

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS

**UNA APLICACIÓN DE PORTAFOLIOS ÓPTIMOS EN EL SECTOR
PETROLERO UTILIZANDO ECUACIONES DIFERENCIALES
ESTOCÁSTICAS**

**PROYECTO DE TITULACIÓN PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE
MATEMÁTICO**

CRISTINA ELIZABETH VELASCO VÁZQUEZ

ecvv.math@gmail.com

DIRECTOR: DR. MARCO VINICIO CALAHORRANO RECALDE

marco.calahorrano@epn.edu.ec

2012

DECLARACIÓN

Yo, CRISTINA ELIZABETH VELASCO VÁZQUEZ, declaro bajo juramento que el trabajo aquí escrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

A través de la presente declaración cedo mis derechos de propiedad intelectual correspondientes a este trabajo, a la Escuela Politécnica Nacional, según lo establecido por la Ley de Propiedad Intelectual, por su reglamento y por la normatividad institucional vigente.

Cristina Elizabeth Velasco Vázquez

CERTIFICACIÓN

Certifico que el presente trabajo fue desarrollado por CRISTINA ELIZABETH VELASCO VÁZQUEZ bajo mi supervisión.

Dr. Marco Calahorrano
DIRECTOR DE PROYECTO

AGRADECIMIENTOS

Agradezco encarecidamente a todas las personas que apoyaron la realización de este trabajo. Especialmente a mi estimado director, Dr. Marco Calahorrano, por su apoyo, paciencia, sus importantes comentarios y sugerencias. Al Mat. Meitner Cadena por sugerir este tema de estudio. Al Dr. Ramiro Torres por su apoyo y ánimos, así como sus invaluable consejos en la programación.

Finalmente agradezco a los profesores que conforman el Departamento de Matemática de la Escuela Politécnica Nacional, por sus sabios conocimientos e impartir una educación de calidad.

Elizabeth Velasco

DEDICATORIA

A mi madre.

Elizabeth Velasco

RESUMEN

El problema de selección de portafolios consiste en obtener uno que contenga el más alto rendimiento con el menor riesgo posible. La combinación de un rendimiento adecuado con un nivel de riesgo apropiado se logra a través de la diversificación del riesgo. La diversificación se obtiene al comprar varios productos que tengan baja correlación. Esta idea fue introducida por Markowitz en sus trabajos de 1952 y 1959. Desde su aparición, este modelo ha sido un referente teórico fundamental en la selección de portafolios. Sin embargo, en la práctica, su uso es reducido, debido a las limitaciones del método, principalmente por el carácter constante de la estrategia de inversión.

La intención en este trabajo es exponer uno de los métodos alternativos al portafolio de Markowitz, mediante un modelo de portafolio dinámico que permita el diseño de estrategias de inversión cambiantes en el transcurso del tiempo. Este trabajo además del modelo de cartera cuenta con el de predicción de los retornos requeridos para la conformación de la cartera en base a un sistema de Ecuaciones Diferenciales Estocásticas (EDEs) y cuyo tratamiento se realiza con el método Euler-Maruyama. Estas técnicas son implementadas para predecir los retornos y la elaboración de una cartera dinámica con acciones de empresas en el sector petrolero.

Palabras clave: Ecuaciones Diferenciales Estocásticas, Método de Euler-Maruyama, Simulación Montecarlo, Portafolio, Portafolio dinámico.

ABSTRACT

The portfolio selection problem is to obtain one portfolio that contains the highest yield with the lowest possible risk. The combination of adequate yield with an appropriate risk level is achieved through risk diversification. Diversification is obtained when several products having low correlation are bought . This idea was introduced by Markowitz in his works in 1952 and 1959. Since its appearance, this work has been the main theoretical reference in selecting portfolios. However, in practice, the model is not used due to limitations in the solution method, mainly by the constant investment strategy.

The intention in this work is to expose one of the alternative methods of Markowitz's portfolio, where a dynamic portfolio model allowing investment changing strategies in the time is considered. Additional to the portfolio model, this work compute the return predictions required for the construction of the portfolio based on a stochastic differential equation system (SDEs) and whose treatment is performed by using the Euler-Maruyama method. These techniques are implemented to forecast returns and constructing the dynamic portfolio for assets in petroleum companies.

Key words: Stochastic Differential Equation, Euler-Maruyama Method, Simulation Montecarlo, Portfolio, Dynamic Portfllo.

TABLA DE CONTENIDO

Capítulo 1: Conceptos financieros básicos	1
1.1. Definiciones y conceptos financieros básicos	1
1.1.1. Concepto de mercado	1
1.1.2. Obligaciones	2
1.1.3. Acciones	3
1.1.4. Arbitraje	3
1.1.5. Rentabilidad, retorno y rendimiento	4
1.1.6. Portafolio	4
Capítulo 2: Probabilidades, procesos estocásticos y movimiento browniano.	5
2.1. Motivación	5
2.2. Probabilidades	7
2.2.1. Variable aleatoria	8
2.3. Procesos estocásticos	12
2.3.1. Clases de procesos estocásticos	13
2.3.2. Filtración	14
2.3.3. Martingalas	16
2.4. Movimiento browniano/ proceso de Wiener	16
2.4.1. Un poco de historia	16
2.4.2. No diferencibilidad del movimiento browniano	18
2.4.3. Movimiento browniano	19
2.4.4. Martingalas y el movimiento browniano	20
2.4.5. Movimiento browniano y variación acotada	21
Capítulo 3: Cálculo estocástico	22
3.1. Integral estocástica	22
3.1.1. Motivación	22
3.1.2. Construcción de la integral de Itô	23
3.1.3. Diferencial estocástica y propiedades	26
3.1.4. Fórmula de Itô	27
3.1.5. Fórmula de Itô multidimensional	29
3.2. Ecuaciones diferenciales estocásticas	31
3.2.1. Introducción	31
3.2.2. Existencia y unicidad	31
3.2.3. Movimiento browniano geométrico (MBG)	32

Capítulo 4: Aproximación numérica estocástica (EM)	33
4.1. Método Euler-Maruyama unidimensional (EMU)	34
4.1.1. Esquema EMU	36
4.2. Método Euler-Maruyama multidimensional (EMM)	36
4.2.1. Movimientos brownianos correlacionados	37
4.2.2. Esquema EMM	39
4.3. Convergencia fuerte de soluciones para EDEs	39
4.4. Construcción del modelo predictivo	40
4.4.1. Análisis de los datos históricos	41
4.4.2. Calibración de parámetros	41
4.4.3. Simulación Montecarlo (MC)	44
4.5. Implementación del modelo predictivo	45
4.5.1. Implementación del modelo predictivo para precios	45
4.5.2. Implementación del modelo predictivo para retornos	46
Capítulo 5: Aplicación: portafolio óptimo en el sector petrolero	48
5.1. Modelo de Markowitz	48
5.1.1. Implementación del modelo de Markowitz	50
5.2. Portafolio dinámico	51
5.2.1. Implementación del portafolio dinámico	53
Capítulo 6: Conclusiones	55
Apéndice A: Notaciones y abreviaturas	56
Apéndice B: Solver quadprog de Matlab	57
Apéndice C: Códigos en Matlab	59
C.1. Código para generar un MB	59
C.2. Código EMU	59
C.3. Código calibración de datos	60
C.4. Código EMM para precios	61
C.5. Código EMM con MC para precios	63
C.6. Código EMM para retornos	65
C.7. Código EMM con MC para retornos	66
C.8. Código portafolio Markowitz.	68
C.9. Código frontera eficiente	71
C.10. Código portafolio dinámico	74

ÍNDICE DE FIGURAS

2.1. Movimiento browniano	20
4.1. Aproximación Euler-Maruyama unidimensional	36
4.2. Precios reales de las acciones	42
4.3. Retornos reales de las acciones	42
4.4. Aproximación EMM para precios correlacionados	45
4.5. Aproximación EMM y MC para precios correlacionados	46
4.6. Aproximación EMM para retornos correlacionados	46
4.7. Aproximación EMM y MC para retornos correlacionados	47
5.1. Frontera eficiente.	51

ÍNDICE DE TABLAS

D.1. Precios de acciones petroleras	78
---	----

Introducción

El reto de la ciencia ha sido poder representar de la manera más adecuada la realidad creando modelos para poder predecir los fenómenos observados. En este trabajo el objetivo es modelar un portafolio óptimo, que es la combinación de activos financieros menos riesgosa (portafolio), con la mayor rentabilidad (portafolio óptimo). El problema de optimizar la distribución de un patrimonio disponible a través de diversas oportunidades de inversión puede ser estudiados de manera estática (modelo de Markowitz), o de forma dinámica (portafolio dinámico), ver [\[13\]](#).

Si bien el modelo de Markowitz es muy utilizado, y ha aportado mucho en el campo tanto teórico como práctico, tiene sus limitaciones por ser un modelo estático. En este trabajo se busca modificar esta situación mediante la construcción de un modelo que dinamice y optimice las inversiones a través del tiempo, es decir, desde un punto de vista dinámico.

El problema se ha planteado desde el siguiente punto de vista: por un lado se debe resolver el problema de la predicción de retornos de los activos (en nuestro caso de las acciones de empresas petroleras previamente elegidas) y por otro lado la optimización del portafolio.

Para resolver el primer punto, muchos autores utilizan técnicas estadísticas de tendencia con datos históricos. En este trabajo se utiliza una de las herramientas más modernas para este tipo de predicciones, como es la utilización de movimientos brownianos geométricos resueltos a partir de la discretización numérica Euler-Maruyama. Modelar con movimientos brownianos geométricos es una de las técnicas más sofisticadas en la actualidad pues antiguamente o bien se usaban técnicas estadísticas o movimientos brownianos aditivos, ver [\[11\]](#).

Cabe recalcar que los movimientos brownianos geométricos que se utilizan están correlacionados (caso multidimensional). Este tipo de modelos se acercan más a la realidad en comparación con otros métodos que no incluyen técnicas correlacionadas. Además se combina el método Euler-Maruyama con técnicas de simulación Montecarlo para obtener la solución aproximada final.

Para el segundo punto se construye el modelo dinámico de portafolio después de presentar el modelo clásico de Markowitz.

Debido a la amplitud de conceptos referentes a temas de Ecuaciones Diferenciales Estocásticas, se intenta presentarlos de una manera sencilla, profundizando sólo hasta el punto en que sea necesario para efectos del estudio posterior del modelo aplicado. Por esa razón, la mayoría de los resultados se presentan sin demostraciones (indicando las referencias al interesado).

La estructura del trabajo es la siguiente: en el Capítulo 1 se revisan conceptos financieros fundamentales que son de utilidad y ayudan en la descripción del problema. En el Capítulo 2 se revisan conceptos básicos de probabilidad y procesos estocásticos, además se introduce la idea de proceso de Wiener o también llamado movimiento browniano, dando su definición y propiedades. El Capítulo 3 está dedicado a la construcción de la integral de Itô y al concepto de integral estocástica que es fundamental para la solución de una EDE. Además se revisa las condiciones para la existencia y unicidad de soluciones. En el Capítulo 4 se estudia el método de discretización Euler-Maruyama para una EDE (caso unidimensional) y para un sistema de EDEs correlacionadas (caso multidimensional). Con estos conceptos se construye el modelo predictivo para precios (como ejemplo de aplicación del método de discretización) y retornos (que se utiliza para el modelo posterior de construcción de cartera) con el correspondiente análisis de datos históricos y la calibración de parámetros. Seguidamente se hace la simulación Montecarlo implementando dicho modelo predictivo. El Capítulo 5 está dedicado al análisis, construcción e implementación del modelo para el establecimiento del portafolio compuesto por acciones en el sector petrolero, tanto desde un punto de vista estático (modelo de Markowitz), como dinámico (portafolio dinámico). Y finalmente en el Capítulo 6 se tienen las conclusiones.

Capítulo 1

Conceptos financieros básicos

En este capítulo se revisan conceptos financieros fundamentales que son de utilidad y ayudan en la descripción del problema.

1.1. Definiciones y conceptos financieros básicos

Las finanzas estudian problemas de flujo de capital entre individuos o empresas, es decir, el cómo obtener y gestionar dinero, esto implica la asignación de recursos a través del tiempo. Esta asignación tiene dos características: el tiempo y la incertidumbre.

Considerar la incertidumbre financiera como un fenómeno que afecta a la asignación de recurso es un enfoque relativamente moderno pero se ha hecho indispensable, ver [11].

Definición 1.1.1 (Productos financieros) *Son instrumentos de transferencia de fondos entre agentes económicos que se caracterizan por su liquidez, riesgo y rentabilidad. También son las operaciones realizadas por las entidades financieras y cuyo objeto de contratación es el dinero. El total de flujos de efectivo a futuro es definido por una norma jurídica establecida a priori, ver [11].*

1.1.1. Concepto de mercado

Definición 1.1.2 (Mercado) *Es el lugar, mecanismo o sistema donde se reúnen los compradores y vendedores para efectuar sus operaciones comerciales¹, ver [11].*

Definición 1.1.3 (Mercado eficiente) *Son mercados idealizados donde se supone que los precios actuales reflejan toda la información que pudiera influir en los eventos futuros, además, que los inversionistas reaccionan de forma inmediata a la llegada de nueva información, ver [9, 12].*

¹Actualmente con el progreso de las comunicaciones, los intercambios comerciales se han desprendido de la localización geográfica y se refiere más bien al conjunto de actos de compra y venta de un producto en un tiempo determinado [11].

La teoría que se va a manejar presupone que los mercados son eficientes, así como que los rendimientos del mercado de cualquier activo se distribuyen normalmente (o de forma gaussiana) y que todos ellos tienen los mismos horizontes de inversión².

Definición 1.1.4 (Mercado financiero) *Es el marco institucional que permite poner en contacto a oferentes y demandantes de fondos prestables (ahorro) para que efectúen sus transacciones financieras. La idea de mercado como foro o plaza organizada a la que habitualmente acuden los agentes económicos para efectuar sus transacciones ha quedado reducida en el mundo financiero a las bolsas de valores, ver [11].*

Cabe destacar que el mercado financiero aparte de la finalidad de poner en contacto a oferentes y demandantes, determina los “precios justos” de los diferentes activos financieros, así como que los costes de transacción sean los menores posibles. Aunque el objetivo siempre será encontrar un precio justo, no existe ningún mercado financiero que sea perfecto³, por lo que, nunca vamos a estar seguros que el precio de mercado refleja su valor justo, ver [12].

1.1.2. Obligaciones

Definición 1.1.5 (Obligación) *Es un título de crédito que corresponde a una fracción de un préstamo a largo plazo emitido por una empresa o por un Estado. La obligación es un valor reembolsable al fin de un período y aporta un interés fijo o variable a quién la compra.*

En un sentido jurídico, es una dependencia de carácter legal que obliga a una persona a hacer o no algo estipulado. Así, en el vínculo entre acreedor y deudor, el acreedor es el titular de un derecho que le permite exigir del otro que satisfaga su deuda mediante la prestación acordada, que el deudor tiene el deber jurídico de cumplir, ver [11].

²Claramente esta es una idealización de la realidad, pues existe evidencia empírica que los rendimientos en los mercados en general no se comportan de acuerdo a esta distribución, ver [9, 12].

³Mercado perfecto: Se refiere a que en el mercado existe gran cantidad de agentes que intervienen tanto por el lado de la oferta como de la demanda, de forma que nadie puede influir en la formación del precio del activo financiero. En estos mercados se considera que no existen costes de transacción, impuestos, variación del tipo de interés, ni inflación, y que no existan restricciones en la entrada ni a la salida del mercado financiero. También supone que existe perfecta información y que los activos son divisibles, ver [12, 9].

1.1.3. Acciones

Definición 1.1.6 (Acción) *es un título de propiedad sin vencimiento que refleja el valor de una empresa, pero también puede estar sujeta a movimientos especulativos. Normalmente, salvo excepciones, son transmisibles libremente. La acción es un valor en renta variable, pues depende de los beneficios obtenidos (dividendos⁴) por la empresa, ver [11].*

La diferencia entre una acción y un bono u obligación radica en que con la acción se es dueño de los activos de la empresa, mientras que en el caso de una obligación o bono solamente se adquiere o compra parte de la deuda de la empresa.

1.1.4. Arbitraje

Definición 1.1.7 (Arbitraje) *Es una estrategia de negociación que asegura utilidades libres de riesgo⁵ sin un capital inicial o bien la posibilidad de generar utilidades infinitas con una pequeña inversión inicial.*

Una de la hipótesis de mercados eficientes es suponer que no existen posibilidades de arbitraje. En un mercado libre de arbitraje cualquier portafolio sin riesgo debe tener rendimientos iguales la tasa libre de riesgo.

Teóricamente, no existen oportunidades de arbitraje, las actividades de los arbitrajistas⁶ dan lugar, ocasionalmente, a que se ajusten los precios hasta que no sea posible el arbitraje. Esto hace, en teoría, que no sea posible oportunidades de arbitraje en mercados de capitales que funcionan bien.

Desde el punto de vista económico, la existencia de oportunidades de arbitraje implica que la economía está en desequilibrio, que es una situación en la que los negociadores están insatisfechos con sus composiciones de cartera actuales, y que negocian. Su negociación obliga a cambiar los precios, moviéndose hacia un equilibrio económico. En este equilibrio los negociadores deben estar satisfechos con sus carteras, por lo que ya no existen oportunidades de arbitraje. De otro modo, continuarían negociando y los precios se ajustarían hasta que se desvanezca la motivación de negociación. En síntesis, si los precios se generan mediante un

⁴Dividendos: Es la cifra de dinero, fija o variable, que pagan los activos, la misma es cobrada por el propietario. El pago de dividendos altera el valor del activo, pues el compromiso de pago forma parte del mismo, lo que al hacerse efectivo el pago, el valor del activo baja, ver [11].

⁵Tasa libre de riesgo: Es un concepto teórico que asume una alternativa de inversión que no tiene riesgo y ofrece un rendimiento seguro para el inversionista, ver [12].

⁶Arbitrajista: Son personas que aprovechan las oportunidades de arbitraje, ver [12].

equilibrio económico, entonces no hay oportunidades de arbitraje en la economía, ver [9, 12, 26].

1.1.5. Rentabilidad, retorno y rendimiento

Estos tres conceptos comúnmente se confunden y aunque están estrechamente relacionados, tienen significados muy específicos y se debe tener cuidado al momento de utilizarlos

Definición 1.1.8 (Rendimiento) *Es una medida de beneficio o ingreso, la cual ignora la posibilidad de ganancias o pérdidas de capital inesperadas provenientes de cambios en los precios, ver [11].*

Definición 1.1.9 (Retorno) *Es una medida de beneficio o ingreso, (puede ser positiva o negativa), que a diferencia del rendimiento, toma en cuenta las pérdidas o ganancias de capital. El retorno al tiempo t se define por*

$$R_t = \ln \left(\frac{S_t}{S_0} \right)$$

donde S_t es el precio de una acción al tiempo t y S_0 es el precio inicial, ver [11].

Esta es una medida de ingreso más completa por lo que se la toma como base en el análisis de este trabajo.

Definición 1.1.10 (Rentabilidad) *Es un término usado, por lo general, para referirse a la tasa anual de rendimiento o retorno (expresada como porcentaje) sobre un instrumento financiero, ver [11].*

Se utiliza este término para hacer referencia al beneficio expresado en tanto por ciento de alguna magnitud económica.

