

ESTUDIO ESTADÍSTICO Y DISEÑO
DE UN GENERADOR DE PULSOS SE-
MI ALEATORIOS

Tesis previa a la obtención del título de Ingeniero en la especialización de Electrónica y Telecomunicaciones de la Escuela Politécnica Nacional.

JORGE H. CAMACHO ANDRADE

Quito, Marzo de 1.976

Certifico que este trabajo
ha sido realizado por el -
señor Humberto Camacho.

Mauricio Vega V.

Eng. Mauricio Vega Vásquez
CONSULTOR DE TESIS

Quito, Marzo de 1.976

A G R A D E C I M I E N T O S

Al Ing. Mauricio Vega, Director de Tesis, compañero y amigo quien sugirió el tema para el presente trabajo de tesis y lo impulsó decididamente contribuyendo con las ideas más brillantes y dedicando mucho de su tiempo para lograr que este trabajo alcance el nivel que tiene.

A mi esposa por su constante apoyo y aliento, - aún en los momentos en que este trabajo parecía no tener ningún futuro y por su infinita paciencia en espera de que llegue el día de mi graduación (7 años).

A la señora Jeanethe Darquea quien escribió y corrigió con gran esmero los originales de este trabajo.

A los profesores de la Escuela Politécnica que en una forma u otra contribuyeron en mi formación académica.

I N T R O D U C C I O N

El presente trabajo de tesis es el resultado de una serie de ideas encaminadas a establecer una medida de similitud entre una secuencia de pulsos de período muy grande con un modelo de Proceso Estocástico al cual se puede asimilar aquella. De hecho, una secuencia de pulsos generada en forma artificial mediante un dispositivo que no hace uso de un fenómeno natural (tal como el ruido térmico generado por un diodo o un transistor, por ejemplo) no puede, de ninguna manera ser considerada como un proceso estocástico pues, para lograrlo nuestro dispositivo debería ser capaz de asumir un número infinito de estados y esto no es posible en la práctica.

El hecho, sin embargo de tener una secuencia de pulsos con un período muy grande nos permite asumir que un período de la onda generada es una función miembro del conjunto infinito de funciones del tiempo que constituyen un proceso estocástico.

Por otra parte, asumiendo que los promedios en el tiempo para una función miembro de este proceso son iguales a los promedios estadísticos del conjunto infinito de fun-

ciones que conforman el proceso, podemos entonces comparar los promedios de la secuencia de pulsos generada por nosotros con los promedios del proceso estocástico modelo.

La manera de expresar en forma adecuada este hecho importante es diciendo que asumimos que se cumple la hipótesis de la ergodicidad.

El tema se propuso originalmente como el estudio teórico y el diseño de un generador de pulsos semialeatorios. Se debía partir de un circuito consistente en un registro de corrimiento realimentado a través de una compuerta lógica no especificada.

Esta forma de presentar el tema de tesis nos permitió el fijar los cuatro objetivos siguientes para este trabajo.

1° Optimización del circuito básico con el propósito de generar una secuencia de pulsos con un período lo más largo posible.

2° Formulación de modelos estocásticos de parámetros estadísticos que representen la idealización de lo que se estaba generando con el circuito.

3° Comparación de los parámetros estadísticos del modelo y los obtenidos de las secuencias generadas.

4° Modificación del circuito con el objeto de obtener otros tipos de procesos estocásticos.

Para el logro del primer objetivo, se estudiaron muchas de las variaciones que podía tener el circuito básico analizando la influencia de cada uno de los siguientes factores:

- 1°) Número de flip - flop del registro de corrimiento.
- 2°) Función lógica de la compuerta de realimentación.
- 3°) Punto de donde se tomaba la realimentación.
- 4°) Programación inicial del conjunto de flip-flop.

Se pudo determinar, de esta manera que la configuración óptima estaba dada por un registro de corrimiento de flip-flop, realimentado con una compuerta "O Exclusivo" y con la realimentación tomada de la salida del sexto flip-flop o del cuarto.

El haber fijado el número de flip-flop puede parecer un tanto arbitrario, pero esto obedeció a razones de orden práctico relacionadas con la utilización de el menor número de flip-flop para obtener una secuencia con un período de longitud razonable y que no presentara ningún-

tipo de anomalía respecto al hecho que se había determinado de que un registró de corrimiento con N flip-flop realimentado con una compuerta "O exclusivo" podía dar un máximo de $2^N - 1$ estados, es decir la totalidad de posibles estados menos uno.

Para obtener algunos resultados fue necesario el simular el circuito mediante un programa para la calculadora HP 9810-A.

El segundo objetivo se logró en base a la formulación de experimentos con monedas y en algunos casos, la obtención de los parámetros estadísticos requirió de un trabajo matemático considerable.

El logro del tercer objetivo se consiguió en base a la elaboración de programas que nos permitieron la obtención de los parámetros estadísticos requeridos que suponían la utilización de los resultados obtenidos por la simulación.

Para el logro del cuarto objetivo se tenían planes muy ambiciosos que fundamentalmente se centraron en la obtención de secuencias de pulsos de amplitud aleatoria para las que se quería controlar la distribución. Matemáticamente se formuló como se podía hacer esto, pero las dificultades de orden tecnológico que surgieron rebasaban en

mucho los propósitos de esta tesis. Se lograron, sin embargo, obtener algunas distribuciones importantes como son: la distribución uniforme discreta, la distribución de Bernoulli y la Normal.

Todas estas distribuciones se caracterizan porque son simétricas. Las distribuciones asimétricas tales como la Poisson o la de Raleigh, presentaron serias dificultades.

El trabajo en general, dada su naturaleza requirió, en muchas ocasiones el acarrear caminos equivocados con la consiguiente pérdida de tiempo y esfuerzos, pero si ganando en experiencia. Puede decirse que este trabajo se ha logrado en base a equivocarse mucho.

A continuación se da la descripción de cada uno de los capítulos:

CAPITULO I

En este capítulo se ha tratado de resumir la teoría general sobre Probabilidades, Variables Aleatorias y Procesos estocásticos. Se ha creído conveniente el incluirlo, por ser esta la primera tesis que ha tenido relación con la teoría de Probabilidades. Su redacción no es de ninguna manera didáctica, pues ocuparía un espacio del que no -

se dispone y que, además no es acorde con los propósitos - de esta tesis.

CAPITULO II

En este capítulo se formulan dos modelos de procesos estocásticos a los que se les da el nombre de Transmisión binaria semialeatoria y transmisión binaria aleatoria. El estudio teórico de estos dos procesos se la ha realizado en la forma más completa posible. Se establece claramente la diferencia entre los dos modelos y para cada uno de ellos se determina las estadísticas de primero y segundo orden. Ambos procesos se estudian luego a la luz de varios criterios de estacionaridad. Como consecuencia de esto se determina que la transmisión binaria semialeatoria no es un proceso estacionario ni en el sentido amplio ni en el sentido estricto.

Una vez establecida la estacionaridad de la transmisión binaria semialeatoria, se estudia la ergodicidad de este proceso. Verificando si se cumple el teorema ergódico para este proceso.

CAPITULO III

Una parte de este capítulo está dedicada a explicar la forma en la que se determinó la configuración óptima del circuito. Se pasa luego a la simulación del mismo mediante un programa para la calculadora programable.

Utilizando un programa para obtener la función de autocorrelación de una onda periódica, se determina ésta para la onda generada por nuestro circuito. Se hace esto para algunos casos y los resultados se comparan con la función de autocorrelación que se obtuviera para la transmisión binaria semialeatoria en el capítulo II. Es interesante el observar que esta comparación viene a constituir una verificación experimental de la hipótesis de la ergodicidad.

Una sección de este capítulo está dedicada a la discusión de la independencia de los eventos que genera nuestro dispositivo. Con esto se quiere establecer una medida para determinar, cual es el grado de dependencia que puede existir entre dos valores sucesivos que pueda tomar la onda generada por nosotros.

Se procede, entonces a formular dos modelos, uno de los cuales lleva el nombre de frecuencia relativa y el otro que lleva el de experimental y con ellos se compara el resultado de la simulación del circuito. Se encuentra finalmente que el modelo de frecuencia relativa resulta ser el más aproximado para caracterizar en lo que a independencia entre eventos se refiere a la onda generada por nosotros.

Los resultados de esta discusión son bastante impor

tantes en gran medida justifican la validez y el sentido de este trabajo.

CAPITULO IV.

En este capítulo se estudia el efecto de modificar el circuito que generaba la transmisión binaria agregando un sumador con el objeto de obtener pulsos con amplitud aleatoria. Con la elección adecuada de las ganancias del sumador se tiene algún control sobre las distribuciones de los procesos generados. Se obtienen así trenes de pulsos con distribuciones uniforme discreta y de Bernoulli. La justificación teórica necesaria se obtiene en base a la aplicación reiterada del teorema de convolución.

En el análisis matemático, entre los muchos procesos de este tipo que se pueden elegir, se toma un proceso de Bernoulli para realizar un análisis matemático más o menos profundo con el objeto de determinar la estadística de segundo orden del mismo y en base a él fijar algunos criterios de tipo general que se puedan aplicar a los procesos de este tipo.

El siguiente paso es experimental y consiste en simular el circuito mediante el programa al que se dió el nombre de "Números aleatorios". Los resultados del mismo se comparan con los obtenidos en forma teórica y se sacan las conclusiones necesarias. Hasta aquí, se puede decir que -

termina la primera parte del capítulo IV.

Lo que sigue, puede considerarse una segunda parte del mismo en donde los esfuerzos se centran ahora en la obtención de pulsos de amplitud aleatoria con densidad Gaussiana.

La justificación teórica de lo que se hará después se encuentra en el Teorema del Límite Central.

Esto nos lleva a modificar nuevamente el circuito, utilizando dos registros de corrimiento realimentados y tres sumadores.

Con un programa se simula el circuito y se obtienen los resultados que nos dan un proceso prácticamente Gaussiano.

CAPITULO V

Aunque este capítulo lleva el título de diseño, su alcance no va más allá que la de proponer algunas configuraciones que deberán diseñarse a base de circuitos integrados, aparte de detectar los principales problemas que pudiera presentar el diseño y darles una solución conveniente.

I N D I C E

Página.

CAPITULO I.

PROBABILIDAD, VARIABLES ALEATORIAS	
Y PROCESOS ESTOCASTICOS.	1
1-1 <u>Las varias definiciones de probabilidad.</u>	1
Definición de frecuencia relativa.- De-		
finición Clásica- Definición Axiomática.		
1-2 <u>Definiciones.</u>	6
Espacio de probabilidad- pruebas- campo-		
Campo de Borel- Definición de un experi-		
mento-		
1-3 <u>Probabilidades Condicionales.</u>	10
1-4 <u>Eventos independientes.</u>	10
1-5 <u>El espacio de probabilidad de dos experi-</u>		
<u>mentos.</u>	11
Experimentos independientes-Generalización		
Exito o falla de un evento en n pruebas		
independientes-		
1-6 <u>Variables Aleatorias.</u>	18
Definición- Función de Distribución- Fun-		
ción de Distribución conjunta de dos va-		
riables aleatorias- La función de Densi-		
dad- Variables aleatorias de tipo conti-		
nuo- Variables aleatorias de tipo discre-		
to- Masas de probabilidad- Función de		

densidad conjunta- Estadística conjunta de dos variables aleatorias- Relación entre las densidades conjunta y marginales Puntos de masa-

1-7 Distribuciones y densidades condicionales. 40
 Variables aleatorias independientes- Definición- Experimentos independientes.

1-7 Funciones de variables aleatorias. 48
 Concepto- Determinación y la densidad de $Y = g(X)$ - Determinación de la función de densidad- Teorema fundamental- Funciones de dos variables aleatorias- Secuencias de variables aleatorias- Densidades marginales Funciones de variables aleatorias-

1-8 Procesos estocásticos. 62
 Introducción- Interpretación de $\bar{X}(t)$ - Discusión- Estadística de primero y segundo orden-

1-9 Promedios. 70
 Valor esperado- Definición- Discusión- Aditividad- Valor esperado condicional- Varianza- Funciones de dos variables aleatorias- Teorema- Momentos- Varias variables aleatorias- Promedios en Procesos estocásticos- Desigualdad de Tchebycheff.

CAPITULO II.

CAPITULO II

TRANSMISION BINARIA. 88

2-1 Introducción. 88

2-2 Transmisión binaria semialeatoria. 88
Funciones de distribución y densidad de primer orden.-Función de distribución de segundo orden- Valor medio- Varianza- Autocorrelación

2-3 Transmisión binaria aleatoria...... 97
Funciones de distribución y densidad de primer orden- Funciones de distribución y densidad de segundo orden- Valor medio- Varianza- Autocorrelación.

2-4 Estacionaridad....,..... 108
Sentido estricto- Sentido amplio.

2-5 Ergodicidad...... 113
Integrales estocásticas- Promedios en el tiempo Ergodicidad- Ergodicidad del valor medio- Teorema ergódico- Ergodicidad de la autocorrelación.

CAPITULO III

GENERACION Y SIMULACION DE LA TRANSMISION BINARIA . 124

3-1 Introducción...... 124

3-2 Descripción del circuito...... 125

3-3 DETERMINACION DE LA COFIGURACION OPTIMA 126

3-3	<u>Determinación de la configuración óptima.....</u>	125
	Influencia del número de flip-flop-Influencia de la función lógica de la compuerta de realimentación Caso de 8 flip-flop, compuerta NOR y K variable	
3-4	<u>Simulación de un registro de corrimiento de N flip-flop con realimentación a través de una compuerta "O Exclusivo".....</u>	134
	Resultados- Programa para la simulación	
3-5	<u>Independencia.....</u>	144
	Modeloteórico- Modelo experimental- Resultados.	
3-6	<u>Determinación experimental de la función de Autocorrelación.</u>	173
	Autocorrelación numérica- Programa "Autocorrelación onda periódica.	

CAPITULO IV.

	PULSOS DE AMPLITUD ALEATORIA CON DENSIDAD GAUSSIANA.....	187
4-1	<u>Introducción.....</u>	187
4-2	<u>Pulsos aleatorios.....</u>	188
	Análisis- Teorema de convolución- Función de densidad uniforme- Distribución Binomial o de Bernoulli- Discusión	
4-3	<u>Discusión.....</u>	200
4-4	<u>Estadística de segundo orden.....</u>	203
	Modelo teórico- Densidad de segundo orden- Función de Autocorrelación - Comentario	

4-5	<u>Simulación</u>	226
	Programa N° 3 "Números Aleatorios"- Resultados- Conclusiones- Autocorrelación.	
4-6	<u>Pulsos aleatorios co densidad Gaussiana</u>	259
	Funciones Gaussiana y de Error- Distribución Nor- mal- El Teorema Del Límite Central- Definición de la propiedad central del Límite- Comentario Obtención de una densidad Normal- Convolución Numérica- Programa N° 4 "Convolución Numé- rica- El circuito- Descripción.	
4-7	<u>Simulación</u>	280
	Programa N° 5 "Simulación de un generador de pul- sos semialeatorios con dos registros y tres su- madores- Resultados-	

CAPITULO V.

	DISEÑO DE UN GENERADOR DE PULSOS SEMIALEATORIOS CON DENSIDAD GAUSSIANA.....	298
5-1	<u>Introducción</u>	298
5-2	<u>Diseño de la red sumadora</u>	299
	Diseño	
5-3	<u>Control de la Varianza</u>	308
5-4	<u>Control del valor medio</u>	314
5-5	<u>Compuerta de realimentación "0-Exclusivo"</u>	315

C A P I T U L O I

PROBABILIDAD, VARIABLES ALEATORIAS Y PROCESOS ESTOCASTICOS.

1-1 LAS VARIAS DEFINICIONES DE PROBABILIDAD

Las siguientes son las definiciones más importantes de probabilidad.

- a.- Frecuencia relativa
- b.- Definición clásica
- c.- Definición axiomática.

DEFINICION DE FRECUENCIA RELATIVA

El experimento en consideración se repite n veces. Si el evento A ocurre n_A veces, entonces su probabilidad $P(A)$ se define como el límite de la frecuencia relativa n_A/n de la ocurrencia de A .

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_A}{n} \quad (1-1)$$

Esta definición presenta el inconveniente de que en un experimento físico, si bien n puede ser muy grande, de todos modos es siempre finita; por eso, n_A/n no puede -

ser igualada a un límite. La definición (1-1) es, entonces una hipótesis acerca de la existencia de este límite y no una cantidad experimental. El problema de relacionar el límite asumido $P(A)$ con la relación experimental n_A/n no está eliminado y, por lo tanto no es adecuada para el desarrollo de una teoría deductiva.

DEFINICION CLASICA

De acuerdo con esta definición, la probabilidad $P(A)$ de un evento A se encuentra "a priori" sin experimentación real. Esto se hace contando el número total N de posibles salidas (alternativas) del experimento G . Si en N_A de estas salidas ocurre el evento A , entonces $P(A)$ está dada por:

$$P(A) = \frac{N_A}{N} \quad (1-2)$$

Llamando las salidas N_A "favorables al evento A ", podemos describir con palabras la relación (1-2).

" $P(A)$ es igual a la relación entre el número de salidas favorable al evento A , al número total de salidas".

Conviene notar que los números en (1-2) son radicalmente diferentes de los que aparecen en (1-1), n y n_A se obtienen efectuando nuestro experimento n veces y su signi

ficado carece de ambigüedad; N y N_A por otra parte son determinados sin experimentación alguna y su significado no es siempre claro.

Es posible mejorar esta definición diciendo:

La probabilidad de un evento A es igual a la relación entre las salidas favorables y el número total de salidas, siempre que estas sean igualmente probables.

Esta definición falla en lo siguiente:

- 1° La definición es circular, pues se hace en base al concepto que se va a definir.
- 2° Solo puede ser usada en una clase limitada de problemas, es decir, en aquellos en los que las salidas son igualmente probables.
- 3° La definición clásica, aunque presentada como una necesidad lógica a priori, hace uso implícito de la interpretación de frecuencia relativa para la probabilidad, en el sentido de que muchos valores de probabilidad aceptados se basan en la experiencia.
- 4° En muchos problemas, el número posible de salidas es infinito. Para determinar probabilidades de varios eventos según (1-2), se debe introducir alguna medida de infinito como longitud o area.

La definición clásica resulta, sin embargo, ser una herramienta muy útil en la solución de problemas en los que en base a la experiencia se ha logrado establecer que las salidas del experimento en cuestión son equi-probables. En otros casos resulta impráctico el determinar información probabilística repitiendo un experimento que puede dar lugar a muchas salidas. En tales casos, no hay elección y no queda otra cosa que "asumir la información". Esto se hace a veces postulando que ciertas alternativas son igualmente probables. $P(A)$ se encuentra de (1-2).

En otras palabras, se hace uso de la definición clásica como "hipótesis de trabajo", con la que se pueden derivar ciertas conclusiones, las cuales pueden ser probadas experimentalmente.

DEFINICION AXIOMATICA

Para entender esta importante definición necesitamos los siguientes conceptos:

En un experimento dado, denotamos con S el evento seguro esto es, el evento que ocurre en cada prueba. Dados dos eventos A y B , denotamos con $A+B$ el evento que ocurre cuando ocurren A , B o ambos. Decimos que A y B son eventos mutuamente excluyentes, cuando la ocurrencia de uno de ellos excluye la ocurrencia del otro.

En el desarrollo axiomático de la teoría de probabilidades se procede como sigue:

La probabilidad de un evento A es un número $P(A)$ asignado a este evento.

Este número obedece a los siguientes tres postulados:

I. $P(A)$ es positivo:

$$P(A) \geq 0 \quad (1-3)$$

II. La probabilidad del evento seguro es igual a 1.

$$P(S) = 1 \quad (1-4)$$

III. Si A y B son mutuamente excluyentes, entonces;-

$$(AB = 0)$$

$$P(A+B) = P(A) + P(B) \quad (1-5)$$

La teoría resultante se basa en estos tres postulados y en nada más. Esta es la forma más clara de introducir la teoría de probabilidades ya que pone énfasis en el carácter deductivo de la teoría, removiendo todas las ambigüedades conceptuales.

COROLARIOS. De los axiomas anteriores se concluye que:

$$P(O) = 0 \quad (1-6)$$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) \leq 1 \quad (1-7)$$

Si A y B no son mutuamente excluyentes

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) \quad (1-8)$$

Si $B \subset A$, entonces

$$P(A) = P(B) + P(A\bar{B}) \geq P(B) \quad (1-9)$$

NOTACION

Con k designaremos los elementos de un conjunto.

Con letras mayúsculas A, B, C, ... etc. designaremos los conjuntos.

S servirá para designar el conjunto universal.

O servirá para designar el conjunto vacío.

1-2 DEFINICIONES

ESPACIO DE PROBABILIDAD.-

Vamos a identificar los elementos k de un espacio S con salidas experimentales. Llamaremos a los subconjuntos de S "eventos", al espacio S "evento seguro" y al conjunto vacío O "evento imposible". Estos conceptos no es -

tán determinados en forma única a partir del experimento físico en cuestión y ellos deberán especificarse en forma cuidadosa.

PRUEBAS.-

Por prueba queremos significar una sola realización de un experimento bien definido. En esta prueba observamos una sola salida k_i (o lo que convengamos en considerar como salida). Decimos que el evento A ha ocurrido en esta prueba si es que aquel contiene el elemento k_i . Entonces, el evento A ocurrirá en todas las pruebas cuyas salidas son elementos de A.

CAMPO.-

Los eventos son colecciones de salidas (subconjuntos de S) a los cuales hemos asignado probabilidades. La clase de los eventos la denotaremos con \mathcal{F} .

La clase de los eventos debe reunir las siguientes condiciones:

- 1° El conjunto vacío y el espacio S deben ser eventos.
- 2° La salida de cualquier operación de conjuntos que involucra eventos debe ser también un evento. Entonces, si A y B son eventos, $A+B$, AB y $A-B$ deben ser eventos. Si este es el caso, entonces la clase \mathcal{F} es llamada un campo.

La siguiente definición da un conjunto mínimo de condiciones para que sea un campo.

- 1° Si $A \in \mathcal{F}$ entonces $\bar{A} \in \mathcal{F}$
- 2° Si $A \in \mathcal{F}$ y $B \in \mathcal{F}$, entonces $A + B \in \mathcal{F}$

CAMPO DE BOREL

Si los conjuntos A_1, \dots, A_n pertenecen a un campo, entonces también los conjuntos

$A_1 + \dots + A_n$ y $A_1 \cdot \dots \cdot A_n$
entonces el campo es llamado Campo de Borel.

Es claro que la clase de todos los subconjuntos de S es un campo de Borel.

EVENTOS

Desde ahora asumiremos que los eventos son ciertos (posiblemente todos) subconjuntos de S que forman un campo de Borel \mathcal{F} . Hacemos esto porque, cuando consideramos uniones, intersecciones, secuencias y límites de eventos, queremos estar seguros de que los conjuntos resultantes son también eventos, esto es, que estén asignadas probabilidades para ellos.

ADITIVIDAD INFINITA.

De (1-5) se concluye fácilmente que, si los eventos A_1, \dots, A_n son mutuamente excluyentes, entonces

$$P(A_1+A_2+\dots+A_n) = P(A_1)+P(A_2) + \dots +P(A_n) \quad (1-10)$$

Una extensión a un número infinito de eventos no se sigue de (1-5), sino que es un axioma adjunto.

III_a Si

$$A_i A_j = 0 \quad i = j \quad i, j = 1, \dots, n, \dots$$

entonces

$$P(A_1+\dots+A_n+\dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots +P(A_n) + \dots \quad (1-11)$$

DEFINICION DE UN EXPERIMENTO.

Estamos ahora en posición de dar una definición axiomática completa de un experimento. Un experimento C es:

- 1° Un conjunto S de elementos o salidas k; este conjunto es llamado espacio o evento seguro.
- 2° Un campo de Borel \mathcal{F} consistente de ciertos subconjuntos de S llamados eventos.
- 3° Un número P(A) asignado a cada evento A; este número es llamado probabilidad del evento A y satisface los axiomas I, II, III y III_a.

Entonces G está especificado por los tres conceptos anteriores, S, \mathcal{F} y P:

G: (S, \mathcal{F} , P)

1-3. PROBABILIDADES CONDICIONALES.

Dado un evento M, con probabilidad diferente de ce-
ro.

$$P(M) > 0 \quad (1-12)$$

definimos la probabilidad condicional de "A asumiendo M" -
por:

$$P(A/M) = \frac{P(AM)}{P(M)} \quad (1-13)$$

En palabras: $P(A/M)$ es igual a la probabilidad del-
evento AM (La parte de A incluida en M) dividida por la -
probabilidad de M. Claramente, si A y M no tienen elemen-
tos comunes (Mutuamente excluyentes), entonces $P(A/M) = 0$
Si $A \subset M$, entonces $AM = A$; entonces:

$$P(A/M) = \frac{P(A)}{P(M)} \geq P(A)$$

Si $M \subset A$, entonces

$$P(A/M) = \frac{P(M)}{P(M)} = 1$$

Se puede demostrar que las probabilidades condicionales sa-
tisfacen los axiomas I, II y III.

1-4.- EVENTOS INDEPENDIENTES.-

El concepto de independencia es básico. Se puede -

decir que gracias a él la Teoría de Probabilidades se ha desarrollado como una disciplina separada y no es considerada como un mero tópicó de la teoría de la medida.

DEFINICION. Dos eventos A y B son llamados independientes si

$$P(AB) = P(A)P(B) \quad (1-14)$$

de la definición y de 1-13, se concluye que, si los eventos A y B son independientes, entonces

$$P(A/B) = P(A) \text{ y } P(B/A) = P(B) \quad (1-15)$$

Independencia de n eventos.

En general diremos que los eventos A_1, \dots, A_n son independientes si, con k_1, k_2, \dots, k_r cualquier conjunto de enteros tenemos:

$$P(A_{k_1} A_{k_2} \dots A_{k_r}) = P(A_{k_1}) P(A_{k_2}) \dots P(A_{k_r})$$

1-5 EL ESPACIO DE PROBABILIDAD DE DOS EXPERIMENTOS

Dados dos experimentos G_1 y G_2 con salidas k_1 y k_2 que forman los espacios S_1 y S_2 y las probabilidades de varios eventos de estos dos experimentos a las que denotaremos por $P_1(\)$ y $P_2(\)$, respectivamente. La ejecución de ambos experimentos puede ser considerada como un nuevo experimento G cuyas salidas son pares de objetos.

(k_1, k_2)

que forman el espacio

$$S = S_1 \times S_2$$

Con \times queremos significar el producto cartesiano de los es pacios S_1 y S_2 .

Este experimento combinado lo escribiremos en la forma:

$$G = G_1 \times G_2$$

En este experimento, consideraremos como eventos to dos los subconjuntos de S de la forma:

$$A \times B \tag{1-16}$$

en donde A y B son eventos de los experimentos G_1 y G_2 , respectivamente, y, puesto que tales eventos deben formar un campo, todas las sumas y productos de conjuntos de la forma (1-16) son también eventos.

Para completar la especificación del experimento G , debemos definir probabilidades de sus varios eventos. Observamos en primer lugar que si A es un evento de G_1 con probabilidad $P_1(A)$, entonces la probabilidad $P(A \times S_2)$ del evento $A \times S_2$ en el experimento G debe ser tal que:

$$P(A \times S_2) = P_1(A) \tag{1-17}$$

Por que $A \times S_2$ consiste de todos los elementos (k_1, k_2) tales que $k_1 \in A$ y k_2 es cualquier elemento de S_2 en consecuencia $A \times S_2$ ocurre en el experimento G si A ocurre en el experimento G_1 , no importa cual sea la salida del experimento G_2 . Por eso, la probabilidad de $A \times S_2$ en G debe ser igual a la probabilidad de A en G_1 .

Se concluye en forma similar que:

$$P(S_1 \times B) = P_2(B) \quad (1-18)$$

Las relaciones (1-17) y (1-18) no son suficientes para determinar las probabilidades de todos los eventos del experimento combinado G . Entonces la probabilidad del evento $A \times B$, esto es, la ocurrencia del evento A en G_1 y B en G_2 no puede ser determinada de $P_1(A)$ y $P_2(B)$. Ella debe proporcionarse como información adicional acerca de los dos experimentos.

En muchos casos importantes se asume que

$$P(A \times B) = P_1(A) P_2(B) \quad (1-19)$$

Si este es el caso para cualesquiera que sean A y B , entonces decimos que los experimentos A y B son independientes.

EXPERIMENTOS INDEPENDIENTES.-

En el experimento G asumimos que los eventos.

$$(A \times S_2) \quad \text{y} \quad (S_1 \times B)$$

son independientes para cualquier A y B, puesto que

$$(A \times S_2) (S_1 \times B) = A \times B$$

y

$$P(A \times S_2) = P_1(A) \quad P(S_1 \times B) = P_2(B)$$

concluimos; entonces que:

$$P(A \times B) = P_1(A)P_2(B)$$

Entonces la probabilidad del evento $A \times B$ del experimento combinado $G = G_1 \times G_2$ se determina de las probabilidades de los eventos A y B en los experimentos G_1 y G_2 . Y puesto que todos los eventos en G son sumas y productos de conjuntos de la forma $A \times B$, concluimos de (1-19) y de los axiomas que el experimento G está completamente especificado en términos de P_1 y P_2 .

Si $\{k_1\}$ y $\{k_2\}$ son dos eventos elementales de G_1 y G_2 , entonces

$$\{(k_1, k_2)\}$$

es un evento elemental de G y

$$P\{k_1, k_2\} = P_1\{k_1\} P_2\{k_2\}$$

Desde ahora, con el objeto de simplificar la notación escribiremos un elemento del espacio producto S , no como (k_1, k_2) , sino simplemente como $k_1 k_2$.

GENERALIZACION

Dados n conjuntos

$$S_1, S_2 \dots S_n$$

Definimos como su producto cartesiano.

$$S = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n \quad (1-20)$$

el conjunto cuyos elementos son las tuplas ordenadas de orden n

$$k_1 k_2 \dots k_n$$

en donde k_i es un elemento del conjunto S_i

Dados n experimentos

$$G_i : (S_i, \mathcal{F}_i, P_i) \quad i = 1, 2 \dots n$$

con

$$G = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$$

Queremos significar el experimento combinado que resulta de la ejecución de todos los experimentos dados. El espacio S de G es el producto cartesiano (1-20) de los espacios S_i y sus eventos son todos conjuntos de la forma:

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$$

donde $A_i \subset S_i$

Si los experimentos son independientes, entonces la probabilidad $P(A)$ del evento $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ está dada por:

$$P(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n) = P_1(A_1)P_2(A_2) \dots P_n(A_n) \quad (1-21)$$

en donde $P_i(A_i)$ es la probabilidad del evento A_i en el experimento G_i .

EXITO O FALLA DE UN EVENTO EN n PRUEBAS INDEPENDIENTES.

Supongamos que la probabilidad de un evento A en un experimento G es igual a $P(A)$. Ejecutamos este experimento n veces; esto es, efectuamos el experimento combinado.

$$G \times G \times \dots \times G$$

y queremos determinar la probabilidad $p_n(k)$ de que el evento A ocurra exactamente k veces en cualquier orden.

Con

$$P(A) = p \quad P(\bar{A}) = q \quad p + q = 1$$

vamos a demostrar que:

$$p_n(k) = P\{A \text{ ocurra } k \text{ veces}\} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad (1-22)$$

en donde $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Este experimento es equivalente al de tirar n veces una moneda y observar el número de caras obtenidas.

DEMOSTRACION.-

El evento {A ocurre k veces en un orden específico} puede escribirse como un producto cartesiano.

$$B_1 \times B_2 \times \dots \times B_n$$

donde k de los eventos B_i son iguales a A y, los restantes $n-k$ iguales a \bar{A} . Como sabemos de (1-21), su probabilidad está dada por:

$$P_1(B_1)P_2(B_2) \dots P_n(B_n) = p^k q^{n-k} \quad (1-23)$$

por que

$$P_i(B_i) = \begin{cases} p & \text{si } B_i = A \\ q & \text{si } B_i = \bar{A} \end{cases}$$

Entonces

$$P\{\text{A ocurre } k \text{ veces en un orden específico}\} =$$

$$p^k q^{n-k} \quad (1-24)$$

Es claro que el evento

{A ocurre k veces en cualquier orden }

es la suma de los eventos

{A ocurre k veces en un orden específico}

Estos eventos son mutuamente excluyentes y su número es igual a

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

En consecuencia:

$$P\{A \text{ ocurre } k \text{ veces}\} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

1-6 VARIABLES ALEATORIAS.-

Dado un experimento G especificado por el espacio S , el campo \mathcal{F} de los subconjuntos de S llamados eventos y la probabilidad P asignada a estos eventos. A cada salida k de este experimento, le asignamos un número $X(k)$. Hemos definido, entonces una función X cuyo dominio es el conjunto S de todas las salidas y cuyo recorrido es un conjunto de números. Esta función es llamada variable aleatoria, siempre que satisfaga ciertas condiciones generales que se darán luego.

Todas las variables aleatorias se escribirán con letras mayúsculas X, Y, Z , etc.

El símbolo $X(k)$ indicará el número asignado a la salida específica k , en tanto que X indicará la regla de correspondencia entre cualquier elemento de S y el número asignado a él.

Al tratar con variables aleatorias se está interesado con frecuencia en preguntas de la siguiente forma: Da-

do un número real x , ¿Cuál es la probabilidad de que la variable aleatoria X sea menor que x ?, o dados dos números x_1 y x_2 , ¿Cuál es la probabilidad de que X tome valores entre x_1 y x_2 ?

Como sabemos, las probabilidades se asignan única-mente a los eventos, esto es, a varios subconjuntos del evento seguro S . En consecuencia, para contestar las preguntas anteriores, debemos ser capaces de expresar las condiciones impuestas para X como eventos..

Si x es un número dado, la notación $\{X \leq x\}$ representa un conjunto consistente de todas las salidas k tales que

$$X(k) \leq x \quad (1-26)$$

Esta notación especifica el conjunto $\{X \leq x\}$ no explícitamente por sus elementos sino por su propiedad. Es necesario tener un entendimiento muy claro de esto.

En forma similar, con dos números dados x_1 y x_2 , $\{x_1 \leq X \leq x_2\}$ es el conjunto consistente de todas las salidas k tales que:

$$x_1 \leq X(k) \leq x_2 \quad (1-27)$$

Finalmente, $\{X(k) = x\}$ es el conjunto de todos los k tales que

$$X(k) = x \quad (1-28)$$

En forma más general, si I es cualquier conjunto de números, entonces:

$$\{X \in I\}$$

es el conjunto de todos los k tales que $X(k)$ es un número que pertenece al conjunto I .

Daremos ahora las condiciones que la función X debe satisfacer para ser una variable aleatoria. Claramente, $\{X \leq x\}$ es un subconjunto de S ; queremos que sea un evento, esto es, que pertenezca al campo de probabilidad para todo x . Solamente entonces podemos hablar acerca de la probabilidad de que la variable aleatoria X es menor que un número dado x .

De la condición anterior se sigue que el conjunto $\{x_1 < X \leq x_2\}$ es también un evento puesto que:

$$\{x_1 < X \leq x_2\} = \{X \leq x_2\} - \{X \leq x_1\} \quad (1-29)$$

Como es fácil de ver. Y, puesto que $\{X \leq x_1\}$ y $\{X \leq x_2\}$ son eventos por suposición, su diferencia es también un evento porque los eventos forman un campo.

Se puede demostrar en forma similar que si I es cualquier conjunto de números reales que puede ser escrito como suma o producto contable de intervalos, entonces el conjunto:

$$\{X \in I\}$$

es un evento que puede ser escrito como una suma o producto contable de eventos de la forma $\{X \leq x\}$ pertenecientes a un campo de Borel.

De lo anterior se concluye que $\{X = x\}$ es un evento para cualquier x . En particular los conjuntos:

$$X = +\infty \quad \text{y} \quad X = -\infty$$

son también eventos. Estos eventos no son en general vacíos, esto es, permitimos que la variable aleatoria X sea igual a $+\infty$ o $-\infty$ para algunas salidas k .

Sin embargo exigiremos que el conjunto de tales salidas tenga probabilidad cero. Con esta condición final se ha completado la especificación de una variable aleatoria.

DEFINICION:

Una variable aleatoria real X es una función real - cuyo dominio es el espacio S (esto es, un proceso de asignar un número real $X(k)$ a cada salida k del experimento G) y tal que:

- 1° El conjunto $\{X \leq x\}$ es un evento para cualquier número real x .
- 2° La probabilidad de los eventos $\{X = +\infty\}$ y $\{X = -\infty\}$

es igual a cero.

$$P\{X = +\infty\} = P\{X = -\infty\} = 0 \quad (1-30)$$

LA FUNCION DE DISTRIBUCION

Dado un número real x , el conjunto $\{X \leq x\}$ consistente de todas las salidas k tales que $X(k) \leq x$ es un evento. Su probabilidad $P\{X \leq x\}$ es un número que depende de x . - Esta función se denotará por:

$$F_x(x)$$

y será llamada la función de distribución o distribución - de la variable aleatoria X .

DEFINICION.

La función de distribución de la variable aleatoria X es la función

$$F_x(x) = P\{X \leq x\} \quad (1-131)$$

definida para cualquier número x desde $-\infty$ a $+\infty$

Entonces, para un x dado, $F_x(x)$ es igual a la probabilidad del evento $\{X \leq x\}$ consistente de todas las salidas k tales que $X(k) \leq x$. Por brevedad diremos que $F_x(x)$ es igual

a la probabilidad de que $X \leq x$.

Consideremos las variables aleatorias:

$$X, Y, Z$$

Sus funciones de distribución se denotan por:

$$F_x(x), F_y(y), F_z(z)$$

En esta notación, los argumentos x, y, z , son números reales que van de $-\infty$ a $+\infty$. Ellos pueden identificarse con cualquier letra, esto es, podemos escribir las funciones de distribución en la forma:

$$F_x(w), F_y(w), F_z(w)$$

identificando la variable aleatoria correspondiente por los subíndices. Por ejemplo, $F_x(w)$ es igual a la probabilidad de que la variable aleatoria X sea menor que o igual al número w . Sin embargo, si es que no hay lugar a ninguna ambigüedad, omitiremos los subíndices e identificaremos la variable aleatoria por la letra usada para la variable independiente. Entonces, por

$$F(x), F(y), F(z).$$

queremos significar las funciones de distribución de las variables aleatorias X, Y y Z .

Puesto que las probabilidades están siempre limitadas por cero y uno, los valores extremos de la función de distribución deben ser también cero y uno.

$$F(-\infty) = 0 \quad F(+\infty) = 1 \quad (1-32)$$

Se sigue, además que la probabilidad de que la variable aleatoria X se encuentre en el intervalo $x_1 < X \leq x_2$ es simplemente la diferencia entre los valores de probabilidad que indica la función de distribución para los puntos límite del intervalo:

$$P\{x_1 < X \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1) \quad (1-33)$$

La ecuación (1-33) nos muestra que $F(x_2) \geq F(x_1)$ cuando $x_2 > x_1$ y en consecuencia que la función de distribución de probabilidad es una función no decreciente de x .

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN CONJUNTA DE DOS VARIABLES ALEATORIAS.-

En forma paralela al caso de una variable aleatoria podemos definir la función de distribución conjunta de dos variables aleatorias:

Dadas dos variables aleatorias X e Y tal como se han definido anteriormente, los conjuntos $\{X \leq x\}$ y $\{Y \leq y\}$ son eventos con probabilidades respectivas:

$$P\{X \leq x\} = F_X(x) \quad P\{Y \leq y\} = F_Y(y)$$

donde $F_X(x)$ y $F_Y(y)$ son las funciones de distribución de las variables aleatorias X e Y . Es claro que el producto

$$\{X \leq x\} \{Y \leq y\} = \{X \leq x, Y \leq y\}$$

de los dos conjuntos anteriores consistentes de todas las salidas k tales que $X(k) \leq x$ y $Y(k) \leq y$, es también un evento. La probabilidad de este evento es una función de x e y , conocida como función de distribución conjunta de las variables aleatorias X e Y .

DEFINICION

La función de distribución conjunta de las variables aleatorias X e Y está definida por:

$$F_{XY}(x, y) = P\{X \leq x, Y \leq y\} \quad (1-34)$$

En el estudio de varias variables aleatorias, la distribución de cada variable es a veces llamada marginal. Entonces $F_X(x)$ es la distribución marginal de x . En general, $F_{XY}(x, y)$ no puede determinarse a partir de $F_X(x)$ y $F_Y(y)$. Sin embargo, ella está relacionada con estas funciones, Mantenemos, por ejemplo que:

$$F_{XY}(x, \infty) = F_X(x), \quad F_{XY}(\infty, y) = F_Y(y) \quad (1-35)$$

001710

En efecto, puesto que $\{Y \leq \infty\}$ es el evento seguro, se tiene que:

$$\{X \leq x, Y \leq \infty\} = \{X \leq x\}$$

en forma similar

$$\{X \leq \infty, Y \leq y\} = \{Y \leq y\}$$

y 1-35 se sigue.

Es claro que, $\{X \leq \infty, Y \leq \infty\}$ es el evento seguro. En consecuencia

$$F_{XY}(\infty, \infty) = 1$$

Además, puesto que

$$\{X = -\infty, Y \leq y\} = \{X = -\infty\}$$

y el evento $\{X = -\infty\}$ tiene probabilidad cero (véase 1-30), entonces el evento $\{X = -\infty, Y \leq y\}$ debe tener también probabilidad cero. En consecuencia:

$$F_{XY}(-\infty, y) = 0 \tag{1-36}$$

$$F_{XY}(x, -\infty) = 0 \tag{1-37}$$

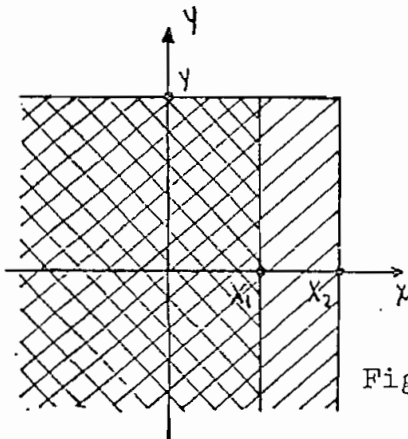


Fig. 1-1

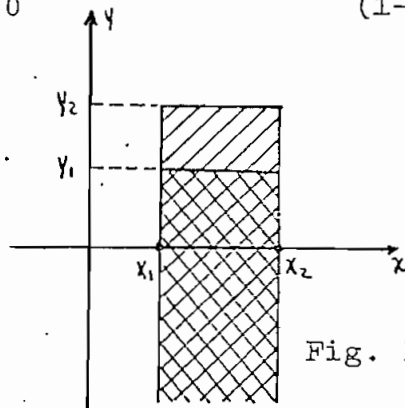


Fig. 1-2

Ahora supongamos que $x_1 < x_2$. Como es fácil de ver - en la figura 1-1. Entonces:

$$\{X \leq x_2, Y \leq y\} = \{X \leq x_1, Y \leq y\} + \{x_1 < X \leq x_2, Y \leq y\}$$

Los dos primeros conjuntos de arriba son eventos, - por eso el último también es un evento. Además, los dos - últimos eventos son mutuamente excluyentes por que, si para alguna salida k tenemos $X(k) \leq x_1$, entonces $X(k)$ no puede estar entre x_1 y x_2 .

Por eso:

$$P\{X \leq x_2, Y \leq y\} = P\{X \leq x_1, Y \leq y\} + P\{x_1 < X \leq x_2, Y \leq y\}$$

De lo anterior y 1-34, concluimos, eliminando subíndices, que

$$P\{x_1 < X \leq x_2, Y \leq y\} = F(x_2, y) - F(x_1, y) \geq 0 \quad (1-38)$$

Similarmente, si $y_1 < y_2$, entonces

$$P\{X \leq x, y_1 < Y \leq y_2\} = F(x, y_2) - F(x, y_1) \geq 0 \quad (1-39)$$

De lo anterior se sigue que $F(x, y)$ es una función no decreciente de x e y .

Se tiene también (Fig. 1-2)

$$\begin{aligned} \{x_1 < X \leq x_2, Y \leq y_2\} \\ = \{x_1 < X \leq x_2, Y \leq y_1\} + \{x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2\} \end{aligned}$$

Y, puesto que los dos últimos eventos son mutuamente excluyentes obtenemos con (1-38) y (1-39) la relación básica.

$$\begin{aligned} P\{x_1 < X \leq x_2, Y_1 < Y \leq Y_2\} \\ = F(x_2, Y_2) - F(x_1, Y_2) - F(x_2, Y_1) + F(x_1, Y_1) \geq 0 \end{aligned} \quad (1-40)$$

Entonces, la función de distribución conjunta de dos variables aleatorias debe ser no decreciente y debe satisfacer la desigualdad anterior.

LA FUNCION DE DENSIDAD

La derivada

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} \quad (1-41)$$

de la función de distribución $F(x)$ es llamada la Función de Densidad de la variable aleatoria X . Puesto que $F(x)$ puede no tener derivada para todo x , se deben distinguir varios tipos de variables aleatorias.

VARIABLES ALEATORIAS DE TIPO CONTINUO

Supongamos que $F(x)$ es una función continua de x . No se sigue, por supuesto que ella tiene una derivada para todo x . Asumiremos que el número de puntos para los cuales

$F(x)$ no es diferenciable es contable. Decimos, entonces - que la variable aleatoria X es del tipo continuo: Su función de densidad está dada por (1-41) para todos los puntos en los cuales $dF(x)/dx$ existe.

De la monotonía de $F(x)$ se sigue que $f(x)$ es no negativa,

$$f(x) > 0 \quad (1-42)$$

y de (1-40) y de (1-33) que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = F(\infty) - F(-\infty) = 1 \quad (1-43)$$

Integrando (1-41) de $-\infty$ a x y usando $F(-\infty) = 0$, concluimos que

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(\xi) d\xi \quad (1-44)$$

En consecuencia:

$$F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \quad (1-45)$$

De lo anterior y de (1-33) se obtiene la relación básica

$$P\{x_1 \leq X \leq x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \quad (1-46)$$

y para Δx suficientemente pequeño,

$$P\{x \leq X \leq x + \Delta x\} \approx f(x) \Delta x \quad (1-47)$$

La función de densidad $f(x)$ se puede, entonces definir como un límite:

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P\{x \leq X \leq x + \Delta x\}}{\Delta x} \quad (1-48)$$

Puesto que

$$P\{x - \varepsilon \leq X \leq x\} = F(x) - F(x - \varepsilon)$$

y cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ concluimos que

$$P\{X = x\} = F(x) - F(x^-) \quad (1-49)$$

De (1-49) vemos que si X es del tipo continuo, entonces

$$P\{X = x\} = 0 \quad (1-50)$$

para cualquier x .

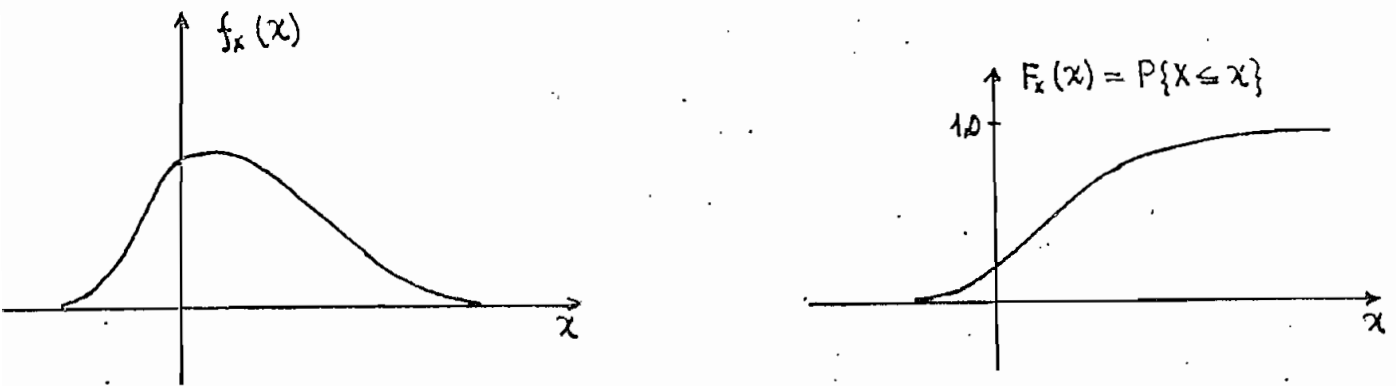


Fig. 1-3.

En la figura 1-3 se muestra un ejemplo de las funciones de Densidad y de Distribución de una variable aleatoria continua X .

VARIABLES ALEATORIAS DEL TIPO DISCRETO

Supongamos ahora que la función de distribución $F(x)$ de la variable aleatoria X es del tipo escalera con discontinuidades en los puntos x_i (Fig. 1-4). Decimos entonces que X es del tipo discreto. Denotando con p_i el salto de $F(x)$ en el punto x_i , tenemos

$$P\{X = x_i\} = p_i = F(x_i) - F(x_i^-) \quad i = 1, 2, \dots \quad (1-51)$$

en donde:

$$\sum_i p_i = F(\infty) - F(-\infty) = 1 \quad (1-52)$$

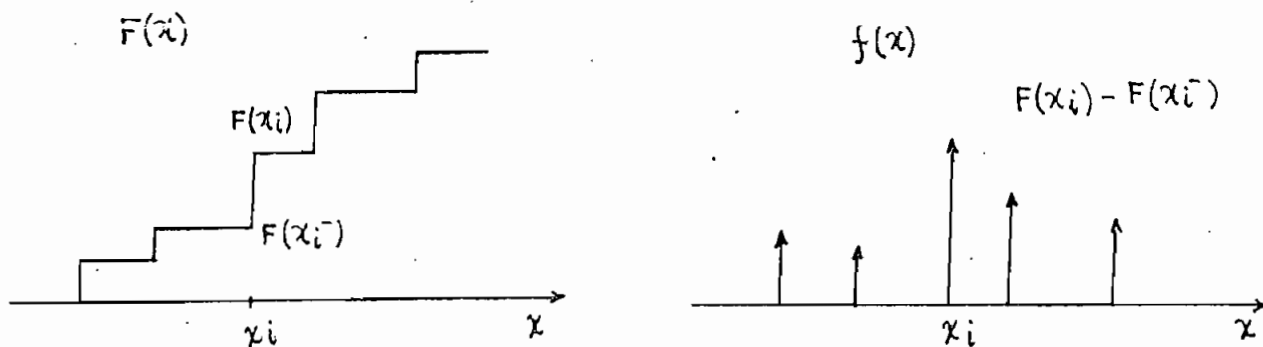


Fig. 1-4.

Es fácil de ver que si X es del tipo discreto, entonces, para un x específico, su función de distribución está dada por la suma

$$F_X(x) = \sum_i P\{X = x_i\} \quad \text{si tal que } x_i \leq x$$

en donde la sumatoria se extiende sobre todos los i tales que $x_i \leq x$. Si el número total de salidas del experimento G es finito, entonces, cualquier variable aleatoria definida en su espacio es del tipo discreto. Sin embargo, lo inverso no es verdadero.

Si una variable aleatoria X es del tipo discreto, entonces es posible representarla como una función consistente de impulsos, es decir:

$$f(x) = \sum_i p_i \delta(x - x_i) \quad (1-53)$$

en los puntos x_i por que

$$\left. \frac{dF(x)}{dx} \right|_{x=x_i} = [F(x_i) - F(x_i^-)] \delta(x-x_i)$$

Al aplicar (1-45) a densidades con impulsos, se debe tener cuidado de incluir el impulso en $f(x)$ en el punto x_2 pero no en el x_1 :

$$P\{x_1 < X \leq x_2\} = \int_{x_1^+}^{x_2^+} f(x) dx \quad (1-54)$$

Similarmente,

$$P\{x_1 \leq X \leq x_2\} = \int_{x_1^-}^{x_2^+} f(x) dx \quad (1-55)$$

MASAS DE PROBABILIDAD.

La función $f(x)$ puede considerarse como masa de probabilidad colocada en el eje x . Si $f(x)$ es finita, entonces ella tiene la interpretación usual de línea de masa; - esto es, la masa en intervalo $(x, x+dx)$ es igual a $f(x)dx$. Los impulsos $p_i \delta(x-x_i)$ en $f(x)$ pueden considerarse como - puntos de masa p_i colocados en x_i . Esta densidad es positiva y la masa total en el eje x es igual a 1. La probabilidad de que la variable aleatoria X tome valores en una - cierta región del eje x es igual a la masa en aquella región. La función de distribución $F(x)$ es igual a la masa - en el intervalo $(-\infty, x)$.

FUNCION DE DENSIDAD CONJUNTA.

Asumimos ahora que $F(x,y)$ tiene derivadas parciales de orden superior al segundo. La cantidad

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} \tag{1-56}$$

es conocida como función de densidad conjunta de las variables aleatorias X e y .

Puesto que

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y + \Delta y) - F(x + \Delta x, y) + F(x, y)}{\Delta x \Delta y} = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$$

concluimos que

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{P\{x < X \leq x + \Delta x, y < Y \leq y + \Delta y\}}{\Delta x \Delta y} = f(x, y)$$

Entonces

$$P\{x < X \leq x + dx, y < Y \leq y + dy\} = f(x, y) dx dy \quad (1-57)$$

$$f(x, y) \geq 0 \quad (1-58)$$

Puntualizamos además que (vease 1-38)

$$P\{x < X \leq x + dx, Y \leq y\} = F(x+dx, y) - F(x, y)$$

En consecuencia

$$P\{x < X \leq x + dx, Y \leq y\} = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} dx \quad (1-59)$$

En forma similar

$$P\{X \leq x, y < Y \leq y + dy\} = \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} dy \quad (1-60)$$

ESTADISTICA CONJUNTA DE DOS VARIABLES ALEATORIAS

Consideremos una región D del plano xy consistente - de sumas y productos contables de intervalos. Denotamos - por

$$\{(x, y) \in D\}$$

el evento consistente de todas las salidas k tales que el punto con coordenadas X(k), Y(k) está en la región D. Decimos que la estadística conjunta de las variables aleato-

rias X e Y está especificada si se conoce la probabilidad del anterior evento para cualquier D . Mantenemos que esta probabilidad está determinada en términos de $f(x,y)$. Además, el evento $\{(x,y) \in D\}$ puede ser escrito como el límite de una suma de eventos mutuamente excluyentes de la forma

$$\{x < X \leq x + dx, y < Y \leq y + dy\}$$

De lo anterior se puede concluir que

$$P \{(X,Y) \in D\} = \iint_D f(x,y) \, dx \, dy \quad (1-61)$$

en donde la integración se extiende sobre la región D del plano.

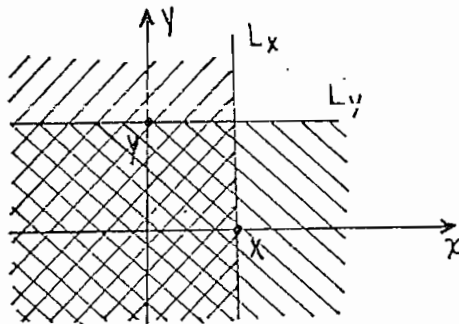


Fig. 1-5

Como una aplicación considerese el área doblemente rayada

$$\xi \leq x \quad p \leq y$$

de la figura 1-5 de (1-61) y (1-34) se sigue que

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f(\xi,p) \, d\xi \, dp \quad (1-62)$$

En consecuencia

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \, dx dy = 1$$

Derivando (1-62) con respecto a x obtenemos

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = \int_{-\infty}^y f(x,p) \, dp \quad (1-63)$$

En forma similar,

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \int_{-\infty}^x f(\xi,y) \, d\xi \quad (1-64)$$

Masas de Probabilidad.

Como en el caso de densidades unidimensionales, encontramos conveniente el interpretar $F(x,y)$ como densidad de masa superficial en el plano xy . Esta interpretación nos permitirá hablar de densidad aún cuando $F(x,y)$ no tenga derivadas parciales.

Para la función de densidad conjunta se tiene que:

$$f(x,y) \geq 0 \quad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \, dx dy = 1 \quad (1-65)$$

Observamos de (1-65) que las masas de probabilidad son positivas y que la masa total en el plano xy es igual a 1. Además, la probabilidad de que $X(k), Y(k)$ sea un punto en la región D es igual a la masa total en D . La distribución conjunta $F(x,y)$ es igual a la masa en la región doblemente rayada de la figura 1-5.

RELACION ENTRE LAS DENSIDADES CONJUNTA Y MARGINALES

Hemos demostrado ya que

$$F_X(x) = F_{XY}(x, \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^x f_{XY}(\xi, y) d\xi dy \quad (1-66)$$

Entonces $F_X(x)$ es igual a la masa total a la izquierda de la línea L_x de la figura 1-5.

Asimismo,

$$F_Y(y) = F_{XY}(\infty, y) \quad (1-67)$$

es igual a la masa debajo de la línea L_y .

Relacionaremos ahora las densidades marginales $f_X(x)$ y $f_Y(y)$ con la densidad conjunta $f_{XY}(x, y)$.

Diferenciando (1-66) con respecto a x , encontramos

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dy \quad (1-68)$$

Asimismo

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dx \quad (1-69)$$

Perfiles

Si intersectamos la superficie $z = f_{XY}(x, y)$ por el plano $x = x_1$ obtenemos el perfil $x_1 f_{XY}(x_1, y)$ mostrado en la figura 1-6. Como se ve de 1-68 el área de este perfil-

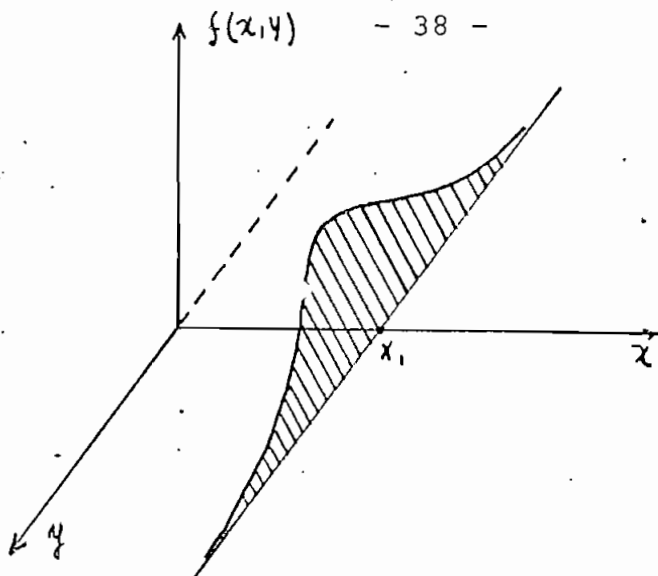


Fig. 1-6.

es igual a la densidad marginal $f_X(x_1)$. Notamos que

$$f_X(x_1) dx = P\{x_1 < X \leq x + dx\} = dx \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x_1, y) dy$$

es igual a la masa en la franja vertical $x_1 < x \leq x_1 + dx$. En forma similar $f_Y(y_1) dy$ es igual a la masa en la franja horizontal

$$y_1 < Y \leq y_1 + dy.$$

Puntos de masa.

Si la función de distribución conjunta $F(x,y)$ o sus derivadas parciales son discontinuas, entonces la densidad $f(x,y)$ como se ha definido en (1-56), no existe. En el caso de una variable aleatoria, definimos una función de densidad, aún para distribuciones discontinuas. Esto se hizo incluyendo impulsos en las derivadas de $F(x)$. Una extensión similar de la noción de una densidad es posible también para dos variables. Sin embargo, esa necesitará -

de la introducción de impulsos bidimensionales. Preferimos evitar el uso de tales impulsos. En su lugar introduciremos la noción de punto de masa.

Supongamos que las variables aleatorias X e Y son ambas del tipo discreto tomando valores x_m y Y_n , respectivamente, con

$$P\{X = x_m, Y = Y_n\} = p_{mn} \quad (1-70)$$

En este caso, tenemos únicamente puntos de masa solamente en los puntos p_{mn} con coordenadas (x_m, Y_n) . Puesto que la masa en todo el plano es igual a 1, debemos tener

$$\sum_{m,n} p_{mn} = 1 \quad (1-71)$$

en donde la sumatoria es sobre todos los m y n . Tenemos además que:

$$P\{X = x_m\} = P\{X = x_m, Y = Y_1\} + P\{X = x_m, Y = Y_2\} + \dots$$

En consecuencia

$$P\{X = x_m\} = P\{X = x_m, Y = Y_n\} = \sum_n p_{mn} \quad (1-72)$$

La anterior es la versión discreta de (1-68). Con

$$P\{X = x_m\} = p_m \quad (1-73)$$

tenemos, entonces

$$p_m = \sum_n p_{mn} \quad (1-74)$$

La probabilidad p_m es igual a la masa de todos los puntos en la línea vertical $x = x_m$

Asimismo, si $P\{Y = y_n\} = q_n$, entonces

$$P\{Y = y_n\} = \sum_m p_{mn} = q_n \quad (1-75)$$

es la masa en la línea $y = y_n$.

1-7 DISTRIBUCIONES Y DENSIDADES CONDICIONALES

La distribución condicional $F_X(x/M)$ de la variable aleatoria x asumiendo M , se define como la probabilidad condicional del evento $\{X \leq x\}$

$$F_X(x/M) = P\{X \leq x/M\} = \frac{P\{X \leq x, M\}}{P(M)} \quad (1-76)$$

Todas las propiedades de las distribuciones ordinarias se aplican también a $F_X(x/M)$. Tenemos; entonces:

$$F(\infty/M) = 1 \quad F(-\infty/M) = 0$$

Y

$$F(x_2/M) - F(x_1/M) = P\{x_1 < X \leq x_2/M\} = \frac{P\{x_1 < X \leq x_2, M\}}{P(M)} \quad (1-77)$$

Asumimos ahora que X es del tipo continuo, su densidad condicional $f(x/M)$ se define como la derivada de $F(x/M)$:

$$f(x/M) = \frac{dF(x/M)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P\{x \leq X \leq x + \Delta x/M\}}{\Delta x} \quad (1-78)$$

y tiene todas las propiedades de las densidades ordinarias; esto es,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x/M) dx = F(\infty/M) - F(-\infty/M) = 1 \quad (1-79)$$

La distribución condicional para una variable aleatoria Y , como se ha visto está dada por:

$$F_Y(y/M) = P\{Y \leq y/M\} = \frac{P\{Y \leq y, M\}}{P(M)}$$

siempre que $P(M) > 0$. Vamos a expresar ahora M en términos de la variable aleatoria X .

