ESCUELA POLITECNICA NACIONAL

FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA

TESIS DE GRADO

SIMULACION ESTADISTICA

TESIS PREVIA A LA OBTENCION DEL TITULO DE INGENIERO EN LA ESPECIALIZACION DE ELECTRONICA Y TELECOMUNICACIONES DE LA ESCUELA POLITECNICA NACIONAL .

LUIS ALBERTO D. RODRIGUEZ ARROBA

QUITO - ECUADOR

1983

CERTIFICO QUE ESTE TRABAJO HA SIDO REALIZADO EN SU TOTALIDAD POR EL SEÑOR LUIS ALBERTO D. RODRIGUEZ ARROBA.

ING. MARCO BARRAGAN
DIRECTOR DE TESIS

QUITO, NOVIEMBRE DE 1983

AGRADECIMIENTO

DEJO CONSTANCIA DE MI ETERNA GRATITUD Y SINCERO AGRADECIMIENTO AL ING. MARCO BARRAGAN, POR EL TIEMPO DEDICADO A LA DIRECCION DE ESTE TRABAJO DE TESIS Y POR LA AMISTAD BRINDADA.

DE IGUAL MANERA MI AGRADECIMIENTO AL ING. EFRAIN DEL PINO, POR SU VALIOSA Y DESINTERESADA AYUDA.

I N D I C E

CAPITULO I

Un problema, que se encuentra el graduado en ingeniería en su primer contacto con la industria, es el de la dificultad de analizar y/o diseñar sistemas que tengan en cuenta el mayor número posible de variables con objeto de prever soluciones alternativas a situaciones físicas concretas. En la actualidad existen dos caminos posibles para enfrentar dicho problema: la simulación digital, análoga o híbrida y el desarrollo de prototipos de laboratorio.

Los dos métodos son válidos para realizar el estudio de un determinado sistema. No obstante, a medida que los sistemas son más complejos, se presentan al menos dos dificultades: el análisis y/o diseño de los mismos se hace más difícil a causa del número creciente de parámetros y variables que es necesario tener en cuenta para aproximarse a la realidad, y el costo elevado que implica el desarrollo de prototipos o maquetas que sean acordes con el crecimiento dinámico que poseen los sistemas, principalmente los de telecomunicación.

Por estas razones, en este trabajo de tesis de grado, que se realizará en la computadora TEKTRONIX 4051 de la Escuela Politécnica Nacional, se pretende dar algunos conceptos básicos para el uso de la simulación digital, como una alternativa para solucionar el problema ya mencionado. Se hará una breve exposición de los principales fundamentos que avalan el uso de la simulación; así mismo, como punto central de este tema, crear las herramientas matemáticas necesarias que permiten el uso de la simulación en computadoras, esto es, un conjunto de programas que simulen la generación de valores de variables aleatorias con las distribuciones de probabilidad más conocidas y más usadas en este campo. Y, por último, desarrollar algunos programas de aplicación en los cuales los valores de las variables aleatorias simuladas, constituyan un ingrediente necesario para su desarrollo, con el fin de visualizar en forma práctica cómo dichas variables aleatorias influyen en la simulación de los sistemas reales.

Cabe recalcar que, el principal objetivo de este trabajo es crear las herramientas matemáticas necesarias que hacen posible el uso de la simulación digital, de allí que no se hará un estudio somero de los demás tópicos que aquí se tratan.

IMPORTANCIA DE LA SIMULACION DIGITAL

A partir del advenimiento de la computadora digital, se ha creado una gran cantidad de nuevos y poderosos instrumentos analíticos que han tenido un impacto profundo en gran número de disciplinas científicas y, han servido en mucho a quienes toman decisiones y a los analistas principalmente en lo que se refiere a simulación en computadoras.

Cuando se realiza el estudio de un sistema, el método científico más tradicional de investigación, el cual consta de los siguientes pasos ordenados:

1) Observación del sistema físico (realidad).

2) Formulación de una hipótesis que intente explicar las observaciones hechas al sistema;

3) Predicción del comportamiento del sistema en base a la hipótesis formulada mediante el uso de la deducción lógica o matemática, es decir, por la obtención de soluciones del modelo o modelos matemáticos;

4) Realización de experimentos para probar la validez de las hipótesis o del modelo matemático;

puede utilizarse, pero, a veces, no resulta recomendable seguir los 4 pasos descritos a causa de las dificultades que presentan. Cuando ocurre así, la simulación digital, que es una técnica numérica para realizar experimentos en una computadora digital, puede ser un ordenador, miniordenador o microcomputadora, los cuales requieren ciertos tipos de modelos lógicos y matemáticos que describen el comportamiento de un sistema, o algún componente de él, en períodos extensos de tiempo, puede considerarse como sustituto satisfactorio de alguno de los pasos anteriores.

Las razones que avalan el uso de la simulación digital son:

a) Puede ser extremadamente costoso observar ciertos procesos en el mundo real;

b) El sistema observado puede ser tan complejo que sea imposible describirlo en términos de un sistema de ecuaciones matemáticas del cual se puedan tener soluciones analíticas para usarse con fines predictivos;

c) Aún cuando un modelo matemático logre formularse para describir algún sistema, puede no obtenerse una solución del modelo por medio de técnicas analíticas directas y, consecuentemente, tampoco se podrán realizar predicciones acerca del comportamiento futuro del sistema.

Estas últimas razones no son únicas ni excluyentes con algunas más que se pueden enumerar como sigue:

1) La simulación digital hace posible estudiar y experimentar las complejas interacciones que ocurren en el interior de un sistema dado;

2) La observación detallada del sistema que se está simulando conduce a un mejor entendimiento del mismo y proporciona sugestiones para mejorarlo, que de otro modo no podrían obtenerse;

3) La simulación digital puede usarse como recurso pedagógico, para estudiantes y practicantes, al enseñarles los conocimientos básicos en el análisis teórico, el análisis estadístico y en la toma de decisiones;

4) La experiencia que se adquiere al diseñar un modelo de simulación en un computador, puede ser más valiosa que la simulación en sí misma. El conocimiento que se obtiene al diseñar un estudio de simulación, sugiere frecuentemente cambios en el sistema en cuestión. Los efectos de estos cambios pueden probarse, a través de la simulación, antes de implantarlos en el sistema real;

5) La simulación digital puede emplearse para experimentar con situaciones nuevas acerca de las cuales se tiene muy poca o ninguna información con objeto de entrenarse en la espera de eventos imprevistos.

Todo lo anterior permite concluir que la versatilidad que ofrece la simulación digital conlleva un mayor estímulo a la creatividad que el que puede aportar el desarrollo de prototipos, tipo maquetas, para futuros ingenieros a los que se les ofrecen más herramientas para fomentar su ingenio.

En el segundo capítulo se hace una breve descripción de los modelos que se usan en simulación en computadoras y, de la metodología de actuación para planificar experiencias que puedan realizarse mediante la misma.

El tercer capítulo contiene los aspectos relacionados con las técnicas para la generación de los números aleatorios y los métodos básicos para generar valores de variables aleatorias a partir de las distribuciones de probabilidad. Contiene también, un breve análisis de cada una de las distribuciones de probabilidad de las cuales se va a generar los valores, y, los diagramas de flujo de los métodos de generación.

En el cuarto capítulo se desarrollan tres programas como ejemplos de aplicación de las variables aleatorias, usando alguna de las distribuciones de probabilidad.

En el capítulo quinto se dan los comentarios y conclusiones que se han

CAPITULO II

2.1 MODELOS PARA SIMULACION

Cuando se estudia un sistema, uno de los objetivos puede ser buscar la mejor alternativa para diseñarlo y construirlo, por lo tanto debe ser preocupación del analista usar el mejor método para realizar dicho estudio.

Dependiendo de la complejidad del sistema, puede usarse el método científico tradicional, crear prototipos del sistema real para experimentar, pero, como ya se dijo, a veces no resulta recomendable a causa de las dificultades que presentan, esto es: alto costo, demasiado tiempo, muy complejo el sistema, etc.

El otro camino que queda es usar la simulación digital, para lo cual debe crearse un modelo abstracto de estructura similar, pero más simple que represente el sistema real y expresarlo en forma entendible para la computadora.

El objeto del modelo es permitir al analista la determinación de uno o más cambios en los aspectos del sistema o inclusive en la totalidad del mismo, o sea, sirve de elemento de información; debido a esto, pueden obtenerse muchos modelos de un mismo sistema que representen diferentes aspectos del mismo de acuerdo a las necesidades del estudio que se realiza sobre el sistema.

Dado el interés de este trabajo, sólo se detallarán brevemente los modelos matemáticos clasificados en determinísticos, estocásticos o probabilísticos, estáticos y dinámicos.

Los modelos matemáticos, en general, son aquellos que usan notación simbólica y ecuaciones matemáticas para representar un sistema. Las propiedades del sistema se representan por variables y las actividades por funciones matemáticas que interrelacionan las variables. Ocasionalmente se representan también por algoritmos.

2.1.1 MODELOS DETERMINISTICOS

Son modelos en los cuales ni las variables de entrada ni las de salida (respuestas), se les permite ser variables al azar, en tanto que se suponen relaciones exactas para las características de operación en lugar de funciones de densidad de probabilidad.

Estos modelos requieren menos procesamiento en computadoras que los modelos estocásticos y con frecuencia es posible resolverlos analíticamente, por medio de la utilización de técnicas como el cálculo de máximos y mínimos.

2.1.2 MODELOS ESTOCASTICOS O PROBABILISTICOS

Son aquellos en los que por lo menos una de las características de operación está dada por una función de probabilidad. La suficiencia de las técnicas analíticas para solucionar modelos estocásticos, se encuentra bastante restringida debido a que estos modelos son considerablemente más complejos que los modelos determinísticos. Por esta razón la si mulación es un método mucho más atractivo para analizar y resolver los modelos estocásticos y no los determinísticos [1].

Los modelos estocásticos también tienen interés desde el punto de vista de la generación de muestras de datos al azar, que se emplean en las etapas de observación o prueba, de la investigación científica.

2.1.3 MODELOS ESTATICOS

Son aquellos modelos que no toman en cuenta la variable tiempo. Las relaciones entre las características del sistema se dan cuando el sistema está en equilibrio. Si el punto de equilibrio se cambia alterando algunos valores de las características, el modelo permite que se deriven todos los nuevos valores para todas las características, pero no da detalle de cómo estos cambian.

En la investigación de operaciones, con raras excepciones, la mayoría del trabajo en las áreas de programación lineal , no lineal y teoría de juegos, se ha concretado a modelos estáticos [4]. La mayoría son completamente determinísticos y por lo común se pueden obtener soluciones para problemas de este tipo, empleando casi siempre técnicas analíticas directas, como el cálculo de optimalidad y programación matemática.

2.1.4 MODELOS DINAMICOS

Son los modelos que tratan de las interacciones que varían con el tiempo; esto es, las características de los sistemas se representan como una función del tiempo. Dentro de estos modelos están los modelos de fenómenos de espera, planeación e inventario. Este tipo de modelos es posible resolverlos por técnicas analíticas o por técnicas de computación numérica.

2.2 PLANEACION DE LOS EXPERIMENTOS DE SIMULACION EN COMPUTADORAS

La realización de una experiencia utilizando el computador digital como instrumento de simulación, implica que se tenga conocimientos sobre análisis numérico, teoría de probabilidad y estadística, programación en computadoras, etc., y considerar una metodología de actuación que puede resumirse en los siguientes puntos correlativos.

2.2.1 DEFINICION DEL OBJETIVO DE LA SIMULACION

Es necesario definir el problema. Una vez cubierta la definición del problema, es necesario preguntarse:

a) ¿Qué finalidad busca la simulación?

b) ¿Qué grado de precisión se exige para satisfacer los objetivos del estudio a realizar mediante la simulación?

Como en otras áreas de la investigación científica, el estudio de la simulación en computadoras tiene que comenzar con la formulación de un problema o con una declaración explícita de los objetivos del experimento, pues sería muy poco benéfico realizar experimentos que empleen las técnicas de simulación por la simulación misma.

Los objetivos de la investigación generalmente toman la forma de:

- preguntas que deben contestarse, o
- hipótesis que deben probarse, o
- efectos por estimarse.

Si el objetivo de la simulación digital es obtener respuestas a una o más preguntas, es necesario que se planteen éstas detalladamente desde el comienzo del experimento, aún cuando sea posible refinarlas en el curso del experimento; también es necesario especificar criterios objetivos para evaluar las posibles respuestas.

Cuando se trata de evaluar algunas hipótesis, estas deben plantearse explícitamente conjuntamente con los criterios para su aceptación o rechazo.

Cuando se quiere estimar los efectos que ciertos cambios en los parámetros tengan sobre las respuestas de un sistema, es necesario los requerimientos en términos de precisión estadística.

Por consiguiente, como ya se dijo, deben tomarse dos decisiones importantes antes de comenzar a trabajar con cualquier experimento de simulación:

1) Decidir los objetivos de la investigación;

2) Decidir el conjunto de criterios para evaluar el grado de satisfacción al que deba sujetarse el experimento a fin de que cumpla sus

objetivos.

2.2.2 DIAGRAMA DE BLOQUES DE UN SISTEMA

El diagrama de bloques es necesario para la representación de la mayoría de los sistemas que son complejos. Estos permiten facilitar la descripción de un sistema y la identificación de sus entradas y salidas, reducir el grado de complejidad de la programación, visualizar mejor las interacciones entre subsistemas, etc.

Debido a esto, deben aparecer claramente, en el diagrama de bloques, las interrelaciones entre los diferentes bloques que forman el sistema. Es bien claro que dentro de un estudio de cualquier sistema, la representación gráfica es una de las herramientas que presta mejor ayuda para comprender la subdivisión del sistema en bloques componentes.

2.2.3 SUBDIVISION DEL SISTEMA

Una vez que se interpreta el sistema como un conjunto de bloques, es necesario comprenden la actuación física del sistema. La división de aquel en partes que conduzcan a la realización de un objetivo no es a veces tan obvia. La subdivisión puede estar condicionada por los objetivos del estudio y por el propio sistema físico. Usualmente, la descripción de un sistema puede hacerse en algunos niveles de detalle; así mismo, un subsistema puede contener niveles de detalle inferiores. Por lo tanto, el estudio de un sistema puede comenzar con la decisión del nivel de detalle de los subsistemas que se van a usar.

En el campo de la ingeniería es ampliamente usado el término "caja negra", para describir bloques cuyos elementos dan una salida en respuesta a una entrada sin conocerse cómo la obtienen.

De igual manera que los bloques de un sistema se subdividen, así también un modelo de un sistema puede constituirse de submodelos para poder comprender en forma más clara las funciones de operación de dicho sistema.

2.2.4 MODELIZACION DE LOS BLOQUES

El núcleo de la simulación lo constituyen los modelos matemáticos y/o lógicos de los bloques.

Antes de intentar desarrollar un modelo, es aconsejable hacer una recolección y procesamiento de datos de la realidad, puesto que es necesario tener cierta información descriptiva o cuantitativa del sistema para probar la validez de un modelo para la simulación.

Por otra parte, los datos que hayan sido reducidos a una forma significativa, pueden sugerir hipótesis de cierta validez, que se usarían en la formulación de los modelos matemáticos, así como también sugerir mejoras o refinamiento en dichos modelos.

El proceso de observar algún sistema real, formular una o más hipótesis relativas a su funcionamiento y reducir estas a un nivel de abstracción que permita la formulación de los modelos matemáticos que describan su comportamiento, no constituye un proceso directo puesto que para que el modelo sea acertado depende de la experiencia del analista y de los procedimientos de prueba y error.

La formulación de los modelos matemáticos consiste en:

1) Especificar los componentes;

2) Especificar las variables y los parámetros;

3) Especificar las relaciones funcionales.

Pero, además debe tenerse en cuenta otras consideraciones como:

a) El número de variables que se debe incluir en el modelo, para no producir modelos inválidos o saturar la capacidad de memoria del computador;

b) La complejidad de los modelos; por lo general éstos deben ser lo menos complejos y producir descripciones o predicciones, razonablemente exactas, referentes al comportamiento del sistema dado, y que reduzcan a la vez el tiempo de computación y programación;

c) El área de eficiencia de computación, que es la cantidad de cómputo requerida para lograr algún objetivo experimental específico;

d) El tiempo consumido en la programación de la computadora; si resulta ser muy costoso, es preferible utilizar modelos que satisfagan los requerimientos de uno de los lenguajes especiales de simulación, comó el GPSS, SIMSCRIPT, SIMULATE, etc.;

e) La validez o cantidad de realismo que tiene el modelo; es decir, si el modelo describe adecuadamente al sistema y proporciona predicciones razonablemente buenas acerca del comportamiento del sistema, en períodos futuros;

f) La compatibilidad con el tipo de experimento que se realiza con ellos.

Una vez que se formulan los modelos de los bloques, éstos se combinan para constituir un modelo completo del sistema, el cual debe tener la propiedad de representar al sistema en estudio en forma adecuada.

En este punto, constituye una necesidad elemental el control de la nomenclatura utilizada para evitar falsa interpretación del objetivo de la simulación por parte de las personas que participen en esta experiencia.

2.2.5 ANALISIS DEL MODELO

El análisis del modelo es necesario con objeto de que se satisfaga el objetivo del proyecto, el cual permite posteriormente pasar al diseño definitivo de un sistema semejante al analizado.

Una vez recolectados los datos apropiados del sistema y formulado varios modelos matemáticos que describen su comportamiento, es necesario estimar los valores de los parámetros de dichos modelos y probar su sig nificación estadística.

Así mismo, es necesario hacer un juicio del valor inicial de la suficiencia del modelo una vez que se han formulado los modelos y estimado sus parámetros sobre la base de las observaciones tomadas del mundo real. Este paso representa sólo la primera etapa en la prueba de un modelo de simulación previa a las corridas reales en la computadora, por lo que en este punto el interés reside en probar las suposiciones o entradas que se programarán en la computadora. Cuando las características operacionales se representan por distribuciones de probabilidad, se aplica pruebas de bondad de ajuste que determinen qué tan bien se ajusta la distribución hipotética de probabilidad a los datos del mundo real. También se prueba la importancia estadística de las estimaciones de los valores esperados, variancias y otros parámetros de estas distribuciones de probabilidad.

2.2.6 FORMULACION DE UN PROGRAMA PARA LA COMPUTADORA

Dado que la simulación se realiza en un computador digital, debe escribir un programa para ella, el cual puede formularse siguiendo los pasos que a continuación se detallan:

1) Diagrama de flujo.

2) Lenguaje de la computadora:
   a) Compiladores de propósitos generales
   b) Lenguaje de simulación de propósitos generales.

3) Búsqueda de errores.

4) Datos de entrada y condiciones de errores.

5) Generación de datos.

6) Reportes de salida.

El diagrama de flujo permite bosquejear la secuencia lógia de los eventos que realizará la computadora, al generar los tiempos planificados para las variables de salida (respuestas) del modelo.

Terminado el diagrama de flujo se debe decidir el código de la computadora, esto es el lenguaje en que se escribirá el programa. Generalmente se dispone de los lenguajes de propósitos generales como el Fortran, Cobol, Basic, etc., y los lenguajes de simulación de propósitos especiales como el GPSS, SIMSCRIPT, SIMULATE, etc.

El ahorro en tiempo de programación constituye la principal ventaja al utilizar un lenguaje de simulación de propósitos especiales, en lugar de un compilador de propósitos generales, ya que dichos lenguajes se han escrito para facilitar la programación de ciertos tipos de modelos.

Dado que los experimentos de simulación son, por su propia naturaleza dinámicos, se debe asignar un valor a las variables y parámetros del modelo en el momento en que se comienza a simular el sistema; es decir, tiene que forzarse la entrada al sistema en un punto particular del tiempo; pero, hay que tener cuidado en tal asignación para no obtener resultados distorsionados. Los datos que se utilizan en los experimentos de simulación pueden ser leídos de fuentes externas a la computadora, o bien, ser generados en forma interna por medio de subrutinas especiales.

Como último paso se debe utilizar los formatos adecuados para que los reportes de salida sean ordenados y entendibles para las personas que participan en la simulación.

Una vez escrito el programa para la computadora, hay que considerar el problema de validar o verificar el modelo para la simulación; esto es, ver qué tan bien coinciden los valores simulados de las variables de salida con los datos históricos conocidos; ver qué tan exactas son las predicciones del comportamiento del sistema real hechas por el modelo de simulación, para períodos futuros.

2.2.7 DOCUMENTACION

Durante la simulación deben documentarse cuidadosamente todos los pasos realizados, para tener en forma ordenada todos los detalles de la misma, que sirvan para entender claramente el proceso de simulación.

Cuando el modelo se considera que es válido, se procede a realizar algunas corridas del mismo con el fin de verificar la necesidad de eliminar parámetros o ratificar la validez del modelo, también, para tener información suficiente para verificar los resultados de la simulación.

Debe estar claro para el lector que la metodología sugerida en estas secciones, no es la única ni la mejor. Por lo general, cuando se requiere realizar una simulación, el analista crea su propia metodología la cual de hecho debe contener la mayoría de los puntos planteados en este contexto para lograr los objetivos de la misma.

Para entender mejor el proceso de planeación de los experimentos de simulación en computadoras, se da a continuación un diagrama de flujo general de la metodología aquí sugerida.

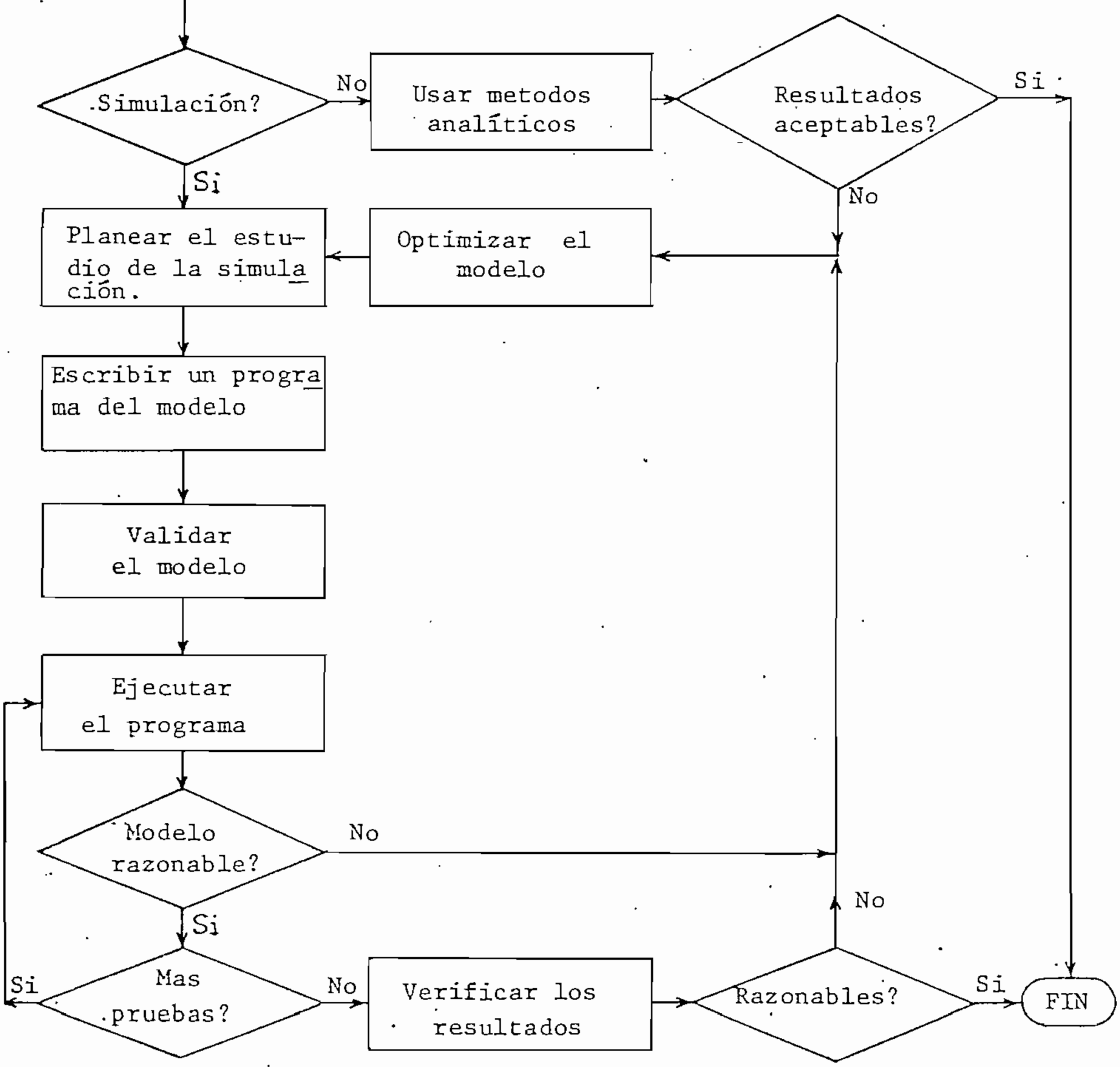


FIGURA 2.1 Diagrama de flujo de la planeación de experimentos para simulación en computadoras.

El bloque que indica "planear el estudio de simulación", se refiere a decidir los principales parámetros que se van a variar, el número de casos que se manejan y el número de corridas del programa que se requiere realizar. Este proceso ayudará a estimar la magnitud de la simulación y puede producir renovación del modelo. Por supuesto, no es posible planear todos los pasos con anticipación; el plan de estudio puede revisarse periódicamente, esto es, cada vez que los resultados estén disponibles, pero siempre debe tenerse claro para entender la forma en que se realiza el estudio.

CAPITULO III

NUMEROS ALEATORIOS Y VARIABLES ALEATORIAS

3.1 NUMEROS ALEATORIOS

3.2 VARIABLES ALEATORIAS

3.3 METODOS BASICOS PARA GENERAR VALORES DE VARIABLES ALEATORIAS

3.4 GENERACION DE VALORES DE VARIABLES ALEATORIAS

CAPITULO III

La base de este capítulo la contituyen los números aleatorios distribuídos uniformemente entre 0 y 1. Estos números servirán para generar los valores de las variables aleatorias a partir de cierta distribución de probabilidad.

En este capítulo se realiza un breve estudio de las técnicas para generar números aleatorios, sin enfatizar su principal argumento que es la Teoría de Números. También se estudiarán los métodos básicos para generar los valores de las variables aleatorias a partir de cierta distribución de probabilidad, siendo, por tanto, indispensable tener un conocimiento de la teoría de probabilidades.

3.1 NUMEROS ALEATORIOS

Se definen los números aleatorios, como valores numéricos gobernados por el azar e impredecibles para cualquier persona, teniendo cada uno de ellos la misma probabilidad de ocurrencia. Estos números son de gran importancia en una amplia variedad de aplicaciones, por ejemplo,

a) Simulación.- Cuando una computadora se usa para simular fenómenos naturales, los números aleatorios constituyen la base de la misma.

b) Muestreo.- A menudo es impráctico examinar todos los casos posibles de un sistema físico, pero una muestra aleatoria dará la información necesaria en algunas ocasiones.

c) Análisis Numérico.- Se han desarrollado técnicas muy eficientes , para resolver problemas numéricos complicados, usando números aleatorios.

d) Toma de decisiones, juegos recreativos, etc.

Debido a la importancia que día a día la simulación digital va adquiriendo, los analistas se han preocupado por mejorar los métodos de generación de números aleatorios.

Inicialmente, se usaron métodos manuales para generar los números aleatorios, que utilizan dispositivos mecánicos o electrónicos; tablas de biblioteca, que contenían una determinada cantidad de números aleatorios generados por algún método específico; métodos de computación análoga que utilizan una computadora análoga y que producen verdaderos números aleatorios.

Con la aparición de la computadora digital, se desarrollaron métodos más eficientes para generar los números aleatorios, siendo los más atractivos los denominados métodos de congruencias que generan números pseudoaleatorios por medio de una transformación indefinidamente continuada, aplicada a un grupo de números elegidos en forma arbitraria.

METODOS DE CONGRUENCIAS

Se basan en una relación fundamental que se expresa por medio de la siguiente fórmula recursiva.

$$n_{i+1} \equiv (an_i + c) \pmod{m} \qquad 3.1$$

donde n_i, a, c y m son entres positivos.

La expresión (mod m) se lee módulo m.

Desarrollando la ecuación (3.1) para i = 1, 2, 3 ....., se obtiene:

$$n_1 \equiv (an_0 + c) \pmod{m}$$

$$n_2 \equiv an_1 + c = (a^2n_0 + (a + 1)\ c) \pmod{m}$$

$$n_3 \equiv a^3n_0 + (a^2 + a + 1)c = (a^3n_0 + \frac{c(a^3-1)}{(a-1)}) \pmod{m}$$

$$\vdots$$

$$n_i \equiv (a^in_0 + \frac{c(a^i-1)}{(a-1)}) \pmod{m} \qquad 3.2$$

Así, dados un valor inicial n_0, un factor constante a y una constante aditiva c, las ecuaciones (3.2) conducen a una relación de congruencia (mod m) para todo valor de i en la sucesión $\{n_1, n_2, ..., n_i, ...\}$.

Cuando se desarrolla un método de congruencias, se debe tener mucho cuidado en la forma cómo se escogen n_0, a, c y m, pues estos determinarán el periodo de la sucesión de números aleatorios.

En la práctica, no se consigue generar sucesiones de números que tengan un período infinito; pero, si se han logrado resultados con perío dos bastante grandes. [1] y [2].

Se han desarrollado tres métodos básicos de congruencias para generar números pseudoaleatorios mediante el empleo de distintas versiones de la relación dada en la ecuación (3.1). El objetivo de cada uno de estos métodos es la generación de sucesiones con un período máximo y en un tiempo mínimo.

Estos métodos son:

1) Método aditivo de congruencias.-

Presupone K valores iniciales dados, con K un entero positivo, y computa una sucesión de números mediante la siguiente relación de congruencia:

$$n_{i+1} \equiv (n_i + n_{i-k})(\text{mod } m) \qquad 3.3.$$

Si K = 1, la ecuación (3.3) genera la bien conocida sucesión de Fibonacci. Este es el único método que produce períodos mayores que m.

2) Método multiplicativo de congruencias.-

Calcula una suceción $\{n_i\}$ de enteros no negativos, cada uno de los cuales siempre es menor que m, por medio de la relación de congruencia:

$$n_{i+1} \equiv (an_i)(\text{mod } m) \qquad 3.4$$

Este método es un caso especial de la citada relación de congruencia (ecuación 3.1), en donde c = 0. Se ha encontrado que el método multiplicativo se comporta de manera muy satisfactoria en lo que toca a su estadística; esto es, tanto las pruebas de frecuencia y las de serie, como otras pruebas relativas a la aleatoriedad, cuando se aplican a las sucesiones que se obtienen mediante este método indican que los números aleatorios así encontrados están uniformemente distribuídos y no correlacionados. [1].

Otra ventaja de este método, es que se puede imponer condiciones convenientes tanto para a como para n_0, asegurándose un período máximo. También ofrece otras ventajas en términos de velocidad de computación.

3) Método mixto de congruencias.-

Se obtiene la sucesión de números mediante la relación de congruencia dada por la ecuación (3.1). Esto es:

$$n_{i+1} \equiv (an_i + c)(\text{mod } m)$$

Este método ofrece algunas pequeñas ventajas, al compararlo con el método multiplicativo, en términos de incremento en la velocidad de computación y pérdida de periodicidad en los últimos dígitos. Su ventaja principal radica en su período completo. [1].

Como ya se mencionó, asociadas con la generación de números aleatorios, existen diversas pruebas estadísticas tanto empíricas como teóricas, las cuales permiten juzgar a los números aleatorios como tales o si,- plemente rechazarlos de esta clasificación de números.

Dentro de dichas pruebas estadísticas se consideran las siguientes, entre otras:

a) La prueba de frecuencia.
b) Pruebas de series.
c) La prueba del producto rezagado.
d) Pruebas de corridas.
e) La prueba de distancia.
f) La prueba de máximos.
g) La prueba del póker.

Dado que el interés de este trabajo no es realizar un estudio completo de los números aleatorios y sus consecuentes pruebas, sólo se las deja mencionadas. Además, se pueden encontrar detalles suficientes de éstas en la referencia [2] para el lector interesado en obtener mayor información de las mismas.

Lo que se deja claro es que, la solución de las pruebas estadísticas apropiadas para los números pseudoaleatorios siempre se encuentra limitada por un conjunto de elementos de decisión, para un generador dado y para una aplicación en particular. Existe evidencia empírica de que los métodos congruenciales multiplicativos, especialmente los combinados, producen números pseudoaleatorios aceptables que pasan todas las pruebas mencionadas.

En muchos casos, es recomendable para el usuario diseñar sus propias pruebas estadísticas, si es que ciertas funciones o propiedades de los números aleatorios no se cubren con las ya mencionadas y, que resultan ser cruciales en la evaluación o validación de los resultados.

3.2 VARIABLES ALEATORIAS

Al estudiar algún sistema real, sus características o funciones de operación, pueden describirse en términos de sus entradas, en estos casos se dice que sus características son determinísticas. Existen otros casos en donde sus características varían en forma aleatoria, en estos casos se tiene un proceso estocástico o aleatorio. En otras palabras, un proceso estocástico se define como un grupo ordenado en el tiempo de variables aleatorias que se representan por una secuencia de números aleatorios.

Una variable aleatoria puede ser discreta o contínua, dependiendo de los valores que asuma en el tiempo.

Supóngase que la variable X puede tomar los valores $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ con probabilidades $p_1, p_2, \ldots\ldots, p_n$ respectivamente. Esto es:

$$P(X = x_i) = p_i \qquad \text{para} \quad i = 1, 2, \ldots\ldots, n \qquad 3.5$$

Debido a que X puede asumir ciertos valores con probabilidades específicas, se dice que es una variable aleatoria discreta. Donde

$$\sum_{i=1}^{n} P_i = 1 \tag{3.6}$$

por lo tanto P_i (i = 1, 2, ..., n) es la distribución de probabilidad de X, a veces llamada función de distribución acumulativa.

Por el contrario, se dice que una variable aleatoria es contínua cuando no se limita a valores discretos, esto es, puede asumir un número infinito de valores.

La función de densidad de probabilidad de este tipo de variables se define como un valor positivo $f(x)$ y la probabilidad de que X asuma un valor en el rango x_1, x_2 está dada por:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx \qquad \text{con} \qquad f(x) \geq 0 \tag{3.7}$$

Así mismo, se define la función de distribución acumulativa como la probabilidad de que la variable aleatoria asuma un valor menor o igual a un valor dado; esto es

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\, dx \tag{3.8}$$

De esta definición $F(x)$ es un número positivo que varía entre 0 y 1, y, la probabilidad de que X tome un valor entre x_1 y x_2 es

$$F(x_2) - F(x_1) \tag{3.9}$$

A continuación se describen los métodos básicos usados para generar valores de variables aleatorias, en los cuales se usan las definiciones dadas.

3.3 METODOS BASICOS PARA GENERAR VALORES DE VARIABLES ALEATORIAS

Los algoritmos particulares desarrollados para generar valores de variables aleatorias, se usan de acuerdo al tipo de distribución que se desea generar. La base para dicha generación la constituyen los números aleatorios distribuídos uniformemente entre 0 y 1 y que se denotarán por r.

3.3.1 METODO DE LA TRANSFORMACION INVERSA

Este método considera la generación de valores x_i de las variables aleatorias, a partir de cierta estadística de población cuya función de densidad de probabilidad está dada por f(x), y su función de distribución acumulativa por F(x).

Supóngase que se desea generar una variable aleatoria contínua X que tiene una función de distribución acumulativa contínua F, creciente en el intervalo 0 a 1. Definiendo F^{-1} como la inversa de la función F, el algoritmo usado es,

1. Generar un número aleatorio r.
2. Hacer $X = F^{-1}(r)$.
3. Fin.

Nótese que $F^{-1}(r)$ será siempre definida, dado que $0 \leq r \leq 1$ y el rango de F es de 0 a 1. La figura (3.1) ilustra gráficamente el algoritmo.