1.1.6. Portafolio

Definición 1.1.11 *Un portafolio es una combinación de títulos o activos financieros de renta fija o variable que persigue siempre ser menos riesgosa que cualquier título o activo individual, ver [13].*

Capítulo 2

Probabilidades, procesos estocásticos y movimiento browniano.

En este capítulo se revisan conceptos básicos de probabilidad y procesos estocásticos, además se introduce la idea de proceso de Wiener o también llamado movimiento browniano dando su definición y propiedades.

2.1. Motivación

Desde el desarrollo del Cálculo Diferencial e Integral en el siglo XVII, efectuado por los dos grandes de ese siglo, Leibnitz y Newton, se sentó bases matemáticas fundamentales que han permitido un desarrollo acelerado de la Matemática Aplicada y su correspondiente relación con las distintas ramas de la Ingeniería. Uno de tales avances corresponde a la rama de las matemáticas que se denominan Ecuaciones Diferenciales. Muchos problemas de matemáticas aplicadas usan Ecuaciones Diferenciales tanto Ordinarias (EDOs) como parciales (EDPs). Por ejemplo el caso más simple, una EDO

$$(2.1) \quad dy = f(x, y) dt,$$

donde $f(x, y)$ es una función diferenciable en sentido clásico, frecuentemente se usa para modelar los efectos de cambio, movimiento o crecimiento, ver [3, 13]. En el caso de la variación de precios, por ejemplo, aplicado al sector financiero, podemos construir la evolución temporal determinista del precio de un activo financiero mediante:

$$\Delta S_t = \mu S_t \Delta t,$$

donde $S_t = S(t)$ ¹ denota el valor del activo financiero al tiempo t , $\Delta S_t = S_{t_f} - S_{t_0}$ y $\Delta t = t_f - t_0$ para un tiempo final t_f y un tiempo inicial t_0 , μ representa a la tasa de

¹Con respecto a esta notación: se usa indistintamente $S(t)$ o S_t , $\mu(t)$ o μ_t y sus similares, dependiendo de la comodidad para representar una ecuación. Se debe entender que si el parámetro t está como subíndice o si se encuentra entre paréntesis (t), lo que representa es una evaluación temporal en dicho tiempo.

rendimiento constante. Haciendo un paso al límite cuando $\Delta t \rightarrow 0$, queda un caso particular de (2.1)

$$dS_t = \mu S_t dt,$$

cuya solución es

$$S(t) = S(0)e^{\mu t}.$$

Si la tasa de rendimientos no es constante, es decir, μ depende de t , entonces la ecuación diferencial es

$$(2.2) \quad dS_t = \mu_t S_t dt,$$

cuya solución general es

$$S(t) = S(0)e^{\int_0^t \mu(s) ds}.$$

Ver [3, 10, 11].

El modelo de la expresión (2.1) a pesar de ser una buena aproximación de la realidad, no siempre es suficiente para explicar del todo el comportamiento real de un fenómeno. Desde el siglo pasado se han introducido modelos más precisos y sofisticados, con efectos aleatorios o estocásticos. Siendo la aleatoriedad en los sistemas la parte de mayor interés. La solución de tales problemas, comprende una nueva área en matemáticas, denominada Cálculo Estocástico y corresponde a una generalización estocástica del Cálculo Diferencial Clásico, ver [10, 13].

Agregando una perturbación aleatoria a (2.2) con un término estocástico $v(t, x)$, se tiene una ecuación diferencial estocástica (EDE) de la forma:

$$(2.3) \quad dS(t) = \mu(t)S(t)dt + v(t, x)S(t) dt.$$

donde $v(t, x)$ denota en general un proceso estocástico. De la necesidad de dar un sentido a una EDE del tipo (2.3) surge el Cálculo Estocástico, ver [10, 11, 13].

La solución a este problema no es trivial, notar que la expresión $v(t, x)S(t) dt$ no tiene sentido desde un punto de vista clásico, pues $v(t, x)$ es no diferenciable bajo los conceptos del Cálculo Clásico, para resolver este inconveniente se ha construido una extensa teoría que permite la manipulación de funciones de este tipo y situaciones relacionadas. La teoría base para ello es lo se ve en las siguientes páginas de este y el próximo capítulo.

2.2. Probabilidades

El desarrollo del pensamiento matemático y su historia es fascinante, basta solo una mirada al progreso de las distintas disciplinas para maravillarse con la concepción de ideas, conceptos, definiciones y sus posteriores generalizaciones que logran construir teorías cada vez más abstractas, permitiendo así un pensamiento más ligero y rápido en expresarse.

Estas ideas de construcciones y generalizaciones están presentes, por ejemplo, en la extensa teoría de integración. Hay que tomar en cuenta que las funciones que vamos a manejar son funciones de variación no acotada. Estas funciones presentan complicaciones técnicas para las cuales ha sido construida una vasta teoría, ver [11].

Cuando uno es estudiante, los primeros pasos son comprender conceptos como la derivación e integración en una variable, inmediatamente se presentan problemas más generales en más variables, introduciéndonos a los espacios de dimensión finita como \mathbb{R}^n . Luego pasamos a extenderlos a espacios de dimensión infinita. Aquí es donde nos moveremos, pero, para trabajar aquí hay que entender partes fundamentales de la teoría como son: medida, espacio de probabilidad, variables aleatorias, procesos estocásticos, filtraciones, en fin, una serie de ideas. Nadie puede preciarse de tener un conocimiento profundo de ciertos temas financieros, como es el comportamiento de acciones, si no ha estudiado estos conceptos fundamentales del cálculo estocástico.

Comencemos en primer lugar por construir un espacio de probabilidad, para esto necesitamos de una estructura matemática que nos proporcione las características adecuadas y nos garantice conjuntos a los que les podremos asignar una medida.² Estas estructuras matemáticas son conocidas como σ -álgebras y esos conjuntos son llamados conjuntos \mathcal{F} -medibles.

Definición 2.2.1 (σ -álgebra) Sea Ω un conjunto no vacío, una σ -álgebra (o tribu) \mathcal{F} sobre Ω es una familia no vacía de subconjuntos de Ω tales que:

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$,
2. Si $A \in \mathcal{F}$ entonces $A^C \in \mathcal{F}$,

²La primera intervención de una medida sobre un espacio de sucesiones tiene lugar en el trabajo de Borel de 1909, ver [3]. El concepto de medida $\mu(A)$ de un conjunto es una generalización de conceptos como: longitud de un segmento, área de un figura plana, volumen de una figura, incremento de una función no decreciente definida sobre un segmento y de la integral de una función no negativa en una región, ver [18]

3. Si A_1, A_2, \dots es una sucesión de elementos de \mathcal{F} entonces

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}.$$

La pareja (Ω, \mathcal{F}) es llamada **espacio medible** y a los elementos de la σ -álgebra se los conoce como **conjuntos \mathcal{F} -medibles**, ver [2, 18]³.

Un caso particular muy importante de espacio medible es $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ con

$$(\Omega = \mathbb{R}, \mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R})).$$

A $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ se le llama σ -álgebra de Borel y es la σ -álgebra más pequeña que contiene a todos los intervalos abiertos de \mathbb{R} . A los elementos de la σ -álgebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ se les llama *Borelianos* o *conjuntos Borel medibles*.

En la terminología propia del cálculo de probabilidades al conjunto Ω se lo puede interpretar como el conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio, y se lo llama *espacio muestral*. A cada elemento $\omega \in \Omega$ se lo llama evento elemental o resultado. A los elementos de la σ -álgebra \mathcal{F} , es decir, los subconjuntos de Ω se lo llama eventos o sucesos.

2.2.1. Variable aleatoria

Para caracterizar un experimento aleatorio y las leyes del azar que están asociadas a él, existen distintas medidas de probabilidad. Un puente que nos permite ver a los resultados $\omega \in \Omega$ de un experimento aleatorio como números reales son las variables aleatorias (v.a.s). De manera general se tiene la siguiente definición

Definición 2.2.2 (función \mathcal{F} -medible) Sean (Ω, \mathcal{F}) y (E, \mathcal{E}) dos espacios medibles. A la aplicación

$$\begin{aligned} Y : (\Omega, \mathcal{F}) &\rightarrow (E, \mathcal{E}) \\ w \in \Omega &\mapsto Y(w) \in E \end{aligned}$$

se le llama \mathcal{F} -medible si

$$Y^{-1}(A) \in \mathcal{F}, \quad \forall A \in \mathcal{E},$$

Definición 2.2.3 (Variable aleatoria (v.a.)) Una función X definida sobre un espacio medible (Ω, \mathcal{F}) que toma valores en (E, \mathcal{E})

$$X : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (E, \mathcal{E})$$

es una variable aleatoria, si X es medible.

³Se puede profundizar más en esta teoría también en [7, 8, 15, 27].

Casos particulares son las funciones medibles y las variables aleatorias cuando el espacio medible E es los reales \mathbb{R} . En este caso se tiene que los valores de la variable aleatoria son números reales, es decir

$$X : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})).$$

A menos que se diga lo contrario, se tomará a \mathbb{R} como el conjunto medible y a las variables aleatorias sobre este espacio. Se puede construir una σ -álgebra $\mathcal{F}_X = \sigma(X) = \mathcal{F}(X)$ sobre Ω asociada a una variable aleatoria X mediante⁴

$$\sigma(X) = \mathcal{F}_X = \{X^{-1}(A), A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\} \subset \mathcal{F},$$

Esta σ -álgebra es muy importante y se menciona seguido por lo que hay que tenerla presente.

Una vez construido un espacio medible, le asignamos una medida. En este trabajo el interés está en la medida⁵ de probabilidad que nos dará información sobre la frecuencia de observación de un evento al realizar un experimento aleatorio.

Definición 2.2.4 (Medida de probabilidad) *Sea (Ω, \mathcal{F}) un espacio medible. Una medida de probabilidad P sobre este espacio, es una función de conjuntos*

$$P : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow [0, 1],$$

tal que

1. $0 \leq P(A) \leq 1, \quad \forall A \in \mathcal{F},$
2. $P(\Omega) = 1,$
3. *Si A_1, A_2, \dots es una sucesión de elementos de \mathcal{F} disjuntos dos a dos, es decir,*

$$A_i \cap A_j = \emptyset, \quad i \neq j,$$

entonces

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

*Esta propiedad se la conoce como σ -aditividad.*⁶

⁴Véase más detalles en [11, 18, 27, 33].

⁵Existen una infinidad de medidas, entre las más importantes tenemos: la medida interior, la medida exterior, la medida de Lebesgue, la medida de Haar, la medida de Itô, entre otras.

⁶Estos axiomas fueron establecidos en 1933 por A. Kolmogorov y la construcción completa de la medida de Lebesgue se puede ver en [18].

A la terna (Ω, \mathcal{F}, P) se le conoce como **espacio de probabilidad**. Un evento $A \in \mathcal{F}$ se dice que es *casi seguro* (c.s) si su probabilidad es igual a 1 ($P(A) = 1$) y se dice que es de *medida nula* si la probabilidad es igual a cero ($P(A) = 0$).

Un espacio de probabilidades es llamado *completo* si para cada subconjunto de un conjunto de medida nula ($P(N) = 0$), este pertenece a la σ -álgebra \mathcal{F} y tiene probabilidad cero, es decir:

$$N \in \mathcal{F}, \quad A \subset N \Rightarrow A \in \mathcal{F} \quad y \quad P(A) = 0.$$

Ésta y más información se puede ver en [11, 18]. Es importante destacar el papel que juega una variable aleatoria X . Por ejemplo, si tenemos el espacio medible $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ lo que hará la variable aleatoria X es convertirlo en un espacio de probabilidades, es decir introduce una probabilidad. La importancia de esto es que al definir esta probabilidad sobre \mathbb{R} podemos trabajar de una manera más cómoda que con el espacio Ω , ver [33]. Para ser claros, lo que hace es tomar un conjunto $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ y define la medida de probabilidad $P_X = P \circ X^{-1}$ sobre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ mediante

$$P_X(B) = P(X^{-1}(B)) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}),$$

que por abuso notación se lo suele escribir como

$$P_X(B) = P(X \in B) = P(X^{-1}(B)).$$

A esta se le llama también **distribución** de X o **ley** de X , y encierra en ella toda la información probabilista de X . De manera equivalente puede estudiarse la **función de distribución** de X definida por

$$\begin{aligned} F_X : \mathbb{R} &\longrightarrow [0, 1] \\ x &\rightarrow F_X(x) = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \\ &= P_X([-\infty, x]) \end{aligned}$$

para cualquier número real x , ver [11].

Por ejemplo, la variable aleatoria X tiene una distribución normal o gaussiana $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ con parámetros $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma^2 \in (0, +\infty[$ si su función de distribución es

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt.$$

Una variable aleatoria es **continua** si su función de distribución es continua. Una variable aleatoria se dice que es **absolutamente continua** si su función de distribución es absolutamente continua, podemos escribir:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt.$$

La función f_X se llama **función de densidad** y debe cumplir con las siguientes condiciones:

- $f_X(t) \geq 0$ para todo t ,
- $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(t) dt = 1$

Mencionamos nuevamente, una v.a. además define una σ -álgebra, llamada σ -álgebra generada por X de la siguiente manera

$$\sigma(X) = \mathcal{F}(X) = \{X^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\} \subset \mathcal{F}.$$

Es bueno tener este concepto en mente pues nos ayudará en la definición y comprensión de filtraciones. Para conocimientos más profundos se puede revisar [21, 18, 27].

Otros conceptos importantes son: la esperanza, la varianza y la esperanza condicional de una v.a. X . La esperanza matemática está definida como:

$$E[X] := \int_{\Omega} X(\omega) dP(\omega),$$

si esta integral existe. Se define la varianza de X por

$$Var[X] := \int_{\Omega} (X(\omega) - E[X(\omega)])^2 dP(\omega),$$

o de manera general

$$Var[X] := \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X])^2 \cdot dF_X(x),$$

Para la distribución normal mencionada antes puede demostrarse que $E[X] = \mu$ y que $Var[X] = \sigma^2$.

La esperanza condicional es muy utilizada en el concepto de martingalas que se revisará posteriormente.

Definición 2.2.5 (Probabilidad condicional) Sean (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidades, \mathcal{A} una sub σ -álgebra de \mathcal{F} y X una variable aleatoria de esperanza matemática finita. Se llama esperanza condicional de X con respecto a \mathcal{A} , a toda variable aleatoria Y \mathcal{A} -medible tal que

$$(2.4) \quad \int_A X(\omega) dP(\omega) = \int_A Y(\omega) dP(\omega), \quad \forall A \in \mathcal{A}.$$

La esperanza condicional es una variable aleatoria, no como es el caso de la esperanza matemática que es un real y se nota⁷

$$Y = E[X/\mathcal{A}].$$

⁷Para más detalles ver [7, 11, 15, 18, 27, 33].

Es decir,

$$\int_A X dP = \int_A E[X/\mathcal{A}] dP = \int_A Y dP \quad \forall A \in \mathcal{A}.$$

2.3. Procesos estocásticos

El siguiente concepto de interés es el de proceso estocástico.

Definición 2.3.1 (Proceso estocástico) Sea T un conjunto de índices⁸ en el cual el parámetro t toma valores. A la familia de variables aleatorias $(X_t)_{t \in T}$ definidas todas en un mismo espacio de probabilidades (Ω, \mathcal{F}, P) y con valores en un mismo espacio medible (E, \mathcal{E}) , llamaremos proceso estocástico sobre Ω a valores en E .

Un proceso estocástico representa la evolución aleatoria de un sistema a lo largo del tiempo. Para aclarar un poco, un proceso estocástico es entonces una función de dos variables, (ver [2]) tal que

$$\begin{aligned} X(t, \omega) : T \times \Omega &\longrightarrow E \\ (t, \omega) &\mapsto X(t, \omega). \end{aligned}$$

Un proceso estocástico se dice a valores reales, si el espacio sobre el cual toma valores es \mathbb{R}

$$(2.5) \quad \begin{aligned} X(t, \omega) : T \times \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, \omega) &\mapsto X(t, \omega). \end{aligned}$$

A menos que se diga lo contrario se trabaja con procesos estocásticos como (2.5) Para un proceso (2.5) si tomamos $\omega \in \Omega$ fijo, la función

$$\begin{aligned} X_\omega : T &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto X_\omega(t) = X(t, \omega) \end{aligned}$$

es una trayectoria, llamada *trayectoria del proceso* y para cada t fijo, la función

$$\begin{aligned} X_t : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\mapsto X_t(\omega) = X(t, \omega) \end{aligned}$$

es una v.a. llamada *ley o distribución del proceso*. Por simplicidad notaremos a un proceso estocástico por $\{X_t\}_{t \in T}$ o dependiendo de la comodidad en la notación se escribirá tan solo X_t o en su defecto $\{X(t, \omega), t \in T, \omega \in \Omega\}$.

⁸A este conjunto generalmente se lo asocia con el tiempo, puede ser un conjunto finito, números naturales \mathbb{N} (tiempo discreto), un intervalo, o números reales positivos \mathbb{R}^+ (tiempo continuo).

2.3.1. Clases de procesos estocásticos

Se caracterizan diversas clases particulares de procesos según las propiedades de sus trayectorias o de la distribución del proceso.

Proceso estocástico a tiempo discreto: donde el valor de la variable puede cambiar sólo en algunos puntos definidos del tiempo.

Proceso estocástico a tiempo continuo: es aquel donde los cambios pueden tener lugar en cualquier instante de tiempo.

Procesos de variables continuas: los valores que pueden tomar las variables están definidos por un rango.

Procesos de variables discretas: se definen una gama de valores posibles, los cuales quedan fijos durante todo el proceso.

Esta definición así como más propiedades sobre procesos pueden verse en [2, 27, 33].

Definición 2.3.2 (Proceso estocástico con incrementos independientes) *Un proceso estocástico $\{X_t\}_{t \in T}$ tiene incrementos independientes si para todo $t_1 \leq \dots \leq t_n$ con $\{t_1, \dots, t_n\} \subset T$, las variables aleatorias*

$$X(t_1), (X(t_2) - X(t_1)), \dots, (X(t_n) - X(t_{n-1}))$$

son independientes, ver [11].

Definición 2.3.3 (Proceso estocástico con incrementos estacionarios) *Un proceso estocástico $\{X_t\}_{t \in T}$ tiene incrementos estacionarios si las variables aleatorias $X(t+h) - X(t)$ y $X(h)$ son idénticamente distribuidas, ver [11].*

Definición 2.3.4 (Proceso Gaussiano) *X_t es un proceso gaussiano si y sólo si cualquier combinación lineal finita de valores de X_t a diferentes instantes sigue una distribución normal.*

$$\xi = \sum_{k=1}^n \alpha_k X(t_k) \rightsquigarrow N.$$

ver [11].

Definición 2.3.5 (Proceso creciente) *Un proceso adaptado $\{X_t\}_{t \in T}$ se dice creciente si sus trayectorias son funciones crecientes, finitas y continuas a la derecha.*

Definición 2.3.6 (Proceso con variación finita) *Un proceso adaptado $\{X_t\}_{t \in T}$ es de variación finita si sus trayectorias son funciones de variación acotada sobre un compacto, finita y continua a la derecha, ver [11].*

Una propiedad interesante es que cualquier proceso de variación finita es la diferencia entre dos procesos crecientes.