Supongamos en primer lugar que:

$$M = \{X \leq x\}$$

en donde x es un número dado, y

$$P(M) = P\{X \leq x\} = F_X(x) \neq 0$$

Se tiene entonces

$$F_Y(y/X \leq x) = \frac{P\{X \leq x, Y \leq y\}}{P\{X \leq x\}} = \frac{F_{XY}(x, y)}{F_X(x)} \quad (1-80)$$

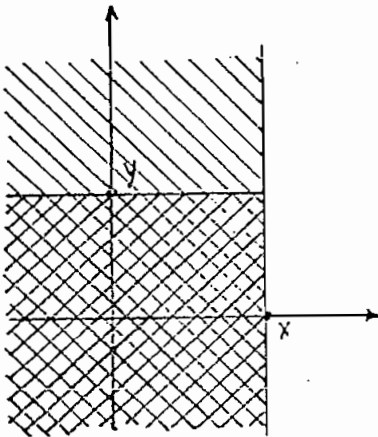


Fig. 1-7

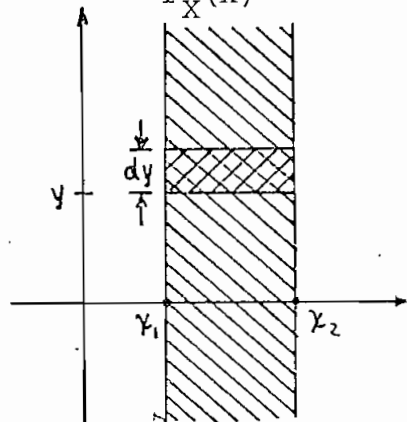


Fig. 1-8

Entonces $F_Y(y/X \leq x)$ es igual a la relación de masas de probabilidad en las dos regiones de la figura 1-7. La densidad correspondiente se encuentra por diferenciación de lo anterior con respecto a y . Usando (1-80) y (1-64), tenemos

$$f_Y(y/X \leq x) = \frac{\partial F_{XY}(x, y) / \partial y}{F_X(x)} = \frac{\int_{-\infty}^x f_{XY}(\xi, y) d\xi}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^x f_{XY}(\xi, y) d\xi dy} \quad (1-81)$$

Asumimos ahora que

$$M = \{x_1 < X \leq x_2\} \quad P(M) = F_X(x_2) - F_X(x_1) \neq 0$$

En este caso, la distribución condicional de Y , asumiendo M , está dada por:

$$F(y/x_1 < X \leq x_2) = \frac{P\{x_1 < X \leq x_2, Y \leq y\}}{P\{x_1 < X \leq x_2\}} = \frac{F_{XY}(x_2, y) - F_{XY}(x_1, y)}{F_X(x_2) - F_X(x_1)} \quad (1-82)$$

y la densidad correspondiente por (Véase 1-64)

$$f_Y(y/x_1 < X \leq x_2) = \frac{\int_{x_1}^{x_2} f_{XY}(x, y) dx}{F_X(x_2) - F_X(x_1)} \quad (1-83)$$

Podemos notar que

$$f_Y(y/x_1 < X \leq x_2) dy = \frac{P\{x_1 < X \leq x_2, y < Y \leq y + dy\}}{P\{x_1 < X \leq x_2\}}$$

Esto es igual a la relación de masas en el rectángulo de la figura 1-8 a la masa total en la franja vertical $x_1 \leq x \leq x_2$. El caso de un solo punto es de interés particular $M = \{X = x\}$. Asumiremos que para el número x bajo consideración,

$$f_X(x) \neq 0$$

y definiremos la distribución condicional de Y , asumiendo $X = x$ como el límite:

$$\begin{aligned}
 F(Y/X=x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F_{XY}(x + \Delta x, y) - F_{XY}(x, y)}{F_X(x + \Delta x) - F_X(x)} = \frac{\partial F_{XY}(x, y) / \partial x}{dF_X(x) / dx} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} F_Y(y/x < X \leq x + \Delta x) \qquad (1-84)
 \end{aligned}$$

y con (1-63)

$$F_Y(Y/X = x) = \frac{\int_{-\infty}^y f_{XY}(x, p) dp}{f_X(x)} \qquad (1-85)$$

La densidad correspondiente se obtiene diferenciando con respecto a y :

$$f_Y(Y/X = x) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_X(x)} = \frac{f_{XY}(x, y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dy} \qquad (1-86)$$

Esta relación será usada extensamente. Intercambiando X e Y, tenemos también

$$F_X(x/Y = y) = \frac{\int_{-\infty}^x f_{XY}(\xi, y) d\xi}{f_Y(y)} \quad (1-87)$$

$$f_X(x/Y = y) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)} \quad (1-88)$$

Notamos que

$$f(y/x) dy = \frac{P\{x < X \leq x + dx, y < Y \leq y + dy\}}{P\{x < X \leq x + dx\}} \quad (1-89)$$

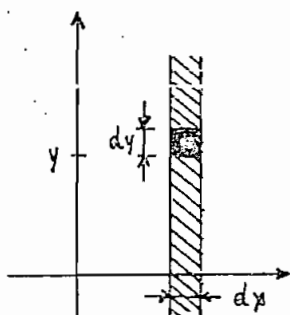


Fig. 1-9.

Esto es igual a la relación de la masa del elemento diferencial de la figura 1-9 a la masa en la franja $(x, x + dx)$. Para un x_1 dado, la densidad $f(y/X = x_1)$ es el perfil x de $f_{XY}(x, y)$ normalizado para hacer su área igual a 1.

VARIABLES ALEATORIAS INDEPENDIENTES.

Como recordaremos de la sección 1-1, dos eventos A y B son independientes si

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

El concepto de independencia de variables aleatorias se basa en lo de arriba.

DEFINICION .-

Dos variables aleatorias X e Y son llamadas independientes si los eventos $\{X \leq x\}$ y $\{Y \leq y\}$ son independientes cualesquiera que sean x e y, esto es, si

$$P\{X \leq x, Y \leq y\} = P\{X \leq x\} P\{Y \leq y\} \quad (1-90)$$

De (1-90) se sigue que

$$F_{XY}(x, y) = F_X(x) F_Y(y) \quad (1-91)$$

Si las densidades existen, entonces lo anterior nos da

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x) f_Y(y) \quad (1-92)$$

Inversamente, si (1-91) y (1-92) existen, entonces se sigue (1-90). Si las variables aleatorias X e Y son independientes, entonces lo anterior nos da

$$f_Y(y/x) = f_Y(y) \quad f_X(x/y) = f_X(x) \quad (1-93)$$

Integrando (1-92) se tiene

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} f_{XY}(x, y) dx dy = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x) dx \int_{y_1}^{y_2} f_Y(y) dy$$

Entonces: las masas en el rectángulo de la figura 1-10 es igual

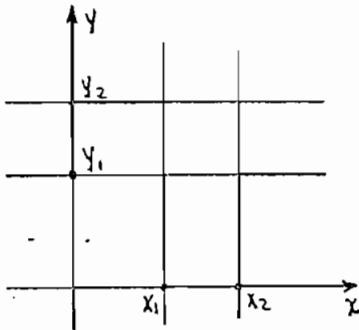


Fig. 1-10

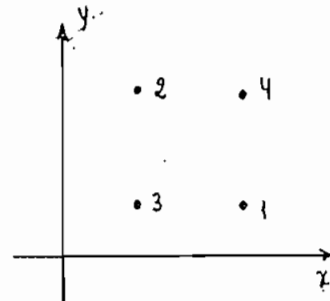


Fig. 1-11

al producto de las masas de las franjas vertical y horizontal que se muestran en la figura. En otras palabras, los eventos

$$\{x_1 < X \leq x_2\} \quad \text{y} \quad \{y_1 < Y \leq y_2\}$$

son independientes.

Se puede demostrar en forma similar que si I_X y I_Y son dos conjuntos de puntos en los ejes x e y , respectivamente, entonces los eventos

$$\{X \in I_X\} \quad \text{e} \quad \{Y \in I_Y\} \quad (1-94)$$

son independientes.

Aplicando lo anterior al punto (x_k, y_n) concluimos que

$$P\{X = x_k, Y = y_n\} = P\{X = x_k\} P\{Y = y_n\}$$

Por eso, si existen masas en los puntos 1 y 2 de la figura 1-11 entonces deben existir masas en los puntos 3 y 4.

EXPERIMENTOS INDEPENDIENTES.

Las variables aleatorias independientes son generadas en primer lugar por experimentos combinados. Supongamos - que el experimento dado G es la ejecución combinada de los experimentos G_1 y G_2 .

$$G = G_1 \times G_2$$

como en la sección 1-1. Una sola salida de G es un par de objetos $k_1 k_2$, donde k_1 es un elemento del espacio S_1 de G_1 y k_2 es un elemento de S_2 . Definimos las variables aleatorias X e Y de tal manera que

$$X(k_1 k_2) = X(k_1) \quad Y(k_1 k_2) = Y(k_2) \quad . (1-95)$$

En otras palabras el valor de X depende únicamente de la salida k_1 del primer experimento G_1 , y del valor de Y en la salida k_2 de G_2 .

TEOREMA.

Si los experimentos G_1 y G_2 son independientes, entonces las variables aleatorias X e Y definidas como en (1-95), son independientes.

Demostración

Para un x dado, el evento

$$\{X \leq x\}$$

consiste de todas las salidas k_1 tales que $X(k_1) \leq x$. Estas salidas forman un subconjunto, A de S_1 . En el espacio $S = S_1 \times S_2$ del experimento G , todas las salidas $k_1 k_2$ tales que $X(k_1 k_2) \leq x$ forman un conjunto de la forma $A \times S_2$ esto se sigue de (1-95). En forma similar, $\{Y \leq y\}$ es un conjunto de la forma $S_1 \times B_y$. De la independencia de los dos experimentos se sigue que los conjuntos

$$\{X \leq x\} = A_x \times S_2 \quad \{Y \leq y\} = S_1 \times B_y$$

son independientes y el teorema está probado.

El resultado anterior es particularmente útil en pruebas independientes repetidas. Si la variable aleatoria X depende únicamente de la salida de la primera prueba y la variable aleatoria Y de la salida de la segunda prueba, entonces X e Y son independientes.

1-7 FUNCIONES DE VARIABLES ALEATORIAS

EL CONCEPTO DE UNA FUNCIÓN DE UNA VARIABLE ALEATORIA

Estamos dando una variable aleatoria real X . Esto significa que, para cada salida experimental k , nosotros

asignamos un número $X(k)$. El dominio de X es el espacio S , y su recorrido es el conjunto I_X de los números reales $X(k)$. Estamos dando también una función real $g(x)$ de la variable real x . Esta función puede estar especificada por una fórmula, por ejemplo:

$$g(x) = x^2$$

o en cualquier otra forma (por una tabla, por ejemplo). En cualquier caso, asumimos que ella está definida por lo menos para todo $x \in I_X$. Formamos ahora la función

$$Y = g(X)$$

Esta función está definida para toda salida experimental de la siguiente manera: Para un k dado, $X(k)$ es un número real y

$$g[X(k)]$$

es otro número especificado por $X(k)$ y $g(x)$. Este número es el valor

$$Y(k) = g[X(k)]$$

de la variable aleatoria Y . Entonces el dominio de $g(X)$ es el conjunto S de todas las salidas experimentales, mientras que el dominio de $g(x)$ es un conjunto de números reales.

Si $g(x)$ satisface ciertas condiciones generales, entonces la función Y así definida es una variable aleatoria.

Dado un número real y , denotamos como es usual por $\{Y \leq y\}$ el conjunto de todas las salidas k tales que $\{Y(k) \leq y\}$ o, en forma equivalente, $\{g[X(k)] \leq y\}$. Este conjunto es un evento, y su probabilidad

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{g(X) \leq y\} \quad (1-96)$$

es la distribución de la variable aleatoria Y . Esta función y su derivada

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} \quad (1-97)$$

Comentario.-

La variable aleatoria Y puede ser considerada como la salida de un sistema caracterizado por $g(x)$. Si la entrada es un número x , entonces la salida es $g(x)$; si la entrada es un número aleatorio $X(k)$ especificado por la salida experimental k , entonces la salida correspondiente es $g[X(k)]$. Esta interpretación de Y es particularmente útil si el valor de X no es un mero número sino una función del tiempo (X es entonces un proceso estocástico). En este caso

$$Y(t,k) = g[X(t,k)]$$

es la salida de un sistema sin memoria con entrada X . Para un t dado, Y es una variable aleatoria.

DETERMINACION DE LA DISTRIBUCION Y LA DENSIDAD DE $Y = g(X)$

Dado un número real y , denotamos por I_y el conjunto de todos los números reales x tales que $g(x) \leq y$

$$x \in I_y \quad \text{si y solo si} \quad g(x) \leq y \quad (1-98)$$

Mantenemos que $\{Y \leq y\} = \{X \in I_y\}$. Además, si para un cierto k tenemos $Y(k) = g[X(k)] \leq y$, entonces $X(k) \in I_y$ como vemos de (1-98). Inversamente, si $X(k) \in I_y$, entonces $g X(k) = Y(k) \leq y$. De lo anterior se sigue que

$$F_y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{X \in I_y\}$$

Entonces, para determinar $F_y(y)$ para un y dado debemos encontrar el conjunto I_y y la probabilidad de que X esté en I_y .

DETERMINACION DE LA FUNCION DE DENSIDAD

Determinaremos ahora la densidad $f_y(y)$ de la variable aleatoria.

$$Y = g(X)$$

en términos de la densidad $f_X(x)$ de X . Asumiremos que X es del tipo continuo y $g(x)$ es continua y no es igual a una constante sobre ningún intervalo. Esto significa que, para un y dado, la ecuación

$$y = g(x) \tag{1-99}$$

tiene por lo menos un número contable de raíces x_1, x_2, x_3, \dots

TEOREMA FUNDAMENTAL

Para encontrar $f_Y(y)$ para un y dado resolvemos la ecuación

$$y = g(x)$$

para x en términos de y . Si $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ son todas sus raíces reales,

$$y = g(x_1) = g(x_2) = \dots = g(x_n) = \dots \tag{1-100}$$

entonces

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|} + \dots + \frac{f_X(x_n)}{|g'(x_n)|} + \dots \tag{1-101}$$

donde $g'(x) = \frac{dg(x)}{dx}$

Claramente los números x_1, \dots, x_n, \dots dependen de y . Si para un cierto y , la ecuación $y = g(x)$ no tiene raíces reales, entonces $f_Y(y) = 0$

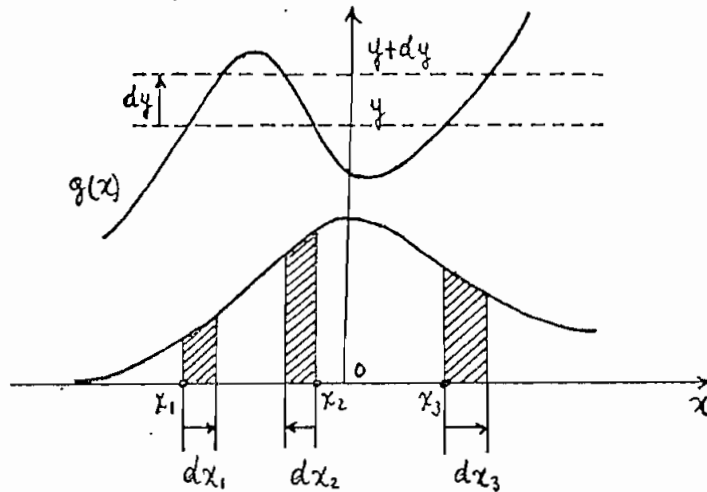


Fig. 1-12.

Demostración.-

Para evitar generalidades, asumiremos que para el y dado, la ecuación $y = g(x)$ tiene tres raíces x_1, x_2, x_3 como en la figura 1-12. Tenemos:

$$f_Y(y)dy = P\{y < Y < y + dy\} \quad dy > 0$$

Por eso, para determinar $f_Y(y)$, es suficiente el encontrar todos los valores de x tales que

$$y < g(x) < y + dy$$

como vemos de la figura 1-12, lo anterior es verdadero para

$$x_1 < x < x_1 + dx_1 \quad x_2 + dx_2 < x < x_2 \quad x_3 < x < x_3 + dx_3$$

donde $dx_1 > 0, dx_2 < 0, dx_3 > 0$. En consecuencia

$$P\{y < Y < y + dy\} = P\{x_1 < X < x_1 + dx_1\} + P\{x_2 + dx_2 < X < x_2\} \\ + P\{x_3 < X < x_3 + dx_3\}$$

Esta suma es el area sombreada de la figura 1-12. -
pero

$$P\{x_1 < X < x_1 + dx_1\} = f_X(x_1) dx_1$$

$$P\{x_2 + dx_2 < X < x_2\} = f_X(x_2) |dx_2|$$

$$P\{x_3 < X < x_3 + dx_3\} = f_X(x_3) dx_3$$

Además,

$$g'(x_i) dx_i = dy \quad i = 1, 2, 3$$

En consecuencia:

$$f(y) dy = \frac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|} dy + \frac{f_X(x_2)}{|g'(x_2)|} dy + \frac{f_X(x_3)}{|g'(x_3)|} dy$$

y (1-101) se sigue para este caso. Se puede razonar en de modo similar para otra forma de $g(x)$.

FUNCIONES DE DOS VARIABLES ALEATORIAS

Dadas dos variables aleatorias X e Y y una función $g(x,y)$ de las variables aleatorias reales x e y . Si $g(x,y)$ satisface ciertas condiciones generales, entonces

$$Z = g(X,Y)$$

es una variable aleatoria y su valor $Z(k)$ está dado por

$$Z(k) = g[X(k), Y(k)] \quad (1-102)$$

Determinaremos ahora su distribución

$$F_Z(z) = P\{Z \leq z\}$$

y densidad $f(z)$ en términos de la función $g(x,y)$ y la densidad conjunta $f_{XY}(x,y)$ de X e Y .

Para determinar $F_Z(z)$ para un z dado, debemos encontrar la probabilidad del evento $\{Z \leq z\}$. Denotaremos con D_Z la región del plano xy tal que

$$g(x,y) \leq z$$

Esta región puede no ser simple conexa (véase la figura 1-13). Es fácil de ver que

$$\{Z \leq z\} = \{(X,Y) \in D_Z\}$$

En consecuencia es suficiente encontrar la masa de probabilidad en la región D_Z . Esta masa está dada por la integral (1-61); en consecuencia

$$F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = P\{(X,Y) \in D_Z\} = \iint_{D_Z} f_{XY}(x,y) \, dx \, dy \quad (1-103)$$

La densidad $f_Z(z)$ puede ser encontrada por diferenciación de $F_Z(z)$ o, directamente determinando la región ΔD_Z del plano xy tal que

$$z < g(x,y) \leq z + dz$$

(figura 1-13). Puesto que

$$\{z < Z \leq z + dz\} = \{(X, Y) \in \Delta D_z\}$$

concluimos de (1-47) y (1-103) que

$$f_Z(z)dz = P\{z < Z \leq z + dz\} = \iint_{\Delta D_z} f_{XY}(x, y) dx dy \quad (1-104)$$

Desarrollaremos en seguida un método más simple para determinar $f_Z(z)$.

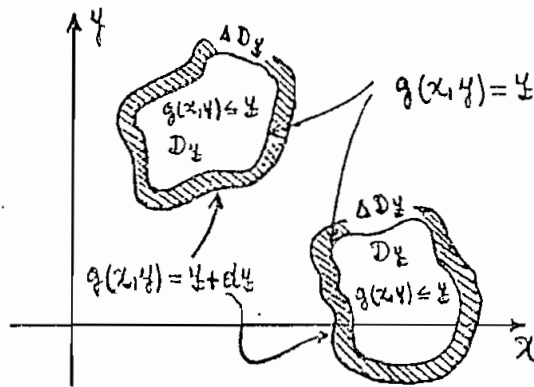


Fig. 1-13.

Si X e Y son del tipo discreto, tomando valores x_k , y_n , entonces Z es también del tipo discreto, con valores $z_r = g(x_k, y_n)$, y

$$P\{Z = z_r\} = P\{X = x_k, Y = y_n\} = p_{kn} \quad (1-105)$$

Lo anterior es verdadero si $z_r = g(x_k, y_n)$ para solo un par x_k, y_n . En general, $P\{Z = z_r\}$ es igual a la masa total de todos los puntos de masa en la curva:

$$z_r = g(x, y)$$

del plano xy .

Vamos a suponer que $Z = X + Y$. Este es el ejemplo más importante de una función de dos variables aleatorias. Para determinar $F_Z(z)$ notamos que la región D_z del plano xy tal que

$$x + y \leq z$$

es el semiplano a la izquierda de la línea $x + y = z$ según se puede ver en la figura 1-14.

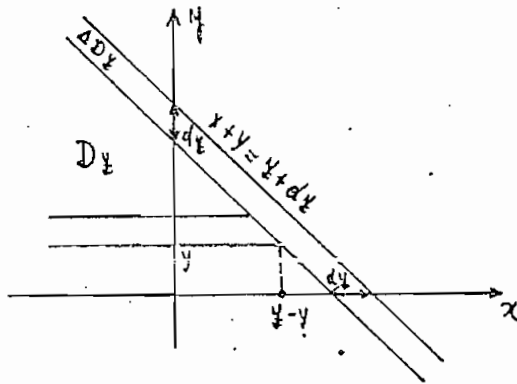


Fig. 1-14.

De 1-13 encontramos, integrando sobre las franjas adecuadas,

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{z-y} f_{XY}(x,y) dx dy \quad (1-106)$$

Diferenciando con respecto a z obtenemos

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(z - y, y) dy \quad (1-107)$$

Observamos que

$$f_Z(z) dz = P\{z \leq Z \leq z + dz\} = P\{z \leq X + Y \leq z + dz\}$$

es igual a la masa en la franja ΔD_z de la figura 1-14, limitada por las líneas

$$x + y = z \quad y \quad x + y = z + dz$$

SECUENCIAS DE VARIABLES ALEATORIAS

En esta sección desarrollaremos la estadística de un número arbitrario de variables aleatorias como una extensión de los tópicos ya expuestos en las secciones anteriores.

CONCEPTOS GENERALES.

Dadas n variables aleatorias reales X_1, \dots, X_n , definimos por

$$F(x_1, \dots, x_n) = P\{X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n\} \quad (1-108)$$

su función de distribución conjunta. Su densidad conjunta $f(x_1, \dots, x_n)$ se obtiene por diferenciación con respecto a x_1, \dots, x_n . Esta función es positiva y, su integral sobre todo el espacio es igual a 1:

$$F(\infty, \dots, \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = 1 \quad (1-109)$$

La función de distribución F es una función no decreciente en todas las variables y satisface varias desigualdades similares a (1-40). La densidad f puede tener la interpretación de masa. La masa total en la región D del espacio es igual a la probabilidad de que el punto en coordenadas $X_1(k), \dots, X_n(k)$ se encuentre en D :

$$P\{(X_1, \dots, X_n) \in D\} = \int_D \dots \int f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

DENSIDADES MARGINALES.

Si sustituimos en $F(x_1, \dots, x_n)$ ciertas variables por ∞ , obtenemos la función de distribución conjunta de las restantes variables. Por ejemplo,

$$F(x_1, x_3) = F(x_1, \infty, x_3, \infty)$$

Esto se sigue de (1-108).

Si integramos $f(x_1, \dots, x_n)$ con respecto a ciertas variables, obtenemos la densidad conjunta de las variables restantes. Por ejemplo,

$$f(x_1, x_3) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, x_3, x_4) dx_2 dx_4$$

FUNCIONES DE VARIABLES ALEATORIAS.-

Determinaremos ahora la densidad conjunta de las m - variables aleatorias

$$Y_1 = g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, Y_m = g_m(x_1, \dots, x_n) \quad (1-110)$$

en términos de $f(x_1, \dots, x_n)$ y de las funciones dadas $g_i(x_1, \dots, x_n)$. Si $m > n$, entonces la densidad desconocida es singular. En este caso se encuentra primero la estadística de Y_1, \dots, Y_n .

Si $m < n$, entonces usando variables auxiliares

$$X_{m+1} = X_{m+1}, \dots, Y_n = X_n$$

incrementamos el número de las Y hasta n . Podemos por eso asumir que $m = n$.

Para determinar la densidad conjunta de Y_1, \dots, Y_n para un conjunto dado de números y_1, \dots, y_n , resolvemos el sistema

$$g_1(x_1, \dots, x_n) = y_1, \dots, g_n(x_1, \dots, x_n) = y_n. \quad (1-111)$$

Si este sistema tiene una sola solución real x_1, \dots, x_n entonces

$$f_{Y_1, \dots, Y_n}(y_1, \dots, y_n) = \frac{f(x_1, \dots, x_n)}{J(x_1, \dots, x_n)} \quad (1-112)$$

en donde

$$J(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \quad (1-113)$$

Los números x_1, \dots, x_n son, por supuesto, funciones de y_1, \dots, y_n . Si el sistema (1-111) tiene más de una solución, entonces añadimos en el miembro derecho de (1-112) - las expresiones correspondientes resultantes de todas las soluciones.

Si (1-111) no tiene soluciones reales, entonces

$$f_{y_1, \dots, y_n}(y_1, \dots, y_n) = 0$$

La densidad de una función

$$z = g(x_1, \dots, x_n)$$

de las variables aleatorias dadas puede obtenerse de lo anterior introduciendo variables aleatorias auxiliares. Un método más directo consiste en determinar la región ΔD_z del espacio x tal que

$$z < g(x_1, \dots, x_n) \leq z + dz$$

$f_z(z) dz$ es igual a las masas en ΔD_z .

1-8.- PROCESOS ESTOCASTICOS

Hasta este momento no se ha mencionado la posible dependencia del tiempo de cualquiera de nuestras funciones - de probabilidad. Esta omisión ha sido deliberada, pues para muchos casos el tiempo entra en el cuadro solo implícitamente y no tiene importancia particular en el problema a tratar. Sin embargo, hay muchos casos de interés en los - cuales la dependencia del tiempo de las funciones de probabilidad es de importancia como, por ejemplo, en los problemas que involucran señales aleatorias y ruido. Mostrare - mos aquí como las nociones previas de probabilidad y de variables aleatorias pueden extenderse para cubrir tales situaciones.

INTRODUCCION.

Dado un experimento G especificado por sus salidas k que forman el espacio S , por ciertos subconjuntos de S llamados eventos y por las probabilidades de estos eventos. - A cada salida k asignamos ahora, de acuerdo a determinadaregla una función del tiempo.

$$X(t, k)$$

real o compleja. Hemos creado, entonces una familia de - funciones del tiempo, una para cada k . Esta familia es -

llamada un Proceso Estocástico.

Un proceso estocástico puede verse como una función de dos variables t y k . El dominio de k es el conjunto S , y el dominio de t es un conjunto de números reales. Asumiremos en lo que sigue que el último conjunto es todo el eje tiempo.

INTERPRETACION DE $X(t)$

Para una salida específica k_i , la expresión $X(t, k_i)$ significa una sola función del tiempo. Para un instante específico t_i , $X(t_i, k)$ es una cantidad dependiente de k , esto es, una variable aleatoria. Finalmente, $X(t_i, k_i)$ es un número.

Usaremos la notación $X(t)$ para representar un proceso estocástico, omitiendo usualmente su dependencia de k .

De lo anterior vemos que $X(t)$ representa cuatro cosas diferentes:

- 1° Una familia de funciones del tiempo (t y k variables)
- 2° Una sola función del tiempo (t variable, k fijo)
- 3° Una variable aleatoria (t fijo, k variable)
- 4° Un número (t fijo, k fijo)

La interpretación específica de $X(t)$ se sobreentenderá del contexto.

DISCUSION.

1° Exigiremos que para cualquier t , $X(t)$ sea una variable aleatoria en el sentido de la definición que se da en el apartado 1-6. Solamente entonces la familia dada de funciones es llamada proceso estocástico.

2° La igualdad de dos procesos quiere significar que sus respectivas funciones son idénticas para cualquier salida k_i

$$\bar{X}(t) = \bar{Y}(t) \text{ si y solo si } \bar{X}(t, k_i) = \bar{Y}(t, k_i)$$

En forma similar definiremos $X(t) + Y(t)$, $X(t)Y(t)$, y cualquier operación (diferenciación, por ejemplo) que involucra uno o más procesos, operando sobre sus funciones del tiempo.

3° En general, las funciones de un proceso estocástico son complicadas. Supongamos, por ejemplo, que $X(t)$ representa el movimiento irregular de una partícula debido a sus impactos con el medio que le rodea (Movimiento Browniano). Una salida específica del experimento en cuestión es la selección de una partícula y el $X(t)$ resultante es una curva como la que se muestra en la figura 1-15a. Esta

curva aparece irregular y no puede ser descrita por una fórmula. Además, si un $X(t)$ específico es conocido para $t < t_1$, no se pueden predecir sus valores futuros.



Fig. 1-15

Sin embargo, no todos los procesos tienen estas propiedades. Supongamos, por ejemplo, de que nuestro experimento es la manufactura de generadores. La fuerza electromotriz de un generador específico es una onda sinusoidal - (Figura 1-15b)

$$A(k) \text{ sen}[\omega(k)t + \theta(k)]$$

cuya amplitud, frecuencia y fase dependen del generador seleccionado. Entonces A , ω , y θ son variables aleatorias, y

$$X(t) = A \text{ sen}(\omega t + \theta)$$

es un proceso estocástico. Claramente, las familias de este proceso son muy regulares. En efecto, si $X(t)$ es conocida para $t \leq t_1$, entonces ella está completamente especificada para $t > t_1$. Como un proceso extremadamente simple, mencionaremos el siguiente:

En el experimento de tirar una moneda definimos $X(t)$ tal que

$$X(t) = \begin{cases} \text{sen}(t) & \text{si } k = \text{caras} \\ 2t & \text{si } k = \text{sellos} \end{cases}$$

Entonces $X(t)$ consiste de dos curvas muy regulares - sin embargo es un proceso estocástico.

ESTADISTICA DE PRIMERO Y SEGUNDO ORDEN.

Asumiremos que $X(t)$ es un proceso real. Para un t - específico $X(t)$ es una variable aleatoria. La función de distribución de esta variable, será, en general dependiente de t . Si la denotamos por $F(x;t)$, tenemos:

$$F(x;t) = P\{X(t) \leq x\} \tag{1-114}$$

Examinaremos más profundamente el significado de $F(x;t)$. Dados dos números reales x y t , la función $F(x;t)$ es igual a la probabilidad del evento $\{X(t) \leq x\}$ consistente de todas las salidas k tales que, al instante específico t , las funciones $X(t)$ de nuestro proceso no exceden el número dado x .

La función $F(x;t)$ será llamada función de distribución de primer orden del proceso $X(t)$. La densidad correspondiente se obtiene por diferenciación con respecto a x ,

$$f(x, t) = \frac{\partial F(x, t)}{\partial x} \quad (1-115)$$

Dados dos instantes t_1 y t_2 , consideramos las variables aleatorias:

$$X(t_1) \text{ y } X(t_2)$$

Su distribución conjunta depende de t_1 y t_2 , en general. La denotaremos por $F(x_1, x_2; t_1, t_2)$:

$$F(x_1, x_2; t_1, t_2) = P\{X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2\} \quad (1-116)$$

y la llamaremos "Distribución de segundo orden" del proceso $X(t)$. La densidad correspondiente está dada por:

$$f(x_1, x_2; t_1, t_2) = \frac{\partial^2 F(x_1, x_2; t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (1-117)$$

como en (1-56). Notamos que

$$F(x_1, \infty; t_1, t_2) = F(x_1, t_1) \quad f(x_1; t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_2$$

como en (1-66) y (1-68). Podemos, en forma similar definir la densidad condicional, véase (1-86)

$$f(x_1, t_1 / X_2(t_2) = x_2) = \frac{f(x_1, x_2; t_1, t_2)}{f(x_2; t_2)} \quad (1-118)$$

Un proceso estocástico real $X(t)$ está estadística - mente determinado, si se conocen sus funciones de distribu - ción de orden n .

$$F(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = P\{X(t_1) \leq x_1, \dots, X(t_n) \leq x_n\} \quad (1-119)$$

para cualquier n y t_1, \dots, t_n . Estas funciones no son ar - bitrarias, pero deben satisfacer ciertas condiciones (véa - se secuencias de variables aleatorias). En particular, - una distribución de orden dado está determinada por una - distribución de orden superior.

La función de densidad de orden n

$$f(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n)$$

de un proceso $X(t)$ se obtiene por diferenciación de la dis - tribución con respecto a todas las variables x_i .

Consideremos ahora una secuencia particular de tira - das de un dado. Los números $X(n)$ obtenidos en esta secuen - cia de tiradas son llamados "valores de muestra" y pueden - pensarse como que definen una función particular del argu - mento n . Tal función de la cual se muestran varios ejem - plos en la figura 1-16 es llamada "función muestra" del - proceso estocástico en cuestión. El conjunto de todas las funciones muestra, junto con una ley de probabilidad, es - llamadado el "ensamblaje" de las funciones muestra. Es a -

veces conveniente el considerar un proceso estocástico como definido por su ensamble de funciones muestra así como por las variables aleatorias y las funciones de probabilidad discutidas anteriormente.

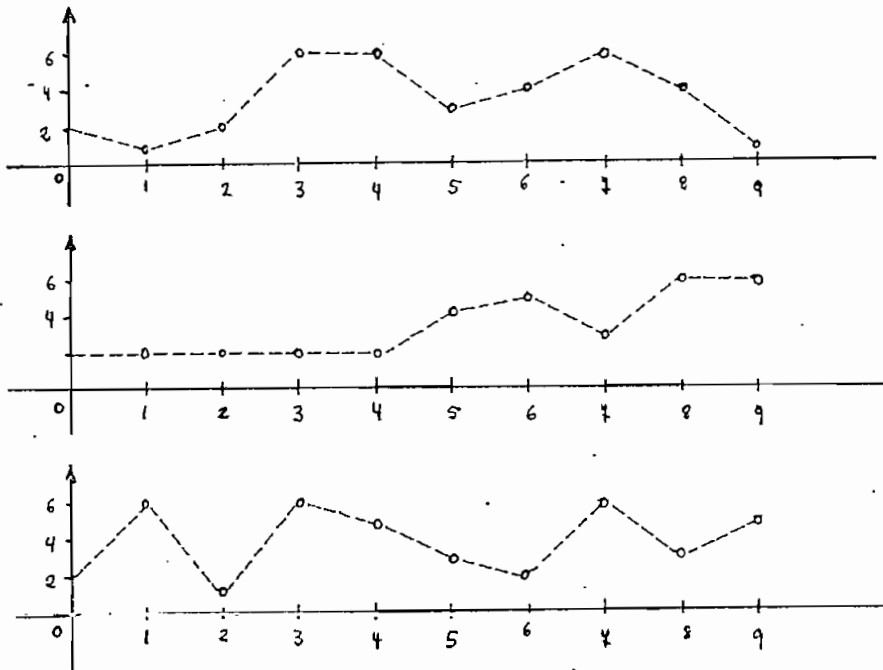


Fig. 1-16.

Otros tópicos interesantes relativos a procesos estocásticos, tales como los de estacionaridad y de ergodicidad se tratan en forma extensa en el capítulo II. Aparte de ello, se pueden decir muchas cosas todavía con respecto a Procesos Estocásticos, sin embargo, ellas se encuentran fuera de los alcances del presente trabajo de tesis.

1-9.- PROMEDIOS.-

En los apartados anteriores hemos introducido el concepto de probabilidad, definido varias funciones de probabilidad, variables aleatorias y estudiado algunas propiedades de aquellas funciones. Como se habrá observado, las funciones de probabilidad describen el comportamiento en promedio de las variables aleatorias. En efecto, se puede demostrar que los varios promedios de las variables aleatorias (esto es, el valor medio, el valor cuadrático medio, la varianza, etc.) pueden determinarse haciendo uso de las funciones de probabilidad. Es este aspecto de la teoría de probabilidades el que investigaremos ahora.

VALOR ESPERADO.-

En la teoría y aplicación de las probabilidades, tal vez el más importante parámetro sea "el valor esperado" o "valor medio" de una variable aleatoria X . Esta cantidad se escribirá en la forma:

$$E\{X\} \quad \text{o} \quad \mu_X \quad \text{o} \quad \bar{x}$$

y será definida ahora en términos de la densidad de X . Pero primero veamos su interpretación de frecuencia relativa.

Al repetir n veces nuestro experimento, observamos las salidas:

$$k_1, k_2, \dots, k_n$$

Para cada salida la variable aleatoria X toma un valor numérico. Tenemos, entonces los n números

$$X(k_1), X(k_2), \dots, X(k_n)$$

Si n es lo suficientemente grande, entonces el promedio de estos números es aproximadamente igual al valor-esperado de X :

$$E\{X\} \approx \frac{X(k_1) + \dots + X(k_n)}{n} \quad (1-119)$$

Posteriormente demostraremos que esta interpretación concuerda con la definición que se da a continuación

DEFINICION

El valor esperado de una variable aleatoria real X - es la integral

$$E\{X\} = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx \quad (1-120)$$

en donde $f(x)$ es la densidad de X . Si X es del tipo discreto y toma los valores x_n con probabilidad p_n , entonces:

$$E\{X\} = \sum_n x_n P\{X = x_n\} = \sum_n x_n p_n \quad (1-121)$$

DISCUSION

1° La suma (1-121) es un caso especial de la integral -

(1-120). Para una variable aleatoria del tipo discreto tenemos:

$$f(x) = \sum_n p_n \delta(x-x_n)$$

Pero

$$\int_{-\infty}^{\infty} x \delta(x-x_n) dx = x_n$$

En consecuencia

$$\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \sum_n p_n \delta(x-x_n) dx = \sum_n x_n p_n$$

2° Si $f(x)$ es par,

$$f(-x) = f(x) \text{ entonces } E\{X\} = 0$$

Si $f(x)$ es simétrica alrededor de $x = a$,

$$f(a-x) = f(a+x) \text{ entonces } E\{X\} = a$$

por que

$$\int_{-\infty}^{\infty} (a-x) f(x) dx = 0 = a \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx - \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

3° El número $E X$ puede expresarse directamente en términos de la función de distribución $F(x)$. Asumiremos por simplicidad que $f(x)$ es cero para $|x| > b$, esto es, que

$$F(-b) = 0 \quad F(b) = 1$$

como en la figura 1-17. Integrando (1-120) por partes se obtiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx = xF(x) \Big|_{-b}^b - \int_{-b}^b F(x) dx = b - \int_{-b}^b F(x) dx$$

Es fácil de ver de lo anterior que $E\{X\}$ es igual al área de MAB menos el área de MOD. Esto es verdadero aún si $b = \infty$

4° Si interpretamos $f(x)$ como densidad de masa en el eje x , entonces, puesto que la masa total es igual a 1, el valor esperado de X dado por la integral (1-120), es el centro de gravedad de esta masa.

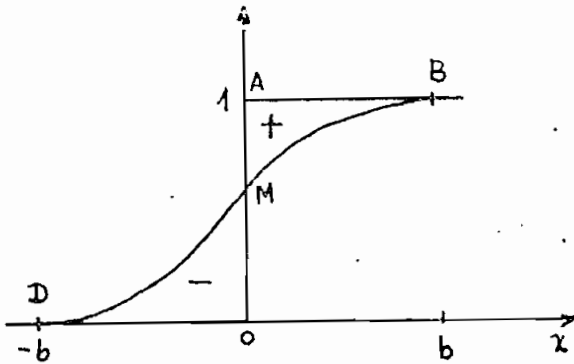


Fig. 1-17

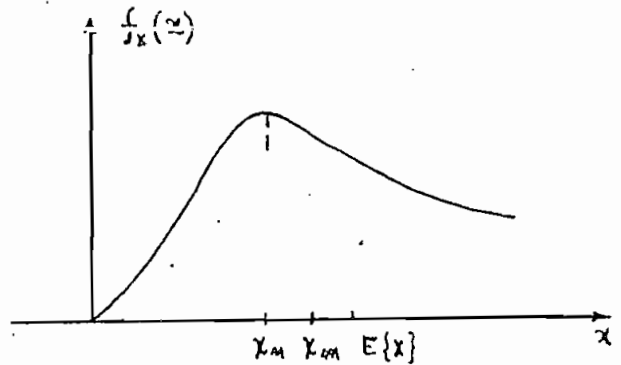


Fig. 1-18

5° El número $E\{X\}$ nos da alguna información acerca de la densidad $f(x)$. Se puede, sin embargo obtener otros parámetros de esta curva: "el valor más probable" de X es la constante $x = x_n$ tal que $f(x_n)$ es el máximo (fig. 1-18).- La mediana de X es la constante $x = x_m$ (puede haber más de una de tales constantes) tal que

$$P\{X \leq x_m\} = F(x_m) = 1/2$$

VALOR ESPERADO DE $g(X)$. Con $Y = g(X)$, sabemos que:

$$E Y = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy \quad (1-122)$$

Entonces, para determinar el valor esperado de la variable aleatoria Y de lo anterior, debemos encontrar en primer lugar su densidad. El siguiente teorema básico nos da $E.Y$ directamente en términos de la densidad $f_X(x)$ de X .

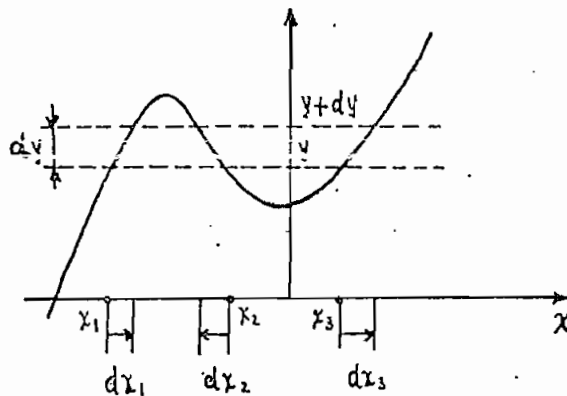


Fig. 1-19

TEOREMA.

$$E\{g(X)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx \quad (1-123)$$

y si X es del tipo discreto, entonces

$$E g(X) = \sum_i g(x_i) P\{X = x_i\} \quad (1-124)$$

Demostración.-

Con y un número dado como en la figura 1-19, tenemos

$$y = g(x_1) = g(x_2) = g(x_3)$$

Razonando como en la página 31, tenemos que

$$f_Y(y)dy = f_X(x_1)dx_1 + f_X(x_2)dx_2 + f_X(x_3)dx_3$$

en donde se ha asumido que todas las diferenciales son positivas. Multiplicando lo anterior por y , obtenemos.

$$yf_Y(y)dy = g(x_1)f_X(x_1)dx_1 + g(x_2)f_X(x_2)dx_2 + g(x_3)f_X(x_3)dx_3$$

Entonces, a cada elemento diferencial $yf_Y(y)dy$ en (1-122), le corresponden ciertos elementos diferenciales en (1-123). Conforme dy cubre el eje y , los dx correspondientes no se superponen y cubren todo el eje x . Entonces las integrales (1-122) y (1-123) son iguales.

La ecuación (1-124) se sigue de (1-123) por que si X es del tipo discreto, entonces $f_X(x)$ es una secuencia de impulsos en x_i de area $P\{X = x_i\}$

ADITIVIDAD.

De lo anterior concluimos con

$$g(x) = g_1(x) + \dots + g_n(x)$$

que

$$E\{g_1(X) + \dots + g_n(X)\} = E\{g_1(X)\} + \dots + E\{g_n(X)\}$$

(1-125)

Interpretación de frecuencia relativa.

Demostremos ahora que la interpretación (1-119) de $E\{X\}$ concuerda con la integral (1-120). Con x_i y Δx como antes, denotamos por $\Delta n(x_i)$ el número de términos en la suma (1-119) tal que

$$x_i < X(k_i) < x_i + \Delta x$$

Si Δx es lo suficientemente pequeño, entonces todos estos términos pueden ser aproximados por x_i . Entonces:

$$X(k_1) + \dots + X(k_n) \approx \sum x_i n(x_i)$$

pero

$$f(x_i) \Delta x \approx \frac{\Delta n(x_i)}{n}$$

Entonces

$$\frac{X(k_1) + \dots + X(k_n)}{n} \approx \sum_i x_i f(x_i) \Delta x \approx E\{X\}.$$

VALOR ESPERADO CONDICIONAL

El valor esperado condicional de una variable aleatoria X , asumiendo M está dado por la integral (1-120) en donde $f(x)$ es reemplazado por $f(x/M)$:

$$E\{X/M\} = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x/M) dx \quad (1-126)$$

y para el caso discreto

$$E\{X/M\} = \sum_n x_n P\{X = x_n/M\} \quad (1-127)$$

VARIANZA

La media η de una variable aleatoria ubica el centro de gravedad de $f(x)$. Otro parámetro importante es su "varianza" o "dispersión σ^2 ", definida por

$$\sigma^2 = E\{(X - \eta)^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \eta)^2 f(x) dx \quad (1-128)$$

Esta cantidad es igual al momento de inercia de las masas de probabilidad y nos da alguna noción acerca de su concentración alrededor de η . Su raíz cuadrada positiva es llamada "desviación estandar". Si X es del tipo discreto, entonces

$$\sigma^2 = \sum_n (x_n - \eta)^2 P\{X = x_n\} \quad (1-129)$$

Notamos que (vease (1-125)).

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= E\{X^2 - 2X\eta + \eta^2\} = E\{X^2\} - 2\eta E\{X\} + \eta^2 \\ &= E\{X^2\} - \eta^2 \end{aligned}$$

Obtenemos entonces la importante relación

$$\sigma^2 = E\{X^2\} - E^2\{X\} \quad (1-130)$$

FUNCIONES DE DOS VARIABLES ALEATORIAS

Extenderemos ahora el concepto de valor esperado a - funciones de dos variables aleatorias. La variable aleatoria:

$$Z = g(X, Y) \quad (1-131)$$

se definió anteriormente. Su valor esperado está dado por:

$$E\{Z\} = \int_{-\infty}^{\infty} z f_Z(z) dz \quad (1-132)$$

El siguiente teorema demuestra que $E\{Z\}$ puede determinarse directamente en términos de la densidad conjunta - $f(x, y)$ de las variables aleatorias X e Y sin necesidad de evaluar $f_Z(z)$.

TEOREMA.

$$E\{g(X, Y)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f(x, y) dx dy \quad (1-133)$$

Si las variables aleatorias X e Y son del tipo discreto, tomando los valores x_m, y_n , con

$$P\{X = x_m, Y = y_n\} = p_{mn}$$

Entonces:

$$E\{g(X,Y)\} = \sum_{m,n} g(x_m, y_n) P_{mn} \quad (1-134)$$

La prueba de lo anterior es similar a la prueba de (1-123). Brevemente, con D_z la región del plano xy tal que $z \leq g(x,y) \leq z + dz$, si cubrimos el eje z con elementos diferenciales dz , las regiones correspondientes D_z no se superponen y cubren todo el plano xy ; en consecuencia las integrales (1-132) y (1-133) son iguales.

De (1-133) sacamos la importante conclusión de que podemos intercambiar valor esperado y sumatoria como en (1-125).

$$E\{g_1(X,Y) + \dots + g_n(X,Y)\} = E\{g_1(X,Y)\} + \dots + E\{g_n(X,Y)\} \quad (1-135)$$

Por ejemplo:

$$E\{X + Y\} = E\{X\} + E\{Y\}$$

$$E\{(X + Y)^2\} = E\{X^2\} + E\{Y^2\} + 2E\{XY\}$$

Conviene notar que en general,

$$E\{XY\} \neq E\{X\} E\{Y\}$$

MOMENTOS.

El valor esperado de X determina solamente el centro

de gravedad de su densidad. Una especificación más completa de la estadística de X es posible si se conocen sus "momentos m_n " definidos por

$$m_r = E\{X^r\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x) dx \quad (1-138)$$

Es claro que $m_0 = 1$ $m_1 = \eta = E\{X\}$

Las constantes

$$\mu_r = E\{(X - \eta)^r\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \eta)^r f(x) dx \quad (1-139)$$

son llamadas "momentos centrales". Tenemos

$$\mu_0 = 1 \quad \mu_1 = 0 \quad \mu_2 = \sigma^2$$

Expresaremos ahora μ_r en términos de m_r . De

$$\mu_r = E\{(X - \eta)^r\} = E\left\{\sum_{h=0}^r \binom{r}{h} (-1)^h \eta^h X^{r-h}\right\} \quad (1-140)$$

y de (1-125) obtenemos

$$\mu_r = \sum_{h=0}^r \binom{r}{h} (-1)^h \eta^h m_{r-h}$$

Se puede, en forma similar determinar m_r de r :

$$m_r = E\{X^r\} = E\{[(X - \eta) + \eta]^r\} = E\left\{\sum_{h=0}^r \binom{r}{h} \eta^h (X - \eta)^{r-h}\right\}$$

en consecuencia

$$m_r = \sum_{h=0}^r \binom{r}{h} n^h \mu_{r-h}$$

VARIAS VARIABLES ALEATORIAS.-

El concepto de momentos de una función de densidad de probabilidad, puede, por supuesto ser extendido a las funciones de densidad conjunta.

Los momentos conjuntos m_{kr} de dos variables aleatorias X e Y están definidos por

$$m_{kr} = E\{X^k Y^r\} \quad (1-141)$$

De (1-133) se tiene

$$m_{kr} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^k y^r f(x, y) dx dy \quad (1-142)$$

La suma $k + r$ es llamada orden de los momentos. Por ejemplo, m_{11} , m_{02} , y m_{20} son momentos de segundo orden.- La cantidad m_{11} se escribe a veces en la forma R_{xy} :

$$R_{xy} = E\{XY\} = m_{11}$$

Los momentos de primer orden:

$$m_{10} = \eta_X \quad m_{01} = \eta_Y$$

son los valores esperados de X e Y, respectivamente. El punto del plano xy con coordenadas η_X, η_Y es el centro de gravedad de las masas de probabilidad.

Los momentos centrales conjuntos μ_{kr} están definidos por

$$\mu_{kr} = E\{(X - \eta_X)^k (Y - \eta_Y)^r\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \eta_X)^k (y - \eta_Y)^r f(x, y) dx dy \quad (1-143)$$

Claramente,

$$\mu_{20} = \sigma_X^2 \quad \mu_{02} = \sigma_Y^2$$

son las varianzas de X e Y

$$\mu_{11} = E\{(X - \eta_X)(Y - \eta_Y)\} \quad (1-144)$$

es llamado la covarianza de X e Y. Puesto que

$$E\{(X - \eta_X)(Y - \eta_Y)\} = E\{XY\} - \eta_X E\{Y\} - \eta_Y E\{X\} + \eta_X \eta_Y$$

Concluimos que

$$\mu_{11} = E\{XY\} - E\{X\} E\{Y\} \quad (1-145)$$

La relación

$$r = \frac{E\{(X - \eta_X)(Y - \eta_Y)\}}{\sqrt{E\{(X - \eta_X)^2\} E\{(Y - \eta_Y)^2\}}} = \frac{\mu_{11}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

es llamada coeficiente de correlación de X e Y.

PROMEDIOS EN PROCESOS ESTOCASTICOS

El valor medio $\eta(t)$ de un proceso $X(t)$ es el valor -
esperado de la variable aleatoria $X(t)$

$$\eta(t) = E\{X(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x;t) dx \quad (1-146)$$

El es, en general una función del tiempo.

La autocorrelación $R(t_1, t_2)$ de un proceso $X(t)$ es el
momento conjunto de las variables aleatorias $X(t_1)$ y $X(t_2)$.

$$R(t_1, t_2) = E\{X(t_1)X(t_2)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 \quad (1-147)$$

es una función de t_1 y t_2 .

La autocovarianza de $X(t)$ es la covarianza de las -
variables aleatorias $X(t_1)$ y $X(t_2)$:

$$C(t_1, t_2) = E\{ [X(t_1) - \eta(t_1)] [X(t_2) - \eta(t_2)] \} \quad (1-148)$$

De lo anterior vemos que

$$C(t_1, t_2) = R(t_1, t_2) - \eta(t_1) \eta(t_2) \quad (1-149)$$

Por último, la varianza de la variable aleatoria $X(t)$
está dada por

$$\sigma_{X(t)}^2 = C(t,t) R(t,t) - \eta^2(t) \quad (1-150)$$

En el capítulo II se demuestra que para procesos estocásticos estacionarios el valor medio es una constante y la función de autocorrelación depende únicamente de τ . Veremos ahora algunas propiedades adicionales de la función de autocorrelación para procesos estocásticos estacionarios.

Para un proceso estacionario real.

$$R(\tau) = E X(t + \tau) X(t) \quad (1-151)$$

Entonces:

$$R(0) = E\{X^2(t)\} \geq 0 \quad (1-152)$$

Es fácil de ver que

$$E\{X(t + \tau) \pm X(t)\}^2 = 2 R(0) \pm R(\tau) \quad (1-153)$$

Peró el miembro izquierdo es no negativo; en consecuencia.

$$R(0) \pm R(\tau) > 0 \quad \text{esto es} \quad -R(0) \leq R(\tau) \leq R(0)$$

Entonces $R(\tau)$ es máxima en el origen

$$|R(\gamma)| \leq R(0) \quad (1-154)$$

DESIGUALDAD DE TCHEBYCHEFF.

La varianza σ^2 de una variable aleatoria X nos da una estimación de la concentración de $f(x)$ alrededor de su centro de gravedad η . Por ejemplo, si $f(x)$ es normal (capítulo IV),

$$P\{x_1 \leq X \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1) = \text{erf} \frac{x_2 - \eta}{\sigma} - \text{erf} \frac{x_1 - \eta}{\sigma}$$

Entonces

$$P\{|X - \eta| \geq r\sigma\} = 1 - 2 \text{erf } r$$

y si r es lo suficientemente grande, entonces lo anterior es despreciable (fig. 1-20).

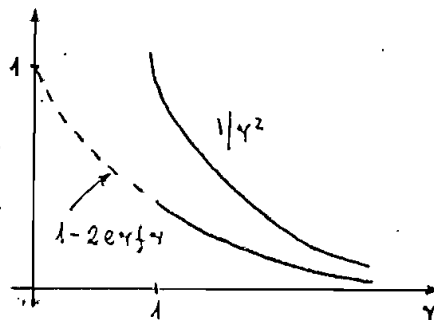


Fig. 1-20

Demostraremos ahora que esta conclusión es válida para cualquier $f(x)$. Pero primero asumiremos que $\sigma = 0$

$X = \text{constante con probabilidad 1.}$ Demostraremos que si -

$$E\{X^2\} = 0$$

entonces la variable aleatoria X es igual a cero con probabilidad 1, en otras palabras,

$$P\{X \neq 0\} = 0 \quad (1-155)$$

Supongamos que (1-155) no es verdadera. Podemos encontrar entonces un $\epsilon > 0$ tal que

$$P\{|X| > \epsilon\} = \int_{|x| > \epsilon} f(x) dx \neq 0$$

Pero

$$E\{X^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx \geq \int_{|x| > \epsilon} x^2 f(x) dx \geq \int_{|x| > \epsilon} f(x) dx > 0$$

y esto es falso; entonces (1-155) es verdadera.

En forma similar si

$$E\{(X - a)^2\} = 0 \quad \text{entonces} \quad X = a \quad (1-156)$$

con probabilidad 1. Entonces: Si la varianza de una variable aleatoria X es igual a cero o, en forma equivalente, si $E\{X^2\} = E^2\{X\}$, entonces X es una constante para casi todas las salidas experimentales.

Desigualdad de Tchebycheff.

Supongamos ahora que X es arbitraria con densidad $f(x)$ y varianza finita σ^2 . Mantenemos que

$$P\{|X - \eta| \geq r\} \leq \frac{1}{r^2} \quad \text{donde } \eta = E\{X\} \quad (1-157)$$

Entonces, independientemente de la forma de $f(x)$, la probabilidad

$$P\{\eta - \varepsilon < X < \eta + \varepsilon\} \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \quad (1-158)$$

de que X tome valores en el intervalo $(\eta - \varepsilon, \eta + \varepsilon)$ centrado en η (Fig. 1-21)

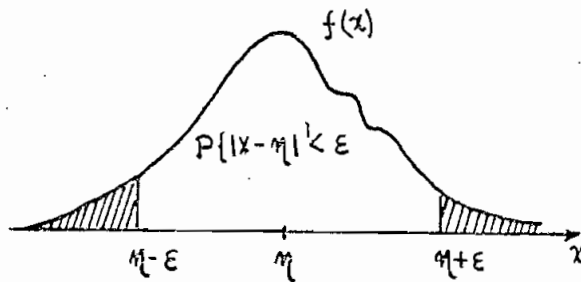


Fig. 1-21.

es cercana a 1 siempre que $\sigma \ll \varepsilon$. El resultado anterior es usado extensamente.

Demostración. Tenemos

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \eta)^2 f(x) dx \geq \int_{|x - \eta| > r\sigma} (x - \eta)^2 f(x) dx \\ &\geq r^2 \sigma^2 \int_{|x - \eta| > r\sigma} f(x) dx = r^2 \cdot 2P\{|X - \eta| \geq r\sigma\} \end{aligned}$$

y (1-157) se sigue.

C A P I T U L O I I

TRANSMISION BINARIA

2-1.- INTRODUCCION.-

Con el nombre de transmisión binaria se ha querido identificar a un Proceso Estocástico generado por tiradas sucesivas e independientes de una moneda. Las tiradas se efectúan cada T segundos y se asigna el valor "uno" al evento {Cara en la enésima tirada} y el valor "cero al evento - {Sello en la enésima tirada}. De este modo es posible generar dos tipos de proceso, los cuales estudiaremos a conti - nuación.

2-2.- TRANSMISION BINARIA SEMIALEATORIA.-

Suponemos que la moneda se tira un número infinito de veces y que el lapso transcurrido entre tiradas sucesivas - es de "T" segundos. Definimos el proceso X(t) por:

$$X(t) = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si sale cara en la enésima tirada} \\ 0 \text{ si sale sello en la enésima tirada} \end{array} \right\} \quad (2-1)$$

esto es para: $(n-1)T \leq t < nT.$

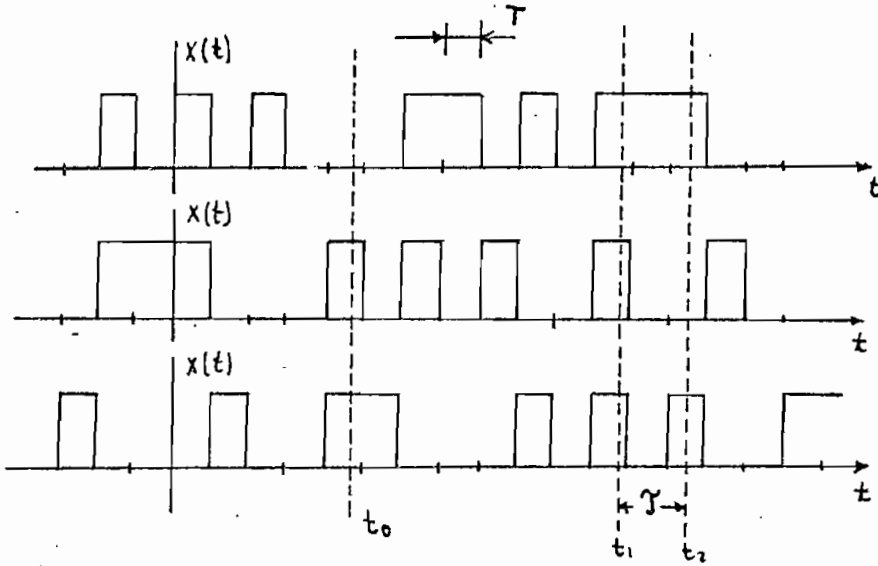


Fig. 2-1

En la figura 2-1 se muestran tres funciones miembro de este proceso, las cuales se caracterizan porque las pruebas independientes ocurren exactamente en los mismos instantes para todas. Se puede pensar que los "relojes" que controlan la generación de este proceso, echan a andar todos en el mismo instante. En cada función muestra, las tiradas ocurren solamente en valores enteros, múltiplos de T de la escala absoluta de tiempo.

Desarrollaremos a continuación la estadística de este proceso, en la forma más completa posible, esto es, determinando las funciones de distribución de primero y segundo orden, el valor medio, la varianza y la función de autocorrelación.

FUNCIONES DE DISTRIBUCION Y DENSIDAD DE PRIMER ORDEN.-

En la figura 2-1 consideremos un instante cualquiera t . Si observamos el conjunto infinito de funciones que forman este proceso veremos que, en el instante t tenemos unicamente dos eventos posibles: $\{X(t_0) = 1\}$ y $\{X(t_0) = 0\}$ con las siguientes probabilidades:

$$P\{X(t_0) = 0\} = 1/2 \quad \text{y} \quad P\{X(t_0) = 1\} = 1/2 \quad (2-2)$$

Las funciones de Distribución y Densidad de Probabilidad para este proceso, en el instante t_0 son las que se representan en la figura (2-2).

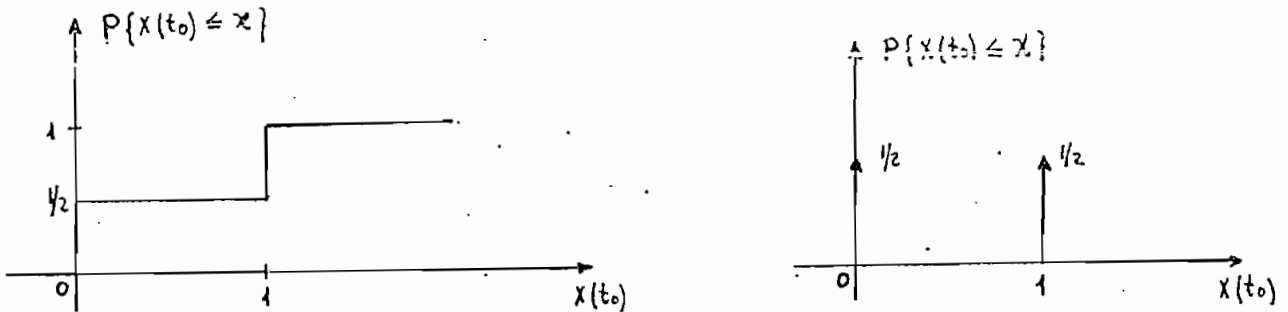


Figura 2-2

En efecto, para la función de Distribución se tiene:

Si $x \geq 1$, entonces $X(t_0) \leq x$ es el evento seguro porque

$$X(t_0, c) = 1 \leq x \quad \text{y} \quad X(t_0, s) = 0 \leq x$$

por eso

$$P\{X(t_0) \leq x\} = P\{c, s\} = 1$$

* Con c se designa al evento cara y con s al evento sello en una tirada de una moneda.

