

# ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS

ÍNDICES  $N$  Y  $N_+$  PARA EL POLÍTOPO DE CONJUNTOS  
ESTABLES ASOCIADO A CIERTAS FAMILIAS DE ANTIWEBS

PROYECTO PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE INGENIERÍA  
MATEMÁTICA

JESSICA MARIBEL MONTENEGRO CHINGAL  
mary\_sioque@hotmail.com

Director: LUIS MIGUEL TORRES CARVAJAL  
luis.torres@epn.edu.ec

QUITO, 10 DE SEPTIEMBRE DE 2012

## DECLARACIÓN

Yo JESSICA MARIBEL MONTENEGRO CHINGAL, declaro bajo juramento que el trabajo aquí escrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

A través de la presente declaración cedo mis derechos de propiedad intelectual, correspondientes a este trabajo, a la Escuela Politécnica Nacional, según lo establecido por la Ley de Propiedad Intelectual, por su reglamento y por la normatividad institucional vigente.

---

Jessica Maribel Montenegro Chingal

## CERTIFICACIÓN

Certifico que el presente trabajo fue desarrollado por JESSICA MARIBEL MONTENEGRO CHINGAL, bajo mi supervisión

---

Luis Miguel Torres Carvajal  
Director del Proyecto

## AGRADECIMIENTOS

Doy gracias a Dios, por otorgarme el gusto por la matemática.

A mis padres, por dejarlo todo para acompañarnos a mis hermanos y a mi en el camino hacia nuestros sueños.

A mi hermano mayor, por ser ejemplo de amor y entrega.

A mis hermanos menores, por ser mi inspiración y alegría.

A toda mi familia, porque su cariño me ha dado ánimo de seguir.

A mi novio, gracias por estar a mi lado incondicionalmente y llenar mi vida de felicidad.

A Juan Carlos, por motivarme a trabajar con Luis Miguel y estar pendiente durante todo este trayecto.

A Luis Miguel, por el tiempo y esfuerzo que invirtió en este proyecto.

A Diego, porque me “regaló tiempo” para hacer la tesis.

A los sicomorianos y a mis amigos de la poli, por las alegrías y tristezas que he vivido junto a ustedes.

## DEDICATORIA

*A quienes puso Dios en vida para guiarla, mis padres.*

**maribel**

# Índice de contenido

Índice de figuras	vii
Resumen	1
Abstract	2
<b>1 Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1 Métodos de planos cortantes . . . . .	1
1.2 Grafos . . . . .	14
1.3 Problema de conjuntos estables . . . . .	16
1.3.1 El problema de conjuntos estables de peso máximo . . . . .	16
1.3.2 Desigualdades válidas y facetas . . . . .	20
1.3.3 Rango de Chvátal del polítopo de conjuntos estables . . . . .	24
<b>2 Los operadores <math>N</math> y <math>N_+</math></b>	<b>27</b>
2.1 Conos de matrices y sus proyecciones . . . . .	27
2.2 Propiedades del operador $N$ . . . . .	37
2.3 Aplicación a la relajación de aristas del polítopo de conjuntos estables .	42
2.3.1 Cotas para el índice $N$ . . . . .	43
2.3.2 Cotas para el índice $N_+$ . . . . .	53
2.3.3 Casos particulares . . . . .	54
2.3.4 Acerca del operador $N(K, K)$ . . . . .	55
<b>3 Índices <math>N</math> y <math>N_+</math> para antiwebs</b>	<b>56</b>
3.1 Sucesiones constructivas . . . . .	57
3.2 Cotas superiores para el índice $N$ . . . . .	60
3.2.1 Ejemplos de motivación . . . . .	60
3.2.2 Sucesiones constructivas para $N$ . . . . .	68
<b>4 Conclusiones</b>	<b>75</b>
Referencias	76

# Índice de figuras

1.1	Región factible de $PE_0$ . . . . .	3
1.2	Regiones obtenidas después de añadir las restricciones de ramificación $x_1 \leq 1$ y $x_1 \geq 2$ . . . . .	3
1.3	Árbol de programas enteros. . . . .	4
1.4	Cortes Gomory-Chvátal. . . . .	8
1.5	Polítopos de dimensión 0, 1 y 2 en $\mathbb{R}^2$ . . . . .	10
1.6	Plano cortante de intersección. . . . .	13
1.7	Planos cortantes de franjas. . . . .	14
1.8	Ejemplos de webs y antiwebs. . . . .	17
1.9	La clique $Q_5$ . . . . .	21
1.10	El agujero $C_7$ . . . . .	22
1.11	El anti-agujero $\overline{C}_7$ . . . . .	22
3.1	Contracción de un nodo en la antiweb $\overline{W}_{10}^3$ . . . . .	57
3.2	El agujero impar $C_5 = \overline{W}_5^1$ . . . . .	60
3.3	Antiweb $\overline{W}_{11}^3$ y subantiweb $\overline{W}_5^1$ . . . . .	64

# Resumen

El polítopo de conjuntos estables  $\text{STAB}(G)$  ha sido ampliamente estudiado desde el enfoque de planos cortantes. En particular, para las antiwebs en los trabajos de Holm et. al [27] y [29] se encuentran cotas superiores e inferiores para el rango de Chvátal de las relajaciones de arista  $\text{ESTAB}(\overline{W}_n^k)$  y de clique  $\text{QSTAB}(\overline{W}_n^k)$ . En este proyecto hemos estudiado otro de los métodos clásicos para la generación de planos cortantes, el propuesto por Lovász y Schrijver [33], y su aplicación a  $\text{ESTAB}(G)$ . Hemos probado que el índice  $N_+$  de  $\text{ESTAB}(\overline{W}_n^k)$  es 1 y presentamos además una construcción que genera cotas superiores para el índice  $N$  de  $\text{ESTAB}(\overline{W}_n^k)$  para ciertas familias de antiwebs.



# Abstract

The stable set polytope  $\text{STAB}(G)$  has been widely studied from the viewpoint of cutting planes. In particular, for antiwebs Holm et. al in [27] and [29] presented upper and lower bounds for the Chvátal rank of the edge relaxation stable set polytope  $\text{STAB}(\overline{W}_n^k)$  and the clique relaxation stable set polytope  $\text{QSTAB}(\overline{W}_n^k)$ . In this project we study another classical cutting planes relaxation proposed by Lovász and Schrijver [33] and its application to  $\text{STAB}(G)$ . We prove that the index  $N_+$  of  $\text{ESTAB}(\overline{W}_n^k)$  is equal to 1 and we also present a construction that yields upper bounds for the  $N$ -index of  $\text{ESTAB}(\overline{W}_n^k)$  for certain families of antiwebs.

# Capítulo 1

## Preliminares

### 1.1 Métodos de planos cortantes

Un *programa entero* consiste en optimizar, maximizar o minimizar, una función lineal sujeta a un conjunto de restricciones lineales y donde las variables de decisión están además restringidas a tomar valores enteros. En general, puede escribirse en la siguiente forma:

$$(PE) \begin{cases} \text{máx } c^T x \\ Ax \leq b, \\ x \in \mathbb{Z}^n, \end{cases}$$

donde  $c \in \mathbb{Z}^n$ ,  $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$  y  $b \in \mathbb{Z}^m$ .

La programación entera es una herramienta de modelización muy versátil. Muchos problemas de optimización combinatoria pueden ser formulados como instancias de PE. Por otra parte, se conoce que los programas enteros son NP-difíciles [31]. Esto implica que es poco probable la existencia de un algoritmo eficiente para su solución en general. El desarrollo de estrategias de solución para programas enteros constituye un área de investigación importante dentro de la optimización discreta.

La *relajación lineal* de PE es el programa lineal que se obtiene al eliminar la restricción de integralidad sobre las variables. Es decir,

$$(RL) \begin{cases} \text{máx } c^T x \\ Ax \leq b. \end{cases}$$

Se ha demostrado, empleando el método del elipsoide [32], que un programa lineal puede ser resuelto en tiempo polinomial. Se han desarrollado además algoritmos eficientes para su solución práctica, como el método del simplex y los métodos de punto interior.

Notar, por otra parte, que el valor de una solución óptima de RL acota superior-

mente al valor óptimo de PE. Esta observación es aprovechada por uno de los métodos más utilizados para la solución de programas enteros: el método de ramificación y acotamiento.

El algoritmo de ramificación y acotamiento (o “branch–and–bound”) construye un árbol de subproblemas particionando recursivamente el conjunto de soluciones factibles en regiones cada vez más pequeñas. Para conseguir que esta estrategia enumerativa sea computacionalmente eficiente, se usan las cotas de la relajación lineal para eliminar algunos subproblemas, lo que dentro del algoritmo se denomina “podar el árbol de búsqueda”.

El algoritmo mantiene un conjunto  $L$  de nodos (programas enteros) por procesar. Denotaremos como  $\hat{x}$  a la mejor solución factible encontrada hasta el momento y  $\hat{z}$  a su valor. Al inicio,  $PE_0 := PE$ ,  $L := \{PE_0\}$  y  $\hat{z} := -\infty$ . Llamaremos  $\text{reg}(PE)$  a la región factible del programa PE. Asumiremos por simplicidad que  $\text{reg}(PE_0)$  es acotada.

En cada iteración, el algoritmo toma un programa entero  $PE_i$  de  $L$  y resuelve su relajación lineal  $RL_i$ . Si  $RL_i$  no es factible, la iteración termina. Caso contrario, sean  $x^i$  la solución óptima de  $RL_i$  y  $z^i$  su valor. Si  $z^i \leq \hat{z}$ , entonces  $\text{reg}(PE_i)$  no contiene ninguna solución factible que pueda superar la mejor solución encontrada hasta el momento, y la iteración termina (“poda”).

Caso contrario, si  $z^i > \hat{z}$  y  $z^i$  es entera, se actualizan  $\hat{x}$  y  $\hat{z}$  y la iteración termina. Cuando  $z^i > \hat{z}$  pero  $z^i$  no es entera, se determina alguna variable de decisión  $x_j^i$  tal que  $x_j^i = r \notin \mathbb{Z}$ . Se crean entonces dos programas enteros dividiendo a  $\text{reg}(PE_i)$  en dos subregiones disjuntas por medio de las *restricciones de ramificación*:

$$\begin{aligned} \text{reg}(PE_{i+1}) &: \text{reg}(PE_i) \cap \{x_j \leq \lfloor r \rfloor\} \\ \text{reg}(PE_{i+2}) &: \text{reg}(PE_i) \cap \{x_j \geq \lceil r \rceil\}. \end{aligned}$$

Notar que  $\text{reg}(PE_{i+1}) \cup \text{reg}(PE_{i+2})$  contiene todas las soluciones enteras factibles de  $PE_i$ , pero descarta la solución fraccionaria  $x^i$ . Finalmente, se añaden los programas enteros  $PE_{i+1}$  y  $PE_{i+2}$  (correspondientes a estas regiones) al conjunto  $L$  de programas por procesar, y la iteración termina.

El algoritmo finaliza cuando todos los nodos de  $L$  han sido procesados.

Consideremos el siguiente ejemplo para ilustrar el funcionamiento del método.

$$PE_0 \left\{ \begin{array}{l} \text{máx} \quad z = 2x_1 + \frac{7}{2}x_2 \\ (1) \quad x_1 + 2x_2 \leq 3, \\ (2) \quad 6x_1 + 8x_2 \leq 15, \\ \quad \quad x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+. \end{array} \right.$$

Inicialmente,  $L = \{PE_0\}$  y  $\hat{z} = -\infty$ . La Figura [figure][1][1]1.1 muestra la región factible de este programa.

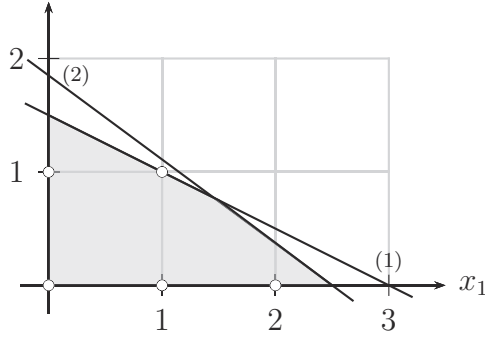


Figura 1.1: Región factible de  $PE_0$ .

Resolviendo la relajación lineal de  $PE_0$ , se obtiene la cota superior  $z = \frac{45}{8} = 5,625$  correspondiente a la solución  $x = (\frac{3}{2}, \frac{3}{4})$ . Examinando la variable  $x_1$ , añadimos las restricciones de ramificación  $x_1 \leq 1$  y  $x_1 \geq 2$  para obtener los nuevos subproblemas  $PE_1$  y  $PE_2$ . En la Figura [figure][2][1]1.2 se presentan los gráficos de las regiones factibles correspondientes.

$$PE_1 \left\{ \begin{array}{l} \text{máx } z = 2x_1 + \frac{7}{2}x_2 \\ x_1 + 2x_2 \leq 3, \\ 6x_1 + 8x_2 \leq 15, \\ (3) \quad x_1 \leq 1, \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+. \end{array} \right. \quad PE_2 \left\{ \begin{array}{l} \text{máx } z = 2x_1 + \frac{7}{2}x_2 \\ x_1 + 2x_2 \leq 3, \\ 6x_1 + 8x_2 \leq 15, \\ (4) \quad x_1 \geq 2, \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+. \end{array} \right.$$

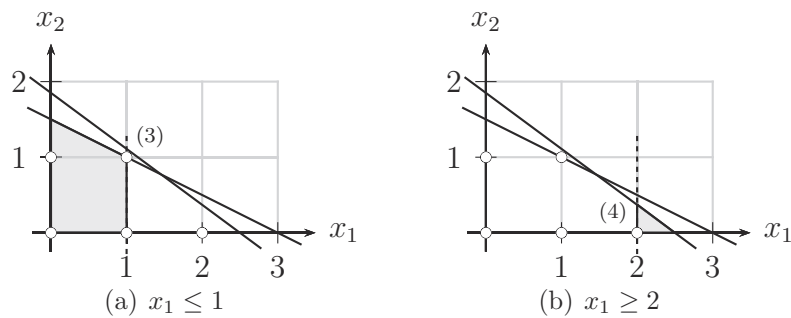


Figura 1.2: Regiones obtenidas después de añadir las restricciones de ramificación  $x_1 \leq 1$  y  $x_1 \geq 2$ .

Añadimos  $PE_1$  y  $PE_2$  a  $L$  y la iteración termina. En la siguiente iteración, consideramos  $PE_1$  y resolvemos su relajación lineal. Se obtiene  $x = (1, 1)$  y  $z = \frac{11}{2} = 5,5$ . Como la solución es entera, no se ramifica; además, ya que  $z > \hat{z}$  actualizamos  $\hat{x} = (1, 1)$  y  $\hat{z} = 5,5$ .

Consideramos ahora  $PE_2$ . Al resolverlo se obtiene  $x = (2, \frac{3}{8})$  y  $z = \frac{85}{16} = 5,3125$ . La cota superior para los subproblemas que pudieran generarse a partir de  $PE_2$  es 5,3125 y por tanto no pueden obtenerse soluciones enteras que mejoren el valor de  $\hat{z}$ . El nodo es descartado (poda). Debido a que no hay más nodos por explorar, el algoritmo termina con la solución  $\hat{x} = (1, 1)$ .

Todo el proceso anterior puede resumirse en el siguiente árbol de búsqueda:

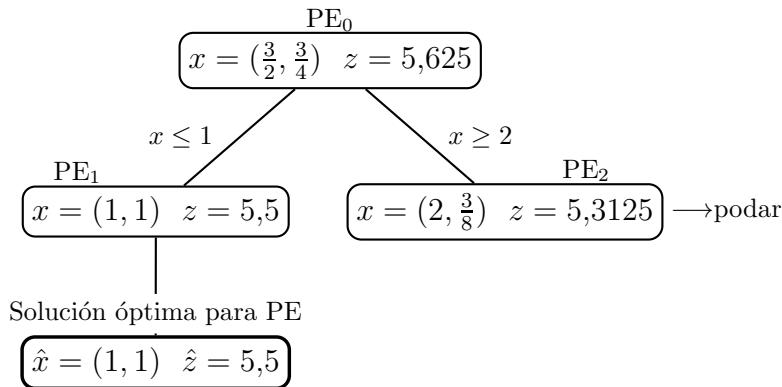


Figura 1.3: Árbol de programas enteros.

Debido a su carácter enumerativo, el método de ramificación y acotación puede tener una alta complejidad computacional. En el peor caso, puede que sea necesario resolver un subproblema por cada solución factible del problema original. Por esta razón, se estudian diversas técnicas para mejorar la eficiencia del método en aplicaciones particulares, por ejemplo, el uso de diferentes reglas de ramificación, o criterios para la selección del orden de tratamiento de los subproblemas. Una estrategia que ha sido profundamente investigada durante las últimas décadas consiste en reemplazar o mejorar las cotas obtenidas de la relajación lineal de los subproblemas. Generalmente, para ello se emplea una técnica conocida como planos cortantes.

Gomory [24] fue uno de lo pioneros en usar el procedimiento de planos cortantes en la programación entera. El algoritmo que Gomory planteó se describe a continuación.

Considerar inicialmente la relajación lineal de un programa entero escrita en su forma estándar,

$$(RLE) \begin{cases} \text{máx} & c^T x \\ Ax & = b, \\ x & \in \mathbb{R}_+^n. \end{cases}$$

Es decir, las restricciones de desigualdad se han escrito como igualdades y todas las variables se restringen a ser positivas. Es conocido que cualquier programa lineal puede ser escrito de esta forma, posiblemente tras introducir variables auxiliares conocidas como variables de holgura.

Se resuelve RLE usando el método del simplex. Si la solución no es entera, entonces existe una variable básica  $x_i$  para la cual la fila correspondiente del tableau del simplex tiene la forma

$$x_i + \sum_{j \notin I} a'_{ij} x_j = b'_i, \quad (1.1)$$

donde  $I$  es el conjunto de índices de las variables básicas y  $b'_i \notin \mathbb{Z}$ . Notar que una solución óptima  $x^*$  para RLE se obtiene al poner cero a las variables no básicas, es decir,  $x_j^* = 0$  para todo  $j \notin I$  y  $x_i^* = b'_i$ , para todo  $i \in I$ .

Puesto que  $\lfloor a'_{ij} \rfloor \leq a'_{ij}$  y  $x_j \geq 0$ , se concluye de ([equation][1][1]1.1) que la siguiente desigualdad es válida para todo punto de la región factible de RLE:

$$x_i + \sum_{j \notin I} \lfloor a'_{ij} \rfloor x_j \leq b'_i.$$

Por otra parte, notar que para toda solución entera  $x$  de RLE el lado izquierdo de la anterior desigualdad debe ser entero. Por este motivo, podemos restringir el lado derecho a ser entero también:

$$x_i + \sum_{j \notin I} \lfloor a'_{ij} \rfloor x_j \leq \lfloor b'_i \rfloor. \quad (1.2)$$

Sean  $f_j := a'_{ij} - \lfloor a'_{ij} \rfloor$  y  $f := b'_i - \lfloor b'_i \rfloor$ , Gomory definió la siguiente restricción

$$\sum_{j \notin I} f_j x_j \geq f, \quad (1.3)$$

la cual resulta de restar ([equation][2][1]1.2) de ([equation][1][1]1.1). A ([equation][3][1]1.3) se la conoce como *corte de Gomory*. Añadiendo una variable de holgura, esta desigualdad puede ser transformada en igualdad y la ecuación correspondiente se agrega al tableau del simplex, con la nueva variable de holgura como variable básica.

Notar que ([equation][3][1]1.3) se satisface para todos los puntos enteros en la región factible RLE pero no para  $x^*$ , pues del hecho que  $x_j^* = 0$  para todo  $j \notin I$  se sigue que  $\sum_{j \notin I} f_j x_j^* = 0 < f$ .

Para ilustrar el algoritmo consideremos el siguiente programa lineal entero estándar:

$$\begin{cases} \text{máx} & -x_1 + 2x_2 \\ (1) & -4x_1 + 6x_2 + x_3 = 9, \\ (2) & x_1 + x_2 + x_4 = 4, \\ & x \in \mathbb{Z}_+^4. \end{cases} \quad (1.4)$$

En este ejemplo, las variables  $x_3, x_4$  corresponden a las variables de holgura. Escribiendo el tableau del simplex, considerando como variables básicas iniciales las variables  $x_3, x_4$ , se tiene:

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
-1	2	0	0	0
-4	6	1	0	9
1	1	0	1	4.

Luego de algunas iteraciones del método del simplex, se obtiene el siguiente tableau:

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
0	0	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{7}{2}$
0	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{5}{2}$
1	0	$-\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{2}$

de donde la solución óptima a la relajación lineal de ([equation][4][1]1.4) es  $x^* = (\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$ , con  $I = \{1, 2\}$ .

Tomamos la primera fila del tableau óptimo:  $x_2 + \frac{1}{10}x_3 + \frac{2}{5}x_4 = \frac{5}{2}$ , para generar el corte

$$\frac{1}{10}x_3 + \frac{2}{5}x_4 \geq \frac{5}{2} - \lfloor \frac{5}{2} \rfloor = \frac{1}{2}. \tag{1.5}$$

Reemplazando  $x_3 = 9 + 4x_1 - 6x_2$  y  $x_4 = 4 - x_1 - x_2$  en la desigualdad anterior, obtenemos el corte  $x_2 \leq 2$  (etiquetado como (3) en la Figura [figure][4][1]1.4).

Para poder incluir ([equation][5][1]1.5) al tableau del simplex se requiere introducir una nueva variable de holgura  $x_5 \geq 0$ ,

$$\frac{1}{10}x_3 + \frac{2}{5}x_4 - x_5 = \frac{1}{2}. \tag{1.6}$$

Multiplicamos ([equation][6][1]1.6) por -1 y añadimos esta nueva restricción como última fila de tableau óptimo. Obtenemos así un nuevo tableau con una fila y columna adicionales, correspondientes a la nueva restricción y a la variable de holgura  $x_5$ :

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
0	0	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	<b>0</b>	$\frac{7}{2}$
0	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$	<b>0</b>	$\frac{5}{2}$
1	0	$-\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$	<b>0</b>	$\frac{3}{2}$
<b>0</b>	<b>0</b>	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{2}{5}$	<b>1</b>	$-\frac{1}{2}$ .

Tras algunas iteraciones de la versión dual del simplex, obtenemos un nuevo tableau

óptimo:

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$		
0	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$		$\frac{13}{4}$
0	1	0	0	1		2
1	0	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{2}$		$\frac{3}{4}$
0	0	$\frac{1}{4}$	1	$-\frac{5}{2}$		$\frac{5}{4}$

La nueva solución óptima es  $x^* = (\frac{3}{4}, 2)$ . Como aún no hemos llegado a una solución entera, tomamos la segunda fila del último tableau:

$$x_1 - \frac{1}{4}x_3 + \frac{3}{2}x_5 = \frac{3}{4},$$

y generamos el corte

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{4} + 1\right)x_3 + \left(\frac{3}{2} - 1\right)x_5 &\geq \frac{3}{4} - 0 \\ \frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{2}x_5 &\geq \frac{3}{4}. \end{aligned} \tag{1.7}$$

En esta desigualdad reemplazamos  $x_3 = 9 + 4x_1 - 6x_2$  y  $x_5 = \frac{1}{10}x_3 + \frac{2}{5}x_4 - \frac{1}{2} = 2 - x_2$ , y se obtiene el corte

$$\frac{3}{4}(9 + 4x_1 - 6x_2) + \frac{1}{2}(2 - x_2) \geq \frac{3}{4} \Leftrightarrow 3x_1 - 5x_2 \geq 7.$$

Este corte está etiquetado como (4) en la Figura [figure][4][1]1.4.

Añadimos ([equation][7][1]1.7) al último tableau,

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$		
0	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	<b>0</b>		$\frac{13}{4}$
0	1	0	0	1	<b>0</b>		2
1	0	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{2}$	<b>0</b>		$\frac{3}{4}$
0	0	$\frac{1}{4}$	1	$-\frac{5}{2}$	<b>0</b>		$\frac{5}{4}$
<b>0</b>	<b>0</b>	$-\frac{3}{4}$	<b>0</b>	$-\frac{1}{2}$	<b>1</b>		$-\frac{3}{4}$



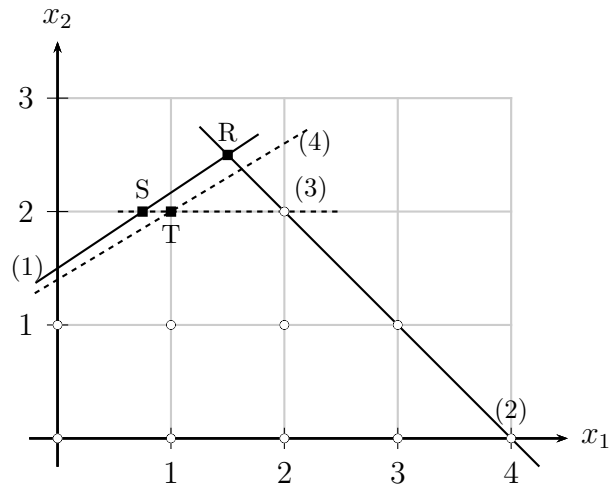


Figura 1.4: Cortes Gomory-Chvátal.

y después de nuevas iteraciones del simplex dual llegamos finalmente a:

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	
0	0	0	0	$\frac{1}{3}$	3	$\frac{1}{3}$
0	1	0	0	1	0	2
1	0	0	0	$\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1
0	0	0	1	$-\frac{8}{3}$	$\frac{1}{3}$	1
0	0	1	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{4}{3}$	1.

Este tableau corresponde a la solución óptima  $x^* = (1, 2)$ , la cual es entera. En la Figura [figure][4][1]1.4 se muestran la solución óptima y los cortes de Gomory que fueron generados. Las rectas (1) y (2) corresponden a las desigualdades que definen el sistema original,  $R$  es la solución óptima de la relajación lineal,  $S$  y  $R$  las soluciones óptimas obtenidas después de añadir los cortes (3) y (4), respectivamente.

Antes de considerar el método de planos cortantes con más detalle, requerimos revisar algunos conceptos fundamentales de teoría poliedral.

Sean  $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ . Decimos que  $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i$  es

- una *combinación afín* de  $x_1, \dots, x_k$ , si  $\sum_i \lambda_i = 1$ ,
- una *combinación cónica* de  $x_1, \dots, x_k$ , si  $\lambda_i \geq 0$  para todo  $1 \leq i \leq k$ ,
- una *combinación convexa* de  $x_1, \dots, x_k$ , si las dos condiciones anteriores se cumplen.

Dado un conjunto  $X \subseteq \mathbb{R}^n$ , su *envolvente afín*  $\text{aff}(X)$  es el conjunto de todas las combinaciones afines de elementos de  $X$ . De manera similar se definen la *envolvente cónica* de  $X$ ,  $\text{cone}(X)$ , y la *envolvente convexa* de  $X$ ,  $\text{conv}(X)$ .

Un *subespacio afín*  $W \subseteq \mathbb{R}^n$  es un conjunto cerrado con respecto a las combinaciones afines. En otras palabras, si  $x_1, x_2 \in W$ , su combinación afín  $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ , con  $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ , también pertenece a  $W$ . Se sabe que todo subespacio afín es la traslación de un subespacio vectorial.

Un *cono*  $C \in \mathbb{R}^n$  es un conjunto cerrado con respecto a combinaciones cónicas. Es decir, para todo  $x_1, x_2 \in C$  y  $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ , se tiene que  $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in C$ .

Dos ejemplos clásicos de conos son:

- Si  $X$  es un conjunto finito de vectores, entonces  $\text{cone}(X)$  es un cono.
- Si  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , entonces el conjunto solución de  $Ax \leq 0$  es un cono.

Estos dos conjuntos son dos descripciones equivalentes de lo que se conoce como *cono poliedral*. El siguiente es un resultado fundamental de la geometría poliedral.