Definición 2.3.7 (Proceso de Markov) *Un proceso estocástico $(M_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ es un proceso de Markov si para $0 < s < t$ se tiene que*

$$(2.6) \quad P(X_t \in A / \mathcal{F}_s) = P(X_t \in A / X_s),$$

es decir, el comportamiento futuro (tiempo t) del proceso, dada la historia del mismo hasta el tiempo s , no depende del pasado remoto (tiempo antes de s) sino únicamente del pasado inmediato (tiempo s). En otras palabras (2.6) establece que el estado del proceso al tiempo futuro $t > s$ es independiente del pasado (tiempos antes de s) dado el estado del proceso al tiempo presente $s \geq 0$.

2.3.2. Filtración

Revisamos a continuación algunos conceptos generales, pero muy importantes, relativos a procesos estocásticos que son necesarios para considerar la dependencia de la información cuando ésta llega al mercado y a sus participantes en los mercados eficientes. Para formalizar convenientemente el concepto de información, partimos de la hipótesis que la incertidumbre en el mercado se puede describir como la aleatoriedad, la misma que es expresada en el contexto de cierto espacio de probabilidad, ver [5, 11]. Entonces para representar una corriente creciente de información en este espacio de probabilidades lo debemos dotar de una filtración.

Definición 2.3.8 (Filtración) ⁹ *Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidades. Una filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ es una familia de sub σ -álgebras crecientes contenidas en \mathcal{F} , es decir, si para $0 \leq s \leq t$ se tiene que:*

$$\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}.$$

con $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \phi\}$.

A $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t\})$ se le llama **espacio de probabilidad filtrado**, ver [5, 11, 15].

⁹Básicamente la idea de filtro, consiste en obtener la mejor información posible sobre el valor de una variable, teniendo en cuenta las observaciones que se relacionan con ella.

Dada una filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$, podemos pensar que \mathcal{F}_t representa toda la información disponible al tiempo t . Así, una filtración nos permitirá estudiar de manera más profunda cómo evolucionan los procesos estocásticos en la variable temporal, ver [11, 27].

Los procesos estocásticos y las filtraciones unidos generan dos conceptos

Definición 2.3.9 (Filtración natural) Sea $(X_t)_{t \in T}$ un proceso estocástico, entonces

$$\mathcal{F}_X := \sigma(X(s) : 0 \leq s \leq t) \quad \forall t,$$

o con otra notación

$$\mathcal{F}_X := \mathcal{F}(X(s) : 0 \leq s \leq t) \quad \forall t,$$

genera una filtración sobre el espacio de probabilidades (Ω, \mathcal{F}, P) y es llamada **filtración natural**

Es decir, todo proceso estocástico genera una filtración llamada filtración natural. Este concepto se lo asocia con la historia del proceso, ver [11, 27].

Definición 2.3.10 (Proceso adaptado) Un proceso $(X_t)_{t \in T}$ es adaptado a una filtración si para todo t , X_t es \mathcal{F} -medible.

La idea de esta definición es que, si X_t es un proceso adaptado a $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$, entonces para cada $t \geq 0$, la variable aleatoria X_t depende sólo de la información contenida en \mathcal{F}_t . Claramente todo proceso estocástico es adaptado a su filtración natural, ver [11, 27].

Por ejemplo, si el precio de una acción está representado por el proceso estocástico $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ y tenemos una cierta cantidad de esas acciones, si queremos vender dichas acciones en algún instante en el intervalo $[0, t]$, entonces, las ganancias serán un proceso estocástico adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_S\}_{t \geq 0}$, ver, [26].

Definición 2.3.11 Una filtración $\{\mathcal{F}\}_{t \geq 0}$ se dice que satisface las condiciones habituales si

1. el espacio (Ω, \mathcal{F}, P) es completo; es decir, los espacios de medida nula pertenecen a \mathcal{F}_0
2. y la filtración es continua a la derecha

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+} = \bigcap_{s > t} \mathcal{F}_s, \quad (t \geq 0).$$

2.3.3. Martingalas

El movimiento browniano es parte de una familia de procesos estocásticos conocida como martingalas a tiempo continuo, que definimos a continuación, ver [7].

Definición 2.3.12 (Martingala) Sea $(M_t)_{t \in T}$ un proceso estocástico definido sobre un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) , sea $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}$ una filtración, se dice que $(M_t)_{t \in T}$ es una martingala a tiempo continuo con respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}$, notada por $\{M_t, \mathcal{F}_t\}_{t \in T}$ si cumple con:

- $(M_t)_{t \in T}$ es integrable

$$E[M_t] = < \infty,$$

- $(M_t)_{t \in T}$ es adaptada a la filtración, es decir, para todo $t \in T$, M_t es \mathcal{F}_t -medible,
- y si para todo $0 \leq t \leq s$

$$E[M_s / \mathcal{F}_t] = M_t.$$

Si $E[M_s / \mathcal{F}_t] \geq M_t$ se dice que es una sub-martingala y si $E[M_s / \mathcal{F}_t] \leq M_t$ se dice que es una super-martingala.

Con el concepto de juego justo, en particular, se tiene:

$$E[M(t)] = M(0).$$

Intuitivamente hablando, una martingala es un proceso estocástico tal que la mejor predicción que se puede hacer de él, dada cierta información disponible, es simplemente, el valor actual observado, ver [11, 27, 33]. Con estas definiciones, estamos ya en condiciones de introducir formalmente el concepto de movimiento browniano.

2.4. Movimiento browniano/ proceso de Wiener

2.4.1. Un poco de historia

El azar, esa pequeña palabra que ha generado todo un campo de estudio desde los tiempos del gran Gauss, pertenece casi enteramente al campo de la probabilidad pero con el tiempo se ha combinado con otras ramas del conocimiento como la Estadística, la Geometría, la Topología, el Análisis Funcional, las Ecuaciones Diferenciales, la Física, la Economía, las Finanzas, y actualmente forma

parte del estudio de la Astronomía, la Física Estadística, la Teoría de Turbulencia, en fin, no es nuestra intención dar un listado de las aplicaciones que puede tener esta palabra a lo largo de la ciencia, sino más bien dar un pequeño homenaje a quienes han contribuido al conocimiento del comportamiento del movimiento browniano.

Todos hemos observado en algún momento un movimiento browniano, este fenómeno está presente por ejemplo, al observar como se agita cualquier pequeña partícula en suspensión en un fluido. El primer registro, aunque no así la primera observación del fenómeno data del año 1828, cuando el botánico inglés Robert Brown, publicó en una revista científica que granos de polen suspendidos en una cierta substancia y vistos a través de un microscopio, realizaban un movimiento irregular e inexplicable, ver [28].

Posteriormente, el matemático Louis Bachelier, discípulo de Poincaré, alumno de la universidad de la Sorbonne, en su tesis doctoral *La teoría de la especulación* [4], publicada en 1900, introduce el movimiento browniano para modelar la dinámica de los precios de las acciones en la Bolsa. Este estudio lo hace de forma independiente al de Brown y su modelo es en base a un movimiento browniano aditivo

$$(2.7) \quad S_t = S_0 + \mu t + \sigma W_t, \quad t > 0.$$

Posteriormente Black y Scholes en 1973 proponen su modelo basado en un movimiento browniano geométrico del tipo

$$(2.8) \quad S_t = S_0 + \mu S_t + \sigma W_t$$

que proporciona el precio de un activo financiero, en el caso que este no reparta dividendos.

Cabe destacar que el trabajo de Bachelier desafortunadamente fue ignorado por largo tiempo debido a un supuesto error. La observación de este supuesto error la hizo el matemático, ya famoso en esa época Paul Lévy, pero no se trataba de un error, sino fue en realidad una incomprensión en la notación usada por Bachelier. Este feo descuido hizo que los trabajos de Bachelier fueran ignorados. Estos y más detalles nos cuenta Mandelbrot en su libro [22].

En 1905 Albert Einstein construye un modelo probabilista para una partícula en difusión, él encuentra la ley de probabilidad para la posición de tal partícula. Este argumento acabó con la resistencia a la teoría atomista que en aquella época existía. Los principales defensores de la teoría atomista fueron J. Clerk Maxwell y Ludwig Boltzmann, los mismos que fueron criticados por destacados científicos de

la época, como Ernst Mach y Wilhelm Ostwald. Se cree que este rechazo fue una de las causas de la depresión que acabó en el suicidio de Boltzmann en 1906.

Otras aportaciones sobre el carácter poco usual de las trayectorias que seguían las partículas de polen al entrar en contacto con el agua, la hizo en 1909, Jean Perrin. De hecho, los aportes de Einstein y Perrin merecieron del premio Nobel, cada uno independientemente, por haber demostrado la naturaleza atómica de la materia.

La definición matemática de movimiento browniano la dio el matemático americano Norbert Wiener en la década de los 20, en su trabajo sobre el modelo probabilista del movimiento browniano. A él le debemos el famoso término: *caos*, palabra que usaba para denominar una forma extrema del desorden natural. Wiener introdujo los fundamentos matemáticos del movimiento browniano, luego Paul Lévy estudió sus propiedades analíticas y finalmente en el año 1950 se consagran estos estudios con el desarrollo del cálculo estocástico realizado por Kiyoshi Itô desde 1940.

Hoy en día, el movimiento browniano es entendido y explicado como las múltiples colisiones aleatorias de las moléculas del líquido con los granos de polen. Para llegar a esta aseveración pasaron muchos años y debió aceptarse la teoría cinético molecular de la materia, y el trabajo de Einstein de 1905 sobre el movimiento browniano contribuyó a ello. Actualmente su rango de aplicaciones es mucho más amplio y es utilizado para modelar precios de acciones, ruidos térmicos en circuitos eléctricos, ciertos comportamientos límite en sistemas de filas e inventarios y perturbaciones aleatorias en una variedad de otros sistemas físicos, biológicos y económicos.

2.4.2. No diferencibilidad del movimiento browniano

La trayectoria que sigue esta partícula dibuja una curva continua, pero no diferenciable en ningún punto, en palabras simples, esta curva no admite el trazo de una recta tangente en ningún punto¹⁰. Para los aficionados a los fractales, la trayectoria del movimiento browniano es uno de los más simples entre los fractales y tiene dimensión Hausdorff $D=2$ (una gran sorpresa al tratarse de una curva no creen?), ver [22].¹¹

¹⁰Topológicamente es una curva convexa de dimensión superior a uno no rectificable, pertenece a los espacios funcionales conocidos como espacios de Holder, ver [22]

¹¹Dimensión Hausdorff (1919) extiende la idea de dimensión euclidiana a dimensiones fraccionarias e irracionales

Casi todas las trayectorias de un movimiento browniano sobre un intervalo de tiempo finito $[a, b]$ tienen variación no acotada, es decir:

$$\sup_{a=t_0 < \dots < t_n = b} \sum_{i=1}^{n-1} |W_{t_{i+1}} - W_{t_i}| = \infty$$

donde \mathbb{P} es una partición $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$. Esta propiedad es importante pues tiene como consecuencia el hecho que no se pueden usar las trayectorias brownianas como integradores en el sentido de Riemann-Stieltjes. Por otro lado puede demostrarse¹² que la variación cuadrática sobre $[a, b]$ es

$$\sup_{a=t_0 < \dots < t_n = b} \sum_{i=1}^{n-1} |W_{t_{i+1}} - W_{t_i}|^2 = b - a$$

Cabe recordar que las funciones suaves (sin excesivas irregularidades) son funciones de variación acotada. Una función de variación acotada sólo puede tener un conjunto numerable de discontinuidades de salto. Como ya se había mencionado anteriormente, una propiedad importante de toda función de variación acotada es que puede descomponerse como diferencia de dos funciones monótonas (bien ambas crecientes o bien ambas decrecientes). Es importante recordar además que, no siempre una función continua es de variación acotada, por ejemplo, la función $x \operatorname{sen}(1/x)$ a pesar de ser continua presenta una serie de oscilaciones que la hacen inestable y de variación no acotada.

2.4.3. Movimiento browniano

Definición 2.4.1 (Movimiento browniano/Proceso de Wiener) Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidades dotado de la filtración $\{\mathcal{F}\}_t, t \geq 0$, es decir, una familia de sub σ -álgebras de \mathcal{F} . El proceso estocástico $W(t, w)$ con $t \geq 0$ y $w \in \Omega$ es un movimiento browniano estándar o proceso de Wiener si y solo si¹³

¹²Para ver los detalles se puede consultar [2].

¹³Existen varias versiones de esta definición pero se tomó la definición de [11]

► El proceso comienza en cero casi todo punto (c.t.p.)

$$W(0) = 0$$

► Los incrementos sobre los intervalos disjuntos son independientes y estacionarios

$$0 \leq s < t < u < v \leq T$$

$$W(t) - W(s) \text{ y}$$

$$W(v) - W(u) \text{ v.a.i.}$$

► Los incrementos tiene una distribución normal si $s < t$

$$W(t) - W(s) \rightsquigarrow \mathcal{N}(0; t - s).$$

► Y para todo $t \geq 0$

$$E[W(t)] = 0$$

$$\text{Var}[W(t)] = t$$

El movimiento browniano está adaptado a una filtración $\{\mathcal{F}_t\}$ si $W(t)$ es una variable aleatoria \mathcal{F}_t -medible para todo $t \geq 0$. Suponiendo que $\forall t, s > 0, W(t+s) - W(t)$ es independiente de \mathcal{F}_t .

En un movimiento browniano sus trayectorias casi seguramente serán de variación no acotada, en particular, casi todas las trayectorias son no diferenciables en casi todo punto, ver [11].

El código en Matlab del Apéndice C.1 produce el movimiento browniano de la Figura 2.1

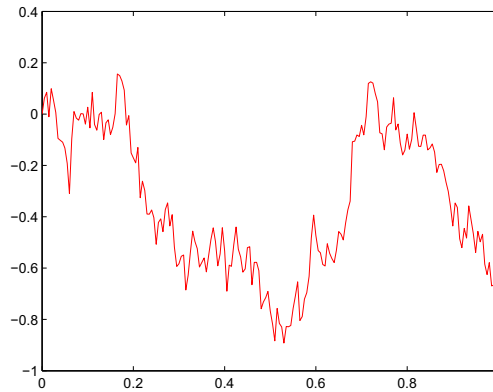


Figura 2.1: Movimiento browniano

2.4.4. Martingalas y el movimiento browniano

Proposición 2.4.1 Sea $(W_t)_{t \geq 0}$ un movimiento browniano estándar y sea $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ una filtración natural, entonces los dos siguientes procesos son martingalas

1. $W(t)$,
2. $W^2(t) - t$,

$W(t)$, es una martingala, pues es adaptado a una filtración natural y cada variable aleatoria es integrable

En efecto, sea $0 \leq t \leq s$

$$E[W(t)/\mathcal{F}_s] = E[W(s) + (W(t) - W(s))/\mathcal{F}_s] = W(s)$$

y

$$E[(W^2(t) - t)/\mathcal{F}_s] = E[W^2(s) + (W^2(t) - W^2(s))/\mathcal{F}_s] - t$$

$$E[(W(t) - W(s))^2/\mathcal{F}_s] = E[(W^2(t) - W^2(s)) + 2W(s)(W(t) - W(s))/\mathcal{F}_s]$$

de donde

$$E[W^2(t) - t/\mathcal{F}_s] = W^2(s) - s.$$

El recíproco de la Proposición (2.4.1) es cierto, si $(X_t)_{t \leq 0}$ es un proceso continuo tal que X_t y $X^2(t) - t$ son martingalas y $X(0) = 0$. Entonces $(X_t)_{t \leq 0}$ es un movimiento browniano estándar. El movimiento browniano es el ejemplo fundamental de martingala continua, ver [11].

2.4.5. Movimiento browniano y variación acotada

Sea $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$

$$E \left[\sum_{i=1}^n (\Delta W(t_i))^2 \right] = \sum_{i=1}^n \Delta t_i = t$$

Por otra parte, si f es una función determinista a variación acotada entonces por definición de la integral de Stieltjes se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (\Delta f(t_i)) = \int_0^t df = f(t) - f(0),$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (\Delta f(t_i))^2 = 0.$$

Pero el movimiento browniano no es de variación acotada, es decir, sus trayectorias sobre todo intervalo finito no son de variación acotada. Las trayectorias de un movimiento browniano no son funciones diferenciables y el diferencial $dW(t)$ no tiene sentido clásico, ver [11].

Capítulo 3

Cálculo estocástico

Este capítulo está dedicado a la construcción de la integral de Itô y al concepto de integral estocástica que es fundamental para la solución de una EDE. Además se revisa las condiciones para la existencia y unicidad de soluciones.

3.1. Integral estocástica

3.1.1. Motivación

Itô fue quien desarrolló el cálculo estocástico. En su trabajo de 1947 introduce la idea de integral estocástica. Las integrales estocásticas son generalizaciones de las integrales estudiadas en el cálculo elemental. Como se ha visto la diferencial dW_t no tiene sentido para el cálculo clásico pero es usada por su notación cómoda. Pero hay siempre que tomar en cuenta que no se está diferenciando. En contraste, lo que se hace es dar sentido a la expresión aleatoria:

$$(3.1) \quad \int_0^t dW(s),$$

mediante la definición de la expresión anterior (3.1) como el valor $W(t) - W(0)$ que se obtiene mediante sumas de Riemann, es decir:

$$W(t) - W(0) = \int_0^t dW(s),$$

De manera general, si se tiene una función (proceso estocástico) de variación acotada $X(t)$ y se quiere integrar con respecto a $W(t)$ que es una función (proceso) continua, se define

$$\int_0^t X(s) dW(s),$$

mediante sumas de Riemann para cada w . O equivalentemente

$$W(t)X(t) - W(0)X(0) = \int_0^t W(s) dX(s),$$

tomando esta última integral en sentido Riemann-Stieljes. Se puede hacer cuando todo va bien con los requisitos de regularidad para integrales Riemann-Stieljes, es decir, no siempre es el caso.

En las siguientes páginas, se describe las técnicas para el caso general donde intervienen procesos estocásticos en el argumento de la integral. Veremos como se integran procesos estocásticos como es el caso de un movimiento browniano que no sólo no tiene sentido clásico en forma diferencial, sino que tampoco lo tiene en forma integral.