Para demostrar que el valor de X generado tiene la distribución F deseada, se debe demostrar la ecuación (3.8) $P(X \leq x) = F(x)$. Como F es invertible, se tiene

$$P(X \leq x) = P(F^{-1}(r) \leq x) = P(r \leq F(x)) = F(x) \qquad 3.10$$

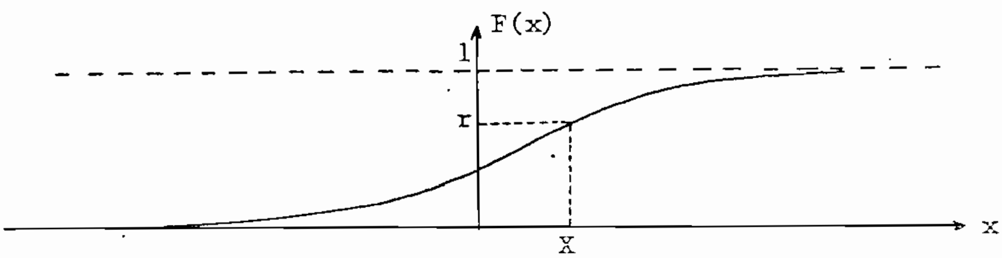


FIGURA 3.1 -Gráfico del método de la transformación inversa.

donde la última igualdad existe dado que r es distribuído uniformemente entre 0 y 1 y $0 \leq F(x) \leq 1$.

En resúmen, si se conoce la función de distribución acumulativa de una población (F), se pueden encontrar los valores de X tomando la inversa de la función F, una vez que se genera un número aleatorio r.

Este método puede aplicarse también para las variables discretas. La distribución acumulativa, en este caso es,

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{i=1}^{x} p(x_i) \qquad 3.11$$

Asumiendo que X sólo toma valores x_1, x_2, ..., x_i, ... y que

$x_1 < x_2 < \ldots < x_i < \ldots$, el algoritmo será,

1. Generar un número aleatorio r.
2. Determinar el entero positivo más pequeño i, tal que $r \leq F(x_i)$, y hacer $X = x_i$.
3. Fin.

La figura 3.2 ilustra el método, donde se genera $X = x_4$.

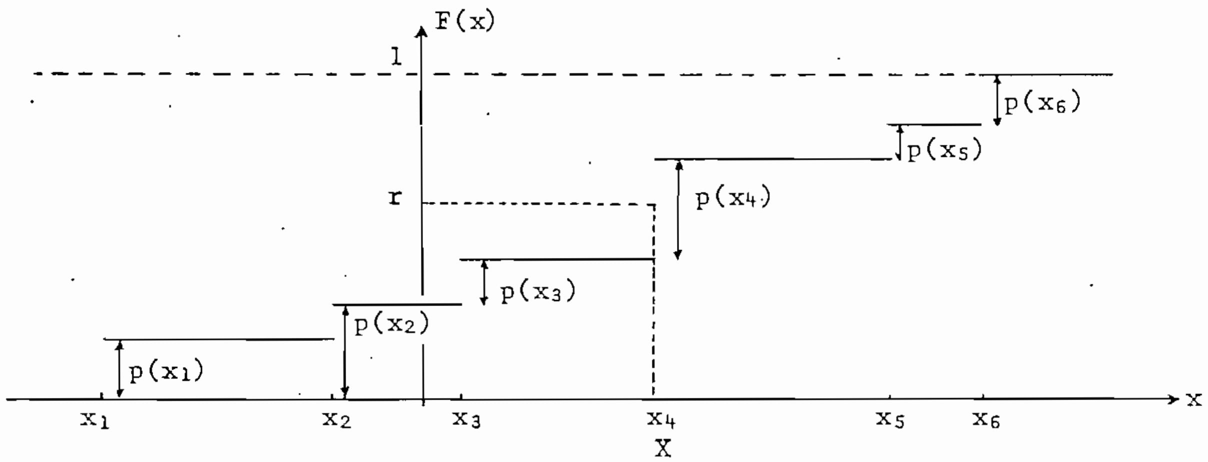


FIGURA 3.2 Método de la transformación inversa para variables discretas.

Para verificar que el método es válido se demuestra la ecuación (3.5) $P(X = x_i) = p_i$ para todo i. Para i = 1, será $X = x_1$ si y sólo si,

$$r \leq F(x_1) = p(x_1) \qquad 3.12$$

dado que los x_i están en orden creciente. Además, como r está distribuído uniformemente entre 0 y 1, se tiene que

$$P(X = x_1) = p(x_1) \qquad 3.13$$

como se deseaba. Para $i \geq 2$, el algoritmo hace $X = x_i$, si y sólo si, $F(x_{i-1}) < r \leq F(x_i)$, dado que i es el valor más pequeño tal que $r \leq F(x_i)$. Además, como r es distribuído uniformemte entre 0 y 1 y $0 \leq F(x_{i-1}) < F(x_i) \leq 1$, se tiene

$$P(X = x_i) = P(F(x_{i-1}) < r \leq F(x_i)) = F(x_i)-F(x_{i-1}) = p(x_i) \qquad 3.14$$

que es lo que se quería demostrar.

La principal desventaja que posee este método es que, para algunas distribuciones de probabilidad, no es posible obtenerse la inversa de la función acumulativa (ejemplo, la distribución normal), por lo que no podría ser usado. Así mismo, no constituye, para algunas de las distribuciones, el método de generación más rápido.

La principal ventaja la constituye el hecho de que necesita generar un solo número aleatorio r, para obtener un valor de X, en oposición a los otros métodos que por lo general necesitan más de un valor, como se verá más tarde.

3.3.2 METODO DE CONVOLUCION

Para algunas distribuciones importantes, la variable aleatoria X se puede expresar como una suma de otras variables aleatorias que son independientes y que pueden generarse más rápido que la generación directa de X.

Asumiendo que las variables aleatorias $Y_1, Y_2, \ldots Y_m$ son independientes, y que $Y_1 + Y_2 + \ldots\ldots + Y_m$ tiene la misma distribución de probabilidad de X, se puede escribir,

$$X = Y_1 + Y_2 + \ldots\ldots + Y_m \qquad 3.15$$

El algoritmo para este método es (siendo F la función de distribución de X y G la función de distribución de un Y_j):

1. Generar $Y_1, Y_2, \ldots\ldots, Y_m$ cada una con función de distribución G.
2. Hacer $X = Y_1 + Y_2 + \ldots\ldots + Y_m$
3. Fin.

Para demostrar la validez de este algoritmo, recuérdese que se asumió que $Y_1 + Y_2 + \ldots\ldots + Y_m$ y X tienen la misma función de distribución (sea F). Así,

$$P(X \leq x) = P(Y_1 + Y_2 + \ldots\ldots + Y_m \leq x) = F(x) \qquad 3.16$$

Este método genera fácilmente las variables Y_j y consigo X, siempre y cuando m (parámetro de la distribución), no sea muy grande.

3.3.3 METODO DE COMPOSICION

Llamado también método de mezclas, pues, se expresa la función de densidad de probabilidad f(x), como una mezcla probabilística de ciertas funciones de densidad g(x) seleccionadas adecuadamente. Esto es,

$$f(x) = \Sigma\, g_n(x)\, p_n \qquad 3.17$$

La selección de las $g_n(x)$, se hace sobre consideraciones a la bondad del ajuste y al objetivo de minimizar $\Sigma\, T_n p_n$; donde T_n es el tiempo esperado de computación para generar los valores de variables aleatorias a partir de $g_n(x)$.

La validación de este método se hará en cada caso que se use. (Ver distribución exponencial, método de minimización aleatoria).

3.3.4 METODO DE RECHAZO

Este método puede aplicarse para generar valores de variables continuas y discretas. Se considerará sólo el caso de variables continuas, ya que, para el caso de las discretas, es análogo.

Supóngase que se desea generar una variable aleatoria continua X, que tiene una función de distribución continua F y densidad f. El método requiere la especificación de una función g tal que maximice la función f, esto es, $g(x) \geq f(x)$ para todo x. Como se ve, g no es, en general, una función de densidad de probabilidad, ya que,

$$c = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, dx \geq \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1 \qquad 3.18$$

pero se puede definir una función $t(x) = g(x)/c$ que si lo será (asumiendo que g es tal que $c < \infty$). Así, se puede usar el siguiente algoritmo,

1. Genera una variable aleatoria Y con distribución t.

2. Generar un número aleatorio r, independiente de Y.
3. Si $r \leq f(Y)/g(Y)$, hacer X = Y y el algoritmo termina. En caso contrario regresar al paso 1.

El algoritmo continúa en un lazo, hasta que se genere un par de números (Y, r), para el cual $r \leq f(Y)/g(Y)$, entonces se acepta el valor de Y para X, en caso contrario se rechaza.

Para validar este método, se debe probar que

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\, dy \qquad 3.19$$

Sea A el evento de ocurrencia cuando se acepta X = Y (paso 3). Así X se define solamente sobre el evento A, el cual es un subespacio del espacio entero en el cual se definen Y y r. Por lo tanto, la probabilidad incondicional para X sólo es realmente probabilidad condicional (condicionado sobre A) en el espacio de Y y r. Luego, dado que A ocurre cuando X = Y, se puede escribir,

$$P(X \leq x) = P(Y \leq x|A) \qquad 3.20$$

donde $(\cdot|\cdot)$ denota la probabilidad condicional.

Por definición de probabilidad condicional,

$$P(Y \leq x|A) = \frac{P(A,\ Y \leq x)}{P(A)} \qquad 3.21$$

Para algún valor dado de y, se tiene,

$$P(A|Y = y) = P(r \leq \frac{f(y)}{g(y)}) \qquad 3.22$$

dado que r es independiente de Y. Debido a que r es distribuído uniformemente entre 0 y 1 y $g(y) \geq f(y)$, se puede decir que

$$P(A|Y = y) = P(r \leq \frac{f(y)}{g(y)}) = \frac{f(y)}{g(y)} \qquad 3.23$$

Luego,

$$P(A, Y \leq x) = \int_{-\infty}^{x} P(A, Y \leq x | Y = y)\ t(y)\ dy$$

$$= \int_{-\infty}^{x} P(A|Y = y)\ \frac{g(y)}{c}\ dy$$

$$= \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{x} f(y)\ dy \qquad 3.24$$

La probabilidad de ocurrencia de A es,

$$P(A) = \int_{-\infty}^{\infty} P(A|Y = y)\ t(y)\ dy \qquad 3.25$$

reemplazando (3.23) en (3.25),

$$P(A) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y)}{g(y)}\ t(y)\ dy \qquad 3.26$$

Como $t(y) = g(y)/c$,

$$P(A) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y)}{c}\, dy \qquad 3.27$$

Dado que f(y) es una función de densidad de probabilidad ($\int_{-\infty}^{\infty} f(y)dy=1$), se obtiene,

$$P(A) = \frac{1}{c} \qquad 3.28$$

Reemplazando (3.21), (3.24) y (3.28) en (3.20), da,

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\, dy \qquad 3.29$$

que es lo que queríamos demostrar.

3.4 GENERACION DE VALORES DE VARIABLES ALEATORIAS

En esta sección se desarrollan algoritmos particulares para generar valores de variables aleatorias, según alguna de las distribuciones de probabilidad que tienen mayor uso en el campo de la simulación. Se consideran tanto las distribuciones de probabilidad continuas, como las discretas.

DISTRIBUCIONES CONTINUAS DE PROBABILIDAD

3.4.1 DISTRIBUCION UNIFORME

Esta distribución es la más importante, puesto que, puede usarse para simular variables aleatorias con cualquiera de los demás tipos de distribuciones.

Se define una variable aleatoria continua, que toma todos los valores en el intervalo $[a, b]$, distribuída uniformemente, si su función de densidad de probabilidad está dada por (Figura 3.3)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b - a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{para otro valor} \end{cases} \qquad 3.30a$$

y de esta manera se satisface la condición

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \int_{a}^{b} \frac{1}{a - b}\, dx = 1 \qquad 3.30b$$

La función de distribución acumulativa es (Figura 3.4)

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = \frac{x - a}{b - a} \qquad 3.31$$

El valor esperado queda definido por

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx = \frac{b + a}{2} \qquad 3.32$$

y la variancia por

$$V(x) = E(x^2) - [E(x)]^2 = \frac{(b-a)^2}{12} \qquad 3.33$$

Para generar las variables con este tipo de distribución, se usa el método de la trasformación inversa. Esto es,

$$F(x) = r = \frac{x - a}{b - a}$$

obteniendo la inversa de la función F(x), da

$$x = F(r) = a + (b - a)\, r \qquad 3.34$$

Así, si se genera un número aleatorio r, distribuído uniformemente en el rango [0, 1], se obtiene un valor de la variable aleatoria distribuída uniformemente en el rango [a, b]. Este proceso se repite para obtener el número de valores deseados.

Si los datos se dan en términos estadísticos; esto es, el valor medio y la variancia, se debe calcular de antemano el intervalo [a, b]. Resolviendo las ecuaciones (3.32) y (3.33) se tiene

$$a = E(x) - \sqrt{3\,V(x)} \qquad 3.35$$

$$b = 2E(x) - a \qquad 3.36$$

En la figura 3.5 se da el diagrama de flujo de este método. Se usa las letras L_0 y L_1 en lugar de a y b respectivamente. Si se desean algunos valores de variable aleatoria distribuída uniformemente, se debe calcular de antemano (b - a), para ganar velocidad de cómputo.

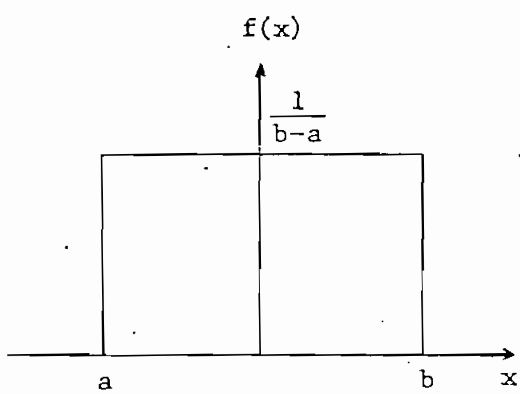


FIGURA 3.3 Función de densidad de probabilidad de la distribución uniforme.

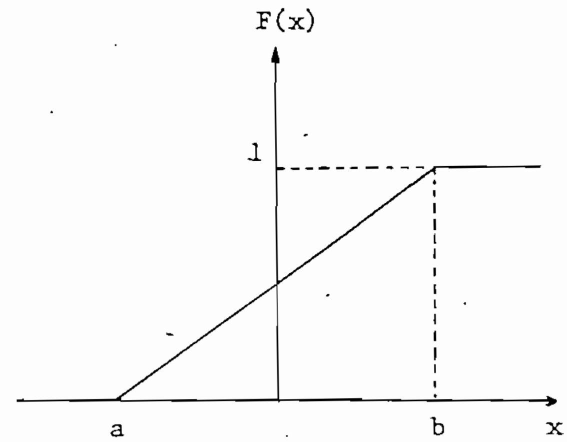


FIGURA 3.4 Función de distribución acumulativa de la distribución uniforme.

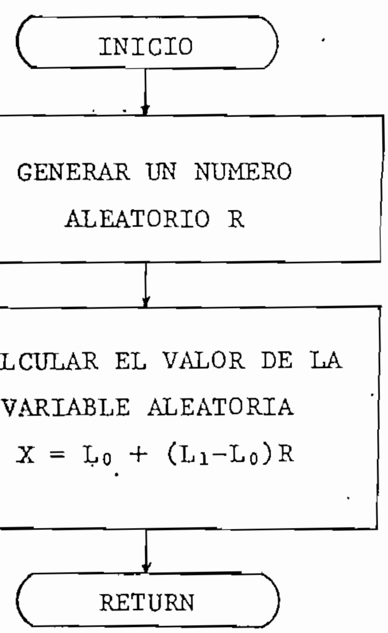


FIGURA 3.5 Diagrama de flujo de la subrutina P1 que genera valores de variables aleatorias distribuídas uniformemente en el rango $[L_0, L_1]$.

3.4.2 DISTRIBUCION EXPONENCIAL

Una variable aleatoria continua X que toma todos los valores positivos tiene una distribución exponencial con parámetro β , si su función de densidad de probabilidad está dada por

$$f(x) = \begin{cases} \beta \; e^{-\beta x} & \text{con } x \geq 0 \text{ y } \beta > 0 \\ 0 & \text{para otro valor} \end{cases} \qquad 3.37)$$

Este tipo de distribución es muy frecuente cuando se observa intervalos de tiempo definidos entre las ocurrencias de los eventos aleatorios distintos. Cuando la probabilidad de que en un intervalo corto ocurra un evento, independientemente de los otros eventos, es pequeña, el intervalo de tiempo entre ocurrencias de eventos está distribuído en forma exponencial [1].

La fórmula (3.37), satisface la condición

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$$

La función de distribución acumulativa, el valor esperado y la varianza, se expresan como

$$F(x) = \int_{0}^{x} f(t)\, dt = 1 - e^{-\beta x} \qquad 3.38$$

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx = \frac{1}{\beta} \qquad 3.39$$

$$V(x) = E(x^2) - [E(x)]^2 = \frac{1}{\beta^2} = [E(x)]^2 \qquad 3.40$$

En la figura 3.6 se da el gráfico de la f.d.p. y de F(x).

A continuación se describirán dos métodos para generar los valores de variable aleatoria con distribución exponencial.

1) METODO DEL LOGARITMO.-

Usa la técnica de la transformación inversa para generar los valores. Esto es,

$$r = F(x) = 1 - e^{-\beta x} \qquad 3.41$$

$$x = F^{-1}(r) = -\frac{1}{\beta}\ln(1 - r) \qquad 3.42$$

Dado que r es distribuido uniformemente, el valor 1 - r también lo es, por lo tanto, se puede hacer

$$x = - E(x) \ln r \qquad 3.43$$

Así, si se genera un número aleatorio r, se obtendrá un valor x con distribución exponencial de valor esperado F(x).

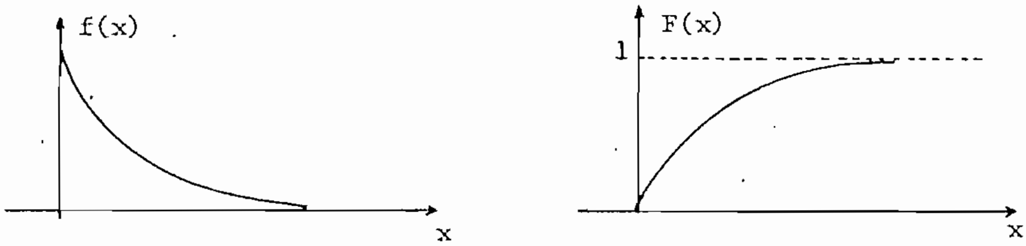


FIGURA 3.6 Funciones, densidad de probabilidad y acumulativa, para la distribución exponencial.

La figura 3.7 muestra el diagrama de flujo de este método

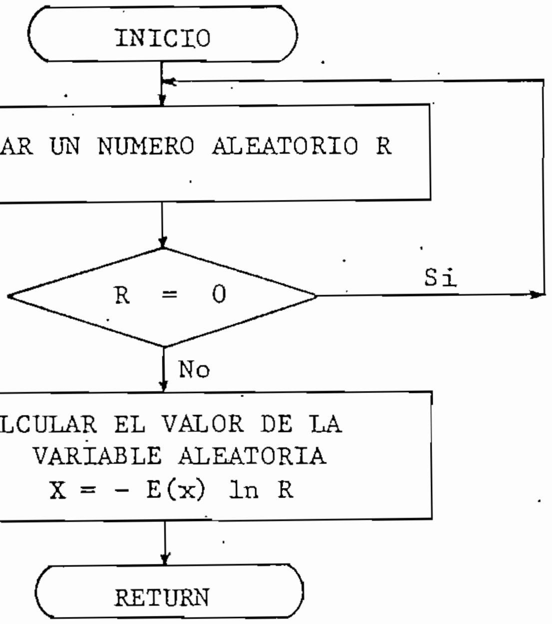


FIGURA 3.7 Diagrama de flujo de la subrutina P2 que genera valores de variable aleatoria con distribución exponencial, mediante el método del logaritmo.

2. METODO DE MINIMIZACION ALEATORIA.-

Este método genera valores de variable aleatoria con distribución exponencial con valor esperado igual a uno, sin usar una subrutina logarítmica. Este procedimiento constituye un ejemplo del método de composición.

Para obtener otro valor esperado, se debe darlo como dato y multiplicar los valores de las variables por el mismo.

Se usan dos tablas de constantes P(K) y Q(K), para $K \geq 1$, definidas por la función de distribución acumulativa y su inverso para un valor x = 1 respectivamente. Estas son

$$P(k) = F(x) = 1 - \frac{1}{e^k} \qquad 3.44a$$

$$Q(k) = \frac{1}{F(x)} = \frac{e}{e-1} = \frac{1}{e-1}\left(\frac{1}{1!}\ \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{k!}\right) \qquad 3.44b$$

donde el valor de k debe ser menor o igual al número máximo de dígitos de una palabra en el computador. En este caso K =14

En la figura 3.8 se da el diagrama de flujo correspondiente a este método, que se describe a continuación.

A1.- Se comienza calculando la parte fraccionaria del valor de la variable aleatoria, teniendo como objetivo que esta sea el valor menor posible. Hacer k = 1. Generar dos números aleatorios uniformes e independientes, sean R_0 y R_1. Hacer $X = R_1$.

A2.- Verificar si la minimización está hecha, esto es, preguntar si R_0 es menor que el valor de Q(k). Si resulta ser verdad, se habrá obtenido en X el número aleatorio distribuído uniformemente entre cero y uno que es menor en toda la secuencia, o sea ,

$$X = \min\,[R_1,\ R_2,\ \ldots\ R_k] \qquad 3.45$$

luego ir al paso A4. En caso de no ser verdad continuar al paso

A3.

A3.- Realizar la minimización.

Incrementar K (K = K + 1). Generar un nuevo número aleatorio R_k, y si el valor de X es menor que R_K (si $X < R_k$), hacer $X = R_k$, en caso contrario dejar el valor de X anterior. Regresar al paso A2.

A4.- Hasta aquí, se ha computado la parte fraccionaria de la respuesta, ahora se le sumará un entero apropiado a esta cantidad para completar el cálculo.

Generar un número aleatorio uniforme, R, y hacer K = 1.

A5.- Verificar si la corrección del valor de X está hecha. Esto es, preguntar si $R < P(k)$, en caso de ser verdad, el algoritmo se termina, obteniéndose en X el valor deseado de la variable aleatoria con distribución exponencial. En caso contrario continuar al paso A6.

A6.- Se realiza una corrección del valor de X por uno, esto es $X = X+1$ y se incremente K, (K = K + 1). Regresar al paso A5.

Para demostrar la validez de este método, se analiza primero la distribución de X al comienzo del paso A4. Si n es el valor final de K, se tiene que

$$X = \min (R_1, R_2, \ldots\ldots, R_n) \qquad 3.46$$

para números aleatorios uniformes(R_1, R_2, ..., R_n); así la probabilidad $P(X \leq x) = p_n(x)$ es la probabilidad de que min $(R_1, R_2, \ldots R_n) \leq x$, o sea, $R_1 \leq x$ o $R_2 \leq x$ o ..... o $R_n \leq x$. De la teoría de probabilidad se sabe que:

$$P(R_1 \cup R_2 \cup \ldots \cup R_n) = \sum_{i \geq 1}^{n} P(R_i) - \sum_{i<j=2}^{n} P(R_i \cap R_j) + \sum_{i<j<r=3}^{n} P(R_i \cap R_j \cap R_r) + \ldots$$

$$+ (-1)^{n-1} P(R_1 \cap R_2 \cap \ldots\ldots \cap R_n) \qquad 3.47a$$

Dado que los R_i son uniformemente distribuídos e independientes, tienen una probabilidad igual de ocurrencia (x)

$$P(R_1 \cup R_2 \cup \ldots \cup R_n) = nx - \binom{n}{2} x^2 + \binom{n}{3} x^3 + \ldots + x^n$$

$$= nx - \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^3 + \ldots + (-1)^{m-1} \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!} x^n$$

3.47b

Cambiando de signo y sumando y restando uno, da

$$P(X \leq x) = 1 - (1 - x)^n \qquad 3.47c$$

La probabilidad de que n es el valor final es p(n)

$$p(n) = Q(n) - Q(n - 1) = \frac{1}{(e - 1)n!}$$

así la probabilidad total de que $X \leq x$ es, para la parte fraccionaria de todos los valores de variable aleatoria,

$$\sum_{n\geq 1} p_n(x)\; p(n) = \sum_{n\geq 1} \frac{1-(1-x)^n}{(e-1)\; n!} \qquad 3.48a$$

desarrollando el sumatorio se obtiene que

$$\sum_{n\geq 1} p_n(x)\; p(n) = \frac{e(1-e^{-x})}{e-1} \qquad 3.48b$$

Similarmente, se encuentra de los pasos A4 - A6 que el valor más grande de X es menor o igual que un valor m dado, esto es, max $X \leq m$, tiene una probabilidad dada por la constante P(m+1). Así la probabilidad total de que $m \leq X \leq m + x$ es;

$$\left[P(m+1) - P(m)\right] \left[\frac{e}{e-1}\,(1 - e^{-x})\right] \qquad 3.49$$

reemplazando los correspondientes valores de P(k) (ecuación 3.44a), se tiene

$$P(m \leq X \leq m + x) = e^{-m} - e^{-(m+x)} = e^{-m}(1-e^{-x}) \text{ con } 0 \leq X \leq 1 \qquad 3.50$$

Esto prueba que X tiene una distribución $F(x) = 1 - e^{-x}$ para $0 \leq X < \infty$

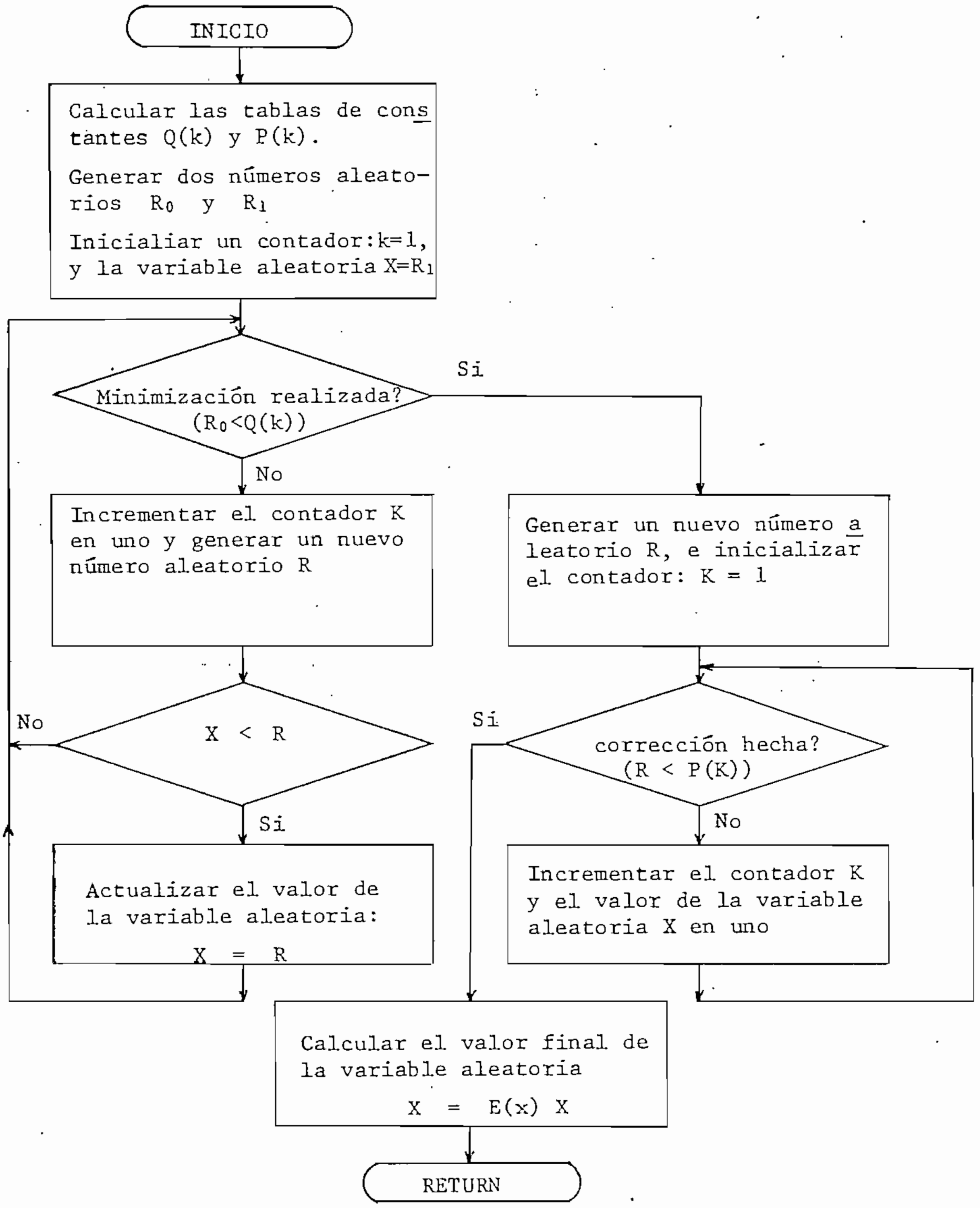


FIGURA 3.8 Diagrama de flujo de la subrutina P3 que genera valores de variable aleatoria con distribución exponencial (método de minimización aleatoria).

3.4.3 DISTRIBUCION NORMAL

La variable aleatoria X, que toma todos los valores reales $-\infty < x < \infty$, tiene una distribución normal o Gaussiana, con valor esperado μ y desviación estándar σ, si su f. d.p. está dado por:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad 3.51)$$

En la figura 3.9 se muestra el gráfico de esta función.

Si los valores de μ y σ son 0 y 1 respectivamente, la función recibe el nombre de distribución normal estándar. Cualquier distribución normal puede convertirse a la forma estándar haciendo la sustitución.

$$y = \frac{x-\mu}{\sigma} \qquad 3.52)$$

así, su f. d.p. sería

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \qquad 3.53$$

La función de distribución acumulativa no existe en forma explícita, pero se la puede obtener de tablas ya establecidas.

El valor medio y la variancia son

$$E(x) = \mu \qquad 3.54$$

$$V(x) = \sigma^2 \qquad 3.55$$

Esta distribución de probabilidad también cumple con la propiedad de que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$$

A continuación se dan dos métodos para generar los valores de variable aleatoria con distribución normal.

1) METODO DEL LIMITE CENTRAL.-

Este método utiliza el teorema del límite central, el cual establece:

Sea $X_1, X_2, \ldots\ldots X_n \ldots\ldots$ una sucesión de variables aleatorias independientes con $E(X_i) = \mu_i$ y $V(X_i) = \sigma_i^2$, $i = 1, 2, \ldots\ldots$ Sea $X = X_1 + X_2 + \ldots\ldots + X_n$. Luego bajo ciertas condiciones generales

$$Yn = \frac{X - \sum_{i=1}^{n} \mu_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2}} \qquad 3.56$$

tiene aproximadamente la distribución normal estándar [11].

Si las variables aleatorias independientes X_i se reemplazan por los números aleatorios r_i, generados en el intervalo [0, 1], se tiene

$$X = \sum_{i=1}^{n} r_i \qquad 3.57$$

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i = n\mu \qquad 3.58$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^{\,2} = n\sigma^2 \qquad 3.59$$

en donde $\mu = E\{r_i\} = \frac{1}{2}$; $\sigma^2 = \text{var}\,\{r_i\} = \frac{1}{12}$

Reemplazando en la ecuación (3.56) se tiene que

$$Yn = \frac{\sum_{i=1}^{n} r_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \qquad 3.60$$

Así, para generar los valores de las variables en la computadora, se debe sumar un número k de variables aleatorias independientes, distribuídas uniformemente en [0, 1]; con lo que las ecuaciones (3.58) y (3.59) serán

$$n\mu = \frac{k}{2} \qquad 3.61$$

$$n\sigma^2 = \frac{k}{12} \qquad 3.62$$

Por lo tanto

$$Y = \frac{\sum_{i=1}^{k} r_i - \frac{k}{2}}{\sqrt{\frac{k}{12}}} \qquad 3.63$$

Igualando las ecuaciones (3.52) y (3.63) se tiene

$$x = \sigma \left(\frac{12}{k} \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{k} r_i - \frac{k}{2} \right) + \mu \qquad 3.64$$

donde x es el valor de la variable aleatoria que se va a generar, con media μ y variancia σ

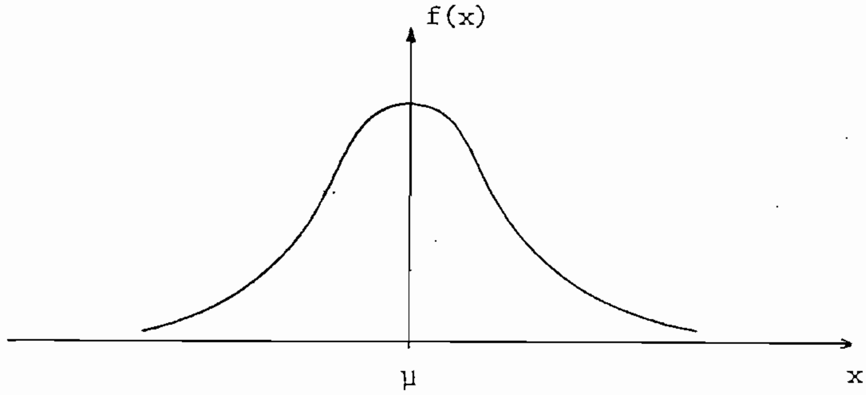


FIGURA 3.9 Función de densidad de probabilidad de la distribución normal o Gaussiana.

El valor de k, dependerá del objetivo de la generación de los valores . Si se requiere menor tiempo de cómputo, un valor apropiado sería k = 12, pues se evita realizar una división y una raíz cuadrada; la desventaja es que se limitan los valores obtenidos entre + 6 y - 6. Si se desea mayor precisión en los valores generados, se deberá usar un valor de k mayor.

En la figura 3.10 se da el diagrama de flujo para este método, en donde D representa la desviación estándar y E el valor esperado. Se usará un valor de k = 12.

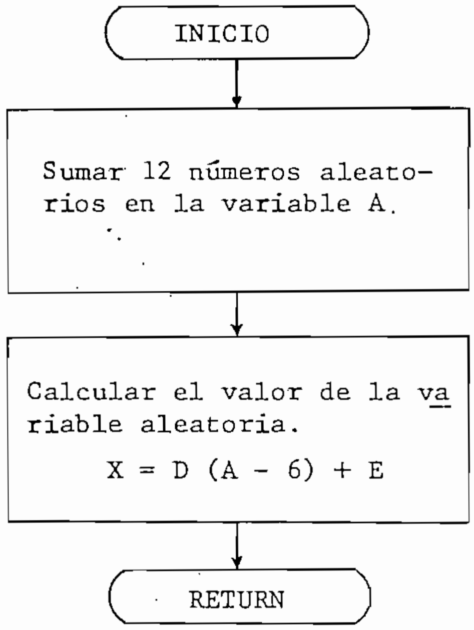


FIGURA 3.10 Diagrama de flujo de la subrutina P4 que genera valores de variable aleatoria con distribución normal con media E y variancia D^2, mediante el método del límite central.

2) METODO POLAR.-

Este método constituye un ejemplo de la técnica de rechazo.

Se generan dos valores de variables independientes distribuídas normalmente en la forma estándar, esto es, $\mu = 0$ y $\sigma^2 = 1$, usando dos variables independientes distribuídas uniformemente en el intervalo $[0, 1]$.

El procedimiento es el siguiente:

A1. Generar dos variables aleatorias independientes, sean R_0 y R_1, uniformemente distribuídas en el intervalo [0, 1], y hacer

$$V_1 = 2R_0 - 1 \qquad 3.65$$

$$V_2 = 2R_1 - 1 \qquad 3.66$$

así V_1 y V_2 estarán distribuídas uniformemente en el intervalo [-1, 1].