**Teorema 1.1** (Teorema de separación para conos [45]). *Sean  $C \subset \mathbb{R}^n$  un cono convexo y  $\hat{x} \notin C$ . Entonces existe  $a \in \mathbb{R}^n, a \neq 0$  tal que*

$$a^T \hat{x} < 0 \quad \text{y} \quad a^T x \geq 0 \quad \text{para todo } x \in C.$$

Un conjunto  $S$  es *convexo* si es cerrado con respecto a combinaciones convexas. Es decir, si para cualquier par de puntos  $x_1, x_2 \in S$  y todo  $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$  tales que  $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$  se tiene que

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in S.$$

Veamos algunos ejemplos. Sea  $X$  un conjunto finito de puntos en el plano. Si  $|X| = 2$ ,  $\text{conv}(X)$  es el segmento que une los dos puntos. Si  $|X| = 3$  y los puntos no son colineales, entonces  $\text{conv}(X)$  es el triángulo que tiene por vértices esos tres puntos. Si los puntos son colineales,  $\text{conv}(X)$  es el segmento que une los dos puntos más lejanos. En general,  $\text{conv}(X)$  es el polígono más pequeño que contiene a todas los puntos de  $X$ , y sus vértices son siempre puntos de  $X$ . Observar, por último, que tanto segmentos como polígonos son conjuntos convexos.

Un *semiespacio afín cerrado* en  $\mathbb{R}^n$  es un conjunto de la forma  $\{x \in \mathbb{R}^n : a^T x \leq b\}$ , donde  $a \in \mathbb{R}^n$  y  $b \in \mathbb{R}$ . Claramente, un semiespacio es un conjunto convexo.

**Definición 1.1.** *Un poliedro es un conjunto  $P \subseteq \mathbb{R}^n$  definido por  $P := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ , con  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$ .*

Notar que  $P$  es la intersección finita de semiespacios cerrados. Además, si  $x, y \in P$ ,  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_+$  y  $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ , entonces  $A(\lambda_1 x + \lambda_2 y) = \lambda_1(Ax) + \lambda_2(Ay) \leq \lambda_1 b + \lambda_2 b = (\lambda_1 + \lambda_2)b = b$ . Es decir, todo poliedro es convexo.  $P$  es un *poliedro racional* si  $A$  y  $b$  tienen únicamente elementos racionales.

**Definición 1.2.** Un polígono es un poliedro acotado.

Una desigualdad  $a^T x \leq b$  es *válida* para un poliedro  $P$ , si  $P \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x \leq b\}$ . En este caso, el conjunto  $\{x \in \mathbb{R}^n : a^T x = b\}$  es un *hiperplano de soporte* para  $P$ .

La intersección de un poliedro con uno de sus hiperplanos de soporte es una *cara* del poliedro. Es decir, una cara de  $P$  es un conjunto de la forma

$$F = P \cap \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x = b\},$$

donde  $a^T x \leq b$  es una desigualdad válida para  $P$ . Claramente,  $F$  es un poliedro. Si  $\emptyset \subset F \subset P$  se dice que  $F$  es una *cara propia* de  $P$ .

Un conjunto de puntos  $x_1, x_2, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$  se dice *afínmente independiente* si la única solución al sistema de ecuaciones  $\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i = 0$ ,  $\lambda_i \in \mathbb{R}$  y  $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$  es  $\lambda_i = 0$  para todo  $i = 1, \dots, k$ .

Dado un poliedro  $P \in \mathbb{R}^n$ , se conoce que todo conjunto  $S \subseteq P$  afínmente independiente es finito y tiene a lo más  $n + 1$  elementos. Además, todos los conjuntos afínmente independientes maximales con respecto a la inclusión tienen la misma cardinalidad  $d \in \mathbb{N}$ . La *dimensión* de  $P$ , denotada por  $\dim(P)$ , es igual a  $d - 1$ . Si  $P$  es de dimensión  $n$ , se dice que  $P$  es de dimensión completa.

Las caras de  $P$  de dimensión 0, 1 y  $\dim(P) - 1$  se llaman *vértices*, *aristas* y *facetas* de  $P$ , respectivamente.

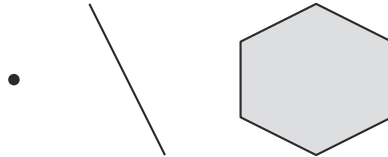


Figura 1.5: Polítopos de dimensión 0, 1 y 2 en  $\mathbb{R}^2$ .

Se dice que una cara es *minimal* cuando no contiene a otra cara propia y, recíprocamente, una cara es *maximal* cuando no está contenida en ninguna otra cara propia. Una *faceta* es una cara maximal propia de  $P$ .

Sea  $a^T x \leq b$  una desigualdad válida para  $P$ . Se dice que  $a^T x \leq b$  *induce una faceta* de  $P$  si  $F := \{x \in P : a^T x = b\}$  es una faceta, es decir, si  $\dim(F) = \dim(P) - 1$ .

Nos interesan aquí los poliedros enteros. Un poliedro racional se llama *poliedro entero* si toda cara minimal no vacía contiene un punto entero. Dado un poliedro  $P$ , su *envolvente entera*, denotada por  $P_I$ , es la envolvente convexa de todos los puntos enteros de  $P$ :

$$P_I = \text{conv}(P \cap \mathbb{Z}^n).$$

Se conoce que  $P_I$  es un poliedro. Es fácil de ver que  $P_I \subseteq P$ .

Consideremos el poliedro  $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ . El problema PE presentado al inicio del capítulo puede expresarse equivalentemente como

$$(PE) \begin{cases} \text{máx } c^T x \\ x \in P \cap \mathbb{Z}^n. \end{cases}$$

Restringiremos en adelante nuestra atención al caso en el que  $P$  está acotado, es decir, cuando  $P$  es un polígono. Observar que si  $P$  es un polígono, entonces  $P_I$  también lo es y sus caras minimales son vértices de coordenadas enteras.

Notar que

$$P \cap \mathbb{Z}^n \subseteq P_I$$

de donde

$$(PE') \begin{cases} \text{máx } c^T x \\ x \in P_I, \end{cases}$$

es una relajación de PE. Pero además, la solución óptima de (PE') se alcanza sobre un vértice de  $P_I$ , y todos los vértices de  $P_I$  son enteros. Luego, toda solución óptima de (PE') es también una solución óptima de PE.

El algoritmo general que emplean los métodos de planos cortantes para resolver un programa entero es el siguiente:

1. Resolver la relajación lineal del programa entero. Notemos por  $x^*$  a la solución óptima obtenida. Si  $x^* \in \mathbb{Z}^n$ , entonces  $x^*$  también es solución óptima para el programa entero y el problema está resuelto.
2. Si  $x^* \notin \mathbb{Z}^n$  no es entera, encontrar una desigualdad  $\alpha^T x \leq \beta$  válida para  $P_I$ , pero que sea violada por  $x^*$ .
3. Añadir  $\alpha^T x \leq \beta$  al conjunto de restricciones del programa.
4. Ir a 1.

Un *plano cortante* es una desigualdad que es válida para la envolvente entera  $P_I$  de un poliedro  $P$  pero no necesariamente para  $P$ .

El paso 2 del algoritmo anterior suele conocerse como “separación de un plano cortante”.

Si  $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$  es un poliedro racional con  $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$  y  $b \in \mathbb{Z}^m$ , y si  $\lambda \in \mathbb{R}_+^m$ , entonces  $\lambda^T Ax \leq \lambda^T b$  es una desigualdad válida para  $P$ . Por otra parte, notar que si  $x$  es factible para PE, entonces  $\lfloor \lambda^T A \rfloor x \in \mathbb{Z}^n$  y de aquí se sigue que

$$\lfloor \lambda^T A \rfloor x \leq \lfloor \lambda^T b \rfloor. \tag{1.8}$$

Toda solución factible de PE satisface ([equation][8][1]1.8) pero esta desigualdad puede ser violada por algunas soluciones de RL. Tal desigualdad se llama *plano cortante de Gomory-Chvátal*.

La intersección de  $P$  con todos sus planos cortantes de Gomory-Chvátal se llama *clausura elemental* de  $P$  y se denota por  $P'$ . Es decir,

$$P' = \{x \in \mathbb{R}^n : c^T x \leq \lfloor \delta \rfloor, \forall c \in \mathbb{Z}^n, \delta \in \mathbb{Q} \text{ tal que } c^T x \leq \delta \text{ es válida para } P\}.$$

El conjunto de desigualdades de la forma ([equation][8][1]1.8) que definen  $P'$  es infinito. Sin embargo, Schrijver [40] demostró que un número finito de planos cortantes implican al resto.

**Teorema 1.2** (Schrijver [40]). *Si  $P$  es un poliedro racional entonces  $P'$  también lo es.*

Claramente, se tiene que  $P_I \subseteq P'$  y el procedimiento de tomar la clausura elemental puede ser iterado para obtener relajaciones cada vez más ajustadas de la envolvente entera  $P_I$ . Sean  $P^{(0)} = P$  y  $P^{(t+1)} = (P^{(t)})'$ , para  $t \geq 0$ . Chvátal [11] demostró que para todo poliedro acotado  $P \subseteq \mathbb{R}^n$  existe un  $t \in \mathbb{N}$  tal que  $P^t = P_I$ . Este resultado fue extendido para poliedros racionales por Schrijver [40].

**Teorema 1.3** (Schrijver [40]). *Si  $P$  es un poliedro racional, entonces existe un  $t \in \mathbb{N}$  tal que  $P^t = P_I$ .*

El *rango Chvátal* de un poliedro  $P$ , notado por  $\text{cr}(P)$ , se define como el menor  $t \in \mathbb{N}$  tal que  $P^t = P_I$ .

Sea  $P \subseteq \mathbb{R}^n$  un poliedro y sea  $a^T x \leq b$  una desigualdad válida para  $P_I$ . La *profundidad* de  $a^T x \leq b$  con respecto a  $P$  es el menor  $t \in \mathbb{N}$  tal que  $a^T x \leq b$  es válida para  $P^t$ . Notaremos en adelante a este valor por  $d(a, b)$ . Es decir,

$$d(a, b) := \min\{t \in \mathbb{N} : a^T x \leq b \text{ es válida para } P^t\}. \quad (1.9)$$

Por lo tanto, el rango de Chvátal  $P$  es la mayor de las profundidades de las desigualdades que definen las facetas de  $P_I$ , relativas a  $P$ :

$$\text{cr}(P) := \max\{d(a, b) : a^T x \leq b \text{ define una faceta de } P_I\}. \quad (1.10)$$

Además de los planos cortantes “clásicos” que se han mencionado, una gran variedad de planos cortantes han sido propuestos en las últimas décadas. Revisaremos de manera breve algunos ejemplos prominentes: los planos cortantes de intersección, disyuntivos y de franjas.

Balas [2] introdujo los *planos cortantes de intersección* (*intersection cuts*). En el punto 2 del algoritmo de planos cortantes mencionado anteriormente, considerar una

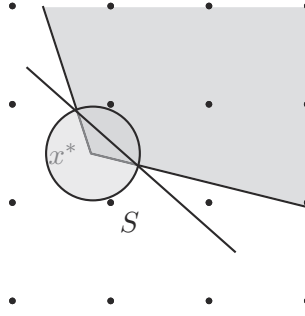


Figura 1.6: Plano cortante de intersección.

solución fraccionaria,  $x^*$  y un conjunto convexo  $S$  que contenga a  $x^*$ , pero que no contenga puntos enteros de  $P$  en su interior. Calcular la intersección de  $S$  con las facetas de  $P$ . El hiperplano que pasa por estos puntos de intersección define una desigualdad válida para  $P_I$  y que corta a  $x^*$ . La Figura [figure][6][1]1.6 ilustra un ejemplo.

Posteriormente, Balas [3] describió también los *planos cortantes disyuntivos* (*disjunctive cuts*). Supongamos que se conoce que cualquier solución entera factible  $x$ , además de pertenecer al poliedro  $P$ , debe satisfacer al menos uno de los  $q$  sistemas de desigualdades:  $C^1x \leq d^1, C^2x \leq d^2, \dots, C^qx \leq d^q$ . Es decir, toda solución entera debe satisfacer la disyunción

$$\bigvee_{j=1}^q (Ax \leq b, C^jx \leq d^j).$$

Si para cada  $j = 1, \dots, q$  se define el poliedro  $P^{(j)} := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b, C^jx \leq d^j\}$ , se tiene que cualquier desigualdad  $a^Tx \leq b$  válida para  $P^{(1)}, \dots, P^{(q)}$  es también válida para  $P_I$ . Dicha desigualdad se conoce como plano cortante disyuntivo.

En teoría, cualquier desigualdad válida para un programa lineal entero puede verse como un plano cortante disyuntivo, siempre que  $q$  sea arbitrariamente grande [3]. Sin embargo, se dice que una desigualdad es disyuntiva si se obtiene de una disyunción en la que  $q$  es un número “pequeño”.

Una desigualdad  $a^Tx \leq b$  es un plano *plano cortante de franjas* (*split cut*) para el polítopo  $P$  si existen  $c \in \mathbb{Z}^n$  y  $d \in \mathbb{Z}$  tales que  $a^Tx \leq b$  es válida para  $P^L := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b, c^Tx \leq d\}$  y  $P^R := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b, c^Tx \geq d + 1\}$ , donde los superíndices L y R provienen de la abreviación en inglés para “izquierda” (left) y “derecha” (right). Es evidente que los planos cortantes de franjas se derivan de los planos cortantes disyuntivos. Este tipo de planos fue presentado por Cook et. al [14]. La *clausura por franjas* (split closure)  $P^S$  de  $P$  es la intersección de  $P$  con todos sus planos cortantes de franjas. Se ha demostrado que  $P^S$  es un poliedro racional si  $P$  es racional [1][14].

En general, observar que para obtener cortes disyuntivos y de franjas se construyen

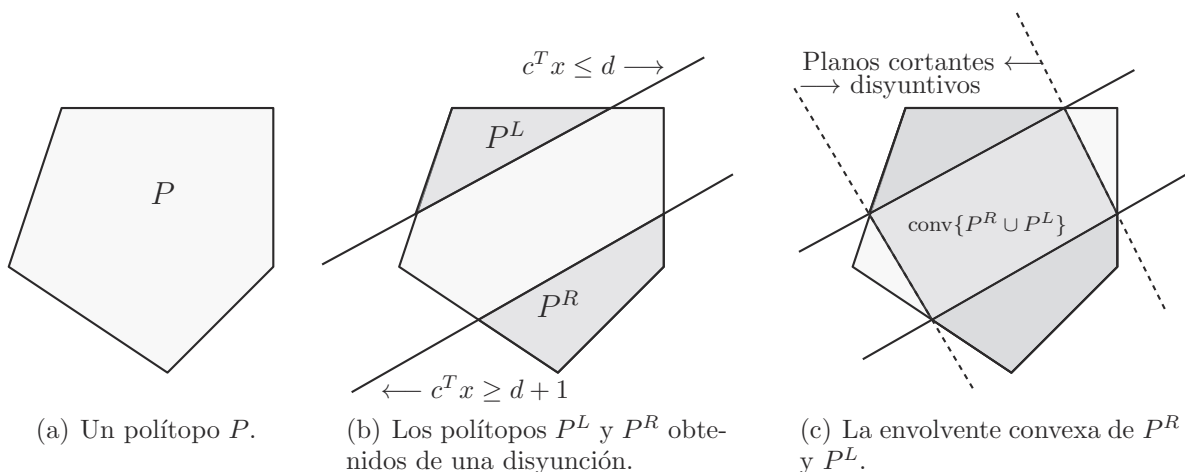


Figura 1.7: Planos cortantes de franjas.

poliedros  $P_1, \dots, P_k$  tales que todas las soluciones enteras del problema original pertenecen a  $\cup_{i=1}^k P_i$ . Se consideran luego desigualdades válidas para  $\text{conv}(\cup_{i=1}^k P_i)$ . Esto explica por qué cualquier desigualdad válida para  $P_I$  puede ser vista como un plano cortante disyuntivo.

Existe otra familia de métodos usados para derivar planos cortantes basados en un principio conocido como "lift-and-project" (levantar y proyectar), el mismo que será estudiado con mayor detalle en el Capítulo [chapter][2][2].

Hoy en día se consideran en conjunto la estrategia de ramificación y acotación y la de planos cortantes, integrados en un algoritmo que se conoce como ramificación y corte ("branch-and-cut"). La gran mayoría de herramientas informáticas avanzadas (tanto libres como comerciales) para la solución de programas enteros implementan un esquema de ramificación y corte.

## 1.2 Grafos

Un *grafo* (no dirigido)  $G = (V, E)$  consiste de un conjunto finito de *nodos*  $V = V(G)$  y un conjunto finito de *aristas*  $E = E(G)$ , donde cada arista está formada por un par de nodos que se conocen como extremos. Es decir, los elementos de  $E(G)$  son de la forma  $\{i, j\}$  donde  $i, j \in V(G)$ . Por simplicidad, es usual denotar  $\{i, j\}$  simplemente por  $ij$ . Se dice que una arista  $ij$  es *incidente* a sus nodos extremos  $i, j$ . Un par de nodos  $i, j \in V$  son *adyacentes* o *vecinos* si  $ij \in E$ . Dos aristas son *paralelas* cuando tienen los mismos extremos y una arista  $ii \in E$  cuyos extremos son iguales entre sí se llama *lazo*. Si un grafo no tiene aristas paralelas ni lazos se llama *grafo simple*. En adelante, restringiremos nuestra atención a grafos simples.

Dado un nodo  $i$ , la *vecindad* de  $i$  se define como el conjunto de nodos adyacentes a éste y se nota por  $\Gamma(i)$ , es decir,  $\Gamma(i) := \{j \in V : ij \in E\}$ . El *complemento* de  $G$  es el

grafo  $\overline{G}$  que tiene el mismo conjunto de nodos  $V$  y tal que dos nodos son adyacentes en  $\overline{G}$  si y sólo si no son adyacentes en  $G$ .

Un *camino* en un grafo es una secuencia  $v_1, v_2, \dots, v_k$  de nodos, tal que dos nodos consecutivos  $v_i, v_{i+1}$  son adyacentes entre sí. Un camino en el que todos los nodos son diferentes se denomina *sendero* o *camino simple*. Un sendero en el que los nodos extremos son iguales se denomina *circuito* o *ciclo*. Un grafo es *conexo* si cada par de nodos está unido al menos por un camino. Un grafo que no es conexo se denomina *disconexo*.

Un *subgrafo*  $G' = (V', E')$  de  $G$  es un grafo tal que  $V' \subseteq V$  y  $E' \subseteq E$ . El subgrafo  $G'$  se llama *subgrafo inducido* por  $V'$  si  $E'$  contiene todas las aristas de  $E$  con sus dos extremos en  $V'$ . Notaremos en este caso  $G' \subseteq G$ .

Para  $A \subseteq E$ ,  $G \setminus A$  denota el subgrafo  $G' = (V', E')$  obtenido mediante la *eliminación de  $A$* , esto es,  $V' = V$  y  $E' = E \setminus A$ . De manera similar, si  $B \subseteq V$ , el grafo  $G \setminus B$  es el grafo inducido por  $V \setminus B$ . Es decir, la eliminación de un conjunto  $B$  de nodos consiste en eliminar de  $V$  los elementos de  $B$  y eliminar de  $E$  las aristas incidentes a nodos en  $B$ . Para  $i \in V$ , el grafo obtenido tras la eliminación de  $\{i\}$  se escribirá simplemente como  $G \setminus i$ . La *contracción* de un nodo  $i \in V$  consiste en la eliminación del conjunto  $\{i\} \cup \Gamma(i)$ . Notaremos al grafo resultante por  $G/i$ .

**Definición 1.3.** Sea  $G = (V, E)$  un grafo no dirigido. Un conjunto estable en  $G$  es un conjunto  $S \subseteq V$  de nodos mutuamente no adyacentes, es decir, un conjunto de nodos tal que si  $i, j \in S$  entonces  $ij \notin E$ . El número de estabilidad de  $G$  es la máxima cardinalidad de un conjunto estable en  $G$  y se denota por  $\alpha(G)$ .

Un *grafo bipartito* es un grafo cuyo conjunto de nodos puede partitionarse en dos conjuntos estables  $V_1$  y  $V_2$ . Un grafo  $G$  es *casi bipartito* si el conjunto de nodos no vecinos de cualquier nodo  $i$  de un grafo  $G$  es bipartito, es decir, si el grafo  $G/i$  es bipartito.

Un grafo es completo cuando cada par de vértices está conectado por una arista. Una *clique* es un subgrafo inducido completo, es decir, es el complemento de un conjunto estable. Notaremos por  $Q_n$  a una clique inducida por  $n$  nodos, y diremos en este caso que la clique tiene tamaño  $n$ . El máximo tamaño de una clique en un grafo  $G$  se conoce como *número de clique* y se denota por  $\omega(G)$ .

Un emparejamiento  $M$  en un grafo  $G$  es un conjunto de aristas mutuamente no incidentes, es decir, tal que ningún par de aristas tengan un extremo en común. Denotaremos por  $\nu(G)$  el máximo tamaño de un emparejamiento en  $G$ .

Un *ciclo impar* es un grafo inducido por un conjunto de  $2k+1$  nodos  $\{1, \dots, 2k+1\}$ , con  $k \in \mathbb{N}$ , y que contiene todas las aristas de la forma  $\{i, i+1\}$  para  $i = 1, \dots, 2k+1$ , con la suma tomada módulo  $2k+1$ . Cualquier otra arista que no sea de la forma



$\{i, i + 1\}$  se conoce como *cuerda*. Un ciclo impar sin cuerdas es un agujero impar. De manera similar que para las cliques,  $C_{2k+1}$  notará un agujero de tamaño  $2k + 1$ . Un *anti-agujero* impar  $\overline{C}_{2k+1}$  es el complemento de  $C_{2k+1}$ .

Sea  $G = (V, E)$  un grafo no dirigido. El *grafo de línea* de un grafo  $G$ , notado por  $L(G)$ , es el grafo definido de la siguiente manera:

- cada nodo de  $L(G)$  representa una arista de  $G$ , y
- dos nodos de  $L(G)$  son adyacentes si y sólo si sus aristas correspondientes tienen un extremo en común.

Es decir,  $L(G) := (E, \{\{ij, jk\} : ij \in E, jk \in E\})$ .

**Definición 1.4** ([42]). Una *web*  $W_n^k$  es un grafo con conjunto de nodos  $\{1, \dots, n\}$  y un conjunto de aristas dado por  $E(W_n^k) := \{i, i \pm l : i \in V, 1 \leq l \leq k\}$  donde la suma y resta de los elementos de  $V$  se definen módulo  $n$ .

Casos particulares de webs son los agujeros  $C_n = W_n^1$  y los anti-agujeros impares  $\overline{C}_{2k+1} = W_{2k+1}^{k-1}$ , para  $k \geq 2$ .

**Definición 1.5** ([42]). Una *antiweb*  $\overline{W}_n^k$  es un grafo con conjunto de nodos  $\{1, \dots, n\}$  y conjunto de aristas dado por  $E(\overline{W}_n^k) := \{i, i \pm l : i \in V, k < l < n - k\}$ , con la suma y resta tomados nuevamente módulo  $n$ .

Notar que una antiweb es el complemento de una web.

Las antiwebs generalizan varias otras clases conocidas de grafos. Algunos ejemplos particulares de antiwebs son las cliques  $Q_n = \overline{W}_n^0$ , los anti-agujeros  $\overline{C}_n = \overline{W}_n^1$  y los agujeros impares  $C_{2k+1} = \overline{W}_{2k+1}^{k-1}$ . En la Figura [figure][8][1]1.8 se muestran otros ejemplos de webs y antiwebs.

Decimos que una antiweb es *prima* cuando  $n$  y  $k$  son números relativamente primos, es decir, si el máximo común divisor de  $n$  y  $k$  es 1.

Asumiremos en adelante, al referirnos a webs y antiwebs, que  $n \geq 2k + 1$ , puesto que de lo contrario toda web degenera en un grafo completo y toda antiweb en un grafo sin aristas.

Notar que todo agujero impar y todo anti-agujero impar es a la vez una web y una antiweb. Sin embargo, en general las clases de webs y antiwebs no coinciden. Trotter [42] demostró que una antiweb es una web si y sólo si es un agujero impar o un anti-agujero impar.

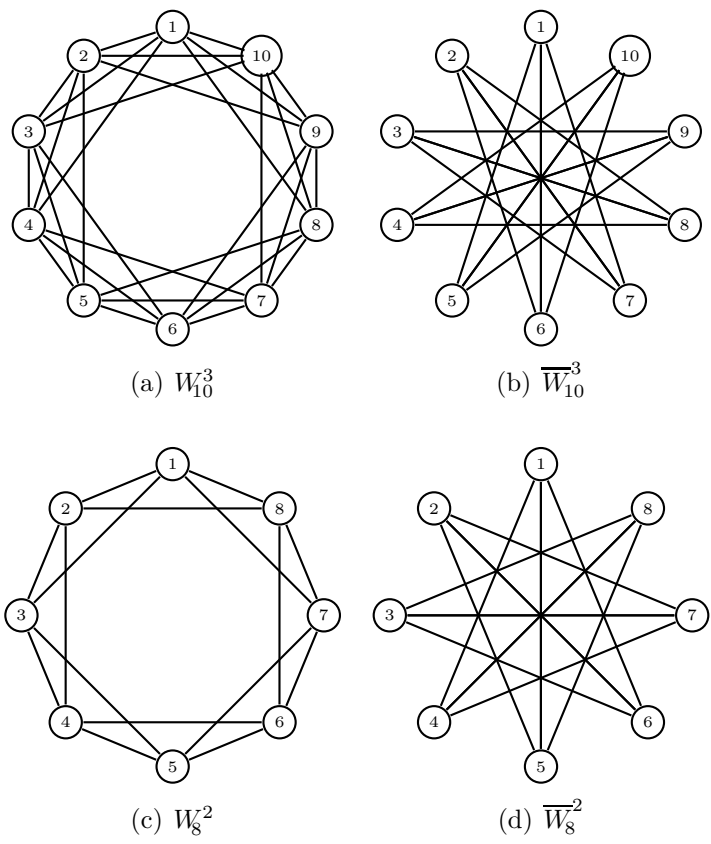


Figura 1.8: Ejemplos de webs y antiwebs.

## 1.3 Problema de conjuntos estables

### 1.3.1 El problema de conjuntos estables de peso máximo

Dados un grafo  $G = (V, E)$  y  $w \in \mathbb{R}^V$ , el problema del conjunto estable de peso máximo consiste en encontrar un subconjunto  $S \subseteq V$  que sea un conjunto estable y tal que su peso  $w(S) := \sum_{i \in S} w_i$  sea máximo. Por simplicidad, en adelante usaremos  $n$  para denotar  $|V|$ . Si definimos variables binarias  $x_i$  para  $i \in V$ , con  $x_i = 1$  si y sólo si  $i \in S$ , este problema puede formularse como el siguiente programa lineal entero:

$$(\text{MAXSTAB}(G)) \begin{cases} \text{máx } \sum_{i=1}^n w_i x_i \\ \text{sujeto a:} \\ x_i + x_j \leq 1, & \forall ij \in E, \\ x_i \in \{0, 1\}, & \forall i \in V. \end{cases}$$

El *polígono de conjuntos estables* asociado a un grafo  $G = (V, E)$  es la envolvente convexa de los vectores de incidencia de conjuntos estables de  $G$ , y se denota por  $\text{STAB}(G)$ .

$$\text{STAB}(G) := \text{conv}\{\chi^S : S \subseteq V \text{ es un conjunto estable}\},$$

donde  $\chi^S$  denota el vector de incidencia del conjunto  $S \subseteq V$ , es decir,

$$\chi_i^S = \begin{cases} 1, & \text{si } i \in S, \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

El polígono correspondiente a la relajación lineal de  $\text{MAXSTAB}(G)$ ,

$$(\text{MAXESTAB}(G)) \begin{cases} \text{máx } \sum_{i=1}^n w_i x_i \\ \text{sujeto a:} \\ x_i + x_j \leq 1, & \forall ij \in E, \\ x_i \in [0, 1], & \forall i \in V, \end{cases}$$

se conoce como la *relajación de aristas* del polígono de conjuntos estables y se denota por

$$\text{ESTAB}(G) := \{x \in \mathbb{R}_+^V : x_i + x_j \leq 1 \forall ij \in E\}.$$

Una formulación equivalente para el problema de conjuntos estables se obtiene al considerar todas las cliques de  $G$ . Es evidente que un conjunto estable puede contener a

lo más un nodo de una clique, y por tanto

$$(\text{MAXQSTAB}(G)) \begin{cases} \text{máx } \sum_{i=1}^n w_i x_i \\ \text{sujeto a:} \\ \sum_{i \in Q} x_i \leq 1, & \forall Q \subseteq V, Q \text{ clique,} \\ x_i \in \{0, 1\}, & \forall i \in V, \end{cases}$$

es una formulación alternativa válida para el problema de conjuntos estables. Su relajación lineal permite definir la *relajación de cliques* del polítopo de conjuntos estables

$$\text{QSTAB}(G) := \{x \in \mathbb{R}_+^V : \sum_{i \in Q} x_i \leq 1, \forall Q \subseteq V \text{ clique}\}.$$

Observar que como las aristas son casos particulares de cliques, se tiene que

$$\text{STAB}(G) \subseteq \text{QSTAB}(G) \subseteq \text{ESTAB}(G) \quad (1.11)$$

para cualquier grafo  $G$ .