3.1.2. Construcción de la integral de Itô

Lo primero que se debe hacer es comenzar por funciones básicas, similar a como se construye la integral en el cálculo clásico. Se comienza entonces definiendo integrales para las funciones características o indicatrices, seguido de la definición para las funciones simples o escalonadas y luego para las más complejas. Entonces la integral estocástica para una función indicadora $X(t, \omega) = \mathbb{1}_{[a,b]}(t)$ se define como

Definición 3.1.1 (Integral para la función indicatriz) Sea $X(t, \omega) = \mathbb{1}_{[a,b]}(t)$ la integral estocástica esta definida por

$$\int_0^t X(s) dW(s, \omega) = \begin{cases} 0, & \text{si } t \leq a; \\ W(t) - W(a), & \text{si } a \leq t \leq b; \\ W(b) - W(a), & \text{si } t > b. \end{cases}$$

Un proceso estocástico X_t se dice que es *escalonado* en $[a, b]$ si para un conjunto de constantes c_0, c_1, \dots, c_n se tiene que

$$(3.2) \quad X(t) = \sum_{i=1}^n c_i \mathbb{1}_{[a_i, b_i]}(t).$$

La integral estocástica para este tipo de funciones se define como

Definición 3.1.2 (Integral estocástica para una función escalonada) Sea X como en (3.2) entonces la integral estocástica a la variable aleatoria definida por:

$$(3.3) \quad \int_0^t X(s) dW(s) = \sum_{i=1}^n c_i \int_0^t \mathbb{1}_{[a_i, b_i]}(s) dW(s),$$

ver, [26, 11]

Un proceso estocástico X_t se dice que es *simple* si

- Existe $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$.
- Para toda k la variable aleatoria X_k es \mathcal{F}_{t_k} -medible

- Existe K tal que para todo k y todo w $|X_k| < K$,

tal que

$$(3.4) \quad Y(t, w) = X_0(w)\mathbb{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{i=1}^n X_i(w)\mathbb{1}_{]t_i, t_{i+1}[}(t).$$

Definición 3.1.3 Sea Y como en (3.4) entonces si $t_k \leq t \leq t_{k+1}$ la integral estocástica es la variable aleatoria definida por:

$$(3.5) \quad \mathbf{I}_t(Y) = \int_0^t Y dW = \sum_{i=0}^{k-1} X_i(W(t_{i+1}) - W(t_i)) + X_k(W(t) - W(t_k)).$$

$$\mathbf{I}_0(0) = 0.$$

Este operador es aditivo, es decir, se cumple que

$$\mathbf{I}_t(aX_1 + bX_2) = a\mathbf{I}_t(X_1) + b\mathbf{I}_t(X_2)$$

La integral estocástica cumple con las dos siguientes propiedades

Proposición 3.1.1 (Propiedad de martingala) El proceso integral indefinida es una martingala

$$E[\mathbf{I}_t(X)/\mathcal{F}] = \mathbf{I}_s(X), \quad (0 < s < t)$$

En particular

$$E[\mathbf{I}_t(X)] = 0$$

La demostración está descrita en [11].

Proposición 3.1.2 (Propiedad de momento de orden 2)

$$(3.6) \quad E[(\mathbf{I}_t(X))^2] = E \left[\int_0^t X^2(s) ds \right]$$

En efecto

$$\begin{aligned} & E \left[\left(\sum_{i=0}^{k-1} X_i(W(t_{i+1}) - W(t_i)) + X_k(W(t) - W(t_k)) \right)^2 \right] \\ &= E \left[\sum_{i=0}^{k-1} X_i^2(W(t_{i+1}) - W(t_i))^2 + X_k^2(W(t) - W(t_k))^2 \right] \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} E[X_i^2(t_{i+1} - t_i)] + E[(X_k^2)(t - t_k)] \\ &= \int_0^t (E[X(s)]^2 ds) = E \left(\int_0^t X^2(s) ds \right) \end{aligned}$$

Definición 3.1.4 (Proceso cuadrado integrable) $\{X_t\}_{t \in T}$ es un proceso cuadrado integrable en $[0, T]$ si

▪ $\{X_t\}_{t \in T}$ es un proceso adaptado a una filtración

▪ y

$$E \left[\int_0^T X^2(s) ds \right] < \infty$$

Si ocurre lo anterior, se dice que el proceso $\{X_t\}_{t \in T}$ pertenece al espacio $\mathbb{L}^2[0, T]$, que es el espacio de procesos estocásticos cuadrado integrables.

Proposición 3.1.3 Si $\{X_t\}_{t \in T}$ es un proceso cuadrado integrable entonces existe una sucesión $\{X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(n)}\} \in \mathbb{L}^2([0, T])$ de procesos simples tales que¹

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\int_0^T (X^{(n)}(s) - X(s))^2 ds \right] = 0,$$

definiendo la integral

$$(3.7) \quad \mathbf{I}_t(X^{(i)}) = \int_0^t (X^{(i)})(s) dW(s),$$

para procesos simple i donde $0 \leq i \leq n$, se tiene que la sucesión de estos procesos convergen en la norma de $\mathbb{L}^2([0, T])$ a un proceso estocástico $I_t(X)$.

Definición 3.1.5 (Integral estocástica) Al proceso $I_t(X)$ al cual converge la sucesión (3.7) es llamado integral estocástica. Por notación escribiremos

$$\mathbf{I}_t(X^{(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbf{I}_t(X) = \int_0^t X(s) dW(s).$$

y se tiene que

1. $E[\mathbf{I}_t(X)] = 0$, y
2. $E[\mathbf{I}_t^2(X)] = E \left(\int_0^t X^2(s) ds \right)$

En resume si $X \in \mathbb{L}^2[0, T]$ sobre (Ω, \mathcal{F}) , la integral estocástica definida

$$I_0^T(X) = \int_0^T X(s) dW(s).$$

se tiene para:

¹Esta propiedad se la puede encontrar en cualquier libro que contenga teoría de espacios \mathbb{L}^p .

1. $\forall X_1, X_2 \in \mathbb{L}^2[0, T]$ y $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$:

$$I_0^T(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2) = \alpha_1 I_0^T(X_1) + \alpha_2 I_0^T(X_2).$$

2. Si $X(t, w) = \mathbb{1}_{[t_1, t_2]}(t)$ es la función característica o indicadora sobre el intervalo $[t_1, t_2]$

$$I_0^T(X) = W(t_2) - W(t_1).$$

3. Si $X \in \mathbb{L}^2[0, T]$ y si $E \left[\int_0^T X^2(s) ds \right] < \infty$:

$$\begin{aligned} E [I_0^T(X)] &= 0 \\ E [I_0^T(X)]^2 &= E \left[\int_0^T X^2(s) ds \right]. \end{aligned}$$

También se puede introducir la integral estocástica *indefinida*, considerando el procesos estocástico $\{Y(t, w), t \in [0, T], w \in \Omega\}$ definido por

$$Y(t) = I_0^T(X) = \int_0^t X(s) \mathbb{1}_{[0, t]}(s) dW(s).$$

ver [11].

3.1.3. Diferencial estocástica y propiedades

Definición 3.1.6 (Diferencial estocástica) Sea $a(t, w)$ un proceso adaptado e integrable y sea $b(s, w)$ un proceso adaptado y cuadrado integrable tal que

$$(3.8) \quad X(t) = X_0 + \int_0^t a(s, w) ds + \int_0^t b(s, w) dW(s),$$

entonces la diferencial estocástica es definida por

$$(3.9) \quad dX(t) = a(t, w) dt + b(t, w) dW(t).$$

Si un proceso estocástico se puede expresar como (3.8) o (3.9) se dice que es un proceso de Itô. La reglas en la diferencial estocástica cambian a las comunes del cálculo clásico. Por ejemplo para una función f clásica se tiene

$$(f(t))^2 = 2 \int_0^t f(s) df(s)$$

pero en el cálculo estocástico, las cosas funcionan de distinta manera, pues esa función f ya no será una función clásica sino una $f = W(t)$ que es un proceso estocástico. El reto es saber cual es la expresión correcta para

$$(3.10) \quad (W(t))^2 = \Psi \left(2 \int_0^t X(s) dX(s) \right)$$

don de Ψ representa una función estocástica todavía no definida.

Diferencial de un producto

Sean $X_1(t)$ y $X_2(t)$ dos procesos estocásticos que admiten una diferencial estocástica

$$dX_1(t) = a_1(t) dt + b_1(t) dW(t)$$

$$dX_2(t) = a_2(t) dt + b_2(t) dW(t)$$

entonces el producto $X_1(t) \cdot X_2(t)$ también admite una diferencial y es igual

$$d(X_1(t)X_2(t)) = X_1(t) dX_2(t) + X_2(t) dX_1(t) + \underbrace{b_1(t) + b_2(t)}_{\text{término estocástico}} dt$$

Diferencial de un proceso compuesto

En el cálculo clásico si f y g son diferenciables entonces se tiene

$$df(t, g(t, x)) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial t} \right) dt + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial x} dx$$

la variante para este tipo de situaciones en el cálculo estocástico se conoce como *Fórmula de Itô*.

3.1.4. Fórmula de Itô

La versión estocástica de la regla de la cadena y dice lo siguiente

Proposición 3.1.4 Sea X_t un proceso estocástico de Itô

$$dX(t) = a(t) dt + b(t) dW(t)$$

si $f(t, x)$ es una función de dos variables definida de $[0, T \times \mathbb{R})$ sobre \mathbb{R} tal que a cada elemento (t, x) le asigna $f(t, x)$. Y tal que $\frac{\partial f}{\partial t}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ existen y son continuas. Entonces la diferencial de $f(t, X(t))$ está dada por

$$df(t, X(t)) = \left[\frac{\partial f}{\partial t}(t, X(t)) + a(t) \frac{\partial f}{\partial x}(t, X(t)) + \underbrace{\frac{1}{2} b^2(t) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X(t))}_{\text{término estocástico}} \right] dt + b(t) \frac{\partial f}{\partial x}(t, X(t)) dW(t).$$

o de manera equivalente

$$(3.11) \quad \begin{aligned} df(t, X(t)) &= \frac{\partial f}{\partial t}(t, X(t)) dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, X(t)) dX_t \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X(t)) dX_t dX_t, \end{aligned}$$

donde $dX_t \cdot dX_t$ se calcula mediante

$$\begin{aligned} dt \cdot dt &= 0 \\ dt \cdot dW_t &= 0 = dW_t \cdot dt \\ dW_t \cdot dW_t &= dt \end{aligned}$$

Para más detalles se puede consultar [1, 17]. Veamos como se aplica la fórmula de Itô (3.11) a (3.10).

Ejemplo 3.1.1 La integral de $W^2(X)$ obtiene de la siguiente manera. Sea $f(t, X) = x^2$ y $X(t) = W(t)$ entonces para expresarlo como proceso de Itô (3.9) tomamos $a(t, w) = 0$ y $b(t, w) = 1$, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, X(t)) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(t, X(t)) = 2x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X(t)) = 2,$$

de donde reemplazando en (3.11)

$$\begin{aligned} df(t, X(t)) &= \left[\frac{\partial f}{\partial t}(t, X(t)) + a(t) \frac{\partial f}{\partial x}(t, X(t)) + \frac{1}{2} b^2(t) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X(t)) \right] dt \\ &+ b(t) \frac{\partial f}{\partial x}(t, X(t)) dW(t), \end{aligned}$$

que resulta

$$dW^2(t) = dt + 2W(t) dW(t)$$

o en su forma integral

$$W^2(t) = t + 2 \int_0^t W(s) ds.$$

Otro ejemplo

Ejemplo 3.1.2 Se quiere calcular la integral de Itô de $W^n(X)$, entonces sea $f(t, X) = x^n$ y $X(t) = W(t)$. Expresado como proceso de Itô (3.9) se toma similarmente $a(t, w) = 0$ y $b(t, w) = 1$, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, X(t)) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(t, X(t)) = nx^{n-1}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X(t)) = n(n-1)x^{n-2}$$

de donde reemplazando en (3.11)

$$df(t, X(t)) = \left[\frac{\partial f}{\partial t}(t, X(t)) + a(t) \frac{\partial f}{\partial x}(t, X(t)) + \frac{1}{2} b^2(t) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X(t)) \right] dt + b(t) \frac{\partial f}{\partial x}(t, X(t)) dW(t)$$

que resulta

$$dW^n(t) = \frac{1}{2} n(n-1) W^{(n-2)}(t) dt + n W^{(n-1)}(t) dW(t)$$

o en su forma integral

$$W^n(t) = \frac{1}{2} \int_0^t n(n-1) W^{(n-2)}(s) ds + \int_0^t n W^{(n-1)}(s) dW(s).$$

3.1.5. Fórmula de Itô multidimensional

Proposición 3.1.5 Sean $\{X^{(i)}\}_{i=1}^n$, n procesos de Itô, es decir:

$$X_t^{(i)} = X_0^{(i)} + \int_0^t a_s^{(i)} ds + \int_0^t b_s^{(i)} dW_s, \quad i = 1, \dots, n.$$

notamos por $\vec{X}_t = (X_t^{(1)}, \dots, X_t^{(n)})$, sea además φ un función de dos variable definida de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ sobre \mathbb{R} tal que a cada elemento (t, \vec{x}) le asigna $\varphi(t, \vec{x})$. Y tal que $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}$ existen y son continuas. Entonces la diferencial de $Y_t = \varphi(t, \vec{X}_t)$ está dada por:

$$dY_t = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, \vec{X}_t) + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(t, \vec{X}_t) a_t^{(i)} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}(t, \vec{X}_t) b_t^{(i)} b_t^{(j)} \right] dt + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(t, \vec{X}_t) b_t^{(i)} dW_t$$

con $1 \leq i \leq n$. O de manera equivalente

$$dY_t = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, \vec{X}_t) dt + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(t, \vec{X}_t) dX_t^{(i)} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}(t, \vec{X}_t) dX_t^{(i)} dX_t^{(j)}.$$

donde $dX_t^{(i)} \cdot dX_t^{(j)}$ se calcula mediante

$$dW_t \cdot dW_t = dt$$

$$dt \cdot dW_t = 0 = dW_t \cdot dt$$

$$dt \cdot dt = 0$$

Veamos una forma aún más general. Sea $(W_t^1, W_t^2, \dots, W_t^k)$ un movimiento browniano n -dimensional y sean las funciones $a_i(t, w)$ y $b_{ij}(t, w)$ definida como en la proposición anterior, para cada $1 \leq i \leq k$ y para cada $1 \leq j \leq n$, entonces podemos formar el siguiente proceso de Itô

$$\begin{cases} dX_t^1 &= a_1 dt + b_{11}dW_t^1 + \dots + b_{1k}dW_t^k \\ \vdots &= \vdots + \dots + \vdots \\ dX_t^n &= a_n dt + b_{n1}dW_t^1 + \dots + b_{nk}dW_t^k. \end{cases}$$

O con una notación matricial

$$d\mathbf{X}_t = \mathbf{a} dt + \mathbf{b} d\mathbf{W}_t$$

donde

$$\mathbf{X}_t = \begin{bmatrix} X_t^1 \\ \vdots \\ X_t^n \end{bmatrix} \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1k} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nk} \end{bmatrix} \quad \mathbf{W}_t = \begin{bmatrix} W_t^1 \\ \vdots \\ W_t^k \end{bmatrix}$$

Cada proceso \mathbf{X}_t es llamado proceso de Itô n -dimensional.

Proposición 3.1.6 *Sea*

$$d\mathbf{X}_t = \mathbf{a} dt + \mathbf{b} d\mathbf{W}_t$$

un proceso de Itô n -dimensional. Sea $\psi(t, x) = (g_1(t, x), \dots, g_p(t, x))$ una función definida de $[0, \infty[\times \mathbb{R}^n$ sobre \mathbb{R}^p tal que $\frac{\partial \psi}{\partial t}$, $\frac{\partial \psi}{\partial x_i}$, $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j}$ existen y son continuas. Entonces la diferencial del nuevo proceso de Itô $Y(t, w) = \psi(t, X_t)$ está dado por

$$(3.12) \quad dY^k = \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, X_t) dt + \sum_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i}(t, X_t) dX_t^{(i)} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j}(t, X_t) dX_t^{(i)} dX_t^{(j)},$$

para cada componente k , ψ^k y donde los $dX_t^{(i)} dX_t^{(j)}$ se calculan mediante

$$\begin{aligned} dW_t^i \cdot dW_t^j &= \rho_{ij} dt \\ dt \cdot dW_t &= 0 = dW_t \cdot dt \\ dt \cdot dt &= 0. \end{aligned}$$

Para más detalles se puede ver [1, 29].

3.2. Ecuaciones diferenciales estocásticas

3.2.1. Introducción

Veamos como se resuelve y se usan las técnicas antes descritas en una ecuación diferencial estocástica

Ejemplo 3.2.1 *Supongamos que queremos resolver la ecuación estocástica*

$$dX_t = aX_t dt + bX_t dW_t$$

con condición inicial X_0 . Si W fuera una función derivable haríamos

$$\frac{dX_t}{X_t} = (a + b dW_t) dt$$

si se encontrar la solución integrando. Siguiendo esta idea veamos a cuanto equivale $d(\ln X_t)$. Usando la fórmula de Itô

$$\begin{aligned} d(\ln X_t) &= \frac{1}{X_t} dX_t + \frac{1}{2} \frac{-1}{X_t^2} (dX_t)^2 \\ &= \frac{1}{X_t} (aX_t dt + bX_t dW_t) - \frac{1}{2} \frac{-1}{X_t^2} b^2 X_t^2 dt \\ &= (a - b^2/2) dt + b dW_t. \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} \ln X_t &= \ln X_0 + \int_0^t (a - b^2/2) ds + \int_0^t b dW_s \\ &= \ln X_0 + (a - b^2/2)t + b W_t \end{aligned}$$

que resulta

$$X_t = X_0 e^{(a-b^2/2)t + bW_t}.$$

3.2.2. Existencia y unicidad

Proposición 3.2.1 (Existencia y unicidad para EDEs) *Si los coeficientes $a(t, x)$ y $b(t, x)$ de la ecuación (3.9) satisfacen la condición de Lipschitz en la variable x , es decir*

$$|a(t, x) - a(t, y)| + |b(t, x) - b(t, y)| \leq K |x - y|,$$

y la condición de crecimiento en x ,

$$|a^2(t, x)| + |b^2(t, x)| \leq K^2(1 + x^2),$$

para alguna constante $K > 0$, entonces existe un proceso estocástico $\{X_t\}$ solución de (3.9) que es adaptado a la filtración, tiene trayectorias continuas, es uniformemente acotado en $\mathbb{L}^2(\Omega)$, es decir, $\sup_{0 \leq t \leq T} E[X_t^2] < \infty$, y además es único.

En este caso a tal solución se le llama *solución fuerte* de la ecuación estocástica. La demostración² se puede ver en [30]. A la función $a(t, x) = \mu X_t$ se le conoce como *coeficiente de tendencia* (*drift* en inglés o *deriva* en español) y a $b(t, x) = \sigma X_t$ se lo conoce como *coeficiente de difusión* en el mundo financiero.

3.2.3. Movimiento browniano geométrico (MBG)

Sea μX_t la deriva y sea σX_t la volatilidad, entonces

$$(3.13) \quad dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t, \quad t \leq 0,$$

tiene la solución de Itô corresponde a un *movimiento browniano geométrico (MBG)*

$$(3.14) \quad X_t = X_0 e^{(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W(t)}, \quad t \leq 0.$$

Este es el modelo que propuso Merton, Black y Sholes para modelar la evolución de precios en un portafolio y que se toma en este trabajo como modelo para la predicción de precios, ver [11].

²La demostración es semejante al caso determinista, y hace uso del método de iteraciones de Picard.

Capítulo 4

Aproximación numérica estocástica/ método de Euler-Maruyama para EDEs.

En el presente capítulo se estudia el método de discretización Euler-Maruyama para una EDE (caso unidimensional) y para un sistema de EDEs correlacionadas (caso multidimensional). Con estos conceptos se construye el modelo predictivo para precios (como ejemplo de aplicación del método de discretización) y retornos (que se utiliza para el modelo posterior de construcción de cartera) con el correspondiente análisis de datos históricos y la calibración de parámetros. Seguidamente se hace la simulación Montecarlo implementando dicho modelo predictivo.

Motivación

El objetivo del trabajo es construir un portafolio óptimo, el mismo que será construido mediante información que se procese de los precios de acciones en el campo petrolero. Se eligió las petroleras debido a su impacto en el sector económico tanto nacional como internacional. Las ideas de este trabajo también son aplicables a otro sector empresarial no necesariamente petrolero.