A2. Computar $$S = V_1^2 + V_2^2 \qquad 3.67$$

A3. Si $S \geq 1$, regresar al paso A1. Caso contrario continuar.

A4. Computar las variables distribuídas normalmente mediante las siguientes fórmulas

$$X_1 = V_1 \sqrt{\frac{-2\ln S}{S}} \qquad 3.68$$

$$X_2 = V_2 \sqrt{\frac{-2\ln S}{S}} \qquad 3.69$$

En la figura 3.11 se puede observar el diagrama de flujo de este método.

Para probar la validez de este método, se observa que: Si $S < 1$ en el paso A3, el punto en el plano cartesiano de coordenadas (V_1, V_2) es un punto distribuído uniformemente que cae dentro del círculo unitario. Transformando a coordenadas polares las ecuaciones (3.65) y (3.66), se tiene:

$$V_1 = R \cos \theta \qquad 3.70$$

$$V_2 = R \sin \theta \qquad 3.71$$

con lo que las ecuaciones (3.67), (3.68) y (3.69) se transforman en

$$S = R^2 \qquad 3.72$$

$$X_1 = \cos \theta \sqrt{-2\ln S} \qquad 3.73$$

$$X_2 = \operatorname{sen} \theta \sqrt{-2\ln S} \qquad 3.74$$

Pasando a coordenadas polares las ecuaciones (3.73) y (3.74), queda:

$$X_1 = R' \cos \theta' \qquad 3.75$$

$$X_2 = R' \sin \theta' \qquad 3.76$$

igualando (3.73) a (3.75) y (3.74) a (3.76) se obtiene que:

$$\theta' = \theta \qquad 3.77$$

$$R' = \sqrt{-2\ln S} \qquad 3.78$$

Por lo tanto θ' y R' son independientes, dado que R y θ son independientes y caen en el círculo unitario. También, θ' es distribuído uniformemente entre 0 y 2π; y la probabilidad de que $R' \leq r$ es la probabilidad de que $-2\ln S \leq r^2$, esto es, la probabilidad de que $S \geq e^{-r^2/2}$, y es igual a $1 - e^{-r^2/2}$, ya que $S = R^2$ está distribuída uniformemente entre cero y uno.

La probabilidad de que R' esté dentro del rango r y r+dr es por lo tanto la derivada de $1 - e^{-r^2/2}$ respecto a r, o sea, $r\, e^{-r^2/2} dr$. Similarmente, la probabilidad de que θ' esté entre θ y θ + dθ es $(1/2\,\pi) d\theta$. Luego, la probabilidad de que $X_1 \leq x_1$ y que $X_2 \leq x_2$ es:

$$\int_{\{(r,\,\theta)\mid r\cos\theta \leq x_1,\; r\sin\theta \leq x_2\}} \frac{1}{2\pi}\, e^{-r^2/2}\, r\, dr\, d\theta \tag{3.79}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\{(x,\,y)\mid X_1 \leq x_1;\; X_2 \leq x_2\}} e^{-(x_1^2 + x_2^2)/2}\, d\,x_1 dx_2 \tag{3.80}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x_1} e^{-x_1{}^2/2}\, dx_1\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x_2} e^{-x_2{}^2/2}\, dx_2\right) \tag{3.81}$$

De la fórmula (3.81) se ve que X_1 y X_2 son independientes y distribuídas normalmente, como se deseaba.

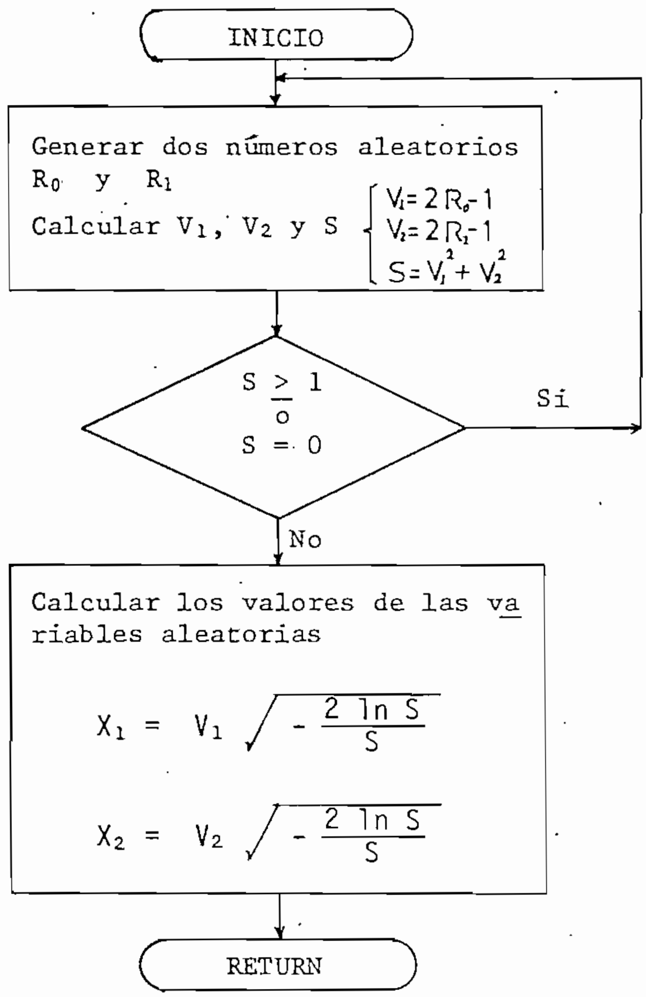


FIGURA 3.11 Diagrama de flujo de la subrutina P5 que genera valores de variable aleatoria con distribución normal estándar.

DISTRIBUCIONES DISCRETAS DE PROBABILIDAD

En esta sección se dan algunos algorítmos para generar las variables aleatorias con las distribuciones discretas de probabilidad más importantes.

Este tipo de distribuciones aparecen en los modelos para procesos de conteo, donde un atributo dicotómico es gobernado por el azar. También aparecen, cuando medidas continuas son redondeadas sobre una escala discreta.

La distribución acumulativa, como ya se dijo, para estas distribuciones es,

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{j} f(x) \qquad 3.82$$

donde la suma se toma sobre todos los índices j que satisfacen $x_j \leq x$, y f(x) es la frecuencia o función de probabilidad de X, definida para valores enteros de x tales que

$$f(x) = P(X = x) \quad \text{para } x = 0, 1, \ldots \qquad 3.83$$

3.4.4 DISTRIBUCION GEOMETRICA

A veces se realiza un experimento (llamado de Bernoulli) para ver la ocurrencia o no ocurrencia de algún evento A. Si las repeticiones del experimento son independientes, y en cada una de ellas, la probabilidad de ocurrencia de A, i.e., P(A) = p, y la probabilidad de no ocurrencia de A, $P(\bar{A}) = q$, son constantes, se puede definir una variable aleatoria X como el número de repticiones necesarias hasta incluir la primera ocurrencia de A, con

$$P(X = k) = q^{k-1}p, \quad , \quad k = 1, 2 \ldots \qquad 3.84$$

esto es, la probabilidad de que A ocurre en la k-ésima repetición. Se dice entonces que X es una variable aleatoria con distribución geométrica.

Si se designa el número de repeticiones necesarias antes de que ocurra A como x, se tiene que

$$f(x) = p\, q^{x} \quad , \quad x = 0, 1, 2, \ldots \qquad 3.85$$

Para esta distribución se definen:

Función de distribución acumulativa

$$F(x) = \sum_{x=0}^{x} p\, q^{x} \qquad 3.86$$

Valor esperado

$$E(x) = \sum_{x=0}^{\infty} x\, f(x) = \frac{q}{p} \qquad 3.87$$

Variancia

$$V(x) = E(x^2) - [E(x)]^2 = \frac{q}{p^2} = \frac{E(x)}{p} \qquad 3.88$$

Esta distribución también cumple con la propiedad

$$\sum_{x=0}^{\infty} f(x) = 1$$

Para generar los valores de la variable aleatoria con este tipo de distribución, se puede usar uno de los dos métodos que se describen a continuación.

1) PRIMER METODO

Utiliza la técnica de la transformación inversa.

Por definición,

$$P(x = 0) = F(0) = p \tag{3.89}$$

Por lo tanto el rango de variación de F(x) será

$$p \leq F(x) \leq 1 \tag{3.90}$$

Así mismo,

$$P(X > x) = 1 - F(x) \tag{3.91}$$

$$P(X > 0) = 1 - p = q \tag{3.92}$$

Luego:

$$P(X > x) = 1 - F(x) = qq^{x} = q^{x+1} \tag{3.93}$$

Como el rango de variación de $(1 - F(x))/q$ es unitario, se puede hacer

$$r = q^{x} \tag{3.94}$$

y consecuentemente

$$x = \frac{\ln r}{\ln q} \tag{3.95}$$

así, redondeando x al valor entero menor, se obtiene el valor de la variable aleatoria deseado.

En la figura 3.12 se da el diagrama de flujo de este método.

2) SEGUNDO METODO

Utiliza la técnica de rechazo para generar las variables aleatorias. Se recomienda este método cuando se requiere una mejor precisión para valores grandes de p, (p + q = 1).

El diagrama de flujo se muestra en la figura 3.13, y la metodología a seguirse es la siguiente-

A1. Se define la variable X como un contador del número de fallas (i.e, no ocurrencia de un evento). Inicialmente X = 0.

A2. Se genera una variable aleatoria independiente y uniformemente distribuída, sea esta R.

A3. Si R $\leq$ p, el algoritmo se termina, teniéndose en X la variable aleatoria con distribución geométrica, en caso contrario continuar al paso A4.

A4. Incrementar el contador, X = X + 1, y regresar al paso A2.

El diagrama de flujo de este método se muestra en la figura 3.13.

El método es válido dado que se está aplicando la definición de distribución geométrica, esto es, se observan todos los eventos que son fracasos hasta que ocurre el primer éxito, por lo tanto, el valor de la variable aleatoria tendrá una distribución geométrica. Para ganar velocidad de cómputo, se debe calcular primero ln q.

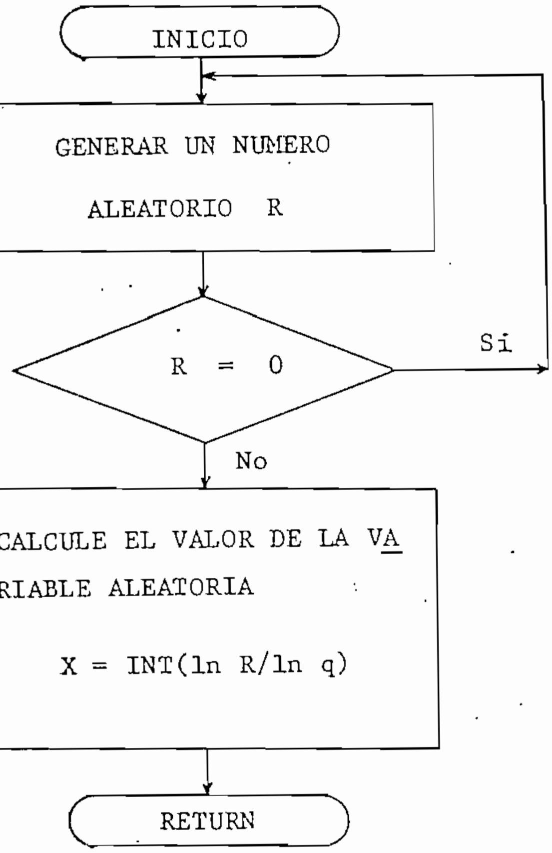


FIGURA 3.12 Diagrama de flujo de la subrutina P6 que genera valores de variable aleatoria con distribución geométrica (primer método).

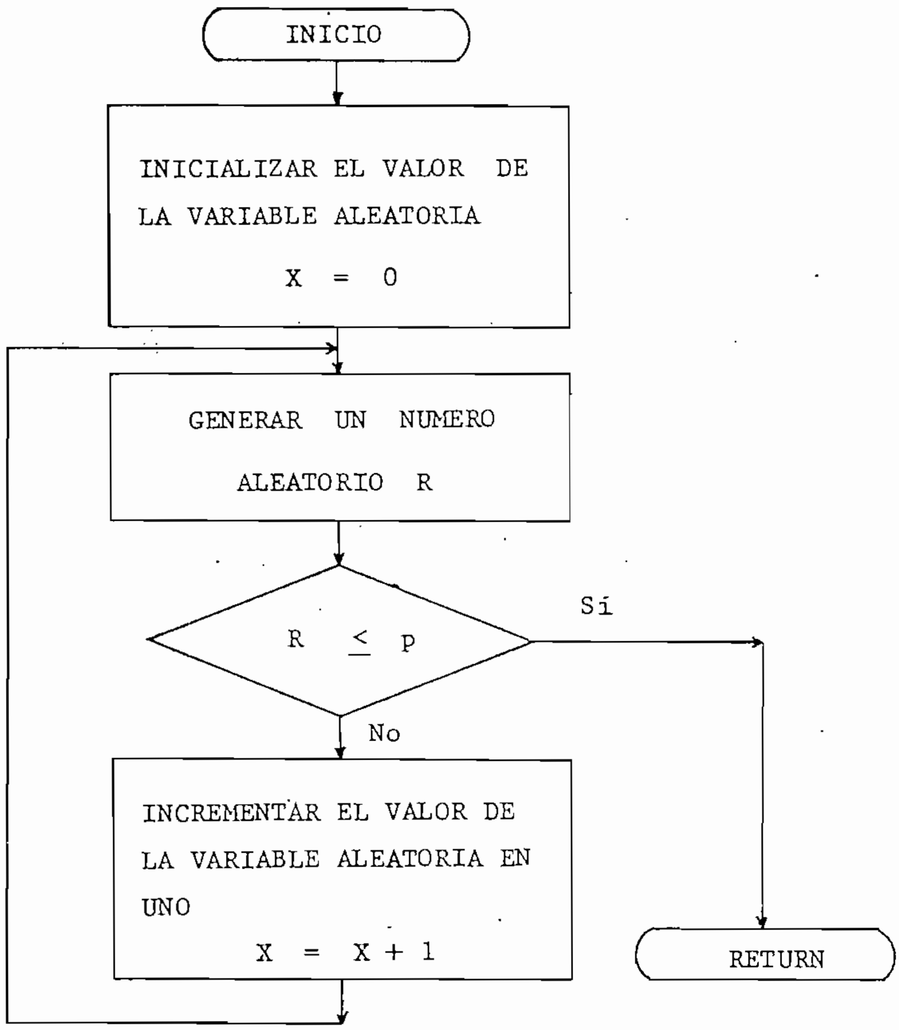


FIGURA 3.13 Diagrama de flujo de la subrutina P7 que genera valores de variable aleatoria con distribución geométrica (segundo método).

3.4.5 DISTRIBUCION BINOMIAL NEGATIVA

Si un experimento se continúa hasta obtener k ocurrencias de un evento A, y si la probabilidad de que ocurra A es $P(A) = p$ y la probabilidad de que no ocurra es $P(\bar{A}) = 1 - p = q$, en cada una de las repeticiones, se puede definir una variable X como el número de repeticiones necesarias a fin de que A ocurra exactamente k veces. Así, será X = L si y sólo si A ocurre en la L-ésima repetición y precisamente A ocurrió (k - 1) veces en la (L - 1) repeticiones previas. La probabilidad de este suceso es

$$p \binom{L-1}{k-1} p^{k-1} q^{L-k} \qquad 3.96$$

puesto que lo que sucede en las primeras (L-1) repeticiones es independiente de lo que sucede en la L-ésima repetición. Luego

$$P(X = L) = \binom{L-1}{k-1} p^{k} q^{L-k}, \quad L = k, k+1 \qquad 3.97$$

Una variable aleatoria con este tipo de distribución de probabilidad (ecuación 3.97), tiene una distribución binomial negativa o de Pascal [11].

El valor esperado y la variancia están dados por

$$E(x) = \frac{k}{p} \qquad 3.98$$

$$V(x) = \frac{kq}{p^2} \qquad 3.99$$

Para generar los valores de variable aleatoria, en una computadora, se debe notar primero que, si el número de ocurrencias (éxitos) deseados es igual a uno, se obtiene exactamente la distribución geométrica, luego se puede sumar k valores de variable aleatoria con distribución geométrica para obtener la binomial negativa. O sea el valor de la variable aleatoria será,

$$x = \frac{\sum_{i=1}^{k} \ln r_i}{\ln q} \qquad 3.100$$

o

$$x = \frac{\ln \left(\prod_{i=1}^{r} r_i \right)}{\ln q} \qquad 3.101$$

el cual se redondea al entero menor.

En la figura 3.14 se da el diagrama de flujo de la metodología para generar los valores de variable aleatoria a partir de la distribución binomial negativa, donde k es el número de éxitos deseados y q la probabilidad de fracasos.

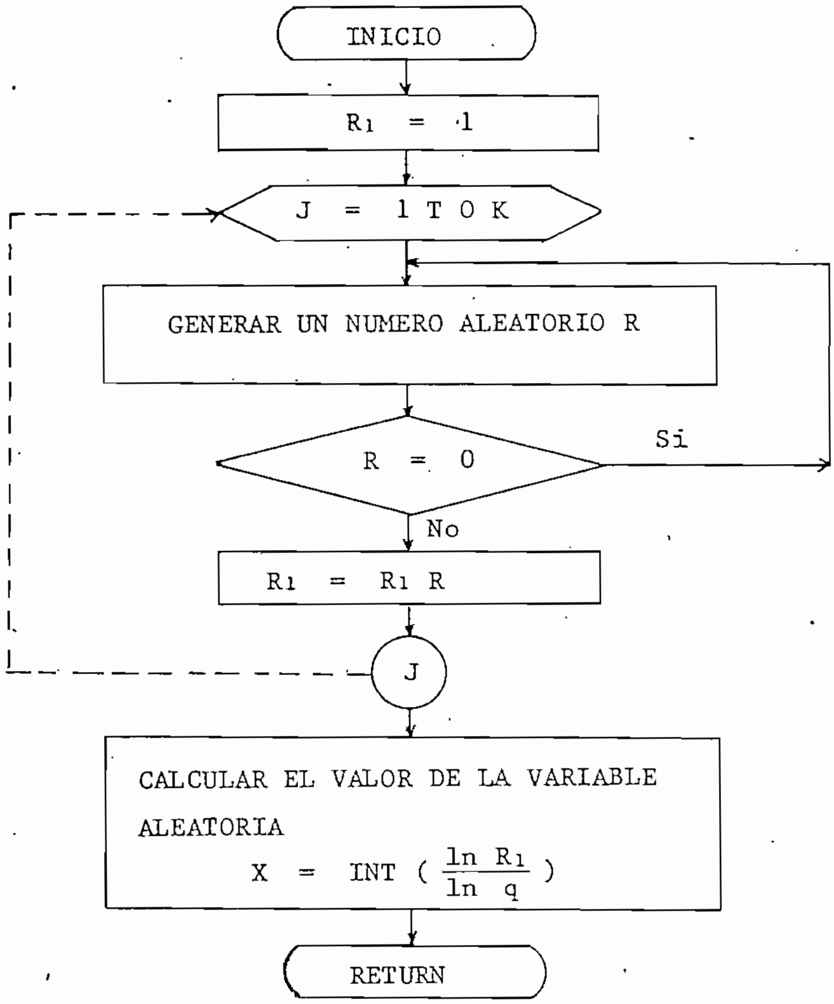


FIGURA 3.14 Diagrama de flujo de la subrutina P8 que genera valores de variable aleatoria con distribución binomial negativa.

3.4.6. DISTRIBUCION BINOMIAL

La variable aleatoria que define el número de eventos exitosos, en un experimento que se repite n veces, (las n repeticiones se llaman ensayos de Bernoulli), cuya probabilidad de éxito es p, tiene una distribución binomial con parámetros n y p.

La función de distribución de probabilidad es,

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \qquad 3.102$$

donde x es el número de éxitos, n el número de repeticiones del experimento y $q = 1 - p$.

Existen 2^n sucesos incluídos éxitos y fracasos. Los valores posibles de la variable aleatoria X serán 0, 1, 2, ... n.

El diseño de una muestra aleatoria de n elementos es análoga a n ensayos independientes de Bernoulli, en los que X es una variable binomial que denota el número de elementos, con atributos idénticos, de la muestra. Esta distribución constituye un modelo importante en las áreas de muestreo y control de calidad.

El valor esperado y la variancia están dados por;

$$E(x) = np \qquad 3.103$$

$$V(x) = npq \qquad 3.104$$

Esta distribución puede aproximarse a una distribución normal cuando el número de repeticiones (n) es grande.

Para generar los valores de variable aleatoria con distribución binomial, se usa el método de rechazo y la reproducción de ensayos de Bernoulli, i.e, generando variables aleatorias cuyos valores sean 0 ó 1 para fracasos y éxitos de los eventos respectivamente, y luego sumando dichas va riables.

Este argumento, una vez fijados los valores de n y p, se interpreta como sigue:

A1. Fijar un contador X en cero, $X = 0$

A2. Generar un número aleatorio R_i distribuído uniformemente entre cero y uno, con $i = 1, 2 \ldots n$.

A3. Si $R \leq p$ se incrementa el contador, $X = X + 1$; en caso contrario no. Regresar al paso A2, hasta que i sea igual a n.

De esta manera, se estarán sumando las variables que representan los ensayos de Bernoulli.

En al figura 3.15 se muestra el diagrama de flujo.

Para demostrar la validez de este método, considérese la probabilidad de que $X = x$. Si se supone que los x primeros R_i(con $i = 1, 2 \ldots x$), son menor o igual a p, se tendrán que los (n-x) R_i restantes serán mayor que p. Esto es,

$$R_i \leq p \qquad \text{con } i = 1, \ldots x$$

$$R_i > p \qquad \text{con } i = x + 1 \ldots n-x$$

Así, la probabilidad de que $X = x$ es la probabilidad de que

$$\prod_{i=1}^{x} R_i \leq p$$

y

$$\prod_{i=x+1}^{n-x} R_i > p$$

Dado que los R_i tienen igual probabilidad, esto será

$$p^x \ (1 - p)^{n-x} \qquad 3.105$$

Pero, esta misma probabilidad se puede obtener de cualquier otro resultado para el cual $X = x$. El número total de tales resultados, es la combinación $\binom{n}{x}$, por lo que se eligen x posiciones de las n para los éxitos. Así, debido a que los resultados o combinaciones son mutuamente excluyentes, se tiene.

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \qquad 3.106$$

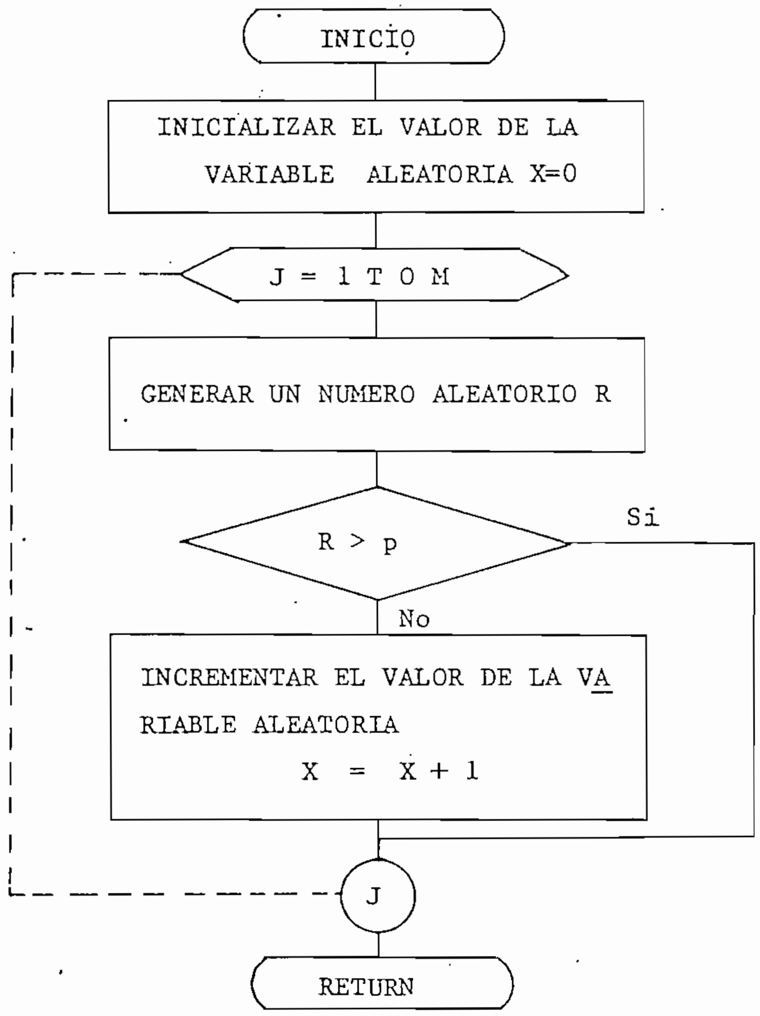


FIGURA 3.15 Diagrama de flujo de la surutina P9 que genera valores de variables aleatorias con distribución binomial. M representa el número de repeticiones (n) y p la probabilidad de éxito

3.4.7 DISTRIBUCION HIPERGEOMETRICA

Supóngase que se tiene una población que consta de N elementos tales que cada uno de ellos pertenece a la clase I o a la clase II, y se escoge, al azar, n elementos de la población (n < N), sin sustitución.

Sea Np el número de elementos que pertenecen a la clase I y Nq el número de elementos que pertenecen a la clase II, siendo p + q = 1. Puesto que X = x si y sólo si se obtienen exactamente x elementos de la clase I (de los Np elementos) y exactamente (n-x) elementos de la clase II (de los Nq elementos), entonces.

$$P(X = x) = \frac{\binom{Np}{x}\binom{Nq}{n-x}}{\binom{N}{n}} \quad \text{para } 0 \leq x \leq Np \quad 0 \leq n - x \leq Nq \qquad 3.107$$

Se dice que una variable aleatoria discreta que tiene la distribución de probabilidad de la ecuación (3.107) tiene una distribución hipergeométrica. Los valores de n, x y N son enteros.

En las áreas de control de calidad y en el control de producción con mayor frecuencia se encuentran las aplicaciones de la distribución hipergeométrica.

El valor esperado y la variancia son:

$$E(x) = np \qquad 3.108$$

$$V(x) = n\,p\,q\left(\frac{N - n}{N - 1}\right) \qquad 3.109$$

La generación de valores hipergeométricos involucra la simulación de experimentos de muestreo sin reemplazo. En otras palabras, bastará sencillamente con que se altere el método de ensayos de Bernoulli para generar valores binomiales, con objeto que N y p varíen en forma depen -

diente respecto al número total de elementos que previamente se han obtenido entre la población y el número de elementos de la clase I que se han extraído. A medida que se extrae un elemento de una muestra de n elementos, se reduce el valor de N = No de acuerdo con la fórmula:

$$N_i = N_{i-1} - 1 \qquad i = 1, 2, \ldots, n \qquad 3.110$$

De manera similar, el valor de p = po se transforma según la fórmula:

$$p_i = \frac{N_{i-1}\, p_{i-1} - S}{N_{i-1} - 1} \qquad i = 1, 2, \ldots, n \qquad 3.111$$

a medida que se saca el i-ésimo elemento de la muestra de n elementos, donde S = 1 cuando el elemento de muestreo (i - 1) pertenece a la clase I y S = 0 si pertenece a la clase II.

Ciertamente, los valores iniciales de No y po corresponden: a N, el tamaño inicial de la población y a p, la proporción de la población total que consta de elementos de la clase I.

En la figura 3.16 se describe el diagrama de flujo para generar los valores con esta distribución, en donde M1 representa a n, tamaño de la muestra escogida de la población, M representa a N, tamaño de la población, p la probabilidad de la clase I y S la variable igual a 1 ó 0.

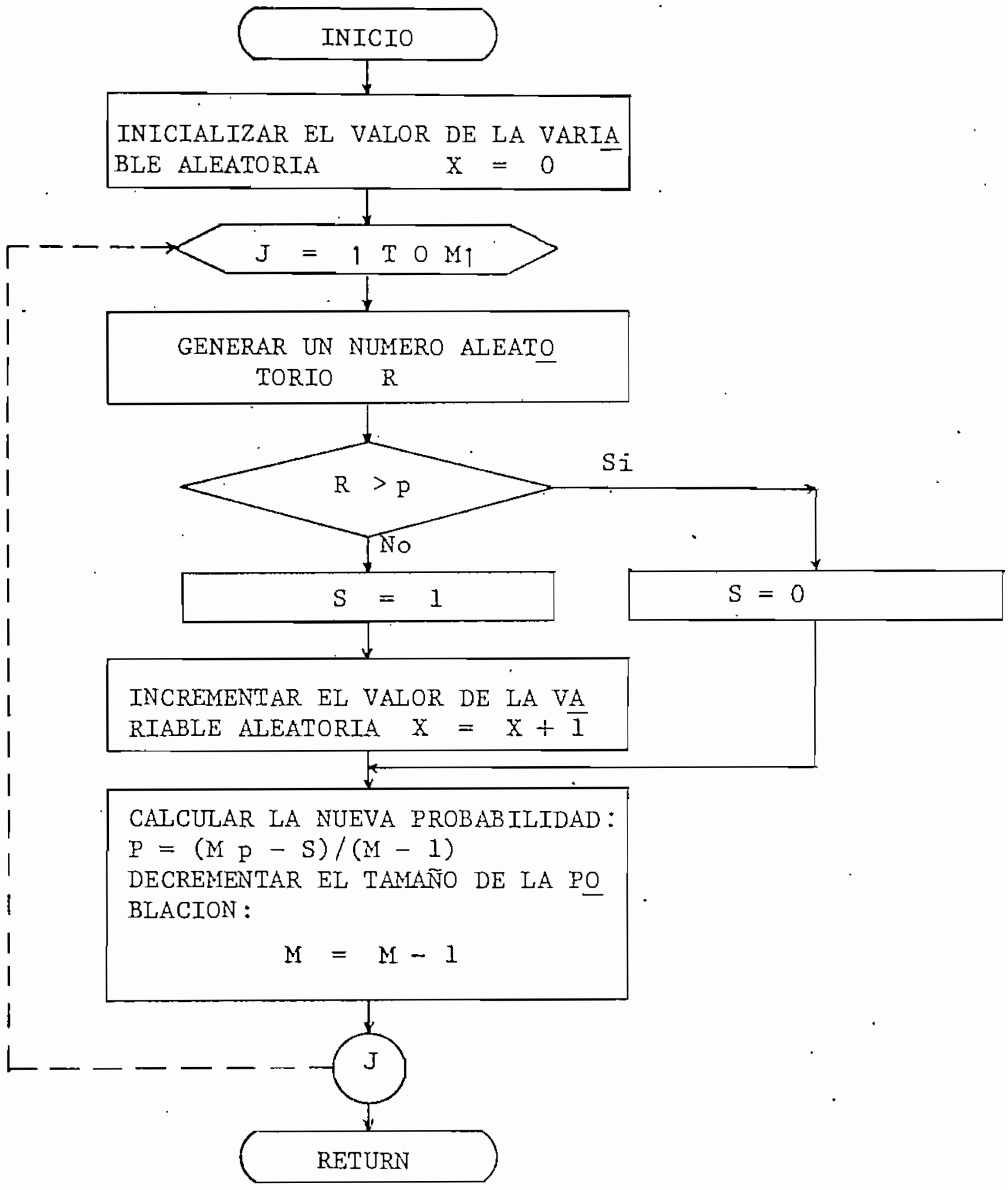


FIGURA 3.16 Diagrama de flujo de la subrutina P10, que genera valores de variable aleatoria con distribución hipergeométrica.

3.4.8 DISTRIBUCION DE POISSON

Los eventos que se distribuyen en forma poissoniana ocurren frecuentemente en la naturaleza; por ejemplo, el número de llamadas que llegan a una gran central telefónica en un determinado período, díganse tres horas, puede ser considerablemente grande. Aún así, resulta muy pequeña la probabilidad de que 0, 1, 2, etc. llamadas lleguen en un determinado segundo. Por lo tanto, se puede esperar que en un período determinado, la probabilidad de que lleguen 0, 1, 2, etc. llamadas, obedecerá a las leyes de la distribución de Poisson.

Esta distribución es particularmente útil cuando se trata con problemas en los que se da la ocurrencia de eventos aislados sobre un intervalo contínuo de tiempo, o bien cuando resulta posible observar el número de veces que ocurre un evento aunque no el número de veces que no ocurre.

Si se toman n ensayos independientes de Bernoulli, en cada uno de los cuales se tenga una probabilidad p muy pequeña relativa a la ocurrencia de un cierto evento, a medida que n tiende al infinito, la probabilidad de x ocurrencias está dada por la distribución de Poisson, cuya función de probabilidad es

$$f(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \quad \text{para} \quad \lambda > 0 \qquad 3.112$$

siempre y cuando p se aproxime a cero de manera que se satisfaga la relación $\lambda = np$ consistentemente.

El valor esperado y la variancia de esta distribución se caracterizan como sigue:

$$E(x) = \lambda \qquad 3.113$$

$$V(x) = \lambda \qquad 3.114$$

Para generar los valores de variable aleatoria con distribución de Poisson se deben generar intervalos t_1, t_2, ..., distribuídos en forma exponencial con un valor esperado igual a uno. Una vez generados estos intervalos aleatorios, se acumulan hasta que su suma exceda el valor de λ.

En términos matemáticos, el valor poissoniano x se determina usando la siguiente desigualdad:

$$\sum_{i=0}^{x} t_i \leq \lambda < \sum_{i=0}^{x+1} t_i \qquad (x = 0, 1, 2, \ldots) \qquad 3.115$$

donde los valores de la variable aleatoria t_i se generan por medio de la fórmula

$$t_i = -\ln r_i \qquad 3.116$$

con una media unitaria.

La fórmula (3.115) puede transformarse en la siguiente:

$$\prod_{i=0}^{x} r_i \geq e^{-\lambda} > \prod_{i=0}^{x+1} r_i \qquad 3.117$$

El diagrama de flujo de este método se muestra en la figura 3.17, en donde P representa la constante λ.

Para validar este método, supóngase el eje de tiempo dividido en intervalos cortos dt. El tiempo hasta obtener un evento excede un valor especificado t si, y solamente si, el primero, segundo, ... $\left(\frac{t}{dt}\right)$ -ésimo in tervalo no contienen un evento requerido; así, la probabilidad de que

$$P(T \geq t) = (1 - \lambda dt)^{t/dt} \qquad 3.118$$

Si, se hace $dt \to 0$, la expresión anterior tenderá al valor $e^{-\lambda t}$.

Por tanto la función de distribución de t, i.e. la probabilidad de que el tiempo hasta el próximo evento sea menor o igual a un t especificado, es

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t} \qquad 3.119$$

y la función de densidad de probabilidad es

$$f(t) = \frac{d\,F(t)}{d\,t} = \lambda\, e^{-\lambda t}$$

que es la distribución exponencial.

Por lo tanto, esto valida el método, dado que la distribución de Poisson para eventos, implica una distribución exponencial para los tiempos entre eventos.