Si $0 \leq x < 1$, entonces $\{X(t_0) \leq x\} = \{s\}$ porque

$$X(t_0, c) = 1 > x \quad \text{y} \quad X(t_0, s) = 0 \leq x$$

en consecuencia

$$P\{X(t_0) \leq x\} = P\{s\} = \frac{1}{2}$$

Finalmente, si $x < 0$, entonces $\{X(t_0) \leq x\}$ es el evento imposible; en consecuencia:

$$P\{X(t_0) \leq x\} = 0$$

entonces:

$$P\{X(t_0) \leq x\} = \begin{cases} 1 & \text{para } x \geq 1 \\ \frac{1}{2} & \text{para } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{para } x < 0 \end{cases} \quad (2-3)$$

es una función tipo escalera que se muestra en la figura 2-2. Su derivada, que es la función de Densidad, mediante dos impulsos iguales de amplitud $\frac{1}{2}$ representa la probabilidad del evento $\{X(t_0) = x\}$.

FUNCION DE DISTRIBUCION DE SEGUNDO ORDEN.-

Vamos a considerar ahora los instantes t_1 y t_2 que se muestran en la figura (2-1). El intervalo entre ellos lo denominaremos \mathcal{J} . Entonces, $X(t_1)$ y $X(t_2)$ son dos variables aleatorias, queremos encontrar sus funciones de Distribución y de Densidad conjunta.

Empezaremos suponiendo que t_1 y t_2 se encuentran ubi

cados dentro del mismo intervalo T de una tirada, es decir que estamos imponiendo a t_1 y t_2 las siguientes dos condiciones:

$$1). \quad \mathcal{T} < T \quad \text{y} \quad (2-4)$$

2). t_1 y t_2 no pueden encontrarse en dos intervalos sucesivos de tirada.

Tenemos entonces, que su función de Densidad de probabilidad conjunta estará dada por:

$$P\{X(t_1) = x_1, X(t_2) = x_2\} = P\{X(t_1) = x_1\} P\{X(t_2) = x_2 | X(t_1) = x_1\} \quad (2-5)$$

Con las restricciones impuestas por (2-4), las variables aleatorias $X(t_1)$ y $X(t_2)$ son dependientes y, por lo tanto tendremos únicamente los dos eventos siguientes:

$$\{X(t_1) = 0, X(t_2) = 0\} \quad \text{y} \quad \{X(t_1) = 1, X(t_2) = 1\}$$

Por lo tanto:

$$P\{X(t_1)=0, X(t_2)=0\}=P\{X(t_1)=0\}P\{X(t_2)=0|X(t_1)=0\}=\frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

$$P\{X(t_1)=1, X(t_2)=1\}=P\{X(t_1)=1\}P\{X(t_2)=1|X(t_1)=1\}=\frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

Si $T < \mathcal{T}$, estamos, entonces en dos tiradas independientes y se tienen, en consecuencia los siguientes eventos:

$$\{X(t_1) = 0, X(t_2) = 0\}$$

$$\{X(t_1) = 0, X(t_2) = 1\}$$

$$\{X(t_1) = 1, X(t_2) = 0\}$$

$$\{X(t_1) = 1, X(t_2) = 1\}$$

$$\begin{aligned}
 P\{X(t_1)=0, X(t_2)=0\} &= P\{X(t_1)=0\}P\{X(t_2)=0\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \\
 P\{X(t_1)=0, X(t_2)=1\} &= P\{X(t_1)=0\}P\{X(t_2)=1\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \\
 P\{X(t_1)=1, X(t_2)=0\} &= P\{X(t_1)=1\}P\{X(t_2)=0\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \\
 P\{X(t_1)=1, X(t_2)=1\} &= P\{X(t_1)=1\}P\{X(t_2)=1\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

En la figura 2-3 se representan las Funciones de Distribución y de Densidad para el caso especial de la ubicación de t_1 y t_2 respecto del conjunto infinito de funciones del tiempo que representan nuestro proceso.

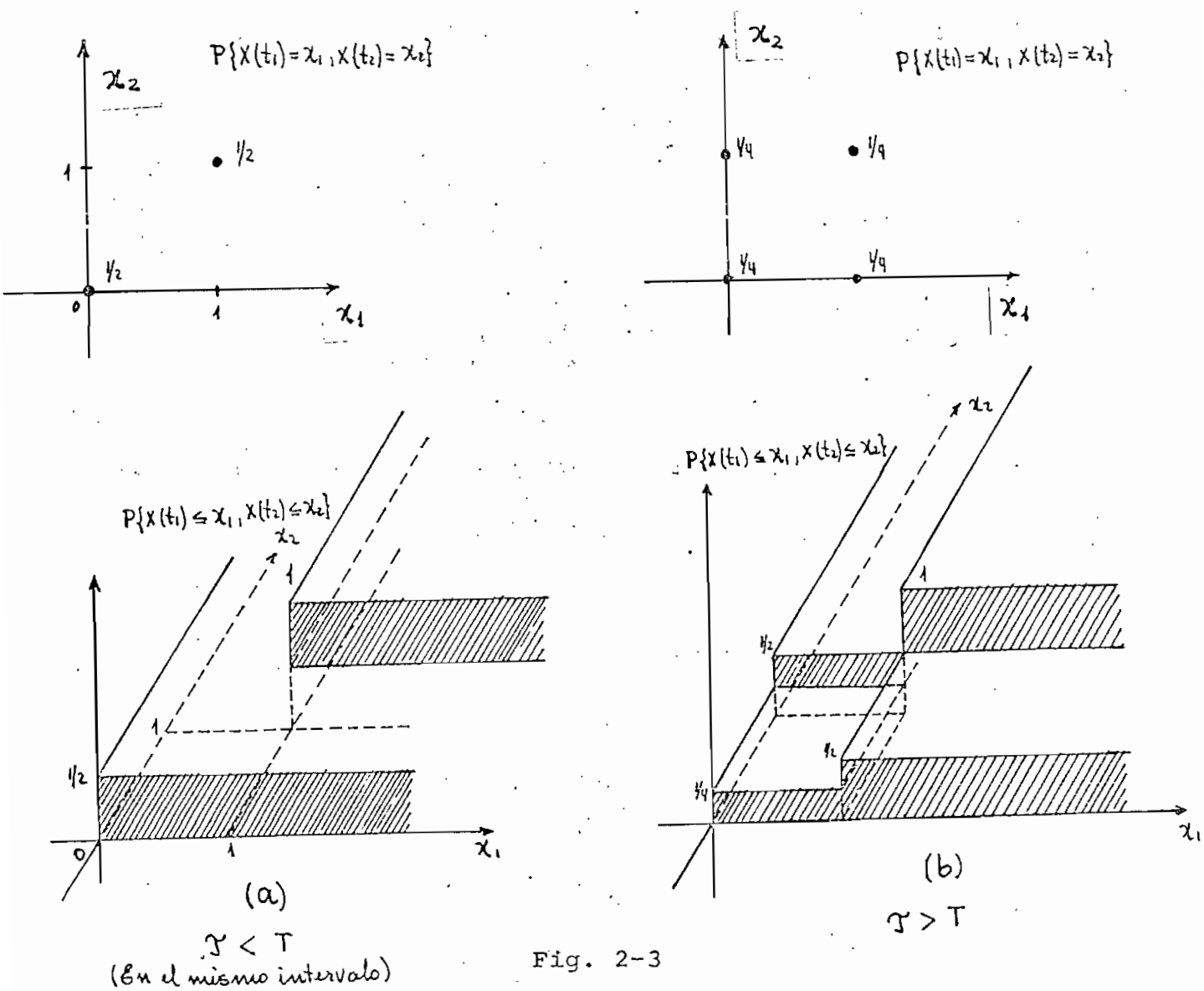


Fig. 2-3

Con el objeto de evitar la introducción de impulsos bidimensionales, hemos hecho uso de los puntos de masa de probabilidad para representar las funciones de Densidad de probabilidad conjunta obtenidas con las dos condiciones dadas para \mathcal{Y} .

Vamos a suponer ahora que escogemos t_1 y t_2 de modo - que cualquiera que sea \mathcal{Y} , t_1 y t_2 se encuentren en dos intervalos de tirada diferentes. En este caso, los resultados son los mismos que se representan en la figura 2-3 b, porque siempre $X(t_1)$ y $X(t_2)$ serán variables aleatorias in dependientes. Posteriormente veremos que este resultado - es muy importante para caracterizar el proceso que estamos estudiando.

VALOR MEDIO.-

El valor medio o valor esperado de este proceso será:

$$E\{X(t)\} = \sum_n x_n P_n = 1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad (2-6)$$

Además:

$$E\{X^2(t)\} = \sum_n x_n^2 P_n = 1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

VARIANZA.-

Como se ha demostrado ya en el capítulo anterior, la varianza de una variable aleatoria X está dada por:

$$\sigma^2 = E\{X^2\} - (E\{X\})^2 \quad (2-7)$$

En nuestro proceso, para un instante t fijo, tendremos:

$$\sigma^2 = 1/2 - (1/2)^2 = 1/4$$

En consecuencia, la Desviación Estandar es:

$$\sigma = 1/2$$

AUTOCORRELACION.-

Por definición, la autocorrelación de un proceso estocástico discreto está dada por:

$$R(t_1, t_2) = E\{X(t_1)X(t_2)\} = \sum_n x_1 x_2 P_n\{X(t_1) = x_1, X(t_2) = x_2\} \quad (2-8)$$

Si t_1 y t_2 se encuentran ubicados dentro de un mismo-intervalo T ; es decir:

$$nT < t_1 < (n+1)T \quad (2-9)$$

$$nT < t_2 < (n+1)T$$

se tendrá, de acuerdo con lo que se ha visto anteriormente:

$$R(t_1, t_2) = 0.0. 1/2 + 1.1. 1/2 = 1/2$$

Si t_1 y t_2 se encuentran fuera de este intervalo, se-encontrarán cada uno en intervalos correspondientes a dos tiradas independientes y se tendrá, en consecuencia:

$$R(t_1, t_2) = 0.0. 1/4 + 0.1. 1/4 + 1.0. 1/4 + 1.1. 1/4 = 1/4$$

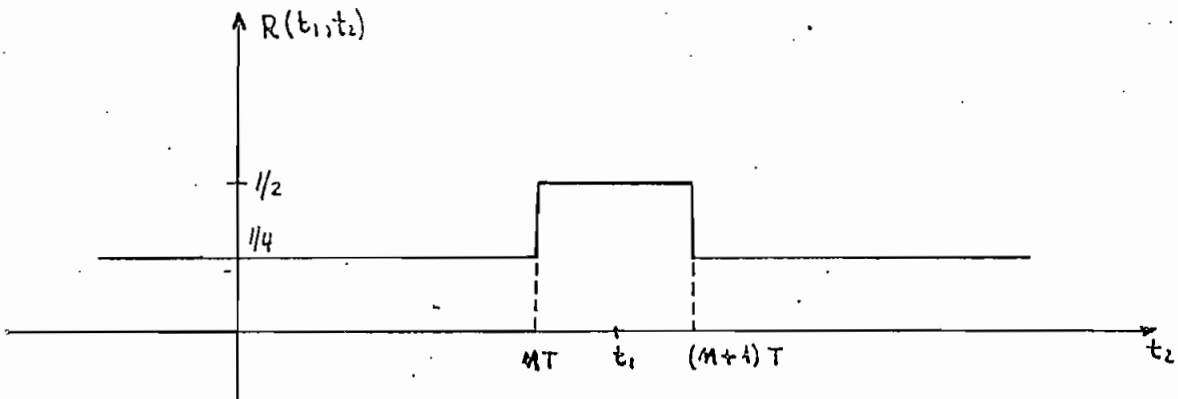


Fig: 2-4

En la figura 2-4 se ha representado gráficamente esta función de autocorrelación, para ello se ha supuesto que t_1 es fijo y que se encuentra ubicado en un intervalo T cualquiera que tiene como límites superior e inferior $(n+1)T$ y nT . t_2 es variable y puede tomar cualquier valor de $-\infty$ a $+\infty$.

Se observa entonces, que la función de autocorrelación depende del intervalo particular en el que se encuentre ubicado t_1 .

Esto quiere decir que tendremos una función de autocorrelación diferente, con el máximo desplazado a lo largo de t_2 , de acuerdo con el intervalo T en el que se encuentre ubicado t_1 .

Este resultado nos está demostrando que la función de autocorrelación depende de la particular ubicación del ins

tante de observación que se considera fijo (t_1 o t_2). Como veremos, posteriormente, esto caracteriza a nuestro proceso con respecto a su estacionaridad.

2-3.- TRANSMISION BINARIA ALEATORIA.

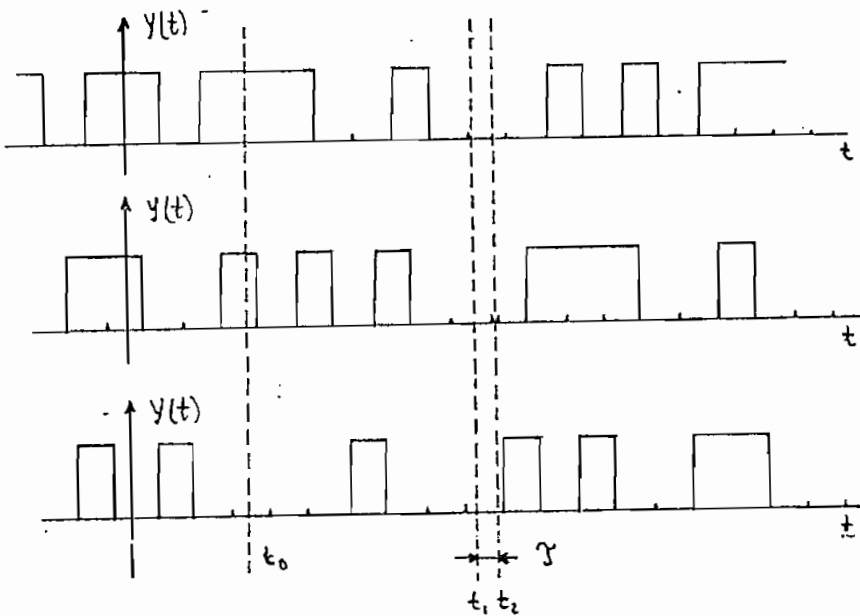


Fig. 2-5

La figura 2-5 muestra tres funciones miembro típicas del proceso que se genera al tirar una moneda. Aunque este proceso se parece mucho al anterior ya descrito, tiene una ligera diferencia con aquel. En este caso, las tiradas sucesivas ocurren también cada T segundos, pero el tiempo absoluto es una variable aleatoria uniformemente distribuida en el intervalo $(0, T)$. Esto quiere decir que los "relojes" que controlan la generación de cada una de las funciones miembro del proceso, tienen la misma frecuencia,

pero no están sincronizados, pudiendo cualquiera de ellos empezar a caminar en cualquier instante del intervalo $(0,T)$.

Desarrollaremos ahora la estadística de este proceso.

FUNCIONES DE DISTRIBUCION Y DENSIDAD DE PRIMER ORDEN.-

En la figura 2-6 se ha representado una parte de una función miembro de este proceso. El proceso en estudio puede describirse introduciendo la variable aleatoria A que representa la fase del reloj y se encuentra uniformemente distribuída en el intervalo $(0,T)$. Siendo $X(t)$ el proceso descrito en el apartado anterior, vamos a formar el proceso:

$$Y(t) = X(t-A) \tag{2-10}$$

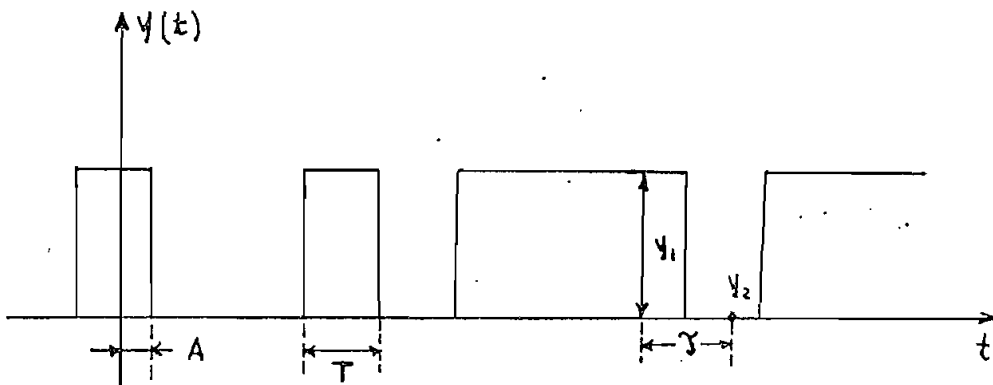


Fig. 2-6

En este proceso A y $X(t)$ son independientes. Con esto se quiere significar que la variable aleatoria A es independiente de la variable aleatoria $X(t)$ para cualquier t .

Consideremos un instante t_0 cualquiera; entonces, la probabilidad condicional:

$$P\{X(t_0 - A) = x_0 | A\} = P\{X(t_0 - A) = x_0\} \quad (2-11)$$

Cualquiera que sea el valor que tome la variable aleatoria A puesto que la variable aleatoria $X(t_0 - A)$ puede únicamente tomar los valores 0 y 1 en el instante t_0 independiente de la fase inicial que le imprima el valor particular que tome la variable aleatoria A . Tendremos, en consecuencia, que para una estadística de primer orden, es decir aquella secuencia, que analiza el proceso considerando un solo instante de tiempo, el proceso $X(t_0 - A) = X(t_0)$. Tendremos, por lo tanto que:

$$P\{X(t_0 - A) = x_0\} = P\{X(t_0) = x_0\} \quad (2-12)$$

En consecuencia, las Funciones de Distribución y Densidad de primer orden para el proceso que estamos estudiando, son las mismas que se muestran en la figura 2-2.

FUNCIONES DE DISTRIBUCION Y DENSIDAD DE SEGUNDO ORDEN.-

En la figura 2-6 consideremos dos instantes t_1 y t_2 . El intervalo entre ellos lo denominaremos γ . Sean, además y_1 y y_2 dos muestras de este proceso tomadas en los instantes anotados.

Como se ha visto ya:

$$P\{Y(t_1)=y_1, Y(t_2)=y_2\} = P\{Y(t_1)=y_1\} P\{Y(t_2)=y_2 | Y(t_1)=y_1\} \quad (2-13)$$

y como consecuencia de lo demostrado en el apartado anterior:

$$P\{Y(t_1) = 1\} = P\{Y(t_2) = 0\} = 1/2$$

Consideremos, en primer lugar el intervalo $0 < \mathcal{T} < T$

La expresión $P\{Y(t_2)=0 | Y(t_1)=1\}$ quiere significar la probabilidad del evento. {La muestra y_2 es igual a cero, asumiendo que la muestra y_1 es igual a 1, en el intervalo \mathcal{T} }. Para que este evento ocurra deben, además ocurrir dos cosas: 1). Que dentro del intervalo \mathcal{T} ocurra un instante en el que la función puede cambiar y 2). que ocurra efectivamente un cambio en el valor de la función. Y, puesto que estos eventos son independientes se tiene:

$$\begin{aligned} P\{Y(t_2) = 0 | Y(t_1) = 1\} &= P\{\text{de que ocurra un instante de cambio dentro de } \mathcal{T}\} \{P \text{ de cambio de valor de la función}\} \\ &= \frac{\mathcal{T}}{T} \cdot 1/2 = \frac{\mathcal{T}}{2T} \end{aligned}$$

Tendremos, entonces:

$$\begin{aligned} P\{Y(t_2) = 0 | Y(t_1) = 1\} &= \frac{\mathcal{T}}{2T} \\ P\{Y(t_2) = 1 | Y(t_1) = 1\} &= 1 - \frac{\mathcal{T}}{2T} \\ P\{Y(t_2) = 1 | Y(t_1) = 0\} &= \frac{\mathcal{T}}{2T} \\ P\{Y(t_2) = 0 | Y(t_1) = 0\} &= 1 - \frac{\mathcal{T}}{2T} \end{aligned} \quad (2-14)$$

En consecuencia:

$$P\{Y(t_1) = 0, Y(t_2) = 1\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\gamma}{2T} = \frac{\gamma}{4T}$$

$$P\{Y(t_1) = 1, Y(t_2) = 1\} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{\gamma}{2T}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\gamma}{4T}$$

$$P\{Y(t_1) = 1, Y(t_2) = 0\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\gamma}{2T} = \frac{\gamma}{4T} \quad (2-15)$$

$$P\{Y(t_1) = 0, Y(t_2) = 0\} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{\gamma}{2T}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\gamma}{4T}$$

Consideremos ahora el intervalo $T < \gamma < 2T$.

En este intervalo se tienen las siguientes probabilidades:

- 1ª Cero instantes de cambio en el intervalo : 0
- 2ª Dos instantes de cambio en el intervalo : $\frac{\gamma - T}{T}$
- 3ª Tres o más instantes de cambio en el intervalo : 0

Entonces, la probabilidad de ocurrencia de un instante de cambio es $1 - \frac{\gamma - T}{T} = \frac{2T - \gamma}{T}$. La probabilidad de ocurrencia de un cambio de valor de la función en un instante de cambio es $\frac{1}{2}$.

En este intervalo de γ , y_1 y y_2 pueden tener el mismo valor de cada una de las tres maneras siguientes:

- 1ª Pueden haber dos posiciones de cambio en el tiempo entre muestras y un cambio de valor puede ocurrir en ambas o en ninguna.

2^a Puede haber un instante de cambio sin ningún cambio de valor.

La suma de las probabilidades de estas posibilidades es:

$$\begin{aligned} P\{Y(t_2) = 1 \mid Y(t_1) = 1\} &= P\{Y(t_2) = 0 \mid Y(t_1) = 0\} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\gamma - T}{T} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\gamma - T}{T} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2T - \gamma}{T} = \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (2-16)$$

Las muestras y_1 y y_2 pueden tener diferente signo de tres maneras que son:

- 1^a Un instante de cambio con un cambio de valor.
- 2^a Dos instantes de cambio con un cambio de valor en el primero.
- 3^a Dos instantes de cambio con un cambio de valor en el segundo.

Entonces, la probabilidad de un cambio de valor entre y_1 y y_2 es:

$$\begin{aligned} P\{Y(t_2) = 0 \mid Y(t_1) = 1\} &= P\{Y(t_2) = 1 \mid Y(t_1) = 0\} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2T - \gamma}{T} + 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\gamma - T}{T} = \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (2-17)$$

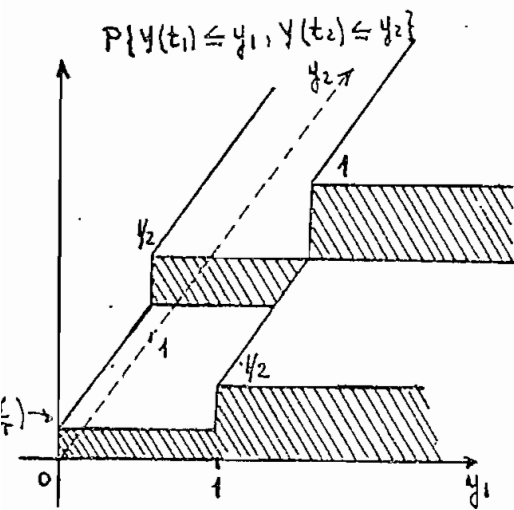
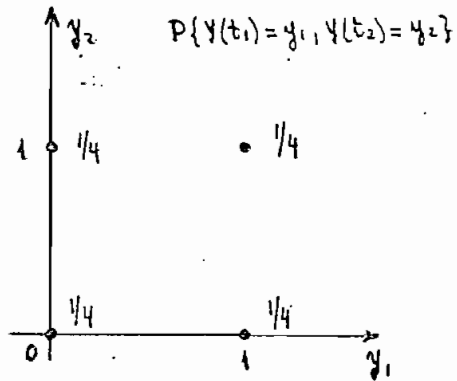
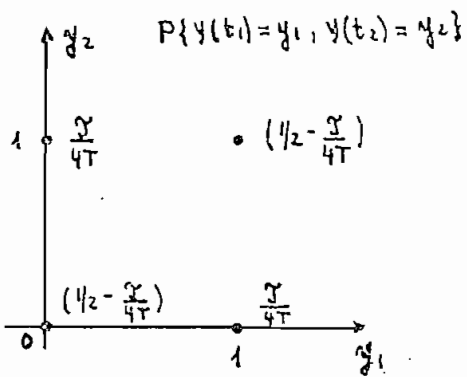
Para otros valores de γ mayores se obtienen los mismos resultados. En consecuencia, las probabilidades:

$$\begin{aligned} P\{Y(t_1) = 1, Y(t_2) = 1\} &= \frac{1}{4} \\ P\{Y(t_1) = 1, Y(t_2) = 0\} &= \frac{1}{4} \end{aligned} \quad (2-18)$$

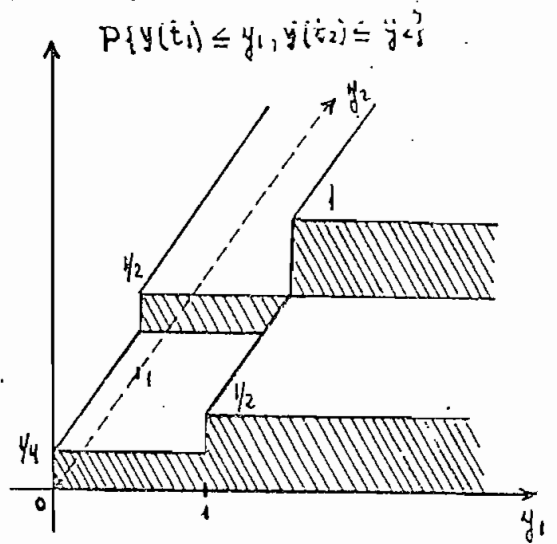
$$P\{Y(t_1) = 0, Y(t_2) = 1\} = \frac{1}{4}$$

$$P\{Y(t_1) = 0, Y(t_2) = 0\} = \frac{1}{4}$$

Las funciones de Distribución y Densidad de probabilidad se muestran en la figura 2-7



$0 < \tau < T$



$\tau > T$

Fig. 2-7
<1>

De los resultados obtenidos para la función de Densidad es importante el observar que esta depende de γ para el intervalo $0 < \gamma < T$. Esta dependencia desaparece al hacerse $\gamma > T$.

VALOR MEDIO.-

El valor medio o valor esperado de este proceso será:

$$E\{Y(t)\} = \sum_n Y_n P_n = 1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Además:

$$E\{Y^2(t)\} = \sum_n Y_n^2 P_n = 1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

(2-19)

VARIANZA.-

$$\sigma^2 = E\{Y^2\} - (E\{Y\})^2$$

por lo tanto:

$$\sigma^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

y la desviación estándar, en consecuencia:

$$\sigma = \frac{1}{2}$$

AUTOCORRELACION.-

Para el intervalo $0 < \gamma < T$, de acuerdo con (2-8), cambiando la variable aleatoria X por Y tendremos:

$$R(\gamma) = 1 \cdot 1 \left(\frac{1}{2} - \frac{\gamma}{4T}\right) + 0 \cdot 1 \left(\frac{\gamma}{4T}\right) + 1 \cdot 0 \left(\frac{\gamma}{4T}\right) + 0 \cdot 0 \left(\frac{1}{2} - \frac{\gamma}{4T}\right)$$

de donde:
$$R(\gamma) = \frac{1}{2} - \frac{\gamma}{4T}$$

Para $\gamma > T$ se tendrá:

$$R(\gamma) = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot 0 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4} .$$

Por lo tanto:

$$R(\gamma) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} - \frac{|\gamma|}{4T} \text{ para } 0 < \gamma < T \\ \frac{1}{4} \text{ para } \gamma > T \end{array} \right\} \quad (2-20)$$

Los resultados anteriores se pueden obtener sin necesidad de evaluar las funciones de Densidad de primero y segundo orden, las que en muchos casos presentan serias dificultades para su determinación.

Por su valor conceptual, vamos a derivar nuevamente - estos últimos resultados.

Haremos uso de la siguiente identidad, cuya demostración se puede encontrar en Papoulis (Probability, Random Variables and Stochastic Processes) página 208.

$$E\{g(X,Y)\} = E\{E\{g(X,Y) | X\}\} \quad (2-21)$$

Como ya se ha visto, el proceso que se ha denominado Transmisión binaria Aleatoria, se puede describir mediante la siguiente expresión matemática:

$$Y(t) = X(t-A)$$

En consecuencia, su valor medio estará dado por:

$$E\{Y(t)\} = E\{E\{X(t-A) | A\}\} = \frac{1}{2}$$

En efecto, el valor esperado interior es $\frac{1}{2}$ para cualquier A y estamos, por lo tanto en el proceso que ya hemos descrito como transmisión binaria semialeatoria.

Para encontrar la función de autocorrelación haremos uso de los resultados ya obtenidos para la transmisión binaria semialeatoria. Estos son: Si t_1 y t_2 están localizados en dos intervalos diferentes de $Y(t)$ constante, entonces $E\{Y(t_1)Y(t_2)\} = \frac{1}{4}$ y su valor esperado es igual a $\frac{1}{2}$ - en otro caso.

Supongamos en primer lugar que $T > T$. Entonces, puesto que $A < T$, debemos tener:

$$E\{Y(t_1)Y(t_2) | A\} = \frac{1}{4}$$

puesto que t_1 y t_2 caen en intervalos diferentes para cualquier A . En consecuencia:

$$E\{Y(t_1)Y(t_2)\} = E\{E\{Y(t_1)Y(t_2) | A\}\} = \frac{1}{4}$$

Si $T \leq T$ y $t = nT$ (n es un entero), entonces unicamente para

$$A < T - T$$

se tendrán t_1 y t_2 localizados en el mismo intervalo de $Y(t)$ constante; entonces:

$$E\{Y(t_1)Y(t_2) | A\} = \left\{ \begin{array}{l} 1/2 \text{ si } A < T - \gamma \\ 1/4 \text{ en otra parte.} \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} E\{Y(t_1)Y(t_2)\} &= 1/2 \cdot P\{A < T - \gamma\} + 1/4 \cdot P\{A > T - \gamma\} \\ &= 1/2 \cdot (1 - \frac{\gamma}{T}) + 1/4 \cdot \frac{\gamma}{T} = 1/2 - \frac{\gamma}{4T} \end{aligned}$$

Tenemos, por lo tanto que:

$$R(\gamma) = E\{Y(t_1)Y(t_2)\} = \left\{ \begin{array}{l} 1/2 - \frac{|\gamma|}{4T} \text{ para } T > \gamma \\ 1/4 \text{ para } T < \gamma \end{array} \right\}$$

La función de autocorrelación de nuestro proceso es - la que se muestra en la figura 2-8.

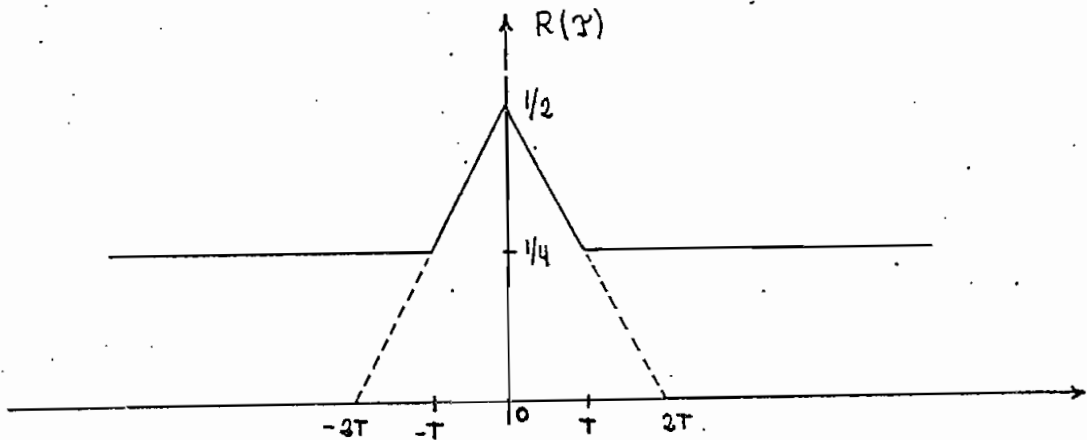


Fig. 2-8

Con todo lo que se ha visto anteriormente creemos haber logrado una descripción bastante completa de los dos procesos en estudio. Nos toca ahora el discutir algunos aspectos importantes de los mismos desde el punto de vista

de la estacionaridad, con el ánimo de sacar algunas conclusiones que caracterizan y establecen claras diferencias entre estos dos procesos.

2-4.- ESTACIONARIDAD.-

Para empezar, daremos algunas definiciones de estacionaridad.

SENTIDO ESTRICTO.- Decimos que un proceso $X(t)$ es estacionario en el sentido estricto, si su estadística no es afectada por un desplazamiento del origen de tiempo. Esto significa que los dos procesos:

$$X(t) \text{ y } X(t+e)$$

tienen la misma estadística, cualquiera que sea e .

De esta definición se sacan las conclusiones siguientes:

1ª La función de Densidad de orden n para un proceso estacionario debe ser tal que:

$$f(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = f(x_1, \dots, x_n; t_1+e, \dots, t_n+e) \quad (2-22)$$

para cualquier e .

En particular debemos tener:

$$f(x; t) = f(x; t+e)$$

y, puesto que esto es verdadero para todo e , concluimos -
que la densidad de primer orden es independiente de t :

$$f(x;t) = f(x)$$

Una consecuencia de lo anterior es que $E\{X(t)\}$ es una
constante:

$$E\{X(t)\} = \eta = \text{constante.}$$

La densidad de orden dos debe ser tal que:

$$f(x_1, x_2; t_1, t_2) = f(x_1, x_2; t_1 + e, t_2 + e)$$

Después de pensar un poco se concluye que lo anterior
debe ser una función de $t_1 - t_2$:

$$f(x_1, x_2; t_1, t_2) = f(x_1, x_2; \tau) \quad \tau = t_1 - t_2 \quad (2-23)$$

Entonces $f(x_1, x_2; \tau)$ es la densidad conjunta de las -
variables aleatorias:

$$X(t + \tau) \text{ y } X(t)$$

La función de Autocorrelación $R(t_1, t_2)$, en consecuen-
cia depende únicamente de $t_1 - t_2$ y puede ser escrita en la-
forma:

$$R(\tau) = E\{X(t + \tau)X(t)\} = R(-\tau) \quad (2-24)$$

En las figuras 2-1 y 2-5 consideremos dos instantes -
 t_1 y t_2 separados τ y tales que $\tau < T$. Aquí se observa ya-
una diferencia notable entre la Transmisión binaria semia-

leatoria y la aleatoria, que se manifiesta en el hecho de que para la transmisión binaria semialeatoria se pueden tener dos tipos de proceso, dependiendo de si dentro del considerado existe un instante de cambio de la función o no lo hay. En el caso de la Transmisión binaria aleatoria, por el contrario la probabilidad de ocurrencia de un instante de cambio dentro del intervalo γ no depende la ubicación de este en el tiempo, tan solo depende de la duración del mismo.

La función de Autocorrelación en el caso semialeatorio depende de t_1 y t_2 , es decir es una función de t_1 y t_2 , en tanto que en el caso aleatorio es sólo una función de γ .

Esto nos permite concluir, que con respecto a una estadística de segundo orden, el caso aleatorio es estacionario en el sentido estricto, mientras que el semialeatorio no lo es.

Si la transmisión binaria aleatoria es estacionaria de orden dos, también es estacionaria de orden uno, porque una función de distribución de orden superior determina las de orden inferior.

Para la Transmisión binaria semialeatoria se observa lo siguiente:

1ª La función de densidad de primero orden no depende del tiempo.

2ª El valor medio del proceso es una constante.

En consecuencia, el caso semialeatorio es estacionario para una estadística de primer orden es un proceso estacionario de primer orden. En efecto, si consideramos un instante t_0 cualquiera en la figura, los valores observados del proceso serán siempre los mismos, independientemente de la particular ubicación de t_0 .

Vamos a analizar ahora estos procesos con respecto al criterio de estacionaridad en el sentido amplio.

Decimos que un proceso $X(t)$ es estacionario en el sentido amplio (o débilmente estacionario) si su valor esperado es constante y su autocorrelación depende únicamente de $t_1 - t_2$: Esto es:

$$E\{X(t)\} = \eta = \text{constante y } E\{X(t_1)X(t_2)\} = R(\tau) \quad (2-25)$$

Es claro que si $X(t)$ es estacionario en el sentido amplio, entonces también es estacionario en el sentido débil. Lo inverso, sin embargo, no es verdadero. La estacionaridad en el sentido amplio involucra únicamente los momentos de primero y segundo orden. La estacionaridad en el sentido débil involucra únicamente la transmisión de primer orden. Es claro que un proceso binario aleatorio es estacionario en el sentido débil, pero no en el sentido amplio, pues su valor medio es constante, su función de autocorrelación depende de t_1 y t_2 .

La transmisión binaria semialeatoria es, sin embargo "periódicamente estacionaria", pues se ajusta a la siguiente definición:

El proceso $X(t)$ es periódicamente estacionario con período T si (2-22) es verdadera únicamente para $e = nT$. Si este es el caso, entonces las variables aleatorias:

$$X(t), X(t + T), \dots, X(t + nT)$$

tiene las mismas densidades.

En efecto, pues para la transmisión binaria semialeatoria, los instantes $t, t+T, \dots, t+nT$ son equivalentes.

Resumiendo diremos:

La transmisión binaria semialeatoria es un proceso estocástico:

- a) Estacionario de primer orden.
- b) Periódicamente estacionario con período T .
- c) No estacionario de segundo orden.
- d) No estacionario en el sentido amplio.

La transmisión binaria aleatoria es un proceso estocástico:

- a) Estacionario de primer orden
- b) Estacionario de segundo orden
- c) Estacionario en el sentido estricto.
- d) Estacionario en el sentido amplio.

Nos queda un último aspecto teórico de importancia -- que analizar en el estudio de estos procesos y es aquel que se refiere a los promedios estadísticos en el tiempo para una función miembro del proceso y su coincidencia o no coincidencia con los promedios del ensamblaje infinito de funciones del tiempo que constituyen un proceso estocástico.

En otras palabras se quiere saber si el valor medio y la autocorrelación de una función miembro del proceso evaluados en el tiempo, son iguales al valor medio y la autocorrelación del conjunto infinito de funciones que constituyen el proceso. Si estos valores son iguales, entonces se dice que el proceso estocástico es "ergódico". La idea es simple, si es que se ignoran las dificultades de tipo matemático que se presentan.

2-5.- ERGODICIDAD.-

Antes de entrar a definir en forma precisa el concepto de Ergodicidad, necesitamos algunos conceptos y definiciones que daremos a continuación.

INTEGRALES ESTOCASTICAS.-

Dado un proceso estocástico real $X(t)$, formamos la integral:

$$S = \int_a^b X(t) dt \quad (2-26)$$

Nota: Aquí S tiene un sentido distinto del que se ha venido utilizando.

Si esta integral existe en el sentido de Riemann para toda función $X(t,k)$ del proceso $X(t)$, ella define un número $S(k)$. Entonces S es una variable aleatoria y $S(k)$ tiene el significado usual del área de $X(t,k)$.

Vamos a determinar el valor medio y la varianza de S.

El cuadrado de S puede ser escrito como una integral-doble:

$$S^2 = \int_a^b X(t_1) dt_1 \int_a^b X(t_2) dt_2 = \int_a^b \int_a^b X(t_1)X(t_2) dt_1 dt_2 \quad (2-27)$$

Tomando valores esperados de ambos miembros, obtenemos la relación básica:

$$E\{S^2\} = \int_a^b \int_a^b E\{X(t_1)X(t_2)\} dt_1 dt_2 = \int_a^b \int_a^b R(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \quad (2-28)$$

con

$$C(t_1, t_2) = R(t_1, t_2) - n(t_1)n(t_2)$$

la autocovarianza de $X(t)$, tenemos, restando de (2-28) el cuadrado de (2-27).

$$\sigma_s^2 = \int_a^b \int_a^b \{R(t_1, t_2) - n(t_1)n(t_2)\} dt_1 dt_2 = \int_a^b \int_a^b C(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \quad (2-29)$$

Aplicaremos lo anterior a promedios en el tiempo. Su pongamos que el proceso $W(t)$ es estacionario. Formamos la integral:

$$S = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T W(t) dt \quad (2-30)$$

Claramente, de (2-27) y de (2-29)

$$E\{S\} = \eta \quad \sigma_s^2 = \frac{1}{4T} \int_{-T}^T \int_{-T}^T C(t_1 - t_2) dt_1 dt_2 \quad (2-31)$$

en donde η es la media y $C(\tau)$ la autocovarianza de $W(t)$.

La integral en (2-31) puede simplificarse. Con $t_1 - t_2 = \tau$, tenemos $C(t_1 - t_2) = c(\tau) = \text{constante}$ en la región sombreada de la figura 2-9. El área de esta región es igual a $(2T - |\tau|)d\tau$, como es fácil de ver, y τ varía de $-2T$ a $2T$. En consecuencia:

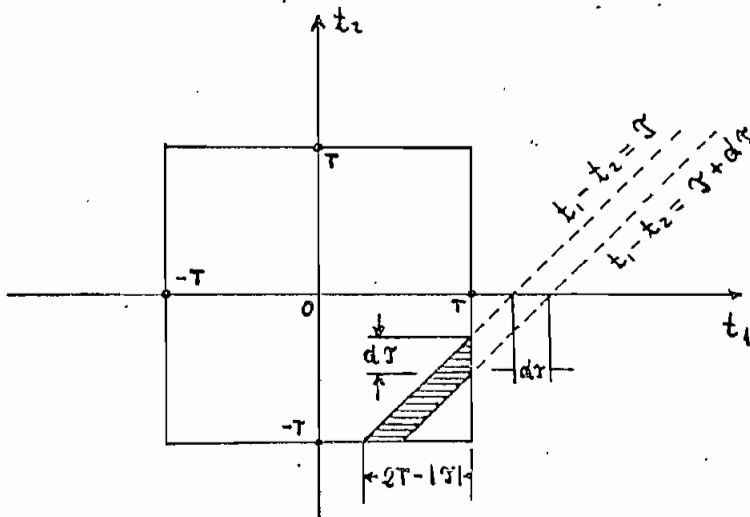


Fig. 2-9

$$\int_{-T}^T \int_{-T}^T C(t_1 - t_2) dt_1 dt_2 = \int_{-2T}^{2T} (2T - |\tau|) C(\tau) d\tau$$

Dividiendo por $4T$ obtenemos, entonces:

$$\sigma_s^2 = \frac{1}{2T} \int_{-2T}^{2T} \left(1 - \frac{|\tau|}{2T}\right) C(\tau) d\tau$$

Esto es verdadero para procesos reales o complejos. Si $W(t)$ es real, entonces $C(\tau)$ es par, y lo anterior nos da:

$$\sigma_s^2 = \frac{1}{T} \int_0^{2T} \left(1 - \frac{\tau}{2T}\right) C(\tau) d\tau = \frac{1}{T} \int_0^{2T} \left(1 - \frac{\tau}{2T}\right) \{R(\tau) - n^2\} d\tau \quad (2-32)$$

Esta simple relación será la base para nuestra discusión de la ergodicidad.

PROMEDIOS EN EL TIEMPO.-

En esta parte trataremos con procesos estacionarios.

Consideremos los límites:

$$\eta^* = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t) dt \quad \dagger \quad (2-33)$$

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t + \tau) X(t) dt \quad (2-34)$$

† Se usa esta notación para poner de manifiesto que η^* y R son variables aleatorias.

Estos límites se usan frecuentemente para definir la media y la autocorrelación de un proceso $X(t)$. Sin embargo, ellos no son constantes, sino variables aleatorias y - para afirmar que:

$$\eta^* \stackrel{?}{=} E\{X(t)\} \quad R(\tau) \stackrel{?}{=} E\{X(t + \tau)X(t)\} \quad (2-35)$$

se debe probar que (vease Desigualdad de Tchebycheff)

$$E\{\eta^*\} = E\{X(t)\} = \eta \quad \sigma_{\eta^*}^2 = 0 \quad (2-36)$$

$$E\{R(\tau)\} = E\{X(t + \tau)X(t)\} = R(\tau); \quad \sigma_R^2 = 0 \quad (2-37)$$

En otras palabras (2-35) es verdadero unicamente si - las integrales (2-33) y (2-34) tienen el mismo valor para casi todas las funciones $X(t,k)$ del proceso dado.

Como se ve, el valor medio de la variable aleatoria - η^* es igual a η si sucede que su varianza es igual a cero, entonces y solamente entonces η^* será igual a $E\{X(t)\}$ con probabilidad 1. Lo mismo diremos en el caso de la autocorrelación.

ERGODICIDAD.-

La ergodicidad trata con el problema de determinar la estadística de un proceso $X(t)$ a partir de una sola observación:

$X(t)$ es ergódico en la forma más general si (con probabilidad 1) todas sus estadísticas pueden determinarse a

partir de una sola función $X(t,k)$ del proceso.

Puesto que los varios parámetros estadísticos son expresados como promedios en el tiempo, lo anterior puede expresarse en la forma:

$X(t)$ es ergódico si los promedios en el tiempo son iguales a los promedios del proceso (esto es, valores esperados).

Usualmente, se está interesado no en todos, sino únicamente en ciertos parámetros de un proceso. Se puede, entonces definir la ergodicidad con respecto a estos parámetros. Es claro que un proceso puede ser ergódico para ciertos parámetros, pero no para todos. En nuestro caso, estaríamos interesados en la ergodicidad del valor medio y de la Autocorrelación.

ERGODICIDAD DEL VALOR MEDIO.-

Introducimos el valor medio en el tiempo:

$$\eta_T^* = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t) dt \quad (2-38)$$

del proceso dado $X(t)$. Es claro que η_T^* es una variable aleatoria como en (2-30), y puesto que $E X(t)$ es una constante, tenemos:

$$E\{\eta_T^*\} = E\{X(t)\} = \eta$$

La varianza de η_T^* como hemos visto, está dada por -
(2-32)

$$\sigma_{\eta_T^*}^2 = \frac{1}{T} \int_0^{2T} \left(1 - \frac{\gamma}{2T}\right) \{R(\gamma) - \eta^2\} d\gamma$$

en donde $R(\gamma)$ es la autocorrelación de $X(t)$. Si esta varianza tiende a cero cuando $T \rightarrow \infty$, entonces η_T^* tiende a su valor esperado, vease (1-156). En consecuencia:

TEOREMA.

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t) dt = E\{X(t)\} = \eta \quad (2-39)$$

si y sólo si

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{2T} \left(1 - \frac{\gamma}{2T}\right) [R(\gamma) - \eta^2] d\gamma \quad (2-40)$$

Este es el teorema ergódico para $E\{X(t)\}$.

Según se ha visto, toda esta teoría se ha establecido para procesos estocásticos estacionarios en el sentido amplio, por lo menos. La transmisión binaria semialeatoria, no lo es ni en este sentido, ni en el sentido estricto, - por lo tanto, carecerá en absoluto de significado el que intentemos probar la ergodicidad para este proceso. La transmisión binaria aleatoria, según se ha demostrado, es un proceso estacionario en el sentido amplio y en el sentido estricto, y por lo tanto se puede hacer para él la prue

ba de la ergodicidad.

De (2-20) y de (2-40) se tiene:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{2T} \left(1 - \frac{\gamma}{2T}\right) \left[1 - \frac{\gamma}{4L} G_L\left(\gamma - \frac{L}{2}\right) + \frac{1}{4} u(\gamma - L) - \frac{1}{4} \right] d\gamma$$

en donde L representa el intervalo entre tiradas para nuestro experimento, $G_L(\gamma - L/2)$ es la función compuesta de intervalo L centrada en $\gamma = L/2$ y $u(\gamma - L)$ es la función escalón unitario con su inicio en $\gamma = L$.

Utilizando la propiedad distributiva de los operadores límite e integral, se tiene que la expresión anterior es equivalente a:

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{2T} \left(1 - \frac{\gamma}{2T}\right) \left(1 - \frac{\gamma}{4L}\right) G_L\left(\gamma - \frac{L}{2}\right) d\gamma &+ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{2T} \frac{1}{4} u(\gamma - L) d\gamma - \\ &- \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{2T} \frac{1}{4} d\gamma \end{aligned}$$

o lo que es lo mismo:

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^L \left[1 - \gamma \left(\frac{1}{2T} + \frac{1}{4L}\right) + \frac{\gamma^2}{8TL} \right] d\gamma &+ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{2T} \frac{1}{4} d\gamma - \\ &- \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{2T} \frac{1}{4} d\gamma \end{aligned}$$

integrando:

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left| \int_0^L \left[\gamma - \frac{\gamma^2}{2} \left(\frac{1}{2T} + \frac{1}{4L}\right) + \frac{\gamma^3}{24TL} \right] d\gamma \right| + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left| \int_L^{2T} \frac{\gamma}{4} d\gamma \right| - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left| \int_0^{2T} \frac{\gamma}{4} d\gamma \right|$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left[L - \frac{L^2}{2} \left(\frac{1}{2T} + \frac{1}{4L} \right) + \frac{L^3}{24TL} \right] + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left(\frac{2T}{4} - \frac{L}{4} \right) - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \frac{2T}{4} \\
 &= 0 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0
 \end{aligned}$$

Con este resultado se ha demostrado la ergodicidad del valor medio de la Transmisión binaria aleatoria. Esto significa que para este proceso, la varianza de la variable aleatoria que representa a su valor medio en el tiempo es igual a cero y que, por lo tanto, el valor medio en el tiempo de cualquier función miembro del proceso será igual al valor medio del proceso.

ERGODICIDAD DE LA AUTOCORRELACION.-

Formamos ahora el promedio:

$$\hat{R}_T(\lambda) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t + \lambda)X(t) dt \quad (2-41)$$

Es claro que:

$$E\{\hat{R}_T(\lambda)\} = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T E\{X(t + \lambda)X(t)\} dt = R(\lambda)$$

porque el integrando es igual a la autocorrelación $R(\lambda)$ de $X(t)$. Para un λ dado, la integral $\hat{R}_T(\lambda)$ es el promedio en el tiempo del proceso:

$$\phi(t) = X(t + \lambda)X(t)$$

El valor medio de este proceso está dado por

$$E\{\phi(t)\} = E\{X(t + \lambda)X(t)\} = R(\lambda)$$

y su autocorrelación por

$$R_{\phi\phi}(\mathfrak{T}) = E\{X(t + \lambda + \mathfrak{T})X(t + \mathfrak{T})X(t + \lambda)X(t)\}$$

Entonces, con $W(t) = \phi(t)$, concluimos de (2-32) que:

TEOREMA:

Para un λ dado,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t + \lambda) X(t) dt = E\{X(t + \lambda)X(t)\} = R(\lambda) \quad (2-42)$$

si y sólo si

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{2T} \left(1 - \frac{\mathfrak{T}}{2T}\right) [R_{\phi\phi}(\mathfrak{T}) - R(\lambda)] d\mathfrak{T} = 0 \quad (2-43)$$

Conviene notar que el término entre corchetes es igual a la autocovarianza del proceso $X(t + \lambda)X(t)$.

Para probar la ergodicidad del valor medio, es suficiente el conocer η y $R(\mathfrak{T})$. Sin embargo, para la ergodicidad de la autocorrelación es necesario el conocimiento de momentos de cuarto orden.

La determinación de momentos de cuarto orden presupone la determinación de la función de densidad de cuarto orden, esto trae consigo muchas complicaciones de tipo mate-

mático que preferimos evitar. En su lugar trataremos de mostrar en forma cualitativa la ergodicidad de la autocorrelación para el proceso de la transmisión binaria aleatoria.

Haciendo referencia a la figura 2-5, supongamos que $t_1 = 9$ y $t_2 = 9,6$, es decir que $\lambda = 0,6$. Los dos puntos t_1 y t_2 caerán dentro del intervalo entre tiradas el 40% de las muestras en el ensamblaje infinito y caerán en los intervalos correspondientes a dos tiradas independientes en el 60% de las muestras. Con $\phi = X(t+\lambda)X(t)$ vemos que $\phi =$ cero o uno con igual frecuencia cuando los puntos caen dentro de un intervalo entre tiradas y $\phi = 0$ cuando los puntos se encuentran en intervalos diferentes. En consecuencia, el valor medio para el ensamblaje infinito de funciones es $E\{\phi\} = 0,4$.

Además, en cualquier muestra con λ fijo pero no t_1 , los puntos t_1 y $t_2 + 0,6$ caen dentro de un intervalo el 40% del tiempo y en dos intervalos diferentes el 60% del tiempo, de modo que el valor medio en el tiempo es $\eta_\phi^* = 0,4$. El mismo razonamiento se puede seguir para otros valores de λ y encontramos que:

$$E\{\phi\} = \eta_\phi^*$$

y el proceso $X(t)$ es ergódico respecto de su autocorrelación. En el capítulo III obtendremos una verificación experimental de la ergodicidad de este proceso.

C A P I T U L O I I I

GENERACION Y SIMULACION DE LA TRANSMISION BINARIA.

3-1.- INTRODUCCION. En el capítulo anterior hemos efectuado un estudio teórico más o menos completo del Proceso Estocástico al que hemos denominado "Transmisión Binaria". En este capítulo describiremos el circuito con el cual lo hemos generado en forma aproximada. Decimos - en forma aproximada, por el hecho de que para generar en forma exacta este proceso, necesitaríamos de un dispositivo capaz de asumir un número infinito de estados. Ningún dispositivo ideado por el hombre es capaz de asumir un número infinito de estados. Lo que se podrá obtener siempre serán dispositivos capaces de generar secuencias periódicas de estados, cuyo período dependerá del número de elementos susceptibles de cambiar de estado al ser aplicada a su entrada una señal determinada. Se pueden, eso si obtener aproximaciones bastante buenas cuando el período es muy largo.

La obtención de una secuencia de estados con el período requerido nos ha obligado a ensayar cada una de las muchas posibilidades que presenta este circuito. La discusión de las mismas, en una forma sistemática se presenta en este capítulo.

Como el circuito propiamente tal no es muy demostrativo respecto de lo que queremos observar, ha sido necesario el simular el funcionamiento del mismo utilizando la calculadora programable HP. 9810 A.

Los resultados obtenidos de esta simulación son en realidad nuestros resultados experimentales y constituyen la fuente de información que nos ha permitido obtener importantes conclusiones.

3-2.- DESCRIPCION.

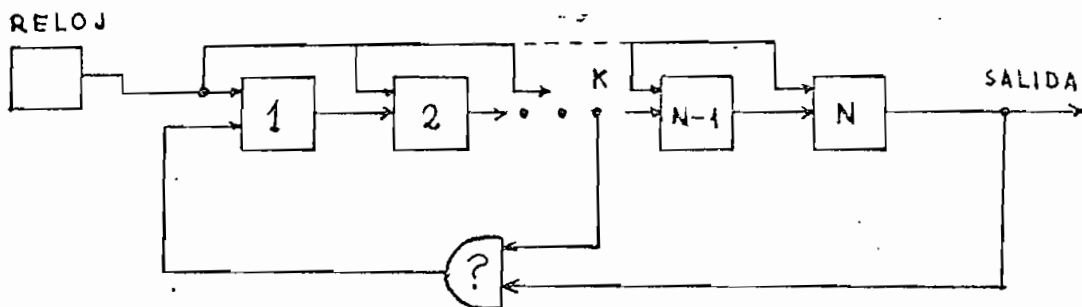


Fig. 3-1.

Con el objeto de reproducir la transmisión binaria, se ha utilizado el circuito que en forma muy esquemática se muestra en la figura. Consta este de un registro de corrimiento de N flip-flop, de un circuito de alimentación, que consiste en una compuerta con dos entradas y salidas, pudiendo tener esta cualquier función lógica. Las entradas a la compuerta se toman de la salida del último flip-flop y del flip-flop de orden K. La salida de la compuerta se utiliza para realimentar el registro de corrimiento a la entrada del flip-flop 1. Un reloj, por último es el que con cada uno de sus pulsos, hace que la información se transfiera de un flip-flop a otro, así como que ingrese nueva información al registro a través de la compuerta y la entrada del flip-flop N^a 1. La salida del registro, para nuestros propósitos, la tomaremos del flip-flop N, aunque puede tomarse

de cualquiera.

3-3.- DETERMINACION DE LA CONFIGURACION OPTIMA.

Como ya se ha dicho, el objeto de este circuito es el de reproducir en la forma lo más aproximada posible el Proceso Estocástico de la Transmisión Binaria. Según se ha visto, este proceso no es periódico, en consecuencia, una de las cosas que exigiremos de este circuito es que la onda por él generada, tenga un período lo más largo posible. Esta onda no puede ser aperiódica, pues siempre tendremos un número finito de flip-flop y, por lo tanto un número finito de estados. Si se tienen N flip-flop, en el mejor de los casos se tendrán 2^N estados.

La duración de un período puede depender de las siguientes cosas:

- 1.) De el número de Flip-flop.
- 2.) de la programación inicial que tenga el conjunto de flip-flop.
- 3.) De la función lógica de la compuerta de realimentación.
- 4.) De la ubicación del punto K de donde se toma la realimentación.

Se hace, pues necesario el efectuar un estudio de los cuatro factores anteriormente anotados con el objeto de obtener una combinación adecuada de los mismos que de como resultado que nuestro cir

cuito sea capaz de generar una onda cuyo período sea lo más largo posible. El método a seguir en este estudio es del tipo estrictamente experimental y consiste en mantener constantes tres cualesquiera de los factores anotados mientras que el restante se hace variar a voluntad. Desde luego que el método planteado para este estudio presenta un sinnúmero de posibilidades. Un estudio completo y exhaustivo demandaría mucho tiempo y ocuparía un espacio dentro de este trabajo - muy grande en relación con el que se dispone, aparte de que el mismo no es precisamente el objetivo central del presente trabajo de tesis. Nos limitaremos únicamente a presentar algunos casos muy ilustrativos y a mostrar los criterios que nos llevaron a elegir aquel que a nuestro criterio es el óptimo. Al iniciarse este trabajo se analizaron - muchos casos, entre ellos, en forma exhaustiva se analizó el caso de 8 flip-flop con compuerta de realimentación Nor. Aunque los resultados del mismo no son los que se utilizaron posteriormente, trataremos de presentar algunos de sus resultados, pues creemos que resulta ser muy ilustrativo respecto de la forma en que funciona el circuito.

INFLUENCIA DEL NUMERO DE FLIP-FLOP.

Para ilustrar esto, vamos a utilizar un circuito con el número de flip-flop variable, realimentado por una compuerta NOR, las entradas a la compuerta de realimentación se tomarán de las salidas última y penúltima del registro y el estado inicial, en todos los casos se asumirá que es cero.

Entonces:

$\overline{1+2}$	1 2	$\overline{2+3}$	1 2 3	$\overline{3+4}$	1 2 3 4	$\overline{4+5}$	1 2 3 4 5
1	0 0	1	0 0 0	1	0 0 0 0	1	0 0 0 0 0
0	1 0	1	1 0 0	1	1 0 0 0	1	1 0 0 0 0
0	0 1	0	1 1 0	1	1 1 0 0	1	1 1 0 0 0
	0 0	0	0 1 1	1	1 1 1 0	1	1 1 1 0 0
		0	0 0 1	0	1 1 1 1	0	1 1 1 1 0
			0 0 0	0	0 1 1 1	0	0 1 1 1 1
				0	0 0 1 1	0	0 0 1 1 1
				0	0 0 0 1	0	0 0 0 1 1
					0 0 0 0	0	0 0 0 0 1
							0 0 0 0 0

Tabla 3-1.

En los casos mostrados arriba, con $\overline{a+b}$ se representan las salidas de la compuerta NOR, los números a y b representan las salidas que se utilizan como entradas para la compuerta de realimentación. Los números 1,2,... representan las salidas de cada uno de los flip-flop. En los casos representados se observa que el número de flip-flop, al aumentar, trae consigo un aumento del número de estados y que el número de estados varía con N, según la relación:

$$\text{Número de estados} = 2N - 1 \quad (3-1)$$

INFLUENCIA DE LA FUNCION LOGICA DE LA COMPUERTA DE REALIMENTACION.

Vamos a mostrar varios casos de cuatro flip-flop, en los que la realimentación se toma de los flip-flop último y penúltimo y se varía el tipo de compuerta utilizada para la realimentación.

3+4	1 2 3 4	$\overline{3+4}$	1 2 3 4	3.4	1 2 3 4	$\overline{3.4}$	1 2 3 4
1	0 0 0 1	1	0 0 0 0	1	0 0 1 1	1	0 0 0 0
0	1 0 0 0	1	1 0 0 0	0	1 0 0 1	1	1 0 0 0
0	0 1 0 0	1	1 1 0 0	0	0 1 0 0	1	1 1 0 0
1	0 0 1 0	0	1 1 1 0	0	0 0 1 0	1	1 1 1 0
1	1 0 0 1	0	0 1 1 1	0	0 0 0 1	0	1 1 1 1
0	1 1 0 0	0	0 0 1 1	0	0 0 0 0	0	0 1 1 1
1	0 1 1 0	0	0 0 0 1			0	0 0 1 1
1	1 0 1 1		0 0 0 0			1	0 0 0 1
1	1 1 0 1						1 0 0 0
1	1 1 1 0						
	1 1 1 1						

3⊕4	1 2 3 4	$\overline{3\oplus 4}$	1 2 3 4
1	0 0 0 1	1	0 0 0 0
0	1 0 0 0	1	1 0 0 0
0	0 1 0 0	1	1 1 0 0
1	0 0 1 0	0	1 1 1 0
1	1 0 0 1	1	0 1 1 1
0	1 1 0 0	1	1 0 1 1
1	0 1 1 0	0	1 1 0 1
0	1 0 1 1	0	0 1 1 0
1	0 1 0 1	1	0 0 1 1
1	1 0 1 0	0	1 0 0 1
1	1 1 0 1	1	0 1 0 0
1	1 1 1 0	0	1 0 1 0
0	1 1 1 1	0	0 1 0 1
0	0 1 1 1	0	0 0 1 0
0	0 0 1 1	0	0 0 0 1
	0 0 0 1		0 0 0 0

Tabla 3-2.