El problema de portafolios ha planteado desde el siguiente punto de vista: por un lado se debe resolver el problema de la predicción de retornos y por otro lado la optimización del portafolio. Para resolver el primer punto, el de predecir los los retornos, muchos autores utilizan técnicas estadísticas de tendencia con datos históricos. En este trabajo se utiliza una de las herramientas más modernas para este tipo de predicciones, como es la utilización de movimientos brownianos geométricos resueltos a partir de la discretización numérica Euler-Maruyama. Modelar con movimientos brownianos geométricos es una de las técnicas más sofisticadas en la actualidad pues antiguamente o bien se usaba técnicas estadísticas o movimientos brownianos aditivos, ver [11]. Cabe recalcar que los movimientos brownianos geométricos que se utilizan están correlacionados, que se acercan más a la realidad en cuanto a otros métodos que no incluye técnicas correlacionadas.

4.1. Método Euler-Maruyama unidimensional (EMU)

Encontrar soluciones explícitas para EDEs no es una regla general. De hecho, casos como (3.14) solución de (3.13) son muy particulares, por lo que se han desarrollado métodos numéricos de aproximación. Uno de los métodos de discretización más utilizado es el de Euler-Maruyama¹ que es una generalización estocástica de la discretización de Euler para ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs). Este método describe la trayectoria del proceso estocástico solución, donde en cada realización el comportamiento de las variables aleatorias es normal, ver en [33, 14, 29].

La ecuación diferencial estocástica de la forma general

$$(4.1) \quad dX_t = a(X_t) dt + b(X_t) dW_t, \quad X(0) = X_0, \text{ con } 0 \leq t \leq T,$$

donde a y b son funciones escalares y la condición inicial X_0 es una variable aleatoria puede ser escrito de forma integral como

$$(4.2) \quad X_t = X_0 + \int_0^t a(X(s)) ds + \int_0^t b(X(s)) dW(s), \quad 0 \leq t \leq T.$$

La segunda integral del lado derecho de (4.2) es con respecto al movimiento browniano y se usará la integral de Itô para resolverla. La solución X_t es una variable aleatoria para cada t , es decir, el resultado será un proceso estocástico. Siguiendo las ideas del método de Euler para una EDO se puede definir un método numérico para resolver (4.2), y aproximar los valores que toma la variable aleatoria X_t , donde la efectividad del método mejora cuando el tamaño del paso en la discretización tiende a cero.

Si $b = 0$ y X_0 es una constante, el problema se reduce a una EDO²

$$(4.3) \quad \frac{dX(t)}{dt} = a(X(t)), \text{ con } X(0) = X_0.$$

El problema (4.3) es determinista y para resolverlo se puede usar el método de Euler. De manera similar para aplicar un método numérico a (4.1) se procede a dividir de manera uniforme al intervalo $[0, T]$ en N sub-intervalos de longitud $\Delta t = T/N$, para algún entero positivo N y sea $\tau_i = i\Delta t$. La aproximación numérica $X(\tau_i)$ se notará X_i , entonces el método de Euler-Maruyama toma la forma

¹La descripción de otros tipos de métodos numéricos para EDEs están descritos, por ejemplo, en [29], donde se puede encontrar los métodos de Milstein y Runge-Kutta.

²En realidad se reduce a un problema de valor inicial.

$$(4.4) \quad X_{i+1} = X_i + a(X_i)\Delta t + b(X_i)(W(\tau_{i+1}) - W(\tau_i)), \quad i = 0, 1, \dots, N - 1,$$

con valor inicial $X_0 = X(0)$, o de forma integral es

$$(4.5) \quad X(\tau_{i+1}) = X(\tau_i) + \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} a(X(s))ds + \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} b(X(s)) dW(s).$$

Los tres términos de la parte derecha de (4.4) aproximan los correspondientes términos de la parte derecha de (4.5), ver [14]. La sucesión $\{X_i\}$ con $i = 0, 1, \dots, N - 1$ que produce el método iterativo (4.4) en los instantes de discretización τ_i son similares al caso determinista, pero con la diferencia que se necesitan generar los incrementos aleatorios

$$\Delta W_i = W(\tau_{i+1}) - W(\tau_i)$$

al expresar de manera discreta las trayectorias brownianas. Estos incrementos son variables aleatorias gaussianas independientes con media $E(\Delta W_i) = 0$ y varianza $E((\Delta W_i)^2) = \Delta t$. O su forma equivalente de construcción mediante

$$\Delta W_i = z_i \sqrt{\Delta t}$$

donde z_i es elemento de una variable aleatoria normal con media cero y varianza uno, $(N(0, 1))$, ver [29].

Ahora bien, nuestro interés se centra en el modelo de predicción de retornos necesario para la construcción del portafolio óptimo. Este modelo³ se basa en la descripción del cambio relativo o tasa de retorno S/dt del precio de una acción en el intervalo de tiempo dt compuesto por un término determinístico $\mu S(t)$ más una fluctuación estocástica dada por $\sigma dW(t)$, quedando como modelo definitivo un caso particular de la expresión (4.1)

$$(4.6) \quad dX(t) = \mu X(t) dt + \sigma X(t) dW(t),$$

o bien, como tradicionalmente se representa en finanzas

$$(4.7) \quad dS(t) = \mu S(t) dt + \sigma S(t) dW(t), \quad \text{poniendo } X(t) = S(t),$$

donde μ y σ son constantes reales.

³Un modelo anterior de predicción de precios es el introducido por Bachelier en [4], quien utiliza movimientos brownianos aditivos. La idea de introducir movimientos brownianos geométricos fue de Robert C. Merton, esto está descrito en el artículo [25], publicado conjuntamente con Scholes

donde R_t^i representa el rendimiento de la acción i y de igual manera los W_t^i son k movimientos brownianos correlacionados. Modelar los diversos factores aleatorios que intervienen en un modelo financiero mediante movimientos brownianos no correlacionados no resulta tan preciso como modelar con correlación las diferentes entradas.

4.2.1. Movimientos brownianos correlacionados

Concentrémonos en la correlación de los W_t^i . En la generalización de la fórmula de Itô (3.11) para un movimiento browniano multidimensional o procesos de Wiener multidimensional (W_t^1, \dots, W_t^k) , dada en (3.12), se tiene que

$$\begin{aligned} dt dt &= 0 \\ dt dW_t^i &= 0 = dW_t^i dt \\ dW_t^i dW_t^j &= \rho_{ij} dt \end{aligned}$$

entonces los ρ_{ij} representan los coeficientes de correlación entre los procesos de Wiener W_t^i y W_t^j . Recordemos que los coeficientes de correlación ρ_{ij} con $i, j = 1, 2$ entre dos variables aleatorias X_1 y X_2 están definidos por

$$\rho(X_1, X_2) = \frac{Cov(X_1, X_2)}{\sqrt{V(X_1)}\sqrt{V(X_2)}},$$

donde $-1 \leq \rho_{ij} \leq 1$. Se puede decir que cuando $\rho_{ij} = 1$ las variables aleatorias están correlacionadas, cuando ρ_{ij} es cercano a cero presentan una baja correlación y cuando $\rho_{ij} = -1$ no tienen correlación. Para construir la discretización de procesos de Wiener correlacionados, empezamos con la matriz de correlación

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \dots & \rho_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ \rho_{k1} & \dots & \rho_{kk} \end{pmatrix}$$

que relaciona a los procesos de Wiener W_1, \dots, W_k . La matriz ρ es simétrica y con unos en la diagonal principal. Una forma de crear procesos de Wiener correlacionados es a través de descomposición de la matriz ρ en sus valores singulares⁴

⁴Sea A una matriz $m \times n$, $m \geq n$ entonces existen matrices ortogonales U y V tales que $U'AV = D$ donde D es una matriz diagonal de orden $m \times n$ cuyas componentes son llamadas los valores singulares de la matriz A . U es una matriz cuadrada $m \times m$ y sus columnas contiene los vectores singulares izquierdos de A . V es una matriz cuadrada $n \times n$ y sus columnas contiene los vectores singulares derechos. A la forma $A = UDV'$ se le llama descomposición de A en sus valores singulares o simplemente(SVD).

(SVD). La descomposición SVD de ρ es igual a

$$(4.10) \quad \rho = \Gamma \Lambda \Gamma^T$$

donde Γ es una matriz ortogonal ($\Gamma^{-1} = \Gamma^T$) y Λ es la matriz diagonal con elementos no nulos en su diagonal. ver [29].

Tomemos k procesos de Wiener Z_1, \dots, Z_k independientes y no correlacionados tales que, $dZ_i dZ_i = dt$ y para $i \neq j$ y $dZ_i dZ_j = 0$. Se define el vector columna $dW = \Gamma \Lambda^{1/2} dZ$ y comprobamos que la matriz de correlación de dW es

$$\begin{aligned} dW dW^T &= \Gamma \Lambda^{1/2} dZ (\Gamma \Lambda^{1/2} dZ)^T \\ &= \Gamma \Lambda^{1/2} dZ dZ^T \Lambda^{1/2} \Gamma^T \\ &= \Gamma \Lambda \Gamma^T dt = \rho dt. \end{aligned}$$

Por tanto, la descomposición (4.10) nos permite heredar en los procesos de Wiener Z_i una correlación y construir procesos de Wiener correlacionados dW_i . Es bueno aclarar esta técnica con un ejemplo⁵.

Ejemplo 4.2.1 *Sea la matriz de correlación*

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$$

de los procesos de Wiener W_1, W_2 , y sean Z_1, Z_2 dos procesos de Wiener no correlacionados tales que $dZ_1 dZ_2 = dt$ y $dZ_1 dZ_1 = 0 = dZ_2 dZ_2$, la descomposición SVD para ρ está dada por

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + \rho & 0 \\ 0 & 1 - \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

con

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \text{ y } \Lambda = \begin{pmatrix} 1 + \rho & 0 \\ 0 & 1 - \rho \end{pmatrix}$$

Entonces los $dW_i = \Gamma \Lambda^{1/2} dZ_i$, es decir:

$$\begin{aligned} dW^1 &= \sqrt{\frac{1+p}{2}} dZ^1 + \sqrt{\frac{1-p}{2}} dZ^2 \\ dW^2 &= \sqrt{\frac{1+p}{2}} dZ^1 - \sqrt{\frac{1-p}{2}} dZ^2. \end{aligned}$$

⁵Ejemplo tomado de [29].

4.2.2. Esquema EMM

Para el caso multidimensional general, la k -ésima componente del método Euler-Maruyama está dada por

$$X_{i+1}^k = X_i^k + A^k(\tau_i, X_i)\Delta t + \sum_{j=1}^m B^{k,j}(\tau_i, X_i)\Delta W_i^j$$

donde $k = \{1, \dots, n\}$ representa el número de ecuaciones e incógnitas, $A = (a^1, \dots, a^n)$ es una función y $B = B^{k,j}$ es una matriz $n \times n$. Aquí $\Delta W_i^j = W_{\tau_{i+1}}^j - W_{\tau_i}^j$ es el incremento distribuido normalmente con media cero y varianza Δt de la j -ésima componente del movimiento browniano n -dimensional W sobre el intervalo $[\tau_i, \tau_{i+1}]$. Y los $\Delta W_i^{j_1}, \Delta W_i^{j_2}$ con $j_1 \neq j_2$ son independientes.

Aplicado a nuestros sistemas de ecuaciones el esquema resultante para (4.8) está dado por

$$(4.11) \quad S_{i+1}^k = S_i^k + \mu^k S_i^k dt + \sigma^k S_i^k \sum_{j=1}^m Svd^{k,j} dZ_i^j$$

y para (4.9)

$$(4.12) \quad R_{i+1}^k = R_i^k + \mu^k dt + \sigma^k \sum_{j=1}^m Svd^{k,j} dZ_i^j$$

donde la matriz $Svd = \Gamma\Lambda^{1/2}$.

4.3. Convergencia fuerte de soluciones para EDEs

La definición de convergencia para una ecuación diferencial estocástica es similar al concepto de convergencia para una ecuación diferencial ordinaria, salvo por el hecho que la solución es un proceso estocástico y que cada realización del método es solo una trayectoria de este proceso. Así, cada trayectoria $W(t)$ calculada usando Euler-Maruyama, da una variable aleatoria, por ejemplo, al tiempo T , $W(T)$ es una variable aleatoria en si misma. La diferencia entre los dos valores al tiempo T , $e(T) = X(T) - W(T)$ es también una variable aleatoria. Entonces se tiene la siguiente definición

Definición 4.3.1 (Convergencia fuerte) Una aproximación discreta en el tiempo se dice que converge fuertemente a la solución $X(t)$ en el tiempo T si

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} E \left[|X(T) - W_{\Delta t}(T)| \right] = 0,$$

donde $W_{\Delta t}$ es una solución aproximada con paso constante Δt y E denota el valor esperado.

Otra manera de cuantificar la tasa de convergencia es el concepto de orden

Definición 4.3.2 (Convergencia fuerte de orden m) *Una EDE converge fuertemente en orden m si el valor esperado del error es de orden m en amplitud del paso, es decir, si para cualquier T*

$$E\left[|X(T) - W_{\Delta_t}(T)|\right] = O((\Delta_t)^m),$$

para un paso Δ_t suficientemente pequeño.

Esta definición (que fue tomada de [29]) generaliza el criterio de convergencia para ecuaciones diferenciales ordinarias, reduciéndose a la definición usual cuando la parte estocástica de la ecuación se anula. Aunque el método de Euler para ecuaciones diferenciales ordinarias tiene orden 1, el orden de convergencia para el método de Euler-Maruyama para ecuaciones diferenciales estocásticas es de orden $1/2$. Esto fue probado por Gikhman y Skorokhod en 1972, ver [29]. Otros métodos de aproximación numérica como Milstein (orden uno) y Runge-Kutta (orden mayor que uno) tiene mayor orden de convergencia. En este trabajo se escogió Euler-Maruyama debido a su simplicidad en la implementación y a que se lo iba a combinar con otras técnicas para lograr resolver el problema planteado. Si se hubiera trabajado con otro de los métodos mencionados las técnicas en general se hubiera complicado mucho.

4.4. Construcción del modelo predictivo

Con el objeto de predecir los precios o los retornos futuros de las acciones que componen el portafolio, se realizan escenarios de pronóstico mediante movimientos brownianos geométricos correlacionados con correlaciones instantáneas

$$dW_t^{(i)}dW_t^{(j)} = \rho_{ij} dt.$$

Para tal efecto, se generarán números aleatorios normales en los cuales se incorporan la información correspondiente a la media, la desviación estándar y la correlación de los datos históricos. A continuación, se discretiza y simula la solución mediante el método de Euler-Maruyama que con ayuda de técnicas Montecarlo (MC) conseguimos la convergencia⁶. Cabe destacar que los procesos estocásticos utilizados para la determinación de precios accionarios no toman en cuenta las políticas de dividendos de las empresas.

⁶Estas técnicas están descritas en el artículo [29] y en el libro [17].

Para incorporar la correspondiente información a los movimientos brownianos no correlacionados es preciso estimar los mismo, para lo cual se hace un análisis de datos y la calibración correspondiente que se describe a continuación

4.4.1. Análisis de los datos históricos

El criterio que se tomó para escoger las acciones que formarán el portafolio, es la influencia en el mercado internacional. Se tomaron por tanto tres de las petroleras más influyentes.

Base de Datos: La base de datos fue obtenida de la página web [31]. Esta base de datos contiene información semanal de los precios de las acciones correspondientes de al período comprendido entre el 02 enero de 2009 y el 31 de mayo de 2011 para las petroleras:

- Petro China, $(S^{(1)})$.
- Petroleo Brasileño, $(S^{(2)})$.
- Penn West Petroleum Ltd, $(S^{(3)})$.

Con estos datos se estima luego la media y la varianza de cada variable accionaria que es una parte fundamental del modelo.

Depuración de la base de datos: Revisando la base de datos no se identificaron inconvenientes, dado que fue tomada de una misma página web [31] los períodos coinciden en fechas y no hay desfases, por lo cual no habrá conflictos en los vectores de acciones formados por los datos.

Historial de cada acción: Los datos de cada acción de las empresas mencionadas están adjuntos en las tablas del Apéndice D.

En la Figura 4.2 podemos observar el comportamiento real del precio y en la Figura 4.3 de sus retornos reales a través del tiempo de estas acciones dibujados con MATLAB.

4.4.2. Calibración de parámetros

Para estimar la media y la desviación estándar, tomemos

$$S_t = S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t}$$

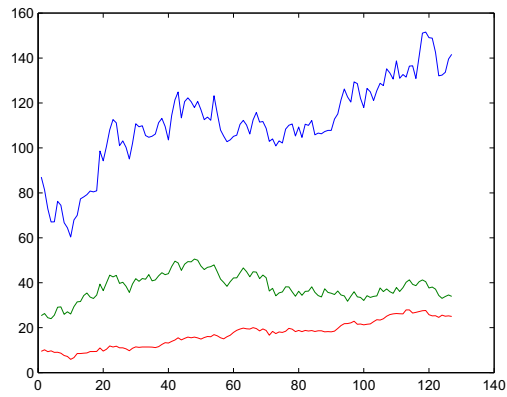


Figura 4.2: Precios reales de las acciones correspondientes a las petroleras: Petro China, Petroleo Brasileño, Penn West Petroleum Ltd

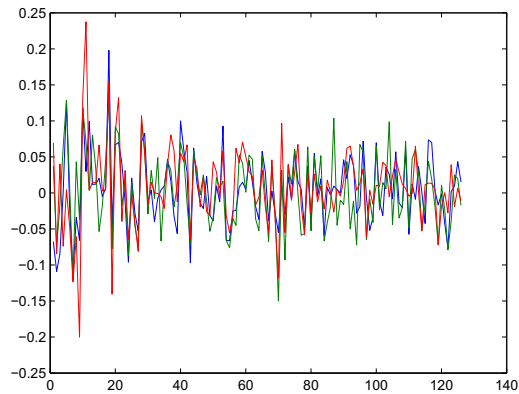


Figura 4.3: Retornos reales de las acciones correspondientes a las petroleras: Petro China, Petroleo Brasileño, Penn West Petroleum Ltd

que es la ecuación que se ha tomado para modelar. Despejando y tomando logaritmos se tiene

$$(4.13) \quad \ln \left(\frac{S_t}{S_0} \right) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t.$$

Observe que (4.13) sigue una distribución normal $\mathcal{N} \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t, \sqrt{\sigma t} \right)$. Consideremos ahora una colección de $k + 1$ cotizaciones del activo $X_t = S_t$, digamos $S_0, S(\Delta t) = S_1, S(2\Delta t) = S_2, \dots, S(k\Delta t) = S_k$, en los instantes $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, k\Delta t = T$ en el intervalo $[0, T]$.