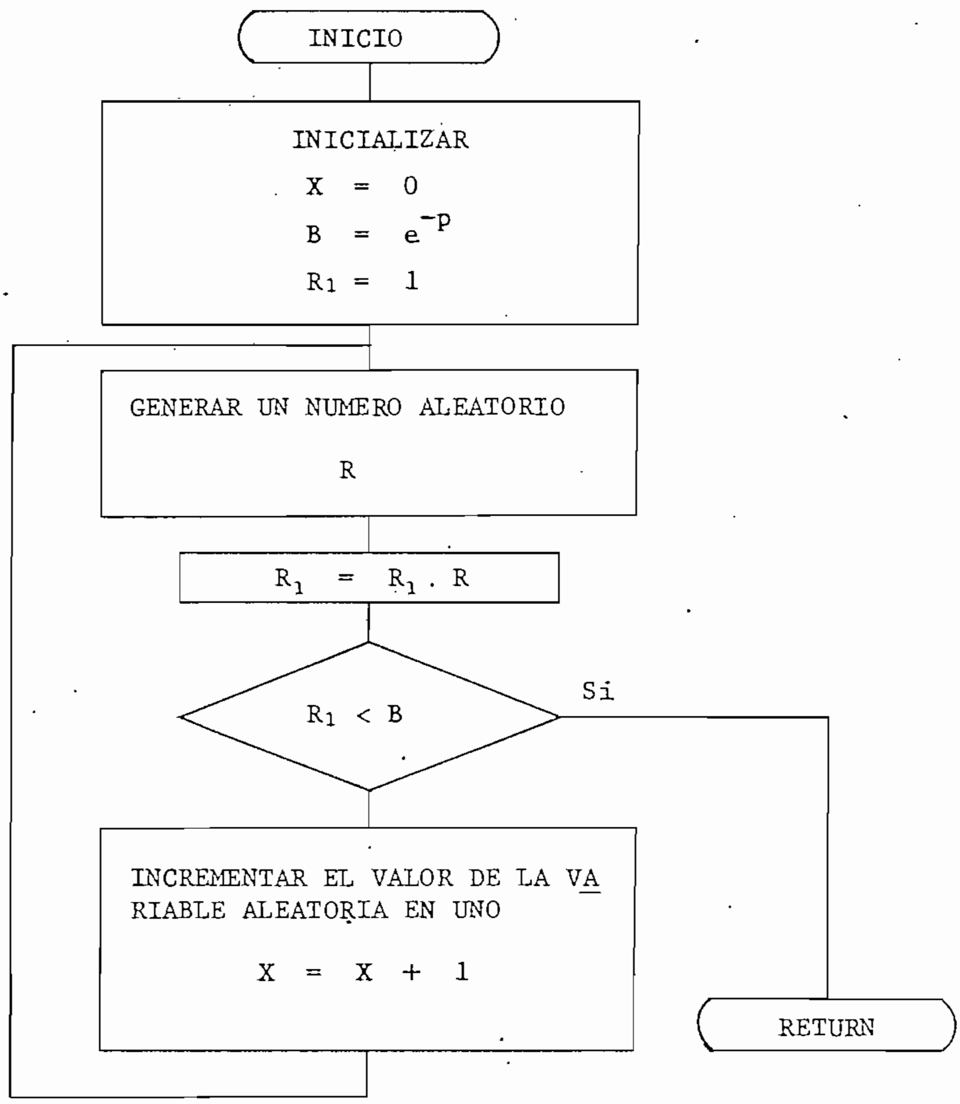


FIGURA 3.17 Diagrama de flujo de la subrutina P11 que genera valores de variable aleatoria con distribución de Poisson.

Como ya si dijo, y se puede notar en los diagramas de flujo descritos, se hace necesario usar un generador de números aleatorios para generar los valores de variables aleatorias.

En la computadora TEKTRONIX 4051 usada para realizar este trabajo, existe un generador de números aleatorios, propio del sistema, pero debido a la escasa información suministrada por el fabricante, la imposibilidad de obtenerla y la necesidad de tener un generador cuya característica sea la de obtener sucesiones de números aleatorios repetibles, se usara el generador de números aleatorios desarrollado por Don Malm, como parte de un programa de biblioteca del usuario de la HP-65, el cual genera un millón de números aleatorios entre 0 y 1, que para el propósito del trabajo es suficiente.

La fórmula de recurrencia de este generador es

$$r_{n+1} = \mathrm{FRAC}(9821 \cdot r_n + 0{,}211327)$$

Así, solamente es necesario dar una semilla r_0, para obtener una sucesión de números aleatorios que puede repetirse si la nueva sucesión tiene la misma semilla.

Los resultados obtenidos al generar una sucesión de 1500 números, con cada uno de los métodos descritos para cada una de las distribuciones de probabilidad, y clasificados o muestreados en un número adecuado de intervalos iguales entre el valor mínimo y el valor máximo de la misma, con el fin de obtener la frecuencia relativa, se ilustran en las figuras que siguen.

Como se puede observar, cada uno de los métodos da los resultados esperados, esto es, una buena aproximación a la distribución de probabilidad que generan, con excepción de la uniforme y la normal, las cuales presentan una irregularidad que tiende a desaparecer si la sucesión de números aleatorios es grande.

Comparación de los métodos de generación.-

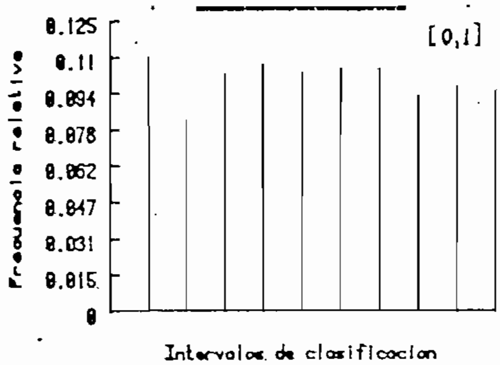
Distribución exponencial: método de minimización aleatoria es más rápido que el método del logarítmo.

Distribución normal: método polar más rápido que el método del límite central, y, da la mejor aproximación a una campana de Gauss.

Distribución geométrica: el segundo método es más rápido que el primer método.

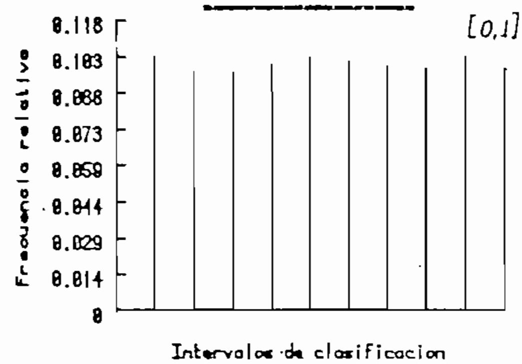
Por último, se concluye que, todos los métodos de generación de variables aleatorias a partir de ciertas distribuciones de probabilidad, son válidos en la práctica, para ser usados en los sitemas cuyas características y/o funciones de operación requieran la generación de valores de variables aleatorias.para representarlas.

DISTRIBUCION UNIFORME



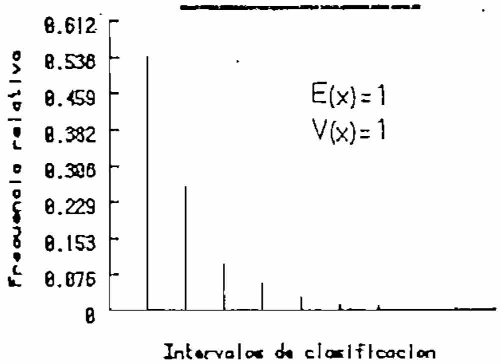
SERIE DE 1500 NUMEROS

DISTRIBUCION UNIFORME



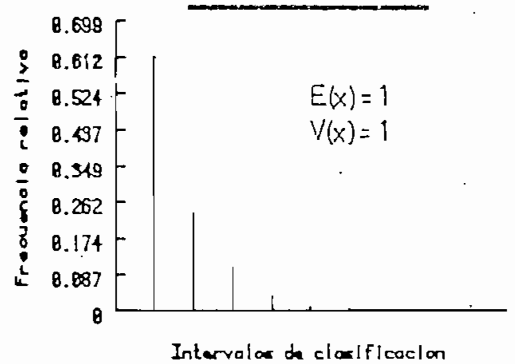
SERIE DE 4000 NUMEROS

DISTRIBUCION EXPONENCIAL



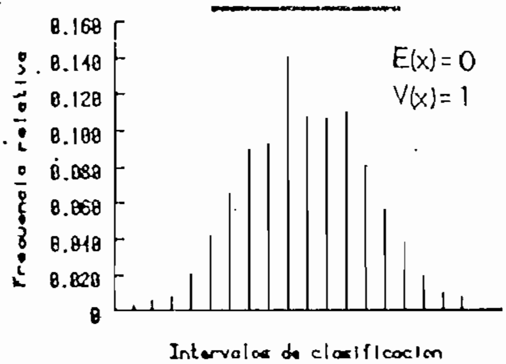
METODO DEL LOGARITMO (1500 NUMEROS)

DISTRIBUCION EXPONENCIAL



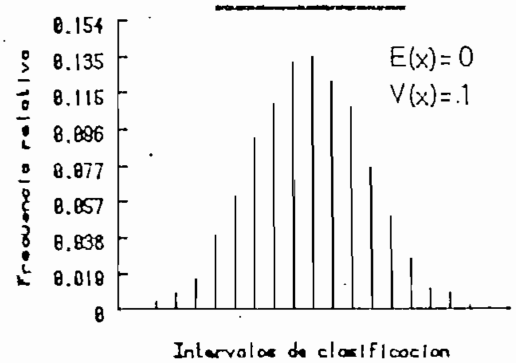
METODO DE MINIMIZACION ALEATORIA (1500 NUMEROS)

DISTRIBUCION NORMAL

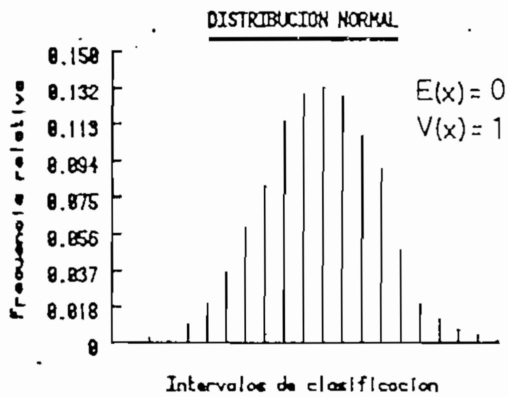


METODO DEL LIMITE CENTRAL (1500 NUMEROS)

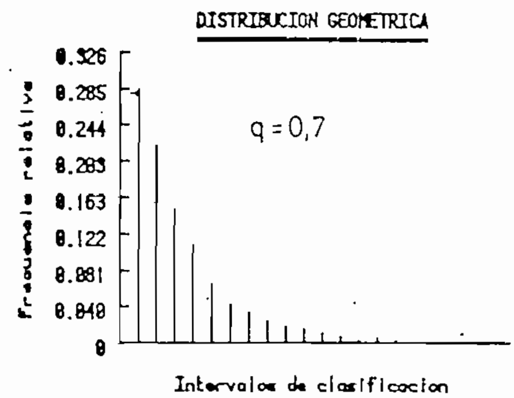
DISTRIBUCION NORMAL



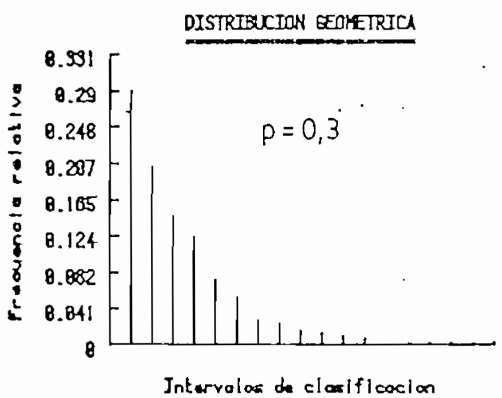
METODO DEL LIMITE CENTRAL (4000 NUMEROS)



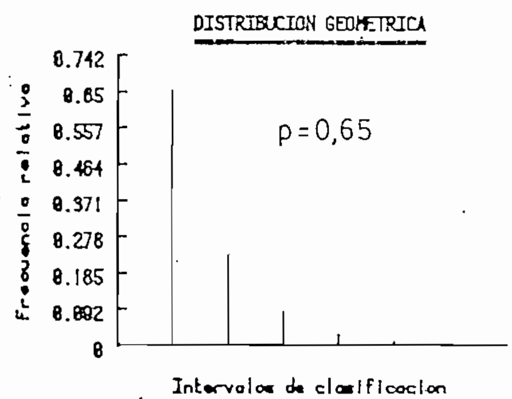
METODO POLAR (1500 NUMEROS)



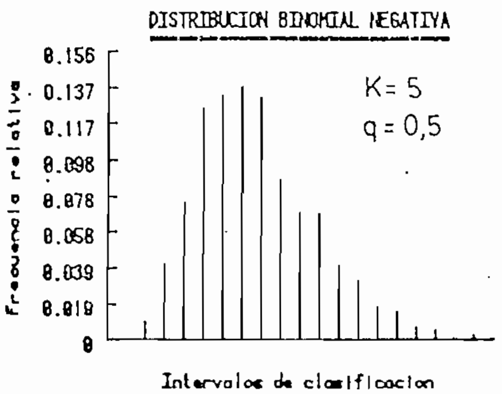
PRIMER METODO (1500 NUMEROS)



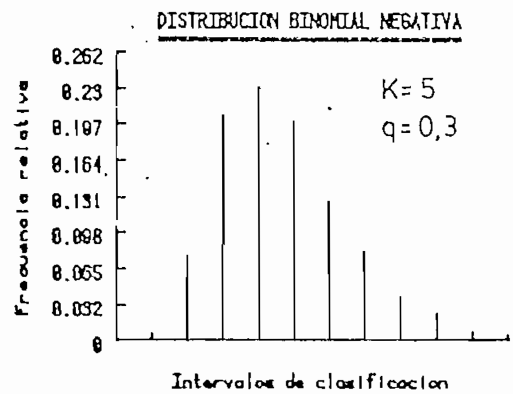
SEGUNDO METODO (1500 NUMEROS)



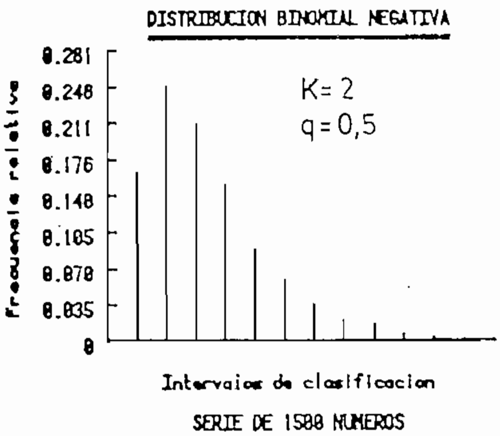
SEGUNDO METODO (1500 NUMEROS)

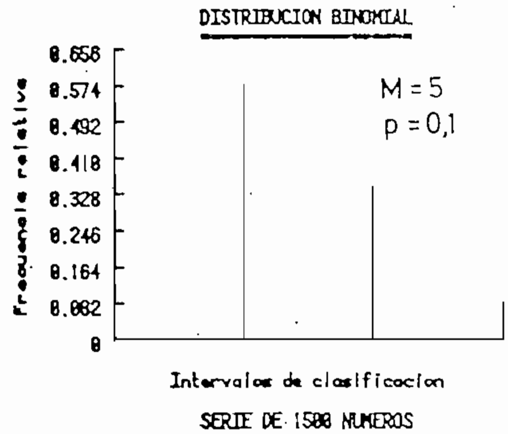


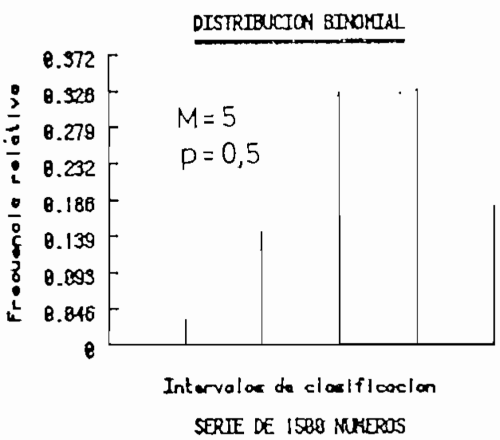
SERIE DE 1500 NUMEROS

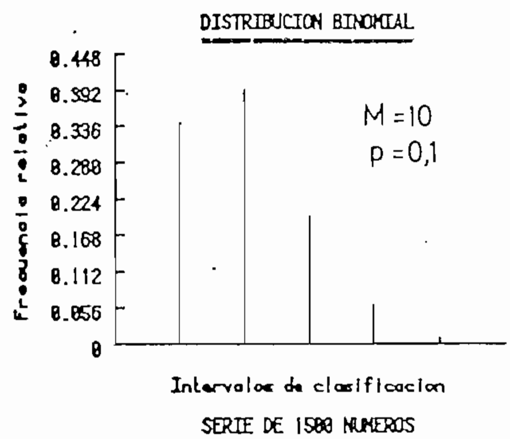


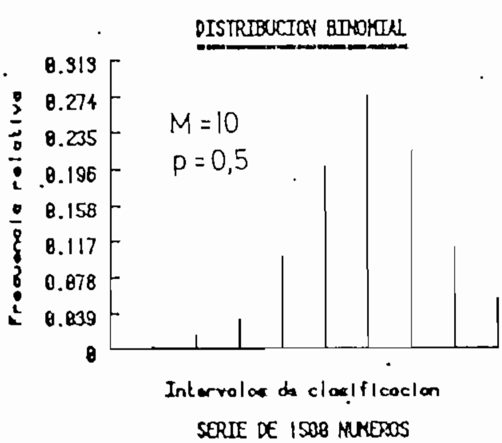
SERIE DE 1500 NUMEROS

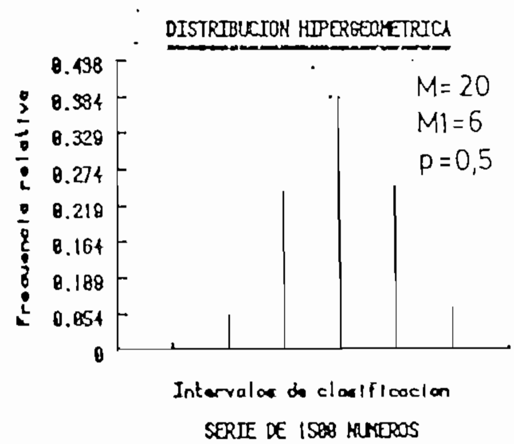

DISTRIBUCION BINOMIAL NEGATIVA
0.281
0.246
0.211
0.176
0.140
0.105
0.070
0.035
0
Frecuencia relativa
K= 2
q = 0,5
Intervalos de clasificacion
SERIE DE 1500 NUMEROS

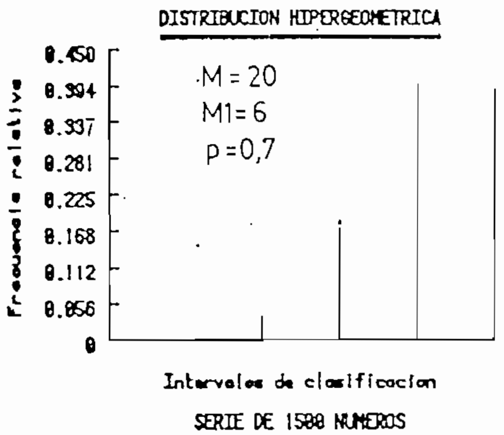

DISTRIBUCION BINOMIAL
0.656
0.574
0.492
0.410
0.328
0.246
0.164
0.082
0
Frecuencia relativa
M = 5
p = 0,1
Intervalos de clasificacion
SERIE DE 1500 NUMEROS

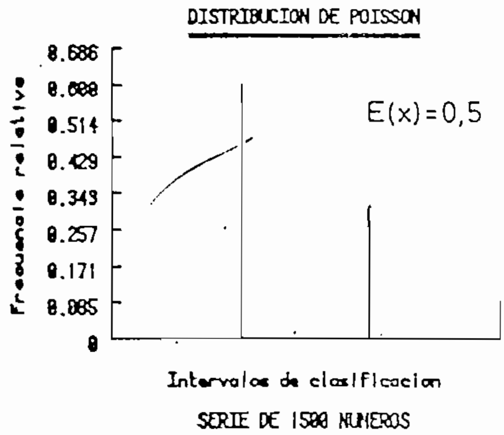

DISTRIBUCION BINOMIAL
0.372
0.326
0.279
0.232
0.186
0.139
0.093
0.046
0
Frecuencia relativa
M = 5
p = 0,5
Intervalos de clasificacion
SERIE DE 1500 NUMEROS

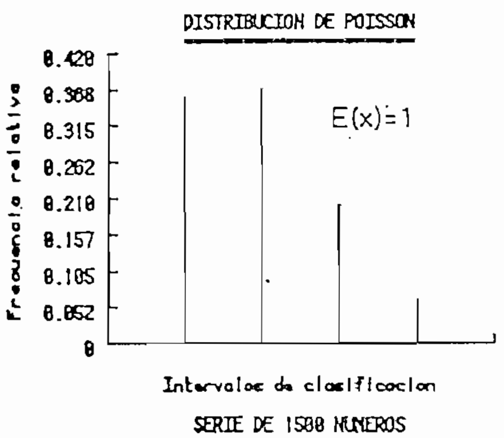

DISTRIBUCION BINOMIAL
0.448
0.392
0.336
0.280
0.224
0.168
0.112
0.056
0
Frecuencia relativa
M =10
p = 0,1
Intervalos de clasificacion
SERIE DE 1500 NUMEROS

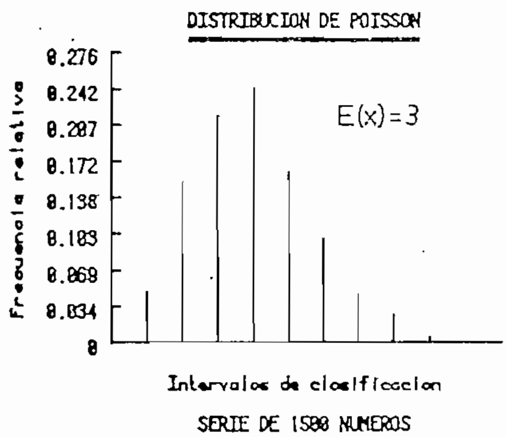

DISTRIBUCION BINOMIAL
0.313
0.274
0.235
0.196
0.156
0.117
0.078
0.039
0
Frecuencia relativa
M =10
p = 0,5
Intervalos de clasificacion
SERIE DE 1500 NUMEROS

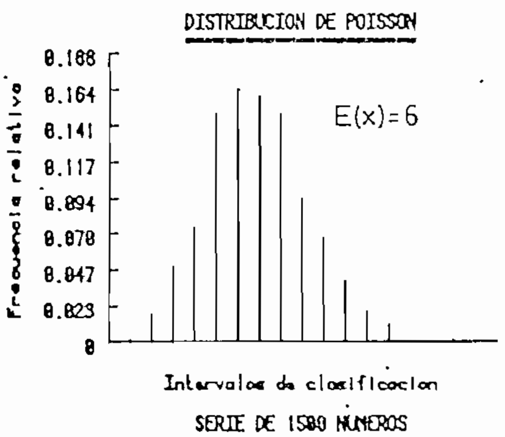

DISTRIBUCION HIPERGEOMETRICA
0.438
0.384
0.329
0.274
0.219
0.164
0.109
0.054
0
Frecuencia relativa
M= 20
M1 = 6
p = 0,5
Intervalos de clasificacion
SERIE DE 1500 NUMEROS


DISTRIBUCION HIPERGEOMETRICA
M = 20
M1= 6
p =0,7
Frecuencia relativa
0.450
0.394
0.337
0.281
0.225
0.168
0.112
0.056
0
Intervalos de clasificacion
SERIE DE 1500 NUMEROS


DISTRIBUCION DE POISSON
E(x)=0,5
Frecuencia relativa
0.686
0.600
0.514
0.429
0.343
0.257
0.171
0.085
0
Intervalos de clasificacion
SERIE DE 1500 NUMEROS


DISTRIBUCION DE POISSON
E(x)=1
Frecuencia relativa
0.420
0.368
0.315
0.262
0.210
0.157
0.105
0.052
0
Intervalos de clasificacion
SERIE DE 1500 NUMEROS


DISTRIBUCION DE POISSON
E(x)=3
Frecuencia relativa
0.276
0.242
0.207
0.172
0.138
0.103
0.069
0.034
0
Intervalos de clasificacion
SERIE DE 1500 NUMEROS


DISTRIBUCION DE POISSON
E(x)=6
Frecuencia relativa
0.188
0.164
0.141
0.117
0.094
0.070
0.047
0.023
0
Intervalos de clasificacion
SERIE DE 1500 NUMEROS

CAPITULO IV

Este capítulo tiene por objeto describir tres procesos, los cuales tienen como característica principal el uso de variables aleatorias con cierto tipo de distribución, que especifican una parte o la totalidad del proceso.

Se considerará el estudio del ruido blanco, tanto gaussiano como el generado a través de la distribución de Poisson. Así mismo, el ruido coloreado que es ruido blanco filtrado a través de un filtro con ciertas especificaciones. Por último se hará una simulación de tráfico telefónico, con el fin de obtener el número de llamadas procesadas, completadas, bloqueadas y ocupadas en un sistema de llamadas perdidas.

4.1 RUIDO BLANCO GAUSSIANO en una antena digital alambre

Nota: la integración y simulación la aplicare para resolver el problema

Conceptos básicos.-

El teorema del límite central establece que una variable que depende de la suma de cierto número de variables aleatorias independientes tiende a ser gaussiano.

Un proceso $X(t)$ se dice que es gaussiano si las variables aleatorias $X(t_1)$, $X(t_2)$, ..., $X(t_n)$ son conjuntamente gaussianas para todo n y para todo grupo de $(t_1, t_2, \ldots\ldots t_n)$.

Un proceso gaussiano se especifica completamente por su función de autocorrelación y su valor medio. Si la función de autocorrelación, repre -

sentada por $R_x(t_i, t_j)$, y la media, esto es $\overline{X(t)}$ igual al valor medio,no son afectadas por un desplazamiento del origen del tiempo, el proceso es estacionario. Matemáticamente, esto es, si

$$R_x(t_i, t_j) = R_x(t_i, - t_j) = R_x(\tau), \quad \tau = t_i - t_j \tag{4.1}$$

$$\overline{X(t)} = \text{constante para todo } t \tag{4.2}$$

El término ruido blanco se usa para describir procesos cuyo espectro de densidad de potencia es uniforme en todo el rango de frecuencia (figura 4.1). Los procesos de ruido blanco que son gaussianos, se les llama procesos de ruido blanco gaussiano. Así, un proceso de ruido blanco gaussiano sería definido como un proceso gaussiano con un espectro de densidad de potencia uniforme en todo el rango de frecuencia.

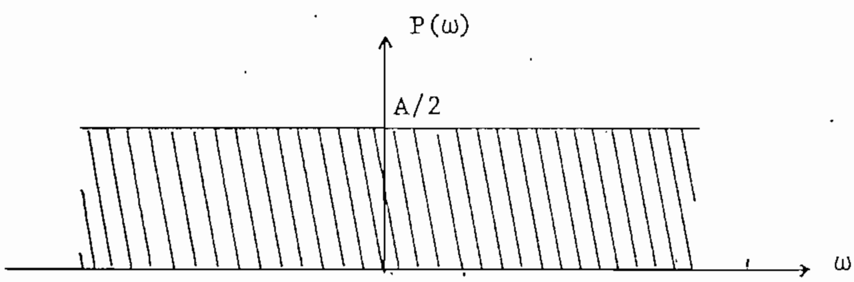


FIGURA 4.1 Espectro de potencia del ruido blanco.

Para un proceso de ruido blanco, entonces, el espectro de densidad de potencia sería

$$P(\omega) = \frac{A}{2} \tag{4.3}$$

La contribución en potencia de las componentes de frecuencia en un cierto rango de frecuencia es el área de $P(\omega)$ sobre dicho rango, integrada con respecto a f en el rango positivo y negativo. Por lo tanto la poten cia por unidad del ancho de banda (en Hertz) sería

$$2\left(\frac{A}{2}\right) = A \text{ [watts]}$$

$$P_T = \int_a^b P(\omega)\, d\omega.$$

Por definición, la función de autocorrelación es la transformada inversa de Fourier del espectro de potencia. Luego

$$R(\tau) = \frac{A}{2}\,\delta(\tau) \qquad 4.4$$

donde $\delta(\tau)$ es la función Delta de Dirac definida como

$$\delta(\tau) = 0, \qquad \tau \neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1 \qquad 4.5$$

De la ecuación (4.4) se ve que la función de autocorrelación es cero para todo τ excepto para $\tau = 0$, lo que implica que las variables $X(t_i)$ y $X(t_j)$ serán no correlacionadas si $t_i \neq t_j$.

El ruido blanco en sí es una idealización, no existe en la práctica, dado que su valor cuadrado medio es infinito.

$$\overline{X}^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} P(\omega)\, d\omega = \infty \qquad 4.6$$

ancho de banda $[a,b]$

Para todos los casos prácticos se trata el ruido de banda ancha como ruido blanco, cometiéndose un error que es despreciable del punto de vista práctico.

El ruido blanco gaussiano de banda limitada, es un proceso de ruido gaussiano que tiene un espectro de densidad de potencia de magnitud constante en una banda (-W, W) rps y cero fuera de ella. (Fig. 4.2a) Esto es

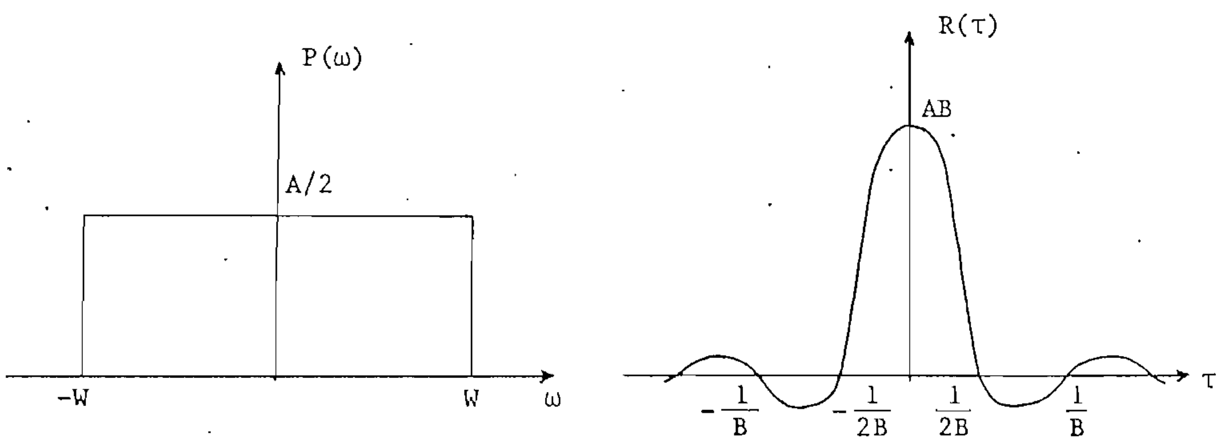
$$P(\omega) = \begin{cases} \dfrac{A}{2} & |\omega| < W \\ 0 & \text{en otra parte} \end{cases} \tag{4.7}$$

Su función de autocorrelación $R(\tau)$ es la transformada inversa de Fourier de $P(\omega)$

$$R(\tau) = A\,B\,S_a\,(W\tau) \tag{4.8}$$

donde $B = \dfrac{W}{2\pi}$ es el ancho de banda en Hertz y $S_a(W\tau) = \dfrac{\text{sen } W\tau}{W\tau}$ es la función Sampling.

Esta función de autocorrelación se muestra en la figura 4.2b.



a) Espectro de densidad de potencia b) Autocorrelación

FIGURA 4.2 Ruido blanco gaussiano de banda limitada.

Dado que $R(\tau) = \overline{X(t)\ X(t + Z)}$, cuando $\tau = 0$ se tiene

$$R(o) = \overline{X(t)\ X(t)} = \overline{X^2} \qquad 4.9$$

así, el valor cuadrado medio de este proceso sería:

$$\overline{X^2} = R(o) = AB \qquad 4.10$$

Cuando $\tau \to \infty$ la función de autocorrelación $R(\tau) \to 0$; por lo tanto el valor medio de este proceso será cero.

El teorema de muestreo establece que, una señal de banda limitada la cual no tiene componentes espectrales alrededor de la frecuencia B Hertz, puede determinarse de sus muestras tomadas en intervalos uniformes menores que 1/2B segundos. [3].

De esta manera la señal se expresa matemáticamente como

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k . S_a(Wt - k\Pi) \qquad 4.11$$

donde $x_k = x(KT)$ son las muestras tomadas, y $T = 1/2B$ el intervalo de muestreo . El coeficiente x_K es diferente para cada función de muestreo y por lo tanto X_K ($K = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) es una variable aleatoria. Se puede expresar la ecuación (4.11) para el proceso como

$$X(t) = \sum_{K=-\infty}^{\infty} X_K . S_a(Wt - K\Pi) \qquad 4.12$$

Las variables $X_1, X_2, \ldots, X_K \ldots$ son variables aleatorias. De aquí es interesante observar que el proceso completo se puede especificar por un grupo de variables aleatorias X_K, K = 0, ± 1, ± 2, ... etc. Esto permite reemplazar señales continuas por medio de una secuencia discreta de variables aleatorias sin pérdida de información.

De la figura 4.2b se puede observar que la función de autocorrelación es cero para $\tau = n/2B$ con n = 1, 2, ... etc. Por lo tanto, las muestras tomadas en T = 1/2B (X_1, X_2, ..., X_K ... etc., ie, las muestras de Nyquist) son no correlacionadas. Ahora, dado que el proceso es gaussiano, estas muestras también son gaussianas, y a su vez son indpendientes.

Luego de este análisis, para generar ruido blanco gaussiano, se deben generar las muestras. Esto es, generar los valores de la variable aleatoria con distribución gaussiana o normal, que tengan un valor medio cero y variancia AB.

En la figura 4.3 se muestra el diagrama de flujo del programa creado para generar ruido blanco gaussiano (Programa P28), cuyas variables significan:

N	=	Número de muestras del ruido que se generan
R	=	Semilla de los números aleatorios distribuídos uniformemente entre 0 y 1.
E	=	Valor esperado de la distribución normal. (E = 0)
V	=	Variancia de la distribución. (Voltaje eficaz del ruido en mili voltios).
X1	=	Vector de dimensión N que contiene las muestras generadas (método del límite central).
X1 y X2	=	Vectores de dimensión N/2 que contienen las muestras genera

das (método polar)

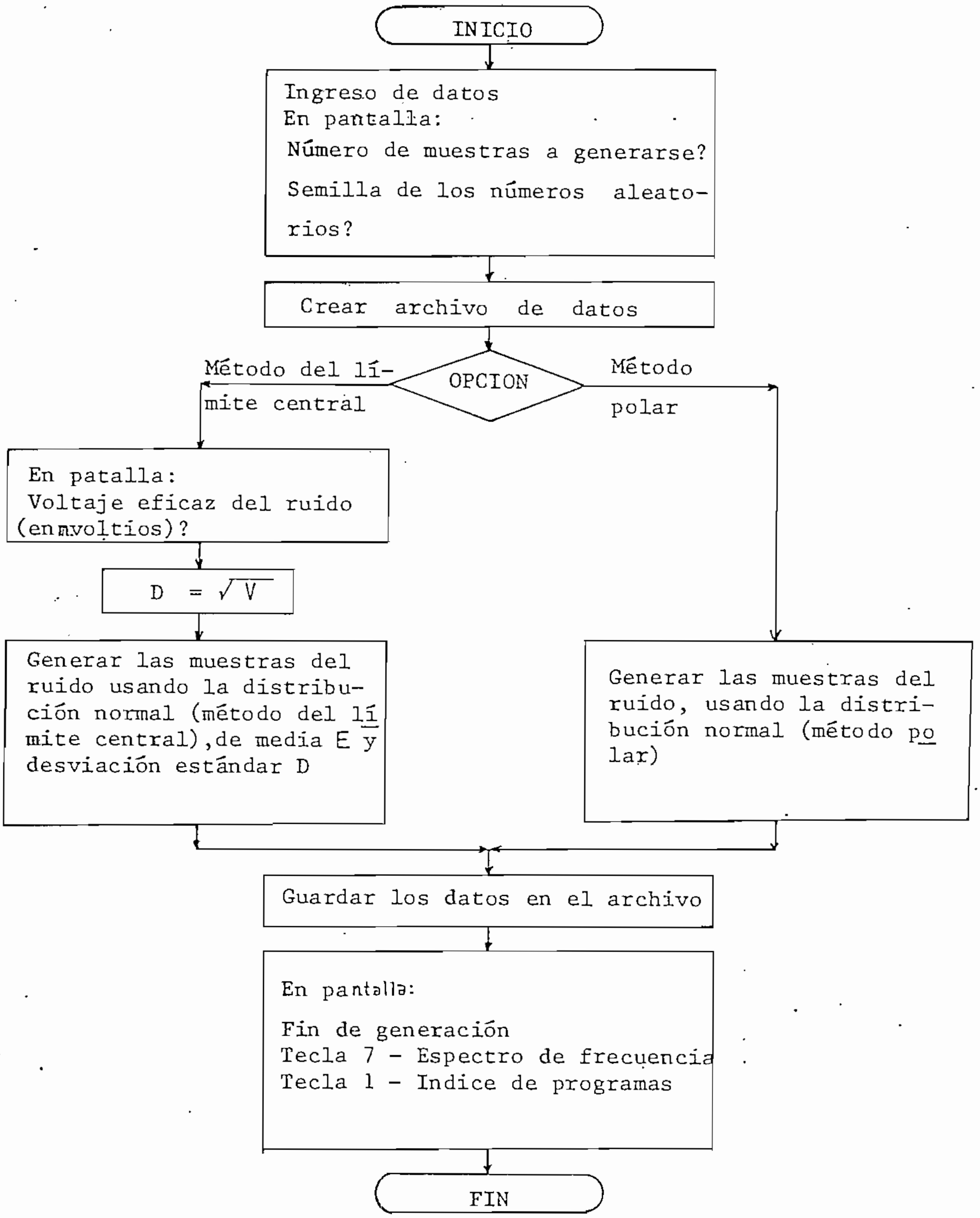


FIGURA 4.3 Diagrama de flujo del programa P28 que genera ruido blanco gaussiano.