Simbología:

3+4 : Operación OR entre las salidas de los flip-flop 3 y 4.

$\overline{3+4}$: Operación NOR entre las salidas de los flip-flop 3 y 4.

3.4 : Operación AND entre las salidas de los flip-flop 3 y 4.

$\overline{3 \cdot 4}$: Operación NAND entre las salidas de los flip-flop 3 y 4.

$3 \oplus 4$: Operación O EXCLUSIVO entre las salidas de los flip-flop 3 y 4.

$\overline{3 \oplus 4}$: Operación COINCIDENCIA entre las salidas de los flip-flop 3 y 4.

El examen de la tabla 3-2 nos permite concluir lo siguiente:

La compuerta OR nos da 11 combinaciones antes de caer en un estado en el que solo se generan unos con cada pulso de reloj. El estado inicial que se muestra es el que mayor número de transiciones nos da, hasta alcanzar el estado que podríamos llamar de saturación.

La compuerta NOR tiene un período que contiene 7 estados, alcanza el último, el ciclo vuelve a repetirse a partir de 0000. Cualquier otro estado inicial dará que no sea de los que figuran en el período dará lugar, según veremos, a una secuencia aperiódica que continúa hasta alcanzar un estado cualquiera de la parte periódica. A partir de este instante, el comportamiento de nuestro dispositivo se hará periódico.

La compuerta AND da lugar a una secuencia aperiódica que termina en el estado 0000, del que no volverá a salir, cualquiera que sea el número de pulsos de reloj que se tengan a la entrada.

La compuerta NAND nos dará una secuencia periódica que incluye 7 esta dos. Cualquier otro estado inicial contendrá una parte aperiódica y la parte periódica que se muestra en el ejemplo.

La compuerta O EXCLUSIVO nos dará una secuencia periódica que incluye todos los posibles estados menos uno de los que pueden tomar los flip-flop. El estado excluido, en este caso es el 0000. De lo visto hasta ahora este es el caso más interesante, pues se presenta la posibilidad de aumentar N para obtener secuencias con períodos muy grandes, ya que el número de estados está dado por $2^n - 1$.

La compuerta COINCIDENCIA tiene un comportamiento parecido al de la anterior, con la diferencia de que en esta está excluido el estado 1111. aparte del orden con que aparecen las diferentes combinaciones.

CASO DE 8 FLIP-FLOP, COMPUERTA NOR Y K VARIABLE.

Presentaremos ahora los resultados de un caso que ha sido analizado en forma más o menos completa. Se trata de un registro de corrimiento de 8 flip-flop en el que la entrada para la compuerta de realimentación, que es una compuerta NOR se toma del último flip-flop, en tanto que la otra entrada es variable, es decir que se puede tomar de la salida de cualquiera de los otros flip-flop, del primero al séptimo. La presentación de los resultados, mostrará también lo que sucede con cualquier programación inicial posible. Si bien estos resultados no son los que se han utilizado posteriormente, bien vale la pena el presentarlos por ser muy ilustrativos del comportamiento del circuito.

1^a Para cada valor de K se obtienen varias secuencias, cada una de las cuales contiene una parte periódica y otra parte aperiódica. Si el circuito al momento de empezar a funcionar se encuentra en uno de los estados de la parte aperiódica, irá tomando sucesivamente otros estados hasta llegar a uno de los que pertenecen a la parte periódica, de allí en adelante tomará únicamente valores que pertenecen a la parte periódica, los que se repetirán una y otra vez. El número de secuencias periódicas se distribuye con K de la siguiente manera.

6 para $K = 7$

4 para $K = 6$

3 para $K = 5$

8 para $K = 4$

2 para $K = 3$

3 para $K = 2$

2 para $K = 1$

2^a Para $K = 7$ se tienen cuatro secuencias periódicas que contienen 15 estados y dos secuencias periódicas con 5 y 3 estados, respectivamente.

Para $K = 6$ se tienen tres secuencias periódicas con 14 estados y una con 7 estados.

Para $K = 5$ se tienen tres secuencias periódicas con 13 estados.

Para $K = 4$ se tienen seis secuencias periódicas con 12 estados, una con 6 y una con 3.

Para $K = 3$ se tienen dos secuencias periódicas con 11 estados.

Para $K = 2$ se tienen dos secuencias periódicas con 10 estados y una con 5 estados.

Para $K = 1$ se tiene una secuencia periódica con 9 estados y una con tres estados.

Se puede, en consecuencia calificar de normales aquellas secuencias periódicas que tienen $N+K$ estados. A las secuencias que contienen 3, 5 y 6 estados las podríamos calificar de anormales.

Se ha intentado hacer un análisis matemático para explicar el comportamiento de este circuito para esta configuración, pero se ha concluido que es una tarea bastante difícil, que consumiría mucho tiempo y fuera del objetivo del presente trabajo de tesis.

3-4.- SIMULACION DE UN REGISTRO DE CORRIMIENTO DE N FLIP-FLOP CON REALIMENTACION A TRAVEZ DE UNA COMPUERTA "O EXCLUSIVO".

Como ya se vio en el apartado 3-3, la compuerta O EXCLUSIVO, en el caso presentado nos da todos los estados posibles menos uno. Para nuestros propósitos, como ya se explicó, resulta ser la más interesante, pues es la que nos permite obtener una sucesión de estados con un período lo más largo posible. El número de estados, según se vio en el ejemplo está dado por: $2^N - 1$, siendo N el número de flip-flop.

Pero esto es solo un resultado parcial, queda pues por investigar que es lo que sucede en todos los casos posibles.

Con este objeto se ha elaborado un programa, al que hemos denominado "Simulación de un registro de corrimiento", para ser utilizado en la calculadora programable HP 9810A. El Algoritmo del programa se muestra en la figura 3-2. El programa simula un registro de corrimiento de N flip-flop, realimentado por una compuerta "O EXCLUSIVO"; una de las entradas a la compuerta es la salida del último flip-flop y la otra es la salida del flip-flop número K . El programa se muestra en la tabla 3-3.

RESULTADOS. En la tabla 3-4 se muestran los resultados para $N=3$, $K=2$; $N=3$, $K=1$, y $N=5$, $K=4$.

Para $N=3$ y $K=2$, se obtiene una secuencia periódica con 7 estados posibles, es decir, aquí se cumple que el período contiene $2^N - 1$ estados. Es conveniente hacer una observación respecto de la forma en que se encuentran escritos estos resultados. Por ejemplo, para $N=3$, $K=2$, el segundo estado aparece representado únicamente por un 1, el estado al que se hace referencia es en realidad el 001. Entonces, todos los estados que aparecen incompletos, deberán completarse con ceros ubicados a la izquierda del primer 1 y hasta completar los N dígitos que representan al estado.

Para $N=3$ y $K=1$ se obtiene un período con el mismo número de estados que el anterior.

Para $N=4$ y $K=3$, se obtuvo ya un período con 15 estados, es decir que también se cumple la regla ya establecida.

Para $N=5$ y $K=4$ se obtienen únicamente 21 estados en lugar de los 31 que esperábamos. Conviene pues investigar que es lo que sucede al variar K y al utilizar otra programación para los flip-flop, que no esté presente en el período que se ha obtenido.

PROGRAMA # 1

SIMULACION DE UN REGISTRO DE CORRIMIENTO REALIMENTADO
CON UNA COMPUERTA " O EXCLUSIVO "

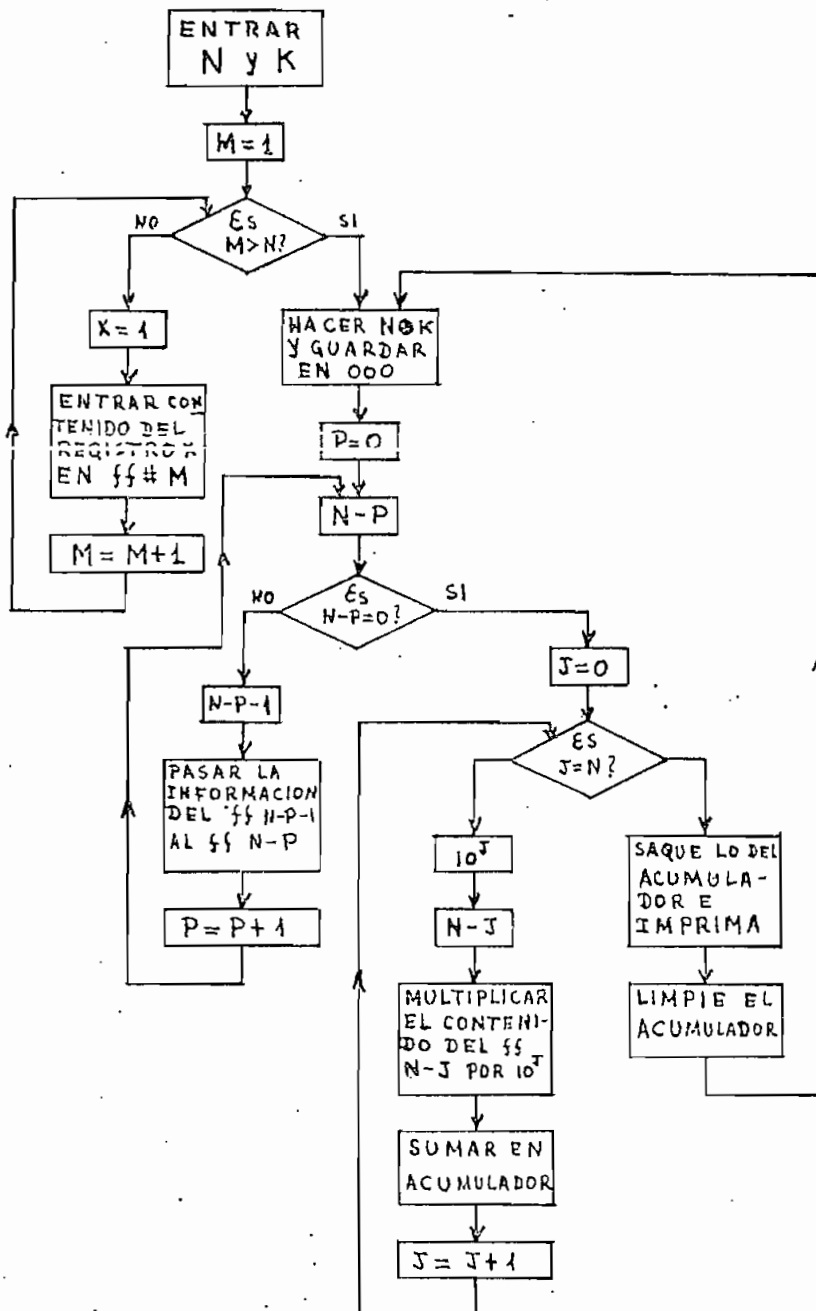


Fig. 3-2

PROGRAMA # 1

SIMULACION DE UN REGISTRO DE CORRIMIENTO REALIMENTADO

0000--CLR---20	0050-- 0 ---00	0100-- 0 ---00	0150-- 1 ---01
0001--STP---41	0051-- 1 ---01	0101-- 1 ---01	0151-- UP---27
0002--XTO---23	0052-- UP---27	0102-- 3 ---03	0152-- 1 ---01
0003-- 1 ---01	0053--XFR---67	0103-- 1 ---01	0153-- 0 ---00
0004-- 0 ---00	0054--IND---31	0104-- 1 ---01	0154-- H ---74
0005-- 0 ---00	0055-- 1 ---01	0105-- - ---34	0155--RUP---22
0006--STP---41	0056-- 0 ---00	0106--YTO---40	0156--RUP---22
0007--XTO---23	0057-- 0 ---00	0107-- 1 ---01	0157-- - ---34
0008-- 1 ---01	0058--X=Y---50	0108-- 0 ---00	0158-- DN---25
0009-- 0 ---00	0059-- 0 ---00	0109-- 5 ---05	0159--XTO---23
0010-- 1 ---01	0060-- 0 ---00	0110--XFR---67	0160-- 1 ---01
0011-- 1 ---01	0061-- 7 ---07	0111--IND---31	0161-- 0 ---00
0012--XTO---23	0062-- 3 ---03	0112-- 1 ---01	0162-- 7 ---07
0013-- 1 ---01	0063-- 1 ---01	0113-- 0 ---00	0163--XFR---67
0014-- 0 ---00	0064--XTO---23	0114-- 5 ---05	0164--IND---31
0015-- 2 ---02	0065-- 0 ---00	0115--XTO---23	0165-- 1 ---01
0016--XFR---67	0066-- 0 ---00	0116--IND---31	0166-- 0 ---00
0017-- 1 ---01	0067-- 0 ---00	0117-- 1 ---01	0167-- 7 ---07
0018-- 0 ---00	0068--GTO---44	0118-- 0 ---00	0168-- X ---36
0019-- 2 ---02	0069-- 0 ---00	0119-- 4 ---04	0169-- E ---60
0020-- UP---27	0070-- 0 ---00	0120-- 1 ---01	0170-- 1 ---01
0021--XFR---67	0071-- 7 ---07	0121--XTO---23	0171--XTO---23
0022-- 1 ---01	0072-- 8 ---10	0122-- + ---33	0172-- + ---33
0023-- 0 ---00	0073-- 0 ---00	0123-- 1 ---01	0173-- 1 ---01
0024-- 0 ---00	0074--XTO---23	0124-- 0 ---00	0174-- 0 ---00
0025--X<Y---52	0075-- 0 ---00	0125-- 3 ---03	0175-- 6 ---06
0026-- 0 ---00	0076-- 0 ---00	0126--GTO---44	0176--GTO---44
0027-- 0 ---00	0077-- 0 ---00	0127-- 0 ---00	0177-- 0 ---00
0028-- 4 ---04	0078--CNT---47	0128-- 0 ---00	0178-- 1 ---01
0029-- 6 ---06	0079-- 0 ---00	0129-- 8 ---10	0179-- 3 ---03
0030-- 1 ---01	0080--XTO---23	0130-- 4 ---04	0180-- 7 ---07
0031--XTO---23	0081-- 1 ---01	0131--CNT---47	0181--CNT---47
0032--IND---31	0082-- 0 ---00	0132-- 0 ---00	0182-- C ---61
0033-- 1 ---01	0083-- 3 ---03	0133--XTO---23	0183-- DN---25
0034-- 0 ---00	0084--XFR---67	0134-- 1 ---01	0184--PNT---45
0035-- 2 ---02	0085-- 1 ---01	0135-- 0 ---00	0185--CNT---47
0036--XTO---23	0086-- 0 ---00	0136-- 6 ---06	0186--CLR---20
0037-- + ---33	0087-- 0 ---00	0137--XFR---67	0187--GTO---44
0038-- 1 ---01	0088-- UP---27	0138-- 1 ---01	0188-- 0 ---00
0039-- 0 ---00	0089--XFR---67	0139-- 0 ---00	0189-- 0 ---00
0040-- 2 ---02	0090-- 1 ---01	0140-- 0 ---00	0190-- 4 ---04
0041--GTO---44	0091-- 0 ---00	0141-- UP---27	0191-- 6 ---06
0042-- 0 ---00	0092-- 3 ---03	0142--XFR---67	0192--END---46
0043-- 0 ---00	0093-- - ---34	0143-- 1 ---01	
0044-- 1 ---01	0094--YTO---40	0144-- 0 ---00	
0045-- 6 ---06	0095-- 1 ---01	0145-- 6 ---06	
0046--CNT---47	0096-- 0 ---00	0146--X=Y---50	
0047--XFR---67	0097-- 4 ---04	0147-- 0 ---00	
0048--IND---31	0098-- 0 ---00	0148-- 1 ---01	
0049-- 1 ---01	0099--X=Y---50	0149-- 8 ---10	
0050-- 0 ---00	0100-- 0 ---00	0150-- 1 ---01	
0051-- 1 ---01	0101-- 1 ---01	0151-- UP---27	
	0102-- 3 ---03	0152-- 1 ---01	

Tabla 3-3

N = 3	
K = 2	
	11.
	1.
	100.
	10.
	101.
	110.
	111.
	11.
	1.
N = 3	
K = 1	11.
	101.
	10.
	1.
	100.
	110.
	111.
	11.
	101.
N = 5	1111.
	111.
K = 4	11.
	1.
	10000.
	1000.
	100.
	10.
	10001.
	11000.
	1100.
	110.
	10011.
	1001.
	10100.
	1010.
	10101.
	11010.
	11101.
	11110.
	11111.
	1111.

Tabla 3-4

N=5, K=3	N=5, K=2	N=5, K=1	N=5, K=4	N=5, K=4
12345	12345	12345	12345	12345
11111	11111	11111	00101	01101
01111	01111	01111	10010	10110
00111	00111	10111	11001	11011
00011	10011	01011	11100	01101
10001	11001	10101	01110	
11000	01100	01010	10111	
01100	10110	00101	01011	
10110	01011	10010	00101	
11011	00101	11001		
11101	10010	01100		
01110	01001	00110		
10111	00100	00011		
01011	00010	10001		
10101	00001	01000		
01010	10000	00100		
00101	01000	00010		
00010	10100	00001		
00001	01010	10000		
10000	10101	11000		
01000	11010	11100		
00100	11101	11110		
10010	01110	11111		
01001	10111			
10100	11011			
11010	01101			
01101	00110			
00110	00011			
10011	10001			
11001	11000			
11100	11100			
11110	11110			
11111	11111			

Tabla 3-5

En la tabla 3-5 mostramos los resultados obtenidos. Se observa que para $K = 2$ y $K = 3$, se obtienen $2^5 - 1$ estados, es decir 31 estados. No sucede así cuando $K = 1$; en este caso, se obtiene el mismo número de estados que para $K = 4$. Un poco más alejados, a la derecha, se muestra nuevamente el caso de $K = 4$ para valores de estado ini

cial que no aparecieron con 11111 como principio. En este caso, también aparece una secuencia periódica, de período más corto que el anterior. Estas secuencias unidas a la anterior, nos da la totalidad de estados posibles. La última secuencia tiene una programación inicial que no aparece en ninguna de las dos anteriores. Esta secuencia es de período más corto aún. Se hace necesario el notar, que en el caso de utilizar la compuerta "O EXCLUSIVO", no aparecen las secuencias aperiódicas que teníamos cuando se utilizó la compuerta NOR. Resultaría muy interesante el seguir profundizando en este aspecto, pero nos estaríamos alejando del objetivo del presente trabajo. Continuaremos, sin embargo presentando los resultados obtenidos con la calculadora programable al aumentar el número de flip-flop.

Con $N = 6$ y $K = 5$ se obtienen $2^6 - 1$ estados, es decir, 63 estados. En la tabla 3-6 se muestran estos resultados.

Los siguientes son los resultados para $N = 7$

$K = 1$ se obtienen $2^7 - 1 = 127$ estados.

$K = 2$ se obtienen 92 estados.

$K = 3$ se obtienen 127 estados.

Las tablas 3-7, 3-8, 3-9 muestran estos resultados, según se obtuvieron de la calculadora.

Los resultados hasta ahora obtenidos, nos harían pensar, que siempre es posible encontrar un valor de K que nos de $2^N - 1$ estados, sin embargo el caso de 8 flip-flop contradice tal suposición, según los resultados que se muestran a continuación.

$K = 1$	63 estados.
$K = 2$	30 estados.
$K = 3$	217 estados.
$K = 4$	12 estados.
$K = 5$	217 estados.
$K = 6$	30 estados.
$K = 7$	63 estados.

En ninguno de estos casos se puede encontrar una secuencia -periódica que tenga $2^8 - 1 = 255$ estados que son los que corresponderían a este caso. La distribución del número de estados tiende a ser simétrica con respecto a K . Los casos de $K = 3$ y $K = 5$ son los más interesantes para nosotros, pues son los que tienen período más largo, 217 y 217 estados, respectivamente. Presentan, sin embargo un problema relacionado con la independencia de los eventos.

Los resultados obtenidos con la calculadora se muestran en los cuadros 3-10, 3-11, 3-12 y 3-13.

Con todos los resultados que se han presentado se puede concluir que la compuerta de realimentación más útil para nuestros propósitos, según se desprende de lo dicho en el apartado 3-2 es la compuerta " O EXCLUSIVO ", ya que es la que con mayor aproximación cumple con el requerimiento exigido para una reproducción aproximada de la transmisión binaria. Cualquier salida de los flip-flop que forman el registro de corrimiento es la simulación requerida.

Nos hacemos ahora la siguiente pregunta: ¿Cual es el grado de similitud que tiene nuestro experimento con aquel ya descrito en el capítulo anterior?; ¿Como se puede medir ese grado de similitud? De inmediato esto nos obliga a pensar en el concepto de independencia.

3-5. - INDEPENDENCIA. - En el experimento de tirar una moneda, cada prueba es independiente de la anterior, con esto se quiere decir, que cualquiera que haya sido el resultado de las tiradas anteriores, estas no tienen influencia alguna en el resultado de la prueba que vamos a efectuar. El resultado de este experimento al dar valores numéricos a las salidas cara o sello, o dicho en otras palabras, al definir un proceso $X(t)$ tal que:

$$X(t) = \begin{cases} 1 & \text{si sale cara} \\ 0 & \text{si sale sello} \end{cases}$$

N = 8
K = 3

11111111.	1101011.	1010111.	1110101.
1111111.	110101.	10101.	111010.
111111.	11010.	10001010.	10011101.
100011111.	1101.	1000101.	11001110.
110001111.	10000110.	10100010.	1100111.
111000111.	1000011.	11010001.	110011.
1110001.	10100001.	11101000.	11001.
111000.	1010000.	11110100.	10001100.
100111100.	101000.	11111010.	1000110.
1001110.	10010100.	11111101.	100011.
100111.	1001010.	11111110.	10001.
10001001.	100101.	10111111.	10001000.
11000100.	10010.	1011111.	1000100.
1100010.	1001.	10101111.	100010.
10110001.	10000100.	1010111.	10010001.
1011000.	1000010.	10101011.	11001000.
101100.	100001.	1010101.	1100100.
10010110.	10000.	10101010.	10110010.
1001011.	1000.	11010101.	11011001.
100101.	100.	1101010.	11101100.
10100101.	10.	11110101.	11110110.
1010010.	1.	1111010.	11111011.
101001.	10000000.	10111101.	1111101.
10100.	1000000.	1011110.	111110.
1010.	100000.	101111.	10011111.
101.	100000.	10111.	11001111.
10000010.	10010000.	10001011.	1100111.
10000001.	1001000.	11000101.	11100011.
10100000.	1001000.	11100010.	1110001.
11010000.	1001001.	11110001.	11100.
1101000.	10100100.	1111000.	1110.
10110100.	11010010.	10111100.	111.
11011010.	1101001.	11011110.	10000011.
1101101.	110100.	1101111.	11000001.
110110.	10011010.	110111.	11100000.
10011011.	1001101.	11011.	11110000.
11001101.	10100110.	10001101.	11111000.
11100110.	11010011.	11000110.	11111100.
11110011.	11101001.	1100011.	11111110.
1111001.	1110100.	110001.	11111111.
111100.	10111010.	11000.	1111111.
10011110.	11011101.	1100.	111111.
1001111.	11101110.	110.	11111.
10100111.	11110111.	11.	
1010011.	1111011.	10000001.	
10101001.	111101.	11000000.	
1010100.	11110.	1100000.	
101010.	1111.	10110000.	
10010101.	10000111.	11011000.	
11001010.	11000011.	1101100.	
1100101.	11100001.	10110110.	
110010.	1110000.	11011011.	
10011001.	10111000.	11101101.	
11001100.	11011100.	1110110.	
1100110.	1101110.	10111011.	
10110011.	10110111.	1011101.	
1011001.	1011011.	10101110.	
10101100.	10101101.	11010111.	
11010110.	1010110.	11101011.	

N = 8
K = 6

11111111.
1111111.
111111.
1111.
111.
11.
10000001.
11000000.
1100000.
110000.
11000.
1100.
1100.
10000110.
11000011.
11100001.
11100000.
11110000.
1111000.
111100.
10011110.
11001111.
1100111.
110011.
10011001.
11001100.
11100110.
11110011.
11111001.
11111100.
11111110.
11111111.
1111111.
111111.
11111.

N = 8
K = 7

11111111.
1111111.
111111.
1111.
111.
11.
1.
10000000.
1000000.
100000.
10000.
1000.
100.
10.
10000001.
11000000.
1100000.
110000.
11000.
1100.
110.
10000011.
1000001.
10100000.
1010000.
101000.
10100.
1010.
10000101.
11000010.
11100001.
11110000.
1111000.
111100.
11110.
10001111.
1000111.
100011.
10001.
10001000.
1000100.
100010.
10001001.
11001000.
1100100.
110010.
10011001.
11001100.
1100110.
10110011.
1011001.
10101100.
1010110.
10101011.
1010101.
10101010.
11010101.
11101010.
11110101.
11111010.
11111101.
11111110.
11111111.
1111111.
111111.

es una transmisión binaria, completamente aperiódica, o dicho de otra manera, con un período infinito.

En nuestro experimento, en el mejor de los casos, al analizar una secuencia formada por los ceros y unos que se obtienen a la salida de uno solo de los flip-flop, se observa que es una secuencia periódica con $2^N - 1$ estados. El solo hecho de ser periódica esta secuencia nos está demostrando que la ocurrencia de cada una de sus pruebas no es totalmente independiente de las demás. Nos interesa, sin embargo saber, bajo qué condiciones podemos considerar a nuestro experimento como una sucesión de pruebas independientes, ya que en el criterio o en la medida que encontremos, tendremos la justificación necesaria para asegurar que hemos simulado, en cierta medida un proceso estocástico, que vale la pena estudiarlo y que este trabajo tiene algún valor.

Según se vio en el capítulo I (1-23), la probabilidad de obtener una secuencia determinada de k éxitos y $n-k$ fallas de una evento A en n pruebas independientes de un mismo, experimento, estaba dada por:

$$p^k q^{n-k} \quad (3-2)$$

en donde: $P(A) = p$ y $P(\bar{A}) = q$

Si con p identificamos a la probabilidad de obtener una cara y con q a la probabilidad de obtener un sello en una sola tirada de una moneda, al efectuar n tiradas independientes de la misma, la probabilidad de obtener k caras y $n-k$ sellos en una secuencia determinada, - estará dada por (3-2). Pero, según se ha visto, para una moneda no cargada se tiene que:

$$p = q = 1/2 \quad (3-3)$$

En consecuencia, el evento k caras y $n-k$ sellos en una secuencia específica, tiene como probabilidad:

$$(1/2)^n \quad (3-4)$$

A la salida del dispositivo en estudio tenemos una secuencia periódica de unos y ceros. El número de pruebas que consideraremos será igual al número total de ceros y unos que conforman un período.

Sea p el número obtenido para la frecuencia relativa de ocurrencia del evento $\{1\}$ y sea q el correspondiente para el evento $\{0\}$.

Con este resultado de tipo experimental, asumiremos que p es la probabilidad de obtener ^{un uno} en una sola prueba y que q es la probabilidad de obtener un cero en una sola prueba.

Tenemos, entonces dos modelos teóricos a que hacer referencia

para efectuar un análisis comparativo de las salidas y de los más representativos eventos de nuestro experimento.

1°- El modelo teórico. Este modelo hace referencia a una moneda buena que se tira repetidas veces y para la cual se tiene que:

$$p = q = 1/2.$$

2°- El modelo experimental. Para establecer este modelo, se toman como base los datos experimentales obtenidos, con ellos se determina la frecuencia relativa de ocurrencia de los eventos uno y cero y se asume que estos son los valores de p y q.

Para efectuar un estudio que nos permita sacar conclusiones, - haremos una comparación de los eventos representativos de las clases de eventos que dentro de las limitaciones impuestas por el número de estados que puede asumir nuestro dispositivo y del número de flip-flop utilizado ^{↓ que} es razonable considerar.

En la figura 3-3 se muestra un diagrama que representa las pro babilidades de eventos que son representativos de una clase de eventos. Con esto queremos decir que cualquiera de los eventos de la cla se tendrá la misma probabilidad que el evento que se representa.

Por ejemplo, si consideramos el evento 111000, todos los eventos tales como:

101001, 011010, 001110, 010101, 000111, etc.

tendrán la misma probabilidad que aquel.

En abscisas se representa el número de unos que contiene el evento y en ordenadas el número de ceros que contiene el evento. Es decir, que un punto con coordenadas (2,3) representará al evento:

11000

De la clase de eventos posibles que contienen dos unos y tres ceros, se ha escogido el que se ha escrito, para mantener una congruencia entre la clase de eventos que se quiere representar y los valores de las coordenadas. Para nuestros propósitos, 11000 representa a la clase de los eventos que contienen dos unos y tres ceros. Los valores de probabilidad en el caso teórico se representan en la figura 3-3.

En la figura 3-4 se representan los valores calculados de la probabilidad experimental para seis flip-flop, asumiendo que:

$$P\{\text{uno}\} = p = \frac{32}{63} = 0,507936$$

$$y \quad P\{\text{cero}\} = q = \frac{31}{63} = 0.492063$$

Los valores de probabilidad de los demás eventos, según se ha visto se calcula de acuerdo con:

$$P \{ k \text{ unos y } n-k \text{ ceros en un orden específico} \} = p^k q^{n-k}$$

La figura 3-5 muestra los valores de probabilidad para los mismos eventos anteriores, calculados uno por uno, determinando en primer lugar el número N_A de pruebas favorables al evento A, en segundo lugar, el número N de pruebas realizadas y, por último calculando el valor de la frecuencia relativa de ocurrencia para el evento A; es decir el cociente:

$$\frac{N_A}{N} \quad (3-5)$$

Para esto se han utilizado los resultados de la simulación que se muestran en la tabla 3-6.

La figura 3-6 muestra los valores de la probabilidad experimental para el caso de 7 flip-flop.

Los valores de p y q, en este caso son:

$$p = \frac{64}{127} = 0,503937 \quad y$$

$$q = \frac{63}{127} = 0,496062$$

La figura 3-7 muestra los valores de frecuencia relativa de ocurrencia de eventos para el caso de 7 flip-flop.

Las figuras 3-8 y 3-9, muestran lo mismo que las anteriores para el caso de 8 flip-flop. Se encontró aquí que:

$$p = \frac{108}{217} = 0,497695$$

$$q = \frac{109}{217} = 0,502304$$

En este punto se observa ya un hecho importante y es el de que los valores de p y q tienden hacia el valor 0,5, conforme aumenta el número de flip-flop utilizado.

Con el objeto de hacer patentes las diferencias existentes entre los dos modelos propuestos y los valores de frecuencia relativa para los eventos que estamos considerando, en las figuras 3-10, 3-11 y 3-12 se muestran los valores de la desviación en porcentaje de los valores de frecuencia relativa obtenidos mediante simulación con respecto al modelo teórico y al modelo experimental, para los mismos casos de 6,7 y 8 flip-flop.

Los valores de desviación con respecto al modelo teórico se representan sin paréntesis y los que son con respecto al modelo experimental entre paréntesis.

En otras palabras, los valores representados en estas figuras son:

$$\frac{\text{Valor de frecuencia relativa} - \text{Valor teórico}}{\text{Valor teórico}} \times 100$$

y

$$\frac{\text{Valor de frecuencia relativa} - \text{Valor experimental}}{\text{Valor experimental}} \times 100$$

esto, para cada evento.

En los gráficos anotados se observa lo siguiente:

1°- Las desviaciones más severas ocurren en ambos casos para los eventos que solo contienen ceros. Esto se debe a la no existencia del evento que contiene todos los ceros. Se puede decir, en el caso de 7 flip-flop, por ejemplo, que la probabilidad condicional de que ocurra un cero, asumiendo que han ocurrido seis ceros es igual a cero.

2°- Exceptuando los eventos que solo contienen ceros, las desviaciones con respecto a la probabilidad teórica para los demás eventos se mantiene en un valor constante y pequeño para los casos de seis y siete flip-flop. En el caso de seis flip-flop es de 1,6% y en el caso de siete flip-flop es de 0,79%. El valor de la desviación, en estos casos es siempre positivo.

3°- La mayor desviación, como es obvio se tiene para el evento que contiene todos los ceros y que por el hecho de no estar presente en ninguna de las secuencias generadas, su valor es del 100%.

4°- También es obvia la desviación con respecto al caso experimental para los eventos que solo contienen un cero o un uno, su valor es del 0%.

5°- Las desviaciones con respecto al caso experimental son variables para los eventos considerados y pueden asumir valores positivos y negativos. Para un evento con un número de salidas dado, el valor de su probabilidad depende del contenido de ceros y de unos del mismo.

6°- Las desviaciones con respecto a los dos modelos son negativas para los eventos que solo contienen ceros. Esto significa que las probabilidades para estos eventos dadas por los modelos, son mayores que las obtenidas del cálculo de la frecuencia relativa.

7°- En general, las desviaciones para el caso de ocho flip-flop son mayores que para los casos de seis y siete flip-flop. Esto se debe a que en este caso, no se tiene la totalidad de estados posible y, en consecuencia, es de esperar que se presenten mayores anomalías.

8°- La constancia de los valores de la desviación con respecto al modelo teórico para el caso de ocho flip-flop se mantiene únicamente hasta los eventos que contienen cinco salidas. En los demás eventos, estos valores se hacen cambiantes y tiende a aumentar. Por último, para los eventos que contienen ocho salidas, aunque la desviación es la misma para todos ellos, su valor es del 1-82% con respecto al caso

teórico. Esto es una indicación de la falta de muchos eventos de esta clase.

9°- Las desviaciones con respecto al caso teórico para ocho flip-flop, a diferencia de los casos anteriores, presentan ahora valores positivos y negativos para eventos con un número de salidas superior a cinco. Se puede decir, entonces en este caso, que su comportamiento es normal, mientras no se consideren eventos con un número de salidas superior a cinco.

Las observaciones anotadas nos llevan a las siguientes conclusiones:

a). El comportamiento de nuestro dispositivo se aproxima más al modelo que hemos llamado teórico que al experimental. Esto quiere decir que, con un alto grado de aproximación, en el caso de nuestro dispositivo:

$$P \{\text{uno}\} = P \{\text{cero}\} = 1/2$$

b). Se puede decir que las pruebas en nuestro experimento se pueden considerar como independientes para eventos cuyo número de salidas no exceda el número de flip-flop utilizado y siempre que nos encontremos en un caso que no presente anomalías como el de ocho flip-flop que se ha estudiado.

c). De los casos estudiados, el de siete flip-flop, se puede considerar el óptimo, pues las desviaciones con respecto a la probabilidad teórica son menores a las que se presentan en el caso de seis flip-flop y, además, no presenta ninguna de las anomalías que tiene el caso de ocho flip-flop.

Número de ceros

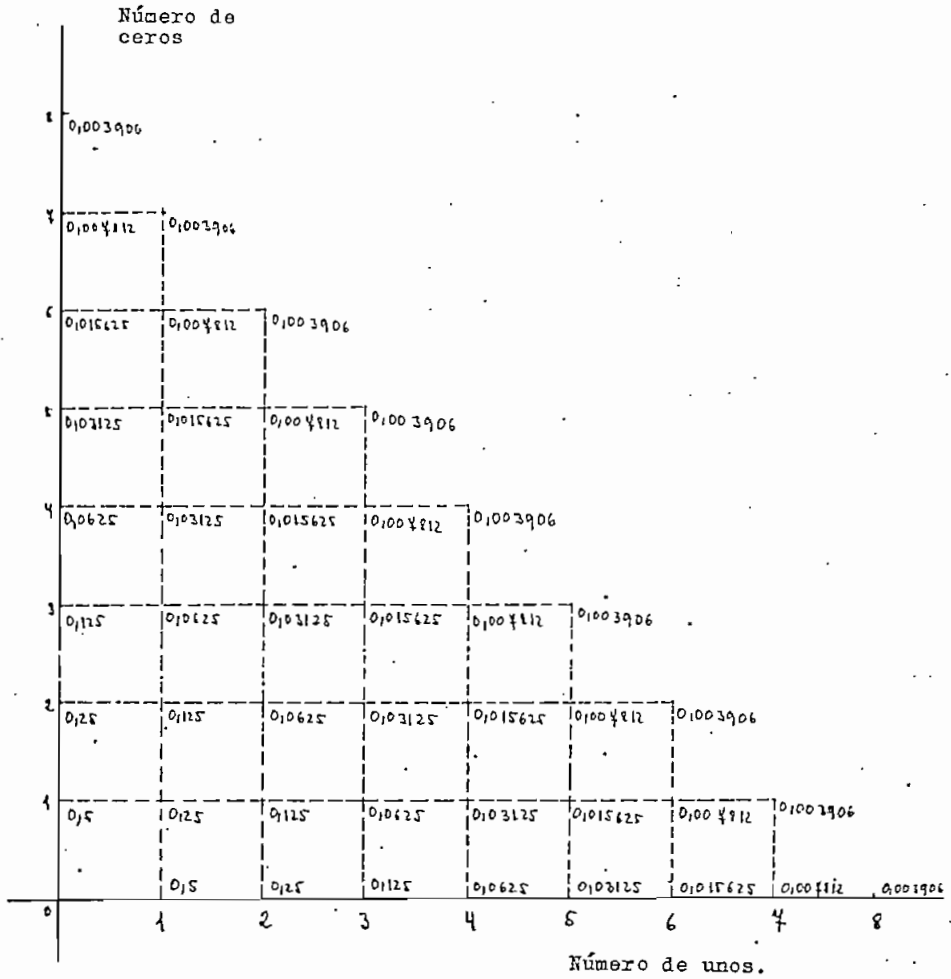


Fig 3-3

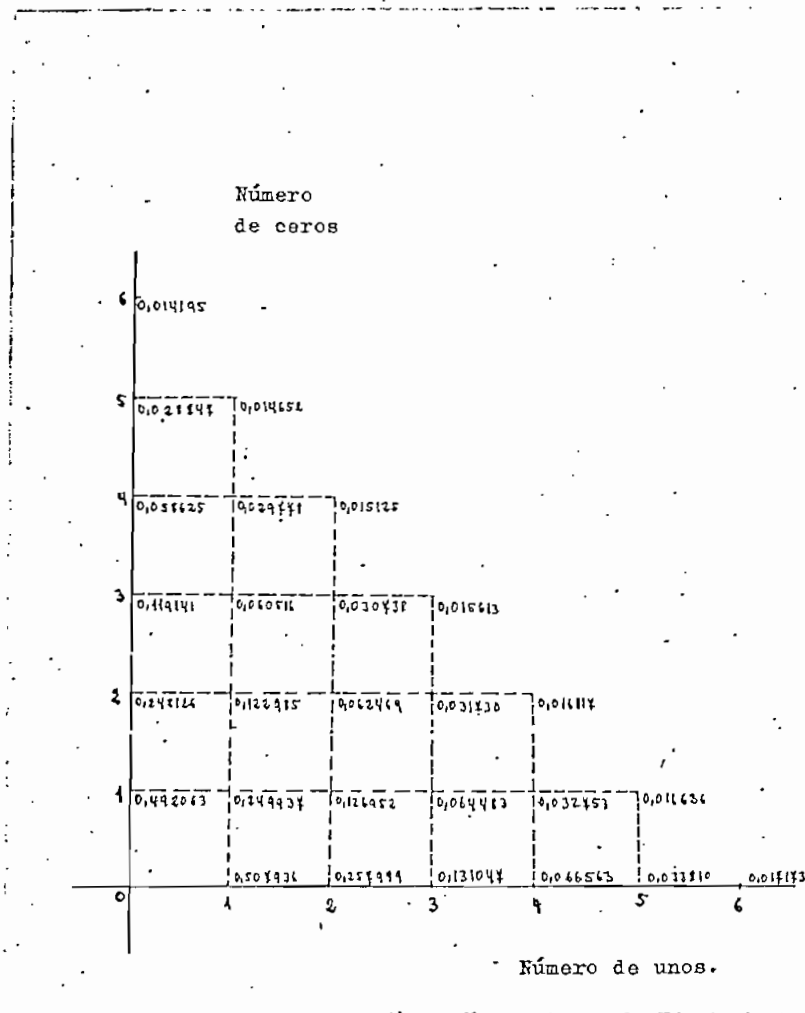
MODELO TEORICO

Número de unos

Fig. 3-3

MODELO TEORICO

Número de ceros



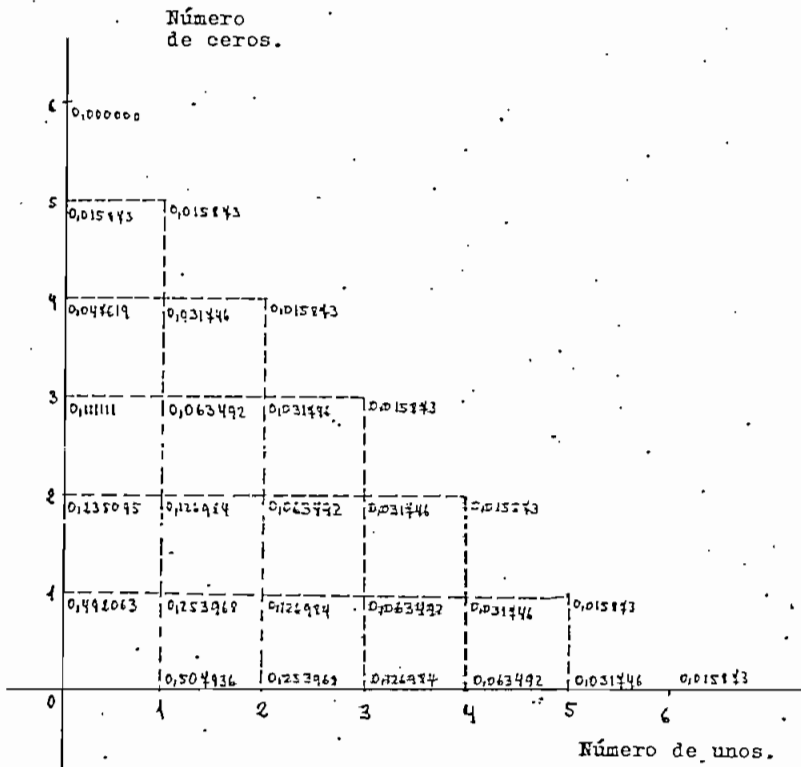
Número de unos.

$$P \{ \text{uno} \} = \frac{32}{63} = 0,507936$$

$$P \{ \text{cero} \} = \frac{31}{63} = 0,492063$$

Fig. 3-4

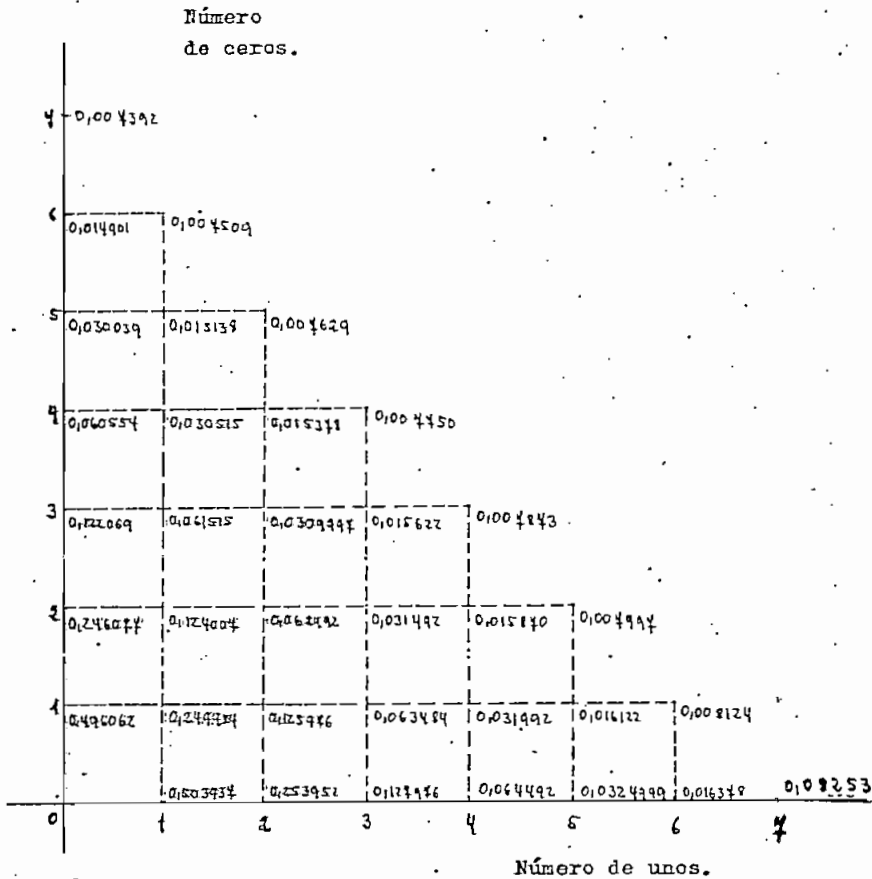
Número
de ceros



Número de unos

Fig. 3-5

Número
de ceros.



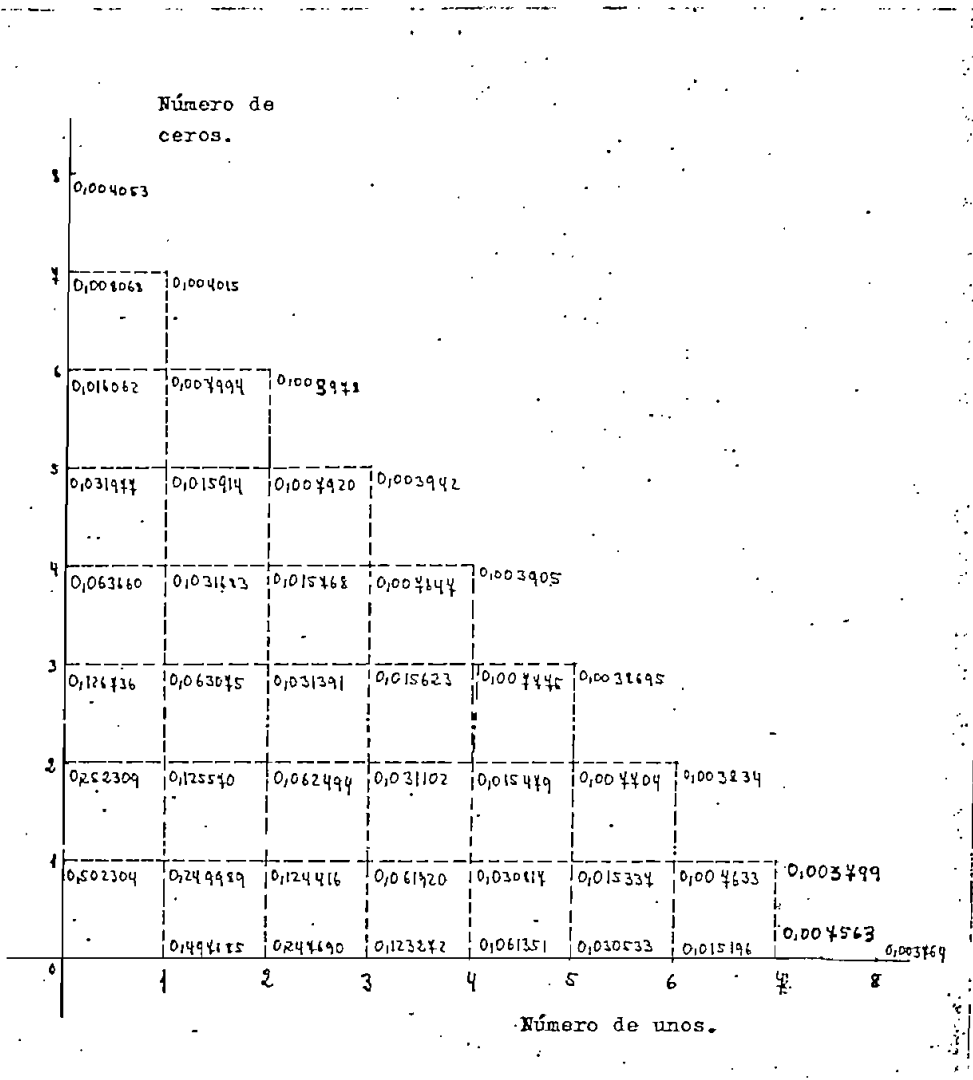
Número de unos.

$$P \text{ uno} = \frac{64}{127} = 0,503937$$

$$P \text{ cero} = \frac{63}{127} = 0,496062$$

Fig. 3-6

Número de
ceros.



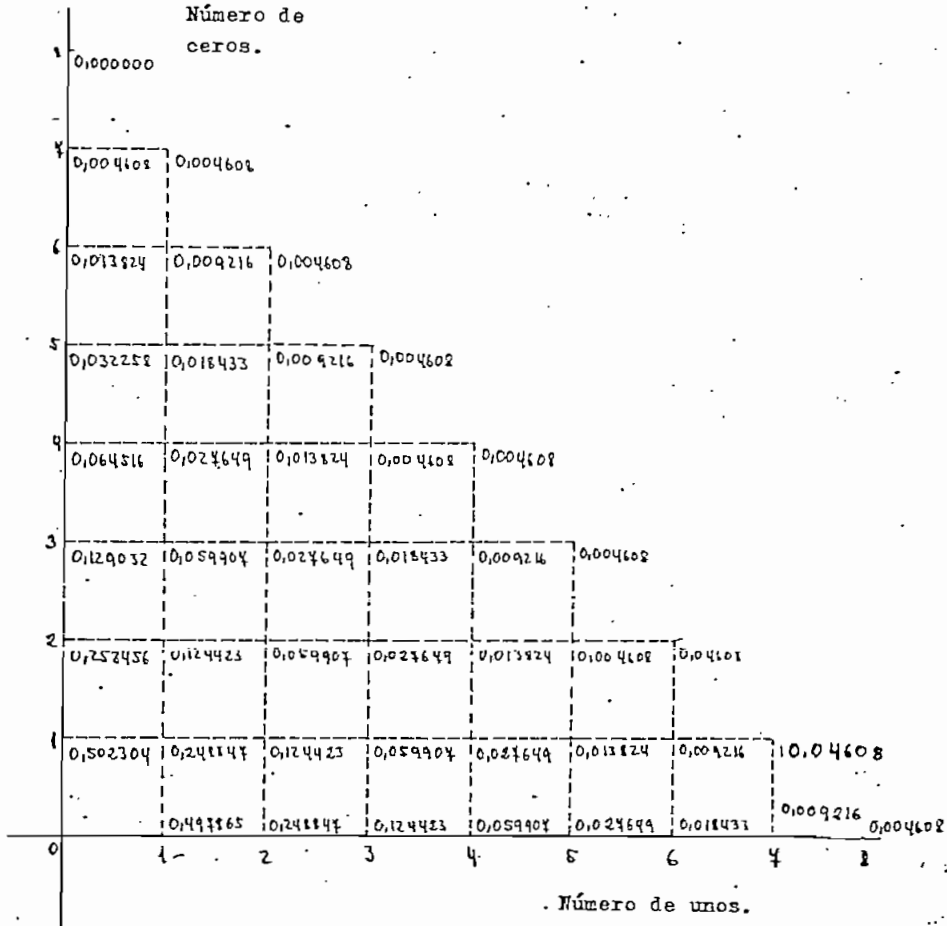
Número de unos.

$$P \{ \text{uno} \} = \frac{108}{217} = 0,497695$$

$$P \{ \text{cero} \} = \frac{109}{217} = 0,502304$$

Fig. 3-8

Número de ceros.

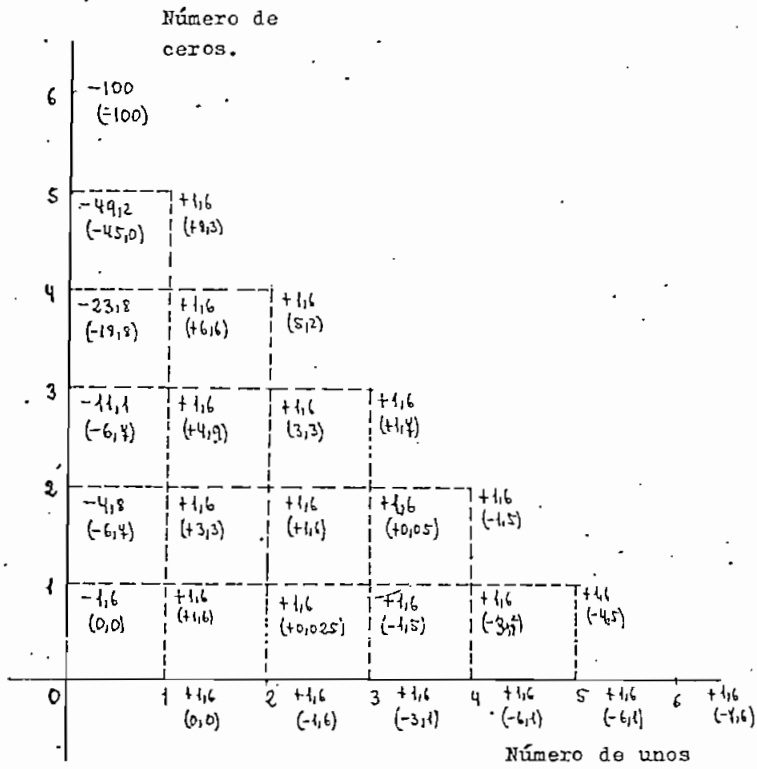


Número de unos.

Fig. 3-9

FRECUENCIA RELATIVA 8 FLIP-FLOP

Número de
ceros.



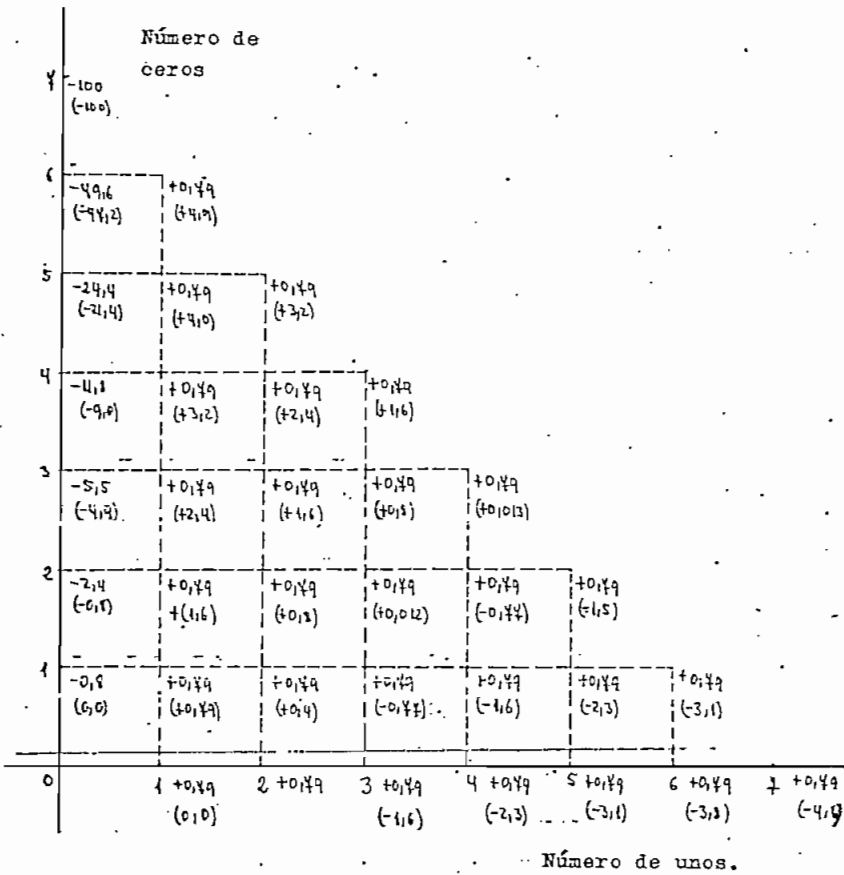
Número de unos.

Fig. 3-10

PORCENTAJE DE DESVIACION 6 FLIP-FLOP

() Con respecto al modelo experimental

Número de ceros.

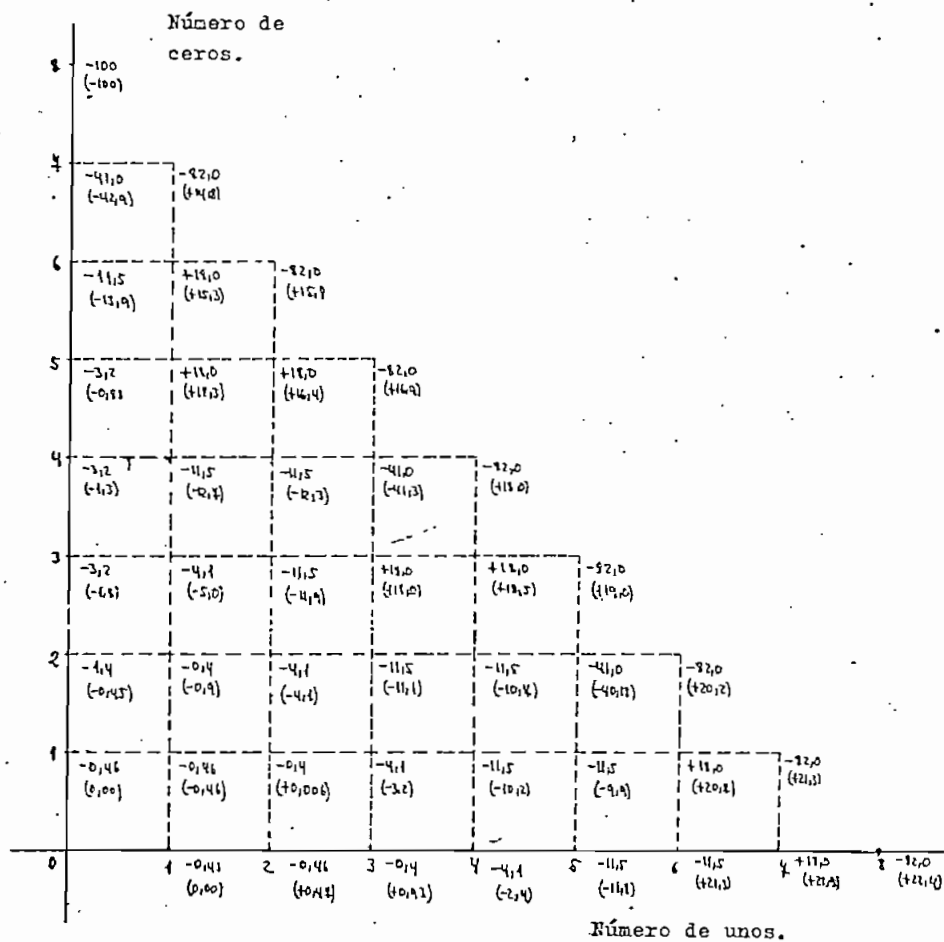


Número de unos.

PORCENTAJE DE DESVIACION 7 FLIP-FLOP

() Con respecto al modelo experimental

Número de ceros.



Número de unos.

Fig. 3-12

PORCENTAJE DE DESVIACION 8 FLIP-FLOP

(.) Con respecto al modelo experimental

3-6.- DETERMINACION EXPERIMENTAL DE LA FUNCION DE AUTOCORRELACION

En el apartado 2-5 se discutió en forma más o menos extensa la hipótesis de la ergodicidad para el valor medio y la autocorrelación de los procesos que hemos propuesto como modelos para el nuestro; la Transmisión Binaria Semialeatoria y la Transmisión binaria aleatoria.

En forma experimental vamos a determinar ahora la autocorrelación en el tiempo de una función miembro del proceso que hemos generado, con ésto pretendemos lo siguiente:

1°- Determinar el tipo de proceso que hemos generado. Esto es, queremos saber si nuestro proceso se puede aproximar a la transmisión binaria semialeatoria o a la transmisión binaria aleatoria. En realidad no estamos generando ninguno de los dos procesos, pues sabemos que lo que estamos generando es un proceso periódico, pero dentro de las limitaciones que ello implica, buscamos la aproximación mencionada.

2°- Tener una idea del grado de aleatoriedad de nuestro proceso mediante un estudio comparativo de las funciones de autocorrelación teórica con la obtenida en forma experimental.

3° Probar en forma experimental la hipótesis de la ergodicidad para la autocorrelación. Es decir, si la función de autocorrelación en el

tiempo para un miembro particular del proceso, es la misma o parecida a la función de autocorrelación del ensamblaje infinito de funciones del tiempo que constituyen el proceso.

La determinación experimental de la función de autocorrelación ha requerido que nuevamente hagamos uso de la calculadora programable HP 9810A. El fundamento de las técnicas numéricas utilizadas se exponen a continuación.

AUTOCORRELACION NUMERICA.

Como sabemos, la autocorrelación de una función periódica $h(t)$ está dada por:

$$R(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} h(t)h(t - \tau) dt \quad (3-6)$$

Consideremos ahora la expresión:

$$\frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} g(t) dt \quad (3-7)$$

en donde $g(t)$ es una función periódica cualquiera. La integral, como es usual tiene el significado del area bajo la curva que representa a $g(t)$. Al dividir por T que es la duración de un período, la expre -

si3n (3-7) representar3 el valor medio de $g(t)$ en un per3odo.

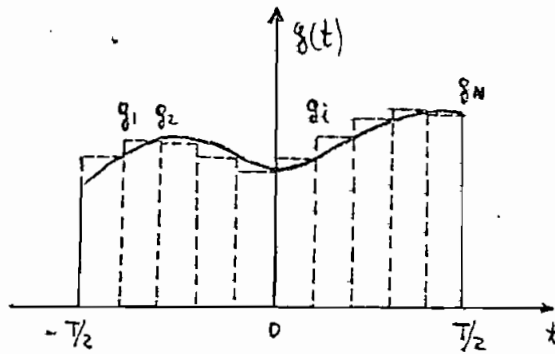


Fig. 3-13

En la figura 3-13 se representa un per3odo de $g(t)$, el mismo que se ha subdividido en N subintervalos de duraci3n t .

El area de cada elemento ser3; entonces:

$$g_i \Delta t \quad (3-8)$$

en donde g_i es el valor de la funci3n en el instante $i\Delta t$. En consecuencia, la expresi3n (3-7) puede aproximarse por:

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) dt \approx \frac{1}{N\Delta t} \sum_{i=1}^N g_i \Delta t = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g_i \quad (3-9)$$

Vamos ahora a suponer que $g(t) = h(t)h(t - \tau)$, en donde $h(t)$ permanece estacionaria y $h(t - \tau)$ se desplaza en el tiempo con respec

to a $h(t)$ de acuerdo con el valor que tome la variable independiente γ .