En cada subperíodo $[(j - 1)\Delta t, j\Delta t]$ con $1 \leq j \leq k$ consideramos los k incrementos

$$(4.14) \quad U_j = \ln \left(\frac{S(j\Delta t)}{S((j - 1)\Delta t)} \right), \quad 1 \leq k.$$

Entonces se tiene que

$$\begin{aligned}\ln(S(j\Delta t)) &= \ln(S(0)) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) (j\Delta t) + \sigma W(j\Delta t) \\ \ln(S((j-1)\Delta t)) &= \ln(S(0)) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) ((j-1)\Delta t) + \sigma W((j-1)\Delta t)\end{aligned}$$

de donde restando la segunda expresión de la primera, podemos expresar (4.14) en la forma

$$(4.15) \quad U_j = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \Delta t + \sigma(W(j\Delta t) - W((j-1)\Delta t)).$$

Como los movimientos brownianos $W(t)$ tienen incrementos independientes normales con media cero y varianza t , entonces

$$W(j\Delta t) - W((j-1)\Delta t) \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, \sqrt{\Delta t}), \quad 1 \leq j \leq k,$$

por lo que las U_j son independientes y normales $\mathcal{N}\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \Delta t, \sigma^2 \Delta t\right)$. A partir de una muestra de $k+1$ datos reales, podemos construir las k diferencias dadas en (4.14) y realizar una estimación de los parámetros μ y σ mediante la técnica de momentos.

$$\begin{aligned}\tilde{U} &= \sum_{i=1}^k U_i, \\ S^2 &= \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k (U_i - \tilde{U})^2,\end{aligned}$$

de donde

$$\tilde{U} = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \Delta t, \quad S^2 = \sigma^2 \Delta t.$$

Entonces la tendencia μ y la volatilidad σ pueden ser estimadas a partir de datos históricos a través de la media y la desviación estándar muestral, ver [6, 10, 32]. La implementación computacional de esta técnica se muestra en el código (C.3) dando como resultado los vectores

$$\begin{aligned}\text{mu} &= [0,0497 \ 0,0542 \ 0,0561] \\ \text{sigma} &= [0,0051 \ 0,0038 \ 0,0093]\end{aligned}$$

Además, la matriz de correlaciones calculada en Matlab es

$$\text{Cf} = \begin{pmatrix} 1 & 0,708357092509195 & 0,581210275158382 \\ 0,708357092509196 & 1 & 0,595302412456500 \\ 0,581210275158382 & 0,595302412456500 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.4.3. Simulación Montecarlo (MC)

En el año 1998 Nassir Sapag, define los procesos de Montecarlo como una técnica de simulación de escenarios inciertos que permite obtener valores esperados para variables no controlables, a través de una selección aleatoria, donde la probabilidad de escoger un resultado corresponde a la dada por su distribución, ver [32].

La simulación de Montecarlo (MC) es una herramienta importante en finanzas. Se usa en el estudio de portafolios de inversión, en valorar opciones, para simular estrategias de cobertura y estimar el valor en riesgo. El método de Montecarlo es un algoritmo que se utiliza para estimar el valor esperado de una variable aleatoria, mediante la generación de escenarios, con los cuales se obtiene una visión acerca del comportamiento de las variables, ver [14].

La idea detrás de la simulación MC viene de la ley de los grandes números que sostiene que un buen estimador del valor esperado de una variable aleatoria continua X es la media aritmética de una muestra finita de variables aleatorias independientes e idénticamente. Esto formalmente es:

Teorema 4.4.1 *Sea $(X_n)_{n=1,2,\dots}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (v.a.i.i.d.), si $E[X_n]$ existe y es finita,*

$$\tilde{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

converge casi seguramente (en probabilidad) hacia $E[X_n]$, es decir:

$$\begin{array}{ll} \tilde{X}_n \xrightarrow{c.s.} & P(\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{X}_n = E[X_n]) = 1 \\ \tilde{X}_n \xrightarrow{p} & \lim_{n \rightarrow \infty} P(|\tilde{X}_n - E[X_n]| > \varepsilon) = 0, \forall \varepsilon > 0 \end{array}$$

Por otro lado, la convergencia casi segura (en probabilidad) de estas medias aritméticas implica la existencia de $E[X_n]$.

En el teorema anterior, la convergencia en probabilidad se conoce como ley débil de los grandes números y la convergencia casi segura se conoce como ley fuerte de los grandes números. Se pueden consultar más detalles en [3, 19]. Lo que esta ley nos indica, para efectos de nuestra aplicación, es que mientras más trayectorias utilizemos para el cálculo de la media, esta será más cercana a la variable aleatoria (esperanza matemática) que deseamos encontrar. Es decir, mientras más trayectorias simulemos con el método Euler-Muyama en promedio estas trayectorias convergerán a la solución buscada ver [17, 29].

Esta simulación es fácil de implementar y muy flexible pero tiene la desventaja que la carga computacional suele ser muy elevada, pues es necesario un gran

número de replicas para mejorar la estimación. Se suele recomendar realizar entre 5.000 a 10.000 realizaciones o replicas del algoritmo (ver [16, 32].) Si el portafolio consistiera de un activo, el procedimiento computacional sería ligero. Sin embargo, la cartera de inversiones usualmente está compuesta por n activos, entonces se debe simular una secuencia de por ejemplo 10.000 realizaciones para cada uno de esos n activos lo que puede resultar en una carga computacional elevada si n crece demasiado.

4.5. Implementación del modelo predictivo

4.5.1. Implementación del modelo predictivo para precios

Usando los valores de las medias, desviaciones estándar y la matriz de correlación calculadas en la sección 4.4.2, aplicando el esquema Euler-Maruyama multidimensional (4.11) para predecir los precios de las acciones en un período de 4 semanas con 400 observaciones, se tiene la Figura 4.4⁷.

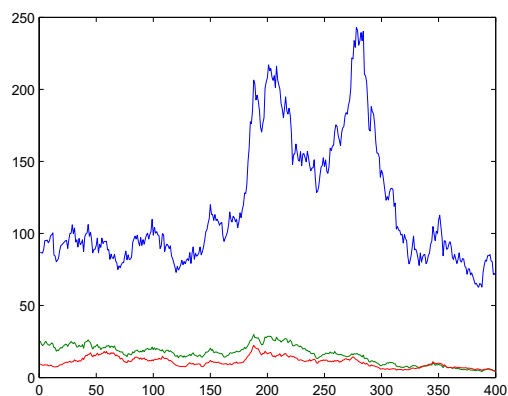


Figura 4.4: Aproximación EMM para precios correlacionados

Y la Figura 4.5 es el resultado de la discretización EMM para precios con 10.000 realizaciones del método Montecarlo.

⁷Cabe destacar que en ningún código se fija la variable aleatoria (una semilla), por tanto las imágenes producidas serán distintas a las presentadas que son un resultado posible.

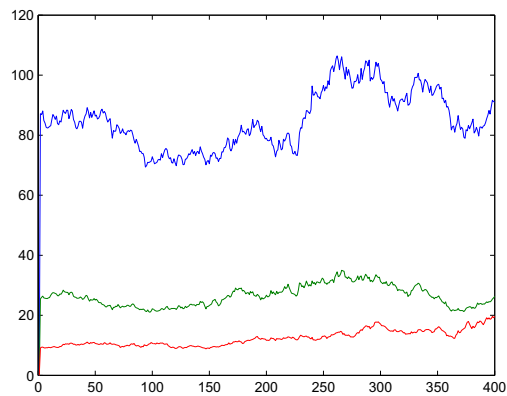


Figura 4.5: Aproximación EMM y MC para precios correlacionados

Los códigos de estas implementaciones computacionales se los encuentra en los Apéndices C.4 y C.4

4.5.2. Implementación del modelo predictivo para retornos

De manera similar, usando los valores de las medias, desviaciones estándar y la matriz de correlación calculadas en la sección 4.4.2, aplicando el esquema Euler-Maruyama multidimensional (4.12) para predecir los precios de las acciones en un período de 4 semanas con 120 observaciones, se tiene la Figura 4.6.

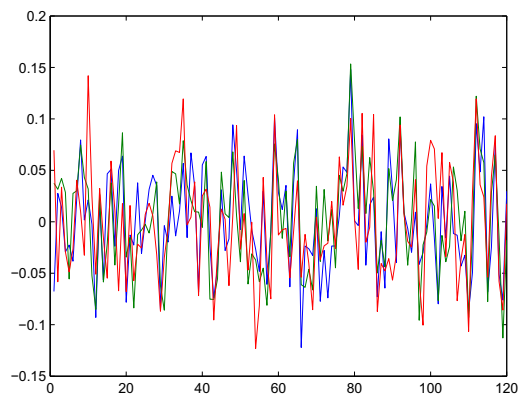


Figura 4.6: Aproximación EMM para retornos correlacionados

Y la Figura 4.7 es el resultado de la discretización EMM para precios con 50.000 realizaciones del método Montecarlo.

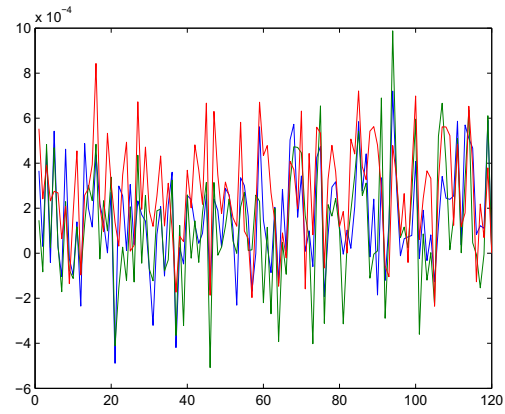


Figura 4.7: Aproximación EMM y MC para retornos correlacionados

Los códigos de estas implementaciones computacionales se los encuentra en los Apéndices C.6 y C.6

Capítulo 5

Aplicación en el establecimiento del portafolio óptimo en el sector petrolero

Este capítulo está dedicado al análisis, construcción e implementación del modelo para el establecimiento del portafolio compuesto por acciones en el sector petrolero, tanto desde un punto de vista estático (modelo de Markowitz), como dinámico (portafolio dinámico).

5.1. Modelo de Markowitz

El trabajo de H. Markowitz [23], marca el punto de partida de la teoría moderna de portafolios. Este modelo se centra principalmente en la diversificación y en el análisis de la Frontera eficiente. La frontera eficiente es una curva que se obtiene de contraponer el riesgo versus la rentabilidad, tomando en cuenta la diversificación del portafolio. Es el conjunto de combinaciones de activos que maximiza la rentabilidad para un nivel de riesgo dado o minimiza el riesgo para un cierto nivel de rentabilidad¹. De esta frontera eficiente se toma el portafolio de mínima varianza al que se lo llama portafolio eficiente de media-varianza, ver [23, 13], que es tomado como solución.

Las acciones que conforman un portafolio deben tener un cierto grado de diversificación, ver [23, 32]. En palabras simples, la diversificación es: “*no poner todos los huevos en una sola canasta*” y su objetivo principal es el de alcanzar la máxima rentabilidad con el menor riesgo posible.

Una apropiada diversificación del portafolio reduce el riesgo. La diversificación depende de los coeficientes de correlación entre las acciones a conformar el portafolio, estas correlaciones deberían en lo posible tener valores negativos o cercanos a cero. El riesgo que eventualmente se puede eliminar, por medio de la diversificación, es el *riesgo propio*². Hay un riesgo que no se puede eliminar así se diversifique, esto se conoce como *riesgo de mercado*³. Por tanto, se tiene

¹Se entiende por rentabilidad a los beneficios obtenidos y riesgo a la incertidumbre de inversión.

²El riesgo propio está en los peligros que acechan a una determinada empresa, estos son específicamente suyos y tal vez de sus competidores inmediatos, ver [32].

³El riesgo de mercado deriva del hecho que hay otros peligros que acechan a la economía y amenazan a todos los negocios, como por ejemplo la inflación, catástrofes naturales, inestabilidad política etc. Esto es independiente del número de acciones y del tipo de empresas que conforman el portafolio, ver [32].

beneficios en la diversificación pero el riesgo de un portafolio no se puede eliminar totalmente sino que sólo se minimiza, ver [32].

En el modelo de Markowitz se asume que los inversionistas son adversos al riesgo⁴, que los activos tienen una distribución normal y que no se pagan dividendos, ni impuestos. Además asume, que la información en el mercado no tiene costo alguno y está a libre alcance. Las exigencias para aplicar el modelo son: que tanto las varianzas como los retornos esperados sean finitos.

El portafolio óptimo se puede encontrar mediante la resolución de un problema de programación cuadrática por medio de dos criterios. El primero, es maximizar el retorno esperado del portafolio en función de los retornos de las acciones y el segundo, es minimizar el riesgo del portafolio en función de las varianzas de las acciones. En este trabajo se escoge el segundo criterio.

El modelo está construido tomando los retornos definido por

$$\ln \left(\frac{S_{j+1} - S_j}{S_j} \right), \quad \text{con } 0 \leq j \leq n - 1$$

donde S_{j+1} y S_j representan el precio al tiempo $j + 1$ y al tiempo j . El retorno del portafolio es una combinación entre los retornos de los activos que lo conforman. Sean R_1, R_2, \dots, R_N los retornos cada acción entonces el retorno del portafolio se define como:

$$Rp = x_1 R_1 + x_2 R_2 + \dots + x_N R_N$$

y el retorno esperado del portafolio está dado por

$$E[Rp] = \sum_{i=1}^N x_i E[R_i] = \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{x}$$

donde $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ son los pesos del porcentaje a invertir de la acción i y $E[R_i]$ representa el retorno esperado de la acción i .

Por otro lado, la medida de riesgo se toma como

$$\sigma_p^2 = Var[Rp] = E[Rp^2] - E[Rp]^2 = \mathbf{x}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{x},$$

donde $\boldsymbol{\Sigma}$ es la matriz de varianzas-covarianzas. Se puede representar el modelo antes descrito por

$$(5.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{mín } \mathbf{x}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{x} \\ \text{sujeto a: } \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{x} \geq R_0, \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1, \\ 0 \leq x_i \leq 1. \end{array} \right.$$

⁴La aversión al riesgo es el nivel de tolerancia a la volatilidad (riesgo) frente a las expectativas de rentabilidad de un inversionista.

que representa un portafolio compuesto sólo por activos riesgosos, R_0 es la rentabilidad mínima deseada. La solución de (5.1) para distintos R_0 dan como resultado la frontera eficiente, de la que se puede obtener la cartera eficiente de media-varianza.

5.1.1. Implementación del modelo de Markowitz

Para la implementación del modelo de Markowitz se usa el Solver de programación cuadrática que Matlab tiene a disposición, el mismo que está descrito en el Apéndice B, tomando los retornos obtenidos de la simulación descrita en el Capítulo 4, se calculan los parámetros necesarios para correr el programa. La instrucción principal del Solver es

```
x = quadprog(H,f,A,b,Aeq,beq,lb,ub)
```

donde H será la matriz de varianzas-covarianzas de los retornos simulados, f un vector de ceros, A el vector formado por las medias, b el retorno mínimo esperado, Aeq un vector de unos, beq igual a uno, lb igual a cero y ub igual a uno, (véase el código C.8), dando como resultado, para un capital inicial de 200 y una rentabilidad esperada de 0.009 que se debe invertir

Activo	Porcentaje	Monto
primer activo	0,1021 %	20,4198
segundo activo	0 %	0
tercer activo	0,8979 %	179,5802

Frontera eficiente

Para el cálculo la frontera eficiente y la obtención de la cartera de mínima varianza, se ha modificado el código C.8 de tal manera que se calcule los portafolios entre un intervalo de rentabilidad $[\alpha, \beta]$ resultando el código C.9. Usando dicho código, se obtiene la Figura 5.1 que muestra la frontera eficiente (gráfica en color azul) y la cartera de mínima varianza (representado por el punto (x, y)) con los siguiente pesos a invertir

```
X =
    0.5136
    0.2980
    0.1883
```

con una rentabilidad de 0,0002518, la cartera con mayor rentabilidad es

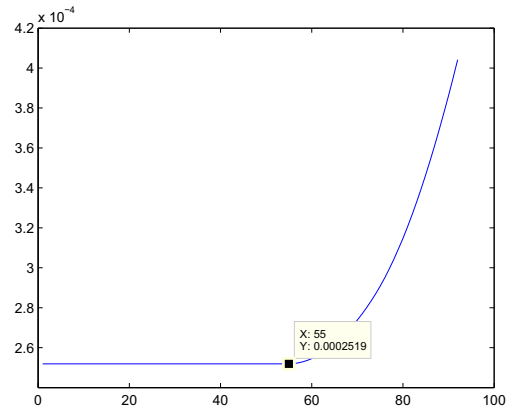


Figura 5.1: Frontera eficiente.

X =
 0,0221
 0
 0,9778

con 0,0004042 de rentabilidad, pero es la que mayor riesgo tiene.

5.2. Portafolio dinámico

El problema de optimizar la distribución de un patrimonio disponible a través de diversas oportunidades de inversión puede ser estudiados de manera estática, o de forma dinámica, ver [13]. Si bien el modelo de Markowitz es muy utilizado, y ha aportado mucho en el campo tanto teórico como práctico, tiene sus limitaciones, por ejemplo, el hecho que deja fijo el porcentaje a invertir en cada acción en el transcurso del tiempo, lo que lo convierte en un modelo estático puesto que la decisión se hace una vez.

Se tiene un punto de vista dinámico, cuando podemos reorganizar las decisiones en el curso del tiempo, ver [13]. En este trabajo se busca modificar esta situación mediante la construcción de un modelo que dinamice y optimice las inversiones a través del tiempo. Se ha tomado como base ciertas ideas del modelo planteado en [20] sin considerar todos los parámetros ahí implicados pues esto queda fuera del alcance de este trabajo.

Con la potencia de los nuevos computadores y la nueva tecnología ha resurgido el interés en el estudio del modelo de Markowitz y sus variantes como son, por ejemplo, las carteras dinámicas, pues se puso de moda los modelos de índices

(que no los hemos topado, ni mencionado en este trabajo) que usan menos capacidad computacional pero dan una solución sub-óptima, véase [20]. Actualmente con la capacidad computacional disponible es posible hacer grandes cálculos y ya no es necesario restringir tanto los cálculos requeridos.

Cabe destacar que el modelo aquí planteado es corrido en una computadora de escritorio sin presentar ningún inconveniente y su salida es casi inmediata con las tres variables planteadas. El modelo de portafolio dinámico planteado es el siguiente

$$(5.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{mín} \quad \sum_{t=1}^{M-h+1} \mathbf{x}_t^T \Sigma_t \mathbf{x}_t \\ \text{sujeto a:} \quad \sum_{t=1}^{M-h+1} \boldsymbol{\mu}_t^T \mathbf{x}_t \geq R_0, \\ \quad \quad \quad \sum_{t=1}^{M-h+1} \mathbf{1}^T \mathbf{x}_t = 1, \end{array} \right.$$

donde $\mathbf{x}_t = \{x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{Nt}\}$ son los pesos a invertir en la acción i al tiempo t con $1 \leq i \leq N$ y $1 \leq t \leq M-h+1$ con N indica el número de acciones y M es el número de datos disponibles. Σ_t es la matriz de varianzas-covarianzas calculada sobre los retornos para cada tiempo t , $\boldsymbol{\mu}_t = \{\mu_{1t}, \mu_{2t}, \dots, \mu_{Nt}\}$ es el vector de medias de los retornos para cada tiempo t , h es el horizonte evaluación de rendimiento y $\mathbf{1}$ es un vector de unos N -dimensional.