Sean  $x, y$  dos vectores en  $\mathbb{R}^n$  se dice que  $y \leq x$  si  $x_i \leq y_i$  para todo  $i = 1, \dots, n$ .

**Lema 1.4** (Propiedades básicas de  $\text{STAB}(G)$  [9]). *Sea  $G$  un grafo y  $\text{STAB}(G)$  el polítopo de conjuntos estables asociado a  $G$ . Entonces:*

- (i)  $\text{STAB}(G)$  es de dimensión completa.
- (ii)  $\text{STAB}(G)$  es monótono hacia abajo. Es decir, si  $x \in \text{STAB}(G)$  y  $y$  es tal que  $0 \leq y \leq x$ , entonces  $y \in \text{STAB}(G)$ .
- (iii) Las restricciones de no negatividad  $x_i \geq 0$ , para todo  $i = 1, \dots, n$ , son desigualdades que inducen facetas para  $\text{STAB}(G)$ .

*Demostración.*

- (i) De la definición de conjunto estable se tiene que los vectores canónicos unitarios en  $\mathbb{R}^n$  son vectores de incidencia de conjuntos estables. Trivialmente, se tiene además que el vector cero, el vector de incidencia del conjunto vacío, pertenece a  $\text{STAB}(G)$ . Por lo tanto, el polítopo de conjuntos estables es de dimensión completa.
- (ii) Sean  $x \in \text{STAB}(G)$  y  $0 \leq y \leq x$ . Si  $x = y$  no hay nada que demostrar. Podemos suponer entonces que existe  $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ , no vacío tal que  $y_i < x_i$  para todo  $i \in I$ . Supongamos que  $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ . Construimos la sucesión de vectores  $y^0 = x, y^1, \dots, y^k$  definidos por  $y_i^j = y_i^{j-1}$  si  $i \neq j$ , y  $y_i^j = y_i$ , caso contrario, para

$j \in \{1, \dots, k\}$ . Notar que se tiene la siguiente relación de orden  $y^k = y \leq y^{k-1} \leq \dots \leq y^1 \leq y^0 = x$  y que además  $y^{j-1}$  e  $y^j$  difieren únicamente en la componente  $y_j^{j-1} < y_j^j$ .

Demostremos que  $y^1 \in \text{STAB}(G)$ . Para ello, definamos  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  por medio de  $\bar{x}_1 = 0$  y  $\bar{x}_j = x_j$  para  $j = 2, \dots, n$ . Notar que  $y^1 = tx + (1-t)\bar{x}$ , para cierto  $t \in [0, 1]$ . Por otra parte,  $x = \sum_{k=1}^m \alpha_k v^k$ , donde para cada  $k = 1, \dots, m$ ,  $v^k$  es vector de incidencia de un conjunto estable en  $G$ . Luego, si definimos  $\bar{v}^k \in \mathbb{R}^n$  con  $\bar{v}_j^k = v_j^k$  si  $j = 2, \dots, n$  y  $\bar{v}_1^k = 0$ , se tiene que  $\bar{v}^k$  son vectores de incidencia de conjuntos estables en  $G$  y por lo tanto  $\bar{x} = \sum_{k=1}^m \alpha_k \bar{v}^k$  pertenece a  $\text{STAB}(G)$ . Como  $y^1$  es la combinación convexa de  $x$  y  $\bar{x}$ , se sigue que  $y^1 \in \text{STAB}(G)$ . Por inducción puede entonces demostrarse que  $y^j \in \text{STAB}(G)$  para todo  $j \in \{2, \dots, k\}$ . En particular,  $y = y^k \in \text{STAB}(G)$ .

(iii) Sea  $i^* \in \{1, \dots, n\}$  fijo pero arbitrario. Es evidente que  $x_{i^*}^* = e_{i^*}^T x = 0$  para todo  $x = e_j$  con  $j \in \{1, \dots, i^*-1, i^*+1, \dots, n\}$ , y para  $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ . Entonces la desigualdad  $x_i \geq 0$  se satisface con igualdad para  $n$  vectores afínmente independientes y por tanto define una faceta para  $\text{STAB}(G)$ . □

Las restricciones de no negatividad se conocen como facetas triviales de  $\text{STAB}(G)$ . En la siguiente sección revisaremos algunas de las desigualdades válidas para  $\text{STAB}(G)$ . Entre éstas, las desigualdades de rango han sido ampliamente estudiadas en los últimos años.

### 1.3.2 Desigualdades válidas y facetas

**Desigualdades de aristas.** Para cada arista  $ij$  de un grafo  $G = (V, E)$  se define la *desigualdad de arista*

$$x_i + x_j \leq 1. \tag{1.12}$$

Por definición, las desigualdades de arista son válidas para  $\text{STAB}(G)$ . Notar que las desigualdades de aristas y las de no negatividad

$$x_i \geq 0, \quad \forall i \in V, \tag{1.13}$$

definen la relajación de aristas del polítopo de conjuntos estables de  $G$ .

**Proposición 1.1** ([38]). *Las desigualdades de arista ([equation][12][1]1.12) y las de no negatividad ([equation][13][1]1.13) son suficientes para describir  $\text{STAB}(G)$  si y sólo si  $G$  es un grafo bipartito y no tiene nodos aislados. Notar que en este caso  $\text{STAB}(G) = \text{ESTAB}(G)$ .*

**Desigualdades de clique.** Sea  $Q$  una clique en  $G = (V, E)$ . Se define la *desigualdad de clique* asociada a  $Q$  como

$$\sum_{i \in Q} x_i \leq 1. \quad (1.14)$$

El número de estabilidad de una clique es 1, pues por definición, cada nodo de una clique es adyacente a todos los demás. En la figura siguiente se ilustra una clique de tamaño 5.

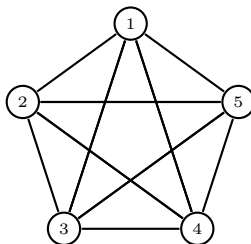


Figura 1.9: La clique  $Q_5$ .

Las desigualdades de clique son válidas para  $\text{STAB}(G)$  y definen facetas cuando las cliques asociadas son maximales respecto a la inclusión de nodos, como ha sido demostrado por Fulkerson [19] y Padberg [38].

Dado un grafo  $G$ , su número cromático  $\chi(G)$  es la mínima cantidad de colores requeridos para pintar los nodos de  $G$ , de tal forma que dos nodos adyacentes nunca tengan el mismo color. Como cada nodo de una clique debe pintarse con un color distinto, se tiene  $\chi(G) \geq \omega(G)$ . Si  $\chi(G') = \omega(G')$  se cumple para todo subgrafo inducido  $G' \subseteq G$ , entonces decimos que  $G$  es perfecto. Berge [7] conjeturó que un grafo  $G$  es perfecto si y sólo si  $G$  no contiene agujeros ni anti-agujeros impares. Esta conjetura fue durante cuatro décadas una pregunta abierta central en la teoría de grafos y la optimización combinatoria, hasta que fue finalmente demostrada por Chudnovsky et al. [10]. Un resultado importante de Chvátal [12] y Padberg [39] establece que  $\text{STAB}(G)$  está descrito completamente por las desigualdades de no negatividad ([equation][13][1]1.13) y las desigualdades de clique ([equation][14][1]1.14) si y sólo si  $G$  es perfecto. Notar que este caso  $\text{STAB}(G) = \text{QSTAB}(G)$ .

**Desigualdades de ciclo impar [38].** A cada circuito impar  $C$  se le asocia la *desigualdad de ciclo impar*

$$\sum_{i \in C} x_i \leq \frac{|C| - 1}{2}. \quad (1.15)$$

En la siguiente figura se ilustra el circuito impar  $C_7$ . Se han resaltado los nodos 2, 4 y 6, los cuales forman un conjunto estable. A este conjunto no es posible añadirle ningún

otro nodo sin que deje de ser un conjunto estable. Notar además que la cardinalidad máxima de cualquier conjunto estable en  $C_7$  es 3.

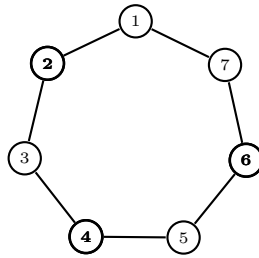


Figura 1.10: El agujero  $C_7$ .

Es fácil demostrar que [equation][15][1]1.15 es válida para  $\text{STAB}(G)$ , pero que no está implicada por las desigualdades de aristas.

Padberg [38] demostró que una desigualdad de ciclo impar define una faceta si y sólo si el ciclo es un agujero, y  $C = G$ .

Los grafos para los cuales el polítopo de conjuntos estables  $\text{STAB}(G)$  puede describirse completamente por las desigualdades de no negatividad ([equation][13][1]1.13), clique ([equation][14][1]1.14) y agujero impar ([equation][15][1]1.15) se conocen como de grafos  $t$ -perfectos.

**Desigualdades de anti-agujero impar [35].** Sea  $\overline{C}$  un anti-agujero impar. La *desigualdad de anti-agujero* asociada a  $\overline{C}$  es

$$\sum_{i \in \overline{C}} x_i \leq 2. \tag{1.16}$$

La figura siguiente ilustra el anti-agujero impar  $\overline{C}_7$  y el conjunto estable  $\{1, 2\}$ . Si se añade un nodo, este conjunto deja de ser estable. Por definición, cualquier conjunto estable de un anti-agujero contiene a lo más dos elementos.

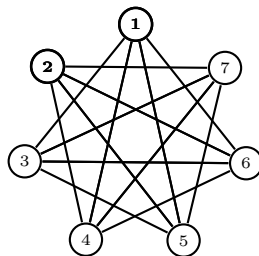


Figura 1.11: El anti-agujero  $\overline{C}_7$ .

Observar que ([equation][16][1]1.16) es una desigualdad válida para  $\text{STAB}(\overline{C}_7)$ .

**Desigualdades de web y antiweb [42].** Sean  $W_n^k$  una web y  $\overline{W}_n^k$  una antiweb. La *desigualdad de web* y la *desigualdad de antiweb* asociadas a éstas se definen, respectivamente, como

$$\sum_{i \in W_n^k} x_i \leq \lfloor \frac{n}{k+1} \rfloor, \quad (1.17)$$

y

$$\sum_{i \in \overline{W}_n^k} x_i \leq k+1. \quad (1.18)$$

Es fácil verificar la validez de ambas clases de desigualdades. En efecto, en una web todos los conjuntos estables contienen nodos espaciados entre sí por lo menos en  $k+1$  (es decir, si  $i, j$  están en un conjunto estable, entonces,  $j > i+k$ ), de donde se sigue que la cardinalidad máxima de un conjunto estable en  $W_n^k$  no puede exceder  $\lfloor \frac{n}{k+1} \rfloor$ . Por otra parte, un conjunto estable en una antiweb  $\overline{W}_n^k$  consiste de máximo  $k+1$  nodos consecutivos.

**Teorema 1.5.** [42] *La desigualdad ([equation][17][1]1.17) define una faceta para  $\text{STAB}(W_n^k)$  si y sólo si  $k$  divide a  $n$ . La desigualdad ([equation][18][1]1.18) define una faceta para  $\text{STAB}(\overline{W}_n^k)$  si y sólo si  $k$  y  $n$  son relativamente primos.*

Wagler [43] demostró que  $\text{STAB}(\overline{W}_n^k)$  está completamente definido por restricciones de no negatividad y restricciones de la familia ([equation][18][1]1.18). Por otra parte, la estructura de las facetas de  $\text{STAB}(W_n^k)$  es más compleja. Se ha demostrado que las facetas no triviales en este caso pertenecen a una clase conocida como desigualdades de familia de clique [37].

**Desigualdades de rango** Sean  $G$  un grafo y  $G' \subseteq G$  un subgrafo inducido. Se define

$$\sum_{i \in V(G')} x_i \leq \alpha(G') \quad (1.19)$$

como la desigualdad de rango asociada a  $G' \subseteq G$ . Es trivial verificar que ([equation][19][1]1.19) es válida para  $\text{STAB}(G)$ , pues cualquier conjunto estable de  $G$  restringido a los nodos de  $G'$  es un conjunto estable para  $G'$ .

Notar que las desigualdades ([equation][14][1]1.14)-([equation][18][1]1.18) son casos particulares de la desigualdad de rango, pues  $\alpha(G')$  es igual a 1 si  $G'$  es un clique, a  $\frac{|C|-1}{2}$  si es un agujero impar, a 2 si se trata de un antiagujero, a  $\lfloor \frac{n}{k+1} \rfloor$  para una web  $W_n^k$  y  $k+1$  para una antiweb  $\overline{W}_n^k$ .

La *relajación de rango* de  $\text{STAB}(G)$  es el polítopo definido por todas las desigual-



dades de rango asociadas a subgrafos inducidos de  $G$ :

$$\text{RSTAB}(G) := \{x \in \mathbb{R}_+^V : \sum_{i \in V(G')} x_i \leq \alpha(G'), \forall G' \subseteq G \text{ inducido}\}.$$

Un grafo  $G$  se llama grafo *rango-perfecto* si  $\text{RSTAB}(G) = \text{STAB}(G)$ , es decir, si  $\text{STAB}(G)$  está dado por las desigualdades de no negatividad ([equation][13][1]1.13) y las de rango ([equation][19][1]1.19). Wagler [43] demostró que las antiwebs pertenecen a la clase de grafos rango-perfectos. De su trabajo se sigue que:

**Teorema 1.6** ([43]). *Las únicas facetas no triviales del polítopo de conjuntos estables de una antiweb son las desigualdades de rango asociadas a subantiwebs primas. Una subantiweb es un subgrafo inducido de una antiweb, que constituye a su vez una antiweb en sí.*

### 1.3.3 Rango de Chvátal del polítopo de conjuntos estables

El polítopo de conjuntos estables ha sido objeto de múltiples estudios durante los últimos cuarenta años. Uno de los aspectos considerados ha sido el rango de Chvátal de las diferentes relajaciones conocidas. Chvátal et al. [36] establecieron la siguiente cota inferior para la relajación de cliques  $\text{QSTAB}(G)$  de un grafo  $G$ .

**Lema 1.7** ([36]). *Sean  $k < s$  dos enteros positivos,  $G$  un grafo con  $n$  nodos tal que todo subgrafo de  $G$  con  $s$  nodos es  $k$ -colorable. Entonces la profundidad de la desigualdad de rango  $\sum_{i \in G} x_i \leq \alpha(G)$  relativa a  $\text{QSTAB}(G)$  es al menos*

$$\frac{s}{k} \ln \frac{n}{k\alpha(G)}.$$

Un grafo  $G$  se dice  $k$ -colorable si  $\chi(G) \leq k$ .

**Teorema 1.8** ([36]). *Existen  $c, r \in \mathbb{Z}_+$  y un grafo  $G$  arbitrariamente grande, con  $n$  nodos y  $cn$  aristas, tal que la profundidad de la desigualdad de rango de  $G$  relativa a la relajación de cliques es al menos  $rn$ .*

Un grafo es *libre de garras* o *sin garras* si ningún nodo tiene tres vecinos no adyacentes entre ellos. Giles y Trotter [22] presentaron algunos ejemplos de grafos sin garras para los cuales  $\text{QSTAB}(G)$  tiene al menos rango de Chvátal 2. Y en [36] se presenta una respuesta a la pregunta planteada por Schrijver, acerca de si es posible reemplazar dicha cota por una arbitrariamente grande. La presentamos en el siguiente teorema.

**Teorema 1.9** ([36]). *Existen grafos con cardinalidad  $n$  arbitrariamente grande y  $\alpha(G) = 2$  para los cuales la profundidad de la desigualdad de rango de  $G$  relativa a  $\text{QSTAB}(G)$  es mayor que  $\frac{1}{3} \ln n$ .*

A continuación presentaremos algunas clases de grafos para los cuales se conocen valores exactos de los rangos de Chvátal. Pero antes requerimos introducir algunas notaciones.

Usaremos  $d_E(a, b)$  (resp.  $d_Q(a, b)$ ) para denotar la profundidad de una desigualdad  $a^T x \leq b$  válida para  $\text{STAB}(G)$ , con respecto a  $\text{ESTAB}(G)$  (resp.  $\text{QSTAB}(G)$ ). Además, en el caso de que  $a^T x \leq b$  corresponda a la desigualdad de rango de un subgrafo  $G'$  abreviaremos la notación por  $d_E(G')$  (resp.  $d_Q(G')$ ). Es decir,

$$d_E(G') := \min\{t \in \mathbb{N} : \sum_{i \in V(G')} x_i \leq \alpha(G') \text{ es válida para } \text{ESTAB}(G')^t\},$$

y

$$d_Q(G') := \min\{t \in \mathbb{N} : \sum_{i \in V(G')} x_i \leq \alpha(G') \text{ es válida para } \text{QSTAB}(G')^t\}.$$

Para abreviar la notación, al referirnos al rango de Chvátal de la relajación de aristas, escribiremos simplemente  $\text{cr}_E(G)$  en lugar de  $\text{cr}(\text{ESTAB}(G))$ . Haremos lo mismo para el rango de Chvátal  $\text{cr}_Q(G)$  de  $\text{QSTAB}(G)$ . Se tiene entonces que:

$$\text{cr}_E(G) := \max\{d_E(a, b) : a^T x \leq b \text{ define una faceta de } \text{STAB}(G)\}. \quad (1.20)$$

y

$$\text{cr}_Q(G) := \max\{d_Q(a, b) : a^T x \leq b \text{ define una faceta de } \text{STAB}(G)\}. \quad (1.21)$$

Si  $G$  es un grafo bipartito, como se mencionó en la Proposición [prop][1][1]1.1,  $\text{STAB}(G) = \text{ESTAB}(G)$  y de ([equation][11][1]1.11), se tiene claramente que  $\text{STAB}(G) = \text{QSTAB}(G) = \text{ESTAB}(G)$ . Luego,  $\text{cr}_E(G) = \text{cr}_Q(G) = 0$ .

Además, hemos observado que  $\text{STAB}(G) = \text{QSTAB}(G)$  si y sólo si  $G$  es un grafo perfecto. Por lo tanto  $\text{cr}_Q(G) = 0$  para todo grafo perfecto. En cuanto al valor de  $\text{cr}_E(G)$ , se tiene el siguiente resultado de Holm et. al [27].

**Lema 1.10** ([27]). *Sea  $n \geq 3$ . Para el rango de Chvátal de una clique  $Q_n$  y para la profundidad de su correspondiente desigualdad de clique, con respecto a la relajación de aristas, se tiene*

$$\text{cr}_E(Q_n) = d_E(Q_n) = \lfloor \log_2(n - 2) \rfloor + 1.$$

Una consecuencia inmediata del lema anterior es que si  $G$  es un grafo perfecto con  $\omega \geq 3$ , entonces  $\text{cr}_E(G) = \lfloor \log_2(\omega - 2) \rfloor + 1$ , donde  $\omega = \omega(G)$ , es el tamaño de la clique más grande contenida en  $G$  [27].

Padberg [39] demostró que para los anti-agujeros impares  $\overline{C}_{2k+1}$  con  $k \geq 1$  las únicas facetas no triviales de  $\text{STAB}(\overline{C}_{2k+1})$  son las desigualdades de rango asociadas

a cliques maximales y la desigualdad de rango del agujero mismo. Luego, es fácil ver que  $d_Q(\overline{C}_{2k+1}) = 1$ , pues la profundidad de dichas desigualdades con respecto a la relajación de cliques es, como se mencionó antes, cero.

Para grafos de la clase antiwebs, en los trabajos de Holm et. al [27], [28] y [29] se calculan cotas superiores e inferiores para el rango de Chvátal de las relajaciones de aristas y de cliques. En el caso de las cotas superiores, el trabajo se basa en la generación de sucesiones constructivas de antiwebs, idea que será explicada con más detalle en el Capítulo [chapter][3][3]. Para las cotas inferiores, se construye una sucesión de puntos en  $\text{ESTAB}(G) \setminus \text{STAB}(G)$  (o en  $\text{QSTAB}(G) \setminus \text{STAB}(G)$ ) lo suficientemente separados uno del otro, como para que cada uno de ellos sea “cortado” en una iteración distinta del procedimiento de Gomory–Chvátal. La longitud de la sucesión constituye una cota inferior para  $\text{cr}_E(\overline{W}_n^k)$  y  $\text{cr}_Q(\overline{W}_n^k)$ , respectivamente. A continuación resumimos los resultados establecidos por dichos autores.

**Lema 1.11** ([27]). *Para una antiweb  $\overline{W}_n^k$ ,*

$$\text{cr}_E(\overline{W}_n^k) \leq \alpha + \log_2(\omega - 2),$$

con  $\omega = \lfloor \frac{n}{k+1} \rfloor$  y  $\alpha = k + 1$ .

**Lema 1.12** ([29]). *Para una antiweb  $\overline{W}_n^k$ ,*

$$\text{cr}_E(\overline{W}_n^k) \geq r + s + 1 \quad y \quad \text{cr}_Q(\overline{W}_n^k) \geq s,$$

con  $r := \lfloor \log_2(\frac{n}{k+1} - 1) \rfloor$  y  $s := \max\{\overline{s} \in \mathbb{N} : \frac{\omega-1}{\omega+1}[(\omega+2)^{\overline{s}} - 1] < \frac{n-\omega(k+1)}{(k+1)(\omega+1)-n}\}$ .

# Capítulo 2

## Los operadores $N$ y $N_+$

En este capítulo se describe la técnica de “levantamiento y proyección” introducida por Lovász y Schrijver en un trabajo seminal [33]. Se estudian los operadores  $N$  y  $N_+$ , y su aplicación en el contexto del polígono de conjuntos estables.

### 2.1 Conos de matrices y sus proyecciones

Consideraremos en adelante conos convexos. Como vimos en el capítulo introductorio, un cono poliedral puede representarse como el conjunto solución de un sistema de desigualdades lineales homogéneo.

Todo polígono  $P \subseteq [0, 1]^n$ , puede ser representado como un cono en  $\mathbb{R}^{n+1}$ , mediante una transformación conocida como homogenización. Básicamente, la misma consiste en considerar la inmersión de  $P$  en el hiperplano  $x_0 = 1$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$  y a partir de esta inmersión generar un cono convexo. Consideremos, por ejemplo, el polígono

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b, 0 \leq x \leq 1\},$$

al homogeneizarlo se obtiene el cono

$$K := \left\{ \begin{pmatrix} x_0 \\ x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} : bx_0 - Ax \geq 0, x \geq 0, x_0 \mathbb{1} - x \geq 0 \right\}.$$

Toda desigualdad  $\alpha^T x \leq \beta$  válida para el polígono  $P$  puede escribirse como la desigualdad  $\beta x_0 - \alpha^T x \geq 0$  válida para el cono  $K$ , a la que llamaremos en adelante *desigualdad homogeneizada de  $\alpha^T x \leq \beta$* . Notaremos por  $\hat{\alpha}^T = (\beta, -\alpha^T)$  al vector de incidencia asociado a esta desigualdad.

Notar que es posible escribir  $K$  como la intersección de un número finito de semi-espacios definidos por restricciones lineales de la forma  $\hat{\alpha}^T x \geq 0$  con  $\hat{\alpha}^T = (\beta, -\alpha^T)$  y  $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ ; por lo tanto,  $K$  es un cono poliedral.

Se denotan por  $e_i$  los vectores unitarios canónicos de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , que tienen 1 en la  $i$ -ésima entrada; y se define  $f_i := e_0 - e_i$ , para  $i = 1, \dots, n$ .

Llamaremos  $Q$  al cono poliedral correspondiente a la homogeneización del polítopo  $[0, 1]^n$ ,

$$Q = \{x = (x_0, x_1, \dots, x_n)^T : x_0 - x_i \geq 0, x_i \geq 0, \forall 1 \leq i \leq n\}.$$

Notar que  $Q$  es un cono poliedral descrito por las siguientes  $2n$  desigualdades lineales:

$$x_i = e_i^T x \geq 0 \quad \text{y} \quad x_0 - x_i = (e_0 - e_i)^T x = f_i^T x \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, n. \quad (2.1)$$

$Q$  puede entenderse, de manera equivalente, como el cono convexo generado por todos los vectores  $x \in \{0, 1\}^{n+1}$  con  $x_0 = 1$ . A lo largo de este capítulo consideraremos un cono convexo  $K \subseteq Q$ , y notaremos por  $K_I$  al cono generado por todos los vectores  $0 - 1$  en  $K$ .

Sea  $K$  un cono convexo en  $\mathbb{R}^{n+1}$ . El cono polar de  $K$ , denotado por  $K^*$ , es el cono convexo definido por

$$K^* := \{u \in \mathbb{R}^{n+1} : u^T x \geq 0, \forall x \in K\}.$$

Observar que a cada vector  $u \in K^*$  le corresponde una desigualdad lineal  $u^T x \geq 0$  que es válida para  $K$ , es decir, que se satisface para todo  $x \in K$ . Por lo tanto,  $K^*$  esta formado por los vectores normales de todas las desigualdades válidas para  $K$ .

El cono polar de  $Q$  está generado por los vectores  $e_i$  y  $f_i$  para  $i = 1, \dots, n$ . Estos vectores corresponden a los vectores normales de las desigualdades ([equation][1][2]2.1) que definen  $Q$ . Por lo tanto,

$$Q^* = \text{cone}\{e_i, f_i : i = 1, \dots, n\}.$$

**Lema 2.1.** *Si  $K \subseteq Q$ , entonces  $Q^* \subseteq K^*$ .*

*Demostración.* En efecto, para todo  $u \in Q^*$ , se tiene que  $u^T x \geq 0$  es una desigualdad válida para  $Q$ . En particular, esta desigualdad se satisface para todo  $x \in K \subseteq Q$  y luego  $u \in K^*$ .  $\square$

**Lema 2.2.** *Sea  $K$  un cono convexo. Entonces  $(K^*)^* = K$ .*

*Demostración.* Por la definición de cono polar, para cualquier  $x \in K$ ,  $y^T x = x^T y \geq 0$  para todo  $y \in K^*$  y entonces  $K \subseteq (K^*)^*$ . Para la otra relación de contención, procedamos por reducción al absurdo. Supongamos que existe  $z \in (K^*)^* \setminus K$ . Por el Teorema [teo][1][1]1.1, existe  $a \in \mathbb{R}^n$ ,  $a \neq 0$  tal que

$$a^T z < 0 \quad \text{y} \quad a^T x \geq 0 \quad \text{para todo } x \in K.$$

De la última desigualdad se sigue que  $a \in K^*$ , pero esto contradice la primera relación, pues como  $z \in (K^*)^*$  se debería tener  $a^T z \geq 0$ . Se concluye entonces que  $(K^*)^* \subseteq K$ .  $\square$

**Lema 2.3.** Sean  $K_1$  y  $K_2$  dos conos convexos. Se cumple que

$$(K_1 + K_2)^* = K_1^* \cap K_2^*.$$

*Demostración.* Sea  $y \in (K_1 + K_2)^*$ . Se cumple entonces que  $y^T(x_1 + x_2) \geq 0$  para cualquier  $x_1 \in K_1$  y cualquier  $x_2 \in K_2$ . Ya que  $0 \in K_1$ ,  $y^T x_2 \geq 0$  para todo  $x_2 \in K_2$ , y luego  $y \in K_2^*$ . De manera similar se concluye  $y \in K_1^*$ . Por lo tanto,  $y \in K_1^* \cap K_2^*$ .