Hagamos que γ tome valores que son múltiplos de Δt . Entonces un valor g_i de $g(t)$ en el instante $i t$ estará dado por:

$$g_i = h_i h_{i-j} \quad (3-10)$$

En donde j representa el número de subintervalos t que se ha desplazado $h(t)$. Entonces; un valor particular de R_j de la función de autocorrelación se puede obtener reemplazando (3-10) en (3-9) de acuerdo con (3-7). Se tiene; entonces:

$$R_j = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h_i h_{i-j} \quad (3-11)$$

La expresión anterior ha constituido la base para la elaboración del programa al que hemos denominado "Autocorrelación Onda Periódica" y cuyo diagrama de flujo se muestra en la figura 3-14. El programa se muestra en la tabla 3-14:

RESULTADOS.- Los resultados obtenidos con la calculadora para cuatro, cinco y seis flip-flop se muestran en las tablas 3-15 y 3-16. La función de autocorrelación para casos con mayor número de flip-flop no fue posible obtener, por disponer la calculadora de cien registros únicamente y, por lo tanto, el número máximo de muestras que se podían introducir era este número, que no alcanza desde luego a cubrir un período pa-

ra los casos de siete y ocho flip-flop en los que el número mínimo de muestras requerido es de 127 y 217, respectivamente.

Los casos para los cuales se obtuvo la función de autocorrelación, resultan ser muy demostrativos, sin embargo.

En la tabla 3-15 se muestran los casos para cuatro y seis flip-flop. El número que encabeza la columna representa el número de muestras utilizado. El caso para cuatro flip-flop se ha repetido utilizando diferente número de muestras 90 y 60. Los resultados son exactamente los mismos, si algunos números difieren es porque corresponden a valores diferentes de la variable independiente .

La tabla 3-16 muestra los resultados para el caso de cinco flip-flop con el número total de muestras 93. Aquí se hace patente el comportamiento periódico de la función de autocorrelación para el proceso que hemos generado y que constituye la diferencia fundamental con el caso teórico que estudiamos en el capítulo II. Esto, naturalmente se debe a que el proceso generado con nuestro dispositivo es periódico.

La figura 3-15 es el resumen gráfico de nuestros resultados. En ella se ha dibujado la parte positiva de la función de autocorrelación. La parte negativa, como sabemos, es simétrica.

Del examen de la figura 3-15 se obtienen las siguientes conclusiones:

1). El proceso estocástico por nosotros generado se aproxima más al modelo de la Transmisión Binaria Aleatoria que al de la Semialeatoria. En efecto, la forma de la función de autocorrelación lo dice todo, y lo que es más, la casi coincidencia de los casos de cinco y seis flip-flop con el caso teórico es una prueba, por demás evidente. Su puede concluir, que al aumentar el número de flip-flop, los casos que toman el número máximo de estados se aproximarán más al caso teórico.

2). La función de autocorrelación teórica corresponde al ensamblaje infinito de funciones del tiempo que constituyen el proceso, mientras que las obtenidas experimentalmente son funciones de autocorrelación en el tiempo de un miembro particular del proceso. La aproximación tan estrecha nos está demostrando que la varianza de la variable aleatoria $R^*(\tau)$ es casi cero y que, por lo tanto $E\{R^*(\tau)\} = R(\tau)$ y, por lo tanto, esta vendría a ser una prueba experimental de la hipótesis de la ergodicidad de la transmisión binaria aleatoria y, de paso demostraría que existe un alto grado de similitud entre el proceso generado por nosotros y la transmisión binaria aleatoria.

3). La función de autocorrelación obtenida es periódica. La autocorrelación de la transmisión binaria aleatoria es aperiódica. La periodicidad de la función de autocorrelación se debe a la periodicidad

del proceso generado, la misma que es consecuencia de cierto grado de dependencia que existe entre los eventos de nuestro proceso. Se hace patente, en este punto, que un mayor grado de aproximación se puede obtener al aumentar el período de nuestro proceso y, por lo tanto un mayor grado de independencia entre eventos. Sin embargo, una independencia total no es posible, pues requeriría de un número infinito de estados para dar como resultado un período infinito y no existe ningún dispositivo ideado por el hombre que pueda asumir un número infinito de estados.

A modo de ilustración, en la figura 3-16 se muestra una función miembro del proceso generado por nosotros, que corresponde al caso de 7 flip-flop y es parte de un ensamblaje que contiene 127 funciones del tiempo.

Programa N° 2

AUTOCORRELACION
ONDA PERIODICA.

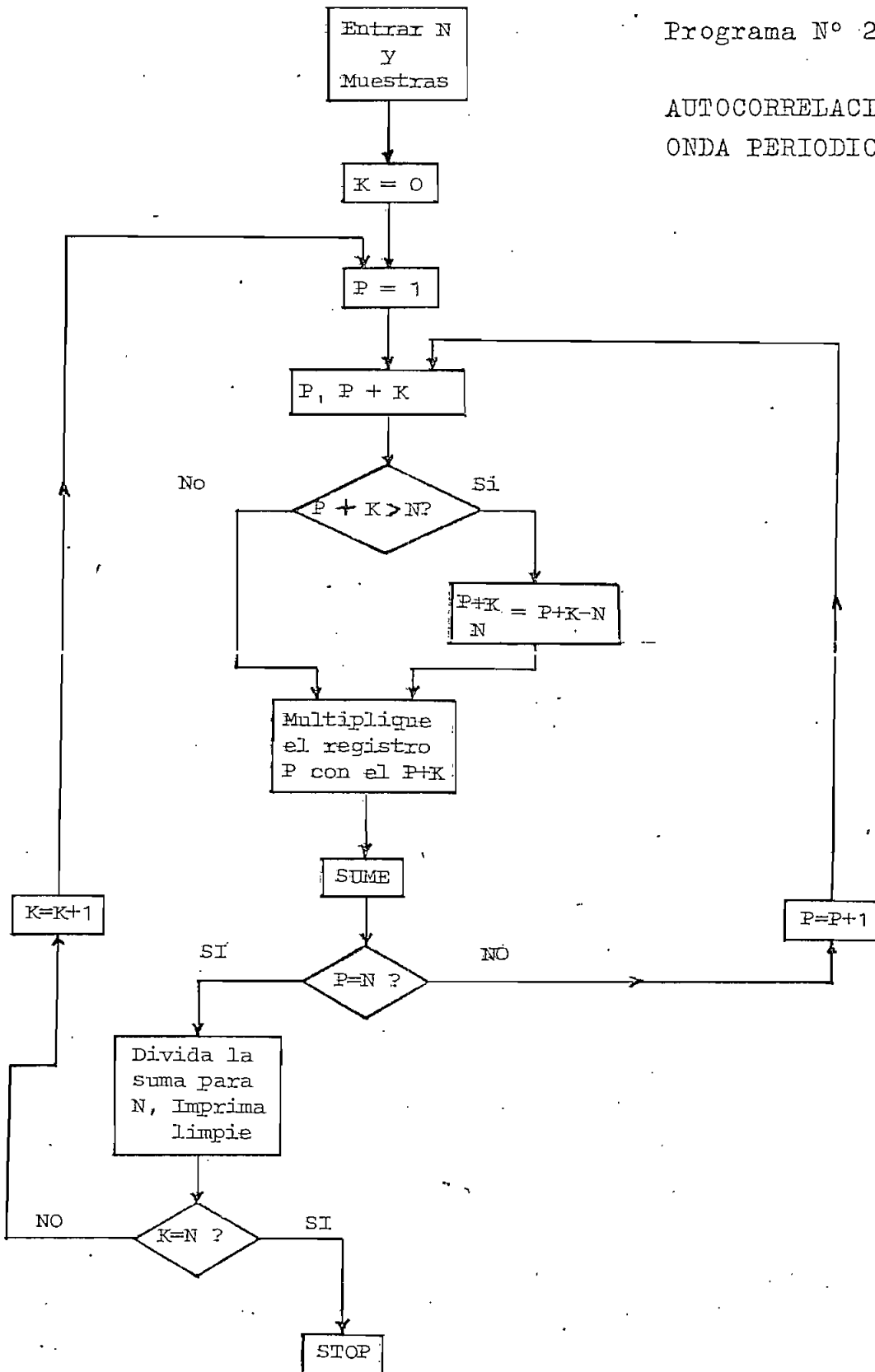


Fig. 3-14

Programa N^o 2.

AUTOCORRELACION ONDA PERIODICA.

0000--FMT---42	0050-- 1 ---01	0100-- 0 ---00	0150--XFR---67
0001--FMT---42	0051-- 0 ---00	0101-- 1 ---01	0151-- 1 ---01
0002-- A ---62	0052-- 5 ---05	0102-- 0 ---00	0152-- 0 ---00
0003--1/X---17	0053--RUP---22	0103-- 9 ---11	0153-- 3 ---03
0004--XTO---23	0054--XTO---23	0104-- - ---34	0154-- UP---27
0005-- 0 ---71	0055--IND---31	0105-- YE---24	0155--XFR---67
0006-- C ---61	0056-- 1 ---01	0106-- 1 ---01	0156-- 0 ---00
0007-- 0 ---71	0057-- 0 ---00	0107-- 0 ---00	0157-- 0 ---00
0008-- a ---13	0058-- 5 ---05	0108-- 4 ---04	0158-- 0 ---00
0009-- a ---13	0059--XFR---67	0109-- UP---27	0159--X=Y---50
0010-- E ---60	0060-- 0 ---00	0110--XFR---67	0160-- 0 ---00
0011-- L ---72	0061-- 0 ---00	0111--IND---31	0161-- 1 ---01
0012-- A ---62	0062-- 0 ---00	0112-- 1 ---01	0162-- 7 ---07
0013-- C ---61	0063--X>Y---53	0113-- 0 ---00	0163-- 5 ---05
0014-- I ---65	0064-- 0 ---00	0114-- 4 ---04	0164-- 1 ---01
0015-- 0 ---71	0065-- 0 ---00	0115-- UP---27	0165-- + ---23
0016-- N ---73	0066-- 4 ---04	0116--XFR---67	0166-- YE---24
0017--FMT---42	0067-- 6 ---06	0117--IND---31	0167-- 1 ---01
0018--FMT---42	0068--CLX---37	0118-- 1 ---01	0168-- 0 ---00
0019--FMT---42	0069--STP---41	0119-- 0 ---00	0169-- 3 ---03
0020-- 0 ---71	0070-- 0 ---00	0120-- 2 ---02	0170--GTO---44
0021-- N ---73	0071--XTO---23	0121-- X ---34	0171-- 5 ---05
0022-- J ---63	0072-- 1 ---01	0122-- E ---60	0172-- 0 ---00
0023-- A ---62	0073-- 0 ---00	0123--XFR---67	0173-- 7 ---07
0024--PHT---45	0074-- 3 ---03	0124-- 1 ---01	0174-- 5 ---05
0025-- i ---56	0075-- 1 ---01	0125-- 0 ---00	0175--STP---41
0026-- E ---60	0076--XTO---23	0126-- 2 ---02	0176--END---46
0027-- a ---13	0077-- 1 ---01	0127--RUP---22	
0028-- I ---65	0078-- 0 ---00	0128--X=Y---50	
0029-- 0 ---71	0079-- 2 ---02	0129-- 0 ---00	
0030-- 0 ---63	0080--XFR---67	0130-- 1 ---01	
0031-- I ---65	0081-- + ---33	0131-- 4 ---04	
0032-- C ---61	0082-- 1 ---01	0132-- 1 ---01	
0033-- A ---62	0083-- 0 ---00	0133-- 1 ---01	
0034--FMT---42	0084-- 3 ---03	0134-- + ---33	
0035--FMT---42	0085--XTO---23	0135-- DN---25	
0036--FMT---42	0086-- 1 ---01	0136--GTO---44	
0037-- H ---73	0087-- 0 ---00	0137-- 0 ---00	
0038--FMT---42	0088-- 4 ---04	0138-- 0 ---00	
0039--STP---41	0089-- UP---27	0139-- 7 ---07	
0040--XTO---23	0090--XFR---67	0140-- 6 ---06	
0041-- 0 ---00	0091-- 0 ---00	0141-- C ---61	
0042-- 0 ---00	0092-- 0 ---00	0142--XFR---67	
0043-- 0 ---00	0093-- 0 ---00	0143-- 0 ---00	
0044--FMT---45	0094--X=Y---50	0144-- 0 ---00	
0045--PHT---45	0095-- 0 ---00	0145-- 0 ---00	
0046--STP---41	0096-- 1 ---01	0146--DIV---35	
0047--RUP---22	0097-- 0 ---00	0147-- DN---25	
0048--RUP---22	0098-- 9 ---11	0148--PHT---45	
0049--XTO---23	0099--X>Y---53	0149--CLR---20	
0050-- 1 ---01	0100-- 0 ---00	0150--XFR---67	
0051-- 0 ---00	0101-- 1 ---01	0151-- 1 ---01	
0052-- 5 ---05	0102-- 0 ---00	0152-- 0 ---00	
0053--RUP---22	0103-- 9 ---11	0153-- 3 ---03	

Tabla 3-14

AUTOCORRELACION
TRANSMISION BINARIA.

N=4 ; K=3

90.000
0.600
0.556
0.511
0.467
0.422
0.378
0.333
0.333
0.333
0.333

N=3 ; K=3

60.000
0.600
0.533
0.467
0.400
0.333
0.333
0.333
0.333
0.333

N=6 ; K=5

63.000
0.500
0.254
0.254
0.254
0.254

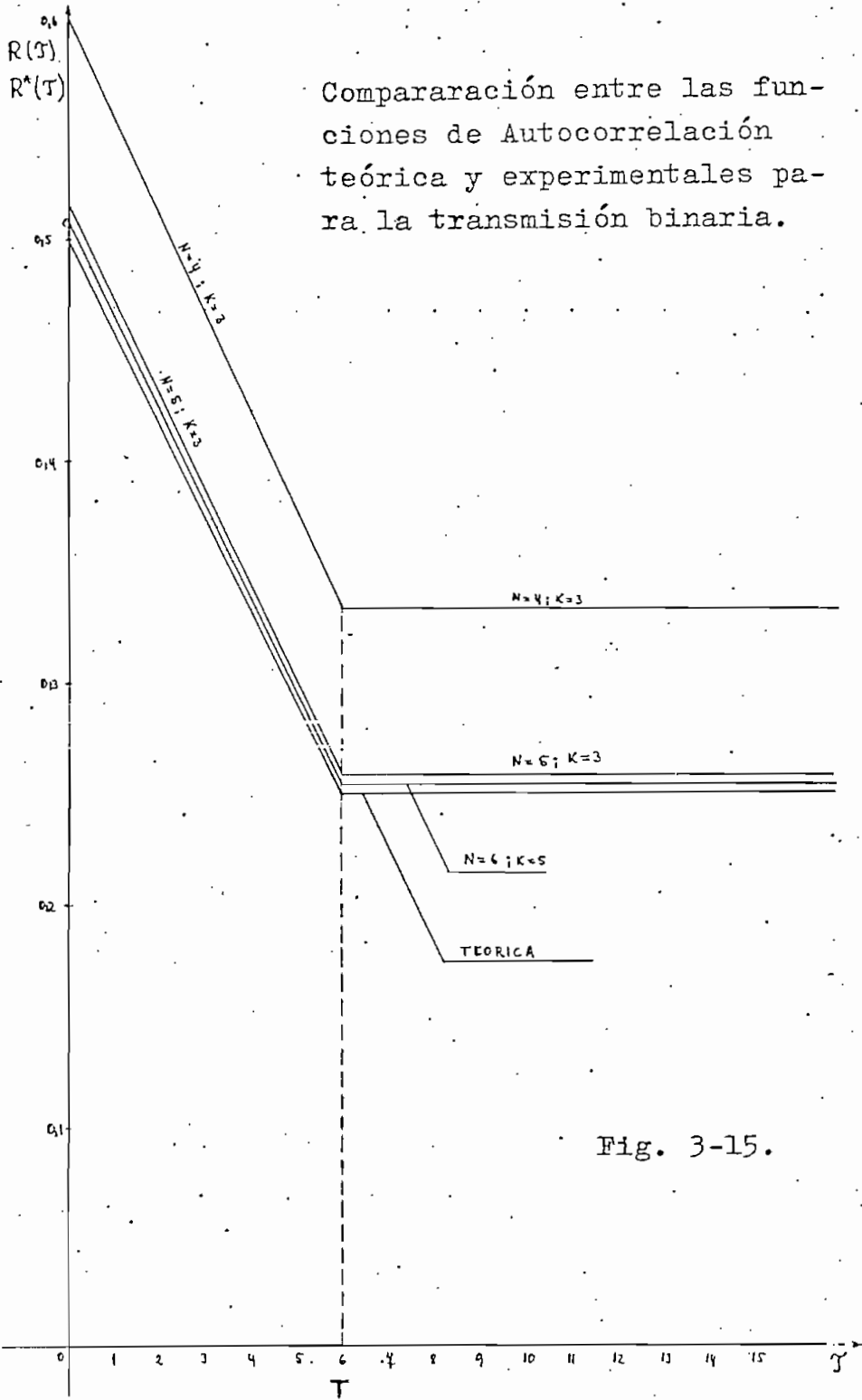
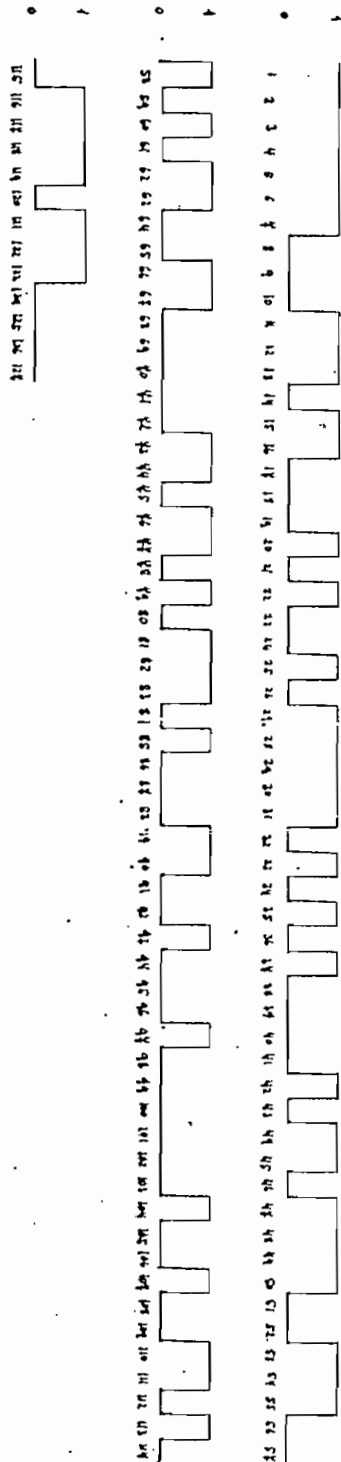


Fig. 3-15.

Fig. 3-16

Una función miembro del
proceso estocástico ge-
nerado con 7 flipflop.



C A P I T U L O I V

PULSOS DE AMPLITUD ALEATORIA CON DENSIDAD GAUSSIANA

4-1.- INTRODUCCION

En los capítulos II y III se ha estudiado extensamente, tanto desde el punto de vista teórico como del punto de vista experimental el proceso que hemos denominado transmisión binaria.

En este capítulo se estudiará el efecto de introducir modificaciones en nuestro circuito básico con el doble propósito de:

- 1º Generar un tren de pulsos con amplitudes semialeatorias.
- 2º Obtener un tren de pulsos de amplitud semialeatoria con densidad gaussiana.

El objetivo primero se ha logrado introduciendo un sumador en el que, con una elección adecuada de las resistencias de entrada se logra un cierto control de las funciones de densidad resultantes. El segundo objetivo, como veremos

se ha logrado introduciendo un nuevo registro de corrimien to con su respectivo sumador, controlado por una de las sa lidas del primero. Las salidas de los dos sumadores se vuelven a sumar obteniéndose el proceso que queremos. La base teórica que justifica tal procedimiento se encuentra, como veremos en el Teorema del Límite Central.

4-2.- PULSOS ALEATORIOS

El circuito utilizado para generar un tren de pulsos de amplitud semialeatoria se muestra en la figura 4-1.

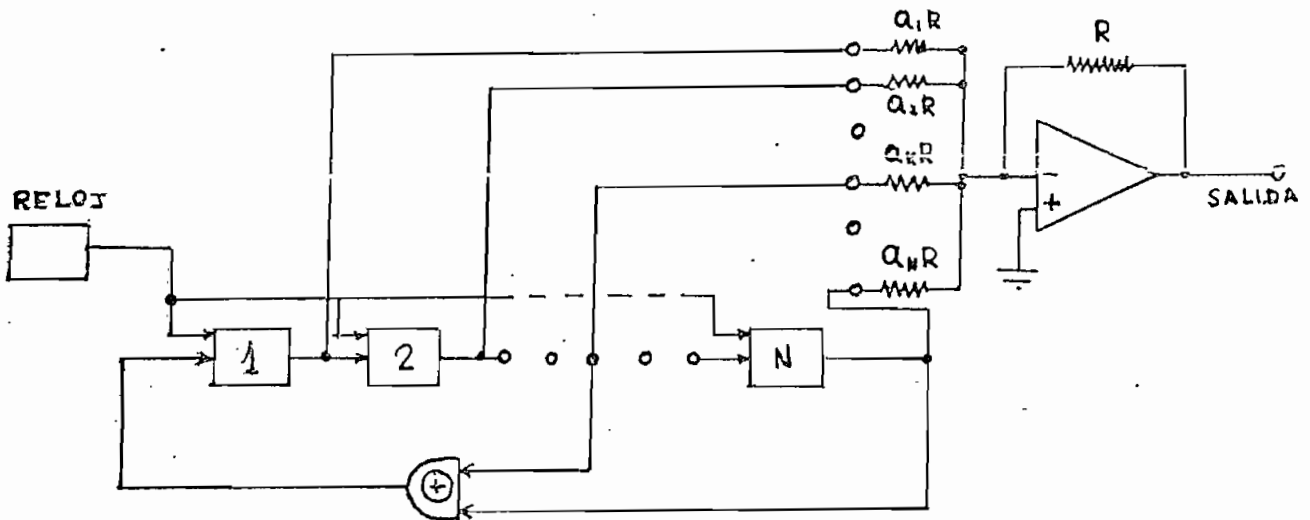


Fig. 4-1

Como se nota claramente, este se diferencia de nuestro circuito básico estudiado en el capítulo III en que se ha incluido un sumador, el cual nos da una salida X prescindiendo del signo total, proporcional a:

$$X = a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_NX_N \quad (4-1)$$

en donde a_1 es un factor de multiplicación de la entrada X_1 y las X_j son variables que pueden asumir los valores cero o uno. De este modo, a la salida del sumador se obtiene un tren de pulsos cuya amplitud en un instante cualquiera depende del estado particular del conjunto de flip-flop - en ese instante.

ANALISIS.-

La expresión (4-1) no es otra cosa que un solo valor del proceso estocástico

$$X(t) = a_1X_1(t) + a_2X_2(t) + \dots + a_NX_N(t) \quad (4-2)$$

particularizado para un instante t cualquiera.

En un instante cualquiera del ensamblaje infinito de funciones del tiempo que constituyen el proceso, de acuerdo con (4-1), las N salidas de los flip-flop se pueden identificar con N variables aleatorias independientes X_1 , X_2 , ..., X_N , de modo que a la salida del sumador tendremos una nueva variable aleatoria X representativa de la amplitud del pulso, cuya expresión matemática está dada por la ecuación (4-1).

En el capítulo I se demostró que si $Z = X + Y$ es una

variable aleatoria igual a la suma de las variables aleatorias X y Y ; entonces su función de densidad de probabilidad estaba dada por:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(z - y, y) dy \quad (4-3)$$

Esta expresión nos sirve para formular el siguiente teorema, el cual constituirá la base fundamental de todo lo que se discutirá en este capítulo.

TEOREMA. -

Si las variables aleatorias X y Y son independientes, entonces la densidad de la suma $X + Y$ es igual a la convolución de sus densidades. Matemáticamente esto se expresa de la manera siguiente:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z - y) f_Y(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z - x) dx \quad (4-4)$$

Tenemos de (1-92), que si las variables aleatorias X y Y son independientes, entonces

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x) f_Y(y) \quad (4-5)$$

Haremos uso de este teorema para encontrar la densidad de la variable aleatoria X .

Como se observa en (4-1), esta función de densidad depende de como escojamos los coeficientes a_i . Estudiaremos a continuación la forma de obtener algunas funciones de densidad conocidas.

FUNCIÓN DE DENSIDAD UNIFORME.

Como se vió en el capítulo II, cada una de las variables aleatorias X_i tiene una función de densidad como la que se muestra en la figura 4-2. El resultado que se obtiene al multiplicarla por el coeficiente a_i es el que se muestra en la figura 4-3 y que define una nueva variable aleatoria que denominaremos Y_i .

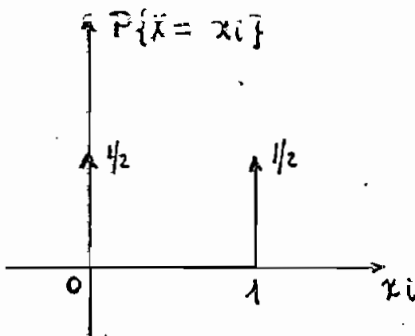


Fig. 4-2

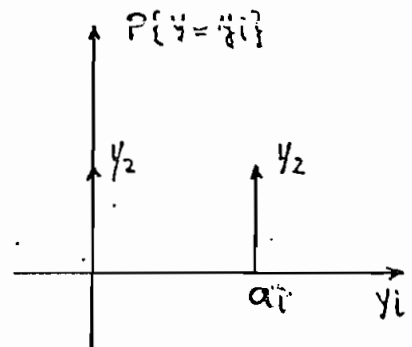


Fig. 4-3

entonces, la ecuación 4-1 puede escribirse de la manera siguiente:

$$X = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_N \quad (4-6)$$

Por aplicación reiterada del teorema de convolución se encuentra fácilmente la función de densidad de X .

DEFINICION.

Si la función de densidad de una variable aleatoria-
X es un pulso rectangular

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x_2 - x_1} & \text{para } x_1 < x \leq x_2 \\ 0 & \text{en otra parte} \end{cases}$$

como en la figura 4-4, decimos entonces que X está unifor-
memente distribuida en el intervalo (x_1, x_2) . Entonces X -
es del tipo continuo y su función de distribución es una -
rampa.

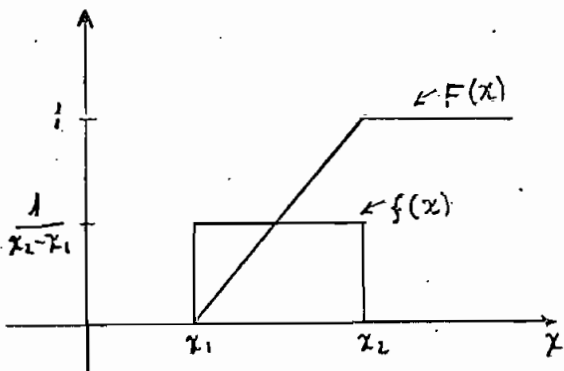


Fig. 4-4

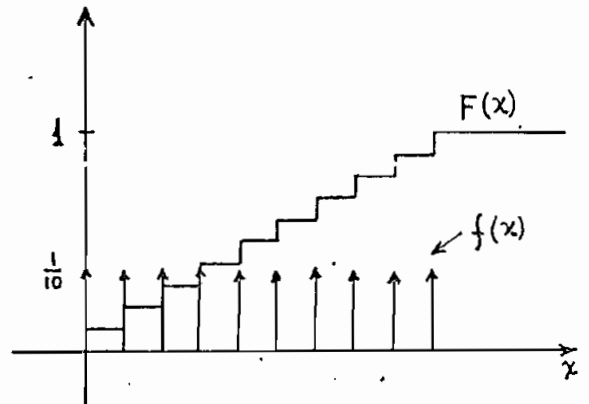


Fig. 4-5

Si X es del tipo discreto, diremos que tiene una den-
sidad uniforme, cuando esta consta de una serie de impulsos
de la misma área ubicados a intervalos regulares y tales -
que la suma total de sus áreas es igual a 1, tal como se -
muestra en la figura 4-5. Con esto se quiere decir que -
los eventos de la forma $\{X = x_i\}$ tienen todos la misma pro

babilidad de ocurrencia. La función de distribución, en este caso es del tipo escalera.

Si damos a los coeficientes a_i los valores 1, 2, 4, 8, 16, ..., demostraremos a continuación que la función de densidad obtenida para la variable aleatoria X es una densidad-uniforme del tipo discreto.

Si observamos los coeficientes a_i propuestos, veremos que se trata de las sucesivas potencias de 2 y la expresión (4-7) que es la expresión (4-1) particularizada para los coeficientes mencionados, no es otra cosa que la expresión general que nos permite pasar de un número cualquiera de N dígitos expresado en base 2 a un número expresado en base 10.

$$2^N X_1 + 2^{N-1} X_2 + \dots + 2^1 X_{N-1} + 2^0 X_N \quad (4-7)$$

Por otra parte, en el capítulo III habíamos demostrado que para un período de la onda generada por nosotros, el conjunto de flip-flops asumía todos los estados posibles menos uno, sin ninguna repetición, según se aprecia de los resultados experimentales, en consecuencia, cada estado representará un número en base 10 diferente y, por lo tanto, como cada pulso obtenido a la salida del sumador representa este número, la función de densidad de una función del tiempo particular será del tipo uniforme discreto.

Por aplicación reiterada del teorema de convolución-determinaremos ahora la función de densidad del ensamble para un instante t cualquiera del proceso.

Para nuestra demostración utilizaremos los métodos de la convolución gráfica y supondremos que tenemos 4 variables aleatorias Y_1, Y_2, Y_3 y Y_4 . Sus funciones de densidad se muestran en la figura 4-6.

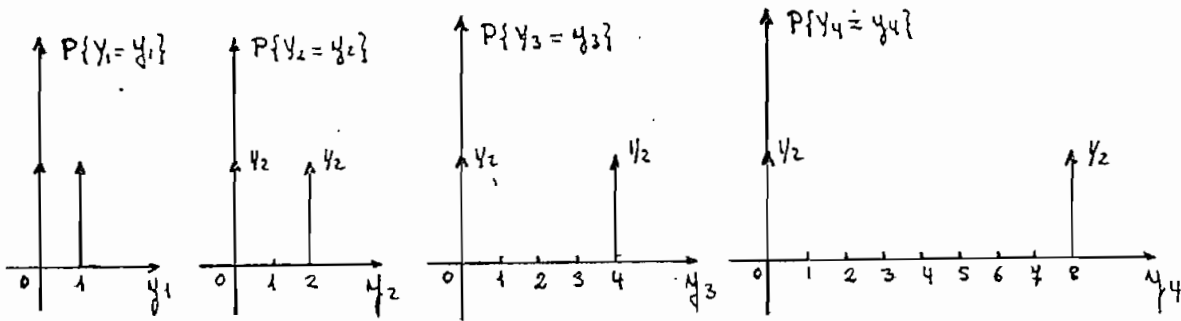


Fig. 4-6

En primer lugar efectuamos la convolución entre las densidades de las variables aleatorias Y_1 y Y_2 .

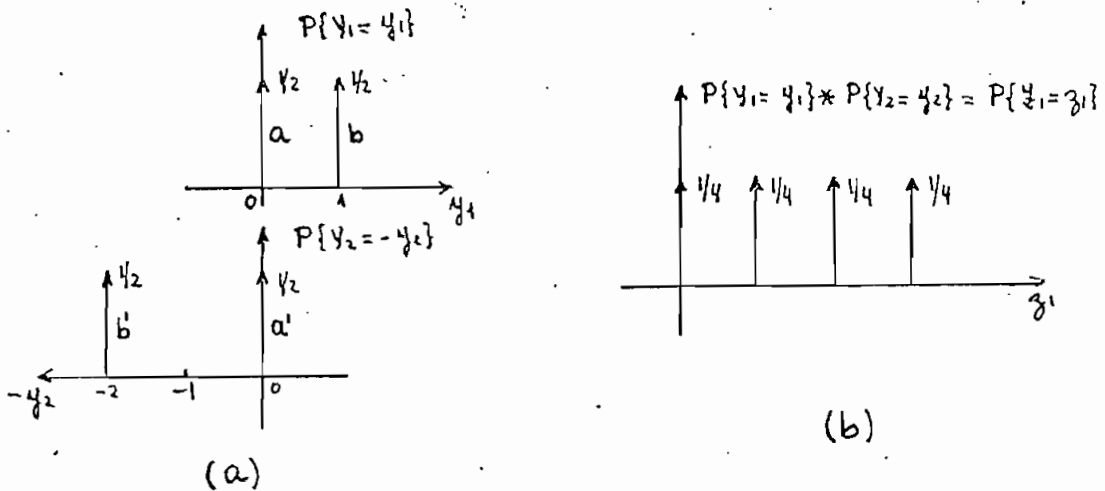


Fig. 4-7

La figura 4-7 ilustra el método. Definimos la variable aleatoria $Z_1 = Y_1 + Y_2$. Con $P\{Y_2 = -Y_2\}$, es decir la imagen de $P\{Y_2 = y_2\}$, vamos a obtener la densidad de Z_1 . Entonces, para $z_1=0$ tenemos la situación que se muestra en la figura (4-7)a. El producto de los impulsos a y a' (con estas letras los designamos para diferenciarlos entre sí), nos dá un impulso de área $1/4$ ubicado en $z_1=0$, ya que la convolución de dos impulsos es otro impulso de área igual al producto de las áreas de los impulsos en cuestión.

Para $z_1=1$, $P\{Y_2=-Y_2\}$ se desplaza un intervalo de longitud 1; ahora el impulso a' coincide con el b . Su producto es un impulso de área $1/4$ ubicado en $z_1=1$. Un nuevo desplazamiento de la misma longitud y b' coincide con a y se tiene un impulso de amplitud $1/4$ ubicado en $z_1=2$. Por último b' coincide con b obteniéndose un impulso de la misma área ubicado en $z_1=3$. Se observa, entonces que la variable aleatoria z_1 tiene la densidad uniforme que se muestra en la figura (4-7)b.

El próximo paso consiste en efectuar la convolución de la densidad de Z_1 con la densidad de Y_3 obteniéndose la función de distribución de la variable aleatoria Z_2 y, por último la convolución de Z_2 con Y_4 (de las densidades de) obteniéndose la función de densidad de X .

Las funciones de densidad de Z_2 y X se muestran en la figura 4-8.

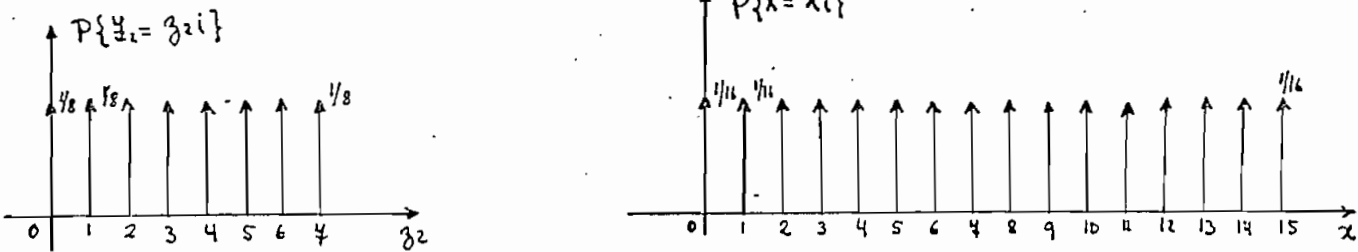


Fig. 4-8

DISTRIBUCION BINOMIAL O DE BERNOULLI.

Si X es del tipo discreto y toma valores en los puntos $m = 0, 1, \dots, n$ con

$$P\{X = m\} = \binom{n}{m} p^m q^{n-m} \quad p + q = 1 \quad (4-8)$$

decimos entonces que tiene una distribución binomial. Su densidad

$$f(x) = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} p^m q^{n-m} \delta(x - m) \quad (4-9)$$

es una ~~con~~secuencia de impulsos, la cual se muestra en la figura 4-9. Se puede demostrar que $P\{X = m\}$ es máxima para $m = \lceil (n + 1)p \rceil$ si $(n + 1)p$ no es un entero. Si $(n + 1)$ es un entero, tendremos dos máximos en $m_1 = (n + 1)p$ y $m_2 = (n + 1)p - 1$.

Nota.- Con $\lceil (n + 1)p \rceil$ queremos significar el mayor entero-

que es menor que $(n + 1)p$.

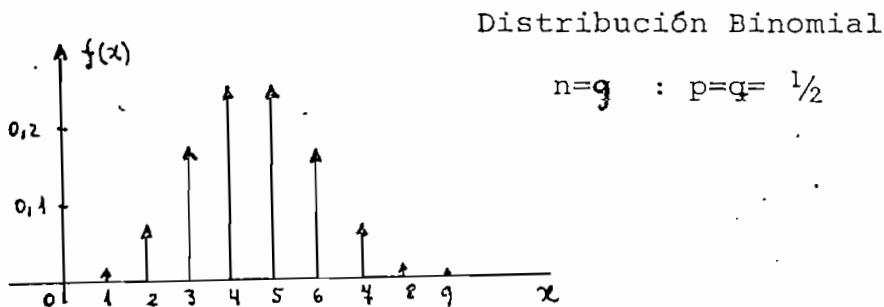


Fig. 4-9

Daremos ahora a los coeficientes a_i el mismo valor a . En consecuencia, la expresión (4-1) será, en este caso:

$$X = a(X_1 + X_2 + \dots + X_N) \quad (4-10)$$

Esto quiere decir que un valor del proceso estocástico $X(t)$ en un instante cualquiera t es proporcional al número de unos que haya entre las variables aleatorias X_1, X_2, \dots, X_N en ese instante, pudiendo el número de unos variar desde cero hasta N .

Si m es el número de unos que se tiene entre las variables aleatorias X_1, X_2, \dots, X_N ; entonces el evento $\{X=am\}$ tiene la misma probabilidad de ocurrencia que el evento $\{m \text{ unos y } N-m \text{ ceros}\}$ entre las mencionadas variables. Por lo tanto de (4-8) concluimos que:

$$P\{X = am\} = P\{m \text{ unos y } N-m \text{ ceros}\} = \binom{N}{m} p^m q^{N-m} \quad (4-11)$$

en donde p es la probabilidad de que cualquiera de las variables X_i tome el valor uno y q la de que tome el valor cero.

En nuestro caso $p = q = \frac{1}{2}$. Entonces:

$$P\{X = am\} = \binom{N}{m} \left(\frac{1}{2}\right)^m \quad (4-12)$$

Haciendo variar m por valores enteros desde 0 hasta N , obtenemos una distribución binomial para nuestro proceso.

La aplicación reiterada del teorema de convolución nos lleva al mismo resultado.

El efecto producido al tomar a diferentes valores se traduce en una variación del valor medio y de la varianza de la densidad de X .

El ejemplo a continuación ilustra la obtención de la densidad por convolución de:

$$X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$$

Entonces, X_1, X_2, X_3 y X_4 tienen todas la función de densidad que se muestra para X_1 en la figura (4-10).

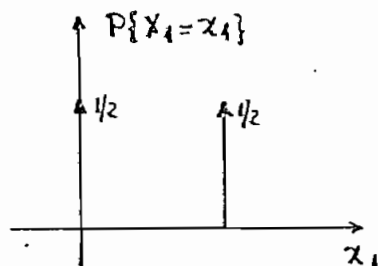


Fig. 4-10

Con $Y_1 = X_1 + X_2$, la figura 4-11 ilustra las etapas sucesivas para la obtención de la densidad de Y_1 .

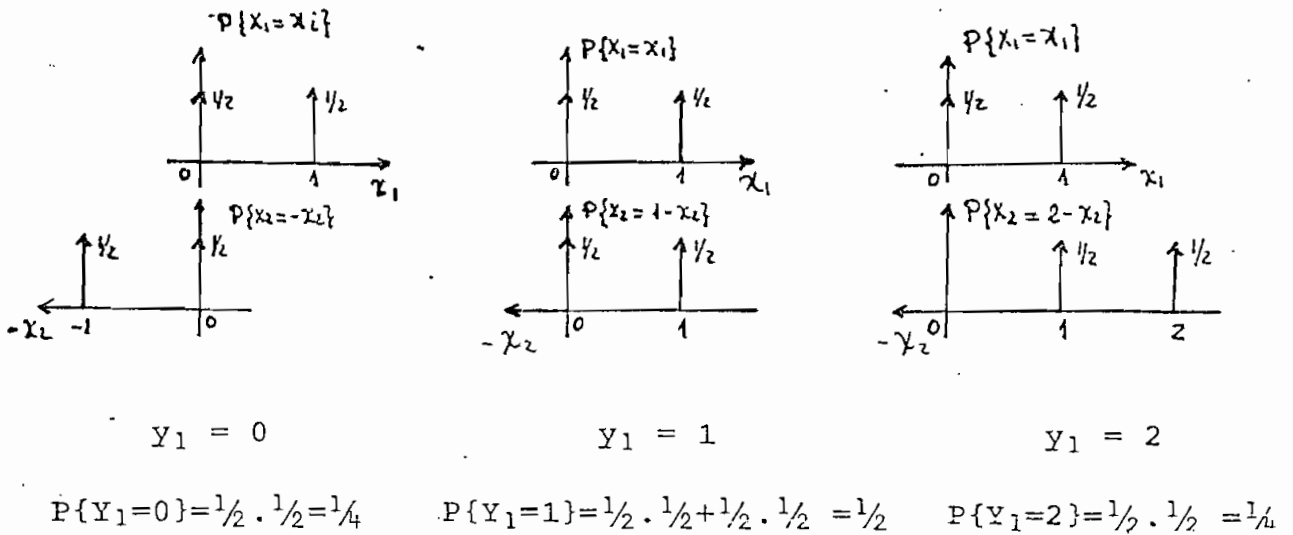


Fig. 4-11

Entonces, la función de densidad de Y_1 es la que se muestra en la figura 4-12.

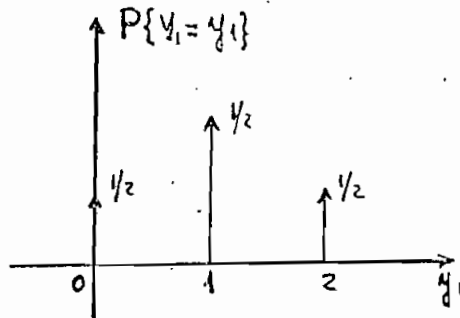


Fig. 4-12

Siguiendo el mismo procedimiento, en la figura 4-13-

se muestra el resultado obtenido para la densidad de $Y_2 = Y_1 + X_3$ y, por último en la figura 4-14 se muestra la densidad de $X = Y_2 + X_4 = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$, que era la función de densidad que queríamos encontrar.

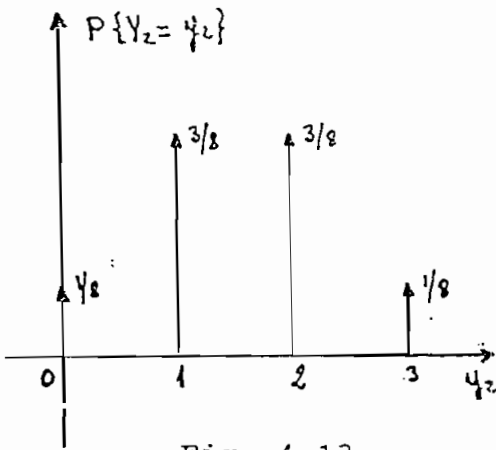


Fig. 4-13

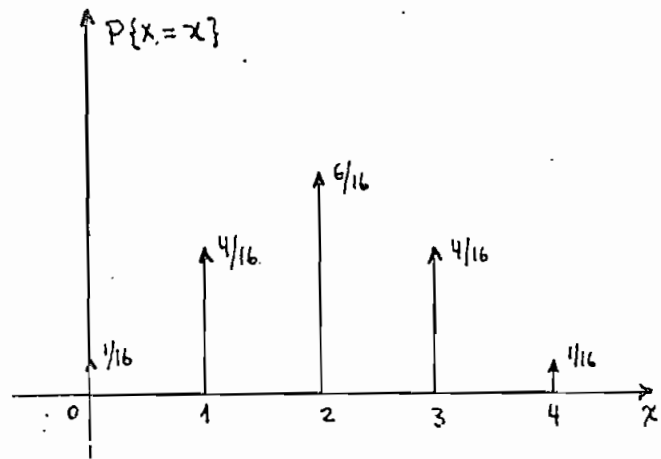


Fig. 4-14

4-3.- DISCUSION



Fig. 4-15

En la figura 4-15 se muestra una parte que contiene N pulsos de reloj de una función del tiempo representativa del proceso al que hemos denominado Transmisión Binaria. - Supongamos que la onda mostrada representa el estado de ca

da uno de los N flip-flop en un instante cualquiera. Con cada nuevo pulso de reloj se produce un desplazamiento de esta onda igual a la longitud de un intervalo entre pulsos T, dando como resultado que el estado en que se encontraba un flip-flop cualquiera sea transferido a su vecino, a la vez que ingrese nueva información al registro por el flip-flop 1.

Se puede, entonces pensar que el proceso al que ha dado lugar la inclusión del sumador se puede definir de la manera siguiente:

$$Y(t) = a_1 Y_1(t) + a_2 Y_1(t - T) + \dots + a_N Y_1(t - NT) \quad (4-13)$$

en donde $Y_1(t)$ es el proceso al que hemos denominado Transmisión Binaria y T es el intervalo entre dos pulsos sucesivos de reloj.

Nos preguntamos, ¿Cuál es la diferencia entre un proceso definido de esta forma y aquel ya estudiado que presupone que a la entrada del sumador se tienen N procesos independientes que definen el siguiente proceso:

$$X(t) = a_1 X_1(t) + a_2 X_2(t) + \dots + a_N X_N(t) \quad (4-14)$$

Puede pensarse que en el primer caso, un valor cualquiera del nuevo proceso se ha obtenido tirando una moneda

N veces y calculando luego de acuerdo con (4-13).

El caso segundo, por su parte es equivalente a tirar N monedas en un instante cualquiera y obtener $X(t)$ según (4-14).

En el primer caso, cada tirada es independiente de la otra, en el segundo, el resultado de cada moneda es también independiente uno de otro.

Desde este punto de vista, los dos procesos son equivalentes.

Un segundo valor en el primer proceso se obtiene tirando la moneda una vez y efectuando el cálculo según (4-13), incluyendo el resultado de la última tirada en el primer término y transfiriendo los resultados anteriores a los otros términos.

El segundo caso es equivalente a tirar nuevamente las N monedas para obtener el segundo valor o también es equivalente a tirar una sola moneda N veces, nuevamente.

Si pensamos en el ensamblaje de funciones del tiempo de la transmisión Binaria, el caso primero es equivalente a movernos en una sola función del tiempo un intervalo de duración T cada vez. En tanto que el segundo equivale a seleccionar cada T segundos una función del tiempo del en-

samblaje. Dada la ergodicidad de este proceso ya demostrada en el capítulo II resulta que los dos métodos propuestos para definir el proceso son equivalentes.

4-4.- ESTADISTICA DE SEGUNDO ORDEN

Vamos a desarrollar ahora la estadística de segundo orden para nuestro proceso. Salta a la vista la dificultad de efectuar semejante desarrollo en la forma más general posible, es decir considerando que tenemos n variables aleatorias independientes X_i , que los coeficientes a_i no están especificados y que formamos la suma de estas n variables aleatorias afectadas por los coeficientes a_i . Como ya se ha visto en apartados anteriores, y como se verá posteriormente de los resultados experimentales obtenidos por la simulación, que se tienen un sinnúmero de posibilidades, por lo que, el obtener una expresión matemática general sería una tarea muy complicada desde el punto de vista matemático.

En lugar de hacer eso, desarrollaremos a continuación un caso bien específico. Vamos a suponer que tenemos el siguiente proceso:

$$Y(t) = X_1(t) + X_2(t) + X_3(t) + X_4(t) \quad (4-15)$$

El cual, como sabemos por lo visto en la sección 4-2 da lugar a una densidad de primer orden de Bernoulli.

Modelo teórico.- Vamos a suponer que tenemos cuatro monedas en fila con una secuencia inicial de caras y sellos cualquiera. En el instante $t = 0$ tomamos la cuarta moneda, la tiramos y con el resultado obtenido la ubicamos en el primer lugar. Calculamos el valor de $Y(0)$ como la suma del número total de caras que tenemos entre las cuatro monedas. T segundos después repetimos la misma secuencia de operaciones, calculamos otro valor de $Y(t)$ y así continuamos indefinidamente.

Asumiremos, además lo siguiente:

- 1^a Que el proceso en cuestión corresponde al caso aleatorio, con esto queremos decir que su ensamblaje estaría constituido por funciones del tiempo que se pueden empezar a generar en un instante cualquiera comprendido entre cero y T , siendo T el lapso transcurrido entre dos pulsos sucesivos de reloj.
- 2^a Que nuestro proceso es estacionario. En consecuencia, su función de densidad de segundo orden y , por lo tanto su función de autocorrelación depende de γ , únicamente.

DENSIDAD DE SEGUNDO ORDEN.

Este proceso presenta algunas diferencias con aquel que se estudió en el capítulo II. La más destacada y que

es aplicable a todos los procesos de este tipo es la de - que no existe independencia entre valores de $Y(t)$ separados entre sí por un lapso menor al de cuatro intervalos de tirada T . En efecto, si pensamos en nuestro modelo de las cuatro monedas y consideramos dos valores del proceso $Y(t_1)$ y $Y(t_2)$ tales que $0 < \gamma < T$; ($\gamma = t_2 - t_1$) observaremos que $Y(t_2)$ a lo más puede diferir de $Y(t_1)$ en una unidad, dependiendo de si fué cara o si fué sello el resultado de la tirada de la cuarta moneda que ocupa luego el primer lugar.

Así mismo, para $T < \gamma < 2T$ la diferencia será a lo más de dos unidades.

Para $2T < \gamma < 3T$ será de tres unidades.

Para $3T < \gamma < 4T$ será de cuatro unidades.

Por último, para $\gamma > 4T$ las variables aleatorias $Y(t_1)$ y $Y(t_2)$ son independientes y la función de densidad de probabilidad deja de depender de γ .

En el apartado 4-2 se obtuvo la densidad de primer orden para este proceso, la que nos dió los siguientes valores:

$$P\{Y(t) = 0\} = 1/16$$

$$P\{Y(t) = 1\} = 4/16$$

$$P\{Y(t) = 2\} = 6/16$$

$$P\{Y(t) = 3\} = 4/16$$

$$P\{Y(t) = 4\} = 1/16$$

Dados dos instantes t_1 y t_2 cualesquiera separados por un intervalo γ , queremos encontrar la probabilidad del evento:

$$P\{Y(t_1) = y_1, Y(t_2) = y_2\} \quad (4-16)$$

De los valores dados de la función de densidad de primer orden, se ve enseguida que hay 25 posibles valores para este evento y que constituyen la densidad de segundo orden. Examinaremos uno por uno estos eventos.

Como ya se ha dicho, esta función de densidad depende de γ . Por lo tanto, deberemos considerar diferentes intervalos de variación para el mismo.

1ª $0 < \gamma < T$

a) Consideremos en primer lugar la probabilidad:

$$P\{Y(t_1) = 0, Y(t_2) = 0\}$$

Como sabemos:

$$P\{Y(t_1) = 0, Y(t_2) = 0\} = P\{Y(t_1) = 0\} P\{Y(t_2) = 0 / Y(t_1) = 0\}$$

La probabilidad condicional es equivalente a la probabilidad del siguiente evento:

{no ocurre un cambio en γ u ocurre un cambio en γ y $Y(t_2)=0$ }

el que puede descomponerse en los siguientes eventos que -

son mutuamente excluyentes:

{no ocurre un cambio en γ }, {ocurre un cambio en γ y $Y(t_2)=0$ }

Por lo tanto:

$$P\{Y(t_2) = 0/Y(t_1) = 0\} = P\{\text{no cambio}\} + P\{\text{cambio y } Y(t_2) = 0\}$$

El segundo evento está formado por dos eventos que son independientes por lo que, la expresión anterior puede escribirse:

$$P\{Y(t_2) = 0/Y(t_1) = 0\} = 0 = P\{\text{no cambio}\} + P\{\text{cambio}\} P\{Y(t_2) = 0\}$$

Pero, puesto que asume que $Y(t_1) = 0$, para que $Y(t_2)=0$ es suficiente que $X_1(t_2) = 0$ por lo que:

$$P\{Y(t_2) = 0/Y(t_1) = 0\} = P\{\text{no cambio}\} + P\{\text{cambio}\} P\{X_1(t_2) = 0\}$$

Pero:

$$P\{\text{no cambio}\} = 1 - \frac{\gamma}{T}$$

$$P\{\text{cambio}\} = \frac{\gamma}{T}$$

$$P\{X_1(t_2) = 0\} = 1/2$$

En consecuencia:

$$P\{Y(t_2) = 0/Y(t_1) = 0\} = 1 - \frac{\gamma}{T} + \frac{1}{2} \frac{\gamma}{T} = 1 - \frac{\gamma}{2T}$$

Por otra parte, de la función de densidad de primer-

obtenida en el apartado 4-2 se sabe que $P\{Y(t_1) = 0\} = 1/16$

En consecuencia:

$$P\{Y(t_1) = 0, Y(t_2) = 0\} = 1/16 \left(1 - \frac{\gamma}{2T}\right)$$

$$b) P\{Y(t_1) = 0, Y(t_2) = 1\} = P\{Y(t_1) = 0\}P\{Y(t_2) = 1/Y(t_1)=0\}$$

$$= P\{Y(t_1) = 0\} P\{\text{cambio}\} P\{X_1(t_2) = 1\}$$

$$= \frac{1}{16} \frac{\gamma}{T} \frac{1}{2} = \frac{1}{16} \frac{\gamma}{2T}$$

c) $P\{Y(t_1) = 0, Y(t_2) = 2\}$. El valor de γ considerado solo permite que entre t_1 y t_2 ocurra una sola tirada de la moneda. El evento en cuestión requiere de dos tiradas de la moneda y de la obtención de un uno en cada una de ellas; en consecuencia, la probabilidad de este evento es cero.

$$P\{Y(t_1) = 0, Y(t_2) = 2\} = 0$$

Así mismo, y con mayor razón

$$P\{Y(t_1) = 0, Y(t_2) = 3\} = 0$$

$$P\{Y(t_1) = 0, Y(t_2) = 4\} = 0$$

$$d) P\{Y(t_1) = 1, Y(t_2) = 0\}$$

Hay cuatro eventos posibles que nos dan $Y(t_1) = 1$; -

estos son:

$$\{X_1(t_1) = 1, X_2(t_1) = 0, X_3(t_1) = 0, X_4(t_1) = 0\}$$

$$\{X_1(t_1) = 0, X_2(t_1) = 1, X_3(t_1) = 0, X_4(t_1) = 0\}$$

$$\{X_1(t_1) = 0, X_2(t_1) = 0, X_3(t_1) = 1, X_4(t_1) = 0\}$$

$$\{X_1(t_1) = 0, X_2(t_1) = 0, X_3(t_1) = 0, X_4(t_1) = 1\}$$

Puesto que el intervalo considerado para \mathcal{T} sólo permite que haya una sola tirada de la moneda, únicamente el último de los eventos considerados hace posible que $Y(t_2)=0$. La probabilidad de ocurrencia del mismo es $1/16$.

Tendremos, en consecuencia que:

$$P\{Y(t_1) = 1, Y(t_2) = 0\} = \frac{1}{16} P\{\text{cambio}\} P\{X_1(t_2) = 0\} = \frac{1}{16} \frac{\mathcal{T}}{2\pi}$$

En lo que sigue, con el objeto de simplificar la notación, la probabilidad de un evento tal como:

$$\{X_1(t_1) = 1, X_2(t_1) = 0, X_3(t_1) = 1, X_4(t_1) = 0\}$$

se escribirá de la siguiente manera:

$$P\{1,0,1,0;t\}$$

$$e) P\{Y(t_1) = 1, Y(t_2) = 1\}$$

$$= P\{1,0,0,0;t_1\} + P\{0,1,0,0;t_1\} + P\{0,0,1,0;t_1\} + P\{0,0,0,1;t_1\}.$$

$$. P\{\text{no cambio}\} +$$

$$\dagger P\{1,0,0,0;t_1\} + P\{0,1,0,0;t_1\} + P\{0,0,1,0;t_1\} + P\{0,0,0,1;t_1\}$$

$$. P\{\text{cambio}\} P\{X_1(t_2)\} = 0$$

$$= \frac{4}{16} \left(1 - \frac{\gamma}{T}\right) + \frac{4}{16} \frac{\gamma}{T} \frac{1}{2} = \frac{4}{16} \left(1 - \frac{\gamma}{2T}\right)$$

$$f) P\{Y(t_1) = 1, Y(t_2) = 2\}$$

$$= P\{1,0,0,0;t_1\} + P\{0,1,0,0;t_1\} + \\ + P\{0,0,1,0;t_1\} P\{\text{cambio}\} P\{X_1(t_2) = 1\}$$

$$= \frac{3}{16} \frac{\gamma}{2T}$$

Los casos presentados ilustran el tipo de razonamiento utilizado en este análisis.

A continuación se dan los valores de probabilidad de cada uno de los eventos que estamos considerando.

$$P\{Y(t_1) = 0, Y(t_2) = 0\} = \frac{1}{16} \left(1 - \frac{\gamma}{2T}\right)$$

$$P\{Y(t_1) = 0, Y(t_2) = 1\} = \frac{1}{16} \frac{\gamma}{2T}$$

$$P\{Y(t_1) = 0, Y(t_2) = 2\} = 0$$

$$P\{Y(t_1) = 0, Y(t_2) = 3\} = 0$$

$$P\{Y(t_1) = 0, Y(t_2) = 4\} = 0$$

$$P\{Y(t_1) = 1, Y(t_2) = 0\} = \frac{1}{16} \frac{\gamma}{2T}$$

$$P\{Y(t_1) = 1, Y(t_2) = 1\} = \frac{4}{16} \left(1 - \frac{\gamma}{2T}\right)$$

$$P\{Y(t_1) = 1, Y(t_2) = 2\} = \frac{3}{16} \frac{\gamma}{2T}$$

$$P\{Y(t_1) = 1, Y(t_2) = 3\} = 0$$

$$P\{Y(t_1) = 1, Y(t_2) = 4\} = 0$$

$$P\{Y(t_1) = 2, Y(t_2) = 0\} = 0$$

$$P\{Y(t_1) = 2, Y(t_2) = 1\} = \frac{3}{16} \frac{\gamma}{2T}$$

$$P\{Y(t_1) = 2, Y(t_2) = 2\} = \frac{6}{16} \left(1 - \frac{\gamma}{2T}\right)$$

$$P\{Y(t_1) = 2, Y(t_2) = 3\} = \frac{3}{16} \frac{\gamma}{2T}$$

$$P\{Y(t_1) = 2, Y(t_2) = 4\} = 0$$

$$P\{Y(t_1) = 3, Y(t_2) = 0\} = 0$$

$$P\{Y(t_1) = 3, Y(t_2) = 1\} = 0$$

$$P\{Y(t_1) = 3, Y(t_2) = 2\} = \frac{3}{16} \frac{\gamma}{2T}$$

$$P\{Y(t_1) = 3, Y(t_2) = 3\} = \frac{4}{16} \left(1 - \frac{\gamma}{2T}\right)$$

$$P\{Y(t_1) = 3, Y(t_2) = 4\} = \frac{1}{16} \frac{\gamma}{2T}$$

$$P\{Y(t_1) = 4, Y(t_2) = 0\} = 0$$

$$P\{Y(t_1) = 4, Y(t_2) = 1\} = 0$$

$$P\{Y(t_1) = 4, Y(t_2) = 2\} = 0$$

$$P\{Y(t_1) = 4, Y(t_2) = 3\} = \frac{1}{16} \frac{\gamma}{2T}$$

$$P\{Y(t_1) = 4, Y(t_2) = 4\} = \frac{1}{16} \left(1 - \frac{\gamma}{2T}\right)$$

La figura 4-16 muestra la función de densidad conjunta de las variables aleatorias $Y(t_1)$ y $Y(t_2)$ para $0 < \gamma < T$.

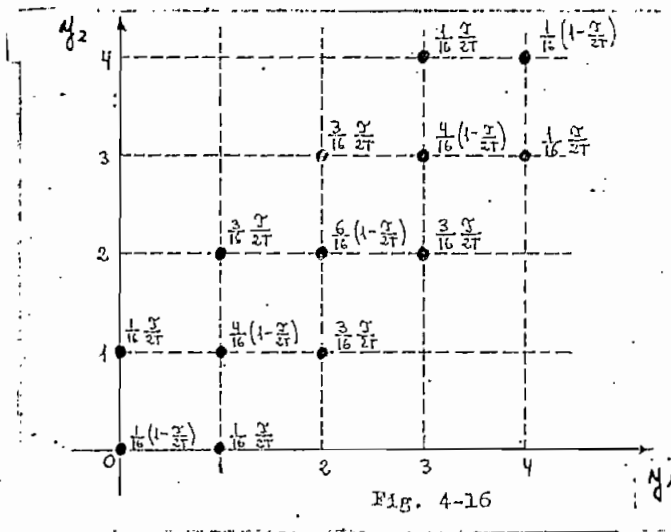


Fig. 4-16

Densidad de segundo orden para $0 < \gamma < T$

2^a $T < \gamma < 2T$

En este intervalo de variación de γ se tienen las siguientes probabilidades:

$$P\{\text{no ocurre ningún cambio de valor en } \gamma\} = 0$$

$$P\{\text{ocurren dos cambios de valor en } \gamma\} = \frac{\gamma - T}{T} = \frac{\gamma}{T} - 1$$

$$P\{\text{tres o más cambios de valor en } \gamma\} = 0 \quad (4-17)$$

Entonces, la probabilidad de que ocurra un cambio de valor de la función será la siguiente:

$$P\{\text{ocurre un cambio de valor en } \mathcal{Y}\} = 1 - \frac{\mathcal{Y} - T}{T} = 2 - \frac{\mathcal{Y}}{T} \quad (4-18)$$

A modo de ilustración veremos como se calcula uno de los valores de la densidad conjunta de $Y(t_1)$ y $Y(t_2)$ en este caso.