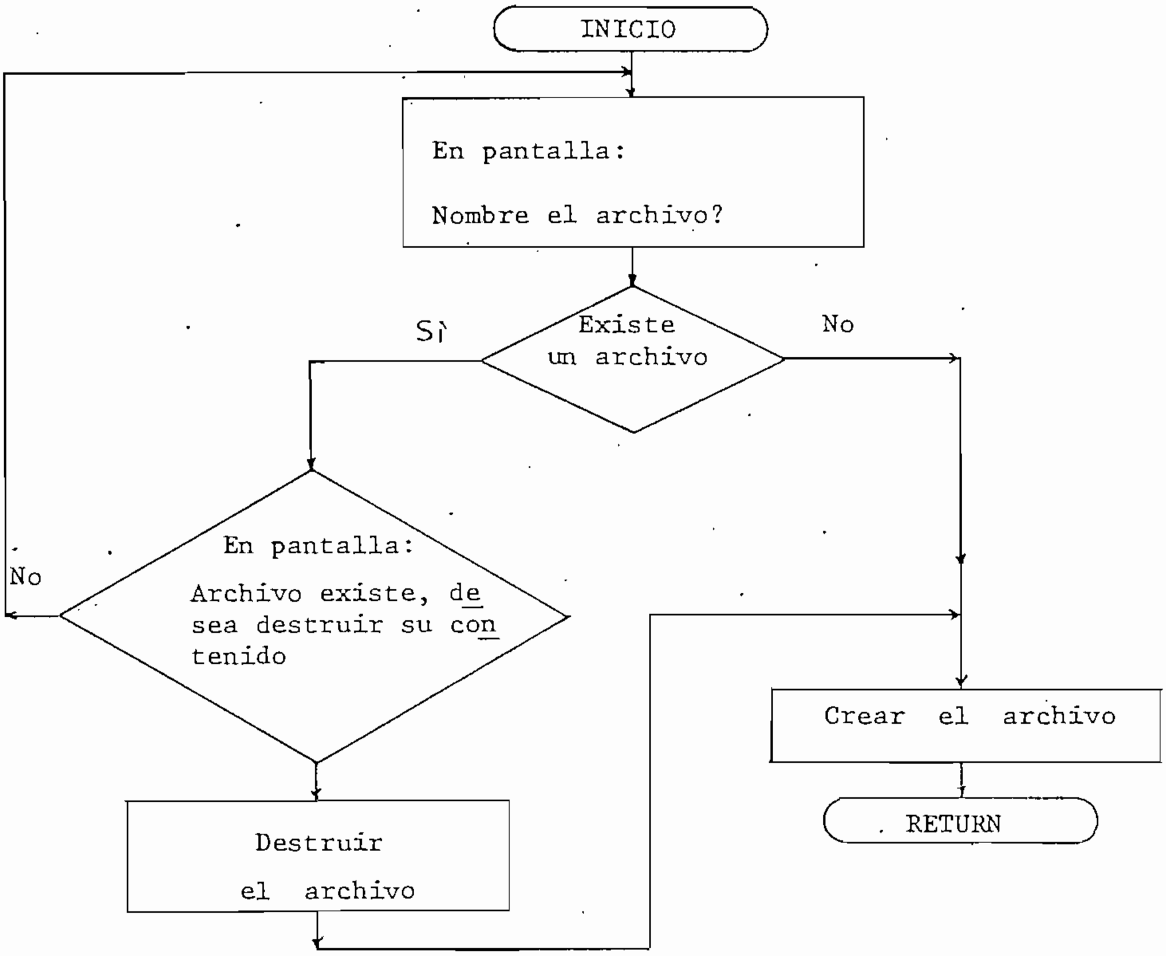


FIGURA 4.4 Diagrama de flujo de la subrutina para crear archivo de datos.

4.2 RUIDO BLANCO GENERADO USANDO LA DISTRIBUCION DE POISSON.

Este método de generación de ruido blanco, supone una secuencia de impulsos distribuídos aleatoriamente de acuerdo con la función de distribución de Poisson, y pueden asumir valores positivos o negativos con igual probabilidad (Fig. 4.5).

Para poder encontrar la función de autocorrelación, se considera un impul so en su forma límite, esto es, como un pulso rectangular de altura K y ancho infinitesimal ε, tal que el área sea $K\varepsilon = 1$ (Fig. 4.6).

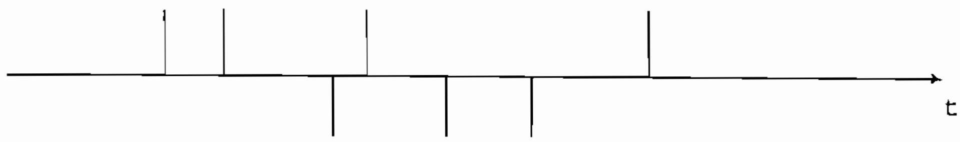


FIGURA 4.5 Impulsos positivos y negativos distribuídos de acuerdo a la distribución de Poisson.

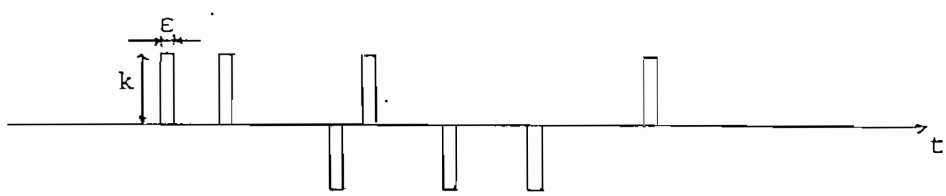


FIGURA 4.6 Aproximación de los impulsos.

De esta manera, las variables aleatorias X_1 y X_2, que son las observaciones del proceso en dos tiempos diferentes, $X_1 = X(t_1)$ y $X_2 = X(t_2)$, pueden asumir tres valores: 0, K y -K. De la suposición inicial, se tiene,

$$P_{X_1}(K) = P_{X_1}(-K) = P_{X_2}(K) = P_{X_2}(-K) \qquad 4.13$$

Para calcular la probabilidad de que la variable X_1 asuma el valor de K,($P_{X_1}(K)$), se usa el hecho de que α pulsos (cada uno de ancho ε), por segundo, ocupan un intervalo de tiempo total de $\alpha\varepsilon$ por segundo. En otras palabras, la razón del intervalo de tiempo en el cual los impulsos existen para el intervalo total es $\alpha\varepsilon$. Por lo tanto la probabilidad de observar un impulso en algún instante aleatorio es $\alpha\varepsilon$. Así, $P_{X_1}(K) = \alpha\varepsilon$. Pero como X_1 puede asumir los valores de K y -K con igual probabilidad , será

$$P_{X_1}(K) = P_{X_1}(-K) = P_{X_2}(K) = P_{X_2}(-K) = \frac{\alpha\varepsilon}{2} \qquad 4.14$$

Por lo tanto la probabilidad de que X_1 y/o X_2 asuman el valor cero es

$$P_{X_1}(0) = P_{X_2}(0) = 1 - \alpha\varepsilon \qquad 4.15$$

Luego, para determinar la función de autocorrelación por definición y para todo $\tau > \varepsilon$

$$R(\tau) = \sum_{X_1} \sum_{X_2} x_1 \, x_2 \, P_{X_1}(x_1) \, P_{X_2}(x_2) \qquad 4.16$$

o sea

$$\begin{aligned} R(\tau) = {} & (K.0)P_{X_1}(K)P_{X_2}(0) + (K.K)P_{X_1}(K)P_{X_2}(K) + \\ & (K.(-K))P_{X_1}(K)P_{X_2}(-K) + (0.0)P_{X_1}(0)P_{X_2}(0) + \\ & (0.K)P_{X_1}(0)P_{X_2}(K) + (0.(-K))P_{X_1}(0)P_{X_2}(-K) + \\ & (-K.0)P_{X_1}(-K)P_{X_2}(0) + (-K.K)P_{X_1}(-K)P_{X_2}(K) + \\ & (-K.(-K))P_{X_1}(-K)P_{X_2}(-K) \qquad 4.17 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = {} & (K.K)P_{X_1}(K)P_{X_2}(K) + (K.(-K)P_{X_1}(K)P_{X_2}(-K) + \\ & (-K.K)P_{X_1}(-K)P_{X_2}(K) + (-K.(-K)P_{X_1}(-K)P_{X_2}(-K) \end{aligned}$$

$$= K^2\left(\frac{\alpha\varepsilon}{2}\right)^2 - K^2\left(\frac{\alpha\varepsilon}{2}\right)^2 - K^2\left(\frac{\alpha\varepsilon}{2}\right)^2 + K^2\left(\frac{\alpha\varepsilon}{2}\right)^2$$

así:

$$R(\tau) = 0 \quad \text{para } \tau > \varepsilon \qquad 4.18$$

Para este caso en que $\tau > \varepsilon$ el mismo impulso no puede existir a la vez en los tiempos t_1 y $t_1 + \tau$, debido a que el pulso rectangular es de ancho

ε. Por lo tanto si $X_1 = K$ y $X_2 = K$, o cualquiera de las combinaciones de la ecuación anterior, entonces en t_1 y $t_1 + \tau$ se observan dos impulsos diferentes. Además estos impulsos serán independientes por tener distribución de Poisson.

Cuando $\tau < \varepsilon$, dado que $\varepsilon \to 0$, los valores de τ en este rango serán extremadamente pequeños, y el evento $X_1 = K$ y $X_2 = K$ ocurrirá solamente si el mismo impulso se observa en t_1 y $t_1 + \tau$, lo mismo para $X_1 = -K$ y $X_2 = -K$, los otros casos no se dan. En consecuencia, los dos eventos no son independientes. Si se observa un impulso en t_1, la probabilidad de observar el mismo impulso en $t_1 + \tau$ es (Fig. 4.7): $1 - \frac{\tau}{\varepsilon}$. Por lo tanto la probabilidad condicional,

$$P_{X_2}(K/X_1 = k) = 1 - \frac{\tau}{\varepsilon} \qquad 4.19$$

y

$$P_{X_1}(K)\, P_{X_2}(K) = P_{X_1}(K) P_{X_2}(K/X_1 = K) = \alpha\varepsilon\left(1 - \frac{\tau}{\varepsilon}\right) \qquad 4.20$$

De la deducción anterior, dado que sólo se pueden presentar los casos cuando $X_1 = K$ y $X_2 = K$ ó $X_1 = -K$ y $X_2 = -K$, ya que no se puede observar el mismo impulso con valores diferentes en t_1 y $t_2 + \tau$, se deduce que la ecuación 4.16 será:

$$R(\tau) = K^2 P_{X_1}(K)\, P_{X_2}(K)$$

ó 4.21

$$R(\tau) = K^2 P_{X_1}(-K)\, P_{X_2}(-K)$$

así

$$R(\tau) = K^2 P_{X_1}(K)\, P_{X_2}(K/X_1 = k)$$

$$= K^2\, \alpha\varepsilon \left(1 - \frac{\tau}{\varepsilon}\right) \qquad \text{para } \tau < \varepsilon \qquad 4.22$$

Dado que $R(\tau)$ es función par de τ,

$$R(\tau) = K^2 \alpha\varepsilon \left(1 - \frac{|\tau|}{\varepsilon}\right) = \frac{\alpha}{\varepsilon} \left(1 - \frac{|\tau|}{\varepsilon}\right) \qquad 4.23$$

Para valores pequeños de τ (alrededor del origen), $R(\tau)$ es un pulso triangular de área α (Fig. 4.8). En el límite cuando $\varepsilon \to 0$, el pulso triangular se convierte en un impulso de altura α. Por lo tanto

$$R(\tau) = \alpha\delta(\tau) \qquad \text{para} \qquad \tau = 0 \qquad 4.24$$

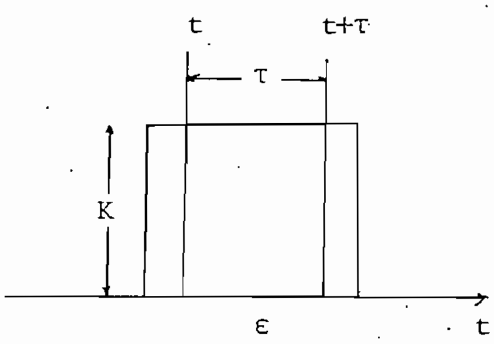


FIGURA 4.7

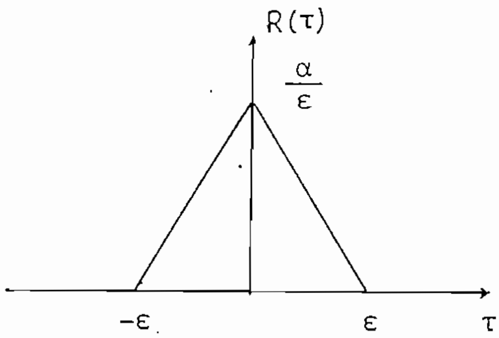


FIGURA 4.8

Por definición, el espectro de densidad de potencia es la transformada de Fourier de la función de autocorrelación. Por lo tanto,

$$P(\omega) = \mathcal{F}\{\alpha\ \delta\ (\tau)\}$$
$$P(\omega) = \alpha \qquad 4.25$$

Como $P(\omega)$ es constante para todo el rango de frecuencia, se concluye que una señal de este tipo es una forma de ruido blanco. En la figura 4.9, se muestra la función de autocorrelación y el espectro de densidad de potencia.

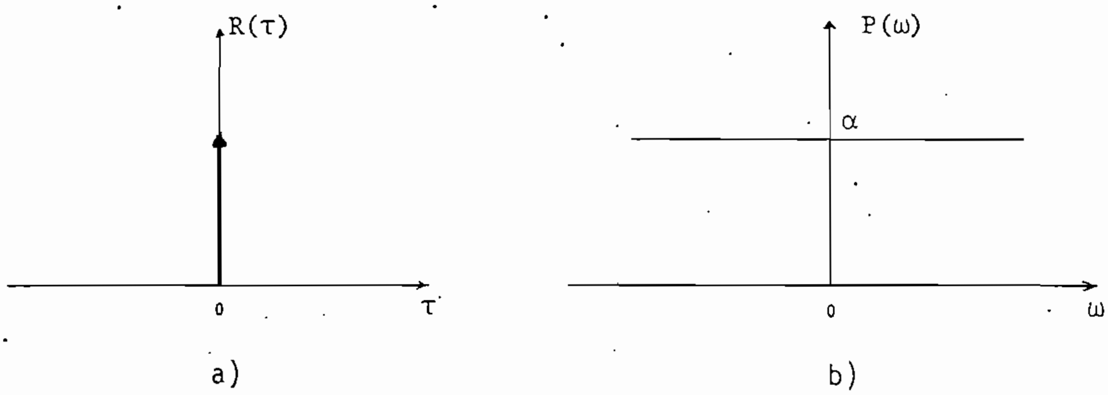


FIGURA 4.9 a) Función de correlación

b) Densidad de potencia

En la figura 4.10 se esboza el diagrama de flujo de este método. Se usa la variable E en lugar de α.

Las variables usadas en el programa P29 creado para este proceso tienen el siguiente significado:

N = Número de muestras de ruido a generarse.

R = Semilla de los números aleatorios distribuídos uniformemente entre 0 y 1.

K = Voltaje pico del ruido (en milivoltios).

E = Valor esperado de la distribución de Poisson.

X = Vector de dimensión N que contiene las muestras del ruido.

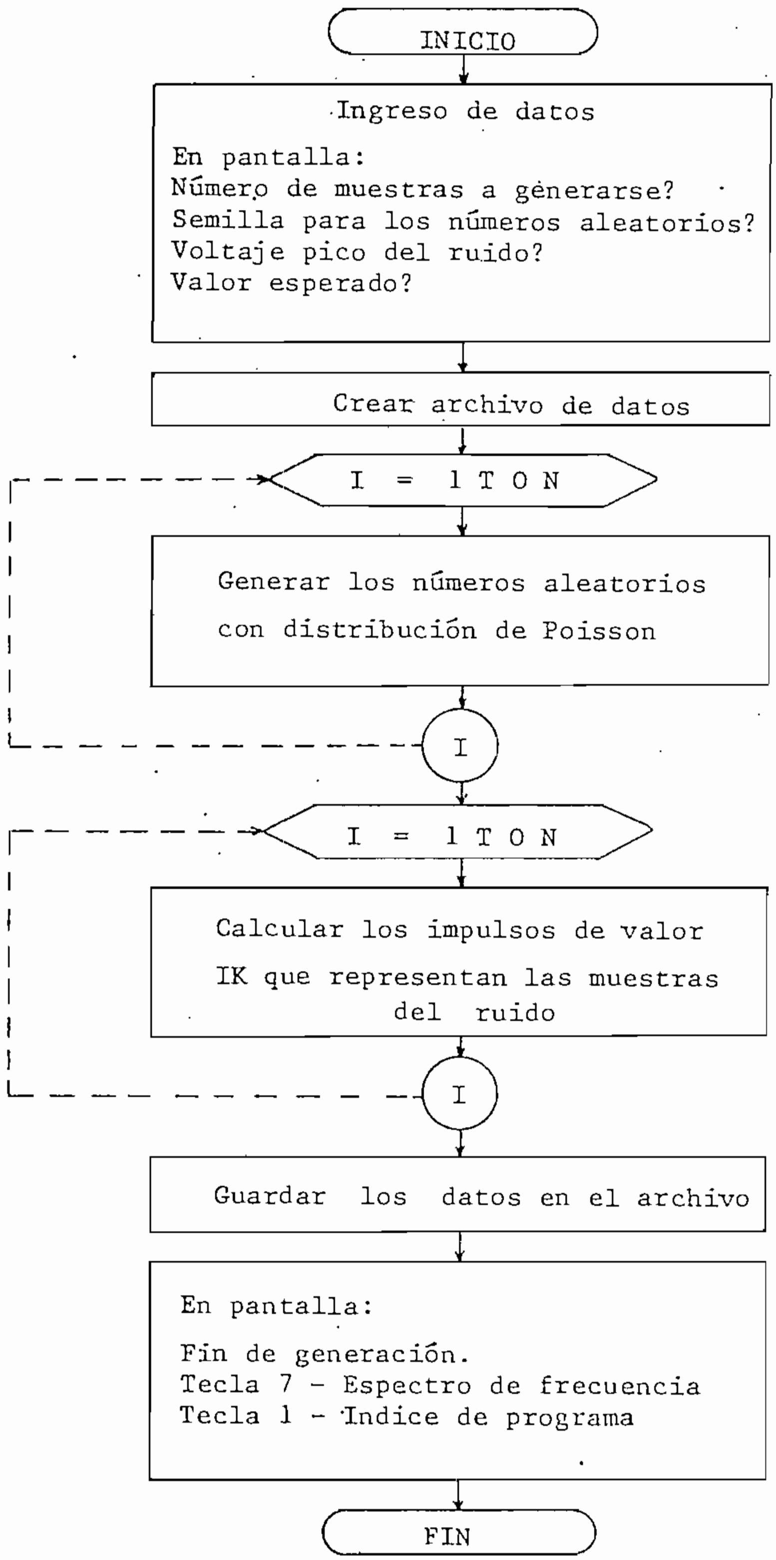


FIGURA 4.10 Diagrama de flujo del programa P29 que genera ruido blanco con distribución de Poisson.

La subrutina para crear los archivos es idéntica a la dada en la figura 4.4, sólo cambia el formato del nombre como se puede apreciar en el listado de los programas. La subrutina para calcular los impulsos de ruido blanco se muestra en la figura 4.11, en donde K representa el voltaje pico del ruido y X son los números aleatorios con distribución de Poisson.

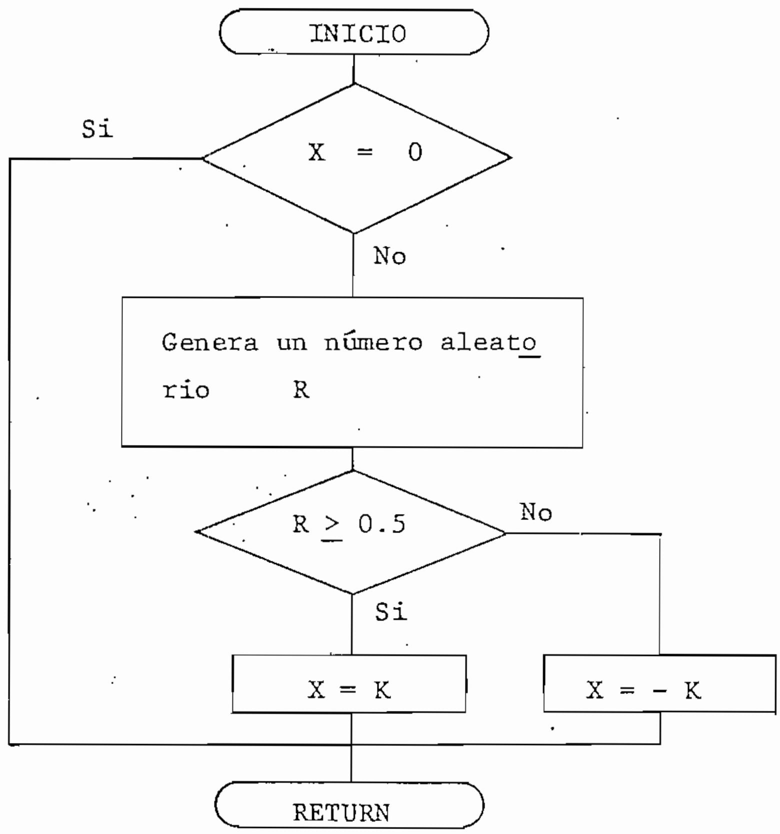


FIGURA 4.11 Diagrama de flujo de la subrutina que calcula los impulsos.

4.3 RUIDO COLOREADO

Un ruido se considera coloreado cuando su espectro de frecuencia está limitado a un cierto rango de frecuencia.

En general, ruido coloreado se genera pasando ruido blanco, esto es, un ruido con espectro de frecuencia uniforme, a través de un filtro que tenga una función de transferencia apropiada. Dado que este sistema es lineal, su respuesta estará constituída por un proceso transitorio y uno estable que es el deseado, y en este caso ambos serán aleatorios. Este transitorio constituye el principal problema en la generación, el cual se debe eliminar dando condiciones iniciales apropiadas, o sea, muestras de ruido que existan antes del tiempo t = 0 en el cual comienza la serie deseada, que permitan obtener un proceso estacionario.

En esta sección, se discutirá un método para generar dichas condiciones iniciales y luego la serie de tiempo de ruido coloreado. Se usará un modelo autoregresivo, el cual predice una muestra como una combinación lineal de las anteriores, más un ruido blanco.

Matemáticamente esto sería,

$$Z(t) = - \sum_{i=1}^{p} a_i \, Z(t - i) + \mu(t) \quad , \quad t \geq 0 \qquad 4.20$$

donde:

$Z(t)$ = muestra del ruido coloreado al tiempo t.

$Z(t-i)$ = muestra anterior del ruido al tiempo t.

a_i = coeficientes del filtro.

$\mu(t)$ = muestra de ruido blanco al tiempo t.

p = número de polos del filtro.

Para generar $Z(t)$ para $t \geq 0$ usando la ecuación (4.20), se necesita conocer las muestras iniciales $\{Z(-1), Z(-2), \ldots, Z(-p)\}$ en el tiempo $t=0$, que generan la muestra Z(0), para luego poder calcular las siguientes.

4.3.1 GENERACION DE LAS CONDICIONES INICIALES [8]

Si se escoge un vector X, tal que $X = [Z(-1), Z(-2), \ldots Z(-p)]^T$, éste puede generarse mediante una transformación lineal de un vector de variables aleatorias con media cero y variancia uno, $V = [V(1)\ V(2)\ \ldots V(p)]^T$, con una matriz apropiada de transformación A, esto es,

$$X = A\,V \tag{4.21}$$

y en donde la matriz A se escoge de tal manera que satisfaga la condición

$$E[X\,X^T] = R \tag{4.22}$$

donde E[·] es el valor esperado y R la función de autocorrelación de la serie de tiempo Z(t) deseada.

Reemplazando (4.21) en (4.22) se obtiene

$$\begin{aligned} R &= E[AV\,(AV)^T] \\ R &= E[AV\,V^T\,A^T] \\ R &= A\,A^T \end{aligned} \tag{4.23}$$

puesto que $E[V\,V^T] = I$ (I = matriz identidad)

Dado que R es una matriz simétrica real definida positiva, puede escribirse como

$$B^T R B = P \qquad 4.24$$

en donde B es una matriz ortogonal, esto es, $B B^T = I$; y definida como

$$B = \begin{bmatrix} 1 & a_1^{(1)} & a_2^{(2)} & \cdots & a_{p-1}^{(p-1)} \\ 0 & 1 & a_1^{(2)} & \cdots & a_{p-2}^{(p-1)} \\ 0 & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \qquad 4.25$$

siendo los $a_i^{(j)}$ los coeficientes del filtro predictor de orden j-ésimo y P es una matriz diagonal definida como

$$P = \text{diag}\,(P_0, P_1 \ldots P_{p-1}) \qquad 4.26$$

Los P_j son la potencia de error de predicción del filtro de orden j-ésimo.

En términos matemáticos, P_j serían los valores propios de R, y B la matriz de vectores propios de R asociados con cada P_j.

Se debe notar que los $a_i^{(p)}$ son los coeficientes del filtro predictor requerido.

De la ecuación (4.24) se tiene que

$$R = (B^T)^{-1} \; P \; B^{-1} \qquad 4.27$$

Si se define $\sqrt{P} = \mathrm{diag}\,(\sqrt{P_0}, \sqrt{P_1}, \ldots, \sqrt{P_{p-1}})$, la matriz de transformación A será

$$A = (B^T)^{-1} \sqrt{P} \qquad 4.28$$

nótese que B^T es invertible dado que su determinante es igual a uno.

De las ecuaciones (4.21) y (4.28) se obtiene

$$X = (B^T)^{-1} \sqrt{P} \; V$$

o lo que es igual

$$(\sqrt{P})^{-1} B^T X = V \qquad 4.29$$

donde se asume que todos los P_j son diferentes de cero, lo cual ocurre si el filtro tiene todos sus polos dentro del círculo unitario.

El producto de $(\sqrt{P})^{-1} B^T$ es una matriz triangular inferior, lo que facilita el cálculo del vector X. Expresando en forma matricial la ecuación (4.29) da

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{P_0}} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{a_1^{(1)}}{\sqrt{P_1}} & \frac{1}{\sqrt{P_1}} & \cdots & 0 \\ & \vdots & & \\ \frac{a_{p-1}^{(p-1)}}{\sqrt{P_{p-1}}} & \frac{a_{p-2}^{(p-1)}}{\sqrt{P_{p-2}}} & & \frac{1}{\sqrt{P_{p-1}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z(-1) \\ Z(-2) \\ \vdots \\ Z(-p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V(1) \\ V(2) \\ \vdots \\ V(p) \end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema para los $Z(-i)$, se obtiene

$$Z(-1) = \sqrt{P_0}\; V(1)$$

$$Z(-t) = \sqrt{P_{k-1}}\; V(k) - \sum_{l=1}^{k=1} a_{k-l}^{(k-1)}\; Z(-l), \qquad t = 2, 3, \ldots, p \qquad 4.30$$

De esta manera se calculan las condiciones iniciales para generar la serie de tiempo deseada, eliminando el transitorio. Como condición, se debe conocer la función de autocorrelación de la serie de tiempo deseada.

4.3.2. CALCULO DE LOS COEFICIENTES DEL FILTRO

Dada una función de autocorrelación para la serie de tiempo deseada, se pueden estimar los coeficientes del filtro predictor de orden j-ésimo, usando el algoritmo de Levinson-Durbin, el cual calcula simultáneamente las matrices B y P.

Debido a que este algoritmo ha sido ya estudiado en otra tesis (Predicción Lineal [12]), aquí se lo usará sin mayor discusión, para dicho cálculo, transcribiéndose del Fortran a Basic (Método de autocorrelación).

En la figura 4.12 se da el diagrama de flujo del Programa P30 que genera el ruido coloreado. Las variables usadas tienen el siguiente significado.

N = Número de datos de ruido coloreado.

P = Número de polos del filtro ($3 \leq P \leq 15$).

V1 = Voltaje eficaz del ruido (valor cuadrado medio), en milivoltios.

R = Semilla de los números aleatorios.

Y = Muestras de la función de autocorrelación.

C = Vector de dimensión (P+1) que contiene los parámetros de la función de autocorrelación (equivalente a R en la discusión).

P3 = Vector de dimensión (P) que contiene el error de potencia (equivalente a P).

A1 = Matriz de dimensión (P + 1, P + 1) que contiene los coeficientes del filtro predictor de orden j-ésimo (j = 1, ... p) (equivalente a B).

A = Vector de dimensión (P) que contiene los coeficientes del filtro a_i.

Z = Vector de dimensión (N) que contiene las muestras del ruido coloreado.

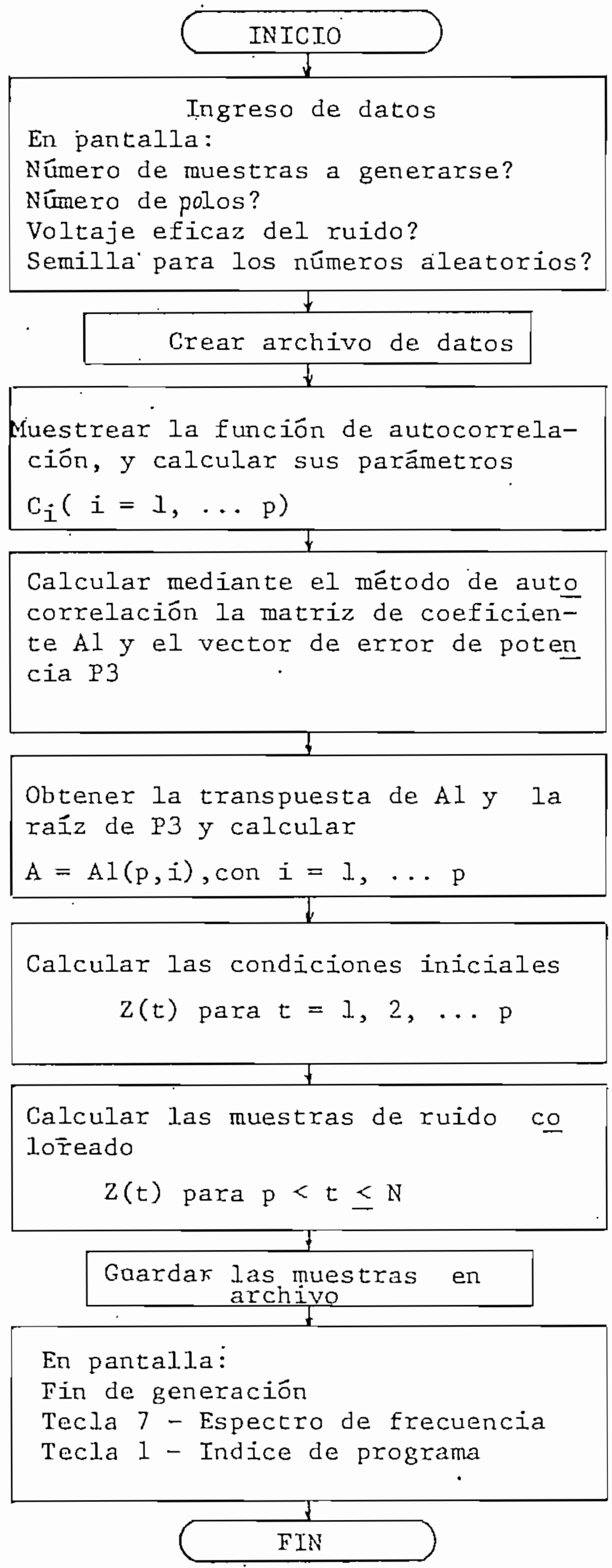


FIGURA 4.12 Diagrama de flujo del programa P30 que genera ruido coloreado.

Observación: El cálculo de los parámetros C_i de la función de autocorrelación, está incluído en el algoritmo de autocorrelación tomado de la tesis mencionada. Sólo es necesario definir la función de autocorrelación deseada para las muestras de salida del sistema en la línea 790 del programa P30 (Ver el listado del programa).

A continuación se presentan un grupo de gráficos, que ilustran el espectro de frecuencia de las series de tiempo generadas como ruido blanco y coloreado. También se da el espectro de frecuencia del ruido producido por el generado de ruido aleatorio, Tipo 1390-B, serie 7753 de la General Radio Co., que existe en el Laboratorio de Microondas de la Escuela Politécnica Nacional, el cual genera ruido coloreado; pero, muestreado a una frecuencia de 96 KHz en un ancho de banda de 20 KHz, aparece como ruido blanco.

En los gráficos de espectro de frecuencias para el ruido blanco, se puede observar que en ninguno existe componentes predominantes, siendo por este motivo, válidos los métodos de generación desarrollados.