Para la otra relación de contención, sean  $y \in K_1^* \cap K_2^*$ ,  $x_1 \in K_1$  y  $x_2 \in K_2$ . Entonces  $y^T(x_1 + x_2) = y^T x_1 + y^T x_2 \geq 0$ , pues  $y^T x_1 \geq 0$  y  $y^T x_2 \geq 0$ . Luego,  $y \in (K_1 + K_2)^*$ .  $\square$

**Corolario 2.4.**  $(K_1 \cap K_2)^* = K_1^* + K_2^*$ .

*Demostración.* Basta tomar  $K_1 = K_1^*$  y  $K_2 = K_2^*$  en el Lema [lema][3][2]2.3 y aplicar luego el Lema [lema][2][2]2.2:  $K_1^* + K_2^* = [(K_1^* + K_2^*)]^* = [(K_1^*)^* \cap (K_2^*)^*]^* = (K_1 \cap K_2)^*$ .  $\square$

**Lema 2.5.** Si  $K = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq 0\}$ , entonces  $K^* = \text{cone}(A^T)$ .

*Demostración.* Calculando el polar de  $K$ , se tiene

$$\begin{aligned} K^* &= \{u \in \mathbb{R}^n : u^T v \geq 0, \forall v \in K\} \\ &= \{u \in \mathbb{R}^n : u^T v \geq 0, \forall v \text{ que satisface } Av \geq 0\}. \end{aligned}$$

Supongamos que  $A \in Q^{m \times n}$ . Del Lema de Farkas [45, Sec. 1.4] sabemos que una desigualdad  $\tilde{a}^T x \leq \tilde{b}$  es válida para el conjunto  $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$  si y sólo si existe  $c \in \mathbb{R}_+^m$  tal que  $c^T A = \tilde{a}$  y  $c^T b \leq \tilde{b}$ . Luego, si  $(-u)^T v \leq 0$  es válida para todo  $v$  que satisface  $(-A)v \leq 0$ , entonces existe  $c \geq 0$  tal que  $c^T(-A) = (-u)^T$  y  $c^T(0) \leq 0$ . Con esto,

$$\begin{aligned} K^* &= \{u \in \mathbb{R}^n : \exists c \in \mathbb{R}_+^m, u = A^T c\} \\ &= \text{cone}(A^T). \end{aligned}$$

$\square$

Sean  $K_1, K_2 \subseteq Q$  dos conos convexos. Para todo  $u \in K_1^*$ , la desigualdad  $u^T x \geq 0$  es válida para  $K_1$ , y para todo  $v \in K_2^*$ , la desigualdad  $v^T x \geq 0$  es válida para  $K_2$ . De aquí se sigue que la desigualdad cuadrática  $(u^T x)(x^T v) \geq 0$  es válida para  $K_1 \cap K_2$ .

Además, puede demostrarse que

$$K_1 \cap K_2 = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : (u^T x)(x^T v) \geq 0, \forall u \in K_1^*, v \in K_2^*; x_0 > 0\} \cup \{0\}. \quad (2.2)$$

En efecto, sea  $x \in \mathbb{R}^{n+1}$  tal que  $(u^T x)(x^T v) \geq 0$  se cumple para todo  $u \in K_1^*$  y  $v \in K_2^*$ , y suponer además que  $x_0 > 0$ . Como  $Q^* \subseteq K_2^*$  (Lema [lema][1][2]2.1), en particular  $v := e_i + f_i \in K_2^*$ , para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Pero luego,  $(u^T x)(x^T v) = u^T x x^T (e_i + f_i) = u^T x x^T e_0 = (u^T x)x_0 \geq 0$ . Y como  $x_0 > 0$ , obtenemos finalmente

$$u^T x \geq 0, \forall u \in K_1^* \Leftrightarrow x \in (K_1^*)^* = K_1.$$

De manera similar, puede probarse que  $x \in K_2$ .

Con el mismo razonamiento, puede demostrarse también que toda desigualdad  $u^T x \geq 0$  válida para  $K_1$  puede ser escrita como la suma de dos desigualdades cuadráticas

$$(u^T x)(x^T e_i) \geq 0 \quad \text{y} \quad (u^T x)(x^T f_i) \geq 0,$$

obtenidas a partir de  $e_i, f_i \in Q^* \subseteq K_1^*$ , ya que  $u^T x x^T (e_i + f_i) = (u^T x)x_0$  y además

$$u^T x \geq 0 \Leftrightarrow (u^T x)x_0 \geq 0, \quad \forall x \in K_1.$$

**Lema 2.6.** *Sea  $x$  es un vector 0-1 en  $K_1 \cap K_2$  con  $x_0 = 1$ , y  $Y = x x^T$ . Entonces  $Y$  es una matriz en  $\mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$  que satisface:*

- (i)  $Y$  es simétrica;
- (ii)  $\text{diag}(Y) = Y e_0$ , es decir,  $y_{ii} = y_{0i}$  para todo  $1 \leq i \leq n$ ;
- (iii)  $u^T Y v \geq 0$  para todo  $u \in K_1^*$  y  $v \in K_2^*$ ;
- (iv)  $Y$  es semi-definida positiva, es decir,  $u^T Y u \geq 0$ , para todo  $u \in \mathbb{R}^{n+1}$ .

*Demostración.* Es evidente que  $Y$  es simétrica: pues  $Y^T = (x x^T)^T = (x^T)^T x^T = x x^T = Y$ .

Para la segunda parte, notar que  $y_{ij} = x_i x_j$  para  $0 \leq i, j \leq n$ . Por lo que  $y_{ii} = x_i x_i = x_i^2$ , y como  $x_i \in \{0, 1\}$  se tiene que  $y_{ii} = x_i$ . De manera similar,  $y_{0i} = x_0 x_i = x_i$ , pues  $x_0 = 1$ .

Para el punto (iii), sean  $u \in K_1^*$  y  $v \in K_2^*$ . Tenemos que  $u^T x \geq 0$  pues  $x$  pertenece a  $K_1 \cap K_2 \subseteq K_1$ , y que  $v^T x \geq 0$  pues  $x$  pertenece a  $K_1 \cap K_2 \subseteq K_2$ . Luego,  $(u^T x)(v^T x) = u^T x x^T v \geq 0$ .

Finalmente, sea  $u \in \mathbb{R}^{n+1}$ . Se tiene que

$$u^T Y u = u^T x x^T u = (u^T x)(u^T x) = (u^T x)^2 \geq 0.$$

□

Las propiedades anteriores se usan para definir dos conjuntos que serán de interés en la construcción presentada más adelante.

**Definición 2.1** ([33]). Sean  $K_1, K_2 \subseteq Q$  dos conos convexos. Se define  $M(K_1, K_2)$  como el cono de las matrices  $Y = (y_{ij})$  que pertenecen a  $\mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$  y que satisfacen (i)–(iii) del Lema [lema][6][2]2.6. De manera similar,  $M_+(K_1, K_2)$  es el cono de las matrices que a más de las condiciones anteriores satisfacen (iv). Es decir,

$$M(K_1, K_2) := \{Y \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)} : Y \text{ satisface (i) – (iii)}\},$$

y

$$M_+(K_1, K_2) := \{Y \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)} : Y \text{ satisface (i) – (iv)}\}.$$

**Lema 2.7.** La condición (iii) en el Lema [lema][6][2]2.6 es equivalente a

$$(iii_a) \ YK_2^* \subseteq K_1, \text{ y}$$

$$(iii_b) \ YK_1^* \subseteq K_2.$$

*Demostración.* Es evidente que (iii) implica (iii<sub>a</sub>). En efecto, sea  $v \in K_2^*$ . Para todo  $u \in K_1^*$  se cumple que  $u^T Y v \geq 0$ , y luego  $Yv \in K_1$ . En el otro sentido, supongamos que  $YK_2^* \subseteq K_1$ , es decir, que para todo  $v \in K_2^*$  se tiene que  $Yv \in K_1$ . Luego, para todo  $u \in K_1^*$ ,  $u^T Y v \geq 0$ .

La equivalencia entre (iii) y (iii<sub>b</sub>) se demuestra de manera similar. □

Los conos  $M(K_1, K_2)$  y  $M_+(K_1, K_2)$  suelen conocerse como *levantamientos* de  $K_1$  y  $K_2$ . Son importantes además sus proyecciones sobre  $\mathbb{R}^{n+1}$  definidas por:

$$N(K_1, K_2) := \{Y e_0 : Y \in M(K_1, K_2)\},$$

$$N_+(K_1, K_2) := \{Y e_0 : Y \in M_+(K_1, K_2)\}.$$

Al procedimiento de obtener  $N(K_1, K_2)$  ó  $N_+(K_1, K_2)$  a partir de  $K_1$  y  $K_2$  se lo conoce como “levantar y proyectar” (*lift-and-project*). Esta técnica fue introducida por Lovász y Schrijver [33]. El siguiente resultado explica su utilidad.

**Lema 2.8.**  $(K_1 \cap K_2)_I \subseteq N_+(K_1, K_2) \subseteq N(K_1, K_2) \subseteq K_1 \cap K_2$ .

*Demostración.* Sea  $x \in (K_1 \cap K_2)_I$ . Luego,  $x = \sum_{i=1}^k t_i x^i$  para ciertos  $x^i \in K_1 \cap K_2 \cap \{0, 1\}^{n+1}$  y  $t_i \geq 0$ ,  $1 \leq i \leq k$ . Considerar las matrices  $Y^i$  correspondientes, definidas por  $Y^i = (x^i)(x^i)^T$ . Observar además que, como  $K_1 \cap K_2 \subseteq Q$ , se tiene que  $x_0^i = 1$



para todo  $1 \leq i \leq k$ . Del Lema [lema][6][2]2.6 se sigue que  $Y^i$  verifica las condiciones (i)-(iv) y por lo tanto  $Y^i \in M_+(K_1, K_2)$ . Finalmente, para todo  $1 \leq i \leq k$  se tiene que

$$Y^i e_0 = (x_0^i) x^i = x^i \in N_+(K_1, K_2),$$

y como  $N_+(K_1, K_2)$  es un cono convexo, se concluye que  $x = \sum_{i=1}^k t_i x^i \in N_+(K_1, K_2)$ .

La inclusión  $N_+(K_1, K_2) \subseteq N(K_1, K_2)$  es evidente, ya que  $M_+(K_1, K_2) \subseteq M(K_1, K_2)$  por definición.

Para demostrar la última inclusión, sea  $x \in N(K_1, K_2)$ . Entonces existe  $Y$  que satisface (i)-(iii) y tal que  $x = Y e_0$ . Por otro lado, ya que  $K_2 \subseteq Q$ ,  $Q^* \subseteq K_2^*$  y se sigue que  $e_0 \in K_2^*$ . Por (iii<sub>a</sub>),  $x = Y e_0 \in K_1$ . Similarmente, de  $K_1 \subseteq Q$  y (iii<sub>b</sub>) se sigue que  $x \in K_2$ . Luego,  $x \in K_1 \cap K_2$ .  $\square$

Notar que toda matriz  $Y \in M(K_1, K_2)$  satisface  $y_{ij} \geq 0$ , pues  $e_i \in K_1^*$  y  $e_j \in K_2^*$ . Además,  $y_{ij} \leq y_{ii} = y_{0i} \leq y_{00}$ , pues  $e_i \in K_1^*$  y  $f_j \in K_2^*$ .

Necesitaremos extender la definición de polar para conos de matrices. Si  $K \subseteq \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$  entonces

$$K^* = \{U \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)} : \langle U, Y \rangle \geq 0, \forall Y \in K\},$$

donde el producto interno  $\langle A, B \rangle$  entre dos matrices  $A, B$  de  $\mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$  se define como

$$\langle A, B \rangle = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_{ij} b_{ij}.$$

En la aplicación práctica del método, son de gran importancia las expresiones para  $M^*(K_1, K_2)$  y  $M_+^*(K_1, K_2)$  que derivaremos a continuación.

Denotaremos por  $U_{\text{sym}}$  al espacio de las matrices simétricas y por  $U_{\text{skew}}$  al espacio de las matrices antisimétricas en  $\mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$ .

En la condición (ii) de la Definición [defi][1][2]2.1, se tiene que para cada  $i = 1, \dots, n$ ,  $y_{ii} - y_{0i} = 0$ , igualdad que puede ser escrita usando el producto escalar de matrices en la forma  $\langle f_i e_i^T, Y \rangle = 0$ . Se define entonces

$$U := \{Y \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)} : \langle f_i e_i^T, Y \rangle = 0, \forall 1 \leq i \leq n\}.$$

Se denota además por  $U_1$  el espacio lineal de las matrices  $Y$  en  $\mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$  tales que  $y_{0j} = -y_{jj}$  para  $1 \leq j \leq n$ ,  $y_{i0} = 0$  y  $y_{ij} = 0$ , si  $i \neq 0$  y  $i \neq j$ .

**Lema 2.9.**  $U_1$  está generado por las matrices  $f_i e_i^T$  para  $i = 1, \dots, n$ .

*Demostración.* Notar que las matrices  $f_i e_i^T$  tienen la siguiente forma:

$$f_i e_i^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Es fácil ver que las matrices  $f_i e_i^T$  para  $i = 1, \dots, n$  son linealmente independientes. Además, cualquier matriz perteneciente a  $U_1$  puede expresarse como una combinación lineal de estas matrices. Por lo tanto, las matrices  $f_i e_i^T$  para  $i = 1, \dots, n$  forman una base generadora del espacio lineal  $U_1$ .  $\square$

De manera análoga, el producto  $u^T Y v$  en la condición (iii) de la Definición [defi][1][2]2.1 puede escribirse como  $\langle u, Y v \rangle = \langle u v^T, Y \rangle$ . Definimos entonces el conjunto

$$V := \{Y \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)} : \langle u v^T, Y \rangle \geq 0, \forall u \in K_1^* \wedge \forall v \in K_2^*\}.$$

Finalmente, denotaremos por  $U_{sdp}$  al espacio de las matrices semi-definidas positivas (s.d.p.) en  $\mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$ , es decir

$$U_{sdp} = \{Y \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)} : x^T Y x \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}^{n+1}\}.$$

Empleando la notación introducida arriba, tenemos que:

$$M(K_1, K_2) := U_{\text{sym}} \cap U \cap V,$$

y

$$M_+(K_1, K_2) := U_{\text{sym}} \cap U \cap V \cap U_{sdp}.$$

Y aplicando el Corolario [coro][4][2]2.4:

$$\begin{aligned} M^*(K_1, K_2) &= (U_{\text{sym}} \cap U \cap V)^* \\ &= U_{\text{sym}}^* + U^* + V^*, \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned} M_+^*(K_1, K_2) &= (U_{\text{sym}} \cap U \cap V \cap U_{sdp})^* \\ &= U_{\text{sym}}^* + U^* + V^* + U_{sdp}^*. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Encontraremos ahora expresiones para los polares de  $U_{\text{sym}}$ ,  $U$ ,  $V$  y  $U_{sdp}$ .

**Lema 2.10.** *Sea  $W$  un subespacio lineal y  $W^\perp$  su complemento ortogonal. Entonces*

$$W^* = W^\perp.$$

*Demostración.* Por definición,

$$W^\perp = \{v : \langle v, x \rangle = 0, \forall x \in W\},$$

de donde resulta evidente que  $W^\perp \subseteq W^*$ . Por otra parte, sea  $u \in W^*$ . Demostremos que  $\langle u, x \rangle = 0$  para todo  $x \in W$ . Como  $W$  es un subespacio lineal, tenemos que si  $x \in W$  entonces  $-x \in W$ . Luego, como  $u \in W^*$ ,  $\langle u, x \rangle \geq 0$  y  $\langle u, -x \rangle \geq 0$ , de donde  $\langle u, x \rangle = 0$ .  $\square$

Por el lema anterior y puesto que se conoce que  $U_{\text{sym}}$  es el complemento ortogonal de  $U_{\text{skew}}$ , se tiene el siguiente resultado:

**Lema 2.11.**  $U_{\text{sym}}^* = U_{\text{skew}}$ .

De manera similar, del Lema [lema][9][2]2.9 se sigue que  $U_1$  es el complemento ortogonal de  $U$ ; y por lo tanto:

**Lema 2.12.**  $U^* = U_1$ .

Si  $K_1$  y  $K_2$  son conos poliedrales, entonces  $K_1^*$  y  $K_2^*$  también lo son, y el semi-espacio  $V$  está definido por un sistema finito de desigualdades lineales. Aplicando el Lema [lema][5][2]2.5, obtenemos entonces:

**Lema 2.13.**  $V^* = \text{cone}\{uv^T : u \in K_1^*, v \in K_2^*\}$ .

Encontrar una expresión para  $U_{\text{sdp}}^*$  resulta bastante más difícil. Para ello, requerimos algunos resultados preliminares. Los tres lemas siguientes caracterizan propiedades básicas de las matrices semi-definidas positivas. (Para las demostraciones ver, por ejemplo, [34]).

**Definición 2.2** (Producto de Hadamard). Sean  $A, B$  dos matrices en  $\mathbb{R}^{m \times n}$ . El producto de Hadamard entre  $A$  y  $B$ , notado por  $A \circ B$ , se define por  $[A \circ B]_{ij} = [A]_{ij}[B]_{ij}$  para todo  $1 \leq i \leq m$ , y  $1 \leq j \leq n$ .

**Lema 2.14** ([34]). Cualquier matriz  $A$  semi-definida positiva de rango uno puede ser escrita como el producto  $A = xx^T$ , donde  $x \in \mathbb{R}^n$ .

**Lema 2.15** ([34]). Sea  $B$  una matriz semi-definida positiva y sean  $B_1, \dots, B_r$  las matrices que forman la descomposición de rango uno de  $B$ . Entonces  $B$  es semi-definida positiva si y sólo si  $B_1, \dots, B_r$  son todas semi-definidas positivas.

A partir de estas propiedades, se demuestra un resultado importante conocido como producto de Schur.

**Teorema 2.16** (Producto de Schur [5, Sec. 3.7]). Sean  $A$  y  $B$  matrices semi-definidas positivas de tamaño  $n$ . Entonces  $A \circ B$  es semi-definida positiva.

*Demostración.* Sean  $A$  y  $B$  dos matrices semi-definidas positivas de tamaño  $n$ . Supongamos que  $B$  es de rango cero, lo cual es cierto si y sólo si  $B$  es igual a la matriz nula que notaremos por  $\mathcal{O}$ . Por lo tanto  $A \circ B = \mathcal{O}$ , y  $\mathcal{O}$  es claramente semi-definida positiva.

Ahora, supongamos que  $B$  es de rango uno, entonces, por el Lema [lema][14][2]2.14, podemos escribir  $B = xx^T$  donde  $x \in \mathbb{R}^n$ . Luego,  $[A \circ B]_{ij} = [A]_{ij}[B]_{ij} = [A_{ij}][x]_i[x^T]_j = [D_x^T A D_x]_{ij}$ , donde  $D_x \in \mathbb{R}^{n \times n}$  denota a la matriz diagonal cuyos elementos coinciden con el vector  $x$ . Como  $A$  es semi-definida positiva, se tiene que, para todo  $v \in \mathbb{R}^n$ ,

$$v^T (D_x^T A D_x) v = v^T D_x^T A D_x v = (D_x v)^T A (D_x v) \geq 0,$$

es decir,  $D_x A D_x = D_x^T A D_x$  es semi-definida positiva.

Por último, supongamos que  $B$  es de rango  $r$ , con  $1 \leq r \leq n$ . Entonces podemos descomponer  $B$  como la suma  $r$  de matrices  $B_1, \dots, B_r$  de rango uno que, por el Lema [lema][15][2]2.15, son semi-definidas positivas. Se sigue que  $A \circ B = A \circ (B_1 + \dots + B_r)$  y por lo demostrado anteriormente, tenemos que para cada  $i = 1, \dots, n$ ,  $A \circ B_i$  es semi-definida positiva, de donde se concluye que  $A \circ B$  es semi-definida positiva.  $\square$

**Teorema 2.17.** El espacio de las matrices semi-definidas positivas es auto-polar, es decir,  $U_{\text{sdp}}^* = U_{\text{sdp}}$ .

*Demostración.* Demostraremos las siguientes implicaciones:

- (i) Si se cumple que  $\langle A, X \rangle \geq 0$  para toda matriz  $X$  s.d.p., entonces  $A$  es s.d.p.
- (ii) Para cualquier par de matrices  $A$  y  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  semi-definidas positivas, se cumple que  $\langle A, B \rangle \geq 0$ .

Para la primera, sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  una matriz que no es s.d.p.. Entonces existe  $x \in \mathbb{R}^n$  tal que

$$x^T A x = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j < 0. \quad (2.5)$$

Considerar ahora la matriz  $X = xx^T$ . Es fácil verificar que  $X$  es s.d.p. En efecto, para todo  $v \in \mathbb{R}^n$  se tiene

$$\begin{aligned} v^T X v &= v^T x x^T v \\ &= (v^T x)(x^T v) \\ &= (v^T x)(v^T x)^T \geq 0. \end{aligned}$$

Pero ahora, notar que ([equation][5][2]2.5) se puede escribir como

$$\langle A, X \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j < 0.$$

Es decir, para toda matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  que no es s.d.p. existe una matriz  $X$  s.d.p. tal que  $\langle A, X \rangle < 0$ . La segunda implicación se sigue del Teorema [teo][16][2]2.16. Supongamos que  $A$  y  $B$  son matrices semi-definidas positivas tales que

$$\langle A, B \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ij} < 0.$$

Del Teorema de Schur conocemos que si  $A$  y  $B$  son dos matrices semi-definidas positivas, el producto de Hadamard  $A \circ B$  es s.d.p., es decir, para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ ,

$$x^T (A \circ B) x \geq 0.$$

En particular, si tomamos  $x = \mathbb{1}$ , obtenemos la contradicción:

$$\mathbb{1}^T (A \circ B) \mathbb{1} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ij} \geq 0.$$

□

El siguiente teorema resume los resultados obtenidos hasta aquí.

**Teorema 2.18.**

$$M^*(K_1, K_2) = U_{\text{skew}} + U_1 + V^*, \quad (2.6)$$

$$M_+^*(K_1, K_2) = U_{\text{skew}} + U_1 + V^* + U_{\text{sdp}}. \quad (2.7)$$

*Demostración.* Los resultados se obtienen directamente al aplicar los Lemas [lema][12][2]2.12–[lema][13][2]2.13 y el Teorema [teo][17][2]2.17 sobre ([equation][3][2]2.3) y ([equation][4][2]2.4).

□

Para la definición de  $N(K_1, K_2)$  se consideraron dos conos convexos arbitrarios  $K_1$  y  $K_2$  en  $Q$ . Dos casos particulares que han merecido especial atención se presentan cuando:  $K_1 = K_2 = K$ , y  $K_1 = K$ ,  $K_2 = Q$ . Para ellos se tiene el siguiente corolario.

**Corolario 2.19.**  $N(K_1 \cap K_2, K_1 \cap K_2) \subseteq N(K_1, K_2) \subseteq N(K_1 \cap K_2, Q)$ .

*Demostración.* Sea  $Y \in M(K_1 \cap K_2, K_1 \cap K_2)$ . Notar que la única propiedad relevante a verificar para determinar si  $Y \in M(K_1, K_2)$  es (iii), pues las dos primeras se satisfacen

de manera trivial. La primera inclusión se sigue directamente del hecho que  $K_i^* \subseteq (K_1 \cap K_2)^*$ , para  $i \in \{1, 2\}$ . Para la segunda, sea  $Y \in M(K_1, K_2)$ . Veamos que para todo  $u \in (K_1 \cap K_2)^*$  y todo  $v \in Q^*$  se tiene que  $u^T Y v \geq 0$ .

Del Corolario [coro][4][2]2.4, conocemos que  $u = u_1 + u_2$ , donde  $u_1 \in K_1^*$  y  $u_2 \in K_2^*$ . Además, como  $Q^* \subseteq K_i^*$  para  $i \in \{1, 2\}$ ,  $v$  es elemento de  $K_1^*$  y  $K_2^*$ . Por lo tanto

$$u^T Y v = (u_1 + u_2)^T Y v = u_1^T Y v + u_2^T Y v \geq 0,$$

de donde se concluye que  $Y \in M(K_1 \cap K_2, Q)$ .  $\square$

Del corolario anterior se sigue que  $N(K, K) \subseteq N(K, Q)$ , por lo que el primer caso constituye una mejor relajación para  $K_I$ . Sin embargo, ha sido demostrado [33] que  $N(K, Q)$  tiene mejores propiedades desde el punto de vista algorítmico. En lo posterior, nos restringimos al estudio de esta relajación y definimos los operadores de levantamiento y proyección  $N$  y  $N_+$  por medio de:

$$\begin{aligned} N(K) &:= N(K, Q), \\ N_+(K) &:= N_+(K, Q), \end{aligned}$$

para cualquier  $K \subseteq Q$ . Notar que a partir del Lema [lema][8][2]2.8 se tiene que

$$K_I \subseteq N_+(K) \subseteq N(K) \subseteq K. \quad (2.8)$$

Por otra parte, como  $K_2^* = Q^*$ , entonces la condición  $(iii_a)$  es equivalente a:

$(iii_c)$  toda columna de  $Y$  está en  $K$ , la diferencia de la primera columna y cualquier otra columna está en  $K$ .

En efecto, como  $Q^*$  está generado por los vectores  $e_i$  y  $f_i$ ,  $YQ^*$  contiene los vectores  $Y e_i = y_i$  y  $Y f_i = y_0 - y_i$ . De  $(iii_a)$  tenemos que  $YQ^* \subseteq K$ , entonces  $y_i \in K$  y  $(y_0 - y_i) \in K$ .

## 2.2 Propiedades del operador $N$

En esta sección se exponen las propiedades del operador  $N$ , las mismas que serán de utilidad para estudiar su aplicación al polítopo de conjuntos estables.

**Lema 2.20.** *Si  $A \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$  es una transformación lineal tal que  $A \cdot Q = Q$ , entonces:*

$$(i) \quad M(K_1, K_2) = M(K_2, K_1).$$

$$(ii) \quad M(AK_1, AK_2) = AM(K_1, K_2)A^T.$$

$$(iii) \quad N(AK_1, AK_2) = AN(K_1, K_2).$$

*Demostración.*

(i) Sean  $Y \in M(K_1, K_2)$ ,  $u \in K_1^*$  y  $v \in K_2^*$ . Sabemos que  $u^T Y v \geq 0$  y además

$$u^T Y v = (u^T Y v)^T = (Y v)^T (u^T)^T = v^T Y^T u = v^T Y u,$$

pues  $Y$  es simétrica. De aquí se sigue que  $v^T Y u \geq 0$ , lo que implica  $Y \in M(K_2, K_1)$ , y por tanto  $M(K_1, K_2) \subseteq M(K_2, K_1)$ . De la misma manera se demuestra que  $M(K_2, K_1) \subseteq M(K_1, K_2)$ .

(ii) Notar primero que

$$u \in (AK_i)^* \Leftrightarrow \forall w \in K_i, u^T A w \geq 0 \Leftrightarrow \forall w \in K_i, (A^T u)^T w \geq 0 \Leftrightarrow A^T u \in K_i^*, \quad (2.9)$$

donde  $i \in \{1, 2\}$ .

Sea  $Y \in AM(K_1, K_2)A^T$ , luego  $Y = AXA^T$  con  $X \in M(K_1, K_2)$ . Sean  $u \in (AK_1)^*$  y  $v \in (AK_2)^*$ . Tenemos que

$$u^T Y v = u^T AXA^T v = (A^T u)^T X (A^T v) \geq 0$$

donde la última desigualdad se sigue del hecho que  $(A^T u) \in K_1^*$ ,  $(A^T v) \in K_2^*$  y  $X \in M(K_1, K_2)$ . Por lo tanto,  $Y \in M(AK_1, AK_2)$ . Las propiedades (i) y (ii) del Lema [lema][6][2]2.6 se siguen trivialmente de  $Y \in AM(K_1, K_2)A^T$ .

Recíprocamente, sea  $Y \in M(AK_1, AK_2)$ . De  $AQ = Q$  se sigue que  $A$  es de rango completo, y por tanto invertible. Considerar la matriz  $X := A^{-1}Y(A^T)^{-1}$ . Sean  $\tilde{u} \in K_1^*$  y  $\tilde{v} \in K_2^*$ . Entonces,

$$\tilde{u}^T X \tilde{v} = \tilde{u}^T A^{-1}Y(A^T)^{-1}\tilde{v} = ((A^T)^{-1}\tilde{u})^T Y ((A^T)^{-1}\tilde{v}) = u^T Y v, \quad (2.10)$$

con  $u = (A^T)^{-1}\tilde{u}$  y  $v = (A^T)^{-1}\tilde{v}$ . Notar que  $A^T u = \tilde{u} \in K_1^*$ , y por tanto de ([equation][9][2]2.9) se sigue que  $u \in (AK_1)^*$ . De manera similar,  $v \in (AK_2)^*$  y como  $Y \in M(AK_1, AK_2)$  se concluye que el extremo derecho de ([equation][10][2]2.10) es no negativo. Luego,  $X \in M(K_1, K_2)$  y por tanto, como  $Y = AXA^T$ , se obtiene  $Y \in AM(K_1, K_2)A^T$ .