Analizaremos la forma de obtener:

$$P\{Y(t_1) = 2, Y(t_2) = 3\}$$

Los siguientes eventos hacen posible que $Y(t_1) = 2$

- a) $\{1, 1, 0, 0; t_1\}$
- b) $\{1, 0, 1, 0; t_1\}$
- c) $\{1, 0, 0, 1; t_1\}$
- d) $\{0, 1, 1, 0; t_1\}$
- e) $\{0, 1, 0, 1; t_1\}$
- f) $\{0, 0, 1, 1; t_1\}$

Supondremos en primer lugar que se tienen dos instantes de cambio, esto es equivalente a tirar dos veces la moneda.

Para el evento (a) se tiene:

$$P_a''\{Y(t_1)=2, Y(t_2)=3\} = P\{1,1,0,0;t_1\}P\{2 \text{ cambios}\} P\{X_2(t_2)=0\} \cdot P\{X_1(t_2) = 1\} + P\{X_2(t_2) = 1\} \cdot P\{X_1(t_2) = 0\}$$

$$P_b''\{Y(t_1) = 2, Y(t_2) = 3\} = P\{1,0,1,0;t_1\} P\{2 \text{ cambios}\} P\{X_2(t_2) = 1\} P\{X_1(t_2) = 1\}$$

$$P_c''\{Y(t_1) = 2, Y(t_2) = 3\} = P\{1,0,0,1;t_1\} P\{2 \text{ cambios}\} P\{X_2(t_2) = 1\} P\{X_1(t_2) = 1\}$$

$$P_d''\{Y(t_1) = 2, Y(t_2) = 3\} = P\{0,1,1,0;t_1\} P\{2 \text{ cambios}\} P\{X_2(t_2) = 1\} P\{X_1(t_2) = 1\}$$

$$P_e''\{Y(t_1) = 2, Y(t_2) = 3\} = P\{0,1,0,1;t_1\} P\{2 \text{ cambios}\} P\{X_2(t_2) = 1\} P\{X_1(t_2) = 1\}$$

Con el evento f es imposible obtener un tres en dos tiradas, en consecuencia:

$$P_f''\{Y(t_1) = 2, Y(t_2) = 3\} = 0$$

Nota: P_a'' significa la probabilidad que estamos considerando para el evento a en dos tiradas. P_a' será para una tirada.

Tenemos, entonces:

$$P_a'' = \frac{1}{16} \left(\frac{\mathcal{Y}}{\mathcal{T}} - 1 \right)^{1/2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{64} \left(\frac{\mathcal{Y}}{\mathcal{T}} - 1 \right)$$

$$P_b'' = \frac{1}{16} \left(\frac{\mathcal{Y}}{\mathcal{T}} - 1 \right)^{1/2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{64} \left(\frac{\mathcal{Y}}{\mathcal{T}} - 1 \right)$$

$$P_c'' = \frac{1}{16} \left(\frac{\mathcal{Y}}{\mathcal{T}} - 1 \right)^{1/2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{64} \left(\frac{\mathcal{Y}}{\mathcal{T}} - 1 \right)$$

$$P_d'' = \frac{1}{16} \left(\frac{\mathcal{Y}}{\mathcal{T}} - 1 \right)^{1/2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{64} \left(\frac{\mathcal{Y}}{\mathcal{T}} - 1 \right)$$

$$P_e'' = \frac{1}{16} \left(\frac{\mathcal{Y}}{\mathcal{T}} - 1 \right)^{1/2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{64} \left(\frac{\mathcal{Y}}{\mathcal{T}} - 1 \right)$$

Llamando P'' a la probabilidad de obtener nuestro evento en dos tiradas; se tiene:

$$P'' \{Y(t_1) = 2, Y(t_2) = 3\} = \frac{6}{64} \left(\frac{\mathcal{Y}}{\mathcal{T}} - 1 \right)$$

Analizaremos ahora para el caso en que ocurre un solo instante de cambio dentro de \mathcal{Y} , lo que es equivalente a una sola tirada de una moneda.

$$P_a' \{Y(t_1) = 2, Y(t_2) = 3\} = P\{1, 1, 0, 0; t_1\} P\{1 \text{ cambio}\} P\{X_1(t_2) = 1\}$$

$$P_b' \{Y(t_1) = 2, Y(t_2) = 3\} = P\{1, 0, 1, 0; t_1\} P\{1 \text{ cambio}\} P\{X_1(t_2) = 1\}$$

$$P_c' \{Y(t_1) = 2, Y(t_2) = 3\} = 0$$

$$P_d' \{Y(t_1) = 2, Y(t_2) = 3\} = P\{0, 1, 1, 0; t_1\} P\{1 \text{ cambio}\} P\{X_1(t_2) = 1\}$$

$$P_e' \{Y(t_1) = 2, Y(t_2) = 3\} = 0$$

$$P_f' \{Y(t_1) = 2, Y(t_2) = 3\} = 0$$

Entonces:

$$P'_a = P'_b = P'_d = \frac{1}{16} \left(2 - \frac{\mathfrak{Y}}{T} \right)^{1/2} = \frac{2}{64} \left(2 - \frac{\mathfrak{Y}}{T} \right)$$

Sin con P' llamamos a la probabilidad de obtener nuestro evento en una sola tirada; tendremos:

$$P'\{Y(t_1) = 2, Y(t_2) = 3\} = P'_a + P'_b + P'_d = \frac{6}{64} \left(2 - \frac{\mathfrak{Y}}{T} \right)$$

Por último:

$$P\{Y(t_1) = 2, Y(t_2) = 3\} = P' + P'' = \frac{6}{64} \left(\frac{\mathfrak{Y}}{T} - 1 \right) + \frac{6}{64} \left(2 - \frac{\mathfrak{Y}}{T} \right) = \frac{6}{64}$$

que es la probabilidad que estábamos buscando.

La figura 4-17 muestra la función de densidad conjunta de las variables aleatorias $Y(t_1)$ y $Y(t_2)$ para $T < \mathfrak{Y} < 2T$:

3^a $2T < \mathfrak{Y} < 3T$

En este intervalo de variación para \mathfrak{Y} al igual que en el caso anterior se tienen únicamente las dos probabilidades siguientes:

$$P\{\text{ocurren dos cambios de valor en } \mathfrak{Y}\} = 1 - \frac{\mathfrak{Y} - 2T}{T} = 3 - \frac{\mathfrak{Y}}{T}$$

$$P\{\text{ocurren tres cambios de valor en } \mathfrak{Y}\} = \frac{\mathfrak{Y} - 2T}{T} = \frac{\mathfrak{Y}}{T} - 2$$

(4-19)

El procedimiento seguido para obtener los diferentes

valores de la función de densidad conjunta es similar al-
que ya se ha explicado. En la figura 4-18 se muestran los
valores de esta función para este intervalo.

4^a $3T < \mathcal{Y} < 4T$

En este intervalo se tienen las siguientes probabili-
dades:

$$P\{\text{ocurren tres cambios de valor en } \mathcal{Y}\} = 1 - \frac{\mathcal{Y} - 3T}{T} = 4 - \frac{\mathcal{Y}}{T}$$

$$P\{\text{ocurren cuatro cambios de valor en } \mathcal{Y}\} = \frac{\mathcal{Y} - 3T}{T} = \frac{\mathcal{Y}}{T} - 3$$

(4-20)

La función de densidad conjunta se muestra en la fi-
gura 4-19.

5^a $\mathcal{Y} > 4T$

Para valores de \mathcal{Y} mayores que $4T$, las variables alea-
torias $Y(t_1)$ y $Y(t_2)$ son independientes. Esto quiere de-
cir que $Y(t_2)$ puede tomar ahora cualquier valor (de los -
que le es posible tomar) sin importar cual sea el valor -
que haya tenido $Y(t_1)$. En consecuencia, desde este punto-
en adelante, la función de densidad conjunta deja de depen-
der de \mathcal{Y} .

Puesto que ahora $Y(t_1)$ y $Y(t_2)$ son independientes, -

la probabilidad del evento $\{Y(t_1) = y_1, Y(t_2) = y_2\}$ estará dada por:

$$P\{Y(t_1) = y_1, Y(t_2) = y_2\} = P\{Y(t_1) = y_1\} P\{Y(t_2) = y_2\}$$

Por ejemplo, la probabilidad del evento

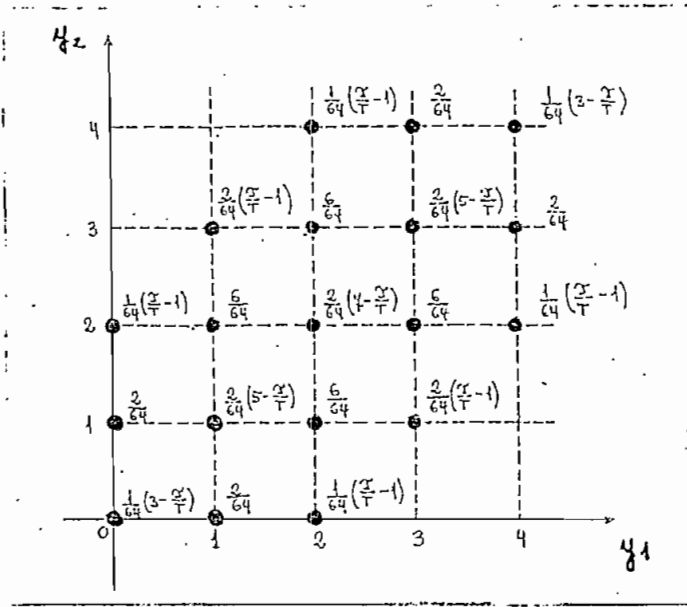
$\{Y(t_1) = 2, Y(t_2) = 3\}$ será:

$$P\{Y(t_1) = 2, Y(t_2) = 3\} = \frac{6}{16} \cdot \frac{4}{16} = \frac{24}{256}$$

La función de densidad conjunta para este intervalo se muestra en la figura 4-20.

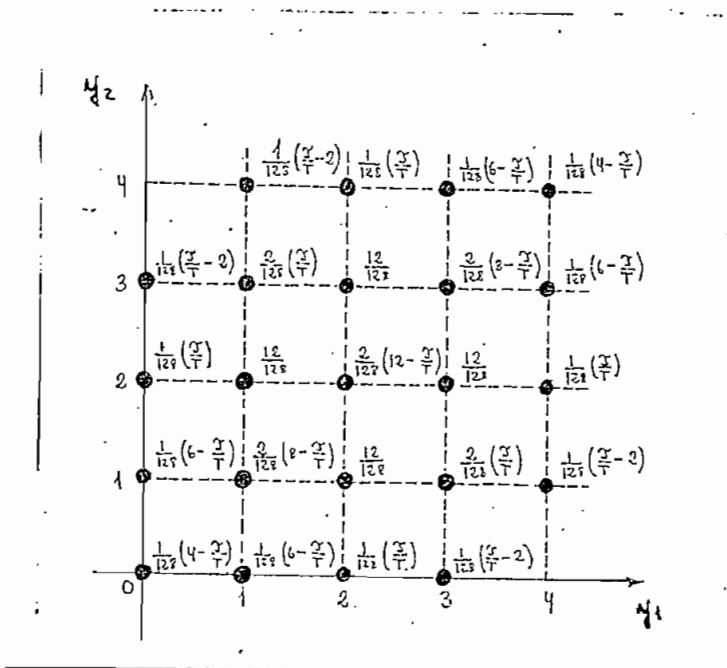
La figura 4-21 muestra cómo varía la función de densidad conjunta de $Y(t_1)$ y $Y(t_2)$ al tomar distintos valores.

FUNCION DE AUTOCORRELACION



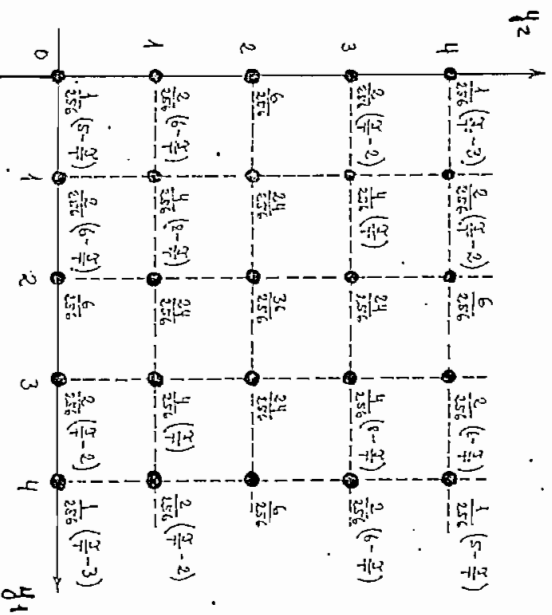
$T < T < 2T$

Fig. 4-17



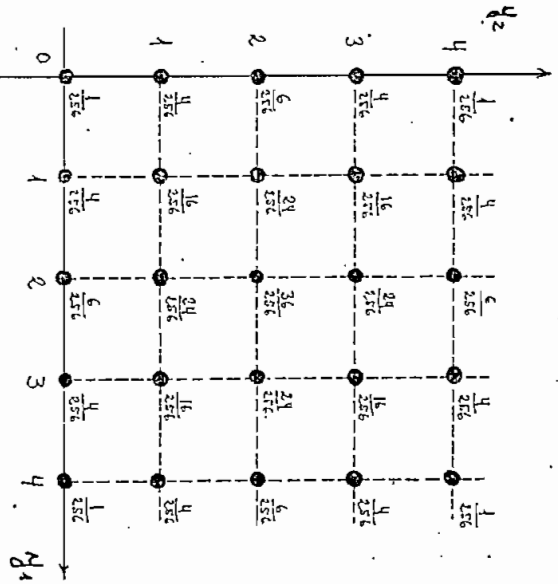
$2T < T < 3T$

Fig. 4-18



$3\pi < \gamma < 4\pi$

Fig. 4-19



$\gamma \geq 4\pi$

Fig. 4-20

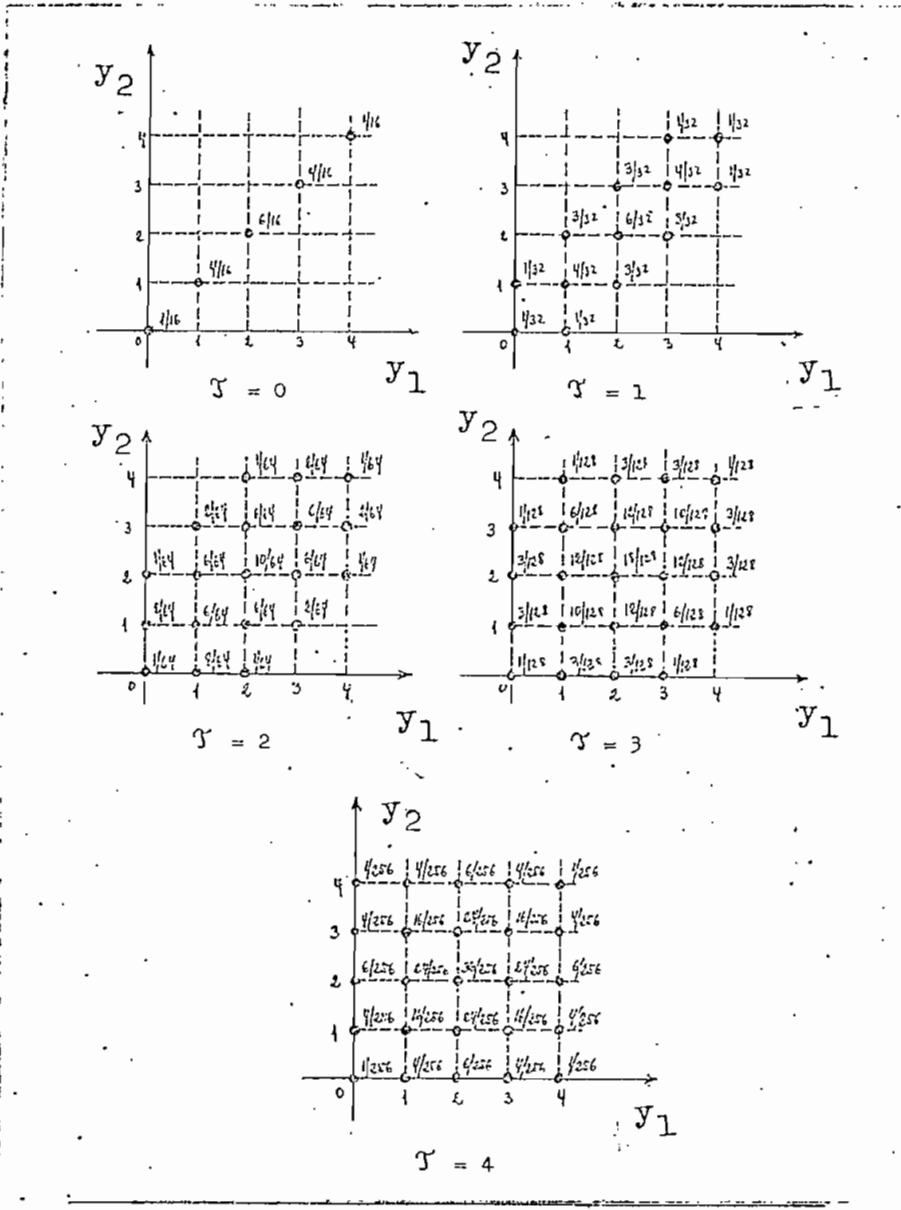


Fig. 4-21

Variación con τ de la densidad conjunta de $Y(t_1)$ y $Y(t_2)$.

FUNCION DE AUTOCORRELACION

Una vez determinada la función de densidad de segundo orden para nuestro proceso, se puede encontrar sin dificultad su función de autocorrelación.

Vamos a obtenerla para cada uno de los intervalos de variación de \mathcal{Y} que se tomaron en cuenta en la determinación de la densidad de segundo orden.

1ª. $0 < \mathcal{Y} < T$

Como sabemos, la función de autocorrelación para un proceso discreto está dada por:

$$R(\mathcal{Y}) = E\{Y(t_1)Y(t_2)\} = \sum_{y_1, y_2} y_1 y_2 P_N\{Y(t_1) = y_1, Y(t_2) = y_2\} \quad (4-20)$$

En consecuencia, para este intervalo tenemos: (Fig.- 4-16)

$$\begin{aligned} R(\mathcal{Y}) = & 0.0 \frac{1}{16} \left(1 - \frac{\mathcal{Y}}{2T}\right) + 0.1 \cdot \frac{1}{16} \frac{\mathcal{Y}}{2T} + 1.0 \cdot \frac{1}{16} \frac{\mathcal{Y}}{2T} + 1.1 \cdot \frac{4}{16} \\ & \cdot \left(1 - \frac{\mathcal{Y}}{2T}\right) + 1.2 \cdot \frac{3}{16} \frac{\mathcal{Y}}{2T} + 2.1 \frac{3}{16} \frac{\mathcal{Y}}{2T} + 2.2 \cdot \frac{6}{16} \left(1 - \frac{\mathcal{Y}}{2T}\right) + \\ & + 2.3 \cdot \frac{3}{16} \frac{\mathcal{Y}}{2T} + 3.2 \cdot \frac{3}{16} \frac{\mathcal{Y}}{2T} + 3.3 \cdot \frac{4}{16} \left(1 - \frac{\mathcal{Y}}{2T}\right) + \\ & + 3.4 \cdot \frac{1}{16} \frac{\mathcal{Y}}{2T} + 4.3 \cdot \frac{1}{16} \frac{\mathcal{Y}}{2T} + 4.4 \cdot \frac{1}{16} \left(1 - \frac{\mathcal{Y}}{2T}\right) \end{aligned}$$

Simplificando se obtiene:

$$R(\mathcal{Y}) = \frac{80}{16} - \frac{4}{16} \frac{\mathcal{Y}}{T} = 5 - \frac{\mathcal{Y}}{4T}$$

2ª $T < \mathcal{Y} < 2T$

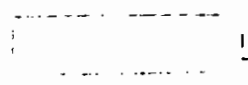
Procediendo del mismo modo (Fig. 4-17) se encuentra que:

$$R(\mathcal{Y}) = \frac{320}{64} - \frac{16}{64} \frac{\mathcal{Y}}{T} = 5 - \frac{\mathcal{Y}}{4T}$$

3ª $2T < \mathcal{Y} < 3T$

$$R(\mathcal{Y}) = \frac{640}{128} - \frac{32}{128} \frac{\mathcal{Y}}{T} = 5 - \frac{\mathcal{Y}}{4T}$$

4ª $3T < \mathcal{Y} < 4T$


$$R(\mathcal{Y}) = \frac{1280}{256} - \frac{64}{256} \frac{\mathcal{Y}}{T} = 5 - \frac{\mathcal{Y}}{4T}$$

5ª $\mathcal{Y} \geq 4T$

Para $\mathcal{Y} \geq 4T$ se tiene: (fig. 4-20)

$$\begin{aligned} R(\mathcal{Y}) = & 0.0 \cdot \frac{1}{256} + 0.1 \cdot \frac{4}{256} + 0.2 \cdot \frac{6}{256} + 0.3 \cdot \frac{4}{256} + 0.4 \cdot \frac{1}{256} + \\ & + 1.0 \cdot \frac{4}{256} + 1.1 \cdot \frac{16}{256} + 1.2 \cdot \frac{24}{256} + 1.3 \cdot \frac{16}{256} + 1.4 \cdot \frac{4}{256} + \\ & + 2.0 \cdot \frac{6}{256} + 2.1 \cdot \frac{24}{256} + 2.2 \cdot \frac{36}{256} + 2.3 \cdot \frac{24}{256} + 2.4 \cdot \frac{6}{256} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ 3.0 \cdot \frac{4}{256} + 3.1 \cdot \frac{16}{256} + 3.2 \cdot \frac{24}{256} + 3.3 \cdot \frac{16}{256} + 3.4 \cdot \frac{4}{256} + \\ &+ 4.0 \cdot \frac{1}{256} + 4.1 \cdot \frac{4}{256} + 4.2 \cdot \frac{6}{256} + 4.3 \cdot \frac{4}{256} + 4.4 \cdot \frac{1}{256} \end{aligned}$$

De donde:

$$R(\mathcal{Y}) = \frac{1024}{256} = 4$$

Para estos valores de \mathcal{Y} , la autocorrelación al igual que la función de densidad, deja de depender de \mathcal{Y} . Esto se debe a que las variables aleatorias $Y(t_1)$ y $Y(t_2)$, en esta parte son independientes.

La función de autocorrelación, en consecuencia estará dada por:

$$R(\mathcal{Y}) = \begin{cases} 5 - \frac{|\mathcal{Y}|}{4T} & \text{para } 0 \leq |\mathcal{Y}| < 4T \\ 4 & \text{para } |\mathcal{Y}| \geq 4T \end{cases} \quad (4-21)$$

El módulo de \mathcal{Y} se debe a que la función de autocorrelación es simétrica.

El gráfico de esta función se muestra en la figura - (4-22)

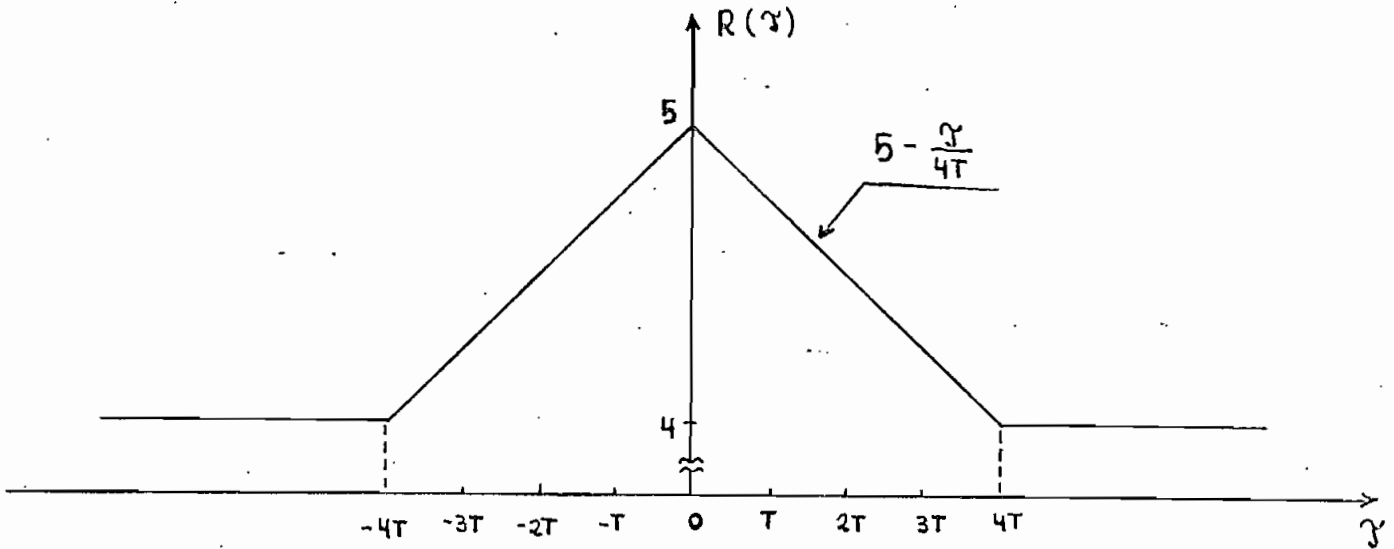


Fig. 4-22

Función de autocorrelación para un proceso de
BERNOULLI

COMENTARIO.

El ejemplo desarrollado se ha escogido entre los más simples de este tipo. Sin embargo, la obtención de resultados ha requerido de un trabajo bastante laborioso, pues ha sido necesario examinar uno por uno los valores de la función de densidad conjunta para cada uno de los intervalos de variación de τ considerado.

Aunque los resultados obtenidos no van a utilizarse, este ejemplo nos proporciona el material suficiente como para sacar algunas conclusiones que pueden aplicarse a o-

tros procesos de este tipo.

4.5.- SIMULACION.

En la figura 4-23 se muestra el diagrama de flujo del programa al que hemos denominado "NUMEROS ALEATORIOS". Este programa simula el registro de corrimiento realimentado con sumador. Sus características principales son :

- 1º N y K son variables, es decir, existe control de la configuración del circuito en lo que se refiere al número de flip-flop y el punto de donde se toma la realimentación.
- 2º Se pueden introducir los coeficientes a_i que se requieran.
- 3º Empieza siempre calculando para el estado 11...1
- 4º Imprime los resultados.

Programa N° 3

NUMEROS ALEATORIOS

(Diagrama de flujo)

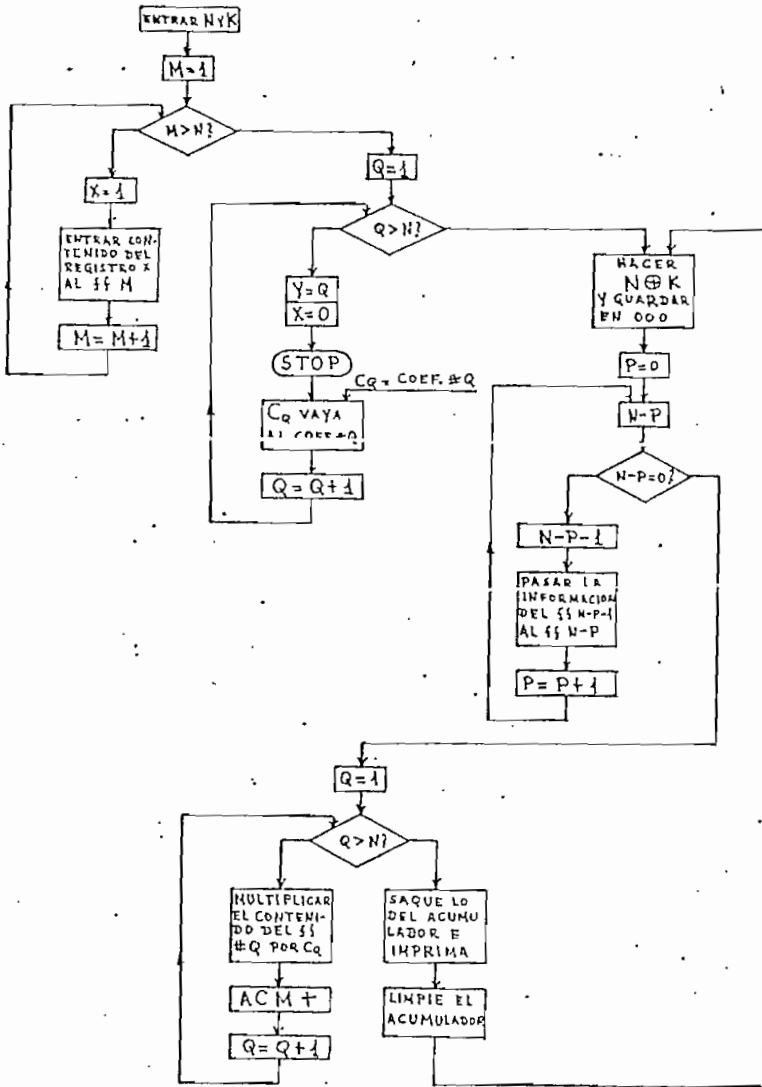


Fig. 4-23

Fig. 4-23

Programa N° 3

NUMEROS ALEATORIOS.

0000--CLE--20	0050--0--00	0100--IND--31	0150--5--05
0001--STP--41	0051--2--03	0101--1--01	0151--0--00
0002--XTO--23	0052--XFR--67	0102--0--00	0152--X=Y--50
0003--1--01	0053--1--01	0103--1--01	0153--0--00
0004--0--00	0054--0--00	0104--UP--27	0154--1--01
0005--0--00	0055--2--02	0105--XFR--67	0155--0--10
0006--STP--41	0056--UP--27	0106--IND--31	0156--4--04
0007--XTO--23	0057--XFR--67	0107--1--01	0157--1--01
0008--1--01	0058--1--01	0108--0--00	0158--1--01
0009--0--00	0059--0--00	0109--3--00	0159--YTO--40
0010--1--01	0060--0--00	0110--X=Y--50	0160--1--01
0011--1--01	0061--XKY--52	0111--0--00	0161--0--00
0012--XTO--23	0062--0--00	0112--1--01	0162--6--06
0013--1--01	0063--0--00	0113--2--02	0163--XFR--67
0014--0--00	0064--9--11	0114--5--05	0164--IND--31
0015--2--02	0065--8--10	0115--1--01	0165--1--01
0016--XFR--67	0066--2--02	0116--XTO--23	0166--0--00
0017--1--01	0067--0--00	0117--0--00	0167--6--06
0018--0--00	0068--+-33	0118--0--00	0168--XTO--23
0019--2--02	0069--YTO--40	0119--0--00	0169--IND--31
0020--UP--27	0070--1--01	0120--KTO--44	0170--1--01
0021--XFR--67	0071--0--00	0121--0--00	0171--0--00
0022--1--01	0072--3--03	0122--1--01	0172--5--05
0023--0--00	0073--0--00	0123--3--03	0173--1--01
0024--0--00	0074--UP--27	0124--1--01	0174--XTO--23
0025--XKY--52	0075--UP--27	0125--CNT--47	0175--+-33
0026--0--00	0076--XFR--67	0126--0--00	0176--1--01
0027--0--00	0077--1--01	0127--XTO--23	0177--0--00
0028--4--04	0078--0--00	0128--0--00	0178--4--04
0029--6--06	0079--2--02	0129--0--00	0179--GTO--44
0030--1--01	0080--RUP--22	0130--0--00	0180--0--00
0031--XTO--23	0081--STP--41	0131--CNT--47	0181--1--01
0032--IND--31	0082--XTO--23	0132--0--00	0182--3--03
0033--1--01	0083--IND--31	0133--XTO--23	0183--7--07
0034--0--00	0084--1--01	0134--1--01	0184--CNT--47
0035--2--02	0085--0--00	0135--0--00	0185--1--01
0036--XTO--23	0086--3--03	0136--4--04	0186--XTO--23
0037--+-33	0087--1--01	0137--XFR--67	0187--1--01
0038--1--01	0088--XTO--23	0138--1--01	0188--0--00
0039--0--00	0089--+-33	0139--0--00	0189--2--02
0040--2--02	0090--1--01	0140--0--00	0190--XFR--67
0041--GTO--44	0091--0--00	0141--UP--27	0191--1--01
0042--0--00	0092--2--02	0142--XFR--67	0192--0--00
0043--0--00	0093--GTO--44	0143--1--01	0193--0--00
0044--1--01	0094--0--00	0144--0--00	0194--UP--27
0045--6--06	0095--0--00	0145--4--04	0195--XFR--67
0046--CNT--47	0096--5--05	0146--+-33	0196--1--01
0047--1--01	0097--2--02	0147--YTO--40	0197--0--00
0048--XTO--23	0098--CNT--47	0148--1--01	0198--2--02
0049--1--01	0099--XFR--67	0149--0--00	0199--XKY--53
0050--0--00	0100--IND--31	0150--5--05	0200--0--00
0051--2--02	0101--1--01	0151--0--00	0201--2--02
0052--XFR--67	0102--0--00	0152--X=Y--50	0202--3--03

Tabla 4-1.

Programa N° 3

NUMEROS ALEATORIOS.

(Continuación)

0200	-- 0	---	00
0201	-- 2	---	02
0202	-- 3	---	03
0203	-- 6	---	06
0204	-- UP	---	27
0205	-- 2	---	02
0206	-- 0	---	00
0207	-- +	---	33
0208	-- YTO	---	40
0209	-- 1	---	01
0210	-- 0	---	00
0211	-- 3	---	03
0212	-- XFR	---	67
0213	-- IND	---	31
0214	-- 1	---	01
0215	-- 0	---	00
0216	-- 2	---	02
0217	-- UP	---	27
0218	-- XFR	---	67
0219	-- IND	---	31
0220	-- 1	---	01
0221	-- 0	---	00
0222	-- 3	---	03
0223	-- X	---	36
0224	-- E	---	60
0225	-- 1	---	01
0226	-- XTO	---	23
0227	-- +	---	33
0228	-- 1	---	01
0229	-- 0	---	00
0230	-- 2	---	02
0231	-- GTO	---	44
0232	-- 0	---	00
0233	-- 1	---	01
0234	-- 9	---	11
0235	-- 0	---	00
0236	-- CNT	---	47
0237	-- C	---	61
0238	-- DH	---	25
0239	-- PHT	---	45
0240	-- CNT	---	47
0241	-- CLR	---	20
0242	-- GTO	---	44
0243	-- 0	---	00
0244	-- 0	---	00
0245	-- 9	---	11
0246	-- 8	---	10
0247	-- EHD	---	46

Tabla 4-1 (Continuación)

El programa, tal como se debe poner en la máquina se muestra en la tabla 4-1 y consta de 247 pasos de programación.

RESULTADOS.

En las tablas 4-2 y 4-3 se muestran los resultados obtenidos para el caso de seis flip-flop.

En la tabla 4-2, columna de la izquierda se han escogido los coeficientes $a_i = 1, 2, 4, 8, 16, 32$; de modo que $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 4$, $a_4 = 8$, $a_5 = 16$, $a_6 = 32$. Estos coeficientes son las sucesivas potencias de 2^n .

El resultado obtenido es el que esperábamos; si estudiamos la tabla, veremos que dentro de un período no se repita ningún valor. En consecuencia, podemos afirmar, que en este proceso, dentro de un período todos los valores tienen la misma probabilidad de ocurrir y, por lo tanto la función de densidad es uniforme discreta.

En la columna de la derecha se ha cambiado el orden de los coeficientes a_i . Estadísticamente esto es equivalente a lo anterior, pues no se observa variación alguna en la distribución de los pulsos, lo único que se ha cambiado es su orden.

La tabla 4-3 muestra un caso que es de interés para nosotros, como veremos posteriormente. La columna de la izquierda muestra los resultados para $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 4$, $a_5 = 5$, $a_6 = 6$.

En la columna de la derecha se ha cambiado un poco el orden de los coeficientes. Como en el caso anterior, estadísticamente los resultados son equivalentes.

Las tablas 4-4, 4-5, 4-6, 4-7, 4-8 son explicativas por sí mismas.

En la tabla 4-9, en la primera columna se muestran los resultados haciendo $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = 1$, como ya se ha visto, esta es la forma de obtener la densidad binomial.

En las columnas 2, 3 y 4 se utilizan los coeficientes a_i para obtener una función de densidad uniforme discreta, sin embargo, aquí se han introducido ceros. Cada factor cero introducido hace indistinguible la mitad de los resultados, de modo que con el primer cero introducido, cada número se repite dos veces, con el segundo cuatro y con el tercero ocho. De este modo se ha logrado cambiar las probabilidades de las salidas experimentales, de tal modo que ahora se tiene otra función de densidad. Desde luego que la función de densidad continúa siendo uniforme.

La única discrepancia se presenta en la ocurrencia del evento cero, que en todos los casos aparece una vez menos que cualquier otro evento; esto se debe a la no existencia de la salida 000000 en este caso de seis flip-flop.

En las figuras 4-24, 4-25 y 4-26 se presentan varios resultados que se han obtenido eligiendo varios conjuntos de coeficientes a_i . Todos los casos son para $N = 6$ y $K = 5$ a excepción del caso que aparece en la figura 4-24b que es para $N = 8$ y $K = 7$.

Fig. 4-24a. Aquí se ha dado a los coeficientes a_i - valores que corresponden a los coeficientes del binomio de Newton. La función de densidad es simétrica y no pertenece a ninguna de las funciones conocidas. La única discrepancia se presenta en la no existencia del correspondiente valor de probabilidad para $x = 0$.

Fig. 4-24b. Los coeficientes a_i tienen los valores de los coeficientes del binomio; el caso corresponde a $N=8$ y $K = 7$. Se observa que la densidad es asimétrica. Esto se explica por el hecho de que para este caso no tenemos la totalidad de estados; esto es 217 en lugar de 256.

Fig. 4-24c. Los coeficientes se han escogido en forma simétrica. Crecientes según la serie de los números naturales hasta 3 y decrecientes desde 3. La densidad es simétrica, el único valor que discrepa es el de cero.

Fig. 4-25a. El caso es similar al anterior, sólo que ahora empezamos con cero. Ahora tenemos un valor de probabilidad para cero, pero es menor que el que debería -

corresponderle para que la densidad sea simétrica.

Fig. 4-25b. Los coeficientes a_i son ahora crecientes según la serie de los números naturales partiendo de cero hasta cinco. La densidad es simétrica excepto por el valor de $x = 0$.

Fig. 4-25c. Lo mismo que la anterior, sólo que ahora los coeficientes van del uno al seis. Cambian el valor medio y la varianza de la distribución. Se observa un alsamiento de la envolvente.

Fig. 4-26a. Los coeficientes a_i son ahora crecientes según la serie de los números naturales, partiendo del cinco hasta el 10. Se observa que cambian el valor medio y la varianza, la densidad es notablemente más dispersa, aunque x toma un número mayor de valores.

Los valores de x en 15 y 30 empiezan a mostrar otra tendencia en el comportamiento de estas densidades.

Fig. 4-26b. Coeficientes del 10 al 15; aunque simétrica, con la salvedad hecha anteriormente, la función de densidad presenta ahora condensaciones de sus valores. Algunos valores intermedios han desaparecido.

Fig. 4-26c. Coeficientes del 20 al 25. Continúa simétrica, la condensación se acentúa, la tendencia se man -

tiene.

Fig. 4-26d. Coeficientes 1,2,4,8,16,32. Son las sucesivas potencias de 2. La densidad es uniforme y falta el valor cero. Cada valor aparece una sola vez con probabilidad de ocurrir 0,0158.

Fig. 4-26e. Coeficientes 0,1,2,4,8,16. La inclusión del cero trae como consecuencia que disminuyan los posibles valores de X, pero que cada valor aparezca dos veces con probabilidad 0,0316. El cero aparece una sola vez. El valor medio y la varianza han disminuído.

Fig. 4-26f. Coeficientes: 1/4, 1/2, 1,2,4,8. Se obtiene una densidad uniforme. No hay valor de probabilidad para $X=0$, cada evento ocurre una sola vez. El valor medio y la varianza han disminuído.

CONCLUSIONES.

El análisis de estos resultados experimentales nos permite concluir lo siguiente:

1^a Al parecer no es posible obtener una densidad asimétrica con la sola variación de los coeficientes a_i (se exceptúan los valores de $X=0$) para aquellos casos en que se generan la totalidad de estados posibles menos uno. Las densidades asimétricas sólo aparecen en aquellos casos en-

que no se genera la totalidad de estados como el de 8 flip-flop, pero no existe ningún tipo de control sobre la densidad resultante.

2ª La obtención de las densidades uniformes discretas nos abre la puerta hacia la generación de otros procesos estocásticos en los que se pueda controlar el tipo de densidad resultante. En efecto, si $Y = g(X)$ es una variable aleatoria, función de la variable aleatoria X . Sus densidades respectivas se encuentran relacionadas por la ecuación diferencial:

$$f_X(x) dx = f_Y(y) dy \quad (4-22)$$

Si $f_X(x)$ es una densidad uniforme continua; entonces $f_X(x)$ es una constante K dentro de un intervalo $a < x < b$.

En consecuencia, para este intervalo

$$K dx = f_Y(y) dy \quad a < x < b$$

Y

$$x = \frac{1}{K} \int f_Y(y) dy \quad (4-23)$$

Pero la integral no es otra cosa que la función de distribución de Y . Por lo tanto:

$$x = \frac{1}{K} F_Y(y) + C \quad (4-24)$$

El caso discreto se demuestra en forma parecida haciendo uso de la función impulso.

Este resultado nos permite concluir, que si queremos generar un proceso consistente en un tren de pulsos aleatorios que tenga una densidad determinada, deberemos hacer pasar nuestros pulsos con densidad uniforme a través de un circuito cuya relación de transferencia sea la función de distribución del proceso que queremos obtener.

Algunos intentos se hicieron en este sentido, pero se llegó a la conclusión de que la implementación de tal circuito era tarea bastante complicada, mucho más allá de lo que se ha pretendido con el presente trabajo de tesis.

$M = 7 ; K = 6$

$C_p: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64.$

126.	14.	127.
124.	28.	126.
120.	56.	124.
112.	112.	
96.	224.	
64.	448.	
1.	896.	
2.	1792.	
4.	3584.	
8.	7168.	
16.	14336.	
32.	28672.	
64.	57344.	
128.	114688.	
256.	229376.	
512.	458752.	
1024.	917504.	
2048.	1835008.	
4096.	3670016.	
8192.	7340032.	
16384.	14680064.	
32768.	29360128.	
65536.	58720256.	
131072.	117440512.	
262144.	234881024.	
524288.	469762048.	
1048576.	939524096.	
2097152.	1879048192.	
4194304.	3758096384.	
8388608.	7516192768.	
16777216.	15032385536.	
33554432.	30064771072.	
67108864.	60129542144.	
134217728.	120259084288.	
268435456.	240518168576.	
536870912.	481036337152.	
1073741824.	962072674304.	
2147483648.	1924145348608.	
4294967296.	3848290697216.	
8589934592.	7696581394432.	
17179869184.	15393162788864.	
34359738368.	30786325577728.	
68719476736.	61572651155456.	
137438953472.	123145302310912.	
274877906944.	246290604621824.	
549755813888.	492581209243648.	
1099511627776.	985162418487296.	
2199023255552.	1970324836974592.	
4398046511104.	3940649673949184.	
8796093022208.	7881299347898368.	
17592186044416.	15762598695796736.	
35184372088832.	31525197391593472.	
70368744177664.	63050394783186944.	
140737488355328.	126100789566373888.	
281474976710656.	252201579132747776.	
562949953421312.	504403158265495552.	
1125899906842624.	1008806316530991104.	
2251799813685248.	2017612633061982208.	
4503599627370496.	4035225266123964416.	
9007199254740992.	8070450532247928832.	
18014398509481984.	16140901064495857664.	
36028797018963968.	32281802128991715328.	
72057594037927936.	64563604257983430656.	
14411518807585584.	129127208515966861312.	
28823037615171168.	258254417031933722624.	
57646075230342336.	516508834063867445248.	
115292150460684672.	1033017668127734890496.	
230584300921369344.	2066035336255469780992.	
461168601842738688.	4132070672510939561984.	
922337203685477376.	8264141345021879123968.	
1844674407370954752.	16528282690043758247936.	
3689348814741909504.	33056565380087516495872.	
7378697629483819008.	66113130760175032991744.	
14757395258967638016.	132226261520350065983488.	
29514790517935276032.	264452523040700131966976.	
59029581035870552064.	528905046081400263933952.	
118059162071741104128.	1057810092162800527867904.	
236118324143482208256.	2115620184325601055735808.	
472236648286964416512.	42312403686512021114711616.	
9444732965739288321024.	84624807373024042229423232.	
18889465931478576641024.	169249614746048084458846464.	
37778931862957153281024.	33849922949209616891768928.	
75557863725914306561024.	67699845898419233783537856.	
151115727451828613121024.	135399691796838467567075712.	
302231454903657226241024.	270799383593676935134151424.	
604462909807314452481024.	541598767187353870268302848.	
1208925819614688904961024.	108319753437470774053660576.	
2417851639229377809921024.	216639506874941548107321152.	
4835703278458755619841024.	433279013749883096214642304.	
9671406556917511238881024.	866558027499766192429284608.	
19342813113835022477761024.	1733116054999532384858569216.	
38685626227670044955521024.	3466232109999064769717184384.	
77371252455340089911041024.	693246421999812953943436768.	
154742504910680179822081024.	1386492843999625907886873536.	
3094850098213603596441024.	2772985687999251815773747072.	
61897001964272071928881024.	5545971375998503631546494144.	
12379400392854414357761024.	11091942751997007263092988288.	
24758800785708828715521024.	22183885503994014526185976576.	
49517601571417657431041024.	44367771007988029052371953152.	
99035203142835314862081024.	88735542015976058104743906304.	
19807040628567062924161024.	177471084031952116209487812608.	
39614081257134125848321024.	354942168063904232418975525216.	
79228162514268251676641024.	709884336127808464837951050432.	
158456325028536503433281024.	141976867225561692675590200864.	
316912650057073006866561024.	283953734451123385351180401728.	
633825300114146013733121024.	567907468902246770702360803456.	
126765060022829202666241024.	1135814937804493541404721606912.	
253530120045658405332481024.	2271629875608987082809443213824.	
5070602400913168106664961024.	4543259751217974165618886427648.	
10141204801826336213332961024.	9086519502435948311237773255392.	
20282409603652672426665921024.	18173039004871896622475546510784.	
40564819207305344933331841024.	3634607800974379324495109111568.	
81129638414610689866663681024.	7269215601948758648990218223136.	
162259276829221379333327361024.	1453843120389751729798043644272.	
324518553658442758666654721024.	2907686240779503459596087288544.	
6490371073168855173333109441024.	5815372481559006919192174577088.	
1298074214637710346666218881024.	11630744963118013838384349154176.	
2596148429275420693333437761024.	23261489926236027676768698288352.	
5192296858550841386666875521024.	4652297985247205535353739717056.	
1038459371710168773333751041024.	9304595970494411070707479434112.	
2076918743420337546667502081024.	18609191940988822141414948688224.	
4153837486840675093335004161024.	37218383881977644282828977376448.	
8307674973681350186661000961024.	74436767763955288565657954752896.	
1661534994736270037332001921024.	148873535527910577131315911519392.	
3323069989472540074664003841024.	29774707105582115426262822038688.	
66461399789450801493328007681024.	59549414211164230852525644077376.	
13292279957890160298665615361024.	11909882842232846170505128915456.	
265845599157803205973310721024.	238197656844656923410010230810912.	
5316911983156064119546621441024.	47639531368931384682002046161824.	
10633823966312128390933282881024.	95279062737862769364004092323648.	
212676479326242567818666565761024.	190558125475725538728008184647296.	
4253529586524851363733311521024.	381116250951451077456016369294592.	
8507059173049702727466623041024.	7622325019029021549120327178896.	
1701411834609940545493346081024.	15244650038058042998240654357792.	
3402823669219881090986692161024.	30489300076116085996481310715584.	
68056473384397621819733384321024.	609786001522321719929726214311168.	
136112946768795243598666726641024.	121957200304464343985944428622336.	
27222589353759048717733345281024.	243914400608928687971888857244672.	
54445178707518097435466690561024.	48782880121785737594377771448944.	
10889035741503619486933381121024.	97565760243571475188755542897888.	
217780714830072389738666642241024.	19513152048714295037751109797776.	
435561429660144779477333284481024.	39026304097428590075502219599552.	
87112285932028955895466568961024.	78052608194857180151004439199104.	
1742245187640579117910933377921024.	15610521638971436030200878399808.	
3484490375281158235818666755841024.	31221043277942872060401757799616.	
69689807505623165717333511681024.	62442086555885744120803515599532.	
13937961501124331144366610371024.	124884173111771482417607131999064.	
27875923002248662288733320741024.	2497683462235429648352143999808.	
557518460044973257774666414881024.	4995366924470859296704287999616.	
11150372400899465555533328961024.	9990733848941718593408575999232.	
223007448017999311111066657921024.	19981467697883437186880115998464.	
446014896035998622222133311521024.	39962935395766874377763191996928.	
89202979207199724444266623041024.	79925870791533748755526383993856.	
17840595841439448888533346081024.	159851741583067495511105267987712.	
35681191682878897777066692161024.	31970348316613499102201055757544.	
71362383365757795554133318321024.	63940696633226998204402111111088.	
142724766731515591111066636641024.	1278813932664539964088042222221728.	
2854495334630311822222133373281024.	2557627865329079928176084444443456.	
5708990669260623644444266614561024.	51152557306581598553521688886912.	
114179813385212472888853329121024.	102305114613173971111071377773824.	
228359626770424947777066658241024.	2046102292263479422222133327072.	
456719253540849895554133311521024.	4092204584526958844444266654144.	
913438507081699791111066623041024.	8184409169053917688889333108288.	
1826877014163399582222133346081024.	16368818338107835377778666216576.	
3653754028326799164444266692161024.	32737636676215670755557333431152.	
730750805665359822888853318321024.	65475273352431341511110666862304.	
1461501611330719657777066636641024.	1309505467048626830222213337248.	
2923003222661439315554133311521024.	2619010934097253660444426661456.	
5846006445322878631111066623041024.	523802186819450732088893332912.	
1169201289064575726222133346081024.	1047604373639001464177786665824.	
23384025781291514524444266611521024.	209520874727800292835573331152.	
4676805156258302904888853329121024.	419041749455600585671146662304.	
9353610312516605809777066658241024.	83808349891120117134222213334608.	
18707220625033211619554133311521024.	167616699782240234268444426661152.	
374144412500664232391111066623041024.	33523339956448046853688893332912.	
748288825001328464782222133346081024.	67046679912896093707377786665824.	
14965776500265692961777066611521024.	1340933592257921874155573331152.	
2993155300053138583554133311521024.	2681867184515843748311106662304.	
59863106000106371771111066623041024.	5363734369031687496622213334608.	
11972621200021275354444266611521024.	10727468738063374933444426661152.	
2394524240004255070888853329121024.	2145493747612674986688893332912.	
4789048480008510141777066658241024.	4290987495225349973377786665824.	
9578096960017020283554133311521024.	858197499045069994675573331152.	
191561939200340405671111066623041024.	1716394998090139993351106662304.	
38312387840068081134444266611521024.	3432789996180279986622213334608.	
766247756801361622688853329121024.	68655799923605599733444426661152.	
1532495136027232453777066658241024.	13731159947321119946688893332912.	
3064990272054464907554133311521024.	27462319894642239893377786665824.	
6129980544108898151111066623041024.	54924639789284479786673331152.	
1225996108821779632222133346081024.	109849279578568959573331152.	
2451992217643559264444266611521024.	219698559157137919	

N = 8 ; K = 5

C_F: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

35	28	15	8
33	29	9	11
30	26	11	14
28	22	13	18
21	27	6	14
16	23	7	18
11	19	8	13
6	15	1	16
9	11	2	20
12	16	3	15
18	21	4	16
21	27	5	13
27	24	7	8
25	38	9	12
23	27	11	16
20	24	5	20
26	28	7	15
33	16	18	19
31	21	13	24
28	18	16	21
25	24	10	18
21	22	12	15
16	29	15	21
19	27	10	28
14	34	13	36
8	32	8	35
10	29	11	33
12	25	15	30
6	21	26	
5	17	25	
12	11	21	
15	14	17	
10	9	22	
14	13	18	
12	17	22	
24	22	18	
21	19	13	
17	25	17	
22	22	21	
28	27	17	
26	23	12	
23	18	15	
20	22	19	
26	18	15	
23	14	20	
29	10	17	
27	14	22	
24	19	18	
20	25	23	
24	32	29	
19	30	26	
13	28	23	
15	25	20	
9	21	16	
3	26	21	
5	23	26	
7	19	22	
9	15	17	
12	19	26	
16	14	14	
20	16	8	
16	22	10	
12	17	4	
17	12	6	

Tabla 4-8.

$N=6; K=5$ $\alpha_i=1$	$N=6; K=5$ $\alpha_i: 0,1,2,4,5,16$	$N=6; K=5$ $\alpha_i: 0,0,1,2,4,5$	$N=6; K=5$ $\alpha_i: 0,0,0,1,4,5$
1.0000	16.0000	8.00	2.00
1.0000	8.0000	0.00	0.00
1.0000	1.0000	0.00	0.00
1.0000	2.0000	1.00	0.00
1.0000	4.0000	2.00	1.00
1.0000	8.0000	4.00	4.00
2.0000	16.0000	8.00	2.00
2.0000	1.0000	0.00	0.00
2.0000	3.0000	1.00	0.00
2.0000	6.0000	3.00	1.00
2.0000	12.0000	6.00	5.00
3.0000	24.0000	12.00	6.00
2.0000	17.0000	8.00	2.00
2.0000	2.0000	1.00	0.00
2.0000	5.0000	2.00	1.00
2.0000	10.0000	5.00	4.00
3.0000	20.0000	10.00	3.00
3.0000	9.0000	4.00	4.00
4.0000	19.0000	9.00	2.00
4.0000	7.0000	3.00	7.00
4.0000	15.0000	7.00	5.00
5.0000	30.0000	15.00	7.00
4.0000	29.0000	14.00	7.00
3.0000	26.0000	13.00	6.00
2.0000	20.0000	10.00	3.00
2.0000	8.0000	4.00	4.00
3.0000	17.0000	8.00	2.00
3.0000	3.0000	1.00	0.00
2.0000	7.0000	3.00	1.00
3.0000	14.0000	7.00	5.00
4.0000	28.0000	14.00	7.00
3.0000	25.0000	12.00	6.00
2.0000	18.0000	9.00	2.00
2.0000	4.0000	2.00	1.00
2.0000	9.0000	4.00	4.00
3.0000	18.0000	9.00	2.00
3.0000	5.0000	2.00	1.00
3.0000	11.0000	5.00	4.00
4.0000	22.0000	11.00	3.00
4.0000	13.0000	6.00	5.00
5.0000	27.0000	13.00	6.00
4.0000	23.0000	11.00	3.00
4.0000	14.0000	7.00	5.00
5.0000	29.0000	14.00	7.00
4.0000	27.0000	13.00	6.00
3.0000	22.0000	11.00	3.00
3.0000	12.0000	6.00	5.00
4.0000	25.0000	12.00	6.00
3.0000	19.0000	9.00	2.00
3.0000	6.0000	3.00	1.00
3.0000	13.0000	6.00	5.00
4.0000	26.0000	13.00	6.00
3.0000	21.0000	10.00	3.00
3.0000	10.0000	5.00	4.00
4.0000	21.0000	10.00	3.00
4.0000	11.0000	5.00	4.00
5.0000	23.0000	11.00	3.00
5.0000	15.0000	7.00	5.00
6.0000	31.0000	15.00	7.00
5.0000	31.0000	15.00	7.00
4.0000	30.0000	15.00	7.00
3.0000	28.0000	14.00	7.00
2.0000	24.0000	12.00	6.00
1.0000	16.0000	8.00	2.00
1.0000	8.0000	0.00	0.00
	1.0000	0.00	0.00

Tabla 4-9

Resultados para la densidad binomial y efecto sobre la función de densidad por la introducción de coeficientes cero.

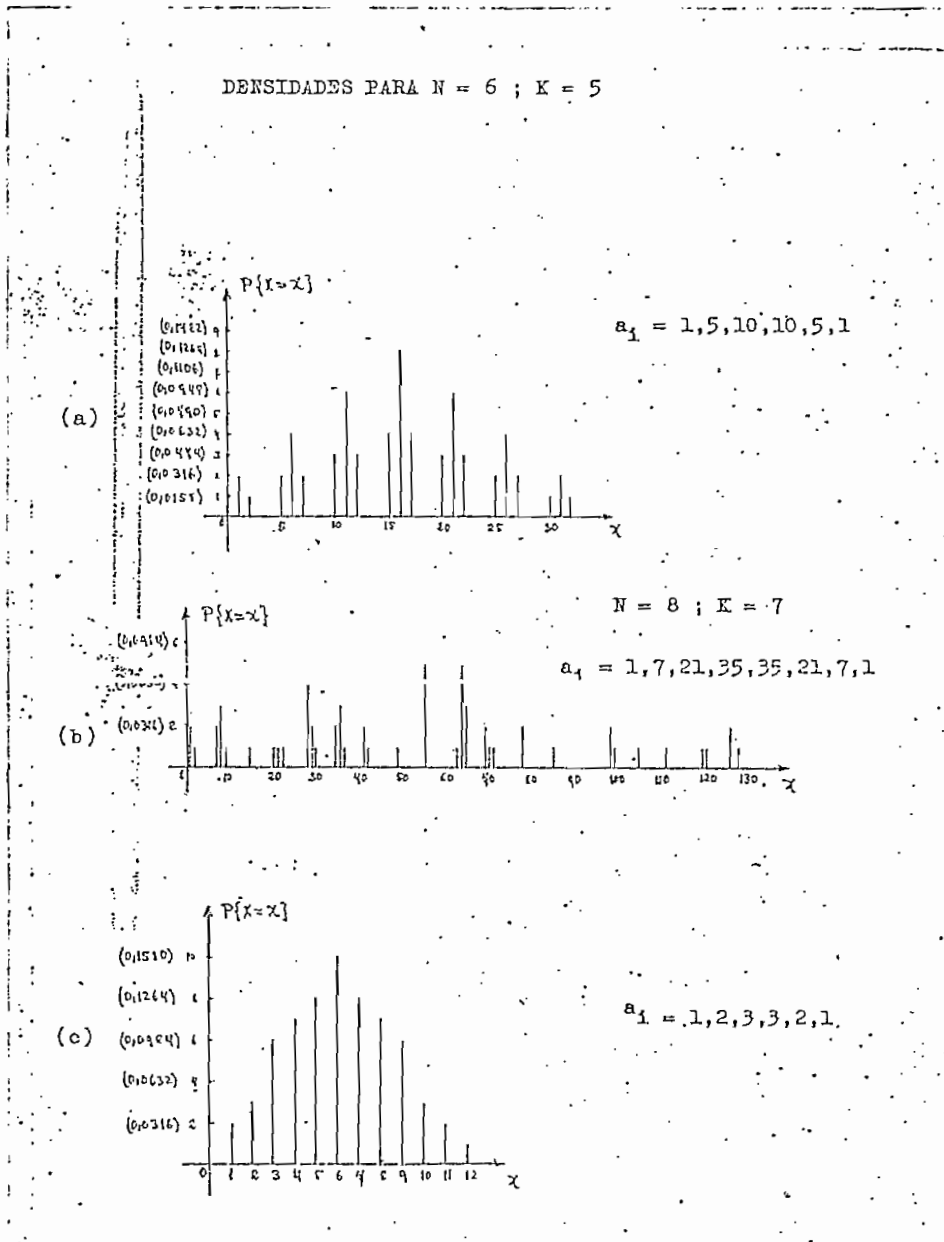


Fig. 4-24.