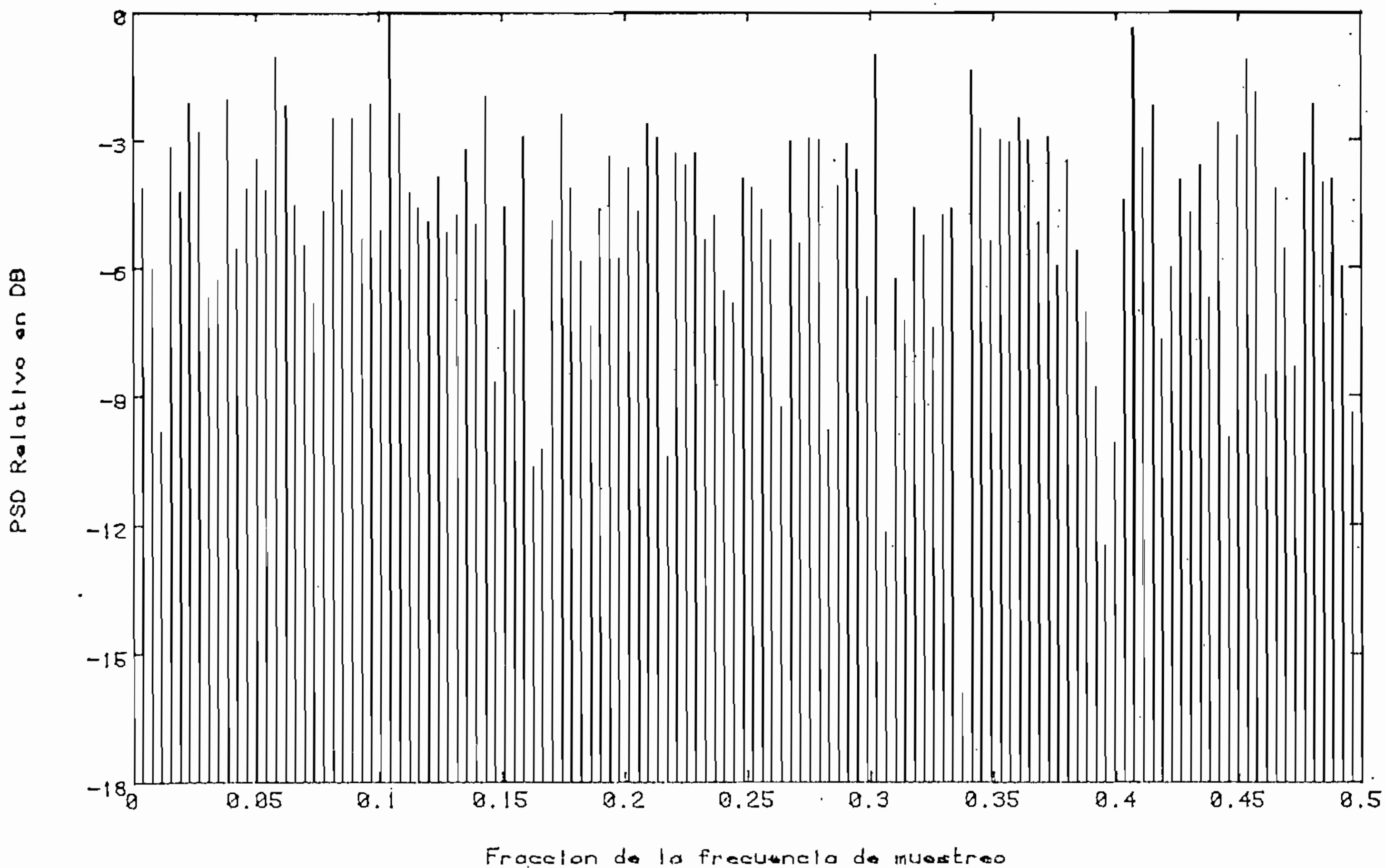
Las series de tiempo de ruido coloreado, se han generado con dos funciones de autocorrelación.

1) Autocorrelación triangular

$$R = 1 - \frac{|\tau|}{\tau a}$$

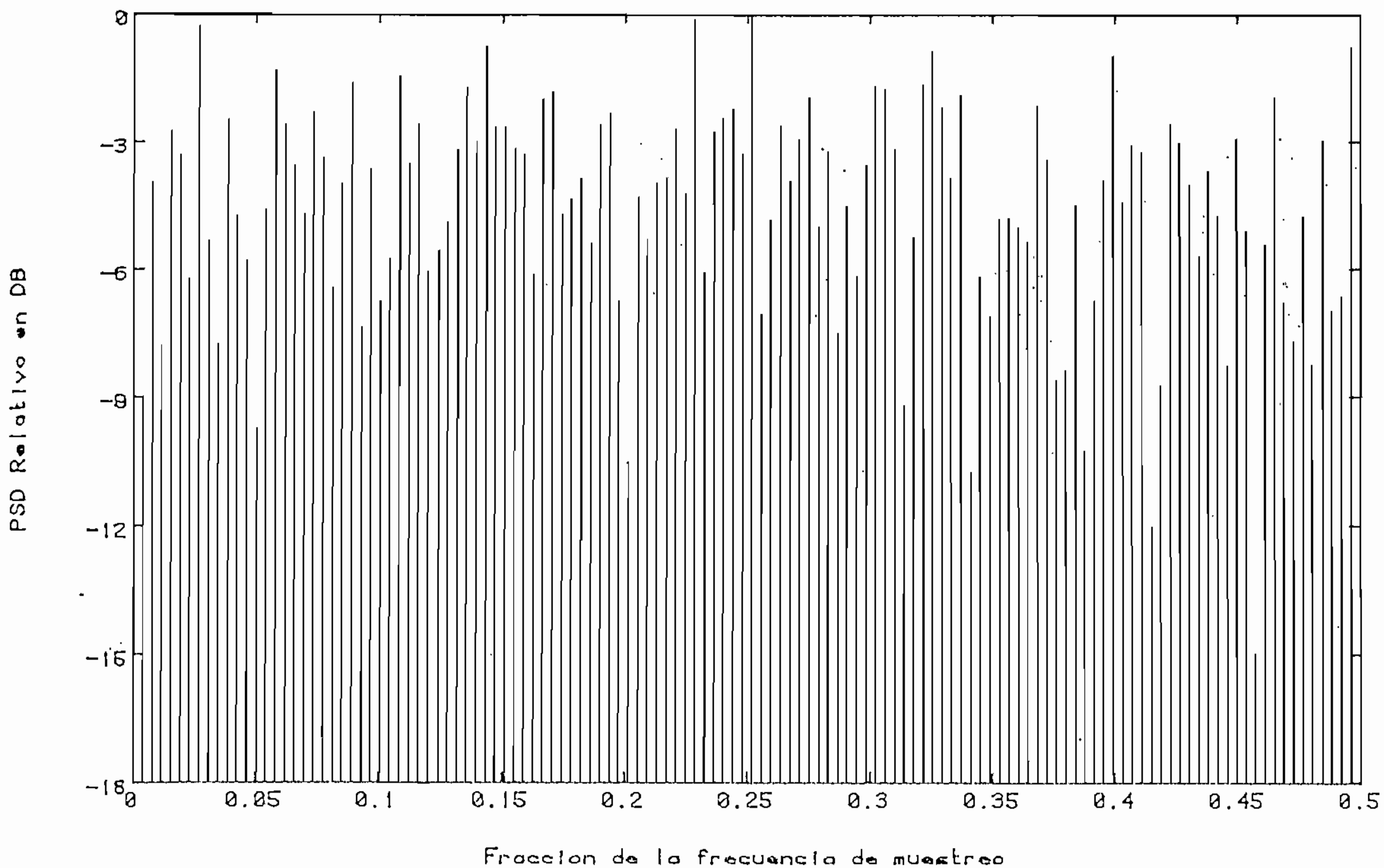
2) Autocorrelación exponencial

ESPECTRO DE FRECUENCIA DE RUIDO BLANCO



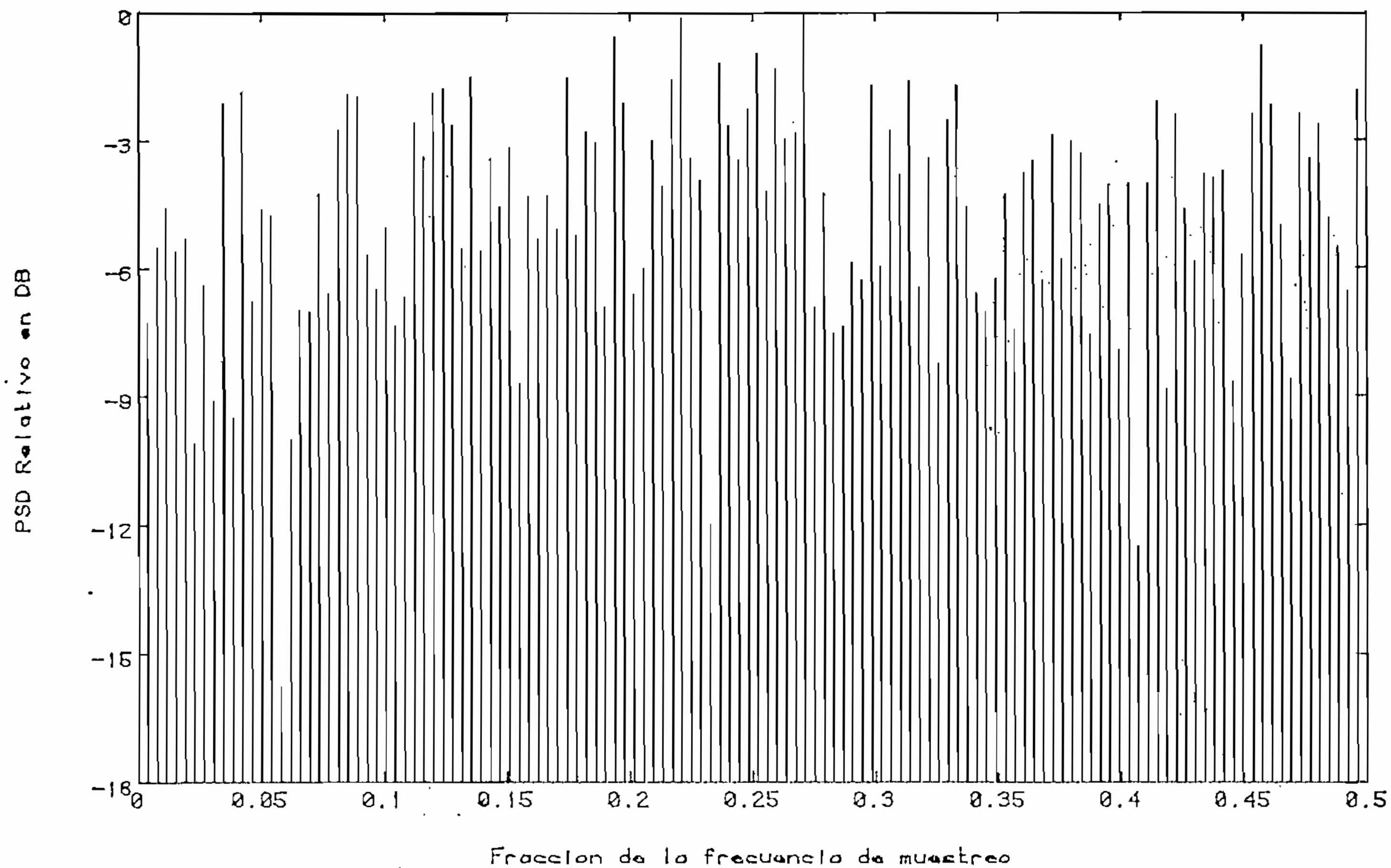
GENERADO POR EL GENERADOR DE RUIDO ALEATORIO DE LA G.R.

ESPECTRO DE FRECUENCIA DE RUIDO BLANCO



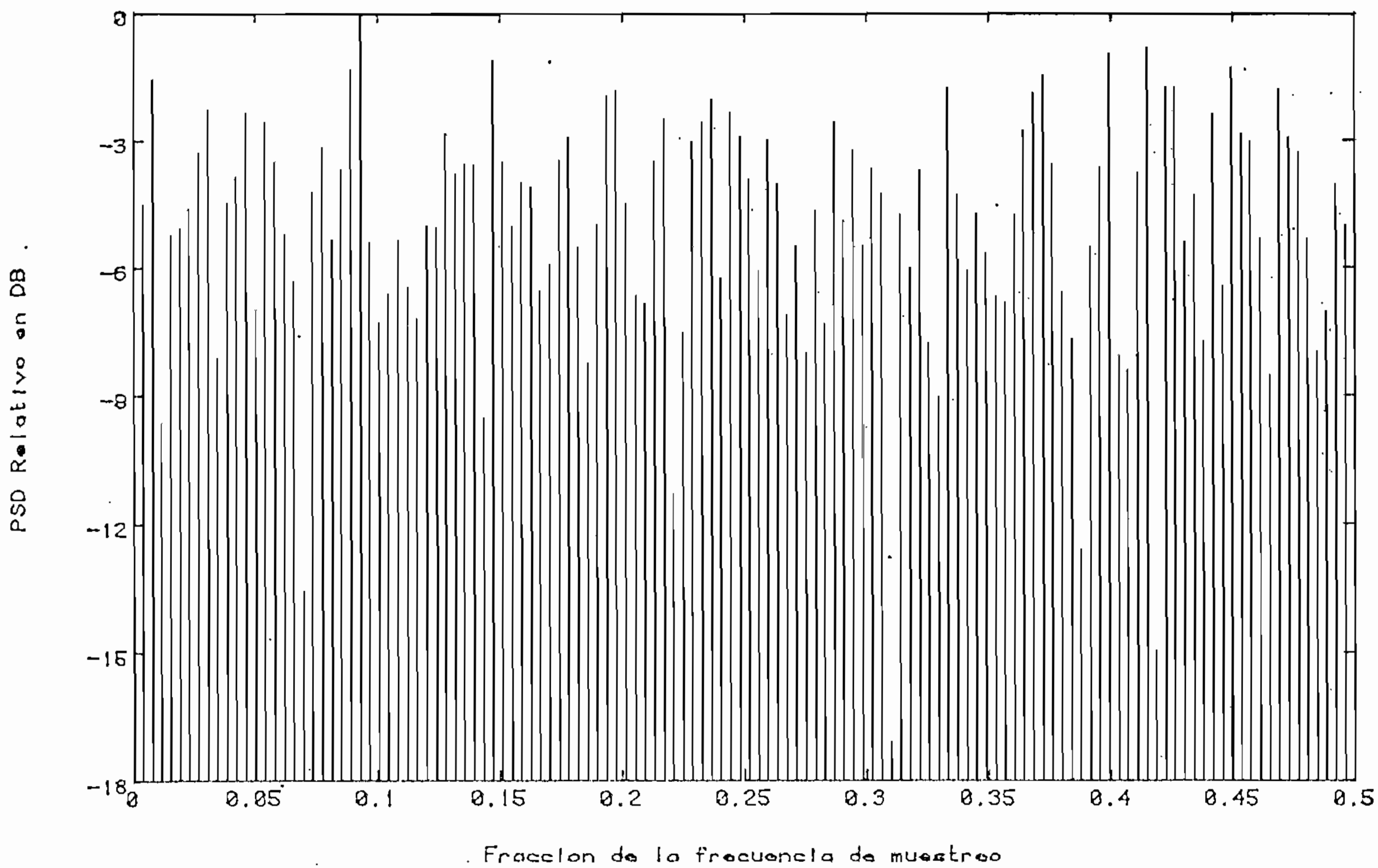
GENERADO CON LA DISTRIBUCION NORMAL (METODO DEL LIMITE CENTRAL)

ESPECTRO DE FRECUENCIA DE RUIDO BLANCO



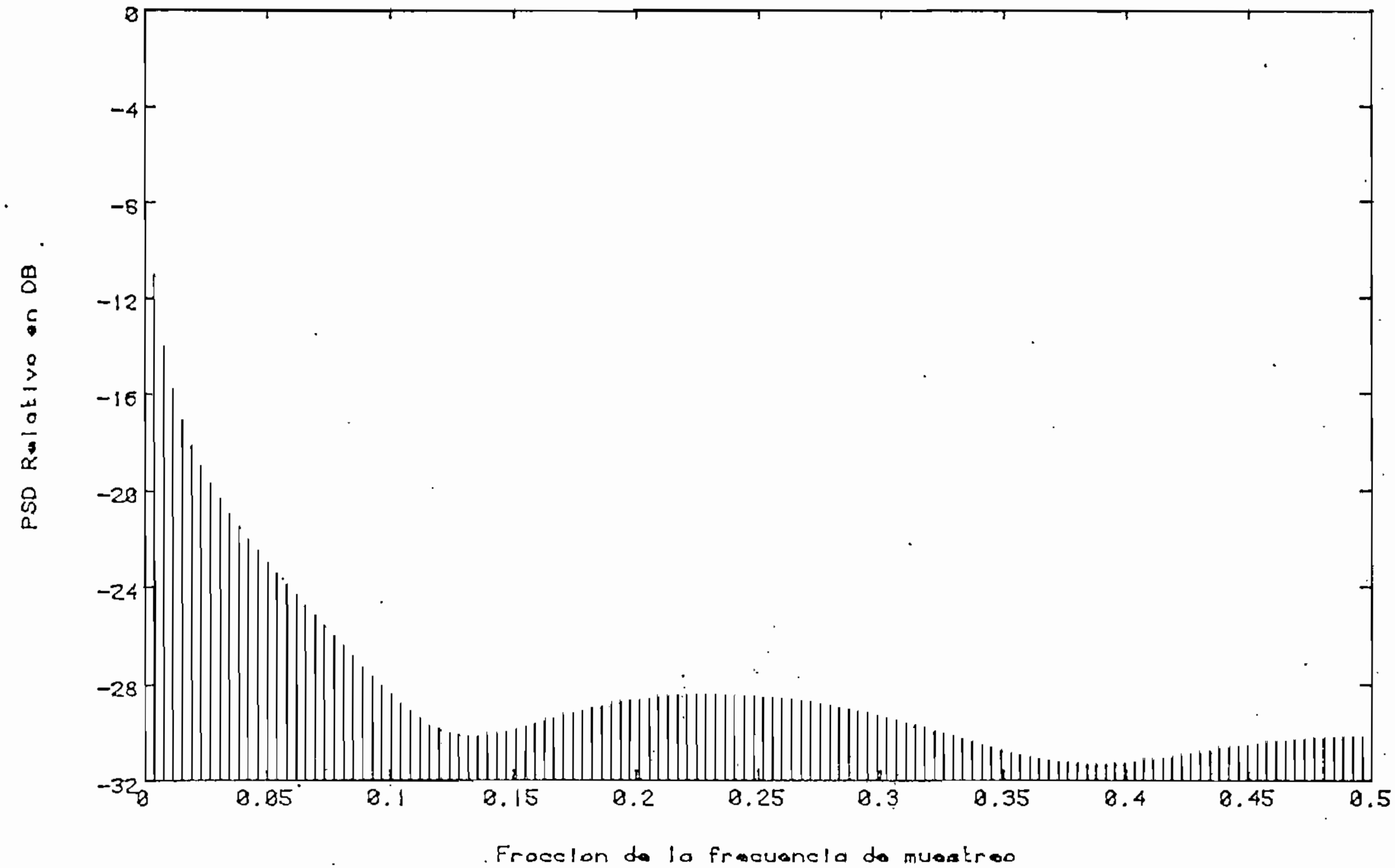
GENERADO CON LA DISTRIBUCION NORMAL (METODO POLAR)

ESPECTRO DE FRECUENCIA DE RUIDO BLANCO



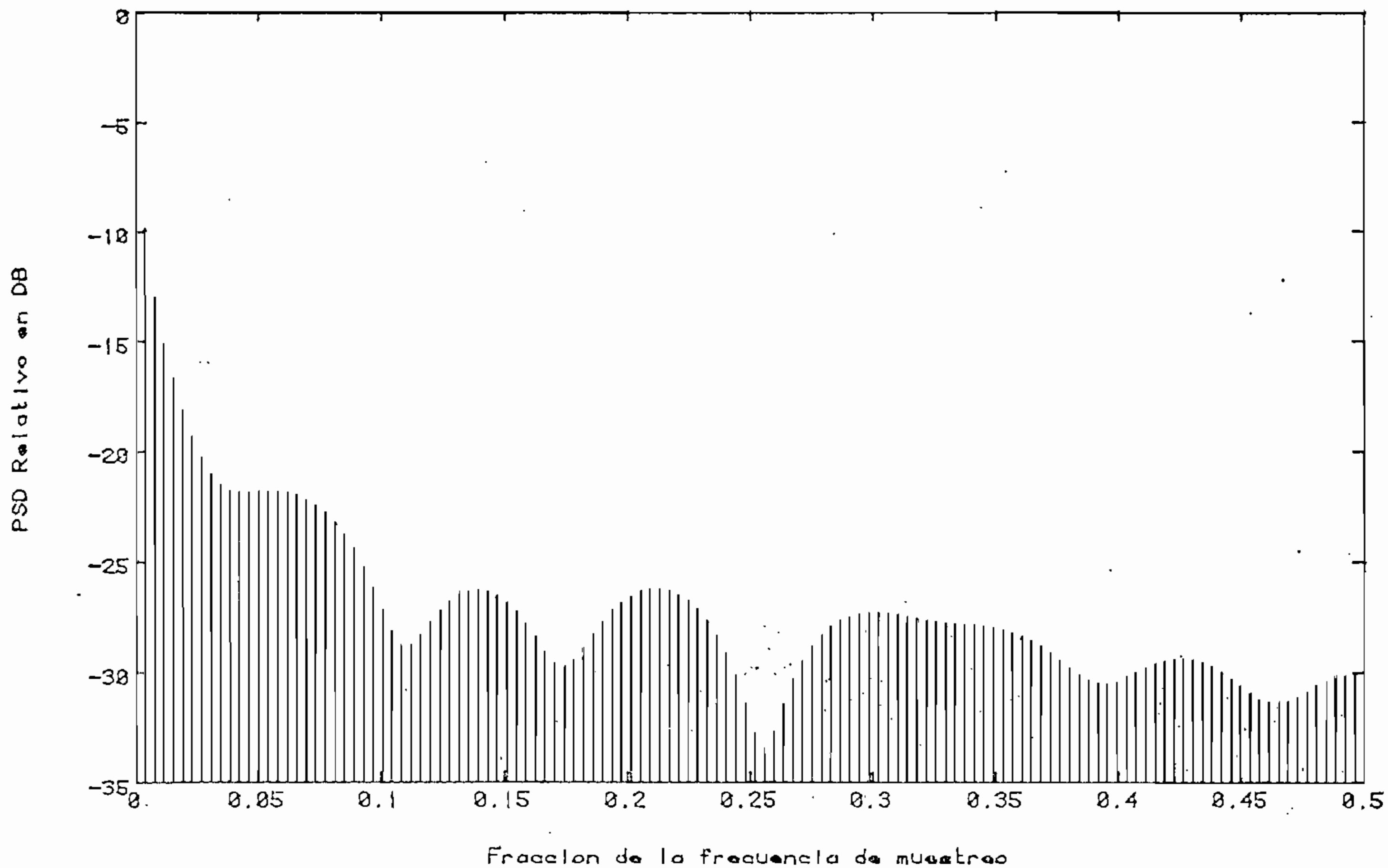
GENERADO USANDO LA DISTRIBUCION DE POISSON

ESPECTRO DE FRECUENCIA DE RUIDO COLOREADO



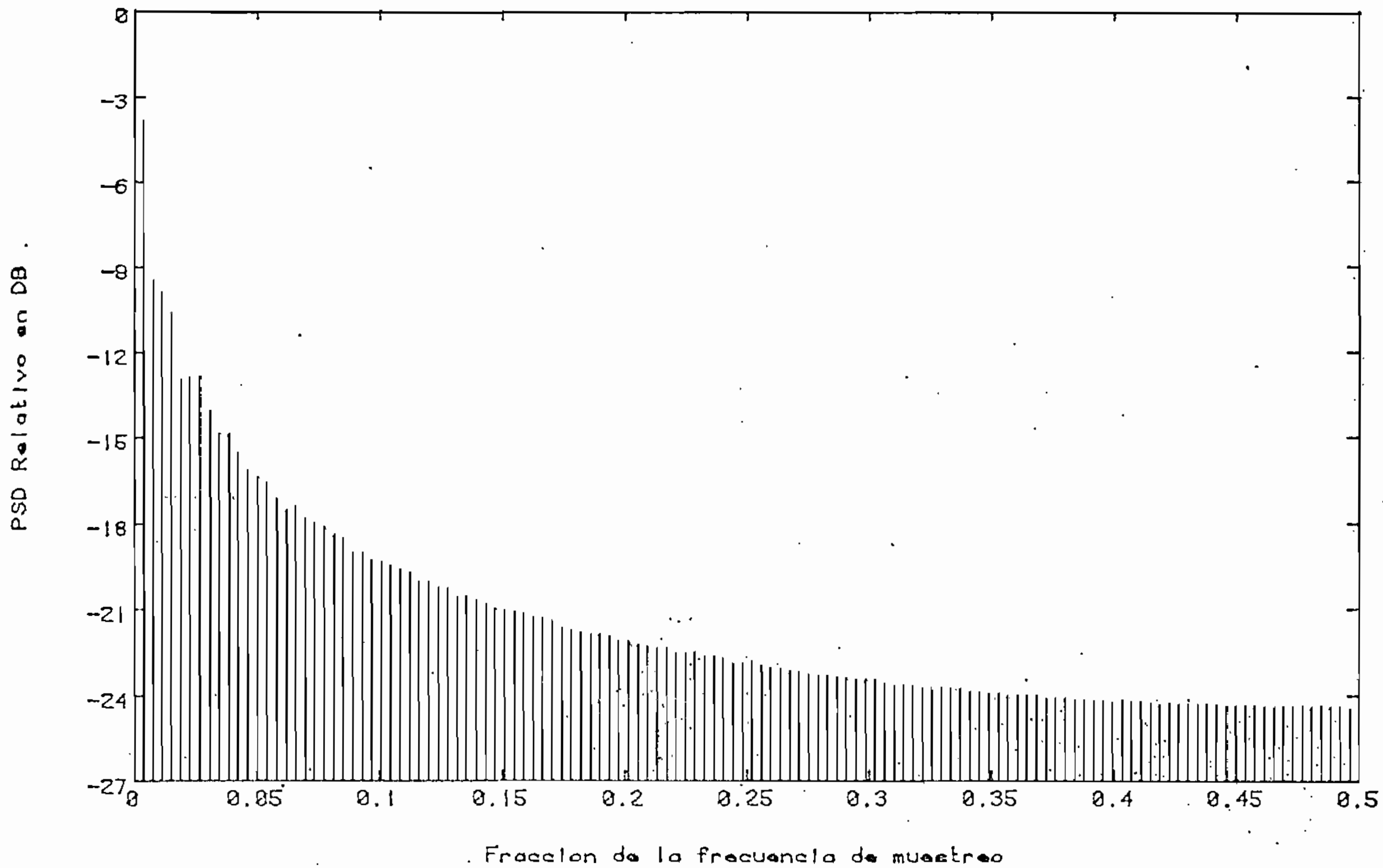
FILTRO USADO DE 5 POLOS

ESPECTRO DE FRECUENCIA DE RUIDO COLOREADO



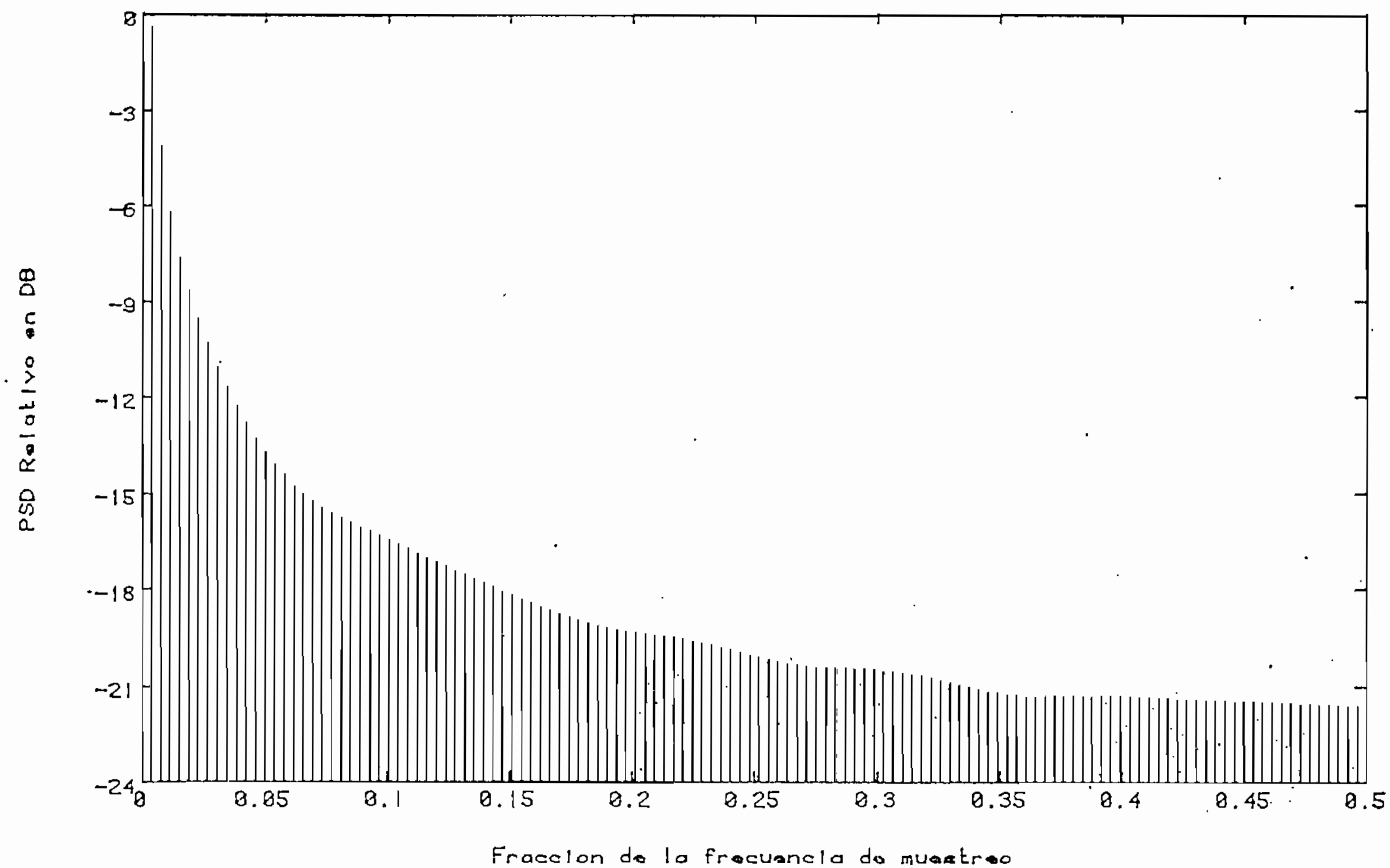
FILTRO USADO DE 15 POLOS

ESPECTRO DE FRECUENCIA DE RUIDO COLOREADO



FILTRO USADO DE 5 POLOS

ESPECTRO DE FRECUENCIA DE RUIDO COLOREADO



FILTRO USADO DE 15 POLOS

$$R = \overline{X^2}\ e^{-a|\tau|}$$

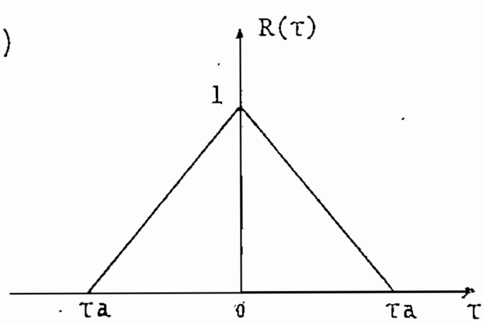
Se han tomado estas funciones de autocorrelación, debido a que sus densidades espectrales, en teoría, son

1) $$P(\omega) = \mathcal{F}\{R\} = \tau_a \left[S_a \left(\frac{\omega \tau a}{2} \right) \right]^2$$

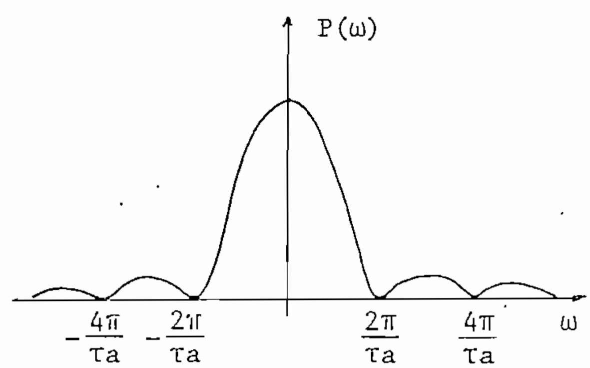
2) $$P(\omega) = \mathcal{F}\{R\} = 2a\overline{X^2} \left(\frac{1}{a^2 + \omega^2} \right)$$

Los gráficos de la función de autocorrelación y densidad espectral se dan a continuación.

1)

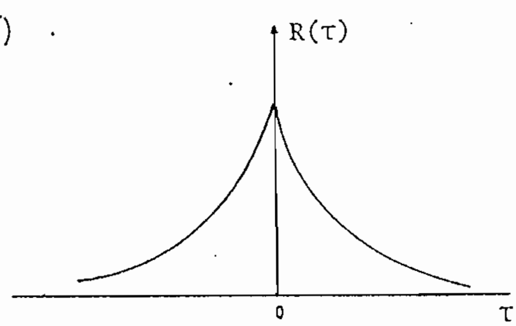


Función de autocorrección

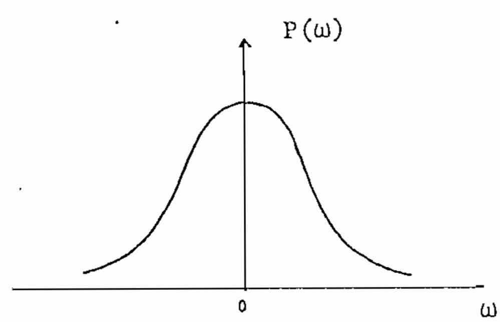


Densidad espectral

2)



Función de autocorrelación



Densidad espectral

Además, dependiendo de τa y a, se obtendrán espectros de frecuencia angostos o anchos (frecuencia de corte pequeña o grande respectivamente). Así, si τa (en (1)) es 10^{-9}, se obtiene

$$\omega\tau a < 0.5$$
$$f \approx 100 \text{ MHz}$$

con lo que el espectro sería plano para frecuencias menores que 100 MHz, considerándose la serie como ruido blanco. Si τa crece, el espectro será más angosto y, por lo tanto, para la misma frecuencia anterior, se tendrá ruido coloreado, es decir, espectro no uniforme.

Este argumento es válido también para la segunda autocorrelación.

En los gráficos de ruido coloreado, se observa la aproximación al espectro de frecuencia teórico, donde se ha tomado $\tau a \leq N$ (número de datos) y $a \leq 10^{-3}$.

4.4 TRAFICO TELEFONICO

Los sistemas de telecomunicaciones, progresan rápidamente con el avance tecnológico. Es así, que en el área de la Telefonía, actualmente se han desplazado los sistemas electromecánicos, reemplazándolos por sistemas electrónicos y computarizados que tienen entre otras ventajas, disponibilidad para manejar mayor carga, prestando un mejor servicio a los usuarios.

El tráfico telefónico es uno de los problemas reales complejos, que no puede estudiarse a cabalidad observándolo en la práctica, ni mediante un análisis teórico, pues sus interacciones y parámetros son difíciles de controlar. Asímismo, crear un prototipo del sistema y a base de éste realizar un estudio para predecir el comportamiento del sistema real resulta demasiado caro, y además, existen ciertas condiciones de prueba que no pueden manejarse adecuadamente.

Estos problemas conducen a que se use la técnica de simulación bajo condicones controladas, para realizar un estudio completo de tráfico. Los principales requerimientos para la simulación son:

a) Un modelo del sistema, con detalles suficientes que representen todos los estados que son importantes para el estudio, y las transiciones de un estado á otro.

b) Los medios para generar los eventos, los cuales alteran el estado del sistema.

c) Un conjunto de reglas que describan el comportamiento del sistema cuando se produce un evento o una combinación de éstos.

En la simulación de tráfico telefónico, los eventos son probabilísticos y dependen del comportamiento de los abonados, y las reglas son usualmente determinísticas, y dependen del diseño del sistema.

Para realizar la simulación de tráfico telefónico, cuyo objetivo en este trabajo NO de tesis, es obtener una estadística del número de llamadas procesadas, completadas, bloqueadas y ocupadas en el sistema, se usará el siguiente modelo.

3.1

4.4.1 MODELO DEL SISTEMA

Los sistemas reales en la actualidad usualmente están compuestos de una combinación de sistemas de llamadas perdidas y sistemas de espera. Esto es, sistemas en donde las llamadas que llegan a la central, se pierden porque el abonado al que se llama está ocupado, en cuyo caso se dice que es una llamada ocupada, o, porque no existe un conector disponible para realizar el enlace entre los abonados, en este caso se dice que es una llamada bloqueada. Todo este sistema es dicho "de llamadas perdidas".

En el sistema de espera, en cambio, las llamadas que tienen tono de ocupado o que no encuentran un conector libre, pueden pasar a una cola de espera, la cual puede ser LIFO (last-in, first-out), o FIFO (first-in, first-out), dependiendo de la estructura del sistema, y esperar un determinado tiempo hasta que se les de atención.

Para el caso que se pretende simular, se asume que se tiene un sistema de llamadas perdidas; así, si una llamada cuando llega no puede conectarse, se la abandonará, incrementando la lista de llamadas ocupadas o bloqueadas, dependiendo del estado del abonado llamado o del sistema.