(iii) Por definición del operador  $N$ ,

$$N(AK_1, AK_2) = \{\tilde{Y}e_0 : \tilde{Y} \in M(AK_1, AK_2)\}.$$

Como  $\tilde{Y} \in M(AK_1, AK_2)$ , de (ii) se sigue que  $\tilde{Y} = AY A^T$ , donde  $Y \in M(K_1, K_2)$ . Por otra parte, se puede demostrar que  $A^T e_0$  es paralela a  $e_0$ , y de aquí, considerando que  $M(K_1, K_2)$  es un cono,

$$\begin{aligned} N(AK_1, AK_2) &= \{AY A^T e_0 : Y \in M(K_1, K_2)\} \\ &= \{AY e_0 : Y \in M(K_1, K_2)\} = AN(K_1, K_2). \end{aligned}$$

□

**Lema 2.21.** Sean  $K \subseteq Q$  un cono en  $\mathbb{R}^{n+1}$  y  $w \in \mathbb{R}^{n+1}$ . Entonces  $w \in N(K)^*$  si y sólo si  $w e_0^T \in M(K)^*$ .

*Demostración.* Por definición del polar de  $N(K)$ :

$$w \in N(K)^* \Leftrightarrow \langle w, v \rangle \geq 0, \forall v \in N(K).$$

Se conoce que  $v \in N(K)$  si y sólo si existe  $Y \in M(K)$  tal que  $v = Y e_0$ . Luego, la expresión anterior puede escribirse como

$$w \in N(K)^* \Leftrightarrow \langle w, Y e_0 \rangle = \langle w e_0^T, Y \rangle \geq 0, \forall Y \in M(K),$$

lo que implica que  $w e_0^T \in M(K)^*$ . □

Para  $1 \leq i \leq n$ , se definen los hiperplanos  $H_i := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_i = 0\}$  y  $G_i := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_i = x_0\}$ . Cada faceta de  $Q$  es la intersección de  $Q$  con uno de los hiperplanos  $H_i$  y  $G_i$ . El siguiente lema de Lovász y Schrijver [33] da una propiedad geométrica del operador  $N(K)$  y servirá para establecer qué tan ajustada es la relajación obtenida mediante el operador  $N$ .

**Lema 2.22** ([33]). Para cualquier cono convexo  $K \subseteq Q$  y todo  $1 \leq i \leq n$ ,

$$N(K) \subseteq (K \cap H_i) + (K \cap G_i).$$

*Demostración.* Sea  $x \in N(K)$ . Existe  $Y \in M(K)$  tal que  $x = Y e_0$ . Para  $i \in \{1, \dots, n\}$ , denotemos por  $y_i$  la  $i$ -ésima columna de  $Y$ . De (ii) se sigue que  $y_i \in G_i$ , pues  $y_{ii} = y_{0i}$ . Asimismo, de (iii<sub>a</sub>)  $y_i \in K$ , y luego  $y_i \in K \cap G_i$ . Similarmente,  $y_0 - y_i \in K \cap H_i$ . En efecto,  $y_0 - y_i \in H_i$  ya que  $y_{ii} - y_{0i} = 0$  y de (iii') la diferencia  $y_0 - y_i$  está en  $K$ .

Por lo tanto,  $x = Y e_0 = (y_0 - y_i) + y_i \in (K \cap H_i) + (K \cap G_i)$ . □

Notar que si  $K', K''$  son conos convexos en  $Q$  entonces su suma  $K' + K'' = \{x' + x'' : x \in K', x'' \in K''\}$  también es un cono convexo en  $Q$ . En particular, se tiene el siguiente lema para la suma de los conos  $(K \cap H_i)$  y  $(K \cap G_i)$ .



**Lema 2.23.** Para todo  $1 \leq i \leq n$ :

$$(K \cap H_i) + (K \cap G_i) = \text{cone}((K \cap H_i) \cup (K \cap G_i)).$$

*Demostración.* Sea  $z \in (K \cap H_i) + (K \cap G_i)$ . Entonces  $z = x + y$  donde  $x \in (K \cap H_i)$  y  $y \in (K \cap G_i)$ . Es evidente que  $z \in \text{cone}((K \cap H_i) \cup (K \cap G_i))$ .

Para la otra contención, sea  $z \in \text{cone}((K \cap H_i) \cup (K \cap G_i))$ , y sean  $V_i = \{v_1, \dots, v_s\}$  y  $W_i = \{w_1, \dots, w_r\}$  dos conjuntos generadores para los conos  $K \cap H_i$  y  $K \cap G_i$ , respectivamente. Entonces existen  $\alpha_i, \beta_j \geq 0$ , con  $1 \leq i \leq r$ ,  $1 \leq j \leq s$  tales que

$$z = \sum_{i=1}^r \alpha_i v_i + \sum_{j=1}^s \beta_j w_j.$$

Haciendo  $x = \sum_{i=1}^r \alpha_i v_i$  y  $y = \sum_{j=1}^s \beta_j w_j$ , obtenemos  $z = x + y \in (K \cap H_i) + (K \cap G_i)$ .  $\square$

Utilizando esta observación en el Lema [lema][22][2]2.22, se tiene entonces que

$$N(K) \subseteq \text{cone}((K \cap H_i) \cup (K \cap G_i)).$$

Si se itera el operador  $N$ , es posible obtener mejores aproximaciones de  $K_I$ . Se define  $N^t(K)$  recursivamente por:  $N^0(K) = K$  y  $N^t(K) = N(N^{t-1}(K))$  para  $t > 0$ . Se hace lo mismo para el operador  $N_+$ .

El siguiente teorema nos muestra que es suficiente aplicar  $n$  veces el operador  $N$  a un cono convexo  $K$  para obtener el cono entero  $K_I$ .

**Teorema 2.24** ([33]). Sea  $K \subseteq Q$  un cono convexo en  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Entonces  $N^n(K) = K_I$ .

*Demostración.* Sean  $Q'$  el cubo unitario de dimensión  $n$  en el hiperplano  $H = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_0 = 1\}$  y  $1 \leq t \leq n$ . Considerar cualquier cara  $F$  de  $Q'$  de dimensión  $n - t$ . Definamos  $\overline{F}$  como la unión de caras de  $Q'$  paralelas a  $F$ .

Demostremos por inducción sobre  $t$  que

$$N^t(K) \subseteq \text{cone}(K \cap \overline{F}). \quad (2.11)$$

Notar que si  $t = n$ ,  $F$  es una cara de  $Q'$  de dimensión 0, es decir, es un vértice de  $Q'$  y entonces  $\overline{F}$  es el conjunto de todos los vértices de  $Q'$ , y se sigue que  $\text{cone}(K \cap \overline{F}) = K_I$ . Es decir, obtendríamos  $N^n(K) \subseteq K_I$ , con lo cual quedaría demostrado el teorema, pues la otra relación de contención es consecuencia de ([equation][8][2]2.8).

Si  $t = 1$ ,  $F$  es una faceta de  $Q'$  y  $\overline{F} = F \cup F'$ , donde  $F'$  es la única faceta del hiperplano  $H$  paralela a  $F$ . Puede verse que  $\overline{F} = (H_i \cup G_i) \cap H$  para algún  $1 \leq i \leq$

$n$ , de donde se sigue que la relación  $N(K) \subseteq \text{cone}(K \cap \overline{F})$  es equivalente al Lema [lema][22][2]2.22.

Supongamos ahora que ([equation][11][2]2.11) es válido para  $t \leq \hat{t} - 1$  y sea  $F$  una cara de  $Q'$  de dimensión  $n - \hat{t}$  que contiene al punto  $e_0$ . Además, sean  $F'$  una cara de  $Q'$  de dimensión  $n - (\hat{t} - 1)$  que contiene a  $F$  y  $i \in \{1, \dots, n\}$  tal que  $F' \cap H_i = F$ .

Por hipótesis de inducción,

$$N^{\hat{t}-1}(K) \subseteq \text{cone}(K \cap \overline{F'}).$$

Usando el Lema [lema][22][2]2.22,

$$\begin{aligned} N^{\hat{t}}(K) &= N(N^{\hat{t}-1}(K)) \subseteq \text{cone}(N^{\hat{t}-1}(K) \cap (H_i \cup G_i)) \\ &\subseteq \text{cone}(\text{cone}(K \cap \overline{F'}) \cap (H_i \cup G_i)) \\ &= \text{cone}([\text{cone}(K \cap \overline{F'}) \cap H_i] \cup [\text{cone}(K \cap \overline{F'}) \cap G_i]). \end{aligned}$$

Como  $H_i$  es un hiperplano de soporte para  $\text{cone}(K \cap \overline{F'})$ , su intersección con este cono es el cono generado por la intersección  $K \cap \overline{F'} \cap H_i$ , es decir,

$$\text{cone}(K \cap \overline{F'}) \cap H_i = \text{cone}(K \cap \overline{F'} \cap H_i) \subseteq \text{cone}(K \cap \overline{F}).$$

De manera similar, notar que  $G_i$  es un hiperplano de soporte para  $\text{cone}(K \cap \overline{F'})$ , y por tanto,

$$\text{cone}(K \cap \overline{F'}) \cap G_i \subseteq \text{cone}(K \cap \overline{F}).$$

De aquí obtenemos finalmente que

$$N^{\hat{t}}(K) \subseteq \text{cone}(\text{cone}(K \cap \overline{F})) = \text{cone}(K \cap \overline{F}).$$

□

De aquí se sigue que, aplicando el operador  $N$  a  $K \neq K_I$  se obtiene una relajación de  $K_I$  que es estrictamente más ajustada que  $K$ .

En analogía al rango de Chvátal de la Sección [section][1][1]1.1, se define el índice (o rango)  $N$  de un cono  $K$  como el menor  $t \in \mathbb{N}$  tal que  $N^t(K) = K_I$ . Por el Teorema [teo][24][2]2.24, el índice  $N$  de cualquier cono  $K \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  es a lo más  $n$ . De manera similar, se define el índice  $N$  de una desigualdad válida para  $K_I$  como el menor  $t \in \mathbb{N}$  tal que esta desigualdad sea válida para  $N^t(K)$ . El Teorema [teo][24][2]2.24, implica que el índice  $N$  de una desigualdad válida para  $K_I$  es a lo más  $n$ , la dimensión del espacio. El índice  $N_+$  se define de manera similar.

Los resultados que hemos presentado fueron desarrollados en  $\mathbb{R}^{n+1}$ , pero es útil

poder visualizarlos en el espacio original  $\mathbb{R}^n$ , sin homogeneización. Si  $K$  es el cono que resulta de homogeneizar el polígono  $P$  contenido en  $[0, 1]^n$ , se define

$$N(P) := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \in N(K) \right\} = N(K) \cap H.$$

De forma semejante se define el operador  $N_+$ . Es fácil notar que el índice  $N$  de  $P$  es igual al índice  $N$  de  $K$ .

## 2.3 Aplicación a la relajación de aristas del polígono de conjuntos estables

En esta sección estudiaremos la aplicación de los operadores  $N$  y  $N_+$  al polígono de conjuntos estables. Presentaremos algunos resultados clásicos obtenidos por Lovász y Schrijver [33], así como cotas inferiores y superiores para los índices  $N$  y  $N_+$  para este polígono.

Para aplicar el operador  $N$  y los demás operadores es necesario homogeneizar el problema, como se explicó al inicio de la Sección [section][1][2]2.1, a través de la inmersión del polígono en el hiperplano  $H := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_0 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ .

Se denota por  $ST(G) \subset \mathbb{R}^{n+1}$  al cono poliedral obtenido al homogeneizar el polígono  $STAB(G) \subset \mathbb{R}^n$ . Notar que

$$ST(G) = \text{cone} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \chi^S \end{pmatrix} : S \text{ es un conjunto estable} \right\},$$

y

$$STAB(G) \cong ST(G) \cap H.$$

De manera similar,  $EST(G) \subset \mathbb{R}^{n+1}$  denota el cono obtenido por la homogeneización del polígono  $ESTAB(G)$ . Observar que  $EST(G)$  está determinado por el siguiente sistema de desigualdades homogéneo:

$$\begin{aligned} x_i &\geq 0, & \forall i \in V, \\ x_0 - x_i - x_j &\geq 0, & \forall ij \in E. \end{aligned}$$

Se tiene además que  $EST(G) \subseteq Q$  y  $EST(G)_I = ST(G)$ .

Estudiaremos la aplicación del operador  $N$  cuando  $K_1 = EST(G)$  y  $K_2 = Q$ . Como en el caso general, se abreviará  $N(EST(G), Q)$  mediante  $N(EST(G))$ .

Por el Lema [lema][8][2]2.8,

$$\text{ST}(G) = \text{EST}(G)_I \subseteq N_+(\text{EST}(G)) \subseteq N(\text{EST}(G)) \subseteq \text{EST}(G).$$

Regresando al espacio original  $\mathbb{R}^n$ ,  $N(\text{ESTAB}(G)) \cong N(\text{EST}(G)) \cap H$ . Para simplificar la notación escribiremos simplemente  $N(G)$  al referirnos a  $N(\text{ESTAB}(G))$ , y denotaremos al índice  $N$  de  $\text{ESTAB}(G)$  por  $n_E(G)$ . De manera similar, se definen  $N_+(G) := N_+(\text{ESTAB}(G))$  y  $n_E^+$  como el índice  $N_+$  del polítopo  $\text{ESTAB}(G)$ . En adelante, todos los resultados que se presentan son sobre  $\mathbb{R}^n$ .

Sea  $a^T x \leq b$  una desigualdad válida para  $\text{STAB}(G)$ . Por el Teorema [teo][24][2]2.24, existe un  $t \in \mathbb{N}$  tal que  $a^T x \leq b$  es válida para  $N^t(G)$ . El menor  $t$  con esta propiedad es el índice  $N$  de  $a^T x \leq b$ . El índice  $N_+$  se define de manera similar.

Presentaremos a continuación cotas inferiores y superiores para el índice  $N$  de algunas de las desigualdades válidas para  $\text{STAB}(G)$  definidas en la Sección [subsection][2][1,3]1.3.2. El índice  $N$  de una desigualdad válida para  $\text{STAB}(G)$  depende sólo del subgrafo inducido por aquellos nodos que tienen coeficientes distintos de cero en la misma.

### 2.3.1 Cotas para el índice $N$

Sean  $a^T x \leq b$  una desigualdad válida para  $\text{STAB}(G)$  y  $W \subseteq V$ . Denotaremos por  $a_W \in \mathbb{R}^W$  la restricción de  $a$  sobre  $W$ . Diremos que las desigualdades  $a_{V \setminus i}^T x \leq b$  y  $a_{V \setminus \{i\} \cup \Gamma(i)}^T x \leq b - a_i$  resultan de  $a^T x \leq b$  por la *eliminación y contracción* de un nodo  $i$  de  $G$ , respectivamente, en alusión a las operaciones definidas en la Sección [section][2][1]1.2.

**Lema 2.25.** *Para todo  $i \in V$ , si  $a^T x \leq b$  es una desigualdad válida para  $\text{STAB}(G)$ , entonces  $a_{V \setminus i}^T x \leq b$  es válida para  $\text{STAB}(G \setminus i)$  y  $a_{V \setminus \{i\} \cup \Gamma(i)}^T x \leq b - a_i$  es válida para  $\text{STAB}(G/i)$ .*

*Demostración.* Sea  $S$  un conjunto estable de  $G \setminus i$ .  $S$  es conjunto estable de  $G$  y por tanto su vector de incidencia  $\chi^S$  satisface  $a^T \chi^S \leq b$ . Pero  $a_{V \setminus i}^T \chi^S = a^T \chi^S \leq b$ , pues  $i \notin S$ .

Sea  $S$  un conjunto estable de  $G/i$ .  $S \cup \{i\}$  es conjunto estable de  $G$  y  $a^T \chi^{S \cup \{i\}} \leq b$ . Además,  $a^T \chi^{S \cup \{i\}} = a_{V \setminus \{i\} \cup \Gamma(i)}^T \chi^S + a_i$ . Luego,  $a_{V \setminus \{i\} \cup \Gamma(i)}^T \chi^S \leq b - a_i$ .  $\square$

**Lema 2.26.** *Sea  $a^T x \leq b$  una desigualdad tal que para cierto  $i$ , la eliminación y contracción de  $i$  generan desigualdades válidas para  $\text{STAB}(G \setminus i)$  y  $\text{STAB}(G/i)$ . Entonces  $a^T x \leq b$  es válida para  $\text{STAB}(G)$ .*

*Demostración.* Sea  $S$  cualquier conjunto estable de  $G$  y notemos por  $x$  su vector de incidencia. Si  $i \notin S$ , entonces  $S \in \text{STAB}(G \setminus i)$  y  $a^T x = a_{V \setminus i}^T x \leq b$ , pues  $a_{V \setminus i}^T x \leq b$  es

válida para  $\text{STAB}(G \setminus i)$ . Por otra parte, si  $i \in S$  y del supuesto que  $a_{V \setminus \{i\} \cup \Gamma(i)}^T x \leq b - a_i$  es válida para  $\text{STAB}(G/i)$  se sigue

$$a^T x = \sum_{l \notin \{i\} \cup \Gamma(i)} a_l x_l + a_i x_i + \sum_{l \in \Gamma(i)} a_l x_l = a_{V \setminus \{i\} \cup \Gamma(i)}^T x + a_i \leq b - a_i + a_i = b, \quad (2.12)$$

pues  $x_i = 1$  y  $x_l = 0$  para todo  $l \in \Gamma(i)$ .  $\square$

**Teorema 2.27** ([33]). *Sea  $P$  un conjunto convexo tal que  $\text{STAB}(G) \subseteq P \subseteq \text{ESTAB}(G)$ . Si  $a^T \leq b$  es una desigualdad válida para  $\text{STAB}(G)$  tal que para cierto  $i \in V$  la eliminación y contracción de  $i$  da una desigualdad válida para  $P$ , entonces  $a^T x \leq b$  es válida para  $N(P)$ .*

*Demostración.* Sean  $\overline{H}_i = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i = 0\}$  y  $\overline{G}_i = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i = 1\}$ . Sabemos que las desigualdades  $a_{V \setminus i}^T x \leq b$  y  $a_{V \setminus \{i\} \cup \Gamma(i)}^T x \leq b - a_i$  son válidas para  $P$ . De esto se puede deducir, primero, que  $a^T x \leq b$  es válida para  $P \cap \overline{H}_i$ , ya que  $x \in P \cap \overline{H}_i$ , implica  $x_i = 0$ , y de  $a_{V \setminus i}^T x \leq b$  se sigue entonces que  $a^T x = a_{V \setminus i}^T x \leq b$ .

Además, de  $a_{V \setminus \{i\} \cup \Gamma(i)}^T x \leq b - a_i$  se sigue que  $a^T x \leq b$  es válida para  $P \cap \overline{G}_i$ . En efecto, si  $x \in P \cap \overline{G}_i$ , entonces  $x_i = 1$  y  $x_j = 0$  para todo  $j \in \Gamma(i)$ , pues  $P \subseteq \text{ESTAB}(G)$  implica  $x_i + x_j \leq 1$ . Luego,  $a^T x \leq b$  por el mismo razonamiento señalado en ([equation][12][2]2.12).

Definamos ahora  $\hat{P}$  como el cono generado por los vectores  $\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$ , donde  $x \in P$ . Notar que  $P \cong \hat{P} \cap H$ . Asimismo,  $N(P) \cong N(\hat{P}) \cap H$ . Por el Lema [lema][22][2]2.22, conocemos que  $N(\hat{P}) \subseteq \hat{P} \cap H_i + \hat{P} \cap G_i$ . Intersecando a cada lado con  $H$ , obtenemos

$$N(P) \cong N(\hat{P}) \cap H \subseteq (\hat{P} \cap H_i + \hat{P} \cap G_i) \cap H = \text{cone}((\hat{P} \cap H_i) \cup (\hat{P} \cap G_i)) \cap H$$

Notar que si  $\hat{x} \in \text{cone}((\hat{P} \cap H_i) \cup (\hat{P} \cap G_i)) \cap H$ , entonces existen  $\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_k \in (\hat{P} \cap H_i) \cup (\hat{P} \cap G_i)$  y  $t_1, \dots, t_k$  tales que  $\hat{x} = \sum_{j=1}^k t_j \hat{v}_j$ . Como  $\hat{x} \in H$ , se tiene además  $\hat{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$  y  $\sum_{j=1}^k t_j = 1$ . De aquí se sigue que  $x \in \text{conv}((P \cap \overline{H}_i) \cup (P \cap \overline{G}_i))$ , es decir

$$N(P) \subseteq \text{conv}((P \cap \overline{H}_i) \cup (P \cap \overline{G}_i)) \quad (2.13)$$

Como  $a^T x \leq b$  es válida para  $P \cap \overline{H}_i$  y  $P \cap \overline{G}_i$ ,  $a^T x \leq b$  es válida para  $\text{conv}((P \cap \overline{H}_i) \cup (P \cap \overline{G}_i))$  y por ([equation][13][2]2.13) para  $N(P)$ .  $\square$

Por ejemplo, si en el lema anterior tomamos  $P = \text{ESTAB}(G)$  y consideramos un agujero impar  $C$  en  $G$ , la desigualdad de rango asociada tiene índice  $N$  a lo más 1, ya que la eliminación y contracción de cualquier nodo de  $C$  resulta en una desigualdad válida para  $\text{ESTAB}(G)$ . De hecho, Lovász y Schrijver [33] demostraron el siguiente teorema.

**Teorema 2.28** ([33]). *El polítopo  $N(G)$  es exactamente el conjunto solución de las restricciones de no negatividad, arista y agujero impar.*

Del Teorema [teo][27][2]2.27 y considerando que el índice  $N$  de un subgrafo inducido no es nunca mayor que el índice  $N$  del grafo, se tiene el siguiente resultado.

**Corolario 2.29** ([33]). *Si para un nodo  $i$ ,  $G \setminus i$  tiene índice  $N$  menor o igual a  $k$ , entonces  $G$  tiene índice  $N$  menor o igual a  $k + 1$ .*

El siguiente lema es de utilidad a la hora de estimar cotas inferiores para el índice  $N$ .

**Lema 2.30** ([33]).  $\frac{1}{k+2}\mathbb{1} \in N^k(G)$ , para todo  $k \in \mathbb{N}_0$ .

*Demostración.* Usaremos inducción sobre  $k$ . Para el caso  $k = 0$ , se verifica fácilmente que  $\frac{1}{2}\mathbb{1} \in \text{ESTAB}(G)$ . Supongamos ahora que el enunciado se cumple para todos los enteros menores a  $k$ . Considerar la matriz  $Y = (y_{ij}) \in \mathbb{R}^{(V \cup \{0\}) \times (V \cup \{0\})}$  definida de la siguiente manera

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j = 0, \\ \frac{1}{k+2} & \text{si } i = 0 \text{ y } j > 0, \text{ ó } i > 0 \text{ y } j = 0, \text{ ó } i = j > 0, \\ 0, & \text{en los demás casos.} \end{cases}$$

Demostremos que  $Y \in M(N^{k-1}(\text{EST}(G)))$ . Es fácil comprobar que  $Y$  es simétrica y  $\text{diag}(Y) = Y e_0$ . Resta por demostrar que  $Y e_i$  y  $Y f_i$  son elementos de  $N^{k-1}(\text{EST}(G))$  para  $i \in \{1, \dots, n\}$ . En efecto,

$$Y e_i = \begin{pmatrix} \frac{1}{k+2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{1}{k+2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{k+2}(e_0 + e_i) \in \text{ST}(G) \subseteq N^{k-1}(\text{EST}(G)),$$

y

$$Y f_i = Y(e_0 - e_i)$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{k+2} \\ \vdots \\ \frac{1}{k+2} \\ \frac{1}{k+2} \\ \frac{1}{k+2} \\ \vdots \\ \frac{1}{k+2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{k+2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{1}{k+2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{k+2} \\ \frac{1}{k+2} - 0 \\ \vdots \\ \frac{1}{k+2} - 0 \\ \frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+2} \\ \frac{1}{k+2} - 0 \\ \vdots \\ \frac{1}{k+2} - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{k+1}{k+2} \\ \frac{1}{k+2} \\ \vdots \\ \frac{1}{k+2} \\ 0 \\ \frac{1}{k+2} \\ \vdots \\ \frac{1}{k+2} \end{pmatrix} \\
&= \frac{k+1}{k+2} e_0 + \frac{1}{k+2} \sum_{j \notin \{0, i\}} e_j \\
&= \frac{k+1}{k+2} \left( e_0 + \frac{1}{k+1} \sum_{j \notin \{0, i\}} e_j \right) \\
&\leq \frac{k+1}{k+2} \left( e_0 + \frac{1}{k+1} \sum_{j \in V} e_j \right).
\end{aligned}$$

Por hipótesis de inducción,  $e_0 + \frac{1}{k+1} \sum_{j \in V} e_j \in N^{k-1}(\text{EST}(G))$  y por la monotonía hacia abajo de  $N^{k-1}(\text{EST}(G))$ , concluimos que  $Yf_i \in N^{k-1}(\text{EST}(G))$ . Pero esto a su vez implica que  $Ye_0 \in N^k(\text{EST}(G))$  y  $\frac{1}{k+2} \mathbb{1} \in N^k(G)$ .  $\square$

Lovász y Schrijver [33] obtuvieron las siguientes cotas superiores e inferiores para el índice  $N$  de un grafo. La demostración consiste en aplicar el corolario y lema anteriores.

**Corolario 2.31** ([33]). *El índice  $N$  de grafo un  $G$  con  $n$  nodos y número de estabilidad  $\alpha(G) = \alpha$  es a lo más  $n - \alpha - 1$  y por lo menos  $\frac{n}{\alpha} - 2$ .*

*Demostración.* Para la cota superior, sea  $S$  cualquier conjunto estable de  $G$  de cardinalidad máxima, es decir, con cardinalidad  $\alpha$ . Notar que existen  $n - \alpha$  nodos  $v_1, \dots, v_{n-\alpha}$  en  $G$  que no pertenecen a  $S$ . Construimos una sucesión de grafos:  $G_0 = G$ ,  $G_1, G_2, \dots, G_{n-\alpha-1}$  eliminando de  $G$ , uno a uno, los nodos  $v_1, \dots, v_{n-\alpha-1}$ . Al final obtenemos un grafo bipartito  $G_{n-\alpha-1}$ , inducido por  $S \cup \{v_{n-\alpha}\}$ , para el cual se conoce que  $n_E(G) = 0$ . Por el Corolario [coro][29][2]2.29, sabemos que el índice  $N$  de  $(S \cup \{v_{n-\alpha}\}) \cup \{v_{n-\alpha-1}\}$  es a lo más 1. Iterando este argumento, concluimos que el índice  $N$  de  $G$  es a lo más  $n - \alpha - 1$ .

Supongamos ahora que  $k < (n/\alpha) - 2$ . Entonces el vector  $\frac{1}{k+2} \mathbb{1}$  no satisface la restricción  $\sum_i x_i \leq \alpha$ , pues  $\sum_i x_i = \sum_i \frac{1}{k+2} = \frac{n}{k+2} > \alpha$  y por lo tanto  $\frac{1}{k+2} \mathbb{1} \notin \text{STAB}(G)$ . Por el Lema [lema][30][2]2.30, sabemos que  $\frac{1}{k+2} \mathbb{1} \in N^k(G)$ . Se sigue entonces que  $\text{STAB}(G) \not\subseteq N^k(G)$ , lo cual es una contradicción al Lema [lema][8][2]2.8.  $\square$

Se sigue que el índice  $N$  para la relajación de aristas del polítopo de conjuntos estables de cualquier grafo es a lo más  $n - 2$ . Esto contrasta con la cota superior de

$n$  para el índice  $N$  de un cono convexo general  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  establecida en el Teorema [teo][24][2]2.24.