DENSIDADES PARA $N = 6$; $K = 5$

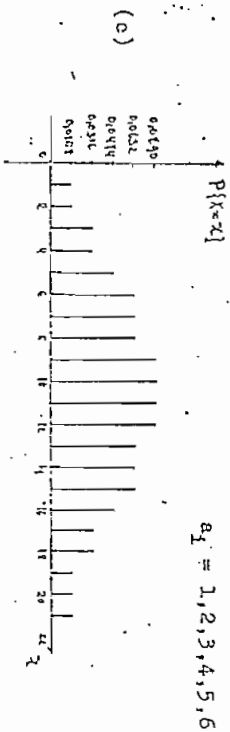
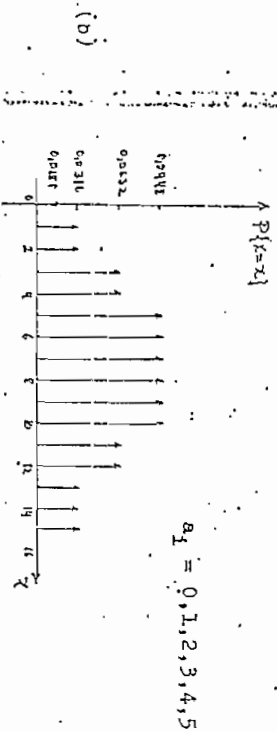
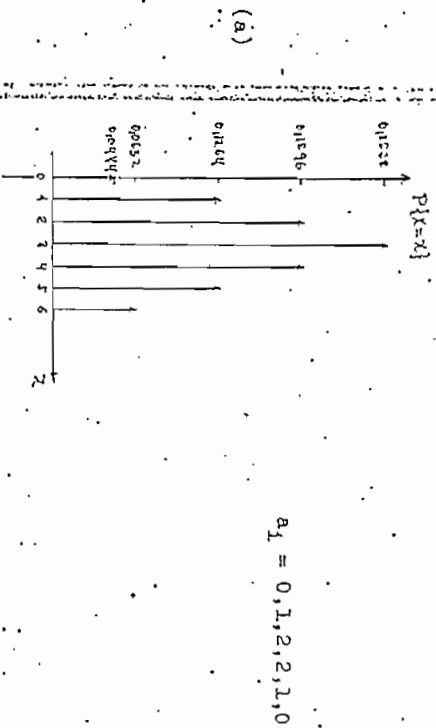


Fig. 4-25

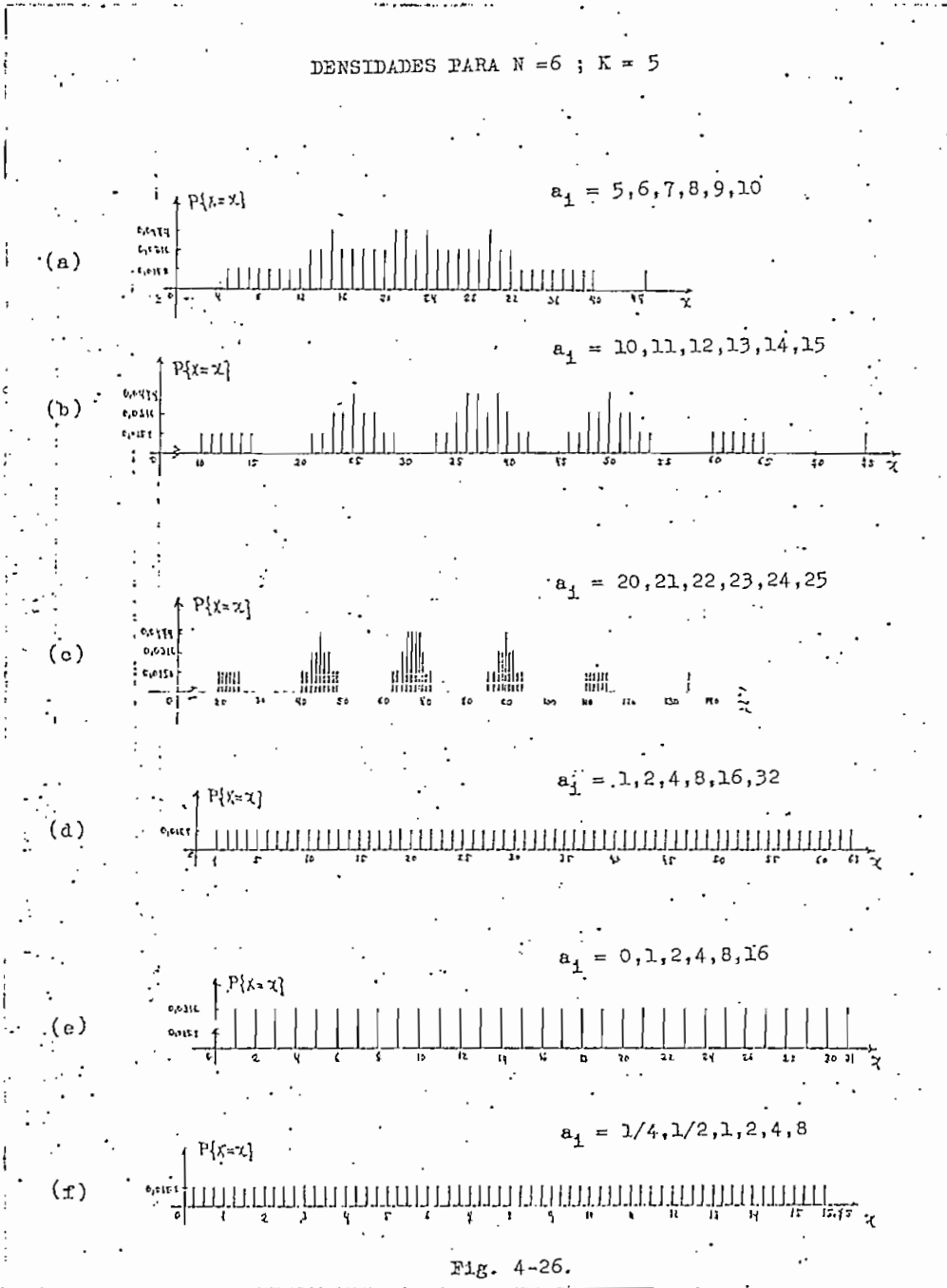


Fig. 4-26.

Fig. 4-26

AUTOCORRELACION:

A continuación presentamos algunos resultados experimentales para la función de autocorrelación que se obtuvieron haciendo uso del programa N° 2 en la calculadora programable. La tabla 4-10 muestra los resultados obtenidos para el ejemplo que se desarrolló teóricamente en el apartado anterior. Se trata entonces de la autocorrelación de una onda periódica generada por un registro de corrimiento realimentado, que consta de cuatro flip-flop. Las ganancias en el sumador son todas iguales a 1.

La columna inferior muestra los valores del proceso $Y(t) = X_1(t) + X_2(t) + X_3(t) + X_4(t)$, mientras que las superiores los valores de la función de autocorrelación cuando se introdujeron a la máquina 15, 30, y 60 muestras, respectivamente.

En la figura 4-27 se han grafizado estos resultados, a la vez que se ha dibujado la función de autocorrelación que en forma teórica se obtuviera en el apartado anterior.

Se observa lo siguiente:

1ª La dependencia de los valores de $Y(t)$ se extiende durante cuatro intervalos de pulsos de reloj, en ambos casos. Esto es, la función de autocorrelación depende de τ durante este lapso hasta tomar un valor constante, lo cual es una-

indicación de que el fenómeno se hace independiente de \mathcal{J} .

2ª La pendiente de la recta dentro de los cuatro intervalos es prácticamente la misma.

3ª La curva experimental se encuentra desplazada en sentido vertical con respecto a la curva teórica. Esto, naturalmente se debe a la no existencia del estado 0000 en el conjunto de flip-flop, lo que a su vez es causa de que cambien las probabilidades de nuestras salidas experimentales, que en lugar de ser $1/16$ son ahora $1/15$. Además, en la densidad de segundo orden faltarán eventos de la forma $\{0, v_i\}$, $\{v_i, 0\}$, $\{0, 0\}$. Por último, la función de autocorrelación, a causa de lo anotado anteriormente presenta la anomalía que se hace patente en el gráfico.

La tabla 4-12 muestra otras funciones de autocorrelación obtenidas experimentalmente para el caso de seis flip-flop.

La columna (a) es para ganancias en el sumador de 1, 2, 4, 8, 16, 32, que como sabemos nos da como resultado una función de densidad uniforme discreta.

En la columna (b) se utilizan las mismas ganancias, lo único que se ha alterado es el orden.

Según se desprende de un examen de la tabla 4-2 ocurren los mismos eventos, con las mismas probabilidades en ambos casos. Es decir, que las funciones de densidad de primer orden son idénticas. En cuanto a las funciones de densidad de segundo orden que son dependientes del parámetro γ es de esperar que aparezcan diferencias a causa de la diferente ubicación de las ganancias, pues la probabilidad de ocurrencia de un determinado evento estará alterada a causa de ello. En otras palabras, la probabilidad del evento $\{Y(t_1) = y_1, Y(t_2) = y_2\}$ no puede ser la misma en general para ambos casos dentro del intervalo en que esta probabilidad es dependiente del parámetro γ . Si las funciones de densidad de segundo orden son diferentes, es natural que las funciones de autocorrelación sean también diferentes.

En efecto, la figura 4-28 así lo muestra. La curva (a) es la función de autocorrelación para las ganancias 1, 2, 4, 8, 16, 32, en tanto que la curva (b) es la misma función para las ganancias 1, 8, 4, 32, 2, 16.

En ambos casos, la dependencia de γ se extiende hasta que γ ha alcanzado el valor $6T$, que es el punto para el cual las variables aleatorias $Y(t_1)$ y $Y(t_2)$ son independientes como era de esperar, según se desprende del modelo teórico que se desarrolló en el apartado anterior.

La forma de la curva (a) es, sin embargo sorprendente. Su forma es prácticamente exponencial como lo demuestra la figura 4-29, en la que junto a esta curva se ha dibujado una curva exponencial con ecuación:

$$Y(\gamma) = 1354,667 + 346,667 \text{ Exp}\left[-\frac{\gamma}{1,441165}\right]$$

Para su determinación se utilizaron, el valor máximo, el valor para $\gamma = T$ y el valor para el cual la función de autocorrelación deja de depender de γ .

Se observa que las dos curvas prácticamente coinciden.

Analizar el significado de esto no es fácil, sin embargo, a manera de ilustración mencionaremos que en un proceso de Poisson tal como la señal telegráfica aleatoria aparece una función de autocorrelación de este tipo.

Este estudio presenta perspectivas interesantes, pero dada la extensión que ya tiene el presente trabajo, muy a pesar nuestro lo dejaremos de lado.

Con el objeto de establecer comparaciones, damos a continuación los valores de la función exponencial y los valores de la función de autocorrelación a la que hacemos referencia.

λ	EXPONENCIAL	AUTOCORRELACION
0	1354,667000	1354,667000
T	1181,206000	1181,206000
2T	1094,539297	1094,349000
3T	1051,237820	1050,667000
4T	1029,603008	1028,317000
5T	1018,793559	1016,127000
6T	1013,892816	1008,000000
7T	1010,694421	1008,000000
8T	1009,346220	1008,000000
9T	1008,672615	1008,000000
10T	1008,336060	1008 000000
11T	1008,167906	1008,000000
12T	1008,083891	1008,000000
13T	1008,041915	1008,000000
14T	1008,020942	1008,000000
15T	1008,010463	1008,000000

En la tabla 4-12, las columnas (c) y (d) nos dan la función de autocorrelación para las ganancias que se indican. Las ganancias en ambos casos muestran tan solo una diferencia de ubicación. Los resultados se grafican en la figura 4-30. La curva (a) es para los coeficientes 1,2,3,4,5,6; y la curva (b) para los coeficientes 6,1,3,2,4,5.

A excepción de la aproximación a una curva exponencial son valederas, también para este caso las observaciones hechas para el caso anterior.

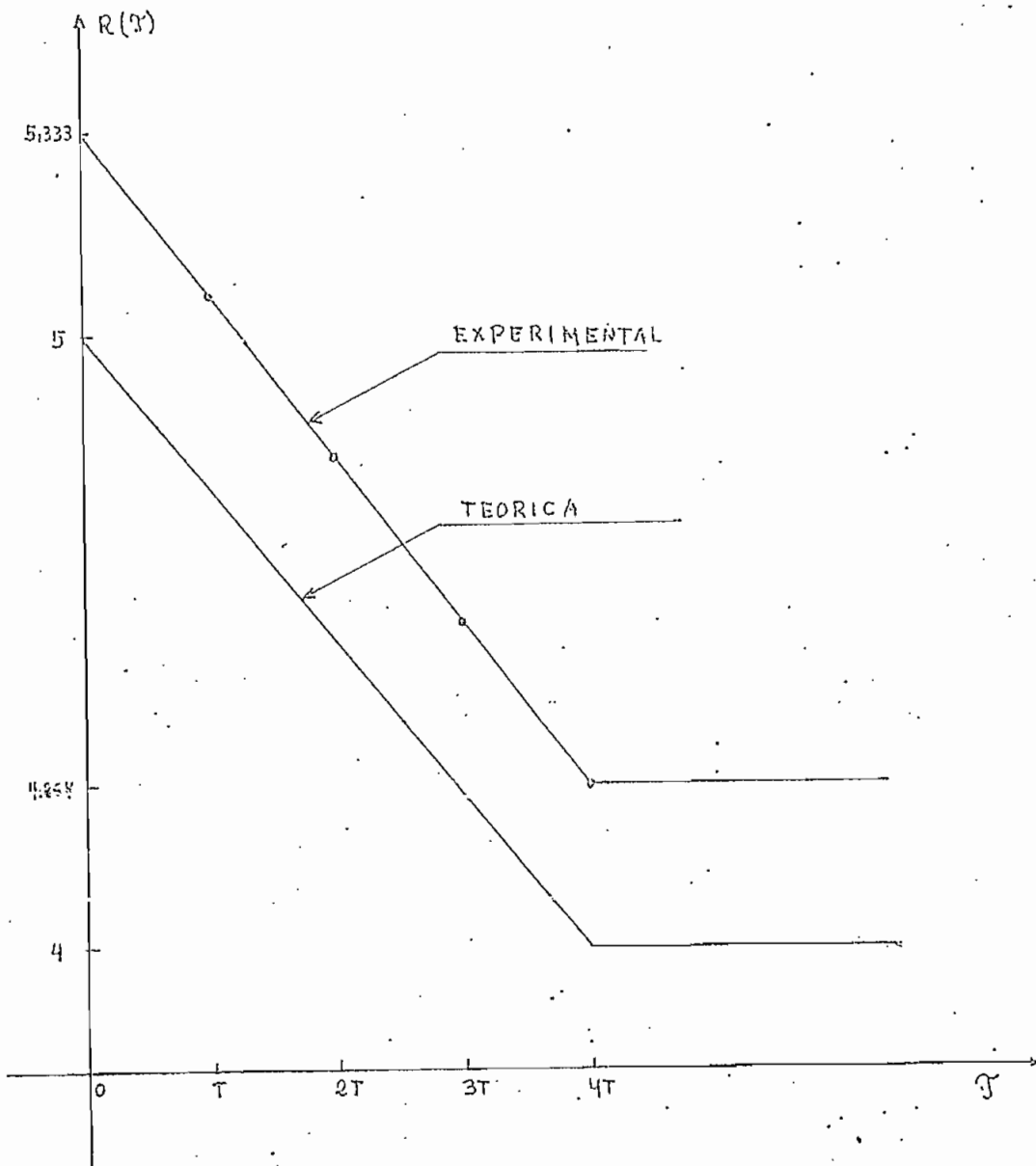


FIG. 4-27

Comparación entre las funciones de autocorrelación teórica y experimental para el caso desarrollado en el apartado 4-4 (Proceso de Bernoulli).

N=6 ; K=5

C₁: 1, 2, 4, 8, 16, 32

AUTOCORRELACION
ONDA PERIODICA

N	63.000
1354.667	
1181.206	
1094.349	
1050.667	
1028.317	
1016.127	
1008.000	
1008.000	
1008.000	
1008.000	
1008.000	
1008.000	
1008.000	
1008.000	
1008.000	

(a)

N=6 ; K=5

C₁: 1, 8, 4, 32, 2, 16

AUTOCORRELACION
ONDA PERIODICA

N	63.000
1354.667	
1075.048	
1206.095	
1036.444	
1041.016	
1012.063	
1008.000	
1008.000	
1008.000	
1008.000	
1008.000	
1008.000	
1008.000	
1008.000	
1008.000	
1008.000	

(b)

N=6 ; K=5

C₁: 1, 2, 3, 4, 5, 6

AUTOCORRELACION
ONDA PERIODICA

N	63.000
135.111	
129.778	
124.698	
120.127	
116.317	
113.534	
112.000	
112.000	
112.000	
112.000	
112.000	
112.000	
112.000	
112.000	
112.000	

(c)

N=6 ; K=5

C₁: 6, 1, 3, 2, 4, 5

AUTOCORRELACION
ONDA PERIODICA

N	63.000
135.111	
122.921	
122.667	
119.873	
119.365	
119.619	
112.000	
112.000	
112.000	
112.000	
112.000	
112.000	
112.000	
112.000	
112.000	

(d)

Tabla 4-11

Funciones de autocorrelación experimentales.

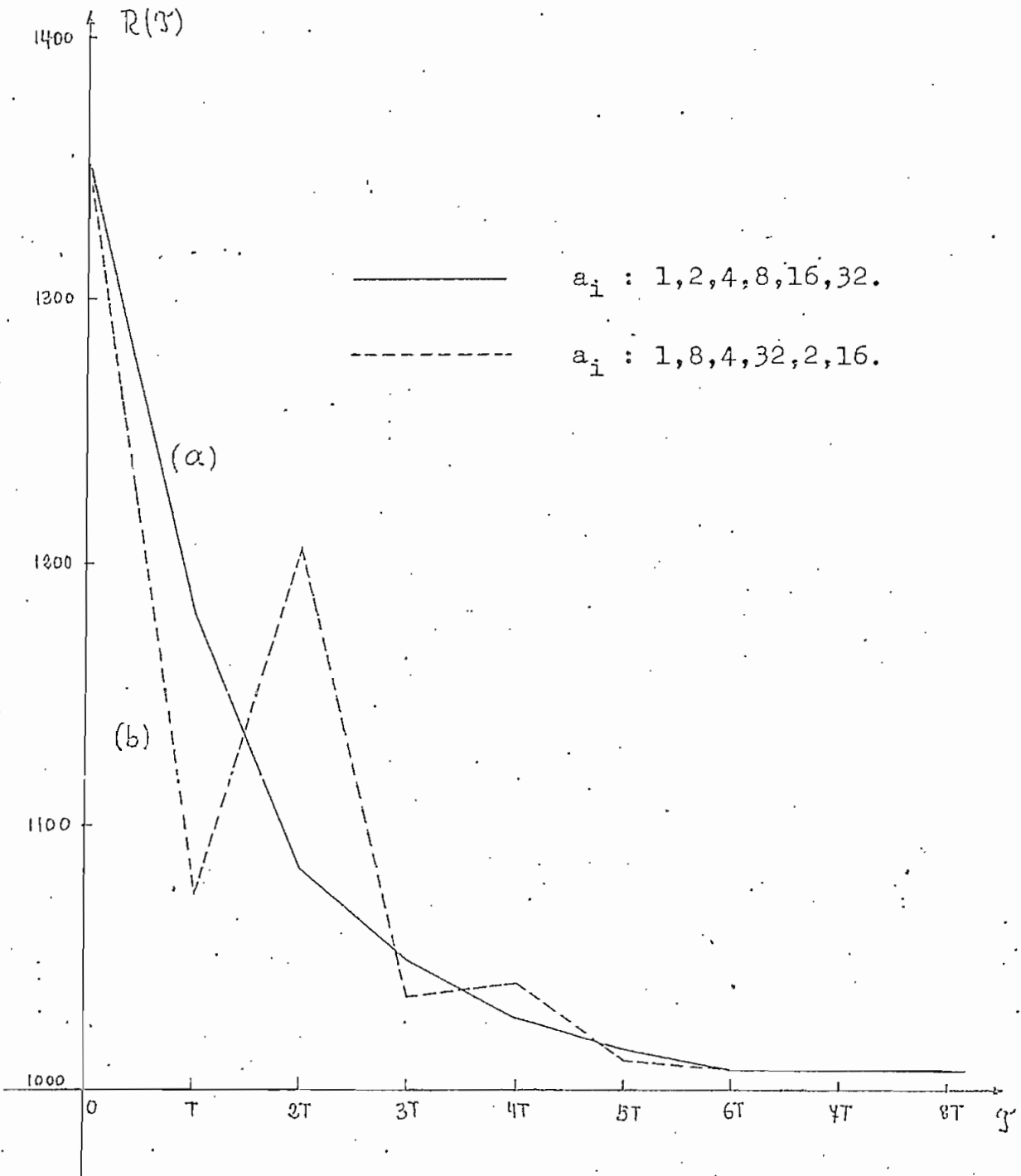


FIG. 4-28

Variación de la función de autocorrelación
debida a un cambio en el orden de las ga-
nancias en el sumador.

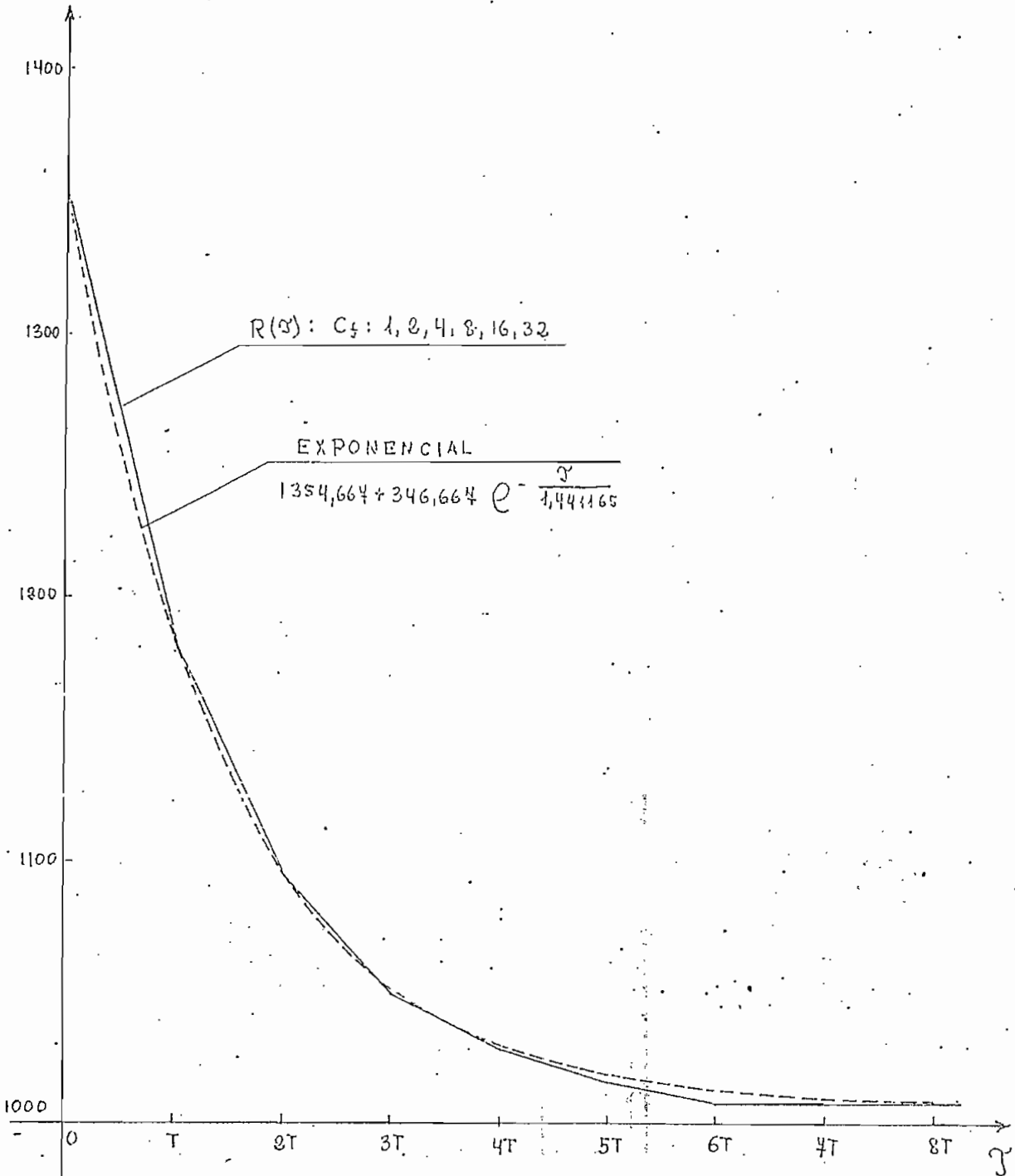


FIG. 4-29

Comparación entre la función de autocorrelación de un proceso con distribución uniforme para ganancias $a_1 : 1, 2, 4, 8, 16, 32$. y una curva exponencial pura.

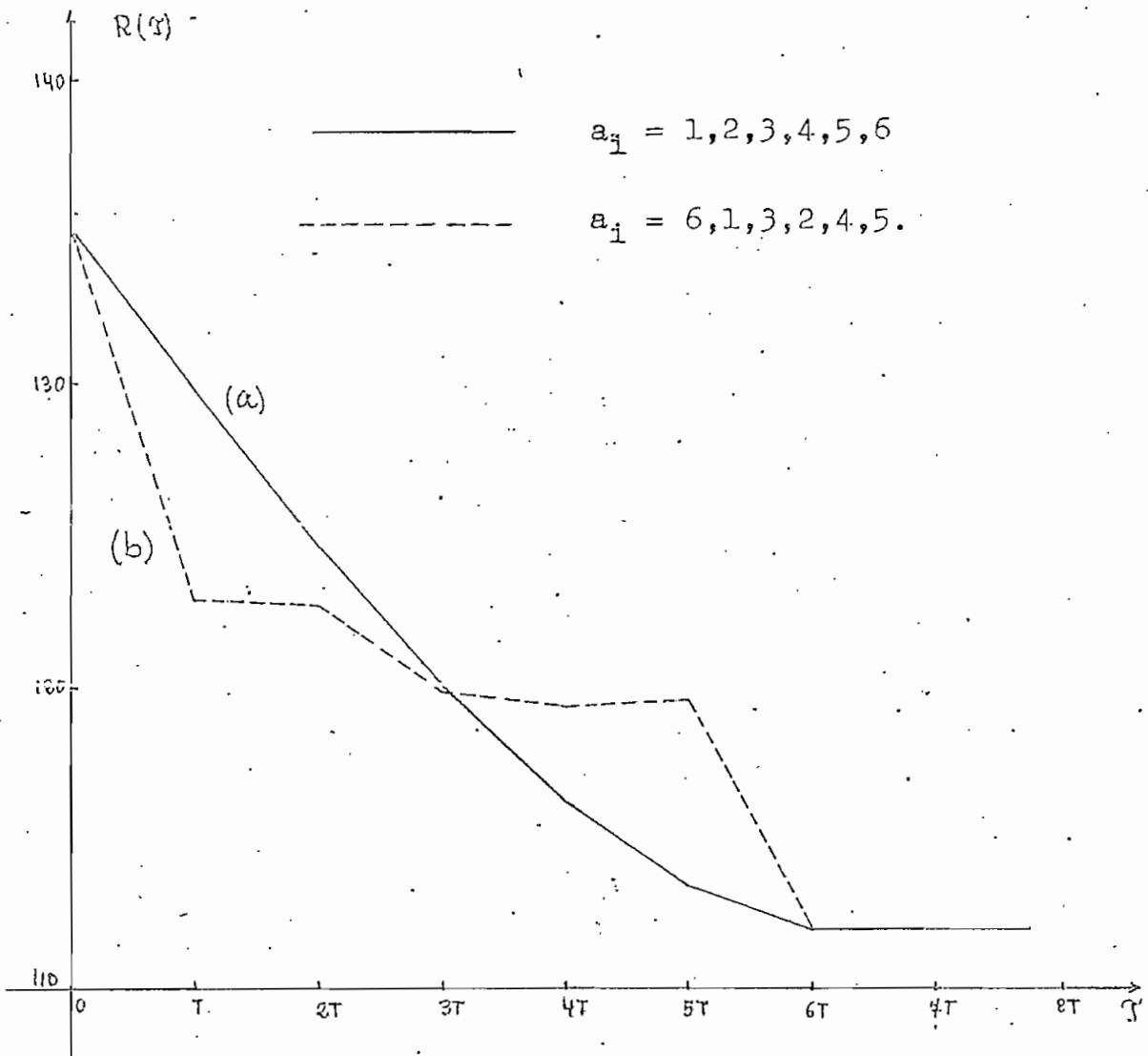


FIG. 4-30

Efecto sobre la función de autocorrelación de la alteración del orden de las ganancias en el sumador.

4.6.- PULSOS ALEATORIOS CON DENSIDAD GAUSSIANA.

Hemos llegado al objetivo principal de este capítulo. Estudiaremos ahora la forma de generar un tren de pulsos con densidad gaussiana. Antes de exponer la forma práctica que nos permite lograr nuestro propósito, haremos referencia a la base teórica que justificará la forma en que habremos de proceder en la práctica.

FUNCIONES GAUSSIANA Y DE ERROR.

La función Gaussiana está dada por:

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (4-25)$$

y su integral

$$\text{erf } x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy \quad (4-26)$$

En la figura 4-31 se muestran las funciones $G(x)$ y $\text{erf } x$.

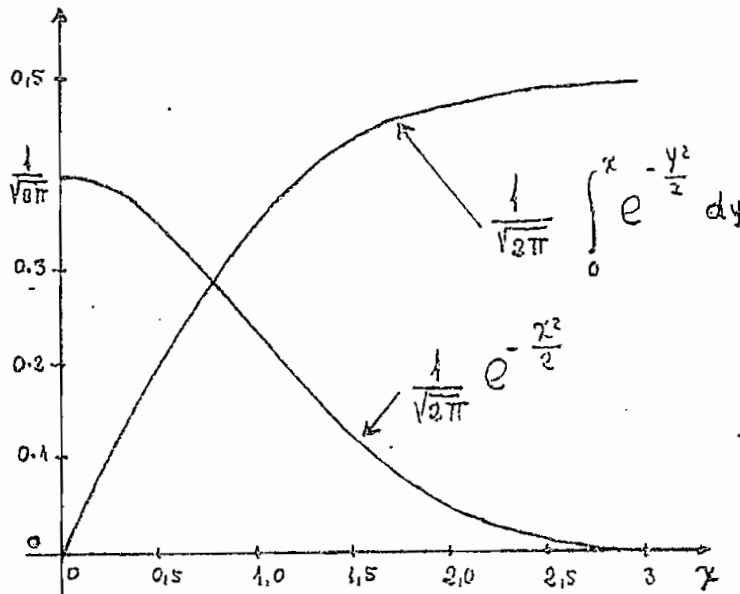


Fig. 4-31

Funciones Gaussiana y de error

Nótese que $\text{erf}(-x) = -\text{erf} x$

$$y \text{ erf } \infty = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \text{Exp} \left[-\frac{x^2}{2} \right] dx = \frac{1}{2} \quad (4-27)$$

Con un cambio de variable se concluye fácilmente de (4-26) que

$$\frac{1}{a\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} \text{Exp} \left[-\frac{(x-b)^2}{2a^2} \right] dx = \text{erf} \frac{x_2 - b}{a} - \text{erf} \frac{x_1 - b}{a} \quad (4-28)$$

DISTRIBUCION NORMAL.

Decimos que una variable aleatoria está uniformemente distribuida si su función de densidad es una curva gaussiana.

$$f(x) = A \exp [-\alpha x^2] \quad \alpha \neq 0$$

Puesto que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp [-\alpha x^2] = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad (4-29)$$

concluimos de (4-29) y de (1-43) que

$$A = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

Por conveniencia haremos $\alpha = \frac{1}{2\sigma^2}$; entonces:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{x^2}{2\sigma^2} \right] \quad (4-30)$$

Con un desplazamiento en el eje x obtenemos la densidad normal generalizada:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(x - \eta)^2}{2\sigma^2} \right] \quad (4-31)$$

La función de distribución correspondiente está dada - por:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy = \frac{1}{2} + \operatorname{erf} \frac{x - \eta}{\sigma} \quad (4-32)$$

De (4-32) y (1-33) se sigue:

$$P\{x_1 \leq x \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1) = \operatorname{erf} \frac{x_2 - \eta}{\sigma} - \operatorname{erf} \frac{x_1 - \eta}{\sigma} \quad (4-33)$$

Es conveniente notar que la densidad normal está completamente especificada con sólo conocer el valor medio y la varianza de la misma.

EL TEOREMA DEL LIMITE CENTRAL.

En muchas aplicaciones de la Teoría de Probabilidades, las variables aleatorias son sumas de otras variables aleatorias. Por ejemplo, el resultado (en dinero) después de varias partidas de un juego es la suma de las ganancias en cada una.

Un hecho sorprendente acontece cuando se suman un gran número de variables aleatorias. Bajo condiciones generales (aplicable a casi todos los casos prácticos que se presentan), la distribución de la suma tiende a ser normal, prescindiendo de las distribuciones de cada una de las variables aleatorias que forman la suma. El enunciado preciso de este hecho notable se conoce como el "Teorema del límite central de la teoría de probabilidades". Lo que explica la importancia de la distribución normal tanto en la teoría como en la práctica.

La discusión completa de este teorema es bastante larga y requiere el uso de conceptos que no se han explicado en el presente trabajo. En esta sección se explicará solamente lo que afirma el teorema.

Sea una sucesión indefinida de variables aleatorias X_1, X_2, \dots con valores medios y varianzas finitas. Sean estas:

$$\eta_i = E\{X_i\} \quad \text{y} \quad \sigma_i^2 = E\{(X_i - \eta_i)^2\}; \quad i = 1, 2, \dots \quad (4-34)$$

Formamos una nueva variable aleatoria S_n sumando las n primeras diferencias $X_i - \eta_i$

$$S_n = \sum_{i=1}^n (X_i - \eta_i) \quad (4-35)$$

En lugar de las η_i sumamos las diferencias de manera que la suma S_n tendrá como valor esperado el cero. El problema consiste en determinar la forma del límite S_n cuando $n \rightarrow \infty$.

Si X_1, X_2, \dots, X_n son independientes, tenemos; designando con $\text{Var}(S_n)$ a la varianza de S_n :

$$\text{Var}(S_n) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i - \eta_i) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$$

Ordinariamente, la varianza de S_n será grande aunque las varianzas particulares σ_i^2 sean pequeñas. Las variables aleatorias con gran varianza no interesan porque sus valores tienden a presentar gran dispersión con respecto al valor medio. Por este motivo, se introduce una nueva variable aleatoria T_n mediante la fórmula:

$$T_n = \frac{S_n}{\sqrt{\text{Var}(S_n)}} \quad (4-36)$$

Esta variable tiene valor medio cero y varianza 1 y se llama variable aleatoria reducida. La variable aleatoria reducida T_n está llena de sentido aún cuando las variables aleatorias X_1, X_2, \dots, X_n no sean independientes.

Introducimos ahora la siguiente definición:

DEFINICION DE LA PROPIEDAD CENTRAL DEL LIMITE.

$$\text{Sean } X_1, X_2, X_3, \dots \quad (4-37)$$

una sucesión de variables aleatorias (no necesariamente independientes) donde cada X_i tiene valor medio μ_i y una varianza σ_i^2 , ambas finitas. Se definen S_n y T_n mediante (4-35) y (4-36). Se dice que la sucesión (4-37) satisface la propiedad central del límite si, para todo par a y b siendo $a \leq b$, tenemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{a < T_n \leq b\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \exp\left[-\frac{x^2}{2}\right] dx \quad (4-38)$$

Dicho de otro modo, las variables aleatorias (4-37) satisfacen la propiedad central del límite si la distribución de la variable reducida T_n se aproxima a una distribución normal cuando $n \rightarrow \infty$. La igualdad (4-38) es válida también -

si $a = -\infty$ y $b = \infty$.

COMENTARIO.

El teorema del límite central puede ser establecido en forma independiente de cualquier consideración probabilística. El es una mera propiedad de las convoluciones involucrando un gran número de funciones positivas y es usado en otras áreas; por ejemplo, en la determinación de la salida de varios sistemas lineales conectados en cascada.

Si las densidades $f_i(x)$ están razonablemente concentradas al rededor de μ_i , entonces la curva normal generalizada dada por (4-31) constituye una aproximación bastante estrecha de $f(x)$, aún para valores moderados de n .

En lo que sigue haremos uso de este hecho para obtener una densidad normal mediante la autoconvolución de una densidad que se aproxima a la gaussiana.

OBTENCION DE UNA DENSIDAD NORMAL.

La figura 4-32 nos muestra la densidad que se obtiene para el caso de $N = 7$; $K = 4$ con coeficientes 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. El valor medio y la varianza, según se pueden calcular del gráfico obtenido son: $\mu = 14,110$ y $\sigma^2 = 33,727$. Con estos valores y superpuesta a la misma se ha dibujado la densidad normal correspondiente, que tiene como ecuación:

$$f(x) = 0,0687 \text{ Exp} \left[- \frac{(x - 14,11)^2}{67,454} \right] \quad (4-39)$$

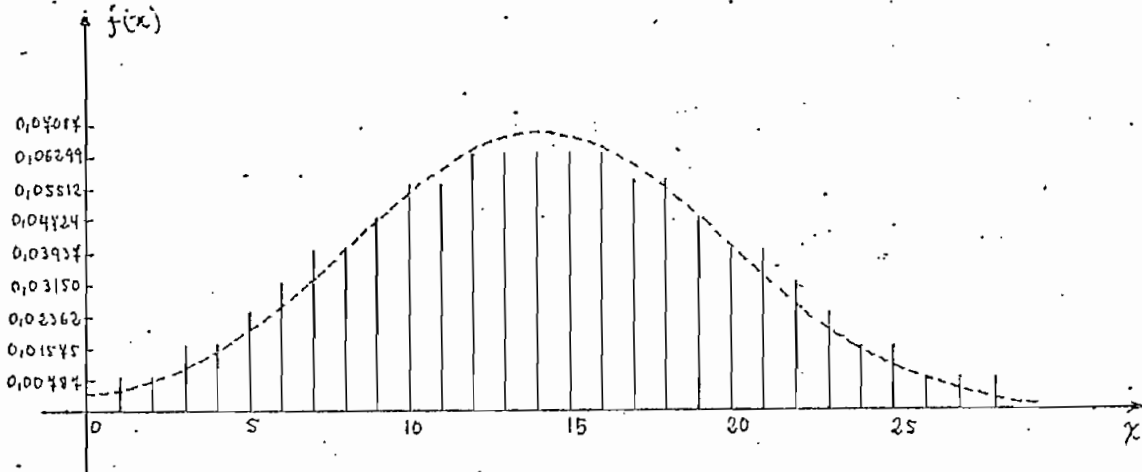


Fig. 4-32

Densidad para $N = 7$; $K = 4$; Cf: 1,2,3,4,5,6,7.

Nuestro objetivo es el de convolucionar esta densidad-aproximadamente normal consigo misma para obtener la densidad normal que queremos.

La tabla 4-12 nos muestra los valores resultantes de la autoconvolución sin normalizar. Esto es, al efectuar la autoconvolución hemos utilizado únicamente los valores que se refieren al número de veces que ocurre cada evento.

La columna de la mitad nos muestra los valores que aparecen en la columna de la izquierda pero normalizado, es decir que ellos representan los valores reales de probabilidad.

Esto se ha obtenido dividiendo por $(127)^2$, debido a que la convolución de una densidad consigo misma implica el producto de densidades.

La columna de la derecha corresponde a una densidad normal con los mismos parámetros que la densidad resultante de la convolución es decir:

$$\mu = 28 \quad \text{y} \quad \sigma = 8,488856$$

Es decir, se trata de una densidad normal con ecuación:

$$f(x) = 0,046996 \text{ Exp} \left[- \frac{(x - 28)^2}{144,121} \right] \quad (4-40)$$

En la figura 4-33 se han grafizado estos resultados. Los puntos con cruz corresponden a los resultados de la autoconvolución. Con puntos simples se ha representado la densidad normal de la ecuación (4-40)

Se observa que las dos curvas prácticamente coinciden a excepción de los valores de los extremos, en donde la diferencia, aunque apreciable es de todos modos pequeña.

Para efectuar la autoconvolución se utilizó un programa para la calculadora al que hemos denominado "CONVOLUCION NUMERICA". La teoría en la que se fundamenta este programa se expone a continuación.

CONVOLUCION NUMERICA.

Como sabemos, la convolución de dos funciones causales $f_1(t)$ y $f_2(t)$ está dada por:

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\gamma) f_2(t - \gamma) d\gamma = \int_0^t f_1(\gamma) f_2(t - \gamma) d\gamma \quad (4-41)$$

Las funciones $f_1(t)$ y $f_2(t)$ se pueden aproximar por una secuencia de impulsos de la manera siguiente:

$$f_1^{\circ}(\gamma) = T \left[f_1(0) \delta(t) + f_1(T) \delta(t - T) + \dots + f_1(nT) \delta(t - nT) + \dots + f_1(NT) \delta(t - NT) \right]$$

$$f_2^{\circ}(\gamma) = T \left[f_2(0) \delta(t) + f_2(T) \delta(t - T) + \dots + f_2(nT) \delta(t - nT) + \dots + f_2(\infty) \delta(t - \infty) \right]$$

La constante T representa el intervalo según el cual se han tomado las muestras de $f_1(t)$ y de $f_2(t)$. Aparece como factor de toda la expresión debido a que los impulsos no son de área unitaria, sino de área $f(nT)T$.

Se ha supuesto que $f_1^{\circ}(\gamma)$ tiene $N + 1$ muestras, mientras que $f_2^{\circ}(\gamma)$ puede tener infinitas muestras.

El proceso que se sigue a continuación es similar al utilizado para la convolución gráfica de dos funciones; esto es, $f_2^{\circ}(t - \gamma)$ es la función imagen de $f_2^{\circ}(\gamma)$ desplazada el-

AUTOCONVOLUCION
 N=4 K=4
 Cj: 1,2,3,4,5,6,4

AUTO CONVOLUCION
 NORMALIZADA
 DIVIDIDA POR (124)²

$$f_r(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$\mu = 28$
 $\sigma = 8.488856$

0.00	0.000000	0.000204
0.00	0.000000	0.000299
1.00	0.000062	0.000432
2.00	0.000124	0.000615
3.00	0.000310	0.000864
5.00	0.000496	0.001197
8.00	0.000868	0.001635
14.00	0.001364	0.002204
22.00	0.002108	0.002929
34.00	0.002976	0.003839
48.00	0.004154	0.004963
67.00	0.005580	0.006327
90.00	0.007315	0.007955
118.00	0.009424	0.009864
152.00	0.011718	0.012062
189.00	0.014384	0.014548
232.00	0.017298	0.017303
279.00	0.020460	0.020297
330.00	0.023884	0.023481
382.00	0.027156	0.026790
438.00	0.030442	0.030144
491.00	0.033728	0.033451
544.00	0.036880	0.036508
595.00	0.039680	0.039512
649.00	0.042160	0.042058
688.00	0.044144	0.044151
712.00	0.045622	0.045710
736.00	0.046500	0.046671
750.00	0.046996	0.046896
758.00	0.046624	0.046271
752.00	0.045756	0.045710
738.00	0.044392	0.044151
716.00	0.042408	0.042058
684.00	0.040052	0.039512
646.00	0.037386	0.036608
603.00	0.034348	0.033451
554.00	0.031062	0.030144
501.00	0.027900	0.026790
450.00	0.024532	0.023481
396.00	0.021228	0.020297
344.00	0.018290	0.017303
295.00	0.015376	0.014548
248.00	0.012710	0.012062
205.00	0.010416	0.009864
168.00	0.008308	0.007955
134.00	0.006448	0.006327
104.00	0.005022	0.004963
81.00	0.003720	0.003839
60.00	0.002728	0.002929
44.00	0.001984	0.002204
32.00	0.001364	0.001635
22.00	0.000868	0.001197
14.00	0.000558	0.000864
9.00	0.000372	0.000615
6.00	0.000248	0.000432
3.00	0.000166	0.000299
2.00	0.000124	0.000204
1.00	0.000062	0.000137
0.00	0.000000	0.000091
0.00	0.000000	0.000060
0.00	0.000000	0.000039
0.00	0.000000	

Tabla 4-12.

Valores numéricos para la autoconvolución

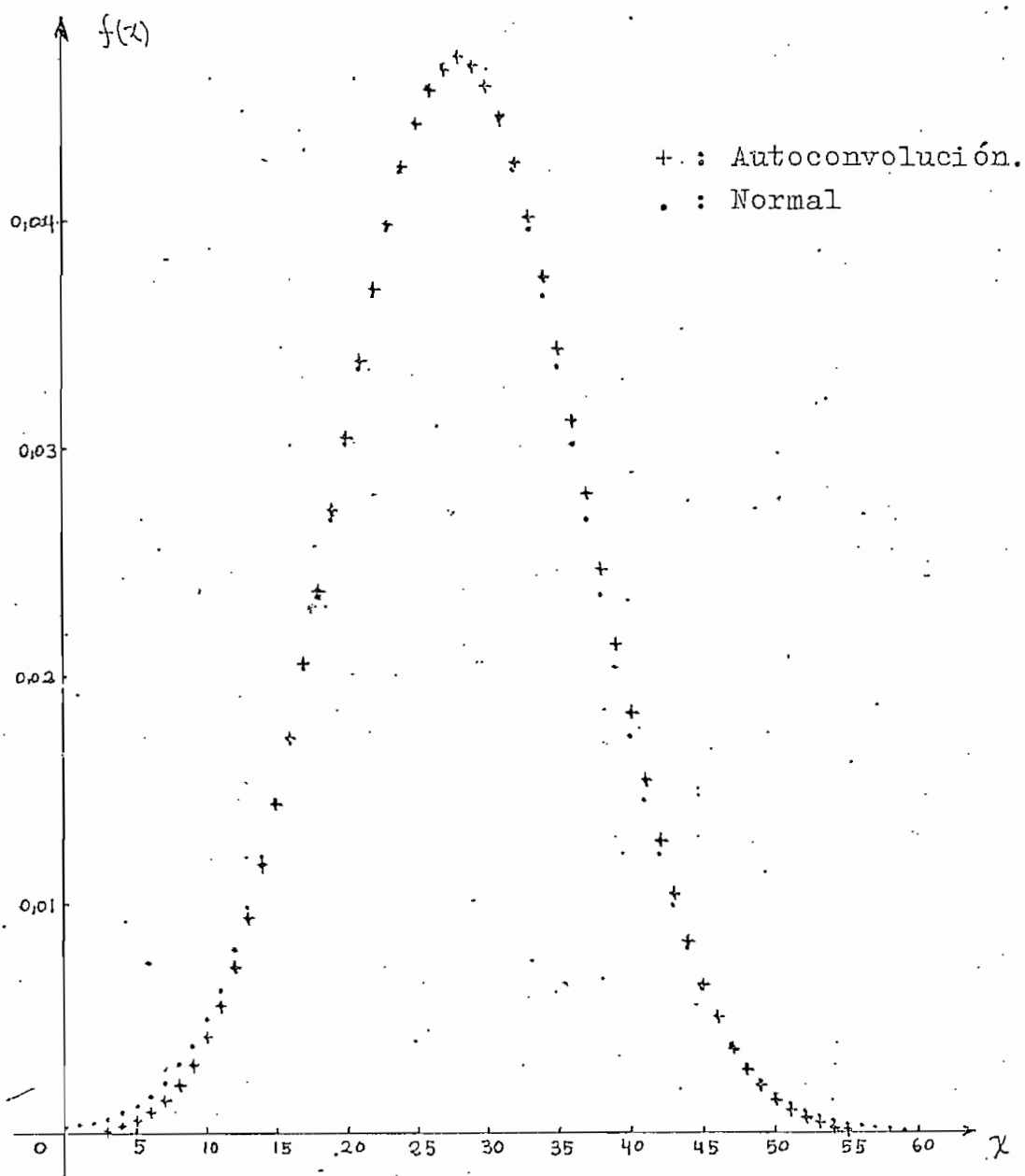


Fig. 4-33.

Autoconvolución de la densidad para $N = 7$; $K = 4$; $C_T : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ y su comparación con una densidad Normal del mismo valor medio y la misma varianza.

intervalo t en el sentido positivo del eje γ . El valor de la convolución en el instante $t = nT$ estará dado por un impulso en $t = nT$ cuya intensidad será igual a la suma de los productos de las intensidades de los impulsos coincidentes en γ dentro del intervalo para el cual las funciones existen simultáneamente. Otros valores de la convolución se pueden obtener haciendo variar t , en otras palabras, desplazando $f_2^\circ(t - \gamma)$ en el sentido positivo del eje γ .

De este modo se tiene:

$$\begin{aligned}
 t = 0 \quad f_1^\circ * f_2^\circ &= T^2 f_1(0) f_2(0) \delta(t) \\
 t = T \quad f_1^\circ * f_2^\circ &= T^2 [f_1(0) f_2(T) + f_1(T) f_2(0)] \delta(t - T) \\
 t = 2T \quad f_1^\circ * f_2^\circ &= T^2 [f_1(0) f_2(2T) + f_1(T) f_2(T) + \\
 &\quad + f_1(2T) f_2(0)] \delta(t - 2T) \\
 &\quad \cdot \\
 &\quad \cdot \\
 t = nT \quad f_1^\circ * f_2^\circ &= T^2 \delta(t - nT) \sum_{m=0}^{n-1} f_1(mT) f_2[(n-m)T] \\
 &\quad \cdot \\
 &\quad \cdot \\
 &\quad \cdot \\
 t = MT \quad f_1^\circ * f_2^\circ &= T^2 \delta(t - MT) \sum_{m=0}^{M-1} f_1(mT) f_2[(M-m)T]; M \leq N \\
 t = NT \quad f_1^\circ * f_2^\circ &= T^2 \delta(t - NT) \sum_{m=0}^{N-1} f_1(mT) f_2[(N-m)T]; M > N
 \end{aligned}
 \tag{4-42}$$

Si denotamos la convolución de $f_1(t)$ y $f_2(t)$ por una -

función $h(t)$, entonces:

$$h(t) = f_1(t) * f_2(t)$$

La función $h(t)$ puede aproximarse por una secuencia de impulsos a intervalos de T segundos.

$$h^\circ(t) = T[h(0)\delta(t) + h(T)\delta(t-T) + h(2T)\delta(t-2T) + \dots + h(nT)\delta(t-nT) + \dots]$$

Una comparación de esta ecuación con las anteriores nos da:

$$h(0) = T f_1(0) f_2(0)$$

$$h(T) = T[f_1(0) f_2(T) + f_1(T) f_2(0)]$$

$$h(2T) = T[f_1(0) f_2(2T) + f_1(T) f_2(T) + f_1(2T) f_2(0)]$$

$$\begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array}$$

$$h(nT) = T \sum_{m=0}^M f_1(mT) f_2[(n-m)T]$$

$$\begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array}$$

$$h(MT) = T \sum_{m=0}^M f_1(mT) f_2[(M-m)T] ; \quad M \leq N$$

$$h(MT) = T \sum_{m=0}^N f_1(mT) f_2[(N-m)T] ; \quad M > N$$

Estas últimas expresiones son las que se han utilizado para la elaboración del programa.

La figura 4-34 muestra el diagrama de flujo del programa y la tabla 4-13 muestra los pasos de programación para introducirlo en la máquina.

Programa N° - 4

CONVOLUCION NUMERICA. (Diagrama de flujo)

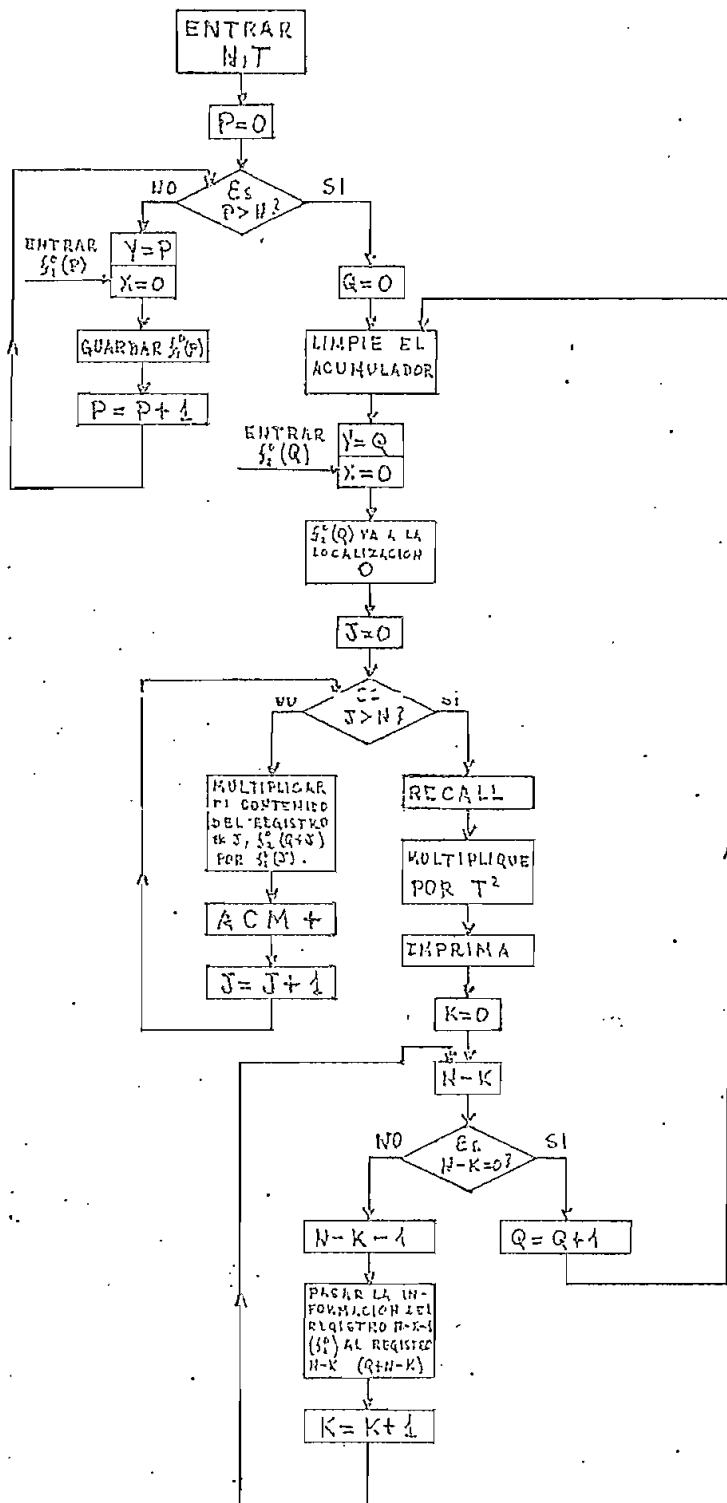


Fig. 4-34.

Programa No - 4

CONVOLUCION NUMERICA.

0000--K---55	0050--XTO---23	0100--1---01	0150--PNT---45
0001--CLX---37	0051--IND---31	0101--3---03	0151--CNT---47
0002--CLR---20	0052--1---01	0102--5---05	0152--CNT---47
0003--STP---41	0053--0---00	0103--UP---27	0153--CNT---47
0004--XTO---23	0054--5---05	0104--5---05	0154--CNT---47
0005--1---01	0055--1---01	0105--0---00	0155--CNT---47
0006--0---00	0056--XTO---23	0106--0---00	0156--0---00
0007--1---01	0057--0---00	0107--YTO---40	0157--XTO---23
0008--STP---41	0058--1---01	0108--1---01	0158--1---01
0009--XTO---23	0059--0---00	0109--0---00	0159--0---00
0010--1---01	0060--4---04	0110--5---05	0160--4---04
0011--0---00	0061--GTO---44	0111--XFR---67	0161--XFR---67
0012--2---02	0062--0---00	0112--IND---31	0162--1---01
0013--XSO---12	0063--0---00	0113--1---01	0163--0---00
0014--XTO---23	0064--2---02	0114--0---00	0164--1---01
0015--1---01	0065--3---03	0115--5---05	0165--UP---27
0016--0---00	0066--CNT---47	0116--UP---27	0166--XFR---67
0017--3---03	0067--0---00	0117--XFR---67	0167--1---01
0018--0---00	0068--XTO---23	0118--IND---31	0168--0---00
0019--XTO---23	0069--1---01	0119--1---01	0169--4---04
0020--1---01	0070--0---00	0120--0---00	0170--0---00
0021--0---00	0071--6---06	0121--4---04	0171--YTO---40
0022--4---04	0072--CNT---47	0122--X---36	0172--1---01
0023--XFR---67	0073--CLR---20	0123--E---60	0173--0---00
0024--1---01	0074--XFR---67	0124--1---01	0174--5---05
0025--0---00	0075--1---01	0125--XTO---23	0175--0---00
0026--1---01	0076--0---00	0126--7---33	0176--X=Y---50
0027--UP---27	0077--6---06	0127--1---01	0177--C---33
0028--XFR---67	0078--RUP---22	0128--0---00	0178--2---02
0029--1---01	0079--STP---41	0129--4---04	0179--0---00
0030--0---00	0080--XTO---23	0130--GTO---44	0180--8---10
0031--4---04	0081--0---00	0131--0---00	0181--1---01
0032--X>Y---53	0082--0---00	0132--0---00	0182--0---00
0033--0---00	0083--0---00	0133--9---10	0183--YTO---40
0034--0---00	0084--0---00	0134--9---11	0184--1---01
0035--6---06	0085--XTO---23	0135--CNT---47	0185--0---00
0036--6---06	0086--1---01	0136--C---61	0186--7---07
0037--UP---27	0087--0---00	0137--XFR---67	0187--XFR---67
0038--0---00	0088--4---04	0138--1---01	0188--IND---31
0039--STP---41	0089--XFR---67	0139--0---00	0189--1---01
0040--UP---27	0090--1---01	0140--3---03	0190--0---00
0041--5---05	0091--0---00	0141--X---36	0191--7---07
0042--0---00	0092--1---01	0142--XFR---67	0192--XTO---23
0043--RUP---22	0093--UP---27	0143--1---01	0193--IND---31
0044--0---00	0094--XFR---67	0144--0---00	0194--1---01
0045--YTO---40	0095--1---01	0145--6---06	0195--0---00
0046--1---01	0096--0---00	0146--UP---27	0196--5---05
0047--0---00	0097--4---04	0147--0---00	0197--1---01
0048--5---05	0098--X>Y---53	0148--X=Y---30	0198--XTO---23
0049--RUP---22	0099--0---00	0149--RUP---22	0199--0---00
0050--XTO---23	0100--1---01	0150--PNT---45	0200--1---01
0051--IND---31	0101--3---03	0151--CNT---47	0201--0---00
0052--1---01	0102--5---05	0152--CNT---47	0202--4---04

Tabla 4-13

EL CIRCUITO.

De lo visto anteriormente, las siguientes serán las premisas en las que se basará el diseño del circuito para generar una secuencia de pulsos con densidad gaussiana.

- 1ª La densidad de la suma de dos variables aleatorias es la convolución de sus densidades.
- 2ª La densidad de la suma de varias variables aleatorias tiende rápidamente a la Normal, esto significa que no es necesario que n (n = número de variables aleatorias) sea muy grande para obtener una aproximación bastante estrecha.
- 3ª La densidad de la suma de varias variables aleatorias tiende a ser Normal independientemente del hecho de si las variables aleatorias son o no son independientes.
- 4ª Si dos variables aleatorias tienen densidades aproximadamente normales, como se vio en el ejemplo de la autoconvolución del apartado anterior, entonces la densidad de su suma será prácticamente Normal.

Las premisas anteriores conforman el criterio que se ha utilizado para idear el circuito que en forma esquemática se muestra en la figura 4-35.

DESCRIPCION.

El circuito de la figura 4-35 consta de dos registros de corrimiento realimentados con una compuerta "0 exclusivo". El primer registro puede constar de N_1 flip-flop y el segundo de N_2 flip-flop. Las salidas de los flip-flop van a dos sumadores, en los cuales se elegirá los factores de multiplicación de las entradas a_i y b_j de modo tal que las densidades de las secuencias de pulsos resultantes sean aproximadamente normales.

Las salidas de los sumadores se introducen en un tercer sumador a través de las resistencias R_a y R_b , elegidas de modo tal que a la salida del sumador se tenga una secuencia de pulsos proporcional a la suma de los pulsos entrantes. Esta salida nos da una secuencia de pulsos con densidad gaussiana.

Como para nuestros propósitos es indiferente que los procesos estocásticos a sumarse sean independientes o no, la salida de un flip-flop cualquiera P la utilizamos para que haga las veces de reloj en el segundo registro. Entonces, el segundo registro correrá su información, cada vez que haya un cambio de cero a uno en el flip-flop P .

No es fácil explicar la razón, pero hemos encontrado que el número total de estados que se generan con este dis-

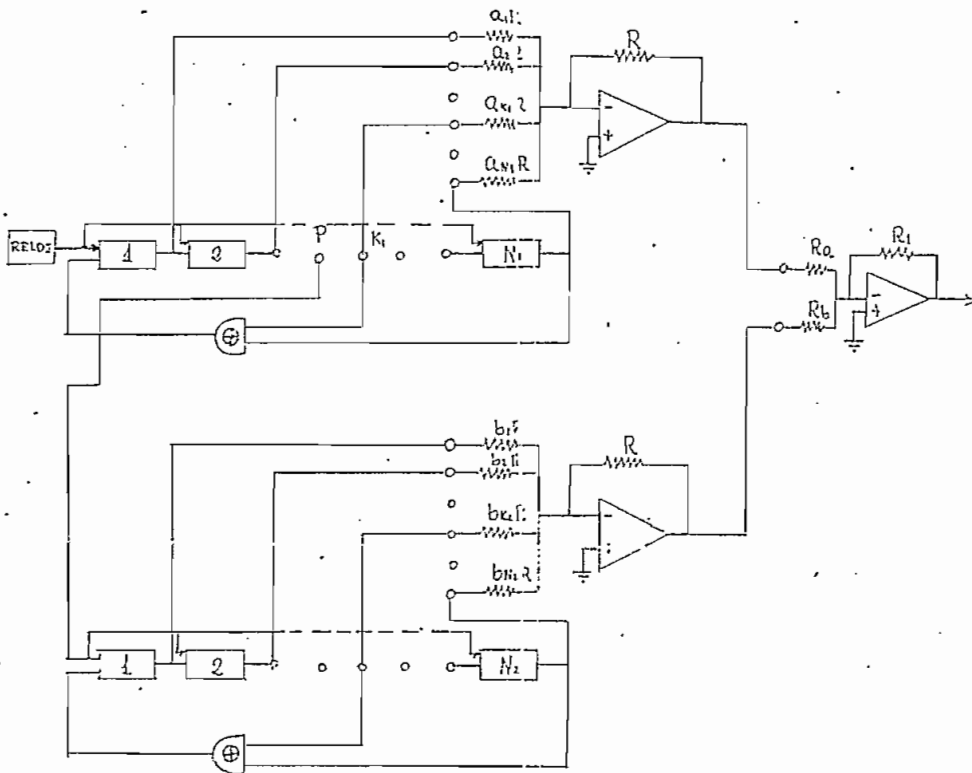


Fig. 4-35

Circuitó para generar una secuencia de pulsos con Densidad Gaussiana

positivo es igual al producto del número de estados que generan los dos registros independientemente.

4-7.- SIMULACION.

El funcionamiento del circuito de la figura 4-35 se ha simulado en la calculadora programable mediante el programa al que se ha denominado "SIMULACION DE UN GENERADOR DE PULSOS ALEATORIOS CON DOS REGISTROS Y TRES SUMADORES".

El diagrama de flujo del programa se muestra en la figura 4-36 y la tabla 4-14 muestra el programa tal como se debe poner en la máquina. Este programa, según se puede apreciar de la tabla mencionada, consta de 682 pasos de programación.

Las características principales de este programa son las siguientes:

- 1^a Tiene capacidad para poner la secuencia inicial de ceros y unos requerida en los dos registros de corrimiento.
- 2^a Tiene capacidad para poner los coeficientes o factores de multiplicación de los dos registros.
- 3^a Simula el corrimiento de los dos registros, siendo el uno disparado por el otro, cada vez que ocurre una transición de cero a uno en el flip-flop que hace las veces de reloj

para el segundo registro.