Por ejemplo, para calcular los parámetros necesarios, en un caso hipotético de 2 acciones $N = 2$ y con 14 datos $M = 14$ para cada acción, el vector $\boldsymbol{\mu}_t$ se calcula sobre la siguiente división de datos como muestra en la siguiente tabla. Para calcular la matriz de varianzas-covarianzas se toma, por ejemplo, R_{11} como R_{21} y se obtiene Σ_1 ; R_{12} con R_{22} y se obtiene Σ_2 y así sucesivamente.

t	R_1	t	R_1	t	R_1	t	R_1	t	R_1
	R_{11}		R_{12}		R_{13}		R_{14}		R_{15}
t_1	0,0098	t_2	-0,0146	t_3	0,0193	t_4	-0,0046	t_5	0,0156
t_2	-0,0146	t_3	0,0193	t_4	-0,0046	t_5	0,0156	t_6	0,0004
t_3	0,0193	t_4	-0,0046	t_5	0,0156	t_6	0,0004	t_7	0,0234
t_4	-0,0046	t_5	0,0156	t_6	0,0004	t_7	0,0234	t_8	-0,0167
t_5	0,0156	t_6	0,0004	t_7	0,0234	t_8	-0,0167	t_9	0,0135
t_6	0,0004	t_7	0,0234	t_8	-0,0167	t_9	0,0135	t_{10}	0,0093
t_7	0,0234	t_8	-0,0167	t_9	0,0135	t_{10}	0,0093	t_{11}	0,0256
t_8	-0,0167	t_9	0,0135	t_{10}	0,0093	t_{11}	0,0256	t_{12}	-0,0144
t_9	0,0135	t_{10}	0,0093	t_{11}	0,0256	t_{12}	-0,0144	t_{13}	-0,0153
t_{10}	0,0093	t_{11}	0,0256	t_{12}	-0,0144	t_{13}	-0,0153	t_{14}	-0,0096
	μ_{11} $\frac{1}{10} \sum_{t_1}^{t_{10}} r_t$		μ_{12} $\frac{1}{10} \sum_{t_2}^{t_{11}} r_t$		μ_{13} $\frac{1}{10} \sum_{t_3}^{t_{12}} r_t$		μ_{14} $\frac{1}{10} \sum_{t_4}^{t_{13}} r_t$		μ_{15} $\frac{1}{10} \sum_{t_5}^{t_{14}} r_t$
t	R_2	t	R_2	t	R_2	t	R_2	t	R_2
	R_{21}		R_{22}		R_{23}		R_{24}		R_{25}
t1	0.0068	t2	-0.0145	t3	0.0173	t4	0.0067	t5	-0.0011
t2	-0.0145	t3	0.0173	t4	0.0067	t5	-0.0011	t6	-0.0112
t3	0.0173	t4	0.0067	t5	-0.0011	t6	-0.0112	t7	0.0270
t4	0.0067	t5	-0.0011	t6	-0.0112	t7	0.0270	t8	-0.0119
t5	-0.0011	t6	-0.0112	t7	0.0270	t8	-0.0119	t9	-0.0070
t6	-0.0112	t7	0.0270	t8	-0.0119	t9	-0.0070	t10	0.0264
t7	0.0270	t8	-0.0119	t9	-0.0070	t10	0.0264	t11	0.0125
t8	-0.0119	t9	-0.0070	t10	0.0264	t11	0.0125	t12	-0.0152
t9	-0.0070	t10	0.0264	t11	0.0125	t12	-0.0152	t13	-0.0227
t10	0.0264	t11	0.0125	t12	-0.0152	t13	-0.0227	t14	0.0366
	μ_{21} $\frac{1}{10} \sum_{t_1}^{t_{10}} r_t$		μ_{22} $\frac{1}{10} \sum_{t_2}^{t_{11}} r_t$		μ_{23} $\frac{1}{10} \sum_{t_3}^{t_{12}} r_t$		μ_{24} $\frac{1}{10} \sum_{t_4}^{t_{13}} r_t$		μ_{25} $\frac{1}{10} \sum_{t_5}^{t_{14}} r_t$

5.2.1. Implementación del portafolio dinámico

Para la implementación del portafolio dinámico nos ayudamos nuevamente del Solver de programación cuadrática de Matlab, con la diferencia que los datos de entrada serán más complejos, en especial la que conforma la matriz H pues está formada por las matrices de varianzas-covarianzas de los retornos en cada tiempo. Lo que la convierte en una matriz de una elevada dimensión dependiendo del tiempo

de predicción $h = t_h$. Esto es: a más pequeño el paso del tiempo t_h más grande la matriz, ver el código C.10.

El código C.10 corrido para un capital inicial de 200, con una rentabilidad mínima exigida de 0.0002 y un horizonte de evaluación de 20 ($t_{dis}=20$), resuelve el problema con la siguiente salida

```
Inver =
5.8671    1.3218    2.2898    6.0876    1.3181    2.2153    6.1821
1.3359    2.1528    6.1715    1.4702    2.2207    6.1064    1.2297
2.5784    5.8579    1.3334    2.6620    5.8147    1.4074    2.6304
5.8147    1.4607    2.6345    6.1342    1.3885    2.5122    6.5683
1.4629    1.9871    6.7681    1.2375    2.1524    6.8113    1.2874
2.0347    6.7335    1.2569    2.1313    6.8270    1.2892    2.0028
6.7938    1.3554    2.0225    6.9539    1.2604    1.9913    6.8308
1.2122    2.0996    7.2303    1.1068    2.0204    7.0979    0.9568
2.1323    7.0849    0.9271    2.1754
```

que nos dice: de los 200 que tiene, invierta 5.8671 en la acción al tiempo 1 (en la semana 1), invierta 1.3218 en la acción 2 al tiempo 1, invierta 2.2898 en la acción tres al tiempo 1, invierta 6.0876 en la acción 1 al tiempo 2, invierta 1.3181 en la acción dos al tiempo 2 y así sucesivamente.

Como se puede observar se ha obtenido una estrategia de inversión flexible a través del tiempo permitiendo un mejor control sobre el capital.

Capítulo 6

Conclusiones

1. Las ecuaciones diferenciales estocásticas representan una interesante metodología para el estudio de los modelos financieros. En especial el movimiento browniano geométrico pues da un modelo bastante acertado y actualmente muy utilizado debido a sus características, pues tiene la propiedad de modelar los precios accionarios de una forma apropiada sin que tome nunca valores negativos, lo que no sucede con el movimiento browniano aditivo. Esto lo convierte en un buen modelo y justifica su utilización.
2. Aunque los códigos implementados en este trabajo son aplicados a portafolios de inversiones accionarias tranzados por petroleras, estos pueden ser usados para diferentes tipos de acciones. Y en particular los códigos que aproximan las EDEs (ver Capítulo 4) pueden ser aplicados a problemas que se reduzcan al modelo de movimientos brownianos geométricos.
3. Es muy importante la implementación adecuada de las técnicas usadas, por ejemplo en el caso de las simulaciones Montecarlo, se debe tomar en cuenta que mientras más réplicas se realicen en la simulación, los resultados van a converger a los valores teóricos. Sin embargo, esto va a significar un aumento en el tiempo de los cálculos y un mayor costo computacional. Por este motivo, se debe encontrar un equilibrio entre la exactitud de los resultados y el costo por obtener los mismos.
4. Aunque existen varias técnicas y modelos para la construcción de portafolios se ha decidido usar el Modelo de Markowitz y una de sus variantes más flexibles como es los Portafolios dinámicos. Esta última técnica ha despertado nuestro interés pues al ser combinada con la predicción de los rendimientos mediante EDEs nos permite cambiar rápidamente una decisión que no es acertada e idealmente predecir su comportamiento.

Apéndice A

Notaciones y abreviaturas

c.t.p.	Casi todo punto.
$cov[X]$	Covarianza de X .
EDE	Ecuación Diferencial Estocástica.
\mathbb{R}	El conjunto de números reales.
$E[X]$	Esperanza.
EM	Euler-Maruyama.
\mathbb{L}^2	Espacio de funciones cuadrado integrables.
MC	Montecarlo.
MB	Movimiento browniano.
MBG	Movimiento browniano geométrico.
v.a.	Variable aleatoria.
v.a.i.	Variable aleatoria independiente.
v.a.i.d.	Variable aleatoria idénticamente distribuida.
$Var[X]$	Varianza de X .

Apéndice B

Solver quadprog de Matlab

En Matlab existen muchos paquetes y comandos que nos facilitan los cálculos en una simulación. En este trabajo se utilizó el solver quadprog que resuelve el problemas de programación cuadrática

$$(B.1) \quad \begin{array}{l} \min \frac{1}{2} \mathbf{x}^T H \mathbf{x} + \mathbf{f}^T \mathbf{x} \\ \text{sujeto a } \left\{ \begin{array}{l} A \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \\ Aeq \cdot \mathbf{x} = \mathbf{beq}, \\ \mathbf{lb} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{ub}. \end{array} \right. \end{array}$$

donde A , Aeq son matrices y H es una matriz simétrica que representa la forma cuadrática de (B.1). Además tanto \mathbf{f} , \mathbf{b} , \mathbf{beq} , \mathbf{lb} , \mathbf{ub} , como \mathbf{x} son vectores. La sintaxis es la siguiente

`x = quadprog(H,f,A,b,Aeq,beq,lb,ub)`

que devuelve un vector \mathbf{x} que minimiza la forma cuadrática de (B.1) satisfaciendo sus restricciones, ver [24]. A continuación un pequeño ejemplo para aclarar los datos de entrada del modelo.

Ejemplo B.0.1 *Sea el problema a minimizar el siguiente*

$$\begin{array}{l} \min \frac{1}{2} x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2 + 5x_1 - x_2 \\ \text{sujeto a } \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 \leq 5, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 3, \\ x_1 + 3x_2 = 6, \\ 5x_1 + 2x_2 = 4, \\ -2 \leq x_1, x_2 \leq 5. \end{array} \right. \end{array}$$

Entonces el problema se resuelve con

`x = quadprog(H,f,A,b,Aeq,beq,lb,ub)`

donde

$$H = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$A_{eq} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad b_{eq} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$lb = -2, ub = 5$$

especifican las condiciones del problema, que se pueden ingresar mediante el teclado o incluirlos en un programa como lo que hemos hecho en el código C.8

Apéndice C

Códigos en Matlab

C.1. Código para generar un movimiento browniano

```
N=200;
T=1; dt=T/N;
dW=zeros(1,N);
W=zeros(1,N);

dW(1)=sqrt(dt)*randn;
W(1)=dW(1);

for j=2:N
    dW(j)=sqrt(dt)*randn;
    W(j)=W(j-1)+dW(j);
end

plot([0:dt:T]','r-')
```

C.2. Código de la implementación del método Euler-Maruyama unidimensional.

```
%Metodo Euler-Maruyama para la discretizacion de una EDE lineal
%  $dX(t) = \mu X(t) dt + \lambda X(t) dW$ ,  $X(0) = Xzero$ ,
% donde  $\lambda = 2$ ,  $\mu = 1$  and  $Xzero = 1$ .
% Sobre el intervalo temporal  $[0,1]$  con pasos  $dt = 2^{-8}$ .

%parametros del problema
mu = 1;
sigma = 2;
```

```

Xzero = 1;
T = 1;
N = 2^8;
dt = 1/N;

%generación del movimiento browniano
dW = sqrt(dt)*randn(1,N);
%iteracion del metodo EM
X(1)=Xzero;
for j = 1:N
X(j+1) = X(j) + mu*X(j)*dt + sigma*X(j)*dW(j);
end
t=[0:dt:T];
plot([0:dt:T], [X], 'r')
xlabel('TIEMPO', 'FontSize', 12)
ylabel('ESTIMACIÓN DE PRECIO POR EL MÉTODO E-M', 'FontSize', 10, 'Rotation', 90)

```

C.3. Código para la calibración de datos.

```

%Calibración de los datos

%precios reales de las acciones
X1real=[datos....];
X2real=[datos...];
X3real=[datos...];

Xreal=[X1real X2real X3real];
tama=size(Xreal);
vars=tama(2);
datos=tama(1);
%geración de variables log para los precios reales
for j=1:vars

```

```

for i=1:(datos-1)
lnReal(i,j)=log(Xreal(i+1,j)/Xreal(i,j));
end
end
muini = mean(lnReal);
sigma=std(lnReal)
for i=1:vars
mu(i)=(muini(i))+(sigma(i)^2/2);
end
mu=mu
%matriz de correlaciones
Cf=corrcoef(lnReal)

```

C.4. Código de la implementación del método Euler-Maruyama multi-dimensional para precios

```

%Euler Maruyama Multidimensional para precios, una corrida
% dXi = mu*Xi dt + lambda*Xi dW, X(0) = Xzero,
% para una prediccion de 4 semanas con 400 observaciones

%Calibración de los datos
Xreal=[X1real X2real X3real];
tama=size(Xreal);
vars=tama(2);
datos=tama(1);
%geración de variables log para los precios reales
for j=1:vars
for i=1:(datos-1)
lnReal(i,j)=log(Xreal(i+1,j)/Xreal(i,j));
end
end
end

```

```

muini = mean(lnReal);
sigma=std(lnReal);
for i=1:vars
mu(i)=(muini(i))+(sigma(i)^2/2);
end
%matriz de corelaciones
Cf=corrcoef(lnReal);
%costrucción de la matriz que permite correlacionar
%los movimientos brownianos
[U,S,V] = svd(Cf);
Svd=U*sqrt(S);
%parametros del problema
Xzero =[X1real(1) X2real(1) X3real(1)];
%predicción para una año con 4 semanas
%con N observaciones
T=4; N = 400; dt = T/N;

%generación de números aleatorios normales(0,1)
dZ = randn(N,vars);
%generación de movimientos bownianos correlacionados
dw = Svd*dZ';
dW=dw';

X=zeros(N,vars);
for j=1:vars
X(1,j)=Xzero(j);
for i = 1:(N-1)
X(i+1,j) = X(i,j) + mu(j)*X(i,j)*dt + sigma(j)*X(i,j)*dW(i,j);%
end
end
plot(X)

```

C.5. Código de la implementación del método Euler-Maruyama multidimensional con MonteCarlo para precios.

```
%Euler Maruyama Multidimensional para precios, con MonteCarlo
%para 10.000 realizaciones
%  $dX_i = \mu \cdot X_i dt + \lambda \cdot X_i dW$ ,  $X(0) = X_{zero}$ ,
% para una prediccion de 4 semanas con 400 observaciones

%Calibración de los datos
Xreal=[X1real X2real X3real];
tama=size(Xreal);
vars=tama(2);
datos=tama(1);
%geración de variables log para los precios reales
for j=1:vars
    for i=1:(datos-1)
        lnReal(i,j)=log(Xreal(i+1,j)/Xreal(i,j));
    end
end
muini = mean(lnReal);
sigma=std(lnReal);
for i=1:vars
    mu(i)=(muini(i))+(sigma(i)^2/2);
end
%matriz de corelaciones
Cf=corrcoef(lnReal);
%costrucción de la matriz que permite correlacionar
%los movimientos brownianos
[U,S,V] = svd(Cf);
Svd=U*sqrt(S);
%parametros del problema
```

```

Xzero =[X1real(1) X2real(1) X3real(1)];
%predicción para una año con 4 semanas
%con N observaciones
T=4; N = 400; dt = T/N;
% para M realizaciones del método MonteCarlo
M=10000;
XMC=zeros(N,3);
for mc=1:M
dZ = randn(N,vars);
%generación de movimientos brownianos correlacionados
dw = Svd*dZ';
dW=dw';
X=zeros(N,vars);
for j=1:vars
X(1,j)=Xzero(j);
for i = 1:(N-1)
X(i+1,j) = X(i,j) + mu(j)*X(i,j)*dt + sigma(j)*X(i,j)*dW(i,j);
XMC(i+1,j)=XMC(i+1,j)+X(i+1,j);
end
end
end

for v=1:vars
for j=1:N
XMC(j,v)=XMC(j,v)/M;
end
end
plot(XMC)

```

C.6. Código de la implementación del método Euler-Maruyama multidimensional para retornos

```
%Euler Maruyama Multidimensional para retornos, una corrida
%  $dX_i = \mu * X_i dt + \lambda * X_i dW$ ,  $X(0) = X_{zero}$ ,
% para una prediccion de 4 semanas con 120 observaciones

%Calibración de los datos
Xreal=[X1real X2real X3real];
tama=size(Xreal);
vars=tama(2);
datos=tama(1);
%geración de variables log para los precios reales
for j=1:vars
    for i=1:(datos-1)
        RenReal(i,j)=log(Xreal(i+1,j)/Xreal(i,j));
    end
end
muini = mean(RenReal);
sigma=std(RenReal);
for i=1:vars
    mu(i)=(muini(i))+(sigma(i)^2/2);
end
%matriz de corelaciones
Cf=corrcoef(RenReal);
%costrucción de la matriz que permite correlacionar
%los movimientos brownianos
[U,S,V] = svd(Cf);
Svd=U*sqrt(S);
%parametros del problema
```

```

Renzero =[RenReal(1,1) RenReal(1,2) RenReal(1,3)];
%predicción para una año con 4 semanas
%con N observaciones
T=4; N = 120; dt = T/N;

%generación de números aleatorios normales(0,1)
dZ = randn(N,vars);
%generación de movimientos brownianos correlacionados
dw = Svd*dZ';
dW=dw';

Ren=zeros(N,3);
for j=1:vars
    Ren(1,j)=Renzero(j);
    for i = 1:(N-1)
        Ren(i+1,j) = mu(j)*dt + sigma(j)*dW(i,j);%
    end
end
plot(Ren)

```

C.7. Código de la implementación del método Euler-Maruyama multi-dimensional con MonteCarlo para retornos.

```

%Euler Maruyama Multidimensional para retornos, con MonteCarlo
%para 50.000 realizaciones
%  $dX_i = \mu * X_i dt + \lambda * X_i dW$ ,  $X(0) = Xzero$ ,
% para una prediccion de 4 semanas con 120 observaciones

%Calibración de los datos
Xreal=[X1real X2real X3real];
tama=size(Xreal);

```



```

vars=tama(2);
datos=tama(1);
%geración de variables log para los precios reales
for j=1:vars
    for i=1:(datos-1)
        RenReal(i,j)=log(Xreal(i+1,j)/Xreal(i,j));
    end
end
muini = mean(RenReal);
sigma=std(RenReal);
for i=1:vars
    mu(i)=(muini(i))+(sigma(i)^2/2);
end
%matriz de corelaciones
Cf=corrcoef(RenReal);
%costrucción de la matriz que permite correlacionar
%los movimientos brownianos
[U,S,V] = svd(Cf);
Svd=U*sqrt(S);
%parametros del problema
Renzero =[RenReal(1,1) RenReal(1,2) RenReal(1,3)];
%predicción para una año con 4 semanas
%con N observaciones
T=4; N = 120; dt = T/N;
%con M realizaciones MonteCarlo
M=50000;
RenMC=zeros(N,vars);

for mc=1:M
    dZ = randn(N,vars);
    %generación de movimientos bownianos correlacionados
    dw = Svd*dZ';

```

```

dW=dw';
Ren=zeros(N,vars);
for j=1:vars
    Ren(1,j)=Renzero(j);
    for i = 1:(N-1)
        Ren(i+1,j) = mu(j)*dt + sigma(j)*dW(i,j);
        RenMC(i,j)=RenMC(i,j)+Ren(i+1,j);
    end
end
end

```

```

for v=1:vars
for j=1:N
RenMC(j,v)=RenMC(j,v)/M;
end
end

```

```

plot(RenMC)

```

C.8. Código de la implementación del portafolio Markowitz.

```

Xreal=[X1real X2real X3real];

vars=3; %numero de variables
datos=126; %numero de datos
%geración de variables log para los precios reales
for j=1:vars
    for i=1:(datos-1)
        RenReal(i,j)=log(Xreal(i+1,j)/Xreal(i,j));
    end
end
end