Consideremos ahora el índice  $N$  de una desigualdad. Sea  $a^T x \leq b$  una desigualdad válida para  $\text{STAB}(G)$ , donde  $a \in \mathbb{Z}_+^V$  y  $b \in \mathbb{Z}_+$ . El *defecto* de una desigualdad se define como  $2 \cdot \max\{a^T x - b : x \in \text{ESTAB}(G)\}$ , donde el factor 2 garantiza que el defecto sea un valor entero.

**Lema 2.32** ([33]). *Sea  $\sum_i a_i x_i \leq b$  una desigualdad que define una faceta para  $\text{STAB}(G)$ , diferente de las determinadas por las desigualdades de no negatividad y aristas. Entonces todo vértice  $z$  que maximiza  $a^T x$  sobre  $\text{ESTAB}(G)$  tiene  $z_i = \frac{1}{2}$  siempre que  $a_i > 0$ . En particular,*

$$\max\{a^T x : x \in \text{ESTAB}(G)\} = \frac{1}{2} \sum_i a_i$$

y el defecto de la desigualdad es  $\sum_i a_i - 2b$ .

*Demostración.* Sea  $z$  un vértice de  $\text{ESTAB}(G)$  que maximiza  $a^T x$ . Es suficiente demostrar que  $z_i \neq 1$  siempre que  $a_i > 0$ , pues los vértices de  $\text{ESTAB}(G)$  son vectores con coordenadas  $\{0, 1, \frac{1}{2}\}$ . Tendremos así que el vector  $(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})^T$  maximiza  $a^T x$  y que, para que  $z$  alcance el mismo valor,  $z$  debe tener  $z_i = 1/2$  siempre que  $a_i > 0$ .

Sea  $U = \{i \in V : z_i = 1\}$  y supongamos que  $a(U) := \sum_{i \in U} a_i > 0$ . Claramente,  $U$  es un conjunto estable, pues como  $z \in \text{ESTAB}(G)$ , se sigue que para todo  $ij \in E$  si  $z_i = 1$  entonces  $z_j = 0$ . Supongamos además que elegimos  $z$  tal que  $U$  sea minimal, es decir eliminamos de  $U$  todos los  $i$  tales que  $a_i = 0$ . Notemos por  $\Gamma(U)$  el conjunto de nodos vecinos a nodos en  $U$ . Sea  $X$  un conjunto estable en  $G$  cuyo vector de incidencia está contenido en la faceta  $a^T x \leq b$  de  $\text{STAB}(G)$ .

Sea  $Y$  el conjunto  $Y = U \cup (X \setminus \Gamma(U))$ . Notar que  $Y$  es un conjunto estable y  $a(Y) = a(X) + a(U \setminus X) - a(\Gamma(U) \cap X)$ . Por la optimalidad de  $X$ ,  $a(Y) \leq a(X)$  y entonces

$$\begin{aligned} a(U \setminus X) - a(\Gamma(U) \cap X) &= a(Y) - a(X) \leq 0 \\ &\Rightarrow a(U \setminus X) \leq a(\Gamma(U) \cap X). \end{aligned}$$

Por otro lado, definamos el vector  $w \in \mathbb{R}^V$  de la siguiente manera:

$$w_i = \begin{cases} 1, & \text{si } i \in U \cap X, \\ 0, & \text{si } i \in \Gamma(U) \setminus X, \\ \frac{1}{2}, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$



Verifiquemos que si  $w \in \text{ESTAB}(G)$ , es decir, que si  $w_i + w_j \leq 1 \forall ij \in E$ . Para ello, basta demostrar que para todo  $i \in \Gamma(U \cap X)$ ,  $w_i = 0$ . En efecto, notar que  $\Gamma(U \cap X) \subseteq \Gamma(U) \setminus X$ , pues  $\Gamma(U \cap X) \subseteq \Gamma(U) \cap \Gamma(X) \subseteq \Gamma(U) \cap X^c = \Gamma(U) \setminus X$ . De la definición de  $w$  se sigue entonces  $w_i = 0$  siempre que  $i \in \Gamma(U \cap X) \subseteq \Gamma(U) \setminus X$ . Notar ahora que:

$$\begin{aligned}
a^T z &= \sum_{j \in U} a_j z_j + \sum_{j \in \Gamma(U)} a_j z_j + \sum_{j \notin U \cup \Gamma(U)} a_j z_j \\
&= a(U) + \frac{1}{2} a[V \setminus (U \cup \Gamma(U))] \\
&\leq a(U) + \frac{1}{2} a[V \setminus (U \cup \Gamma(U))] + \frac{1}{2} [a(\Gamma(U) \cap X) - a(U \setminus X)] \\
&= a(U \cap X) + a(U \setminus X) + \frac{1}{2} a[V \setminus (U \cup \Gamma(U))] + \frac{1}{2} a(\Gamma(U) \cap X) - \frac{1}{2} a(U \setminus X) \\
&= a(U \cap X) + \frac{1}{2} [a(U \setminus X) + a[V \setminus (U \cup \Gamma(U))] + a(\Gamma(U) \cap X)] \\
&= a(U \cap X) + \frac{1}{2} a[(U \setminus X) \cup (V \setminus (U \cup \Gamma(U))) \cup (\Gamma(U) \cap X)].
\end{aligned}$$

De la definición de  $w$ , se sigue que si  $i \in (U \setminus X) \cup (V \setminus (U \cup \Gamma(U))) \cup (\Gamma(U) \cap X)$ , entonces  $w_i = \frac{1}{2}$ . Por lo tanto, de la última expresión concluimos que

$$a^T z \leq a^T w.$$

Por otra parte, de la optimalidad de  $z$ , tenemos  $a^T z \geq a^T w$  y por tanto  $a^T z = a^T w$ . De aquí se concluye que  $a(\Gamma(U) \cap X) = a(U \setminus X)$ .

Pero entonces, el vector de incidencia  $\bar{x}$  de  $X$  satisface

$$\sum_{i \in U \cup \Gamma(U)} a_i \bar{x}_i = a(U). \quad (2.14)$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in U \cup \Gamma(U)} a_i \bar{x}_i &= \sum_{i \in (U \cup \Gamma(U)) \cap X} a_i = a((U \cup \Gamma(U)) \cap X) \\
&= a(U \cap X) + a(\Gamma(U) \cap X) \\
&= a(U \cap X) + a(U \setminus X) \\
&= a(U).
\end{aligned}$$

Observar que esta ecuación lineal se cumple para un vértice cualquiera contenido en la faceta determinada por  $a^T x \leq b$ , de donde se sigue que la misma se cumple para

cualquier vértice de la faceta. Como estos vértices determinan la faceta, se concluye que ([equation][14][2]2.14) y  $a^T x = b$  definen el mismo hiperplano en  $\mathbb{R}^n$ . Finalmente, notar que  $z$  satisface ([equation][14][2]2.14). Luego,  $a^T z = b$  y entonces  $a^T x \leq b$  determina una faceta de  $\text{ESTAB}(G)$ , diferente de las desigualdades de no negatividad y de aristas, lo que es una contradicción.  $\square$

**Lema 2.33** ([33]). *Sea  $a \in \mathbb{R}_+^V$  tal que*

$$\max\{a^T x : x \in \text{STAB}(G)\} < \max\{a^T x : x \in \text{ESTAB}(G)\},$$

*y sea  $E' \subseteq E$  el conjunto de aristas definido por*

$$E' = \{ij \in E : y_i + y_j = 1, \forall y \in \text{ESTAB}(G) \text{ que maximiza } a^T x\}.$$

*Entonces  $(V, E')$  no es bipartito.*

*Demostración.* Supongamos que  $(V, E')$  es bipartito. Sea  $F$  la cara de  $\text{ESTAB}(G)$  que maximiza  $a^T x$  y sea  $z$  un punto en el interior de  $F$ . Demostremos primero dos enunciados intermedios:

$$(i) \ E' = \{ij \in E : z_i + z_j = 1\}.$$

Por como está definido  $E'$ , para cualquier arista  $ij \in E'$  y cualquier vector  $y \in F$  se cumple  $y_i + y_j = 1$ . En particular, se cumple para  $z$ .

En el otro sentido, sea  $ij \in E$  tal que  $z_i + z_j < 1$ . Supongamos que existe  $\bar{x} \in F$  tal que  $\bar{x}_i + \bar{x}_j < 1$  y sea  $d \in \mathbb{R}^V$  tal que  $d = \bar{x} - z$ . Notar que  $d_i + d_j = (\bar{x}_i + \bar{x}_j) - (z_i + z_j) < 0$ . Además, como  $z$  está en el interior de  $F$  existe  $\epsilon > 0$  tal que  $\omega = z - \epsilon d \in F$ . Pero

$$\omega_i + \omega_j = (z_i + z_j) - \epsilon(d_i + d_j) > 1$$

Luego,  $\omega$  no cumple con una desigualdad de arista, es decir,  $\omega \notin \text{ESTAB}(G)$  y por tanto tampoco es elemento de  $F$ , una contradicción.

$$(ii) \ F = \{x \in \text{ESTAB}(G) : x_i + x_j = 1, \forall ij \in E'\}.$$

En el un sentido, la contención es evidente, pues si  $y \in F$  se tiene por definición que para toda arista  $ij \in E'$  se cumple que  $y_i + y_j = 1$ .

Por otro lado, sea  $\bar{x} \in \text{ESTAB}(G)$ , tal que  $\bar{x}_i + \bar{x}_j = 1$  para todo  $ij \in E'$ . Debemos demostrar que  $\bar{x}$  maximiza  $a^T x$ .

Notemos por  $\theta_{ij}$  al vector normal de la faceta de  $\text{ESTAB}(G)$  asociada a la desigualdad de la arista de  $ij \in E'$ . Por la dualidad de la programación lineal,

conocemos que existen  $\alpha_{ij} \geq 0$  tales que

$$a = \sum_{ij \in E'} \alpha_{ij} \theta_{ij}.$$

Además para  $ij \in E'$ ,  $\theta_{ij}^T \bar{x} = 1 = \theta_{ij}^T z$ . Entonces,

$$a^T \bar{x} = \sum_{ij \in E'} \alpha_{ij} \theta_{ij}^T \bar{x} = \sum_{ij \in E'} \alpha_{ij} \theta_{ij}^T z = a^T z = \max\{a^T x : x \in \text{ESTAB}(G)\},$$

es decir,  $\bar{x}$  maximiza  $a^T x$ . Luego,  $\bar{x} \in F$ .

Consideremos ahora el grafo  $G' = (V, E')$  y supongamos que es un grafo bipartito, es decir, que  $V = U \cup W$ , con  $U$  y  $W$  conjuntos estables en  $G'$ . Notar que para cada componente conexa  $R$  de  $G'$  se tiene  $z_i \geq 1/2$ , para todo  $i \in U \cap R$  ó  $z_i \geq 1/2$ , para todo  $i \in W \cap R$ , pues  $z_i + z_j = 1$  para todo  $ij \in E'$ . Por lo tanto, podemos construir una bipartición  $\bar{U}, \bar{W}$  tal que  $z_i \geq \frac{1}{2}$  para todo  $i \in \bar{W}$ .

Notar además que  $\bar{W}$  es un conjunto estable en  $G$ , pues si existieran  $i, j \in \bar{W}$  tales que  $ij \in E \setminus E'$ , entonces  $z_i + z_j > 1$ , lo que implicaría que  $z$  viola la desigualdad de arista correspondiente. Sea  $\bar{x} := \chi^{\bar{W}}$ . Se sigue que  $\bar{x} \in \text{STAB}(G)$  y además

$$\bar{x}_i + \bar{x}_j = 1, \quad \forall ij \in E'$$

pues exactamente uno de los dos nodos  $i, j$  debe forzosamente pertenecer a  $\bar{W}$ . Pero de aquí se concluye entonces que  $\bar{x} \in F \subseteq \text{ESTAB}(G)$ , y llegamos a la contradicción

$$\max\{a^T x : x \in \text{STAB}(G)\} = \max\{a^T x : x \in \text{ESTAB}(G)\}.$$

□

**Lema 2.34** ([33]). *Sea  $a \in \mathbb{R}_+^V$  tal que*

$$\max\{a^T x : x \in \text{STAB}(G)\} < \max\{a^T x : x \in \text{ESTAB}(G)\}.$$

*entonces existe  $i \in V$  tal que todo vértice  $y \in \text{ESTAB}(G)$  que maximiza  $a^T x$  tiene  $y_i = \frac{1}{2}$ .*

*Demostración.* Sea  $E'$  como en la demostración del lema anterior. Entonces, aplicando el mismo lema,  $(V, E')$  es un grafo no bipartito y contiene un circuito impar  $C$ . Si  $y \in \text{ESTAB}(G)$  que maximiza  $a^T x$ , entonces para todo  $ij \in E'$ , en particular para todo  $ij \in E(C)$ , se cumple que  $y_i + y_j = 1$ . Sea  $A$  la matriz de incidencia aristas-nodos de  $C$ . Se sigue que  $Ay = \mathbf{1}$ . Además, es fácil demostrar que el determinante de  $A$  es

igual a 2 y que la única solución a este sistema de ecuaciones es  $y_i = \frac{1}{2}$ , para todo  $i \in V(C)$ .  $\square$

Empleando este lema es posible acotar el índice  $N$  de una desigualdad en función de su defecto.

**Teorema 2.35** ([33]). *Sea  $a^T x \leq b$  una desigualdad con coeficientes enteros que define una faceta para  $\text{STAB}(G)$  con defecto  $r$  e índice  $N$  igual a  $k$ . Entonces,*

$$\frac{1}{r} \leq k \leq r.$$

*Demostración.*

(i) Demostraremos primero que  $k \leq r$ . Usaremos inducción sobre  $r$ . si  $r = 0$  no hay nada que probar: la desigualdad es válida para  $\text{ESTAB}(G)$  y por tanto  $k = 0$ .

Supongamos ahora que  $r > 0$ . Aplicando el Lema [lema][34][2]2.34, seleccionamos  $i \in V$  tal que todo  $y \in \text{ESTAB}(G)$  que maximiza  $a^T x$  tiene  $y_i = 1/2$ . Notar que  $a_i > 0$ , ya que si  $a_i = 0$  es posible construir  $\hat{y} \in \text{ESTAB}(G)$  con todas sus componentes iguales a las del vector  $y$ , salvo en la componente  $i$ , donde  $\hat{y}_i = 0$ . Se tiene entonces la contradicción  $\hat{y}_i \neq \frac{1}{2}$  y  $a^T y = a^T \hat{y}$ , es decir,  $\hat{y}$  maximiza  $a^T x$ .

Demostraremos a continuación que las desigualdades correspondientes a la eliminación y contracción de  $i$  son desigualdades con menor defecto. Para el caso de la eliminación, sea  $y \in \text{ESTAB}(G)$  que maximiza  $a_{V \setminus i}^T x$ . Si  $y$  también maximiza  $a^T x$ ,  $y_i = 1/2$  y entonces

$$2(a_{V \setminus i}^T y - b) = 2(a_{V \setminus i}^T y - b + \frac{1}{2}a_i - \frac{1}{2}a_i) = 2(a^T y - b) - a_i < 2(a^T y - b) = r.$$

Caso contrario, si  $y$  no maximiza  $a^T x$ ,

$$2(a_{V \setminus i}^T y - b) \leq 2(a^T y - b) < 2 \max\{a^T x - b : x \in \text{ESTAB}(G)\} = r.$$

Para la contracción, sea  $y \in \text{ESTAB}(G)$  que maximiza  $a_{V \setminus \{i\} \cup \Gamma(i)}^T x \leq b - a_i$ . Si  $y$  maximiza  $a^T x$ ,  $y_i = 1/2$ , y luego

$$\begin{aligned} 2(a_{V \setminus \{i\} \cup \Gamma(i)}^T y - b + a_i) &= 2 \left( \sum_{j \in V \setminus \{i\} \cup \Gamma(i)} a_j y_j - b + \frac{1}{2}a_i + \frac{1}{2}a_i + \sum_{j \in \Gamma(i)} a_j y_j - \sum_{j \in \Gamma(i)} a_j y_j \right) \\ &= 2(a^T y - b + \frac{1}{2}a_i - \sum_{j \in \Gamma(i)} a_j y_j). \end{aligned}$$

Lo que debemos probar ahora es que  $\frac{1}{2}a_i - \sum_{j \in \Gamma(i)} a_j y_j < 0$ . Tenemos que para  $j \in \Gamma(i)$ ,  $y_j \in \{0, \frac{1}{2}\}$ . Sea  $W = \{j \in \Gamma(i) : y_j = 1/2\}$ , luego

$$\sum_{j \in \Gamma(i)} a_j y_j = \sum_{j \in W} a_j y_j = \frac{1}{2} \sum_{j \in W} a_j.$$

Podemos construir  $\hat{y} \in \text{ESTAB}(G)$ , el cual es igual a  $y$  en todas sus entradas excepto en  $y_i$  y en  $y_j$ , con  $j \in W$ , en los cuales ponemos  $\hat{y}_i = 1$  y  $\hat{y}_j = 0$ . Notar que:

$$a^T y = \sum_{j \notin i \cup \Gamma(i)} a_j y_j + \sum_{j \in \Gamma(i)} a_j y_j + \frac{1}{2} a_i = \sum_{j \notin i \cup \Gamma(i)} a_j y_j + \frac{1}{2} \sum_{j \in W} a_j + \frac{1}{2} a_i$$

y

$$a^T \hat{y} = \sum_{j \notin i \cup \Gamma(i)} a_j \hat{y}_j + \sum_{j \in \Gamma(i)} a_j \hat{y}_j + a_i \hat{y}_i = \sum_{j \notin i \cup \Gamma(i)} a_j y_j + 0 + a_i$$

Pero como  $\hat{y} \neq \frac{1}{2}$ , se sigue que  $a^T \hat{y} < a^T y$  y por lo tanto

$$a^T \hat{y} - a^T y = \frac{1}{2} a_i - \frac{1}{2} \sum_{j \in W} a_j < 0.$$

Finalmente, supongamos que  $y$  no maximiza  $a^T x$ . En este caso, podemos asumir  $y_i = 1$ , pues de lo contrario, elegimos  $\hat{y}$  con  $\hat{y}_i = 1$ ,  $\hat{y}_j = 0$  para todo  $j \in \Gamma(i)$  y  $\hat{y}_j = y_j$  para todo  $j \notin \{i\} \cup \Gamma(i)$ , y se tiene  $a_{V \setminus \{i\} \cup \Gamma(i)}^T y = a_{V \setminus \{i\} \cup \Gamma(i)}^T \hat{y}$ . Se procede entonces de manera similar que para la eliminación:

$$\begin{aligned} 2(a_{V \setminus \{i\} \cup \Gamma(i)}^T y - b + a_i) &= 2(a_{V \setminus \{i\} \cup \Gamma(i)}^T y + a_i y_i - b) = 2(a_{V \setminus \Gamma(i)}^T y - b) \\ &\leq 2(a^T y - b) < 2 \max\{a^T x - b : x \in \text{ESTAB}(G)\} = r. \end{aligned}$$

Por la hipótesis de inducción, las desigualdades correspondientes a la eliminación y contracción de  $i$  son válidas para  $N^{r-1}(G)$ . Luego, por el Lema [teo][27][2]2.27 se sigue que  $a^T x \leq b$  es válida para  $N^r(G)$ .

(ii) Veamos ahora que  $k \geq \frac{1}{r}$ . Por el Lema [lema][30][2]2.30,  $\frac{1}{k+2} \mathbb{1} \in N^k(G)$  y entonces la desigualdad  $a^T x \leq b$  debe cumplirse también para  $\frac{1}{k+2} \mathbb{1}$ . Es decir,  $\frac{1}{k+2} a^T \mathbb{1} \leq b$ , de donde, empleando el Lema [lema][32][2]2.32,

$$\begin{aligned} \frac{a^T \mathbb{1}}{b} &\leq k + 2 \\ \frac{a^T \mathbb{1}}{b} - 2 &= \frac{\sum_i a_i - 2b}{b} = \frac{r}{b} \leq k. \end{aligned}$$

□

Notar que la cota superior del teorema anterior se cumple aún para el caso cuando  $a^T x \leq b$  es sólo una desigualdad válida para  $\text{STAB}(G)$  y no una faceta.

### 2.3.2 Cotas para el índice $N_+$

Lovász y Schrijver [33] presentaron condiciones suficientes para que una desigualdad sea válida para  $N_+(K)$ . Las resumiremos en el siguiente lema:

**Lema 2.36** ([33]). *Sea  $K \subseteq Q$  un cono convexo y sea  $u \in \mathbb{R}^{n+1}$  tal que  $u_i \leq 0$ , para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$  y  $u_0 \geq 0$ . Si para todo  $i$  tal que  $u_i < 0$  se cumple que la desigualdad  $u^T x \geq 0$  es válida para  $K \cap G_i$ , entonces  $u^T x \geq 0$  es válida para  $N_+(K)$ .*

Aplicando esto al problema de conjuntos estables se obtiene el siguiente resultado.

**Lema 2.37** ([33]). *Si  $a^T x \leq b$  es una desigualdad válida para  $\text{STAB}(G)$  tal que para todo  $i \in V$  con coeficiente positivo la contracción de  $i$  da una desigualdad con índice  $N_+$  a lo más  $k$ , entonces  $a^T x \leq b$  tiene índice  $N_+$  a lo más  $k + 1$ .*

Las desigualdades de clique, agujero impar y anti-agujero impar tienen la propiedad que contrayendo cualquier nodo se obtiene una desigualdad en la cual los nodos con coeficiente positivo inducen un grafo bipartito. Como sabemos, el índice  $N_+$  de un grafo bipartito es cero. Del lema anterior, se concluye, por tanto, lo siguiente:

**Corolario 2.38** ([33]). *Las desigualdades de clique, agujero impar y anti-agujero impar tienen índice  $N_+$  igual a 1.*

Del corolario anterior se sigue además que todos los grafo  $h$ -perfectos, y en particular los  $t$ -perfectos, tienen índice  $N_+$  menor o igual a 1.

**Corolario 2.39** ([33]). *Si  $G/i$  tiene índice  $N_+$  menor o igual a  $k$  para todo  $i \in V$ , entonces  $G$  tiene índice  $N_+$  menor o igual a  $k + 1$ .*

*Demostración.* Supongamos que para todo  $v \in V$ ,  $G/i$  tiene índice  $N_+$  menor o igual a  $k$ . Sea  $a^T x \leq b$  una faceta de  $\text{STAB}(G)$  y  $i \in V$ . La desigualdad obtenida por la contracción de  $i$  es válida para  $\text{STAB}(G/i)$  y del supuesto se sigue que dicha desigualdad tiene índice  $N_+$  a lo sumo  $k$ . Del Lema [lema][37][2]2.37, se sigue entonces que  $a^T x \leq b$  tiene índice  $N_+$  menor o igual a  $k$ . □

Lovász y Schrijver [33] no presentaron un método para el cálculo de cotas inferiores de  $N_+$ . Sin embargo, en los trabajos de Stephen et. al [41], Goemans et. al [23] y Cook et. al [30] se obtiene, para casos de estudio específicos, un resultado análogo al Lema [lema][30][2]2.30.

### 2.3.3 Casos particulares

Analizaremos el índice  $N$  de otros ejemplos propuestos por Lovász y Schrijver [33], como son las cliques y anti-agujeros impares.

Del Corolario [coro][31][2]2.31, si  $Q_n$  es una clique de tamaño  $n$ , la desigualdad de clique

$$\sum_{i \in Q_n} x_i \leq 1$$

tiene índice  $N$  igual a  $n - 2$ . En efecto, como el número de estabilidad de  $Q_n$  es 1, se tiene por un lado que el índice  $N$  es menor o igual a  $n - 1 - 1$  y mayor o igual a  $\frac{n}{1} - 2$ .

Si  $\overline{C}_{2k+1}$  es un anti-agujero impar, la desigualdad de rango

$$\sum_{i \in \overline{C}_{2k+1}} x_i \leq 2$$

y el grafo  $\overline{C}_{2k+1}$  tienen índice  $N$  igual a  $k - 1$ . Para probar esto, basta notar que de la eliminación de un nodo  $i \in \overline{C}_{2k+1}$  se obtiene una desigualdad que es la suma de dos desigualdades de clique, cada una de tamaño  $k$ . Por lo mencionado anteriormente, estas desigualdades tienen índice  $N$  igual a  $k - 2$ . Del Corolario [coro][29][2]2.29 se sigue entonces que  $n_E(\overline{C}_{2k+1}) = k - 2 + 1 = k - 1$ .

Se tienen además los siguientes teoremas para ciertas familias de grafos.

**Corolario 2.40.** *El índice  $N$  de un grafo  $G$  es uno si y sólo si  $G$  es  $t$ -perfecto.*

*Demostración.* Como se mencionó en el Capítulo [chapter][1][1], el polítopo de conjuntos estables  $\text{STAB}(G)$  para grafos  $t$ -perfectos está descrito completamente por las desigualdades de no negatividad, aristas y agujero impar. El índice  $N$  para las desigualdades de no negatividad y arista es 0, pues éstas son válidas para  $N^0(G) = \text{ESTAB}(G)$ . Según el Teorema [teo][28][2]2.28, las desigualdades de agujero impar tienen índice  $N$  igual a 1. Tomando el máximo de los valores de estos índices, se concluye la demostración.  $\square$

**Corolario 2.41** ([33]). *El índice  $N$  de un grafo perfecto  $G$  es  $\omega(G) - 2$ .*

*Demostración.* Como sabemos, si  $G$  es un grafo perfecto,  $\text{STAB}(G)$  está completamente determinado por desigualdades de no-negatividad y desigualdades de clique. Además el índice  $N$  de una desigualdad  $a^T x \leq b$  depende únicamente del grafo inducido por los nodos  $i \in V$  para los cuales  $a_i \neq 0$ . Se sigue entonces que el índice  $N$  de la desigualdad asociada a una clique  $Q$  es  $|Q| - 2$ , y por tanto el índice  $N$  de  $G$  es igual a  $\omega(G) - 2$ .  $\square$

Un grafo se dice críticamente imperfecto si y sólo si es un agujero impar o un anti-agujero impar. De las observaciones presentadas arriba para este tipo de grafos se sigue:

**Corolario 2.42** ([33]). *El índice  $N$  de un grafo críticamente imperfecto  $G$  es  $\omega(G) - 1$ .*

### 2.3.4 Acerca del operador $N(K, K)$

En las secciones anteriores se ha estudiado la aplicación de operador  $N(K, Q)$  sobre la relajación de aristas del polígono de conjuntos estables. En esta última parte presentaremos algunos resultados de la aplicación del operador  $N(K, K)$  sobre la relajación de cliques del polígono de conjuntos estables,  $\text{QSTAB}(G)$ . Notaremos en adelante  $\text{QSTAB}(G)$  simplemente por  $P$ .

El punto de partida es el siguiente teorema de Balas et. al [4].

**Teorema 2.43** ([4]). *Sea  $\hat{P} = \{x \in [0, 1]^n : Ax \leq b\}$  un polígono y sea  $C \subseteq \{1, \dots, n\}$  un conjunto de índices tal que  $\sum_{i \in C} x_i \leq 1$  para todo  $x \in \hat{P}$ . Considerar el cuerpo convexo que se obtiene al multiplicar el sistema  $Ax \leq b$  por  $x_i$ , para todo  $i \in C$ , y por  $1 - \sum_{i \in C} x_i$ . La proyección de este cuerpo sobre el espacio original es*

$$\text{conv}\{x \in \hat{P} : x_i \in \{0, 1\} \forall i \in C\}.$$

**Corolario 2.44** ([21]). *Para cualquier clique maximal  $Q$  en  $G$ ,  $N(P, P)$  satisface todas las desigualdades del sistema*

$$\sum_{i \in Q'} x_i \leq 1, \quad \text{para toda clique maximal } Q' \subseteq G, \quad (2.15)$$

$$x_i \geq 0, \quad i \in V, \quad (2.16)$$

y la disyunción

$$\left( \sum_{i \in Q} x_i = 0 \right) \vee \left( \sum_{i \in Q} x_i = 1 \right). \quad (2.17)$$

Giandoménico et. al [21], demostraron que las desigualdades ([equation][15][2]2.15) y ([equation][16][2]2.16) junto con la disyunción ([equation][17][2]2.17) implican todas las desigualdades de rango asociadas a webs. De su resultado se tiene el siguiente corolario.