- 4^a Realiza la suma de las salidas de los sumadores de los dos registros.
- 5^a Cuenta el número de veces que ocurre cada uno de los posibles eventos.
- 6^a Para aquellas distribuciones en las que la variable aleatoria puede tomar valores negativos, se puede alterar el valor medio mediante una constante apropiada. Esto es necesario en vista de que el número de veces que ha ocurrido el evento x , se almacena en el registro $N^{\circ} x$ de la calculadora.
- 7^a El número de flip-flop a poner en cada registro es variable.
- 8^a También es variable el punto K de donde se toma la realimentación para la compuerta "O exclusivo" en cada registro.
- 9^a Los coeficientes que multiplican las salidas de cada uno de los registros también son variables.

Programa No - 5
 SIMULACION DE UN GENERADOR DE PULSOS SEMIALEATORIOS CON
 DOS REGISTROS Y TRES SUMADORES.

0000-- K ---55	0050-- 0 ---00	0100-- 8 ---10	0150-- 2 ---02
0001--CLX---37	0051-- 3 ---03	0101-- 7 ---07	0151--XFR---67
0002--CLR---20	0052--XTO---23	0102-- 1 ---01	0152-- 1 ---01
0003--STP---41	0053-- + ---33	0103--XTO---23	0153-- 0 ---00
0004--XTO---23	0054-- 1 ---01	0104-- 1 ---01	0154-- 2 ---02
0005-- 1 ---01	0055-- 0 ---00	0105-- 0 ---00	0155-- UP---27
0006-- 0 ---00	0056-- 3 ---03	0106-- 3 ---03	0156-- 6 ---06
0007-- 7 ---07	0057--GTO---44	0107--XFR---67	0157-- 0 ---00
0008--STP---41	0058-- 0 ---00	0108-- 1 ---01	0158--XFR---67
0009--XTO---23	0059-- 0 ---00	0109-- 0 ---00	0159-- + ---33
0010-- 1 ---01	0060-- 2 ---02	0110-- 3 ---03	0160-- 1 ---01
0011-- 0 ---00	0061-- 9 ---11	0111-- UP---27	0161-- 0 ---00
0012-- 6 ---06	0062-- 8 ---10	0112-- 7 ---07	0162-- 6 ---06
0013--STP---41	0063-- 1 ---01	0113-- 0 ---00	0163--XCY---52
0014--XTO---23	0064--XTO---23	0114--XFR---67	0164-- 0 ---00
0015-- 1 ---01	0065-- 1 ---01	0115-- + ---33	0165-- 1 ---01
0016-- 0 ---00	0066-- 0 ---00	0116-- 1 ---01	0166-- 8 ---10
0017-- 5 ---05	0067-- 2 ---02	0117-- 0 ---00	0167-- 9 ---11
0018--STP---41	0068--XFR---67	0118-- 7 ---07	0168-- 6 ---06
0019--XTO---23	0069-- 1 ---01	0119--XCY---52	0169-- 0 ---00
0020-- 1 ---01	0070-- 0 ---00	0120-- 0 ---00	0170-- - ---34
0021-- 0 ---00	0071-- 2 ---02	0121-- 1 ---01	0171-- 0 ---00
0022-- 4 ---04	0072-- UP---27	0122-- 4 ---04	0172--STP---41
0023-- 9 ---11	0073-- 8 ---10	0123-- 5 ---05	0173--XTO---23
0024-- 1 ---01	0074-- 0 ---00	0124-- 7 ---07	0174--IND---31
0025--XTO---23	0075 XFR---67	0125-- 0 ---00	0175-- 1 ---01
0026-- 1 ---01	0076-- + ---33	0126-- - ---34	0176-- 0 ---00
0027-- 0 ---00	0077-- 1 ---01	0127-- 0 ---00	0177-- 2 ---02
0028-- 3 ---03	0078-- 0 ---00	0128--STP---41	0178-- 1 ---01
0029--XFR---67	0079-- 6 ---06	0129--XTO---23	0179--XTO---23
0030-- 1 ---01	0080--XCY---52	0130--IND---31	0180-- + ---33
0031-- 0 ---00	0081-- 0 ---00	0131-- 1 ---01	0181-- 1 ---01
0032-- 3 ---03	0082-- 1 ---01	0132-- 0 ---00	0182-- 0 ---00
0033-- UP---27	0083-- 0 ---00	0133-- 3 ---03	0183-- 2 ---02
0034-- 9 ---11	0084-- 1 ---01	0134-- 1 ---01	0184--GTO---44
0035-- 0 ---00	0085-- 1 ---01	0135--XTO---23	0185-- 0 ---00
0036--XFR---67	0086--XTO---23	0136-- + ---33	0186-- 1 ---01
0037-- + ---33	0087--IND---31	0137-- 1 ---01	0187-- 5 ---05
0038-- 1 ---01	0088-- 1 ---01	0138-- 0 ---00	0188-- 1 ---01
0039-- 0 ---00	0089-- 0 ---00	0139-- 3 ---03	0189--XFR---67
0040-- 7 ---07	0090-- 2 ---02	0140--GTO---44	0190-- 1 ---01
0041--XCY---52	0091--XTO---23	0141-- 0 ---00	0191-- 0 ---00
0042-- 0 ---00	0092-- + ---33	0142-- 1 ---01	0192-- 7 ---07
0043-- 0 ---00	0093-- 1 ---01	0143-- 0 ---00	0193-- UP---27
0044-- 6 ---06	0094-- 0 ---00	0144-- 7 ---07	0194-- 2 ---02
0045-- 2 ---02	0095-- 2 ---02	0145-- 6 ---06	0195-- H ---74
0046-- 1 ---01	0096--GTO---44	0146-- 1 ---01	0196-- UP---27
0047--XTO---23	0097-- 0 ---00	0147--XTO---23	0197-- 1 ---01
0048--IND---31	0098-- 0 ---00	0148-- 1 ---01	0198-- - ---34
0049-- 1 ---01	0099-- 6 ---06	0149-- 0 ---00	0199-- UP---27
0050-- 0 ---00	0100-- 8 ---10	0150-- 2 ---02	0200--XFR---67
0051-- 3 ---03	0101-- 7 ---07	0151--XFR---67	0201-- 1 ---01
0052--XTO---23	0102-- 1 ---01	0152-- 1 ---01	0202-- 0 ---00
0053-- + ---33		0153-- 0 ---00	0203-- 6 ---06

Tabla 4-14.

Programa No - 5 (Continuación)

2/4

0200--XFR--67	0250-- 0 ---00	0300-- 1 ---01	0350-- 2 ---02
0201-- 1 ---01	0251-- 2 ---02	0301-- 0 ---03	0351--GT0--44
0202-- 0 ---00	0252-- 3 ---11	0302-- 3 ---03	0352-- 0 ---00
0203-- 6 ---06	0253-- 0 ---00	0303--XFR--67	0353-- 3 ---03
0204--XEY--30	0254-- 2 ---02	0304-- 1 ---01	0354-- 0 ---00
0205-- 2 ---02	0255-- 0 ---00	0305-- 0 ---00	0355-- 3 ---03
0206-- H ---74	0256-- 1 ---01	0306-- 3 ---03	0356-- 1 ---01
0207--XEY--30	0257--YTO--40	0307-- 0 ---00	0357--XTO--23
0208-- 1 ---01	0258-- 1 ---01	0308-- 9 ---11	0358-- + ---33
0209-- 1 ---34	0259-- 0 ---00	0309-- 6 ---00	0359-- 1 ---01
0210-- DH--25	0260-- 2 ---02	0310--XFR--67	0360-- 0 ---00
0211-- X ---36	0261--XFR--67	0311-- + ---33	0361-- 0 ---00
0212--YTO--40	0262--IND--31	0312-- 1 ---01	0362--XFR--67
0213-- 1 ---01	0263-- 1 ---01	0313-- 0 ---00	0363-- 1 ---01
0214-- 0 ---00	0264-- 0 ---00	0314-- 7 ---07	0364-- 0 ---00
0215-- 1 ---01	0265-- 3 ---03	0315--XCY--52	0365-- 0 ---00
0216-- 0 ---00	0266-- UP--27	0316-- 0 ---00	0366-- UP--27
0217--XTO--23	0267--XFR--67	0317-- 3 ---03	0367--XFR--67
0218-- 1 ---01	0268--1In--31	0318-- 5 ---05	0368-- 1 ---01
0219-- 0 ---00	0269-- 1 ---01	0319-- 6 ---06	0369-- 0 ---00
0220-- 0 ---00	0270-- 0 ---00	0320-- 2 ---02	0370-- 1 ---01
0221--XTO--23	0271-- 2 ---02	0321-- 0 ---00	0371--XCY--52
0222-- 0 ---00	0272-- X ---36	0322-- 0 ---00	0372-- 0 ---00
0223-- 9 ---11	0273-- E ---60	0323--YTO--40	0373-- 6 ---06
0224-- 0 ---00	0274-- 1 ---01	0324-- 0 ---01	0374-- 0 ---10
0225--XTO--23	0275--XTO--23	0325-- 0 ---00	0375-- 1 ---01
0226-- 0 ---00	0276-- + ---33	0326-- 2 ---02	0376-- C ---01
0227-- 8 ---10	0277-- 1 ---01	0327--XFR--67	0377--XFR--67
0228-- 0 ---00	0278-- 0 ---00	0328--IND--31	0378-- 0 ---00
0229--CMT--47	0279-- 3 ---03	0329-- 1 ---01	0379-- 5 ---05
0230--CMT--47	0280--XTO--23	0330-- 0 ---00	0380-- 9 ---11
0231-- 8 ---10	0281-- + ---33	0331-- 3 ---03	0381-- + ---33
0232-- 1 ---01	0282-- 1 ---01	0332-- UP--27	0382-- 1In--25
0233--XTO--23	0283-- 0 ---00	0333--XFR--67	0383--PSE--57
0234-- 1 ---01	0284-- 2 ---02	0334--IND--31	0384--PSE--57
0235-- 0 ---00	0285--GT0--44	0335-- 1 ---01	0385--XFR--67
0236-- 3 ---03	0286-- 0 ---00	0336-- 0 ---00	0386-- + ---33
0237--XFR--67	0287-- 2 ---02	0337-- 2 ---02	0387-- 1 ---01
0238-- 1 ---01	0288-- 3 ---03	0338-- X ---36	0388-- 0 ---00
0239-- 0 ---00	0289-- 7 ---07	0339-- 0 ---00	0389-- 8 ---10
0240-- 3 ---03	0290-- C ---07	0340-- 1 ---01	0390--XTO--23
0241-- UP--27	0291--YTO--40	0241--XTO--23	0391-- 0 ---00
0242-- 8 ---10	0292-- 0 ---00	0342-- 1 ---01	0392-- 5 ---05
0243-- 0 ---00	0293-- 3 ---03	0343-- 1 ---01	0393-- 8 ---10
0244--XFR--67	0294-- 9 ---11	0344-- 0 ---00	0394-- 1 ---01
0245-- 1 ---33	0295--CLR--20	0345-- 3 ---03	0395--XTO--23
0246-- + ---01	0296--CMT--47	0346--XTO--23	0396-- + ---33
0247-- 0 ---00	0297-- 9 ---11	0347-- + ---33	0397--1In--31
0248-- 6 ---06	0298-- 1 ---01	0348-- 1 ---01	0398-- 0 ---00
0249--XCY--52	0299--XTO--23	0349-- 0 ---00	0399-- 5 ---05
0250-- 0 ---00	0300-- 1 ---01	0350-- 2 ---02	0400-- 8 ---10
0251-- 2 ---02	0301-- 0 ---00	0351--GT0--44	0401--CLR--20
0252-- 9 ---11	0302-- 3 ---03	0352-- 0 ---00	0402-- 9 ---11
0253-- 0 ---00		0353-- 3 ---03	0403-- 0 ---00

Tabla 4-14.

Programa N°- 5 (Continuación)

4/4

0600-- 0 ---00	0650-- UP---27
0601-- 7 ---07	0651--XFR---67
0602-- 9 ---11	0652--IND---31
0603--X=Y---50	0653-- 0 ---00
0604-- 0 ---00	0654-- 7 ---07
0605-- 6 ---06	0655-- 9 ---11
0606-- 1 ---01	0656--X=Y---50
0607-- 8 ---10	0657-- 0 ---00
0608-- 1 ---01	0658-- 6 ---06
0609--XTO---23	0659-- 7 ---07
0610-- 0 ---00	0660-- 1 ---01
0611-- 9 ---11	0661-- 1 ---01
0612-- 0 ---00	0662--XTO---23
0613--GTO---44	0663-- 0 ---00
0614-- 0 ---00	0664-- 8 ---10
0615-- 6 ---06	0665-- 0 ---00
0616-- 2 ---02	0666--GTO---44
0617-- 3 ---03	0667-- 0 ---00
0618-- 0 ---00	0668-- 2 ---02
0619--XTO---23	0669-- 3 ---03
0620-- 0 ---00	0670-- 0 ---00
0621-- 9 ---11	0671-- 0 ---00
0622-- 0 ---00	0672--XTO---23
0623-- 8 ---10	0673-- 0 ---00
0624-- 0 ---00	0674-- 8 ---10
0625-- UP---27	0675-- 0 ---00
0626--XFR---67	0676--GTO---44
0627-- + ---33	0677-- 0 ---00
0628-- 1 ---01	0678-- 2 ---02
0629-- 0 ---00	0679-- 3 ---03
0630-- 6 ---06	0680-- 0 ---00
0631--XTO---23	0681--STP---41
0632-- 0 ---00	0682--END---46
0633-- 6 ---06	
0634-- 9 ---11	
0635--DN---25	
0636--XFR---67	
0637-- + ---33	
0638-- 1 ---01	
0639-- 0 ---00	
0640-- 4 ---04	
0641--XTO---23	
0642-- 0 ---00	
0643-- 7 ---07	
0644-- 9 ---11	
0645--XFR---67	
0646--IND---31	
0647-- 0 ---00	
0648-- 6 ---06	
0649-- 9 ---11	
0650-- UP---27	
0651--XFR---67	
0652--IND---31	

Tabla 4-14.

RESULTADOS.

La tabla 4-15 muestra los resultados tal como salieron de la máquina para los casos que fueron simulados.

La columna de la izquierda es un caso para dos registros con cuatro flip-flop cada uno y con ganancias 1,2,3 y 4 en cada sumador. Los valores que se ven corresponden al número de veces que ocurrió cada evento. Se tienen en total 225 estados. Esto, porque en ningún registro puede ocurrir el estado 0000.

La función de densidad correspondiente al caso con un sumador y la que se obtiene en el caso en que se utilizan dos sumadores se muestran en la figura 4-37. Con línea de puntos se ha dibujado la función de densidad normal que tiene el mismo valor medio y la misma desviación estándar que aquella. Es interesante el observar que pese a que la función de densidad con un solo registro tiene muy poco de normal, la función de densidad que se ha obtenido para los dos registros es una aproximación bastante buena de la densidad normal.

La ecuación de la curva normal que se representa está dada por:

$$f(x) = 0,113089 \text{ Exp} \left[- \frac{(x - 10,666666)^2}{24,888916} \right]$$

La columna de la derecha de la tabla 4-15 nos muestra el caso de dos registros con 7 flip-flop cada uno y ganancias en ambos sumadores de $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$. En este caso, al igual que el anterior, la máquina nos ha proporcionado la información referente al número de veces que ocurre cada evento.

La función de densidad para un solo registro y un solo sumador se muestra en la figura 4-38. La convolución de la misma será la que obtengamos de la simulación con dos registros y tres sumadores. La densidad de la figura 4-38 se obtuvo de los datos proporcionados por la tabla 4-16 los cuales a su vez fueron obtenidos con el programa N^o 3 "Números Aleatorios".

Es necesario explicar que en esta tabla, el orden de los coeficientes se ha cambiado con respecto a aquellos que se utilizaron para la simulación con dos registros. Sin embargo, la función de densidad de primer orden no se ve afectada por este cambio y los resultados son los mismos.

El resultado obtenido de la simulación se muestra gráficamente en la figura 4-39 en la que además se han dibujado, para efectos de comparación las funciones normales siguientes:

1^a Aquella que tiene la misma varianza y el mismo valor me-

dio que la experimental. Es decir:

$$\mu = 0 \quad \text{y} \quad \sigma = 3,7564$$

y con ecuación:

$$f(x) = 0,106203 \text{ Exp} \left[- \frac{x^2}{28,2204} \right]$$

2ª Aquella que tiene el mismo valor máximo, con lo que se obtiene

$$\sigma = 3,86459$$

y la ecuación de la curva es:

$$f(x) = 0,1035 \text{ Exp} \left[- \frac{x^2}{29,7992} \right]$$

Del examen de la figura se observa que las tres curvas prácticamente coinciden.

Para efectos de una comparación más fina que aquella que puede proporcionarnos el gráfico, en la tabla 4-17 se dan los valores de las tres curvas.

La razón por la cual se han escogido los valores utilizados para las ganancias en el segundo ejemplo es de orden práctico como se verá en el próximo capítulo. Conviene anotar, sin embargo una ventaja de esta elección y que es obser

vable en la figura 4-38 es que la función de densidad obtenida con un solo registro es absolutamente simétrica al rededor de su valor medio, que en este caso es cero.

Se ha logrado, en la forma expuesta, mostrar la evidencia experimental del Teorema del Límite Central.

En el próximo capítulo nos concentraremos en la realización de un diseño tentativo del circuito práctico.

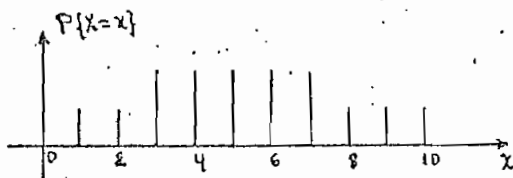
A modo de ilustración, la figura 4-40 muestra un período de la función del tiempo generada por un registro de corrimiento de siete flip-flop , $K = 6$, con sumador de ganancias: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64. .

4 ff	7 ff.
1,2,3,4	-3,-2,-1,0,1,2,3
1,2,3,4	-3,-2,-1,0,1,2,3
0.000000	0.000000
0.000000	0.000000
1.000000	4.000000
2.000000	16.000000
5.000000	40.000000
8.000000	96.000000
12.000000	188.000000
16.000000	320.000000
20.000000	516.000000
22.000000	744.000000
24.000000	992.000000
24.000000	1256.000000
22.000000	1460.000000
20.000000	1600.000000
16.000000	1665.000000
12.000000	1600.000000
9.000000	1460.000000
6.000000	1256.000000
3.000000	992.000000
2.000000	744.000000
1.000000	516.000000
0.000000	320.000000
0.000000	188.000000
0.000000	96.000000
	40.000000
	16.000000
	4.000000
	0.000000
	0.000000

Tabla 4-15.

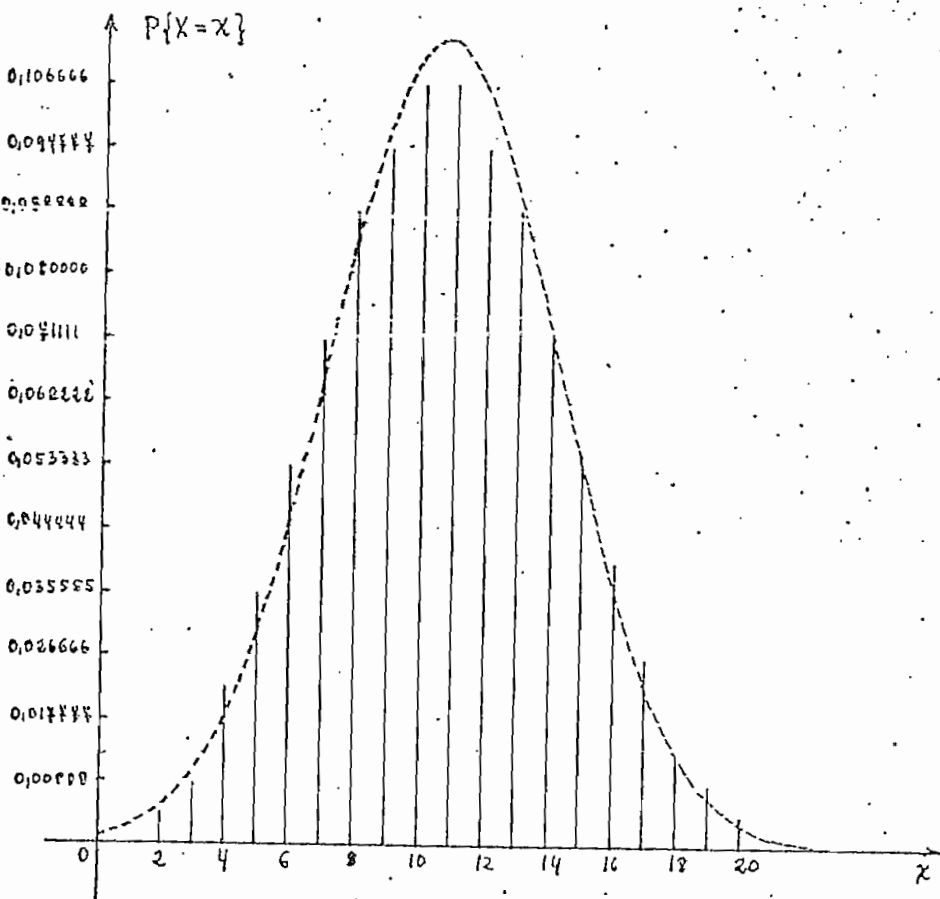
Resultado de la simulación de dos registros y tres sumadores para cuatro y siete flip-flop.

Figura 4-37



(a)

Función de densidad para cuatro
flip-flop 1 sumador $C_f: 1, 2, 3, 4$



(b)

Función de densidad obtenida experimentalmente para dos re-
gistros con tres sumadores con cuatro flip-flop cada uno y
coeficientes 1, 2, 3, 4.

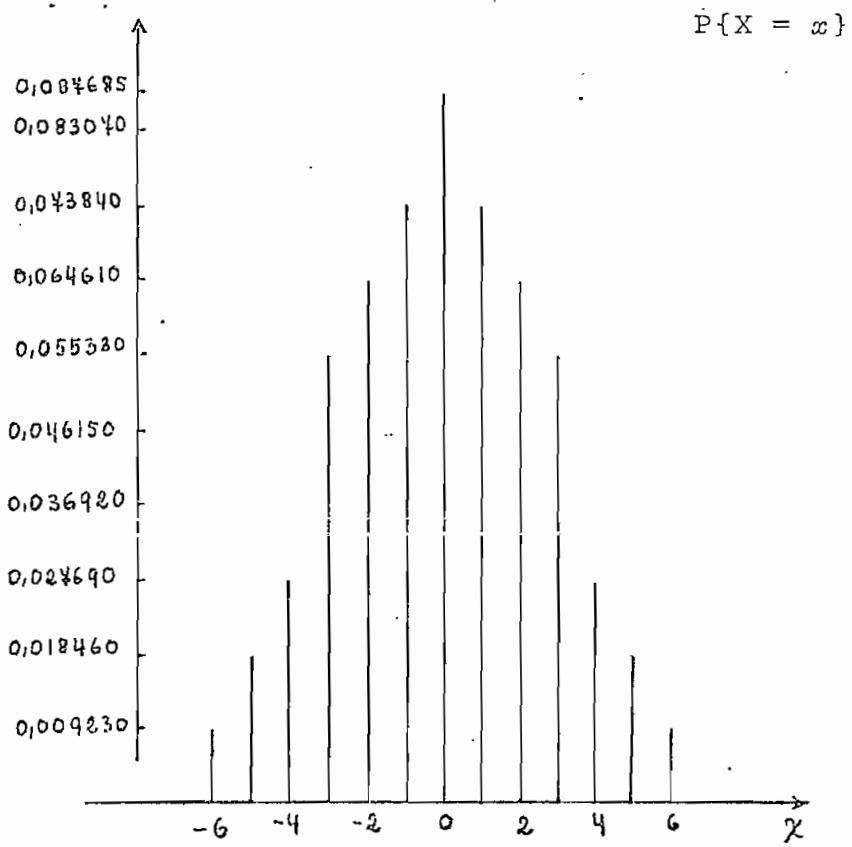


Fig. 4-38

Función de densidad para un solo registro y un sumador. $C_F = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$.

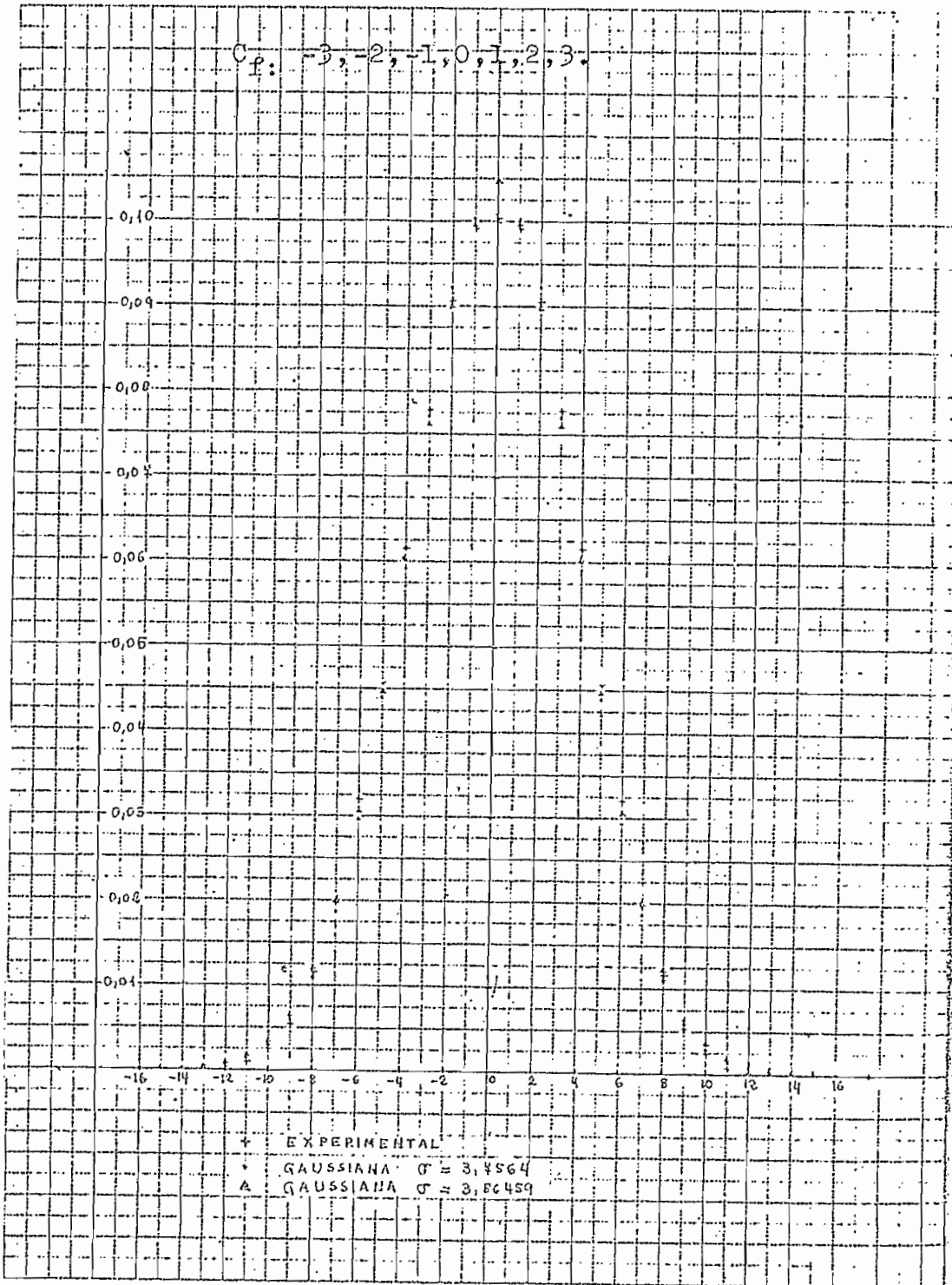


Fig. 4-39

Resultado de la simulación de dos registros y tres sumadores con 7 flip-flop cada uno. La función de densidad resultante se compara con densidades normales con los parámetros que se indican.

x	Experimental	Normal = 3,7564	Normal = 3,86459
0	0,1032	0,1062	0,103213
1	0,1029	0,1025	0,0998
2	0,0905	0,0922	0,0903
3	0,0779	0,0772	0,0764
4	0,0615	0,0602	0,0604
5	0,0461	0,0438	0,0447
6	0,0320	0,0296	0,0309
7	0,0198	0,0187	0,0200
8	0,0117	0,0111	0,0121
9	0,0059	0,0060	0,0069
10	0,0025	0,0030	0,0036
11	0,00099	0,0015	0,0018
12	0,00025	0,0006	0,0008
13		0,0003	0,0004
14		0,0001	0,0001
	(a)	(b)	(c)

Tabla 4-17

Dos registros y tres sumadores. Valores experimentales y su comparación con densidades normales que tienen (b) el mismo valor medio y la misma varianza, (c) el mismo valor medio y el mismo valor máximo.

DISEÑO DE UN GENERADOR DE PULSOS SEMIALEATORIOS CON DENSIDAD GAUSSIANA

5-1. INTRODUCCION

Aunque en el título de este capítulo hablamos de di seño, aquí no se pretende otra cosa que la de detectar los principales problemas que puede presentar el diseño del aparato y proponer algunas configuraciones que se podrían utilizar mediante el uso de circuitos integrados.

La figura 5-1 nos muestra en diagrama de bloques el aparato que se quiere diseñar.

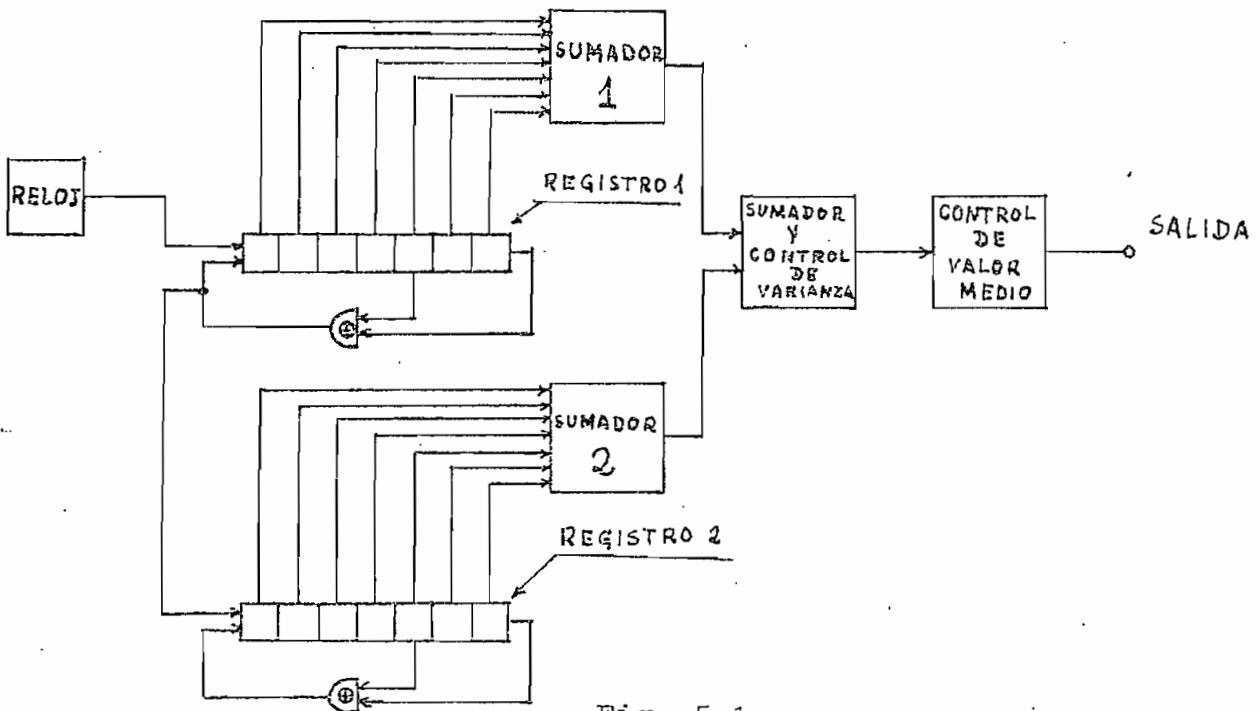


Fig. 5-1

Diagrama de bloques de un generador de pulsos con densidad Gaussiana.

5-2. DISEÑO DE LA RED SUMADORA

En el ejemplo simulado al final del capítulo IV se habían elegido las ganancias -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 con los objetivos siguientes:

1°) Obtener una función de densidad perfectamente simétrica. En efecto, como se ha podido observar en todos los resultados experimentales obtenidos de la simulación, que siempre se presentan anomalías con respecto a la simetría para el valor cero de la variable aleatoria. Sin embargo, al hacer coincidir el valor cero con el valor medio de la distribución, aunque no se elimina la anomalía existente para este valor con respecto a la distribución teórica que contiene el estado con todos los ceros, la densidad es ahora, absolutamente simétrica.

2°) El segundo objetivo se debe a razones de orden estrictamente práctico originadas por el hecho de que el rango de variabilidad de la salida de los amplificadores operacionales de la serie MC 17 utilizados para las redes sumadoras se extiende desde los - 15 voltios hasta los 15-voltios, o sea que tienen un rango de variabilidad de 30 - voltios.

Un proceso que tome valores positivos únicamente, - estará desperdiciando la mitad de este rango de variabilidad. Se tiene, que por ello, es más conveniente el generar un proceso con función de densidad que tenga como valor medio me dio ce ro.

Se nos presenta, sin embargo un problema con los - voltajes de salida de los registros, los cuales son típica mente:

3,4 voltios para el 1 lógico (Para la serie
Y SN 74)
0.4 voltios para el cero lógico

Nos preguntamos?. El hecho de que el cero lógico - sea 0,4 voltios afecta en algo a la función de densidad re sultante?.

Para contestar a esta pregunta analizaremos lo que - sucede con los eventos que se pueden presentar en el caso - de tener un registro con cinco flip-flop y ganancias a la entrada del sumador de -2, -1, 0, 1, 2.

(Ganancias)	- 2	-1	1	2	Voltaje
	0	0	0	1	6
	0	0	1	0	3
	0	0	1	1	9
	0	1	0	0	-3
	0	1	0	1	3
	0	1	1	0	0
Estados.	0	1	1	1	3
	1	0	0	0	-6
	1	0	0	1	0
	1	0	1	0	-3
	1	0	1	1	3
	1	1	0	0	-9
	1	1	0	1	-3
	1	1	1	0	-6
	1	1	1	1	0

Tabla 5-1

En la tabla 5-1 se ha supuesto que al estado cero - de un flip - flop particular le corresponden 0,4 voltios y al estado 1 le corresponden 3,4 voltios.

Al tener una de las ganancias igual a cero, no es necesario mostrar la totalidad de estados que se tienen para un registro con cinco flip-flop, pues los mismos estados que aparecen en la tabla, se repiten una vez más dentro de un período.

Según se puede observar de la tabla, los valores de voltaje resultantes dependen únicamente de las diferencias entre los productos de los voltajes para el cero y el uno lógicos por los valores de las ganancias. Esto da como resultado de que sea eliminada por completo la posibilidad de que la variable aleatoria que representa al proceso en un instante t cualquiera pueda tomar valores intermedios que afecten a la distribución.

Esto podría anotarse como un tercer objetivo a lograr con la elección de ganancias ya mencionada.

En cuanto a la red sumadora se refiere, se ha encontrado conveniente el utilizar la que se muestra en la figura 5-2.

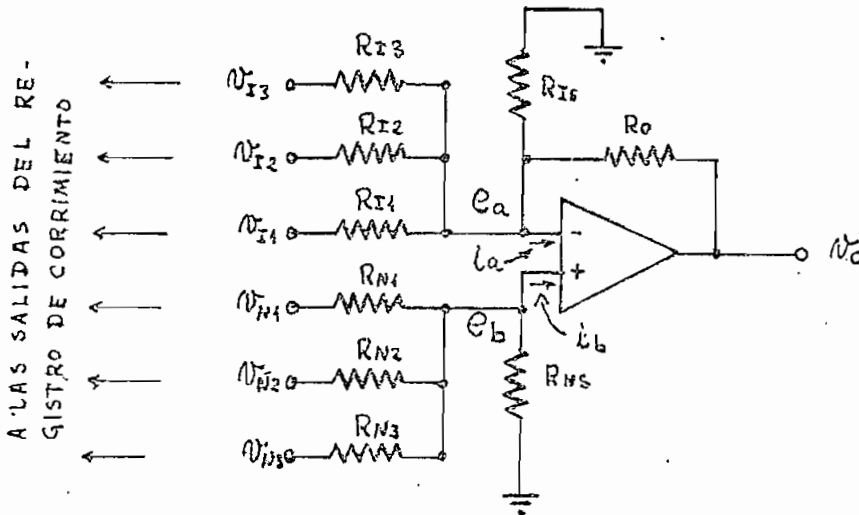


Fig. 5-2.

ya que permite realizar la suma con y sin inversión de los voltajes a la entrada de la misma, con lo que se obtiene una flexibilidad considerable. Se tienen, entonces tres entradas con inversión v_{I1} , v_{I2} , v_{I3} y tres entradas sin inversión v_{N1} , v_{N2} y v_{N3} . Se tienen, además dos resistencias en paralelo R_{IS} y R_{NS} . Estos elementos se pueden ajustar con el objeto de afectar las funciones de ganancia de transferencia.

Las ecuaciones de nodos para los nodos e_a y e_b son:

$$\frac{v_{I1} - e_a}{R_{I1}} + \frac{v_{I2} - e_a}{R_{I2}} + \frac{v_{I3} - e_a}{R_{I3}} + \frac{v_o - e_a}{R_o} - \frac{e_a}{R_{IS}} = 0$$

(5-1a)

Dadas las características de los amplificadores operacionales, se puede asumir que $i_a \approx 0$, $i_b \approx 0$ y que $e_a \approx e_b$.

Para el nodo e_b se tiene:

$$\frac{v_{N1} - e_b}{R_{N1}} + \frac{v_{N2} - e_b}{R_{N2}} + \frac{v_{N3} - e_b}{R_{NS}} = 0$$

(5-1,b)

Se tiene; en consecuencia que:

$$\sum_{i=1}^3 \frac{v_{Ii}}{R_{Ii}} + \frac{v_o}{R_o} = e_a \left(\frac{1}{R_{I1}} + \frac{1}{R_{I2}} + \frac{1}{R_{I3}} + \frac{1}{R_{IS}} + \frac{1}{R_o} \right) \quad (5-2, a)$$

$$\sum_{j=1}^3 \frac{V_{NJ}}{R_{NJ}} = e_b \left(\frac{1}{R_{N1}} + \frac{1}{R_{N2}} + \frac{1}{R_{N3}} + \frac{1}{R_{NS}} \right) \quad (5-2,b)$$

$$\text{Si } R_a = R_{I1} \parallel R_{I2} \parallel R_{I3} \parallel R_{IS} \parallel R_o \quad (5-3)$$

$$\text{Y } R_b = R_{N1} \parallel R_{N2} \parallel R_{N3} \parallel R_{NS}$$

Se tiene:

$$\sum_{i=1}^3 \frac{V_{Ii}}{R_{Ii}} + \frac{V_o}{R_o} = \frac{e_a}{R_a} \quad (5-4)$$

$$\text{Y } \sum_{j=1}^3 \frac{V_{NJ}}{R_{NJ}} = \frac{e_b}{R_b}$$

De donde, haciendo $e_a = e_b$ se tiene;

$$V_o = R_o \left[\frac{R_b}{R_a} \sum_{j=1}^3 \frac{V_{NJ}}{R_{NJ}} - \sum_{i=1}^3 \frac{V_{Ii}}{R_{Ii}} \right] \quad (5-5)$$

Esta última ecuación nos permite el diseño de amplificadores sumadores, inversores y no inversores. Los valores relativos de las ganancias de inversión por la elección de adecuada de R_{Ii} y los valores relativos de las ganancias no invertidas por R_{NJ} . Todas las ganancias invertidas y no invertidas pueden ser ajustadas por la elección adecuada de R_o , R_{IS} y R_{NS} .

Definiremos K_{Ii} como la función de transferencia - entre v_{Ii} y v_o con las demás entradas en cero.

K_{NJ} será la función de transferencia entre v_{NJ} y v_o con las demás entradas en cero.

Se tiene; entonces de 5-5 que:

$$K_{Ii} = - \frac{R_o}{R_{Ii}} ; \quad i = 1, 2, 3.$$

$$K_{NJ} = \frac{R_b}{R_a} \frac{R_o}{R_{NJ}} ; \quad j = 1, 2, 3.$$

Estas últimas ecuaciones facilitan el proceso de - diseño. A veces podemos escoger R_{NS} y R_{IS} tales que:

$R_a = R_b$ de modo tal que:

$$K_{NJ} = \frac{R_o}{R_{NJ}} ; \quad R_a = R_b \quad (5-7)$$

y las impedancias de entrada del sumador se pueden diseñar individualmente.

DISEÑO.-

Como ya se ha mencionado, el voltaje típico de salida de una compuerta o de un registro de la serie SN 74- para el estado 1 lógico es de 3,4 voltios y de 0,4 voltios para el estado 0 lógico.

Las ganancias que queremos tener son -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3. Si consideramos que a la entrada del sumador, cuando ocurra un uno vamos a tener un voltaje de 3,4 voltios, el resultado será que el amplificador se encontrará saturado para la mayor parte de salidas.

Lo que nos interesa son los valores relativos de las ganancias, de modo que podemos reducir estas proporcionalmente, de modo tal que en ninguno de los casos se nos sature el amplificador.

Vamos entonces a dividir por 3 todas las ganancias, así tendremos que son:

$$- 1, -0,66, -0,33, 0, 0,33, 0,66, 1. \quad (5-8)$$

De este modo, en el peor de los casos se tendrán a la salida del amplificador $\pm 6,0$ voltios.

Se tiene; entonces:

$$\begin{aligned}
 K_{I3} &= -1 & K_{N3} &= + 1 \\
 K_{I2} &= -0,66 & K_{N2} &= + 0,66 \\
 K_{I1} &= -0,33 & K_{N1} &= + 0,33
 \end{aligned}
 \tag{5-9}$$

Elegiremos R_{IS} y R_{NS} de modo tal que $R_a = R_b$ y supondremos que $R_o = 20K$; entonces:

$$R_{I3} = -\frac{R_o}{K_{I3}} = -\frac{20K}{-1} = 20 K \approx 20 K.$$

$$R_{I2} = -\frac{R_o}{K_{I2}} = -\frac{20K}{-0,66} = 30,3 K \approx 30 K.$$

$$R_{I1} = -\frac{R_o}{K_{I1}} = -\frac{20K}{-0,33} = 60 K \approx 62 K$$

$$R_{N3} = \frac{R_o}{K_{N3}} = \frac{20K}{1} = 20 K \approx 20 K$$

$$R_{N2} = \frac{R_o}{K_{N2}} = \frac{20 K}{0,66} = 30 K \approx 30 K$$

$$R_{N1} = \frac{R_o}{K_{N1}} = \frac{20 K}{0,66} = 60 K \approx 62 K.$$

Entonces:

$$\frac{1}{R_a} = \frac{1}{R_{I1}} + \frac{1}{R_{I2}} + \frac{1}{R_{I3}} + \frac{1}{R_o} + \frac{1}{R_{IS}}$$

$$\frac{1}{R_a} = \frac{K_{I1}}{R_o} + \frac{K_{I2}}{R_o} + \frac{K_{I3}}{R_o} + \frac{1}{R_o} + \frac{1}{R_{IS}} = \frac{1}{R_o} (1 + K_{I1} + K_{I2} + K_{I3}) + \frac{1}{R_{IS}}$$

Haciendo $R_{IS} = \infty$; se tiene:

$$R_a = \frac{R_o}{1 + K_{I1} + K_{I2} + K_{I3}} \quad R_a = \frac{20K}{1 + 1 + 0,66 + 0,33} = \frac{20K}{3} = 6,66K.$$

Entonces: $R_a \approx 6,8 K$

Asimismo se tiene que, haciendo $R_a = R_b$ se encuentra que:

$$\frac{1}{R_b} = \frac{1}{R_o} (K_{N1} + K_{N2} + K_{N3}) + \frac{1}{R_{NS}} \approx \frac{2}{R_o} + \frac{1}{R_{NS}}$$

$$\frac{1}{R_{NS}} = \frac{1}{R_b} - \frac{2}{R_o} \quad ; \quad \frac{R_o - 2R_b}{R_o R_b} \Rightarrow R_{NS} = \frac{R_o R_b}{R_o - 2R_b}$$

$$R_{NS} = \frac{20K \times 6,8K}{20K - 2 \times 6,8K} = \frac{20K \times 6,8K}{6,4K} = 21,25 K \approx 22K.$$

Con esto se tiene calculada la red sumadora.

5-3. Control de la Varianza

Sea X una variable aleatoria con distribución normal. Consideremos la variable aleatoria $y = kx$

Sabemos que las densidades de dos variables aleatorias cuando la una es función de la otra se encuentran relacionadas por:

$$f(y)dy = f(x)dx \quad (5-10)$$

de donde

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{f(y)} \quad (5-11)$$

De la definición de la variable aleatoria y se deduce que:

$$\frac{dy}{dx} = k \quad (5-12)$$

Reemplazando (5-12) en (5-11) se obtiene:

$$f(y) = \frac{1}{k} f(x) \quad (5-13)$$

Puesto que $f(x)$ es normal; entonces:

$$f(y) = \frac{1}{k \sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2k^2\sigma^2}} \quad (5-14)$$

de donde se concluye que la variable $y = kX$ tiene una distribución normal con varianza k

Esto nos lleva a concluir, que para variar la varianza de la densidad de primer orden de un proceso estocástico $X(t)$ con densidad normal, nos basta únicamente multiplicar el mismo por una constante k .

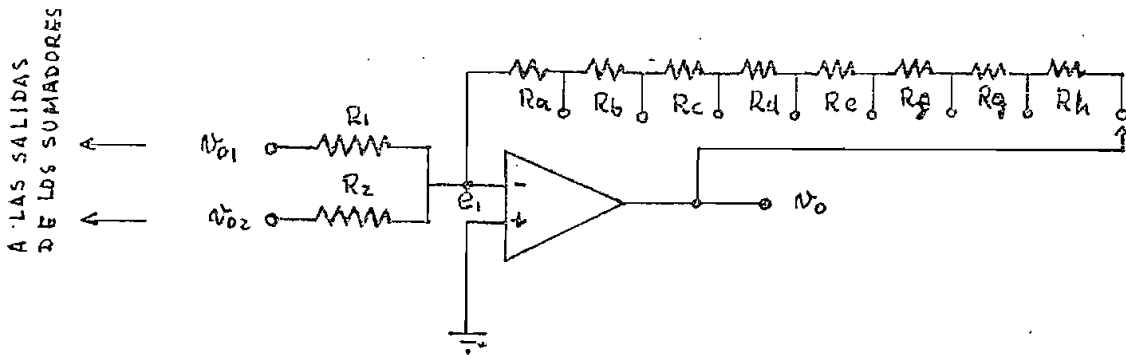


Fig. 5-3

El circuito mostrado en la figura 5-3 logra tal propósito. A la entrada de este se tienen las salidas de los sumadores de los registros. R_o es ahora una resistencia variable en forma discreta, pues creemos que es más demostrativo el realizarlo de esta manera para prefijar algunos valores importantes de la varianza.

Las resistencias de entrada son iguales, para poder afectar de la misma ganancia a las señales entrantes desde los sumadores de los registros.

$$R_1 = R_2$$

La ecuación para el nodo e_1 puede escribirse:

$$\frac{v_{o1} - e_1}{R_1} + \frac{v_{o2} - e_1}{R_1} + \frac{v_o - e_1}{R_o} = 0$$

Pero $e_1 \sim 0$; entonces tenemos:

$$\frac{v_{O1}}{R_1} + \frac{v_{O2}}{R_1} = - \frac{v_O}{R_O}$$

$$v_O = - \frac{R_O}{R_1} [v_{O1} + v_{O2}] \quad (5-15)$$

En nuestro caso, la suma $v_{O1} + v_{O2}$ puede alcanzar un máximo de ± 12 voltios. Queremos que para este valor v_O alcance como máximo los ± 15 voltios, voltaje para el cual se satura el amplificador; tendremos entonces que:

$$\frac{15}{12} = \frac{R_O}{R_1} \quad \frac{R_O}{R_1} = 1,25 \quad (5-16)$$

Por otra parte tenemos que $\sigma_y = K \sigma_x$ esto es: -

$$\frac{\sigma_y}{\sigma_x} = K$$

Pero de (5-15) se deduce que $\frac{R_O}{R_1}$ no es otra cosa -
que la expresión de la ganancia; entonces:

$$\frac{\sigma_y}{\sigma_x} = \frac{R_O}{R_1} = K \quad (5-17)$$

En consecuencia, el valor encontrado en (5-16) co -
rresponde a la ganancia máxima que puede tener el amplifi -
cador.

Asumiremos que $R_O = 40 K$

Se tiene, por tanto que:

$$R_1 = \frac{40K}{1,25} = 32 K \approx 33 K.$$

Se tiene, además, como se había visto en el capítulo IV para el caso simulado, que ~~si~~ se obtuvo $\sigma = 3,76$.

$$\text{En consecuencia, } \sigma_y \text{ max} = 3,76 \times 1,25 = 4,7$$

Nos interesa, además el generar procesos con las siguientes desviaciones estandar:

$$4, 3, 2, 1, 0, 5, 0, 25, 0, 1$$

En particular es importante aquella que tiene $\sigma = 1$, por que corresponde a la distribución normalizada.

Tenemos; entonces de (5,17) que

$$R_o = \frac{\sigma_y}{\sigma_x} R_1$$

En consecuencia para:

$$\sigma_y = 4 \quad ; \quad R_o = \frac{4}{3,76} \times 33 K = 35 K.$$

Siguiendo este procedimiento para los demás valores de y ; podemos formar la tabla siguiente:

σ_y	R_o (K Ω)
4,7	40,0
4,0	35,0
3,0	26,3
2,0	17,5
1,0	8,75

<u>y</u>	<u>R_o (KΩ)</u>
0,5	4,37
0,25	2,18
0,10	1,09

Las diferencias entre los valores sucesivos nos dan los valores de las resistencias R_a , R_b , y así se tiene:

$$\begin{array}{lll}
 R_a = 1,09 \text{ K}\Omega & R_d = 4,38 \text{ K}\Omega & R_g = 8,7 \text{ K}\Omega \\
 R_b = 1,09 \text{ K}\Omega & R_e = 8,75 \text{ K}\Omega & R_h = 5,0 \text{ K}\Omega \\
 R_c = 2,19 \text{ K}\Omega & R_f = 8,80 \text{ K}\Omega &
 \end{array}$$

Puesto que es necesario elegir valores prácticos de resistencias los valores más convenientes, de acuerdo con el criterio de que la desviación estandar más importante es $\sigma_y = 1$ son los siguientes:

$$\begin{array}{lll}
 R_a = 1,1 \text{ K}\Omega & R_d = 4,4 \text{ K}\Omega & R_g = 9,1 \text{ K}\Omega \\
 R_b = 1,1 \text{ K}\Omega & R_e = 9,1 \text{ K}\Omega & R_h = 5,1 \text{ K}\Omega \\
 R_c = 2,2 \text{ K}\Omega & R_f = 9,1 \text{ K}\Omega &
 \end{array}$$

De esta forma se obtienen los siguientes valores para σ_y en función de los valores de R_o prácticos:

<u>R_O</u>	<u>σ_y</u>
41,2	4,69
36,1	4,12
27,2	3,08
17,9	2,04
8,8	1,0
4,4	0,5
2,2	0,25
1,1	0,125

De este modo hemos completado un diseño preliminar de el control de la varianza.

5-4. CÓNTROL DEL VALOR MEDIO

Si se tiene una variable aleatoria X distribuida normalmente. La variable aleatoria $Y = X + \eta$, es también distribuida normalmente para con valor medio η

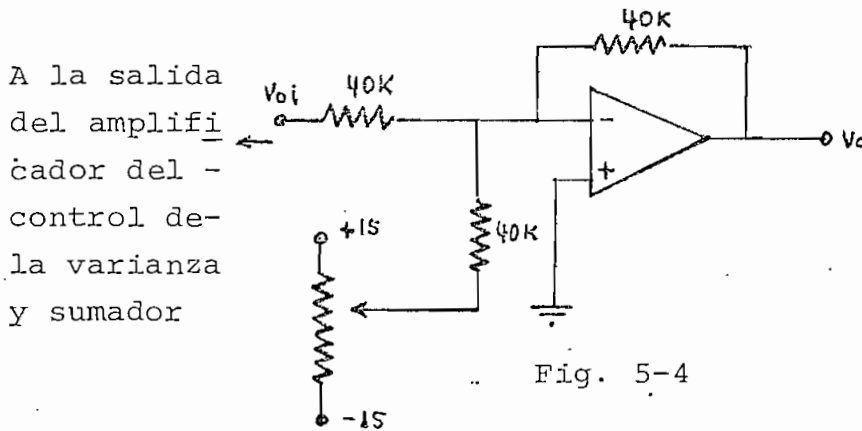
En efecto, como sabemos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{f(y)}$$

De la definición de la variable aleatoria y se tiene que $dy/dx = 1$ y $f(x) = f(y)$

Por lo tanto: $f_Y(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-\eta)^2}{2\sigma^2}}$

El circuito de la figura (5-4) nos permite obtener el central del valor medio, introduciendo sumando a la salida del amplificador anterior un voltaje continuo, obtenido de un divisa de tensión variable. La ganancia se ha ajustado de modo que sea 1.



5-5. COMPUERTA DE REALIMENTACION "O-EXCLUSIVO".

Esta compuerta se puede lograr fácilmente utilizando compuertas nand y negadores.

En efecto, la expresión

$$A \oplus B = \overline{AB} + \overline{\overline{AB}} \quad (5-18)$$

Se puede negar dos veces:

$$A \oplus B = \overline{\overline{\overline{AB} + \overline{\overline{AB}}}}$$

y aplicando las leyes de De Morgan se obtiene:

$$A \oplus B = \overline{\overline{AB} \cdot \overline{\overline{AB}}}$$

con lo cual se puede formular el circuito lógico siguiente:

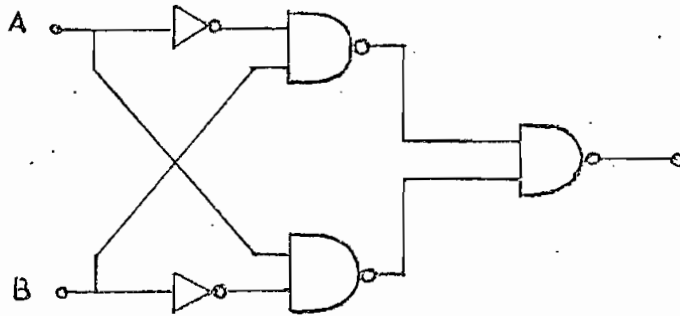


Fig. 5-5

Este circuito se puede lograr fácilmente utilizando el circuito integrado SN - 7400.

5-6. EL RELOJ

Prescindiendo de la alimentación del circuito, un reloj con circuitos integrados se puede lograr de la manera que se muestra en la figura 5-6.

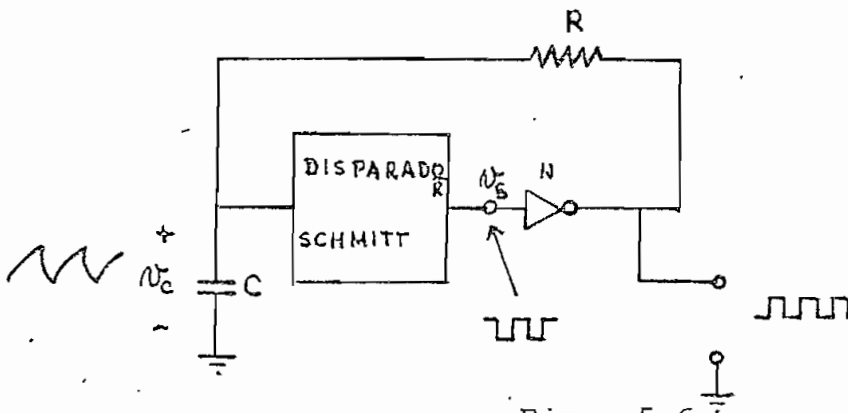


Fig. 5-6

Reloj con circuitos integrados

La figura 5-7 muestra la función de transferencia - entre el voltaje v_c aplicado a la entrada del disparador - y el voltaje v_s a la salida del mismo.

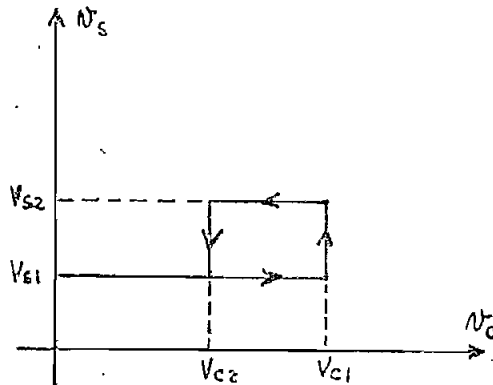


Fig. 5-7

Histéresis del disparador Schmitt

En este gráfico se hace patente la histéresis del - circuito Schmitt

Para explicar el funcionamiento de este reloj, em - pezaremos suponiendo que a la salida del disparador se tie - ne un voltaje bajo tal como v_{s1} , que el negador N puede - interpretar como un cero a la entrada y dar, en consecuen - cia un uno a la salida, o sea un voltaje alto. Este volta - je aplicado al condensador C a través de la resistencia R - hará que el voltaje v_c se incremente hasta alcanzar un va - lor v_{c1} , momento en el cual el disparador cambiará de estado dando un voltaje v_{s2} alto a su salida. Esto para el nega - dor será como tener un uno a la entrada y, consecuentemen - te su salida será cero o lo que es lo mismo un voltaje bajo.

El condensador C que estaba cargado a un voltaje V_{C1} empezará a descargarse a través de R. El voltaje v_S se mantendrá en V_{S2} hasta que v_C alcance el valor V_{C2} , momento en el cual el disparador cambiará nuevamente de estado para darnos el voltaje V_{S1} y el ciclo vuelve a repetirse.

Se tiene entonces que salida v_O será un tren de pulsos, cuya frecuencia dependerá de la constante de tiempo -

$$\frac{1}{RC}$$

C O N C L U S I O N E S

En la introducción a esta tesis se definieron los objetivos a lograr con este trabajo. Se puede decir en este punto que dichos objetivos han sido alcanzados plenamente, pues se ha logrado conciliar en forma efectiva los resultados experimentales obtenidos de la simulación con los resultados que se esperaban luego de analizar los modelos propuestos. Conviene anotar que la comparación de los resultados se efectuó sobre la base de asumir que se cumple la hipótesis de la ergodicidad de los procesos estocásticos que se tomaron como modelo por lo que creemos que el hecho de que esto se haya verificado experimentalmente, constituye un resultado que está lleno de sentido.

Sobre un trabajo de esta naturaleza, carece en absoluto de sentido el afirmar que es algo acabado. Por el contrario, a lo largo del mismo han surgido muchísimas interrogantes que abren muchas puertas para estudios posteriores. No hubo tiempo, no hubo espacio y no se podían abandonar los objetivos fijados para dedicar un análisis más profundo a las mismas.

A continuación damos una lista de todas aquellas cosas que a nuestro criterio merecen que se les preste un poco de atención o que se haga un estudio completo de las mismas.

1° Casos anómalos de registros de corrimiento realimentados a través de una compuerta "O -Exclusivo" que no dan un total de estados igual a $2^N - 1$.

2° Efecto del orden de las ganancias de los sumadores sobre la estadística de segundo orden.

3° Funciones de autocorrelación exponenciales.

4° Obtención de distribuciones de Raleigh y de Poisson con pulsos de amplitud aleatoria.

5° Estudio general para la obtención de pulsos de amplitud aleatoria con cualquier distribución.

6° Paso de la transmisión binaria o de los pulsos de amplitud aleatoria a través de sistemas lineales. Determinación de la estadística del proceso resultante en función de la estadística del proceso de entrada.

7° Análisis armónico de la transmisión binaria y de los pulsos de amplitud aleatoria.

8° Utilización de la transmisión binaria para la generación de procesos conocidos como "Random Wolk" y del Movimiento Browniano (Proceso de Wiener Livi).

Los procesos que se han obtenido dan lugar todavía a que se formulen algunos estudios de interés, sin embargo, su delimitación exacta estaría sujeta a un estudio serio.

APLICACIONES

Un generador de pulsos correspondiente a la transmisión binaria puede ser utilizado para analizar sistemas eléctricos y Mecánicos tales como equipo de transmisión y estructuras mecánicas de soporte, para simular señales en sistemas de procesamiento de datos o procesos estocásticos en los cuales debe examinarse la influencia de varios parámetros, en acústica, y estudios de resistencia de materiales. Por ejemplo, la salida de nuestro generador puede aplicarse a la entrada de un sistema y se puede efectuar la correlación de esta señal con aquella que se tiene a la salida del sistema, obteniéndose valores que pueden ser usados para obtener la función de transferencia del sistema.

La generación de procesos estocásticos que tienen una de distribución uniforme se están utilizando como referencia en una nueva generación de instrumentos de medida que utilizan principios probabilísticos de medición.

En el campo de la biología, por último, se puede utilizar un generador de pulsos con amplitud semialeatoria para estimular animales y observar sus reacciones de modo tal que no se haga presente el proceso de aprendizaje que-

B I B L I O G R A F I A

Athanasios Papoulis.

PROBABILITY, RANDOM VARIABLES, AND STOCHASTIC PROCESSES.

McGraw-Hill Book Co., New York 1965.

Y.W. Lee.

Statistical Theory of Communication.

John Wiley & Sons, Inc. 1960.

Wilbur B. Davenport, Jr., and William L. Root.

AN INTRODUCTION TO THE THEORY OF RANDOM SIGNALS AND NOISE.

Samuel J. Mason and Henry J. Zimmermann.

ELECTRONIC CIRCUITS, SIGNALS, AND SYSTEMS.

John Wiley & Sons, Inc. 1960

Tom M. Apostol.

CALCULUS. Volumen II. (Cálculo en varias variables con aplicaciones a las probabilidades y al análisis vectorial)

Editorial Reverté, S.A., 1965. Barcelona.

Seymour Lipschutz.

PROBABILIDAD.

Serie de compendios Schaum 1971.

B.P. Lathi.

SIGNALS, SYSTEMS AND COMMUNICATION.

John Wiley & Sons Inc. 1967