```

```

muini = mean(RenReal)
sigma=std(RenReal)
for i=1:vars
mu(i)=(muini(i))+(sigma(i)^2/2)
end

%matriz de correlaciones
Cf=corrcoef(RenReal);
[U,S,V] = svd(Cf);
%costrucción la matriz que permite correlacionar
%los movimientos brownianos
Svd=U*sqrt(S);

%parametros del problema

Renzero =[RenReal(1,1) RenReal(1,2) RenReal(1,3)];
% T = 1;

%geración de números aleatorios normales(0,1)

N=2000;
dt=1/N;
M=10;
RenMC=zeros(N,3);
for mc=1:M
dZ = randn(N,3);
dw = Svd*dZ';
dW=dw';
Ren=zeros(N,3);
for j=1:vars

```

```

Ren(1,j)=Renzero(j);
%RenMC(1,j)=RenMC(1,j)+Ren(1,j);
    for i = 1:(N-1)
        Ren(i+1,j) =+ mu(j)*dt + sigma(j)*dW(i,j);
        RenMC(i,j)=RenMC(i,j)+Ren(i+1,j);
    end
end
end

```

```

for v=1:vars
for j=1:N
RenMC(j,v)=RenMC(j,v)/M;
end
end

```

```

%Simulación del portafolio
plot(Y)
U=kron(mu,ones(N,1));
cent=(RenMC-U);
Var_Covar=((cent)'*(cent));
Var_Covar=Var_Covar*(2/(N-1));
f=zeros(1,vars);
A=-mu;
b=-0.009;
Aeq=(ones(1,vars));
beq=1;
lb=zeros(1,vars);
ub=ones(1,vars);
X=quadprog(Var_Covar,f,A,b,Aeq,beq,lb,ub)
Capital=200
Inver=Capital*X

```

Renta=-A*X

C.9. Código de la implementación de la frontera eficiente y del portafolio de media-varianza

```
Xreal=[X1real X2real X3real];

tama=size(Xreal);
vars=tama(2);
datos=tama(1);
%geración de variables log para los precios reales
for j=1:vars
    for i=1:(datos-1)
        RenReal(i,j)=log(Xreal(i+1,j)/Xreal(i,j));
    end
end
muini = mean(RenReal)
sigma=std(RenReal)
for i=1:vars
    mu(i)=(muini(i))+(sigma(i)^2/2)
end
%matriz de corelaciones
Cf=corrcoef(RenReal);
[U,S,V] = svd(Cf);
%costrucción la matriz que permite correlacionar
%los movimientos brownianos
Svd=U*sqrt(S);
%parametros del problema
Renzero =[RenReal(1,1) RenReal(1,2) RenReal(1,3)];
%geración de números aleatorios normales(0,1)
N=2000;
```

```

dt=1/N;
M=10;
RenMC=zeros(N,3);
for mc=1:M
dZ = randn(N,3);
dw = Svd*dZ';
dW=dw';
Ren=zeros(N,3);
  for j=1:vars
Ren(1,j)=Renzero(j);
%RenMC(1,j)=RenMC(1,j)+Ren(1,j);
  for i = 1:(N-1)
    Ren(i+1,j) =+ mu(j)*dt + sigma(j)*dW(i,j);
    RenMC(i,j)=RenMC(i,j)+Ren(i+1,j);
  end
end
end

%MonteCalor de rentabilidades
for v=1:vars
for j=1:N
RenMC(j,v)=RenMC(j,v)/M;
end
end

%Simulación del portafolio
%y construcción de la frontera eficiente

U=kron(mu,ones(N,1));
cent=(RenMC-U);
Var_Covar=((cent) '*(cent));
Var_Covar=Var_Covar*(2/(N-1));

```

```

f=zeros(1,vars);
A=-mu;

Aeq=(ones(1,vars));
beq=1;
lb=zeros(1,vars);
ub=ones(1,vars);
b=0.01;
alpha=0.0001;
HN=floor((2*b-alpha)/alpha);%redondea
H=zeros(3,HN);%almacena las soluciones del modelo
                %markowitz en cada iteracion
Hobj=zeros(HN,1);%almacena el valor de la funcion objetivo
front=zeros(HN,1);%almacena la frontera eficiente
p=1;
%construccion de la frontera eficiente
for k=alpha:alpha:2*b
[X,fval,exit]=quadprog(Var_Covar,f,A,-k,Aeq,beq,lb,ub);
if exit==1
for k1=1:vars
H(k1,p)=X(k1);
end
Hobj(p)=fval;
front(p)=k;
Capital=200;
Inver=Capital*X;
Renta=-A*X;
p=p+1;
end
end
%grafica de la FE
plot(front,Hobj)

```

C.10. Código de la implementación del portafolio dinámico

```
%Simulacion del Portafolio Dinámico
Xreal=[X1real X2real X3real];

tama=size(Xreal);
vars=tama(2);
datos=tama(1);
%geración de variables log para los precios reales
for j=1:vars
    for i=1:(datos-1)
        RenReal(i,j)=log(Xreal(i+1,j)/Xreal(i,j));
    end
end
muini = mean(RenReal);
sigma=std(RenReal);
for i=1:vars
    mu(i)=(muini(i))+(sigma(i)^2/2);
end
%matriz de corelaciones
Cf=corrcoef(RenReal);
[U,S,V] = svd(Cf);
%costrucción la matriz que permite correlacionar
%los movimientos brownianos
Svd=U*sqrt(S);
%parametros del problema
Renzero =[RenReal(1,1) RenReal(1,2) RenReal(1,3)];
%geración de números aleatorios normales(0,1)
N=200;
dt=1/N;
M=10;
RenMC=zeros(N,3);
```



```

for mc=1:M
dZ = randn(N,3);
dw = Svd*dZ';
dW=dw';
Ren=zeros(N,3);
  for j=1:vars
Ren(1,j)=Renzero(j);
  for i = 1:(N-1)
    Ren(i+1,j) =+ mu(j)*dt + sigma(j)*dW(i,j);
    RenMC(i,j)=RenMC(i,j)+Ren(i+1,j);
  end
end
end

Y=zeros(1,N);%y solo es para verificar los graficos en los precios
for v=1:vars
for j=1:N
RenMC(j,v)=RenMC(j,v)/M;
Y(j)=RenMC(j,1);
end
end
%plot(Y)
%Simulación del portafolio dinamico

tdis=20;
th=datos-tdis;
%horizonte tiempo de evaluacion del rendimiento

Din=zeros(th, vars, datos-th);%matriz de datos dinamicos, variables, puntos
                                %discretizados
for tt=1:datos-th
  for v=1:vars

```

```

    l=1;
    for j=tt:tt+th-1
        Din(l,v,tt)=RenMC(j,v);%construccion de las rentabilidades
        l=l+1;
    end
end
end

MuDin=zeros(vars,datos-th);
for tt=1:datos-th
    for v=1:vars
        MuDin(v,tt)=-mean(Din(:,v,tt));
    end
end

CovDin=zeros(vars,vars,datos-th);
for tt=1:datos-th
    MuAux=MuDin(:,tt);
    for i=1:th
        for j=1:vars
            U(i,j)= MuAux(j);
        end
    end
    cent=(Din(:,:,tt)-U);
    Var_Covar=((cent)'*(cent));
    Var_Covar=Var_Covar*(2/(N-1));
    CovDin(:,:,tt)=Var_Covar;
end

f=zeros(1,vars*(datos-th));
A=zeros(1,vars*(datos-th));

```

```

l=1;
for j=1:datos-th
for i=1:vars
    A(l)=MuDin(i,j);
    l=l+1;
end
end

Aeq=(ones(1,vars*(datos-th)));
beq=1;
lb=zeros(1,vars*(datos-th));
ub=ones(1,vars*(datos-th));
b=0.0002;

H=zeros(vars*(datos-th),vars*(datos-th));

for tt=1:(datos-th)
    for v=1:vars
        for w=1:vars
            H(vars*(tt-1)+ v, vars*(tt-1)+ w)=CovDin(v,w,tt);
        end
    end
end

[X,fval,exit]=quadprog(H,f,A,b,Aeq,beq,lb,ub)

Capital=200
Inver=Capital*X
Renta=-A*X

```

Apéndice D

Tablas

Tabla D.1: Precios de acciones petroleras

Fecha	Petro China	Petroleo Brasileño	Penn West Petroleum Ltd
02/01/2009	87.02	25.35	9.45
05/01/2009	81.32	26.32	10.13
12/01/2009	72.92	24.40	9.31
20/01/2009	67.03	24.00	9.69
26/01/2009	67.11	25.58	9.00
02/02/2009	76.23	29.09	9.04
09/02/2009	74.47	29.27	8.62
17/02/2009	66.71	25.94	7.62
23/02/2009	64.47	27.08	7.17
02/03/2009	60.37	26.09	5.87
09/03/2009	67.95	29.35	6.68
16/03/2009	70.01	31.51	8.47
23/03/2009	77.31	31.64	8.50
30/03/2009	78.23	34.28	8.63
06/04/2009	79.19	35.44	8.75
13/04/2009	80.81	33.60	9.35
20/04/2009	80.42	33.00	9.38
27/04/2009	80.91	34.49	9.42
04/05/2009	98.61	39.39	11.00
11/05/2009	94.23	36.45	9.56
18/05/2009	100.74	39.96	10.41
26/05/2009	108.06	43.36	11.88
01/06/2009	112.61	42.60	11.42
08/06/2009	111.20	43.28	11.78
15/06/2009	101.01	39.68	11.04
22/06/2009	103.12	40.23	11.01

Fecha	Petro China	Petroleo Brasileño	Penn West Petroleum Ltd
29/06/2009	100.24	38.40	10.55
06/07/2009	95.06	35.70	9.73
13/07/2009	102.01	39.41	10.83
20/07/2009	110.77	41.81	11.43
27/07/2009	109.41	40.61	11.25
03/08/2009	109.86	41.89	11.42
10/08/2009	105.54	41.57	11.42
17/08/2009	104.75	43.65	11.41
24/08/2009	105.18	40.84	11.35
31/08/2009	106.21	41.22	11.11
08/09/2009	111.25	43.06	11.57
14/09/2009	113.13	44.44	12.54
21/09/2009	109.56	43.59	13.30
28/09/2009	103.55	44.04	13.14
05/10/2009	114.44	47.23	13.89
12/10/2009	121.41	49.60	14.51
19/10/2009	124.89	48.83	15.51
26/10/2009	113.34	45.51	14.55
02/11/2009	120.62	48.26	15.25
09/11/2009	122.27	49.41	15.79
16/11/2009	120.57	49.30	15.49
23/11/2009	118.00	50.55	15.83
30/11/2009	120.73	50.02	15.42
07/12/2009	117.00	47.43	14.95
14/12/2009	112.59	45.85	15.61
21/12/2009	113.70	46.83	16.07
28/12/2009	112.32	47.18	15.96
04/01/2010	123.23	47.95	16.92
11/01/2010	115.35	44.89	16.39
19/01/2010	107.96	41.60	15.51
25/01/2010	105.27	40.14	15.02
01/02/2010	102.76	38.37	15.98
08/02/2010	103.59	40.45	16.66
16/02/2010	105.14	42.15	17.88
22/02/2010	105.67	42.20	18.81
01/03/2010	110.52	44.48	19.38

Fecha	Petro China	Petroleo Brasileño	Penn West Petroleum Ltd
08/03/2010	112.24	46.61	19.83
15/03/2010	110.17	44.95	19.50
22/03/2010	106.18	42.66	19.38
29/03/2010	112.48	44.90	20.00
05/04/2010	115.82	44.75	19.62
12/04/2010	111.47	41.84	18.58
19/04/2010	111.76	43.41	19.45
26/04/2010	108.71	42.22	18.75
03/05/2010	102.93	36.34	16.66
10/05/2010	104.02	37.49	18.35
17/05/2010	100.90	34.16	17.37
24/05/2010	103.15	35.47	18.07
01/06/2010	102.20	35.91	17.89
07/06/2010	108.35	38.16	18.41
14/06/2010	110.08	38.13	19.69
21/06/2010	110.65	35.96	19.34
28/06/2010	105.30	33.98	18.25
06/07/2010	109.28	36.22	18.78
12/07/2010	104.66	34.37	18.27
19/07/2010	110.56	36.14	18.75
26/07/2010	110.04	36.25	18.52
02/08/2010	112.22	38.17	18.69
09/08/2010	105.83	35.72	18.28
16/08/2010	106.61	34.28	18.61
23/08/2010	106.28	33.65	18.63
30/08/2010	107.29	37.32	18.14
07/09/2010	107.79	35.69	18.24
13/09/2010	107.78	35.33	18.16
20/09/2010	112.84	34.77	18.47
27/09/2010	115.14	36.31	19.65
04/10/2010	121.42	34.54	20.97
11/10/2010	126.21	34.15	21.76
18/10/2010	122.72	31.77	21.84
25/10/2010	120.43	33.98	22.13
01/11/2010	129.39	35.98	22.88
08/11/2010	128.60	33.73	21.52

Fecha	Petro China	Petroleo Brasileño	Penn West Petroleum Ltd
15/11/2010	122.09	33.45	21.60
22/11/2010	118.00	32.11	21.27
29/11/2010	126.50	34.25	21.50
06/12/2010	124.96	33.46	21.70
13/12/2010	121.10	33.94	22.64
20/12/2010	125.50	34.14	23.52
27/12/2010	128.79	37.68	23.39
03/01/2011	127.73	36.07	23.95
10/01/2011	135.22	37.26	25.10
18/01/2011	133.36	35.98	25.84
24/01/2011	130.66	35.26	26.15
31/01/2011	138.74	37.88	26.31
07/02/2011	131.01	36.09	26.19
14/02/2011	132.66	37.84	26.16
22/02/2011	131.51	40.21	27.91
28/02/2011	136.39	41.31	27.92
07/03/2011	136.55	39.27	26.48
14/03/2011	130.89	38.71	26.79
21/03/2011	140.87	40.45	27.16
28/03/2011	151.10	41.24	27.52
04/04/2011	151.56	40.47	27.67
11/04/2011	149.05	37.65	25.76
18/04/2011	148.87	38.06	25.28
25/04/2011	142.59	37.17	25.29
02/05/2011	132.12	34.35	24.60
09/05/2011	132.39	33.04	25.58
16/05/2011	133.64	33.87	25.10
23/05/2011	139.56	34.54	25.26
31/05/2011	141.65	33.94	24.99

Bibliografía

- [1] Bernt Oksendal. *Stochastic Differential Equations, An Introduction with Applications*. Springer, Berlin, Alemania, 2003.
- [2] Aureli Alabert. Introducción a las ecuaciones diferenciales estocásticas. Technical report, Universidad Autónoma de Barcelona, Barcelona, 2004.
- [3] T.M. Apostol. *Calculus*. Wiley, 1980.
- [4] L. Bachelier. Théorie de la spéculation. *Annales Scientifiques de l'É.N.S.*, 3(17):21–86, 1900.
- [5] Josefina Martínez Barbeito and Julio García Villalón. Teoría de la valoración mediante modelos financieros estocásticos, en tiempo discreto y en tiempo continuo. *Revista Investigación Operacional*, 24(1):51–75, 2003.
- [6] Patricia Saavedra Barrera and Víctor Hugo Ibarra Mercado. El método monte-carlo y su aplicación a finanzas. Technical report, Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa.
- [7] Prasad Chalasani and Somesh Jha. *Stochastic Calculus and Finance*. Steven Shreve, 1997.
- [8] Rama Cont and Peter Tankov. Financial modelling with jump processes. In CHAPMAN & HALL, editor, *Financial Mathematics Series*. U.S.A, 2004.
- [9] Juan Carlos Cortes, Ana María Debón, and Carla Moreno. Opciones y futuros. Technical report, Comisión Nacional del Mercado de Valores (CNMV) con la colaboración del Instituto MEFF, 2006.
- [10] Juan Carlos Cortes, Ana María Debón, and Carla Moreno. Aplicación del modelo log-normal para la predicción de activos del banco de sabadell. Technical report, Universidad Politécnica de Valencia, Barcelona, 2008.

- [11] Pierre Devolder. *Finance stochastique*. Editions de l'Université de Bruxelles, Bruxelles, 1993.
- [12] Prosper Lamothe Fernández and Miguel Pérez Somalo. *Opciones Financieras y Productos Estructurados*. McGraw-Hill, 2003.
- [13] M. Hazewinkel. *Encyclopaedia of Mathematics (9)*. Encyclopaedia of Mathematics: An Updated and Annotated Translation of the Soviet "Mathematical Encyclopaedia". Springer, 1993.
- [14] Desmond J. Higham. An algorithmic introduction to numerical simulation of stochastic differential equations. *SIAM Review*, 43(3):525–546, 2001.
- [15] Monique Jeanblanc, Marc Yor, and Marc Chesney. Textbook springer finance. In Springer-Verlag, editor, *Mathematical Methods for Financial Markets*. London, 2009.
- [16] Christian Andrew Johnson. Métodos de evaluación del riesgo para portafolios de inversión. Technical Report 67, Banco Central de Chile, Documentos de Trabajo, 2000.
- [17] Peter Kloeden and Eckhard Platen. Applications of mathematics, stochastic modelling and applied probability. In Springer, editor, *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. New York, U.S.A, 1995.
- [18] Andréi Nikoláyevich Kolmogorov. *Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional*. Editorial MIR, Moscú, 1972.
- [19] Klaus Krickeberg. *Teoría de la Probabilidad*. Editorial TEIDE, Barcelona, 1965.
- [20] Ross A. Maller, Robert B. Durand, and John Gould. Dynamic implementation of the markowitz portfolio allocation procedure. Technical report, Accounting and Finance Association of Australia and New Zealand, Australia, 2005.
- [21] A. G. Malliaris and W. A Brock. Stochastic methods in economics and finance. In Elsevier Science, editor, *Advanced Textbooks in Economics*. New York, U.S.A, 1999.

- [22] Benoit Mandelbrot. *Los objetos fractales: Forma, azar y dimensión*. TusQuets, España, 2006.
- [23] Harry Markowitz. Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, 7(1):77–91, March 1952.
- [24] The Mathworks. Matlab Optimization Toolbox User's Guide.
- [25] Robert Merton and Myron Scholes. Théorie de la spéculation. *The Journal of Finance*, 50:1359–1370, 1995.
- [26] M. Musiela and M. Rutkowski. *Martingale Methods in Financial Modelling*. Applications of Mathematics. Springer, 2011.
- [27] Luis Rincón. Introducción a las ecuaciones diferenciales estocásticas. Technical report, Facultad de Ciencias UNAM, México DF.
- [28] Santiago Juan Saglietti. Pequeñas perturbaciones aleatorias de sistemas dinámicos. Technical report, Universidad de Buenos Aires.
- [29] Timothy Sauer. *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations in Finance*. Handbook of Computational Finance. Berlin, 2012.
- [30] J.M. Steele. *Stochastic Calculus and Financial Applications*. Applications of Mathematics. Springer, 2000.
- [31] The Yahoo! Inc. Yahoo!Finance, 2012. <http://www.http://finance.yahoo.com/>.
- [32] Felipe Zanberk. Análisis del riesgo de portafolios: estrategia de inversión por medio de la minimización del var. Technical report, Universidad Diego Portales, Santiago de Chile, 2007.
- [33] Felipe Zanberk. Explosiones en ecuaciones diferenciales estocásticas. Technical report, Universidad de Buenos Aires, 2007.