**Corolario 2.45** ([21]). *Todas las desigualdades de rango asociadas a webs son válidas para  $N(P, P)$ .*

En cuanto a las desigualdades de antiwebs, Giandoménico et. al [21], empleando una construcción más compleja, consiguieron demostrar que las desigualdades de antiweb son implicadas por ciertas desigualdades válidas para  $N(P, P)$ . Se obtiene como consecuencia el siguiente teorema.



**Teorema 2.46** ([21]). *Todas las desigualdades de rango asociadas a antiweb son válidas para  $N(P, P)$ .*

## Capítulo 3

# Índices $N$ y $N_+$ para antiwebs

Los índices  $N$  y  $N_+$  de ciertas familias de antiwebs pueden ser calculados de manera inmediata aplicando los resultados presentados en el capítulo anterior.

Según [42], una antiweb es perfecta si es:

- una clique  $\overline{W}_n^0$ , o
- un anti-agujero par  $\overline{W}_n^1$ , o
- un emparejamiento  $\overline{W}_{2(k+1)}^k$ , para todo  $k \geq 0$ .

Para estas antiwebs, puesto que  $\omega(\overline{W}_n^k) = \lfloor \frac{n}{k+1} \rfloor$ , se tiene del Corolario [coro][41][2]2.41 que el índice  $n_E(\overline{W}_n^k)$  es  $n - 2$ ,  $\frac{n}{2} - 2$  y  $0$ , respectivamente.

Holm et. al [27] caracterizaron las antiwebs que son grafos  $t$ -perfectos. En el siguiente lema se expone su resultado.

**Lema 3.1** ([27]). *Una antiweb  $\overline{W}_n^k$  no bipartita es  $t$ -perfecta si y sólo si es*

- un agujero impar  $\overline{W}_{2k+1}^{k-1}$  con  $k \geq 1$ ,
- una cadena de Moebius  $\overline{W}_{2k+4}^k$  con  $k$  impar y  $k \geq 3$ , o
- igual a  $\overline{W}_6^1$ ,  $\overline{W}_9^2$ .

Del Corolario [coro][40][2]2.40 se obtiene el siguiente resultado

**Corolario 3.2.** *Las únicas antiwebs que tienen índice  $N$  igual a uno son las que se mencionan en el Lema [lema][1][3]3.1.*

Para calcular el índice  $N_+$  es posible aplicar el Lema [lema][37][2]2.37. Observar que toda antiweb es un grafo casi bipartito. En efecto, esto puede verse fácilmente ya que toda web  $W_n^k$ , por definición, tiene la propiedad que la vecindad de cualquier nodo  $i \in \{1, \dots, n\}$  puede partitionarse en dos cliques:  $i + 1, \dots, i + k$  y  $i - k, \dots, i - 1$ . Al

considerar la antiweb respectiva  $\overline{W}_n^k$ , los nodos vecinos de  $i$  pasan a ser los nodos no vecinos de  $i$  y las dos cliques pasan a ser dos conjuntos estables. Entonces  $\overline{W}_n^k/i$ , el grafo que resulta de contraer el nodo  $i$  de  $\overline{W}_n^k$ , es un grafo bipartito. Se tiene entonces que  $n_E^+(\overline{W}_n^k/i)$  es 0 para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Por lo tanto, el índice  $N_+$  de  $\overline{W}_n^k$ ,  $n_E^+(\overline{W}_n^k)$  es a lo más 1.

En la Figura [figure][1][3]3.1 se ilustra el procedimiento de contraer el nodo 1 de la antiweb  $\overline{W}_{10}^3$ .

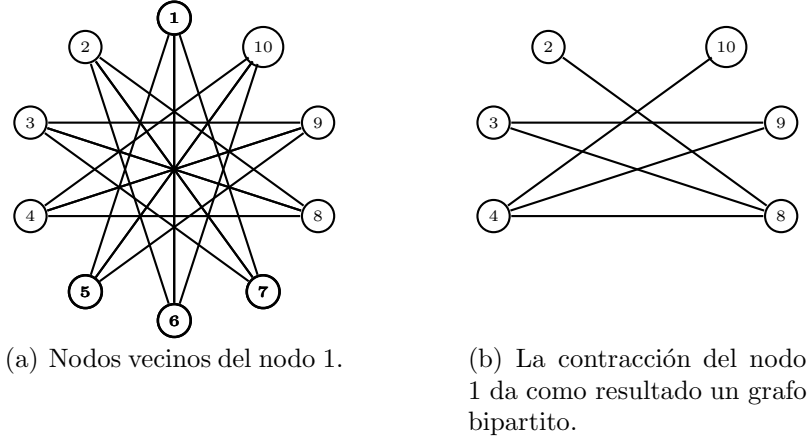


Figura 3.1: Contracción de un nodo en la antiweb  $\overline{W}_{10}^3$ .

**Teorema 3.3.** *El índice  $N_+$  de toda antiweb  $\overline{W}_n^k$  es 1.*

En [20] se encuentra una demostración del teorema anterior basada en la construcción de las desigualdades de antiweb a partir de ciertas desigualdades válidas para  $M(\text{ESTAB}(\overline{W}_n^k))$ .

Por otra parte, el cálculo del índice  $N$  para la relajación de aristas del polítopo de conjuntos estables de antiwebs resulta ser mucho más complejo. En las siguientes secciones se presenta una construcción que permite obtener cotas superiores para algunas clases particulares.

### 3.1 Sucesiones constructivas

La idea de sucesiones constructivas fue introducida en [27] y empleada para acotar superiormente el rango de Chvátal de las relajaciones de arista y de clique del polítopo de conjuntos estables asociado a grafos de la clase antiwebs.

La desigualdad de rango de una antiweb es válida para  $\text{STAB}(\overline{W}_n^k)$  y se sabe que define una faceta si y sólo si la antiweb es prima [42]. Además, se ha demostrado que el polítopo de conjuntos estables  $\text{STAB}(\overline{W}_n^k)$  está descrito completamente por las

desigualdades de no negatividad, de clique y de rango asociadas a todas las subantiwebs primas inducidas, incluida, de ser el caso,  $\overline{W}_n^k$  [43].

En consecuencia,  $cr_E(\overline{W}_n^k)$ , el rango de Chvátal de la relajación de aristas del polítopo de conjuntos estables asociado a la antiweb  $\overline{W}_n^k$ , puede calcularse a partir de las profundidades  $d(\overline{W}_{n'}^{k'})$  de las desigualdades de rango correspondientes a todas las subantiwebs primas inducidas  $\overline{W}_{n'}^{k'} \subseteq \overline{W}_n^k$ , en virtud de ([equation][20][1]1.20). Notar que las cliques son casos particulares de subantiwebs primas, donde  $k' = 0$ .

En [27] se demuestra que la desigualdad de rango de una subantiweb  $\overline{W}_{n'}^{k'} \subseteq \overline{W}_n^k$  puede usarse para generar la desigualdad de rango de la antiweb  $\overline{W}_n^k$  con una sola aplicación del procedimiento Chvátal-Gomory (ver Subsección [section][1][1]1.1) si y sólo si

$$n' > \frac{k' + 1}{k + 2}n. \quad (3.1)$$

Partiendo de este resultado y aplicando el Teorema [teo][4][3]3.4, los autores presentan un algoritmo, el cual construye para cada subantiweb  $\overline{W}_n^k$  una sucesión de subantiwebs de la forma:

$$\overline{W}_{n_0}^{k_0} \subset \overline{W}_{n_1}^{k_1} \subset \dots \subset \overline{W}_{n_t}^{k_t} = \overline{W}_n^k.$$

Esta sucesión satisface la siguiente propiedad: la desigualdad de rango de  $\overline{W}_{n_i}^{k_i}$  puede obtenerse a partir de la desigualdad de rango de  $\overline{W}_{n_{i-1}}^{k_{i-1}}$  mediante una sola aplicación del procedimiento Chvátal-Gomory, para todo  $1 \leq i \leq t$ . Si se conoce el valor de  $d(\overline{W}_{n_0}^{k_0})$ , puede obtenerse la siguiente cota superior para  $d(\overline{W}_n^k)$ :

$$d(\overline{W}_n^k) \leq t + d(\overline{W}_{n_0}^{k_0}).$$

Como consecuencia de ([equation][20][1]1.20), este procedimiento puede usarse para acotar el valor de  $cr_E(\overline{W}_n^k)$  si es aplicado sobre cada una de las subantiwebs primas de  $\overline{W}_n^k$ .

El algoritmo, de manera general, consiste en:

1. Determinar el conjunto  $\mathcal{W}$  de todas las subantiwebs de  $\overline{W}_n^k$ , incluida  $\overline{W}_n^k$ .
2. Definir  $\mathcal{W}_0 := \{\overline{W}_{n'}^{k'} \in \mathcal{W} : d(\overline{W}_{n'}^{k'}) \text{ es conocido}\}$  y  $\mathcal{W}_1 := \mathcal{W} \setminus \mathcal{W}_0$ .
3. Para  $\overline{W}_{n'}^{k'} \in \mathcal{W}_0$ , hacer:
  - 3,1 Determinar  $\mathcal{W}_2 := \{\overline{W}_{n''}^{k''} \in \mathcal{W}_1 : \text{la desigualdad ([equation][1][3]3.1) se satisface para } n := n'' \text{ y } k := k''\}$ .
  - 3,2 Fijar  $d(\overline{W}_{n''}^{k''}) := d(\overline{W}_{n'}^{k'}) + 1$ , para toda  $\overline{W}_{n''}^{k''} \in \mathcal{W}_2$
  - 3,3  $\mathcal{W}_1 := \mathcal{W}_1 \setminus \mathcal{W}_2$ ,  $\mathcal{W}_0 := \mathcal{W}_0 \cup \mathcal{W}_1$
4. Si  $\mathcal{W}_1 \neq \emptyset$ , ir a 3.

$$5. \text{ cr}(\overline{W}_n^k) := \text{máx}\{d(\overline{W}_{n'}^{k'}) : \overline{W}_{n'}^{k'} \in \mathcal{W}_0\}$$

A la luz de los resultados de Holm et. al [27], es natural preguntarse si es posible acotar el índice  $N$  de la relajación de aristas del polítopo de conjuntos estables asociado a una antiweb empleando la misma idea, es decir, a partir de los índices  $N$  de correspondientes a subantiwebs primas inducidas.

Como motivación, en la Subsección [subsection][1][3,2]3.2.1 examinaremos dos ejemplos: la generación de la desigualdad de rango del agujero  $C_5 = \overline{W}_5^1$  a partir de las desigualdades de aristas y la generación de la desigualdad de rango de la antiweb  $\overline{W}_8^2$  a partir de la desigualdad de rango asociada a la subantiweb inducida  $\overline{W}_5^1 \subset \overline{W}_8^2$ .

Dadas una antiweb  $\overline{W}_n^k$  y una subantiweb inducida  $\overline{W}_{n'}^{k'} \subseteq \overline{W}_n^k$ , notaremos por  $\eta(\overline{W}_{n'}^{k'})$  (resp.  $\eta^+(\overline{W}_{n'}^{k'})$ ) el índice  $N$  (resp. el índice  $N_+$ ) de la desigualdad de rango asociada a  $\overline{W}_{n'}^{k'}$ ,

$$\sum_{i \in \overline{W}_{n'}^{k'}} x_i \leq k' + 1, \quad (3.2)$$

con relación a  $\text{ESTAB}(\overline{W}_n^k)$ . Recordemos que este índice es el menor  $r \in \mathbb{N}$  tal que ([equation][2][3]3.2) es válida para el polítopo

$$N^r(\overline{W}_n^k) = \underbrace{N(N(\dots N(\overline{W}_n^k) \dots))}_{r \text{ veces}}.$$

(Para  $\eta^+$  se tiene la definición correspondiente.)

De manera similar a lo que ocurre con el rango de Chvátal, tenemos que para los valores de los índices  $N$  y  $N_+$  relacionados a la relajación de aristas del polítopo de conjuntos estables de una antiweb  $\overline{W}_n^k$  se cumple:

$$n_E(\overline{W}_n^k) = \text{máx}\{\eta(\overline{W}_{n'}^{k'}) : \overline{W}_{n'}^{k'} \subset \overline{W}_n^k, \quad \overline{W}_{n'}^{k'} \text{ es prima}\}$$

y,

$$n_E^+(\overline{W}_n^k) = \text{máx}\{\eta^+(\overline{W}_{n'}^{k'}) : \overline{W}_{n'}^{k'} \subset \overline{W}_n^k, \quad \overline{W}_{n'}^{k'} \text{ es prima}\}.$$

Es decir,  $n_E(\overline{W}_n^k)$  y  $n_E^+(\overline{W}_n^k)$  pueden calcularse a partir de  $\eta(\overline{W}_{n'}^{k'})$  y  $\eta^+(\overline{W}_{n'}^{k'})$  para todas las subantiwebs primas inducidas. Esto justifica la siguiente definición:

**Definición 3.1.** *Una sucesión de antiwebs*

$$\overline{W}_{n_0}^{k_0} \subset \overline{W}_{n_1}^{k_1} \subset \dots \subset \overline{W}_{n_t}^{k_t} = \overline{W}_n^k, \quad (3.3)$$

es una sucesión  $N$ -constructiva cuando para todo  $i = 1, \dots, t$  y  $j \in \mathbb{N}$  se tiene que: si la desigualdad de rango de  $\overline{W}_{n_{i-1}}^{k_{i-1}}$  es válida para  $N^j(\overline{W}_n^k)$ , entonces la desigualdad de rango de  $\overline{W}_{n_i}^{k_i}$  es válida para  $N^{j+1}(\overline{W}_n^k)$ .

Las sucesiones  $N_+$ -constructivas pueden ser definidas de manera similar. Sin embargo, las mismas no presentan mayor interés pues, como se demostró en la introducción a este capítulo, para cualquier antiweb  $\overline{W}_n^k$  se tiene que  $\eta^+(\overline{W}_n^k) = 1$ .

Notar que de manera análoga a lo que ocurre con el rango de Chvátal, la existencia de una sucesión como ([equation][3][3]3.3) implica una cota superior para el índice  $N$  de la desigualdad de rango asociada a  $\overline{W}_n^k$ :

$$\eta(\overline{W}_n^k) \leq \eta(\overline{W}_{n_0}^{k_0}) + t.$$

La pregunta fundamental que examinaremos en la siguiente sección es si es posible, y bajo qué condiciones, obtener sucesiones constructivas para algunas familias de antiwebs.

## 3.2 Cotas superiores para el índice $N$

### 3.2.1 Ejemplos de motivación

En esta subsección consideraremos a manera de motivación dos ejemplos donde ilustraremos cómo desigualdades de rango de antiwebs pueden producirse a partir de desigualdades de rango de subantiwebs. Usaremos este principio más adelante para obtener sucesiones constructivas para ciertas familias de antiwebs.

#### Ejemplo 1

Consideremos el caso de un agujero impar  $C_5 = \overline{W}_5^1$  ilustrado, en la Figura [figure][2][3]3.2.

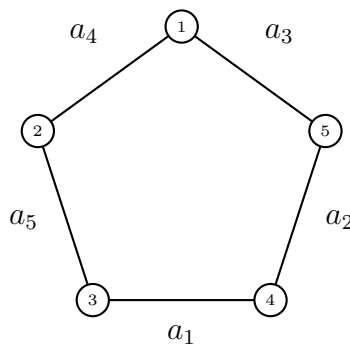


Figura 3.2: El agujero impar  $C_5 = \overline{W}_5^1$ .

Recordemos que para aplicar los resultados del capítulo anterior debemos homoge-

neizar el problema. La desigualdad de rango de  $C_5$ ,

$$x(C_5) := \sum_{i \in C_5} x_i \leq 2, \quad (3.4)$$

homogeneizada toma la forma

$$2x_0 - \sum_{i \in C_5} x_i \geq 0,$$

y su vector de incidencia es

$$\hat{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -\mathbf{1} \end{pmatrix},$$

donde  $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^5$ .

Demostrar que ([equation][4][3]3.4) tiene índice  $N$  menor o igual a 1 es equivalente a demostrar que es una desigualdad válida para  $N(C_5)$ . Si  $\hat{a} \in N(\text{EST}(C_5))^* \subseteq \mathbb{R}^6$ , entonces

$$\hat{a}^T x \geq 0 \text{ para todo } x \in N(\text{EST}(C_5)),$$

y por tanto  $\sum_{i \in C_5} x_i \leq 2$  es válida para  $N(C_5)$ , en virtud de que  $N(C_5) \cong N(\text{EST}(C_5)) \cap \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_0 = 1\}$ . Además, del Lema [lema][21][2]2.21 sabemos que  $\hat{a} \in N(\text{EST}(C_5))^*$  si y sólo si  $\hat{a}e_0^T \in M(\text{EST}(C_5))^*$ . Finalmente, de ([teo][18][2]2.18)

$$M(\text{EST}(C_5))^* = U_{\text{skew}} + U_1 + \text{cone}\{uv^T : u \in \text{EST}(C_5)^*, v \in Q^*\}.$$

Por lo tanto, basta con expresar  $\hat{a}e_0^T$  como la suma de tres matrices en  $\mathbb{R}^{6 \times 6}$ , pertenecientes a los conjuntos arriba señalados. Recordando que en el Lema [lema][9][2]2.9 establecimos que  $U_1$  está generado por  $f_i e_i^T$ ,  $i = 1, \dots, 5$ , buscamos una expresión de la forma

$$\hat{a}e_0^T = A + \sum_{i=1}^5 \lambda_i e_i f_i^T + \sum_{t=1}^m \gamma_t u_t v_t^T,$$

donde  $A$  es una matriz antisimétrica,  $\lambda_i \in \mathbb{R}$   $i = 1, \dots, 5$ ,  $u_t \in \text{EST}(C_5)^*$ ,  $v_t \in Q^* = \text{cone}\{e_i, f_i : 1 \leq i \leq 5\}$  y  $\gamma_t \in \mathbb{R}_+$ ,  $t = 1, \dots, m$ .

Por otro lado,

$$\text{EST}(C_5) = \{x \in \mathbb{R}^6 : x_i \geq 0 \forall i \in C_5, x_i + x_j \leq x_0 \forall ij \in E(C_5)\},$$

y puede ser escrito de forma matricial de la siguiente manera

$$\text{EST}(C_5) = \{x \in \mathbb{R}^6 : \hat{A}x \geq 0\},$$

donde

$$\widehat{A} = \begin{pmatrix} \widehat{I}_5 \\ \widehat{A}_0 \end{pmatrix},$$

y

$$\widehat{I}_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \widehat{A}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por la definición de polaridad,

$$\text{EST}(C_5)^* = \{v \in \mathbb{R}^6 : v^T x \geq 0 \forall x \in \text{EST}(C_5)\}.$$

Se puede ver fácilmente que si  $v$  es un vector fila de la matriz  $\widehat{A}$ , entonces  $v$  satisface  $v^T x \geq 0$  para toda  $x \in \text{EST}(C_5)$ . Por otra parte, si  $v \in \text{EST}(C_5)^*$ , entonces la desigualdad  $v^T x \geq 0$  es válida para  $\text{EST}(C_5)$  y por tanto es combinación cónica de las desigualdades de  $\widehat{A}x \geq 0$ . Observar además que los vectores fila de  $\widehat{I}_5$  y  $\widehat{A}_0$  son los vectores de incidencia homogeneizados asociados a las desigualdades de no negatividad  $x_i \geq 0$  y arista  $a_i$  para  $i \in C_5$ . Notaremos estos vectores por  $\widehat{e}^i$  y  $\widehat{a}^i$ , respectivamente. Por tanto,

$$\text{EST}(C_5)^* = \text{cone}\{\widehat{e}^i, \widehat{a}^i : \forall i \in C_5\}.$$

Consideremos ahora las matrices

$$C_1 := (\widehat{a}^2 + \widehat{a}^5)f_1^T + (\widehat{a}^3 + \widehat{a}^1)f_2^T + (\widehat{a}^4 + \widehat{a}^2)f_3^T + (\widehat{a}^5 + \widehat{a}^3)f_4^T + (\widehat{a}^1 + \widehat{a}^4)f_5^T$$

y

$$C_2 = (\widehat{a}^1 + \widehat{a}^3 + \widehat{a}^4)e_1^T + (\widehat{a}^2 + \widehat{a}^4 + \widehat{a}^5)e_2^T + (\widehat{a}^3 + \widehat{a}^5 + \widehat{a}^1)e_3^T + (\widehat{a}^4 + \widehat{a}^1 + \widehat{a}^2)e_4^T + (\widehat{a}^5 + \widehat{a}^2 + \widehat{a}^3)e_5^T.$$

Puede verificarse que

$$C_1 = \begin{pmatrix} 10 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 \\ -4 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$



Por tanto,  $C := C_1 + C_2$  pertenece a  $\text{cone}\{uv^T : u \in \text{EST}(C_5)^*, v \in Q^*\}$ , y además:

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, consideremos la matriz antisimétrica

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y la matriz  $B \in U_1$ , dada por:

$$B = -2 \sum_{i=1}^5 f_i e_i^T = -2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sumando estas matrices se tiene que

$$A + B + C = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 5\hat{a}e_0^T.$$

Entonces  $5\hat{a} \in N(\text{EST}(C_5))^*$ , lo que implica que  $5\hat{a}^T x \geq 0$  es válida para  $N(\text{EST}(C_5))$  y por tanto  $\sum_{i \in C_5} x_i \leq 2$  es válida para  $N(C_5)$ . Con este ejemplo se ha podido ratificar que  $\eta(\overline{W}_5^1) \leq 1$ . Puede demostrarse además que esta cota es ajustada, pues es conocido que la desigualdad de agujero impar no es válida para  $\text{ESTAB}(\overline{W}_5^1)$  de donde  $\eta(\overline{W}_5^1) \geq 1$ .

## Ejemplo 2

Consideremos ahora la antiweb  $\overline{W}_{11}^3$  que se representa gráficamente en la Figura [figure][3][3]3.3. Observar que  $\overline{W}_{11}^3$  contiene como subantiweb inducida al ciclo impar  $C_5$ , el cual está asociado, por ejemplo, a los nodos  $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ .

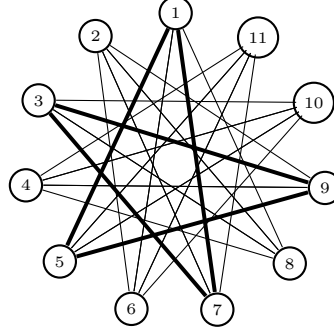


Figura 3.3: Antiweb  $\overline{W}_{11}^3$  y subantiweb  $\overline{W}_5^1$ .

En este ejemplo veremos como la desigualdad de rango de  $\overline{W}_{11}^3$  se genera a partir de la desigualdad de rango de subantiweb inducida  $C_5$ , lo que implica que el índice  $\eta(\overline{W}_{11}^3)$  está acotado por  $\eta(C_5)$  más 1, es decir,  $\eta(\overline{W}_{11}^3) \leq 2$ .

Homogeneizando la desigualdad de rango  $x(\overline{W}_{11}^3) = \sum_{i \in \overline{W}_{11}^3} x_i \leq 4$  se tiene

$$4x_0 - \sum_{i \in \overline{W}_{11}^3} x_i \geq 0, \quad (3.5)$$

de donde el vector de incidencia es

$$\hat{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -\mathbf{1} \end{pmatrix},$$

con  $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^{11}$ .

Demostrar que  $\eta(\overline{W}_{11}^3)$  es menor o igual a 2 es equivalente a demostrar que ([equation][5][3]3.5) es válida para  $N^2(\overline{W}_{11}^3)$ . De la misma manera que antes, se debe probar que  $\hat{a} \in N^2(\text{EST}(\overline{W}_{11}^3))^* := N(N(\text{EST}(\overline{W}_{11}^3)))^* \subset \mathbb{R}^{12}$ , es decir, que  $\hat{a}e_0^T \in M(N(\text{EST}(\overline{W}_{11}^3)))^*$ . Si denotamos por  $K_0$  al cono  $\text{cone}\{uv^T : u \in N(\text{EST}(\overline{W}_{11}^3))^*, v \in Q^*\}$ , observar que

$$M(N(\text{EST}(\overline{W}_{11}^3)))^* = U_1 + U_{\text{skew}} + K_0,$$

con  $\text{EST}(\overline{W}_{11}^3)^* \subseteq N(\text{EST}(\overline{W}_{11}^3))^*$ . Por lo tanto, podemos usar una idea semejante a la del Ejemplo 1 para obtener de la matriz  $C \in K_0$ .

En este caso,

$$\begin{aligned}
N(\text{EST}(\overline{W}_{11}^3)) = \{x \in \mathbb{R}^{12} : & x_i \geq 0, \forall 1 \leq i \leq 11, \\
& x_i + x_j \leq x_0, \forall ij \in E(\overline{W}_{11}^3), \\
& \sum_{i \in V'} x_i \leq 2x_0, \forall V' \subseteq V(\overline{W}_{11}^3), V' \cong C_5\}
\end{aligned}$$

que puede escribirse en forma matricial

$$N(\text{EST}(\overline{W}_{11}^3)) = \{x \in \mathbb{R}^{12} : \widehat{A}x \geq 0\}.$$

En este caso,  $\widehat{A}$  contiene un gran número de filas, pero nos interesan aquí únicamente dos clases. En la primera están todas las filas asociadas a desigualdades de arista. Denotaremos por  $\hat{a}_{i,j}$  a la fila de  $\widehat{A}$  correspondiente a la desigualdad homogeneizada de la arista  $ij \in E(\overline{W}_{11}^3)$ . Sea  $\widehat{A}_0$  la submatriz de  $\widehat{A}$  formada por las filas de  $\{\hat{a}_{i,j}, ij \in E(\overline{W}_{11}^3)\}$ . Por otra parte, consideraremos las filas asociadas a desigualdades inducidas por ciertos ciclos impares  $C_5 \subseteq \overline{W}_{11}^3$ . Estas filas están reunidas en la siguiente submatriz

$$\widehat{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Llamaremos  $\hat{a}^i$  a la  $i$ -ésima fila de  $\widehat{A}_1$ , con  $1 \leq i \leq 11$ . Finalmente, denotaremos por  $\widehat{A}$  a la matriz  $\begin{pmatrix} \widehat{A}_0 \\ \widehat{A}_1 \end{pmatrix}$ .

Observar que el polar de  $N(\text{EST}(\overline{W}_{11}^3))$  está dado por

$$N(\text{EST}(\overline{W}_{11}^3))^* = \{\hat{a} \in \mathbb{R}^{12} : \hat{a}^T x \geq 0, \forall x \in N(\text{EST}(\overline{W}_{11}^3))\} \supseteq \text{cone}\{\widehat{A}^T\} =: \widehat{K}_1.$$

Considerar ahora el cono

$$K_1 := \text{cone}\{uv^T : u \in \widehat{K}_1, v \in Q^*\}.$$

Notar que  $K_1 \subseteq K_0$ . Si usamos  $\oplus$  para designar la adición módulo 11, puede verificarse que las siguientes matrices pertenecen a  $K_1$  (y, por tanto, a  $K_0$ ).

$$C := C_1 + C_2 = \begin{pmatrix} 44 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -10 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -10 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -10 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -10 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -10 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ -10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ -10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

con

$$C_1 = \sum_{i=1}^{11} (\hat{a}^{i\oplus 1} + \hat{a}^{i\oplus 2}) f_i^T = \begin{pmatrix} 44 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 \\ -10 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -10 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -10 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -10 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -10 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -10 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -10 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -10 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -10 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -10 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -10 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$C_2 = \sum_{i=1}^5 (\hat{a}^{i\oplus 5} + \hat{a}^{i\oplus 6} + \hat{a}_{i,i\oplus 5}) e_i^T = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -2 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Por otra parte, es fácil verificar que  $A \in U_{\text{skew}}$  y  $B \in U_1$ , donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, observar que

$$A + B + C = 11\hat{a}e_0^T.$$

Se ha demostrado que  $11\hat{a} \in N(N(\text{EST}(\overline{W}_{11}^3)))^*$ . Por el mismo argumento que antes, esto implica que  $\sum_{i \in \overline{W}_{11}^3} x_i \leq 4$  es válida para  $N(N(\text{EST}(\overline{W}_{11}^3)))$  y por tanto  $\eta(\overline{W}_{11}^3) \leq 2$ .

### 3.2.2 Sucesiones constructivas para $N$

Mencionamos a continuación un resultado de Trotter que será usado frecuentemente en esta sección.