Dado que la simulación se la realiza en una computadora digital, es conveniente expresar el modelo del sistema en forma de números y lista de números que representen su estructura y estados.

Para comprender mejor el modelo, se da el siguiente ejemplo.

Considérese un sistema telefónico simple, como el que se muestra en la figura 4.13 el cual tiene un determinado número de teléfonos conectados a un distribuidor de líneas, el mismo que tiene un número fijo de conectores que se usan para unir dos líneas cualesquiera, sujeto a la condición que solamente puede realizarse una conexión a la vez a cada línea.

3.1

Supóngase que en este sistema, su estado al tiempo de observación es que la línea 3 se conecta a la línea 6 y la 2 a la 7. Esto puede observarse en la figura 4.14 que es una forma de representar el estado del sistema. Cada línea tiene su disponibilidad como atributo y se trata como una entidad. Se establece una tabla de números para ver el estado de cada línea. Así, un cero significa que la línea está libre y un uno que está ocupada. El estado de los conectores sólo se representará por dos números: el total y los ocupados.

3.2

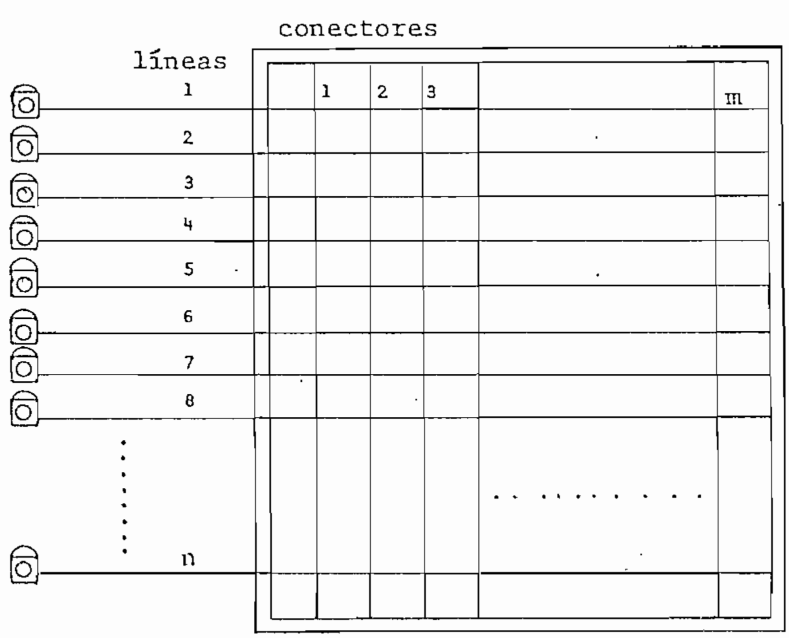


FIGURA 4.13 Ejemplo de un sistema telefónico

3.1

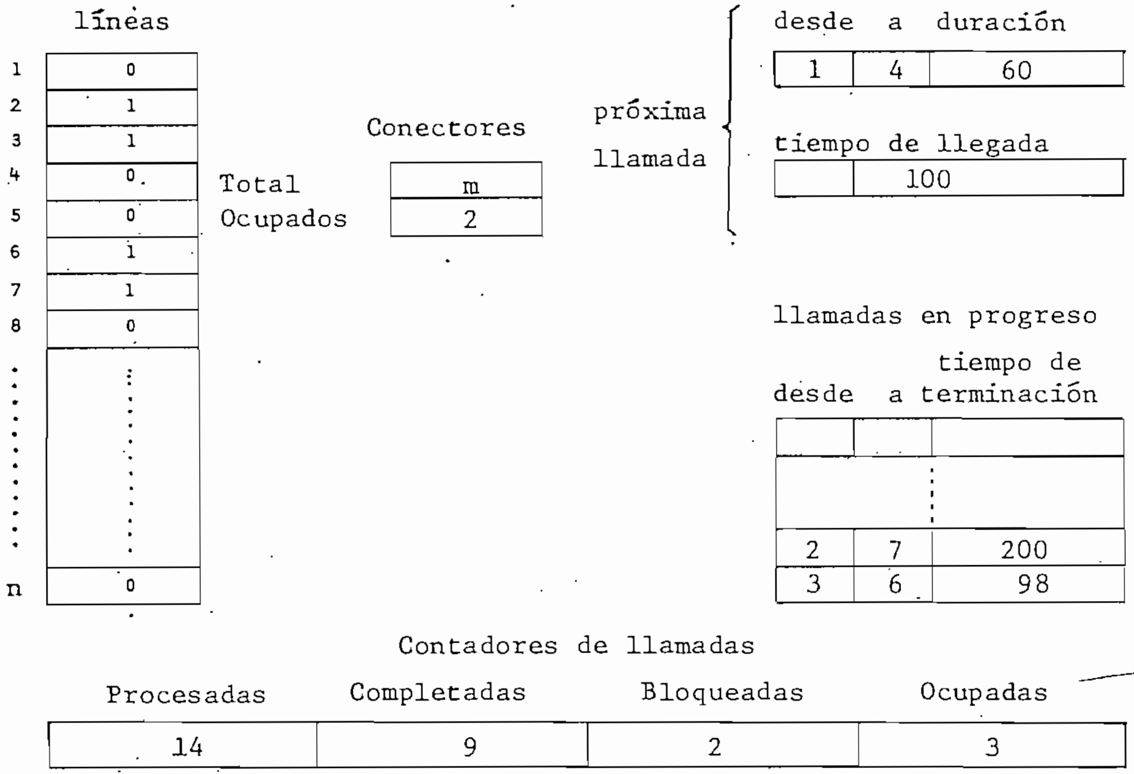


FIGURA 4.14 Representación del estado del sistema al tiempo
3.2
de observación.

De igual manera se lleva una tabla de números para las llamadas en progreso en donde se indica qué líneas se conectan y el tiempo de terminación de la llamada. Cada llamada es una entidad particular cuya propiedad es su origen, destinación, duración y el tiempo de terminación. Por otra parte, cada una de ellas, puede originarse de cualquier línea que no esté ocupada a su arribo, con igual probabilidad, y encaminarse a alguna línea sin considerar si está ocupada o no.

El primer paso para la simulación es generar el tiempo de llegada de una llamada, y a continuación generar su origen. Luego se realiza una inspección del efecto que produce esta llamada, esto es, si su tiempo de llegada es mayor que el tiempo de terminación de alguna otra, se realiza una desconexión de un conector y por lo tanto producirá una llamada completada y luego pasará a tramitarse. En caso contrario, se debe chequear si existe un conector libre para que esta llamada pueda atenderse, de otra manera sería una llamada bloqueada. Si se da trámite a la misma se genera su destino y se cambia el estado de los conectores y de las líneas, colocándose un uno en las líneas ocupadas e incrementando el número de concetores usados. De igual manera, cada vez que una llamada se completa, se cambia el estado de las líneas y conectores, poniendo un cero en las primeras y decrementando el número de conectores.

Esta rutina se prosigue hasta que el número de llamadas a ser simuladas se procesen. HASTA AQUI

4.4.2. SIMULACION DE TIEMPOS Y EVENTOS

Para simular los tiempos de llegada y duración de las llamadas, los orígenes y destino de las mismas, se usarán algunas de las distribuciones de probabilidad, cuyos métodos de generación se han dado.

Se asumirá que el sistema es de disponibilidad total con entradas de Poisson (intensidad de tráfico I Erlang), tiempo de duración de llamadas distribuído exponencialmente y de llamadas perdidas.

La simulación de los tiempos de llegada y terminación se realizará de la siguiente manera (Figura 4.15).

Comenzando desde un tiempo T_0 cuando no existe tráfico, el primer paso es generar el intervalo antes de que la primera llamada llegue. Como el proceso de llegada es Poissoniano, se puede hacer generando un interva lo T con una distribución exponencial que tenga un valor esperado 1/I , así se tendrá el tiempo de arribo de la primera llamada: $T_1 = T_0 + T$. Su tiempo de terminación será $T_1 + H$, donde H se genera con distribución exponencial y es el tiempo de duración de la llamada.

El tiempo de llegada de la segunda llamada se obtiene generando un segundo intervalo T aleatorio que comienza en T_1, esto es, $T_2 = T_2 + T$. De igual manera que la primera se genera su tiempo de terminación, y así sucesivamente. Si todos los enlaces están ocupados, y se produce la llegada de una nueva llamada, esta se perderá. En general, cada evento puede alterar el estado del sistema y puede generar futuros eventos. Así, cuando una llamada llega, si no se pierde, incrementará el número de conectores ocupados en uno, y generará un nuevo tiempo de terminación de llamada.

La generación de los orígenes y los destinos, dado que una llamada tiene la propiedad de poder producirse de cualquier línea y llegar a otra cualquiera con igual probabilidad, se hará generando valores discretos de variables aleatorias distribuídos uniformemente en el intervalo de 1 hasta el número de abonados.

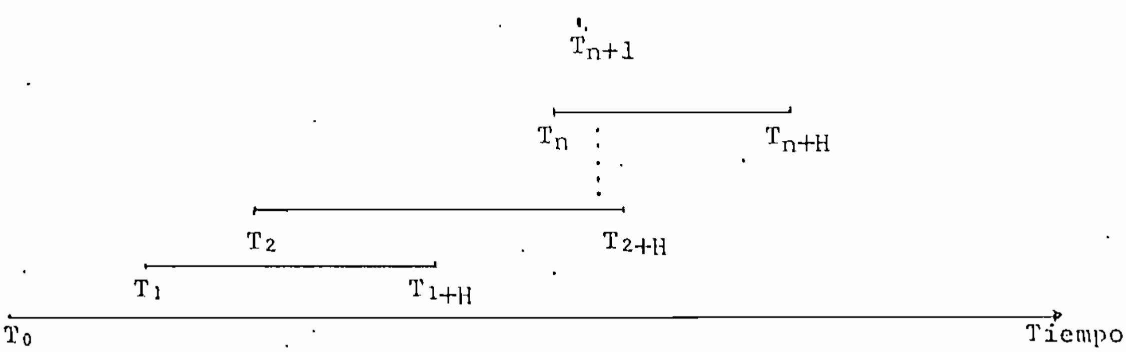


FIGURA 4.15 Simulación de tiempos para el modelo de tráfico telefónico.

La figura 4.16 muestra el diagrama de flujo del programa P32, para la simulación de tráfico telefónico. Las variables usadas tienen el siguiente significado.

P = Número de abonados.

M = Número de llamadas a ser simuladas.

N = Número de conectores.

I2 = Intensidad de tráfico (en Erlang).

E1 = Tiempo promedio de duración de las llamadas (en minutos).

R = Semilla de los números aleatorios distribuídos uniformemente entre 0 y 1.

T_i = Tiempo de terminación de una llamada.

L_i = Número de conectores ocupados.

A = Tiempo de llegada de llamadas.

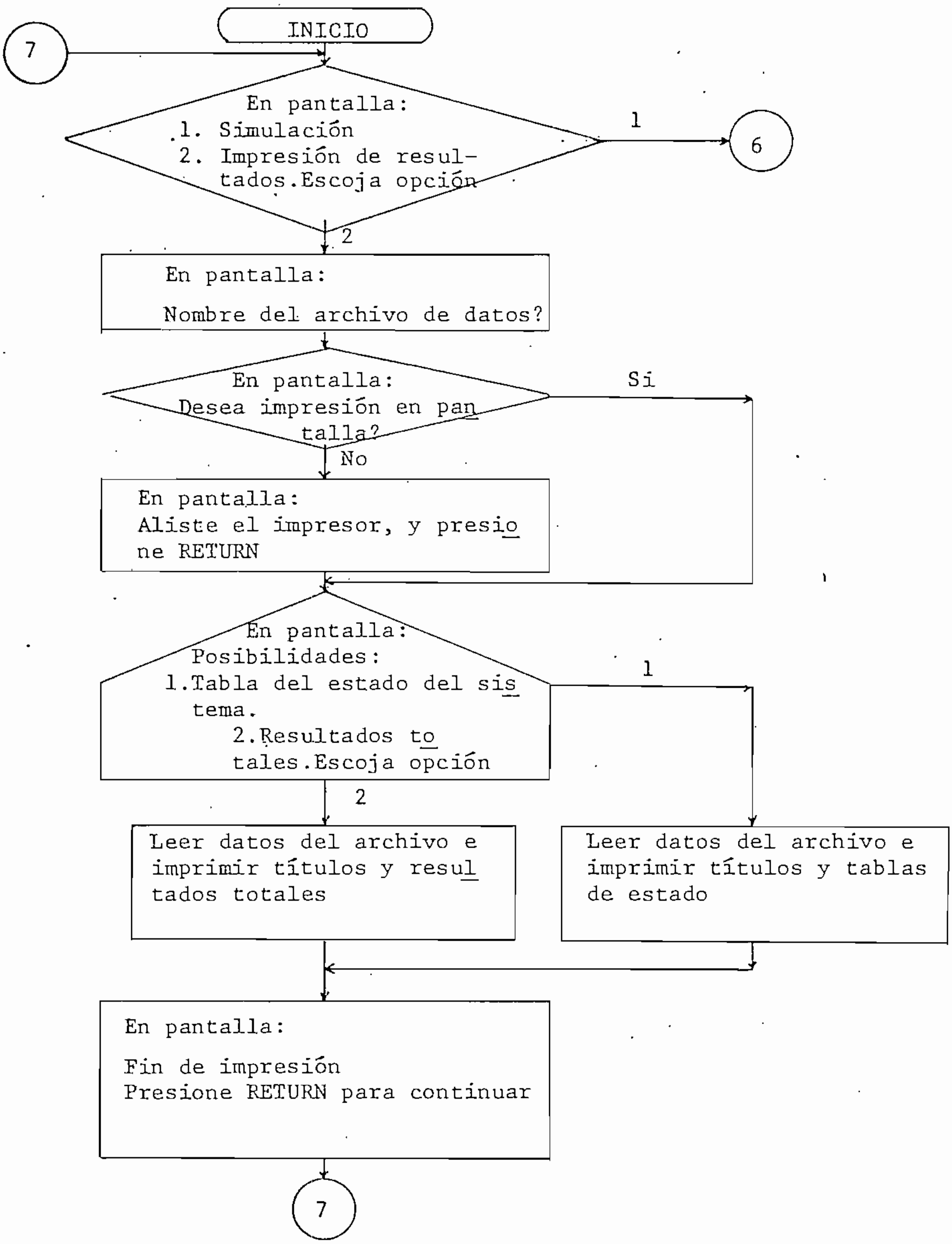
C = Número de llamadas procesadas.

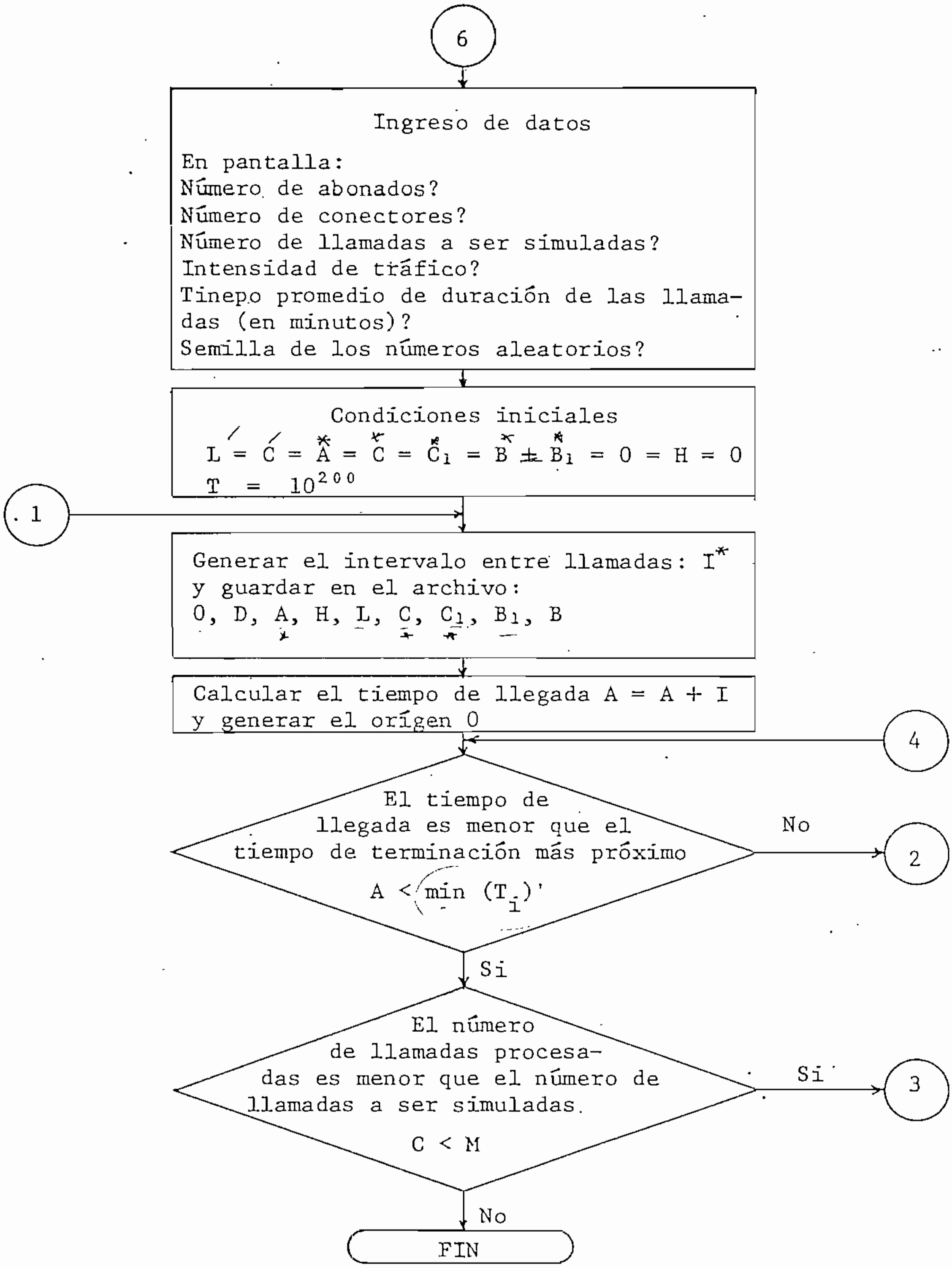
C1 = Número de llamadas completadas.

B1 = Número de llamadas bloqueadas.

B = Número de llamadas ocupadas.

I = Tiempo entre llamadas


INICIO
7
En pantalla:
1. Simulación
2. Impresión de resultados. Escoja opción
1
6
2
En pantalla:
Nombre del archivo de datos?
En pantalla:
Desea impresión en pantalla?
Si
No
En pantalla:
Aliste el impresor, y presione RETURN
En pantalla:
Posibilidades:
1. Tabla del estado del sistema.
2. Resultados totales. Escoja opción
1
2
Leer datos del archivo e imprimir títulos y resultados totales
Leer datos del archivo e imprimir títulos y tablas de estado
En pantalla:
Fin de impresión
Presione RETURN para continuar
7


6
Ingreso de datos
En pantalla:
Número de abonados?
Número de conectores?
Número de llamadas a ser simuladas?
Intensidad de tráfico?
Tinepo promedio de duración de las llamadas (en minutos)?
Semilla de los números aleatorios?
Condiciones iniciales
L = C = A = C = C1 = B ± B1 = 0 = H = 0
T = 10200
1
Generar el intervalo entre llamadas: I*
y guardar en el archivo:
O, D, A, H, L, C, C1, B1, B
Calcular el tiempo de llegada A = A + I
y generar el orígen O
4
El tiempo de llegada es menor que el tiempo de terminación más próximo
A < min (Ti)
No
2
Si
El número de llamadas procesadas es menor que el número de llamadas a ser simuladas.
C < M
Si
3
No
FIN

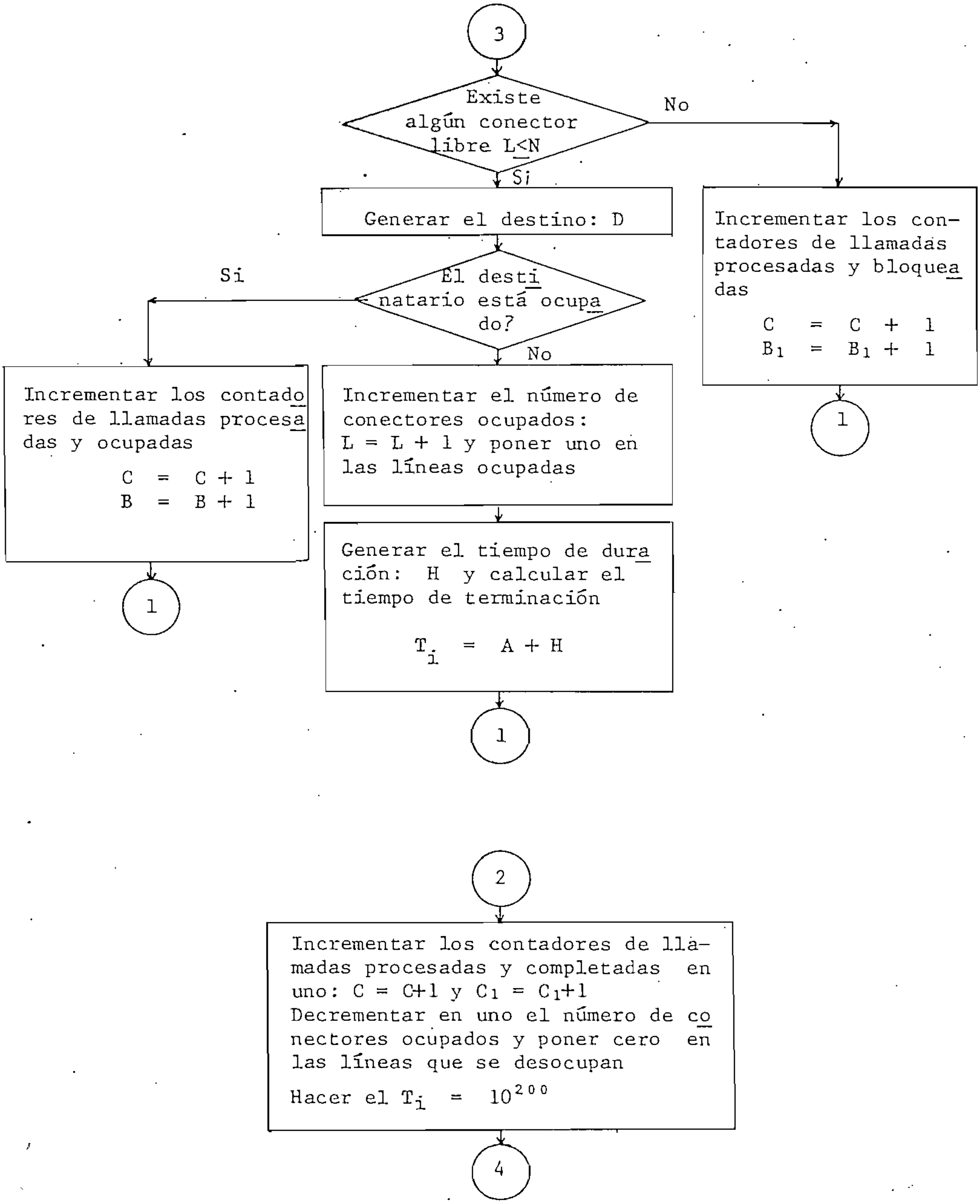


FIGURA Diagrama de flujo del programa P32 que simula tráfico telefónico.

Como ejemplo, se ha tratado el caso de un sistema de llamadas perdidas, para 100 abonados, con 10 y 20 conectores disponibles, realizando la simulación de 200 llamadas con tiempo promedio de duración de 2 minutos y variando la intensidad de tráfico en 1, 3, 5 y 10 Erlang.

Los resultados obtenidos se presentan a continuación, dándose primero una tabla del estado del sistema observado en cada llegada de una llamada, y luego los resultados totales de las llamadas procesadas, completadas, bloqueadas y ocupadas obtenidas en la simulación. Para todos los casos el sistema comienza en el estado cero.

En la tabla, la primera casilla representa el orgien de las llamadas;la segunda el destino; la tercera y cuarta los tiempos (en minutos) de llegada y duración respectivamente; la quinta el número de conectores ocupados; la sexta, séptima, octava y novena, el número de llamadas procesadas, completadas, bloqueadas y ocupadas respectivamente.

El análisis de la simulación es como sigue:

La primera llamada llega al tiempo 0,04 min. desde el abonado 26 al abonado 72, y dura 2,47 min, ocupando un conector. La segunda llamada se produce a los 0,17 min, desde el abonado 37 al abonado 47 y dura 0,35 min, y ocupa un segundo conector. La tercera llamada arriba a los 0,84 minutos desde el abonado 41 al abonado 16 y dura 3,26 min. Debido a que su tiempo de llegada es mayor que el tiempo de terminación de la segunda, implica que ésta se haya terminado cuando la tercera llega, de allí que el número de conectores ocupados siga siendo 2, esto es, se libera uno y se ocupa otro. Como resultado de este evento, se obtiene una llamada procesada y completada como se puede observar.

De esta manera se puede ir analizando todo el proceso.

En el caso de la llamada del abonado 49 al 77, se produce una llamada ocupada, debido a que el abonado 77 está hablando con el 96 durante 2,64 min., siendo el tiempo de terminación de ésta (1,5 + 2,64 = 4,14 min) , mayor que el tiempo de llegada de la llamada 49 a 77 (1,78 min), por este motivo su tiempo de duración es cero. También produce el efecto de desconexión de la conversación entre el abonado 65 y 99, pues como ya se explicó, dicha conversación acababa a los 1,77 min., por lo que se incrementan las llamadas completadas a 2 y las procesadas a 3 (bloqueada + procesada).

Siguiendo más adelante, cuando el abonado 27 intenta comunicarse con algún otro abonado al tiempo 3,71 min., encuentra todos los conectores ocupados; siendo ésta, una llamada procesada y bloqueada.

Como se puede apreciar, cada vez que es completada o es bloqueada o es ocupada una llamada, se incrementa el número de llamadas procesadas, aplicándose así la definición de sistema de llamadas perdidas.

Al final se presentan los resultados totales obtenidos, siendo el tiempo total de simulación de 45,11 min., que significa el tiempo en el cual todas las llamadas se procesan, más no el tiempo que se demora la computadora en realizar la simulación.

De estos resultados se deduce que a medida que el número de conectores aumenta para una misma intensidad de tráfico, el número de llamadas perdidas es menor, con lo que el grado de servicio mejora. Por otra parte, sería absurdo tener un conector para cada abonado, pero teniendo cierta estadística de las llamadas que se deben atender por día o por hora, se podría evaluar el número óptimo de conectores que se necesitarían.

Aunque el sistema es uno de los más simples y en el cual la congestión de llamadas es alta, se puede apreciar que con 20 conectores se obtiene un número razonable de llamadas completadas dentro de las 200 simuladas entre los 100 abonados, para una intensidad de tráfico de 10 Erlang.

SIMULACION DE TRAFICO TELEFONICO
========== == ======= ==========

Numero de abonados: 100
Numero de conectores: 10
Numero de llamadas simuladas: 200
Intensidad de trafico: 5 erlans
Tiempo promedio de servicio: 2 min.
(semilla de numeros aleatorios: 0.6)

LLAMADAS		TIEMPOS (min)		CONECT	ESTADO DEL SISTEMA			
ORIG	DEST	LLEG	DURA	OCUP	PROC	COMP	BLOQ	OCUP
0	0	0.00	0.00	0	0	0	0	0
26	72	0.04	2.47	1	0	0	0	0
37	45	0.17	0.35	2	0	0	0	0
41	16	0.84	3.26	2	1	1	0	0
87	3	1.05	2.71	3	1	1	0	0
32	58	1.06	1.18	4	1	1	0	0
20	95	1.15	9.36	5	1	1	0	0
65	99	1.38	0.39	6	1	1	0	0
77	96	1.50	2.64	7	1	1	0	0
9	89	1.63	0.52	8	1	1	0	0
40	29	1.69	3.75	9	1	1	0	0
49	77	1.78	0.00	8	3	2	0	1
92	32	1.81	0.00	8	4	2	0	2
88	59	2.10	3.91	9	4	2	0	2
54	23	2.24	4.55	8	6	4	0	2
14	77	2.34	0.00	8	7	4	0	3
43	47	2.50	6.44	9	7	4	0	3
46	59	2.71	0.00	8	9	5	0	4
26	85	2.83	1.21	9	9	5	0	4
63	59	3.27	0.00	9	10	5	0	5
91	63	3.65	1,09	10	10	5	0	5

27	----	3.71	0.00	10	11	5	1	5
73	47	3.97	0.00	9	13	6	1	6
10	68	3.97	4.06	10	13	6	1	6
57	42	4.12	1.13	9	15	8	1	6
70	74	4.24	4.30	9	16	9	1	6
98	93	4.81	1.06	9	17	10	1	6
46	64	5.00	4.99	10	17	10	1	6
60	----	5.21	0.00	10	18	10	2	6
39	33	5.68	0.80	9	20	12	2	6
2	43	5.96	0.00	8	22	13	2	7
49	8	6.00	8.85	9	22	13	2	7
63	76	6.57	1.53	8	24	15	2	7
56	29	7.03	5.01	8	25	16	2	7
97	42	7.21	2.14	9	25	16	2	7
48	47	7.66	0.00	9	26	16	2	8
98	37	7.93	0.91	10	26	16	2	8
94	82	8.49	10.57	9	28	18	2	8
84	86	9.02	1.72	7	31	21	2	8
44	24	9.17	0.05	8	31	21	2	8
7	21	9.47	0.19	7	33	23	2	8
30	78	9.80	3.72	7	34	24	2	8
99	64	9.86	0.00	7	35	24	2	9
69	82	9.86	0.00	7	36	24	2	10
40	94	9.89	0.00	7	37	24	2	11
89	10	9.99	0.45	7	38	25	2	11
35	47	10.00	1.32	8	38	25	2	11
98	27	10.10	1.14	9	38	25	2	11
7	80	10.28	1.31	10	38	25	2	11
79	92	10.44	2.80	10	39	26	2	11

4	50	10.58	1.38	10	40	27	2	11
13	----	10.73	0.00	10	41	27	3	11
70	79	11.09	0.00	9	43	28	3	12
77	9	11.15	2.74	10	43	28	3	12
96	----	11.18	0.00	10	44	28	4	12
22	21	11.37	4.91	9	46	30	4	12
18	71	11.45	7.32	10	46	30	4	12
17	----	11.53	0.00	10	47	30	5	12
65	----	11.55	0.00	10	48	30	6	12
60	----	11.56	0.00	10	49	30	7	12
32	11	12.42	0.23	8	52	33	7	12
90	20	12.62	0.35	9	52	33	7	12
3	59	13.27	0.87	7	55	36	7	12
50	75	13.28	0.37	8	55	36	7	12
66	65	13.32	0.42	9	55	36	7	12
91	70	13.49	5.90	10	55	36	7	12
76	78	14.04	2.09	7	59	40	7	12
32	37	14.09	1.21	8	59	40	7	12
79	69	14.30	1.12	8	60	41	7	12
89	8	14.64	0.00	8	61	41	7	13
63	94	14.84	0.00	8	62	41	7	14
1	9	14.86	1.05	8	63	42	7	14
17	91	15.05	0.00	8	64	42	7	15
20	17	15.08	12.62	9	64	42	7	15
39	47	15.63	10.67	8	66	44	7	15
86	4	15.73	3.38	9	66	44	7	15
30	67	16.14	3.34	8	68	46	7	15
10	78	16.19	0.11	9	68	46	7	15
43	3	16.42	0.44	8	70	48	7	15

2	70	35.76	1.27	8	179	116	32	31
85	53	36.10	0.02	9	179	116	32	31
57	77	36.23	0.57	8	181	118	32	31
66	52	36.44	0.43	8	182	119	32	31
50	81	36.53	0.27	9	182	119	32	31
3	12	36.61	3.89	10	182	119	32	31
74	----	36.78	0.00	10	183	119	33	31
74	23	36.97	0.98	8	186	122	33	31
66	47	36.99	0.69	9	186	122	33	31
57	56	37.04	3.63	9	187	123	33	31
13	21	37.11	1.50	10	187	123	33	31
49	94	37.52	0.00	9	189	124	33	32
53	40	37.65	3.15	10	189	124	33	32
76	----	37.66	0.00	10	190	124	34	32
38	16	37.74	7.37	10	191	125	34	32
24	89	38.74	0.16	8	194	128	34	32
86	55	38.75	0.07	9	194	128	34	32
36	23	38.92	0.59	8	196	130	34	32
46	12	39.14	0.00	8	197	130	34	33
41	87	39.23	0.52	8	198	131	34	33
62	58	39.26	3.51	9	198	131	34	33
69	23	39.28	0.00	9	199	131	34	34
19	47	39.35	0.24	10	199	131	34	34
44	----	39.43	3.66	10	200	131	35	34

LLAMADAS PROCESADAS: 200
LLAMADAS COMPLETADAS: 131
LLAMADAS BLOQUEADAS: 35
LLAMADAS OCUPADAS: 34
TIEMPO TOTAL DE SIMULACION : 45.11 min.

```
SIMULACION DE TRAFICO TELEFONICO
========= == ======= =========

Numero de abonados: 100
Numero de conectores: 10
Numero de llamadas simuladas: 200
Intensidad de trafico: 1 erlang
Tiempo promedio de servicio: 2 min.
(semilla de numeros aleatorios: 0.5)


LLAMADAS PROCESADAS: 200
LLAMADAS COMPLETADAS: 196
LLAMADAS BLOQUEADAS: 0
LLAMADAS OCUPADAS: 4
TIEMPO TOTAL DE SIMULACION : 206.30 min.


SIMULACION DE TRAFICO TELEFONICO
========= == ======= =========

Numero de abonados: 100
Numero de conectores: 10
Numero de llamadas simuladas: 200
Intensidad de trafico: 3 erlang
Tiempo promedio de servicio: 2 min.
(semilla de numeros aleatorios: 0.1)


LLAMADAS PROCESADAS: 200
LLAMADAS COMPLETADAS: 174
LLAMADAS BLOQUEADAS: 6
LLAMADAS OCUPADAS: 20
TIEMPO TOTAL DE SIMULACION : 71.41 min.


SIMULACION DE TRAFICO TELEFONICO
========= == ======= =========

Numero de abonados: 100
Numero de conectores: 10
Numero de llamadas simuladas: 200
Intensidad de trafico: 5 erlang
Tiempo promedio de servicio: 2 min.
(semilla de numeros aleatorios: 0.6)


LLAMADAS PROCESADAS: 200
LLAMADAS COMPLETADAS: 131
LLAMADAS BLOQUEADAS: 35
LLAMADAS OCUPADAS: 34
TIEMPO TOTAL DE SIMULACION : 45.11 min.
```

```
SIMULACION DE TRAFICO TELEFONICO
========== == ======= ==========

Numero de abonados: 100
Numero de conectores: 10
Numero de llamadas simuladas: 200
Intensidad de trafico: 10 erlans
Tiempo promedio de servicio: 2 min.
(semilla de numeros aleatorios: 0.9)


LLAMADAS PROCESADAS: 200
LLAMADAS COMPLETADAS: 102
LLAMADAS BLOQUEADAS: 78
LLAMADAS OCUPADAS: 20
TIEMPO TOTAL DE SIMULACION : 27.82 min.



SIMULACION DE TRAFICO TELEFONICO
========== == ======= ==========

Numero de abonados: 100
Numero de conectores: 20
Numero de llamadas simuladas: 200
Intensidad de trafico: 1 erlans
Tiempo promedio de servicio: 2 min.
(semilla de numeros aleatorios: 0.5)


LLAMADAS PROCESADAS: 200
LLAMADAS COMPLETADAS: 196
LLAMADAS BLOQUEADAS: 0
LLAMADAS OCUPADAS: 4
TIEMPO TOTAL DE SIMULACION : 206.30 min.



SIMULACION DE TRAFICO TELEFONICO
========== == ======= ==========

Numero de abonados: 100
Numero de conectores: 20
Numero de llamadas simuladas: 200
Intensidad de trafico: 3 erlans
Tiempo promedio de servicio: 2 min.
(semilla de numeros aleatorios: 0.1)


LLAMADAS PROCESADAS: 201
LLAMADAS COMPLETADAS: 181
LLAMADAS BLOQUEADAS: 0
LLAMADAS OCUPADAS: 20
TIEMPO TOTAL DE SIMULACION : 71.67 min.
```

```
SIMULACION DE TRAFICO TELEFONICO
========== == ======= ==========

Numero de abonados: 100
Numero de conectores: 20
Numero de llamadas simuladas: 200
Intensidad de trafico: 5 erlans
Tiempo promedio de servicio: 2 min.
(semilla de numeros aleatorios: 0.6)


LLAMADAS PROCESADAS: 202
LLAMADAS COMPLETADAS: 161
LLAMADAS BLOQUEADAS: 0
LLAMADAS OCUPADAS: 41
TIEMPO TOTAL DE SIMULACION : 45.39 min.


SIMULACION DE TRAFICO TELEFONICO
========== == ======= ==========

Numero de abonados: 100
Numero de conectores: 20
Numero de llamadas simuladas: 200
Intensidad de trafico: 10 erlans
Tiempo promedio de servicio: 2 min.
(semilla de numeros aleatorios: 0.9)


LLAMADAS PROCESADAS: 202
LLAMADAS COMPLETADAS: 141
LLAMADAS BLOQUEADAS: 7
LLAMADAS OCUPADAS: 54
TIEMPO TOTAL DE SIMULACION : 31.56 min.
```

HASTA Aqui

CAPITULO V

COMENTARIOS Y CONCLUSIONES

En términos generales, el presente trabajo se lo ha realizado de manera que sirva de base para futuros estudios de sistemas mediante la simulación digital. Se han dado los principios y las herramientas matemáticas necesarias que permiten usar la simulación como método de estudio de sistemas, cuyas características o funciones de operación se representen por distribuciones de probabilidad, sin detallar conceptos ni demostraciones matemáticas en los casos que no se ha considerado pertinente.

