	107	55.7292 %
Incorrectly Classified Instances	85	44.2708 %
Kappa statistic	0.3688	
Mean absolute error	0.2775	
Root mean squared error	0.3708	
Relative absolute error	90.6795 %	
Root relative squared error	94.8396 %	
Total Number of Instances	192	

=== Confusion Matrix ===

a	b	c	d	e	<-- classified as
28	20	0	0	0	a = A
4	59	0	0	0	b = B
1	22	6	0	0	c = C
0	23	0	14	0	d = D
0	14	0	1	0	e = E

Prueba 36

=== Summary ===

Correctly Classified Instances	63	32.8125 %
Incorrectly Classified Instances	129	67.1875 %
Kappa statistic	0	
Mean absolute error	0.296	
Root mean squared error	0.395	
Relative absolute error	96.7384 %	
Root relative squared error	101.0319 %	
Total Number of Instances	192	

=== Confusion Matrix ===

a	b	c	d	e	<-- classified as
0	48	0	0	0	a = A
0	63	0	0	0	b = B
0	29	0	0	0	c = C
0	37	0	0	0	d = D
0	15	0	0	0	e = E