**Teorema 3.4** ([42]). *La antiweb  $\overline{W}_{n'}^{k'}$  es un subgrafo inducido de  $\overline{W}_n^k$  si y sólo si se tiene  $n' < n$ ,  $k' < k$  y*

$$\frac{k'}{k}n \leq n' \leq \frac{k'+1}{k+1}n.$$

**Lema 3.5.** *Dados  $k', n', q \in \mathbb{N}$  y  $q \geq 2$ , considerar la antiweb  $\overline{W}_n^k$  con  $n = qn' + 1$ ,  $k = q(k' + 1) - 1$ . Denotemos por  $V = \{1, \dots, n\}$  al conjunto de nodos de  $\overline{W}_n^k$ . Para todo  $j \in V$ , el conjunto de nodos  $V_j := \{j \oplus lq : 0 \leq l \leq n' - 1\}$  induce una subantiweb de  $\overline{W}_n^k$  isomorfa a  $\overline{W}_{n'}^{k'}$ , donde  $\oplus$  denota la adición módulo  $n$ .*

*Demostración.* Sea  $G_j$  el subgrafo de  $\overline{W}_n^k$  inducido por  $V_j$ . Demostremos que  $G_j$  es un grafo isomorfo a la antiweb  $\overline{W}_{n'}^{k'}$ . Para esto definamos  $\varphi : V_j \rightarrow \{1, \dots, n'\}$  tal que  $\varphi(j \oplus lq) = l + 1$ . Es evidente que  $\varphi$  es una biyección entre  $V_j$  y  $\{1, \dots, n'\}$ . Verifiquemos que además  $\varphi$  preserva la relación de adyacencia. Se debe probar que  $(a, b)$  es una arista de  $G_j$  si y sólo si  $(\varphi(a), \varphi(b))$  es arista de  $\overline{W}_{n'}^{k'}$ . Notaremos por  $E(G_j)$  y  $E(\overline{W}_{n'}^{k'})$  a los conjuntos de aristas de  $G_j$  y  $\overline{W}_{n'}^{k'}$ , respectivamente.

Sea  $((j \oplus l_1q), (j \oplus l_2q)) \in E(G_j)$ . Para probar que  $(\varphi(j \oplus l_1q), \varphi(j \oplus l_2q)) \in E(\overline{W}_{n'}^{k'})$  debemos verificar que  $k' < |\varphi(j \oplus l_1q) - \varphi(j \oplus l_2q)| < n' - k'$ . Tenemos por definición

de  $\varphi$  que  $|\varphi(j \oplus l_1q) - \varphi(j \oplus l_2q)| = |(l_1 \oplus 1) - (l_2 \oplus 1)| = |l_1 - l_2|$ . Por tanto, lo que hay que demostrar es

$$k' < |l_1 - l_2| < n' - k'. \quad (3.6)$$

Puesto que  $E(G_j)$  es subconjunto de las aristas de  $\overline{W}_n^k$  con ambos extremos en  $V_j$ , se tiene que  $((j + l_1q), (j + l_2q)) \in E(\overline{W}_n^k)$ , de donde:

$$\begin{aligned} k &< |(j + l_1q) - (j + l_2q)| < n - k, \\ k &< q|l_1 - l_2| < n - k. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Reemplazando los valores de  $n$  y  $k$ , tenemos, para la desigualdad superior,

$$q|l_1 - l_2| < n - k = qn' + 1 - qk' - q + 1 = q(n' - k') - q + 2.$$

Dividiendo para  $q$ ,

$$|l_1 - l_2| < n' - k' - 1 + \frac{2}{q} \leq n' - k',$$

ya que como  $q \geq 2$  entonces  $-1 + \frac{2}{q} \leq 0$ . Por otra parte, de la desigualdad inferior en ([equation][7][3]3.7), se sigue

$$q|l_1 - l_2| > k = qk' + q - 1,$$

y dividiendo para  $q$ ,

$$|l_1 - l_2| > k' + 1 - \frac{1}{q} \geq k',$$

pues  $1 - \frac{1}{q} \geq \frac{1}{2}$ . Con esto hemos demostrado ([equation][6][3]3.6).

Para el recíproco, sea  $(\varphi(j \oplus l_1q), \varphi(j \oplus l_2q)) \in E(\overline{W}_{n'}^{k'})$ . Veamos que  $((j \oplus l_1q), (j \oplus l_2q)) \in E(G_j)$ , es decir, que se cumple

$$k < |(j + l_1q) - (j + l_2q)| < n - k \Leftrightarrow k < |q(l_1 - l_2)| < n - k.$$

Sabemos que  $k' < |(l_1 + 1) - (l_2 + 1)| < n' - k'$ . Como todos los miembros de esta cadena de desigualdades son enteros, se sigue que

$$k' + 1 \leq |l_1 - l_2| \leq n' - k' - 1.$$

Multiplicando la desigualdad anterior por  $q$ ,

$$qk' + q \leq |q(l_1 - l_2)| \leq qn' - qk' - q,$$

que a su vez implica

$$qk' + q - 1 < |q(l_1 - l_2)| \leq qn' - qk' - q.$$

Reemplazando en ambos lados de la desigualdad anterior  $k = q(k' + 1) - 1$  y  $n = qn' + 1$ , obtenemos

$$k < |q(l_1 - l_2)| \leq n - 1 - (k + 1) = n - k - 2 < n - k. \Leftrightarrow k < |q(l_1 - l_2)| < n - k,$$

con lo que termina la demostración.  $\square$

**Lema 3.6.** Si  $V_j$  se define como en el lema anterior,

$$V_j \cap V_{j'} = \emptyset, \forall j, j' \in V \text{ tales que } 0 < |j - j'| < q, \quad (3.8)$$

y además,

$$\cup_{i=1}^q V_{j \oplus i} = V \setminus \{j\} \text{ para todo } j \in V. \quad (3.9)$$

*Demostración.* Para demostrar ([equation][8][3]3.8), supongamos por reducción al absurdo que existen  $j, j' \in V$  tales que  $0 < |j - j'| < q$  y  $V_j \cap V_{j'} \neq \emptyset$ . Entonces existe al menos un nodo  $v$  elemento de  $V_j$  y  $V_{j'}$ . Si  $v \in V_j$  entonces  $v = j \oplus l_1q$  para algún  $l_1 \in \{0, \dots, n' - 1\}$ . Similarmente, si  $v \in V_{j'}$ ,  $v = j' \oplus l_2q$  para cierto  $l_2 \in \{0, \dots, n' - 1\}$ . Luego,

$$\begin{aligned} j \oplus l_1q &= j' \oplus l_2q \\ j - j' &= (l_1 - l_2)q + cn, \end{aligned} \quad (3.10)$$

con  $c \in \mathbb{Z}$ . Si  $0 < |j - j'| < q$ , entonces  $c = 0$  y además

$$|j - j'| = |l_1 - l_2|q.$$

Pero entonces, de la hipótesis  $0 < |j - j'| < q$ , se tiene que

$$0 < q|l_1 - l_2| < q \Leftrightarrow 0 < |l_1 - l_2| < 1,$$

lo que es una contradicción, pues  $|l_1 - l_2| \in \mathbb{N}$ .

Demostremos ahora la segunda parte del lema. Sea  $\tilde{V} = \cup_{i=1}^q V_{j+i}$ . Por lo demostrado en la primera parte del lema los conjuntos  $V_{j+1}, \dots, V_{j+q}$  son disjuntos dos a dos. Luego, la cardinalidad de  $\tilde{V}$  es la suma de las cardinalidades de  $V_{j+1}, \dots, V_{j+q}$  y la cardinalidad de cada uno de estos conjuntos es  $n'$ . Entonces,  $|\tilde{V}| = \sum_{i=1}^q |V_{j+i}| = qn'$ . Notar que  $qn' = n - 1$ , es decir,  $\tilde{V}$  contiene exactamente un elemento menos que  $V$ .



Finalmente, por la forma como están definidos los conjuntos  $V_{j+i}$  con  $1 \leq i \leq q$ ,  $\tilde{V}$  puede escribirse como  $\tilde{V} = \{(j+i) \oplus lq : 1 \leq i \leq q, 0 \leq l \leq n' - 1\}$ . Aquí puede notarse que  $j \notin \tilde{V}$ , pues  $j$  no puede ser escrito como  $(j+i) \oplus lq$  para ningún  $i \in \{1, \dots, q\}$  ni  $l \in \{0, \dots, n' - 1\}$ .  $\square$

**Teorema 3.7.** *Sea  $\overline{W}_n^{k'}$  una subantiweb de  $\overline{W}_n^k$  con  $k', n', k$  y  $n$  definidos como en el Lema [lema][5][3]3.5. Supongamos que  $\eta(\overline{W}_n^{k'}) = t$ . Entonces*

$$\eta(\overline{W}_n^k) \leq t + 1.$$

*Demostración.* Demostraremos que la desigualdad de rango asociada a la antiweb  $\overline{W}_n^k$ ,

$$x(\overline{W}_n^k) \leq k + 1,$$

es válida para  $N^{t+1}(\overline{W}_n^k) = N(N^t(\overline{W}_n^k))$ . Sea  $\hat{a}^j \in \mathbb{Q}^{n+1}$  el vector de incidencia de la desigualdad de rango homogeneizada asociada a la subantiweb inducida por  $V_j$ , definido como en el Lema [lema][5][3]3.5. Es decir,

$$\hat{a}_i^j = \begin{cases} k' + 1, & \text{si } i = 0 \\ -1, & \text{si } i \in V_j \\ 0, & \text{en los demás casos.} \end{cases}$$

De la misma manera,  $\hat{r} \in \mathbb{Q}^{n+1}$  denotará el vector de incidencia de la desigualdad de rango homogeneizada asociada a la antiweb  $\overline{W}_n^k$ , multiplicado por  $n$ .

Lo que se debe probar es que  $\hat{r}$  es elemento de  $(N(N^t(\text{EST}(\overline{W}_n^k))))^*$ , ya que con esto se verifica que  $\hat{r}^T x \geq 0$  para todo  $x \in N(N^t(\text{EST}(\overline{W}_n^k)))$ .

Por el Lema [lema][21][2]2.21,  $\hat{r} \in N(N^t(\text{EST}(\overline{W}_n^k)))^*$  si y sólo si  $\hat{r}e_0^T \in M(N^t(\text{EST}(\overline{W}_n^k)))^*$ , donde

$$\hat{r}e_0^T = \begin{pmatrix} (k+1)n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

De ([teo][18][2]2.18) sabemos que la matriz  $\hat{r}e_0^T$  pertenece a  $M(N^t(\text{EST}(\overline{W}_n^k)))^*$  si y sólo si  $\hat{r}e_0^T$  puede ser escrita como la suma de una matriz antisimétrica, una matriz perteneciente a  $U_1$  y una matriz elemento del cono  $D := \text{cone}\{uv^T, u \in N^t(\text{EST}(\overline{W}_n^k))^*, v \in Q^*\}$ .

Del Lema [lema][6][3]3.6 sabemos que  $(V_{i \oplus 1}, \dots, V_{i \oplus q})$ , donde  $\oplus$  denota la suma módulo  $n$ , es una partición del conjunto  $V \setminus \{i\}$ , por lo que al sumar los vectores de

incidencia asociados a cada miembro de la partición,  $\hat{a}^{i\oplus 1} + \dots + \hat{a}^{i\oplus q}$ , tenemos un vector cuya primera entrada es  $(k' + 1)q$  y que tiene  $-1$  en las demás entradas, salvo en la entrada  $i$  que es 0. Luego, la matriz  $C_1 := \sum_{i=1}^n (\hat{a}^{i\oplus 1} + \hat{a}^{i\oplus 2} + \dots + \hat{a}^{i\oplus q}) f_i^T$  tiene la siguiente forma

$$C_1 = \begin{pmatrix} q(k' + 1)n & -q(k' + 1) & -q(k' + 1) & \dots & -q(k' + 1) \\ -(n - 1) & 0 & 1 & \dots & 1 \\ -(n - 1) & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -(n - 1) & 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

donde, debido a que  $f_i = e_0 - e_i$ , la primera columna de  $C_1$  contiene a la suma cambiada de signo de las demás columnas. Definiendo

$$\bar{n} = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1,$$

se tiene, igual que antes, que  $(V_{i\oplus\bar{n}\oplus 1}, \dots, V_{i\oplus\bar{n}\oplus q})$  es una partición del conjunto  $V \setminus \{i\oplus\bar{n}\}$ . Uniendo este conjunto con  $\{i, i + \bar{n}\}$ , se logra recubrir todos los nodos una sola vez y el nodo  $i$  dos veces. Notar que  $\{i, i + \bar{n}\}$  es una arista de  $\overline{W}_n^k$ , y sea  $\hat{a}_{i, i+\bar{n}}$  el vector de incidencia asociado a la desigualdad de arista  $x_i + x_{i+\bar{n}} \leq 1$  homogeneizada. Al sumar los vectores de incidencia asociados a  $V_{i\oplus\bar{n}\oplus 1}, \dots, V_{i\oplus\bar{n}\oplus q}, \{i, i + \bar{n}\}$ , se tiene un vector donde la primera entrada es  $(k' + 1)q + 1$ , la  $i$ -ésima entrada es  $-2$  y el resto es  $-1$ . Por lo tanto la matriz  $C_2$  definida por  $\sum_{i=1}^n (\hat{a}^{i\oplus\bar{n}\oplus 1} + \dots + \hat{a}^{i\oplus\bar{n}\oplus q-1} + \hat{a}_{i, i+\bar{n}}) e_i^T$  tiene la siguiente forma

$$C_2 = \begin{pmatrix} 0 & q(k' + 1) + 1 & q(k' + 1) + 1 & \dots & q(k' + 1) + 1 \\ 0 & -2 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & -1 & -2 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & -1 & \dots & -2 \end{pmatrix}.$$

Sumando  $C_1$  y  $C_2$  se tiene

$$C := C_1 + C_2 = \begin{pmatrix} q(k' + 1)n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -(n - 1) & -2 & 0 & \dots & 0 \\ -(n - 1) & 0 & -2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -(n - 1) & 0 & 0 & \dots & -2 \end{pmatrix}.$$

De la hipótesis  $\eta(\overline{W}_{n'}^{k'}) = t$  se sabe que  $\hat{a}^j \in N^t(\text{EST}(\overline{W}_n^k))^*$  para todo  $j \in V(\overline{W}_n^k)$ . Luego, la matriz  $C$ , pertenece al cono  $D$ .

Observar que, por la definición de  $n'$  y  $k'$  en el Lema [lema][5][3]3.5, en la matriz anterior se tiene que  $q(k'+1)n = (k+1)n$ . Finalmente, considerar la matriz antisimétrica  $A$  y la matriz  $U \in U_1$  descritas abajo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 & \cdots & -2 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{pmatrix}$$

Puede verificarse que

$$\hat{r}e_0^T = C + A + U,$$

y por ([teo][18][2]2.18) concluimos que  $\hat{r}e_0^T \in M(N^t(\text{EST}(\overline{W}_n^k)))^*$ .  $\square$

**Corolario 3.8.** Sean  $q \geq 2$ ,  $n_0, k_0, i \in \mathbb{N}$ . Si  $n_i = n_0q^i + \frac{q^i-1}{q-1}$  y  $k_i = (k_0 + 1)q^i - 1$ , entonces

$$\eta(\overline{W}_{n_i}^{k_i}) \leq \eta(\overline{W}_{n_0}^{k_0}) + i. \quad (3.11)$$

*Demostración.* Procedemos por inducción sobre  $i$ . Para el caso  $i = 0$ , la afirmación se cumple evidentemente. Como hipótesis de inducción, supongamos que se cumple

$$\eta(\overline{W}_{n_{i-1}}^{k_{i-1}}) \leq \eta(\overline{W}_{n_0}^{k_0}) + (i - 1)$$

y veamos que se verifica ([equation][11][3]3.11).

Notar que

$$\begin{aligned} n_i &= n_0q^i + \frac{q^i - 1}{q - 1} \\ &= n_0q^{i-1}q + \frac{q^i - q + q - 1}{q - 1} \\ &= n_0q^{i-1}q + q\frac{q^{i-1} - 1}{q - 1} + \frac{q - 1}{q - 1} \\ &= q \left( n_0q^{i-1} + \frac{q^{i-1} - 1}{q - 1} \right) + 1 \\ &= qn_{i-1} + 1, \end{aligned}$$

y

$$k_i = (k_0 + 1)q^{i-1}q - q + q - 1$$

$$\begin{aligned}
&= q((k_0 + 1)q^{i-1} - 1) + q - 1 \\
&= qk_{i-1} + q - 1 \\
&= q(k_{i-1} + 1) - 1.
\end{aligned}$$

Luego tomando  $n' = n_{i-1}$  y  $k' = k_{i-1}$ , se verifican las condiciones del Teorema [teo][7][3]3.7 y

$$\eta(\overline{W}_{n_i}^{k_i}) \leq \eta(\overline{W}_{n_{i-1}}^{k_{i-1}}) + 1.$$

Usando la hipótesis de inducción, la desigualdad anterior puede mayorarse

$$\eta(\overline{W}_{n_i}^{k_i}) \leq \eta(\overline{W}_{n_{i-1}}^{k_{i-1}}) + 1 \leq \eta(\overline{W}_{n_0}^{k_0}) + (i - 1) + 1 = \eta(\overline{W}_{n_0}^{k_0}) + i.$$

□

Si para el Corolario [coro][8][3]3.8 se considera  $\overline{W}_{n_0}^{k_0}$  como el Lema [lema][1][3]3.1, se tiene el siguiente corolario

**Corolario 3.9.** Sean  $q \geq 2$ . Si  $n_i = n_0q^i + \frac{q^i-1}{q-1}$  y  $k_i = (k_0 + 1)q^i - 1$ , donde  $n_0$  y  $k_0$  están elegidos como en el Lema [lema][1][3]3.1, es decir,

- $n_0 = 2k + 1$  y  $k_0 = k - 1$ , con  $k \geq 1$ , o
- $n_0 = 2k + 4$  y  $k_0 = k$ , con  $k$  impar,  $k \geq 3$ , o
- $n_0 = 6$ ,  $k_0 = 1$ , o
- $n_0 = 9$ ,  $k_0 = 2$ .

Entonces,

$$\eta(\overline{W}_{n_i}^{k_i}) \leq i.$$

# Capítulo 4

## Conclusiones

En el capítulo anterior se estudió la aplicación de operador de Lovász y Schrijver  $N(K, Q)$ , tomando  $K$  igual a la relajación de aristas del polítopo de conjuntos estables en antiwebs. Se obtuvieron cotas superiores para el índice  $N$  de este polítopo para ciertas familias de antiwebs, Corolario [coro][8][3]3.8. Para el operador  $N_+(K, Q)$ , se logró demostrar de manera inmediata que las desigualdades de rango asociadas a cualquier antiweb tienen índice  $N_+$  igual a 1, Teorema [teo][3][3]3.3.

Para las desigualdades de rango asociadas a clases particulares de antiwebs, como lo son las cliques, agujeros impares y anti-agujeros impares, la siguiente tabla recopila los valores de los índices  $N$  y  $N_+$ .

Desigualdad	Índice $N$	Índice $N_+$
clique $Q_n$ ([equation][14][1]1.14)	$n - 1$	1
agujero impar $C_{2k+1}$ ([equation][15][1]1.15)	1	1
anti-agujero impar $\overline{C}_{2k+1}$ ([equation][16][1]1.16)	$k - 1$	1

Como se mencionó en el Capítulo [chapter][2][2], en el trabajo de Giandoménico et. al [21] se estudia la aplicación del operador  $N(K, K)$  al polítopo de conjuntos estables considerando, en este caso,  $K$  igual a  $\text{QSTAB}(\overline{W}_n^k)$ . Se demuestra que con una sola aplicación el operador  $N$  las desigualdades de rango asociadas a antiwebs son válidas para  $N(K, K)$ .

En cuanto a los operadores  $N(K, K)$  con  $K = \text{ESTAB}(\overline{W}_n^k)$  y  $N(K, Q)$  con  $K = \text{QSTAB}(\overline{W}_n^k)$  no hemos encontrado trabajos al respecto. Un posible trabajo futuro, sería ver la factibilidad de extender los resultados conocidos hasta el momento para los operadores  $N(K, K)$  con  $K = \text{QSTAB}(\overline{W}_n^k)$  y  $N(K, Q)$  con  $K = \text{ESTAB}(\overline{W}_n^k)$ , respectivamente.

# Referencias

- [1] Kent Andersen, Gérard Cornuéjols, and Yanjun Li. Split closure and intersection cuts. In *IPCO*, pages 127–144, 2002.
- [2] Egon Balas. The cutting-plane method for solving convex programms. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, pages 85–103, 1960.
- [3] Egon Balas. Disjunctive programming. *Annals of Discrete Mathematics*, 5:3–51, 1979.
- [4] Egon Balas, Sebastián Ceria, Gérard Cornuéjols, and Gábor Pataki. Polyhedral methods for the maximum clique problem. *Cliques, coloring, and satisfiability: second DIMACS implementation challenge, October 11-13, 1993*, page 11, 1996.
- [5] Ravindra B. Bapat and T.E.S. Raghavan. *Nonnegative Matrices and Applications*. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications. Cambridge University Press, 1997.
- [6] Robert A. Beezer. *A First Course in Linear Algebra*. University Press of Florida, 2009.
- [7] C. Berge. Färbungen von graphen, deren sämtliche bzw. deren ungerade kreise starr sind. *Wiss. Zeitschrift der Martin-LutherUniversität Halle Wittenberg*, (114–115), 1961.
- [8] A. Bockmayr, F. Eisenbrand, and Max-Planck-Institut für Informatik. *On the Chvátal Rank of Polytopes in the 0/1 Cube*. Max-Planck-Institut für Informatik, 1997.
- [9] Ralf Borndörfer. *Aspects of Set Packing, Partitioning, and Covering*. Shaker Verlag, Aachen, 1998. Ph.D. thesis, Technische Universität Berlin.
- [10] Maria Chudnovsky, Neil Robertson, Paul Seymour, and Robin Thomas. The strong perfect graph theorem. *Ann. of Math. (2)*, 164(1):51–229, 2006.

- [11] V. Chvátal. Edmonds polytopes and a hierarchy of combinatorial problems. *Discrete Math*, pages 205–337, 1973.
- [12] V. Chvátal. On certain polytopes associated with graphs. *Journal of Combinatorial Theory (B)*, 18:138–154, 1975.
- [13] William J. Cook, W. Cunningham, W. Pulleyblank, and Alexander Schrijver. *Combinatorial Optimization*. John Wiley & Sons, Inc., 1998.
- [14] William J. Cook, Ravi Kannan, and Alexander Schrijver. Chvátal closures for mixed integer programming problems. *Math. Program.*, 47:155–174, 1990.
- [15] Jack Edmonds. Covers and packings in a family of sets. *Bulletin of the American Mathematical Society*, pages 29–32, 1962.
- [16] Jack Edmonds. Maximum matchings and a polyhedron with 0,1 vertices. *J. of Res. the Nat. Bureau of Standards*, pages 125–130, 1965.
- [17] Jack Edmonds and W. Pulleyblank. Facets of 1-matching polyhedra. *Hypergraph Seminar*, pages 214–242, 1974. Springer Verlag, Heidelberg.
- [18] A. Eisenblätter. *Frequency Assignment in GSM Networks: Models, Heuristics and Lower Bounds*. Cuvillier, 2001.
- [19] Delbert Ray Fulkerson. Blocking and anti-blocking pairs of polyhedra. *Math. Programming*, (1):168–194, 1971.
- [20] Monia Giandomenico and Adam N Letchford. Exploring the relationship between Max-Cut and stable set relaxations. *Math. Program.*, 106(1):159–175, May 2006.
- [21] Monia Giandomenico, Adam N. Letchford, Fabrizio Rossi, and Stefano Smriglio. An application of the Lovász&Schrijver  $M(K, K)$  operator to the stable set problem. *Math. Program.*, 120(2):381–401, May 2009.
- [22] Rick Giles and Leslie E. Trotter, Jr. On stable set polyhedra for  $k_1, 3$ -free graphs. *J. Comb. Theory, Ser. B*, 31(3):313–326, 1981.
- [23] Michel X. Goemans and Levent Tuncel. When does the positive semidefiniteness constraint help in lifting procedures. *Mathematics of Operations Research*, 26:796–815, 2000.
- [24] Ralph E. Gomory. Outline of an algorithm for integer solutions to linear programs. *Bulletin of the American Society*, 64:275–278, 1958.

- [25] Martin Grötschel, László Lovász, and Alexander Schrijver. The ellipsoid method and its consequences in combinatorial optimization. *Combinatorica*, pages 169–197, 1981.
- [26] Eric Harley, Anthony J. Bonner, and Nathan Goodman. Uniform integration of genome mapping data using intersection graphs. *Bioinformatics*, pages 487–494, 2001.
- [27] Eugenia Holm, Luis Miguel Torres, and Annegret Katrin Wagler. On the Chvátal-rank of linear relaxations of the stable set polytope. *International Transactions in Operational Research*, pages 827–849, 2010.
- [28] Eugenia Holm, Luis Miguel Torres, and Annegret Katrin Wagler. On the Chvátal rank of antiwebs. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, pages 183–190, 2010.
- [29] Eugenia Holm, Luis Miguel Torres, and Annegret Katrin Wagler. A lower bound on the Chvátal-rank of antiwebs. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, pages 381–386, 2011.
- [30] Cook William J. and Sanjeeb Dash. On the matrix-cut rank of polyhedra. *Math. Oper. Res.*, 26(1):19–30, 2001.
- [31] Richard M. Karp. Reducibility among combinatorial problems. In R. E. Miller and J. W. Thatcher, editors, *Complexity of Computer Computations*, pages 85–103. Plenum Press, New York, USA, 1972.
- [32] Leonid Genrikhovich Khachiyan. A polynomial algorithm in linear programming. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 244:1093–1096, 1979.
- [33] László Lovász and Alexander Schrijver. Cones of matrices and set-functions and 0-1 optimization. *SIAM Journal Optimization*, pages 166–190, 1991.
- [34] Elizabeth Million. The Hadamard product. Technical report, 2012.
- [35] George L. Nemhauser and Leslie E. Trotter, Jr. Properties of vertex packing and incidence system polyhedra. *Math. Programming*, (6):48–61, 1973.
- [36] Rutgers University. Dept. of Computer Science, V. Chvátal, W. Cook, M. Hartmann, and Rutgers University. Laboratory for Computer Science Research. *On cutting-plane proofs in combinatorial optimization*. Report. Sonderforschungsbereich 303 Information und die Koordination Wirtschaftlicher Aktivitäten, Universität Bonn. 1988.



- [37] Giuseppe Oriolo. Clique family inequalities for the stable set polytope of quasi-line graphs. *Discrete Appl. Math.*, 132:185–201, October 2003.
- [38] Manfred W. Padberg. On the facial structure of set packing polyhedra. *Math. Programming*, (5):168–194, 1973.
- [39] Manfred W. Padberg and Institut national de recherche en informatique et en automatique (France). *Perfect Zero-one Matrices*. Rapports de recherche. Institut national de recherche en informatique et en automatique, 1980.
- [40] Alexander Schrijver. On cutting planes. *Annals of Discrete Mathematics*, 9:291–296, 1980.
- [41] Tamon Stephen and Levent Tunçel. On a representation of the matching polytope via semidefinite liftings. *Math. Oper. Res.*, 24(1):1–7, January 1999.
- [42] Leslie E. Trotter, Jr. A class of facet producing graphs for vertex packing polyhedra. *Disc. Math.*, (12):373–388, 1975.
- [43] Annegret Katrin Wagler. Antiwebs are rank-perfect. *4OR*, 2(2):149–152, 2004.
- [44] Hamish Waterer, Ellis Johnson, and Martin Savelsbergh. The relation of time indexed formulations of single machine scheduling problems to the node packing problem. CORE Discussion Papers 2002009, Université catholique de Louvain, Center for Operations Research and Econometrics (CORE), 2002.
- [45] Günter M. Ziegler. *Lectures on Polytopes*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, first edition, 1994.
- [46] Peter J. Zwaneveld, Leo G. Kroon, and van Hoesel, Stan P. M. Routing trains through a railway station based on a node packing model. Research Memoranda 015, Maastricht : METEOR, Maastricht Research School of Economics of Technology and Organization, 1997.