Según se ha visto, la realización de una simulación en un computador, requiere una planificación bastante detallada de los tópicos involucrados, de allí que la metodología planteada comprende, sólo en términos generales, los puntos más importantes que deberían conocerse, siendo así una guía para los analistas que usan la simulación.

Los métodos descritos en el capítulo III, para generar valores de variables aleatorias, sólo incluyen las distribuciones de probabilidad que se ha creído que son mayormente usadas en el campo de la simulación de los sistemas de telecomunicaciones y control. Estos métodos, son muy sencillos y fáciles de implementar en un computador, siendo por otra parte, precisos y rápidos en la misma medida que la del generador de números aleatorios uniformemente distribuídos entre cero y uno, y de la velocidad de cómputo del computador que se use. Para este caso, el generador usado es bastante rápido debido a las pocas operaciones que se realizan, y el tiempo de generación sólo depende de la velocidad de cómputo del computador. Los métodos más lentos resultaron ser los que usan una función de logaritmo, debido al tiempo que se tarda la computadora en calcularla. Una característica importante de estos métodos es que las series que generan pueden repetirse, lo que permite analizar y comparar sistemas semejantes bajo las mismas circunstancias. Por otra parte, los resultados que se han obtenido, esto es, las series de números aleatorios con determinada distribución de probabilidad, son muy importantes cuando se simula algún proceso aleatorio, puesto que, algunos se pueden representar completamente por dichos números, facilitándo de esta manera la obtención de resultados que por otros métodos, en algunos casos, no se pueden conseguir debido a las dificultades que presentan.

La simulación de ruido blanco, es uno de los casos en el que las variables aleatorias son indispensables para representar el proceso, como ya se ha explicado. De igual manera, en la simulación de ruido coloreado, las variables aleatorias se han usado para generar las condiciones iniciales del proceso.

Estas señales tienen mucha importancia en el estudio de sistemas de transmisión, pues como es sabido, por lo general en un canal de transmisión se genera un ruido que se suma a la señal que se transmite. Así mismo, pueden representar, en la simulación, medidas hechas en algún sistema real que no sea posible construir por costo o por tiempo, pudiéndose de esta manera optimizar los modelos matemáticos que se creen para dicho sistema.

El estudio de tráfico telefónico tratado aquí, constituye la parte básica y elemental de esta compleja materia. Como se ha indicado, el sistema simulado es uno de los primeros que se usaron en telefonía; esto es, un sistema de llamadas perdidas; así mismo, se ha tomado un sistema ficticio dado que analizar uno real requiere recopilar información que está fuera del alcance de este trabajo.

El programa creado con este objetivo, es relativamente rápido y analiza el comportamiento del sistema para un determinado número de conectores y una intensidad de tráfico dada, obteniéndose los resultados que podrían servir para optimizar el dimensionamiento de centrales y redes, así como también la capacidad de abonados que podría manejar una determinada central.

Dado que este proceso es de carácter probabilístico, se han usado también, las variables aleatorias para presentar partes del mismo, pudiéndose notar la importancia que estas tienen para producir los resultados obtenidos. Por otra parte, sólo se han dado los principios necesarios para realizar la simulación de este proceso, sin recurrir a un estudio más amplio de la teoría de tráfico, dado que, como ya se indicó, el fin es presentar las bases principales para analizar este tipo de sistemas usando la simulación.

Uno de los principales problemas que hay que tener en cuenta es la capacidad de memoria y la velocidad de cómputo del computador que se use para realizar la simulación, pues esto limita el tamaño del problema que se analiza, pudiéndose no obtener los resultados deseados para predecir el comportamiento del sistema que se estudia, debido a la falta de in formación que proporciona un determinado programa.

Para los casos tratados, esto no ha sido un problema grave, pues se ha trabajado con sistemas pequeños posibles de manejar en el computador.

Por último, y con base en todo lo indicado, se cree haber cumplido a cabalidad con el objetivo propuesto.

RECOMENDACIONES

Debido a la importancia y versatilidad de la simulación en un computador y una vez presentadas las herramientas matemáticas necesarias, se recomienda:

1. Completar el estudio de tráfico telefónico, enfocado a analizar los sistemas de telefonía que existen en el país y que sirvan para solucionar los problemas de dimensionamiento tanto de centrales como de redes telefónicas.

2. Crear los programas necesarios para estudiar los sistemas de transmisión de datos que permitan estimar las posibles causas de errores, así como la tasa de error que se obtendría en un determinado sistema. Esto es necesario desde el punto de vista de diseño y enseñanza, pues servirían para que los estudiantes se proyecten de mejor forma en el estudio de este tipo de sistemas que en nuestro país están en pleno auge.

3. En el área de control existen muchos sistemas que pueden analizarse usando la simulación. Se puede crear un programa que obtenga el mejor modelo matemático de un sistema, a través de la obtimización paramétrica. Para este caso se necesitarían medidas hechas en el sistema real, pero un ruido blanco representaría adecuadamente éstas.

4. Completar la biblioteca de subrutinas que generarn valores de variables aleatorias con las demás distribuciones de probabilidad.

Es necesario realizar primero una descripción de los programas desarrollados, antes de dar el manual de uso, para que el lector visualice su estructura.

DESCRIPCION DE LOS PROGRAMAS

Los programas se encuentran concatenados en la forma como se ilustra en la figura A1, en donde las letras y números entre comillas indican el nombre de cada programa, cuya función se detalla a continuación.

PROGRAMA "PP"

Es el programa piloto para comandar a los demás. Pide el ingreso de las unidades en donde se encuentran los discos de trabajo (variables P8 y P9). Presenta también un menú de los programas principales y carga a la memoria del computador algunos de ellos, según la tecla definible que se presione. Por su objetivo, permanece siempre en memoria.

Menú:

Tecla 1 - INDICE DE PROGRAMAS
Tecla 2 - NUMEROS ALEATORIOS
Tecla 3 - RUIDO BLANCO GAUSSIANO
Tecla 4 - RUIDO BLANCO GENERADO USANDO LA DISTRIBUCION DE POISSON
Tecla 5 - RUIDO COLOREADO
Tecla 6 - TRAFICO TELEFONICO

PROGRAMA "P20"

Sirve para comandar todas las operaciones realizadas con los números a

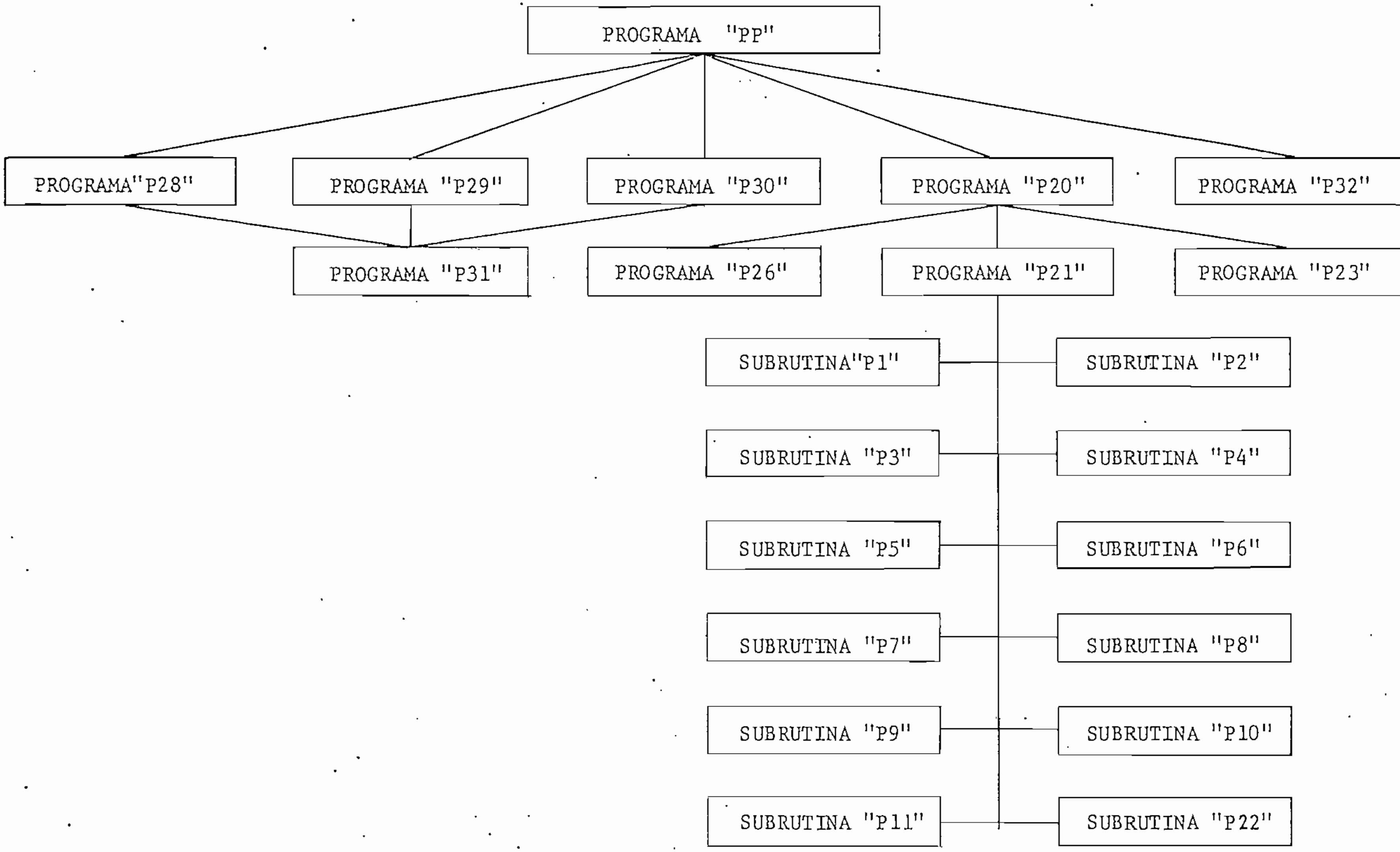


FIGURA A1. Diagrama de bloques de la organación de los programas desarrollados.

leatorios a través del programa piloto. Esto es, maneja a los programas "P21", "P23" y "P26", presentando el siguiente menú:

Tecla 12 - GENERACION DE NUMEROS ALEATORIOS

Tecla 13 - CLASIFICACION DE LOS NUMEROS

Tecla 16 - GRAFICO DE LA CLASIFICACION

Tecla 17 - RETORNAR AL PROGRAMA PILOTO

PROGRAMA "P21"

Realiza la generación de los números aleatorios con una determinada distribución de probabilidad previamente escogida. Comanda a través del programa piloto, las subrutinas "P22", "P1", "P2", "P3", "P4", "P5", "P6", "P7", "P8", "P9", "P10", "P11".

Significado de las variables usadas.-

N = Cantidad de números aleatorios que se desea generar (un número entero).

R = Semilla de los números aleatorios distribuídos uniformemente entre 0 y 1.

X_1 = Vector de dimensión N que contiene los números generados

X_2 y X_3 = Vectores de dimensión N/2 que contienen los números generados, únicamente para la distribución normal, método polar.

La figura A2, ilustra el diagrama de flujo de este programa.

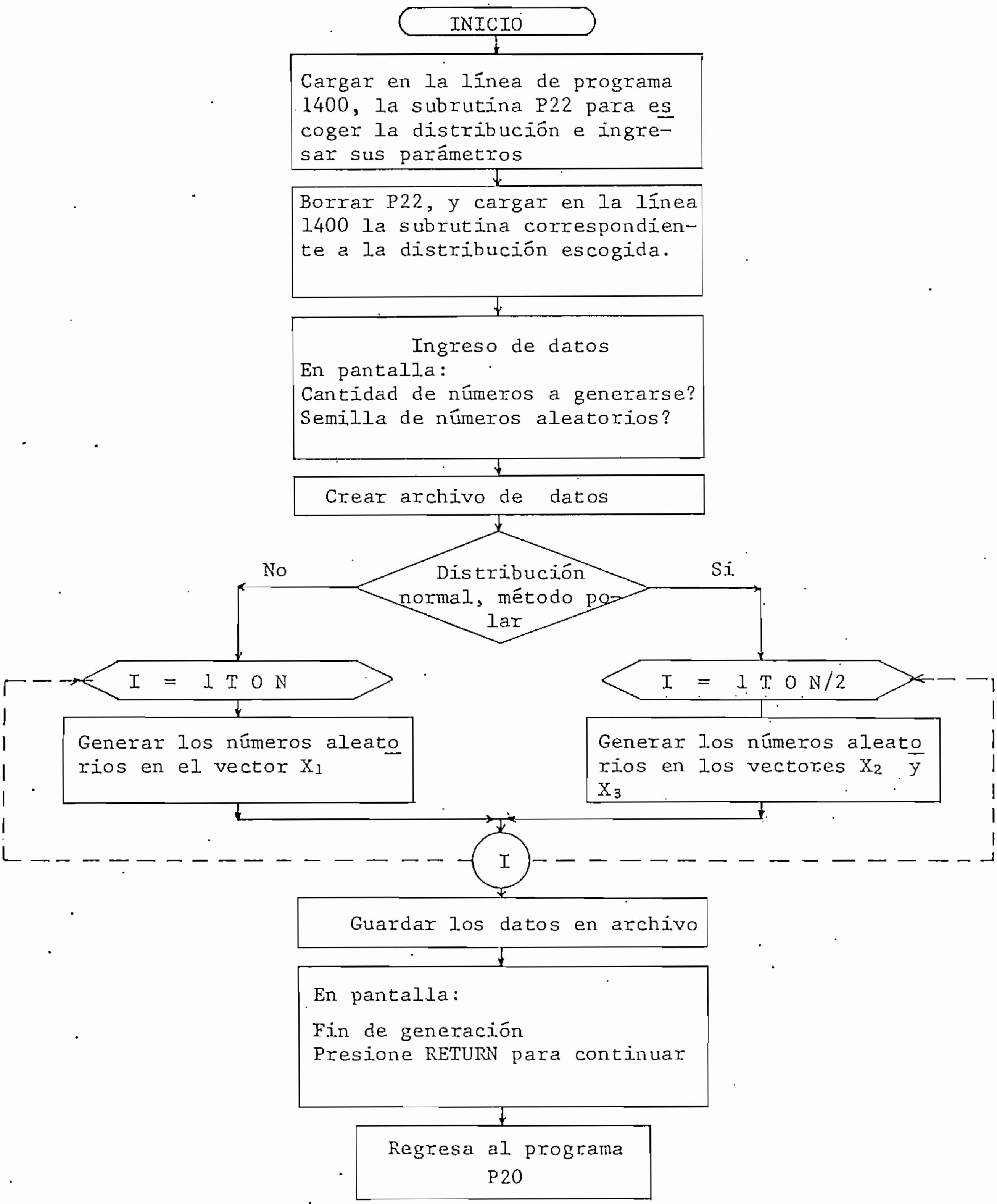


FIGURA A2. Diagrama de flujo del programa "P21".

Limitación.-

Debido a la capacidad de memoria del computador, no se deben generar series de números aleatorios mayores que 2000.

SUBRUTINA "P22"

Sirve para escoger el tipo de distribución de probabilidad que se desea simular, e ingresar los parámetros necesarios de cada una de ellas. Presenta una lista de las distribuciones asignándoles a cada una un número, el cual debe escribirse cuando se pide escoger el tipo de distribución.

Lista de distribuciones.-

1.- Uniforme
2.- Exponencial (Método del logaritmo)
3.- Exponencial (Método de minimización aleatoria)
4.- Normal (Método del límite central)
5.- Normal (Método polar)
6.- Geométrico (Primer método)
7.- Geométrico (Segundo método)
8.- Binomial negativa
9.- Binomial
10.- Hipergeométrica
11.- De Poisson

Significado de las variables usadas.-

O1	=	Número asignado a la distribución que se escoge (1, 2...11)
E	=	Valor esperado
D	=	Desviación estándar
L1 y LO	=	Límites superior e inferior para la distribución uniforme
Q1 y P1	=	Vectores de dimensión 14 que contienen las tablas de constantes para la generación de números aleatorios con distribución exponencial (método de minimización aleatoria)
Q	=	Probabilidad de fracasos
P	=	Probabilidad de éxitos
M y M1	=	Tamaños de la población y de la muestra que se toma, para la distribución hipergeométrica (M1 < M)

SUBRUTINAS GENERADORAS DE NUMEROS ALEATORIOS

P1.- Distribución Uniforme.

Parámetros: Límites del intervalo de generación o el valor esperado y la desviación estándar.

P2.- Distribución Exponencial, método del logaritmo.

Parámetros: Valor esperado y desviación estándar.

P3.- Distribución Exponencial, método de minimización aleatoria.

Parámetros: Valor esperado y tablas de constantes.

P4.- Distribución Normal, método del límite central.

Parámetros: Valor esperado y desviación estándar.

P5.- Distribución Normal, método polar.

P6.- Distribución geométrica, primer método.

Parámetro: Probabilidad de fracasos.

P7.- Distribución geométrica, segundo método.

Parámetro: Probabilidad de éxitos.

P8.- Distribución Binomial Negativa

Parámetros: Probabilidad de fracasos y números de éxitos deseados.

P9.- Distribución Binomial.

Parámetros: Número de ensayos y probabilidad de éxitos.

P10.- Distribución Hipergeométrica.

Parámetros: Tamaño de la población a estudiarse, tamaño de la muestra tomada y la probabilidad de los elementos de la muestra.

P11.- Distribución de Poisson.

Parámetro: Valor esperado.

PROGRAMA "P23"

Clasifica los números aleatorios en intervalos iguales entre el valor máximo y el mínimo, ordenándolos previamente, en forma ascendente. Esto se hace para calcular la frecuencia relativa con que los números caen en los intervalos de clasificación, y así verificar la distribución de probabilidad que siguen.

Se utilizan tres instrucciones definidas en el computador.

CALL "MIN", X, L8, K.-

Obtiene el mínimo valor de la serie X, en L8, y K1 es la localidad que ocupa este valor en X [15].

CALL"MAX", X, L9, K.-

Obtiene el máximo valor de la serie X, en L9, y K es la localidad que ocupa este valor en X [15].

CALL "CROSS", X, I, T5.-

Obtiene la cantidad de números en T5, que son menor o igual al valor definido I, de la serie X [15].

Para este caso I será cada uno de los intervalos de clasificación (ver listado del programa P23).

Se debe tener especial cuidado en la asignación de números de intervalos de clasificación, dado que estos pueden distorcionar la frecuencia relativa y dar un error en la forma de la distribución cuando se la grafica. Se recomienda:

Para las distribuciones continuas: número de intervalos entre 10 y 20.

Para las distribuciones discretas: número de intervalos igual al valor máximo menos el valor mínimo.

En la figura A3, se ilustra el diagrama de flujo de este programa.

Significado de las variables usadas.-

N9 = Longitud de la serie de números aleatorios a clasificarse.

K5 = Número de intervalos deseados.

L8 = Número mínimo.

L9 = Número máximo.

M9 = Tamaño del intervalo de muestreo.

X = Vector de dimensión N9 que contiene los números aleatorios.

C1 = Vector de dimensión N9 que contiene la frecuencia relativa.

INICIO

Ingreso de Datos

En pantalla:
Nombre del archivo de datos a clasificar se?

Leer los datos, y obtener los valores máximo y mínimo

En pantalla:
Dato mínimo: ..., Dato máximo: ...
Número de intervalos deseados?

Crear archivo de datos

Ordenar los números en forma ascendente

Calcular el tamaño de los intervalos

$$M9 = \frac{L9 - L8}{K5}$$

Clasificar los datos y calcular la frecuencia relativa

Guardar los datos en el archivo

En pantalla:

Fin de clasificación
Presione RETURN para continuar

Regresa al programa P20

FIGURA A3. Diagrama de flujo del programa P23.

X = Serie de números aleatorios a clasificarse.

L8 = Valor mínimo de la serie.

L9 = Valor máximo de la serie.

K5 = Número de intervalos de clasificación.

M9 = Tamaño de los intervalos de clasificación.

C1 = Vector de dimensión K5 que contiene la frecuencia relativa.

La subrutina para ordenar los números en forma ascendente, fue elaborado por el Ing. Efraín Del Pino en 1980 y, se lo ha usado aquí, sin ningún comentario.

PROGRAMA "P26"

Grafica la frecuencia relativa de números aleatorios versus el número de intervalos de clasificación, imprimiendo las leyendas correspondientes.

Como datos de entrada se debe dar:

- Nombre del archivo de datos en donde se guardó los datos de la frecuencia relativa.
- Título del gráfico.
- Si se desea el gráfico en pantalla o en el grafizador.
- Si se desea escribir leyenda en la parte inferior del gráfico (título de la leyenda).

PROGRAMA "P28"

Genera ruido blanco gaussiano, usando la distribución normal y, los dos métodos de generación: método del límite central y el método polar, (el diagrama de flujo y el significado de las variables usadas se dieron en el capítulo IV).

Generado el ruido y guardados los datos en un archivo, el programa presenta el siguiente menú:

Tecla 7 - ESPECTRO DE FRECUENCIA

Tecla 1 - INDICE DE PROGRAMAS

Si se presiona la tecla definible Nº 7, se borra el programa P28 y se carga a la memoria del computador el programa para obtener el espectro de frecuencia (P31), el cual se ejecuta. Si se presiona la tecla Nº 1, se retorna al programa piloto sin borrarse el programa P28.

RECOMENDACION.-

Aunque es posible generar una cantidad de datos menor o igual a 2000, es recomendable sólo generar una cantidad entre 16 y 1024, por la limitación del programa P31 (Ver descripción del programa P31).

Esta recomendación también es aplicable a los programas P29 y P30. Por otra parte, el menú descrito, también aparece en los programas mencionados.

PROGRAMA "P29"

Genera ruido blanco usando la distribución de Poisson, (su diagrama de flujo y el significado de las variables usadas se dieron en el capítulo IV).

PROGRAMA "P30"

Genera ruido coloreado con una determinada función de autocorrelación, calcula primero los coeficientes del filtro predictor de orden j-ésimo, luego las condiciones iniciales y las muestras del ruido, (su diagrama de flujo y el significado de las variables usadas se dieron en el capítulo IV).

Otra recomendación para este programa, es que el número de polos del filtro debe ser mayor o igual a 3 y menor o igual a 15, para no saturar la capacidad de memoria del computador.

PROGRAMA "P31"

Sirve para obtener el espectro de frecuencia de una serie de datos, y graficar dicho espectro.

Se usan tres funciones definidas en el computador.

- CALL "FFT", X.-

  Obtiene la transformada de Fourier de la serie de datos X. Esto es transforma los datos del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia [14].

- CALL "POLAR", X, M, P.-

Obtiene la magnitud en M, y la fase en P, de serie de datos, X, transformados [14].

LIMITACION.-

Por definición, la función FFT es válida solamente para series cuya longitud sea mayor o igual a 16 y menor o igual a 1024, en múltiplos de dos, esto es, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024. Si la longitud de la serie es otro número, se presentará un error [14].

El diagrama de flujo de este programa se da en la figura A4.

Significado de las variables usadas.-

N = Número de muestras a transformarse.

X = Serie de datos del ruido en el dominio del tiempo, que luego se tranformará, (dimensión N).

M = Vector de dimensión $\frac{N}{2} + 1$ que contiene la magnitud de las componentes de frecuencia.

P = Vector de dimensión $\frac{N}{2} + 1$ que contiene la fase de las componentes de frecuencia.

I1 = Magnitud mínima

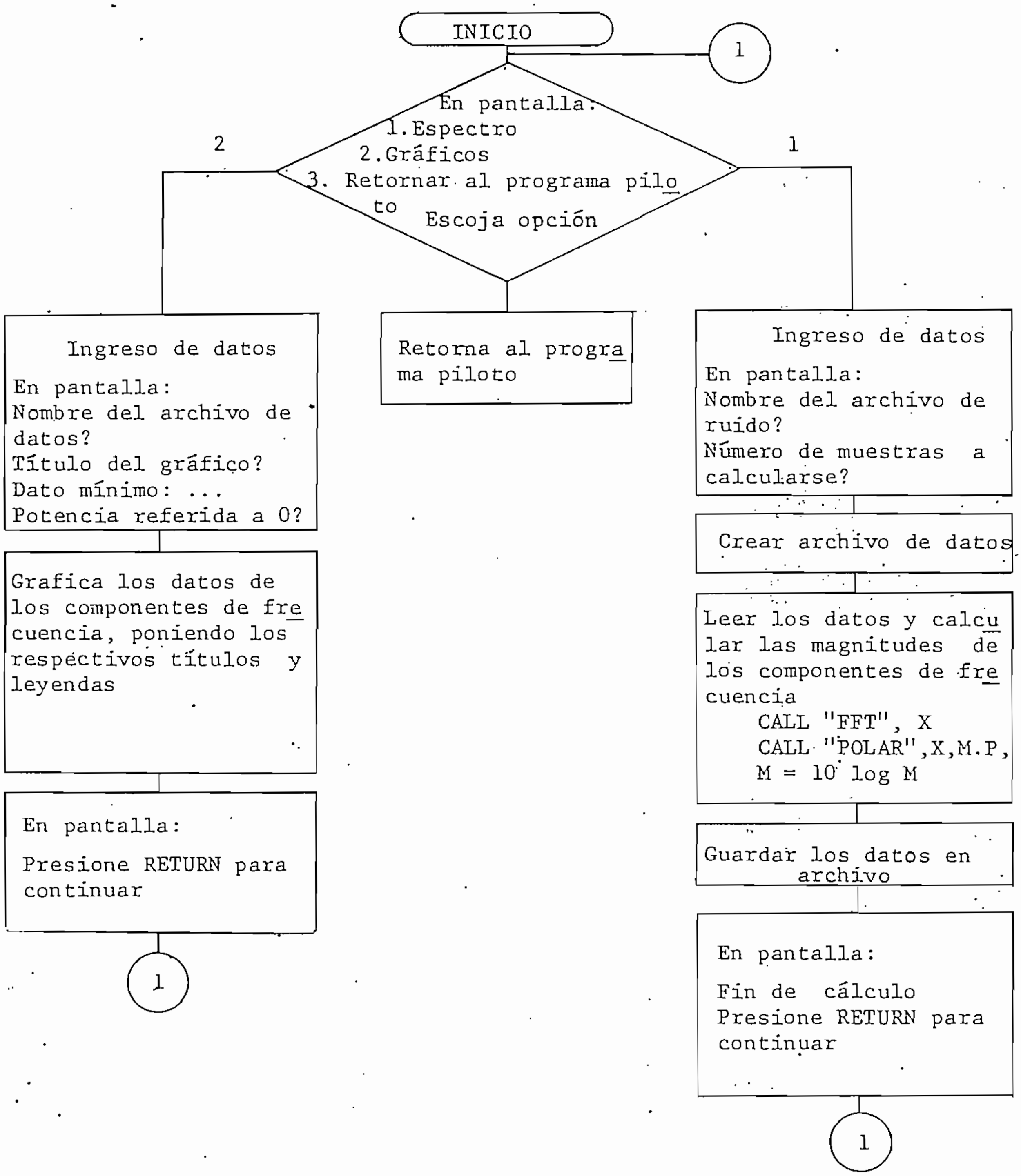


FIGURA A4. Diagrama de flujo del programa P31.

La potencia referida a 0, es el parámetro del plano de datos inferior en el eje Y. Debe ser un poco menor que el dato mínimo presentado.

PROGRAMA "P32"

Este programa sirve para realizar simulación de tráfico telefónico en un sistema de llamadas perdidas, con entradas poissonianas y tiempo de duración de las llamadas distribuído exponencialmente. Como resultado da el número de llamadas procesadas, completadas, bloqueadas y ocupadas en el sistema, pudiéndose imprimir una tabla del estado del sistema observado en cada arribo de una llamada, o simplemente los resultados totales.

El diagrama de flujo y el significado de las variables usadas puede observarse en el capítulo IV.

La limitación de este programa es que el número de abonados no debe ser menor que 4 y mayor que 100, de igual manera el número de conectores debe ser mayor que 2 y menor que 100, a fin de no saturar la memoria del computador.

MANUAL DE USO DE LOS PROGRAMAS

1. Prenda el computador.

2. Coloque los discos de trabajo en las unidades libres.

3. Inicialice el sistema de reloj del computador desde el teclado, mediante la instrucción:

   CALL "SETTIM", "DD-MMM-AA ƀ HH:MM:SS"

   y luego presione la tecla RETURN

   Siendo,

DD	:	día
MMM	:	mes (iniciales en inglés)
AA	:	año
ƀ	:	espacio en blanco
HH	:	horas
MM	:	minutos
SS	:	segundos (opcional)

4. Monte los discos en el sistema, usando las instrucciones:

   CALL "MOUNT", U, A$ presione RETURN

   CALL "MOUNT", V, A$ presione RETURN

   Siendo, U : unidad donde se encuentra el disco de archivo de datos.

V : unidad donde se encuentra el disco de programas.

5. Cargue a la memoria del computador el programa piloto, mediante la instrucción:

OLD "PP" presione RETURN

6. Ejecute el programa con la instrucción:

RUN presione RETURN

7. Siga las instrucciones que los programas le indican en la pantalla.

8. Cuando desee interrumpir la ejecución de algún programa, presione dos veces la tecla BREAK, y para continuar asegúrese de que los archivos estén cerrados y luego presione la tecla definible # 1.

Para cerrar los archivos use la instrucción: CLOSE.

9. Para realizar gráficos, prenda primero el grafizador. Si desea imprimir los gráficos en papel, asegúrese de que el grafizador tenga papel y colocado los límites del tamaño del gráfico.

```
1 V$='*'
2 P9=-1
3 P8=-1
4 GO TO 100
8 IF V$='1' THEN 500
9 DELETE 501,10000
10 APPEND 'P20';500
11 GO TO 500
12 IF T$='1' THEN 500
13 DELETE 501,10000
14 APPEND 'P28';500
15 GO TO 500
16 IF T$='2' THEN 500
17 DELETE 501,10000
18 APPEND 'P29';500
19 GO TO 500
20 IF T$='3' THEN 500
21 DELETE 501,10000
22 APPEND 'P30';500
23 GO TO 500
24 IF V$='4' THEN 500
25 DELETE 501,10000
26 APPEND 'P32';500
27 GO TO 500
28 IF V$='3' THEN 500
29 DELETE 501,10000
30 APPEND 'P31';500
31 GO TO 500
40 DELETE 1401,10000
41 T9=MEMORY
42 APPEND K$;1400
43 GO TO 875
44 DELETE 1401,10000
45 T9=MEMORY
46 APPEND 'P22';1400
47 GO TO 1400
48 IF P$='1' THEN 800
49 DELETE 801,10000
50 APPEND 'P21';800
51 GO TO 800
52 IF P$='3' THEN 800
53 DELETE 801,10000
54 APPEND 'P23';800
55 GO TO 800
56 IF P$='4' THEN 800
57 DELETE 801,10000
58 APPEND 'P24';800
59 GO TO 800
64 IF P$='6' THEN 800
65 DELETE 801,10000
66 APPEND 'P26';800
67 GO TO 800
68 GO TO 130
100 K$='*'
```

```
110 P$="*"
120 T$="*"
130 REM   ESCUELA POLITECNICA NACIONAL
140 REM   FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA
150 REM
160 REM   SIMULACION ESTADISTICA
170 REM
180 REM   TESIS DE GRADO PREVIA A LA OBTENCION DEL TITULO
190 REM   DE INGENIERO EN ELECTRONICA Y TELECOMUNICACIONES
200 REM
210 REM   SR: LUIS ALBERTO D. RODRIGUEZ ARROBA
220 REM
230 REM   20 DE NOVIEMBRE DE 1983
240 REM
250 REM
260 REM          PROGRAMA PP
270 REM        PROGRAMA  PILOTO
280 REM   INGRESO DE UNIDADES DE DISCO
290 IF P9=0 OR P9=1 OR P9=2 THEN 370
300 PRINT "LJJJ UNIDAD DONDE SE ENCUENTRA EL DISCO DE PROGRAMAS ?";
310 INPUT P9
320 IF NOT(P9=0 OR P9=1 OR P9=2) THEN 300
330 PRINT "JJ UNIDAD DONDE SE ENCUENTRA EL DISCO DE ARCHIVOS DE ";
335 PRINT "DATOS ?";
340 INPUT P8
350 IF P8=P9 THEN 330
360 IF NOT(P8=0 OR P8=1 OR P8=2) THEN 330
370 CALL "UNIT",P9
380 PRINT "LJJ   INDICE DE PROGRAMAS"
390 PRINT "    ====== == ========="
400 PRINT "J   Tecla 1 - INDICE DE PROGRAMAS"
410 PRINT "J   Tecla 2 - NUMEROS ALEATORIOS"
420 PRINT "J   Tecla 3 - RUIDO BLANCO GAUSSIANO"
430 PRINT "J   Tecla 4 - RUIDO BLANCO GENERADO USANDO";
440 PRINT " LA DISTRIBUCION DE POISSON"
450 PRINT "J   Tecla 5 - RUIDO COLOREADO"
460 PRINT "J   Tecla 6 - TRAFICO TELEFONICO"
470 PRINT "JJJ   PRESIONE TECLA DEL PROGRAMA DESEADO ";
480 T9=MEMORY
490 END
500 REM
```

```
500 REM
510 REM                 PROGRAMA P20
520 REM
530 V$="1"
540 REM  PROGRAMA COMANDO PARA LAS OPERACIONES CON NUMEROS ALEATORIOS:
550 REM
560 REM  GENERACION DE NUMEROS ALEATORIOS
570 REM  OBTENCION DE LA FRECUENCIA RELATIVA PREVIA CLASIFICACION
580 REM  GRAFICAR LA FRECUENCIA REALATIVA
590 REM
600 PRINT "LJJJ  INDICE DE PROGRAMAS"
610 PRINT "   ====== == ========="
620 PRINT "JJ  Tecla 12 - GENERACION DE NUMEROS ALEATORIOS"
630 PRINT "J  Tecla 13 - CLASIFICACION DE LOS NUMEROS (FRECUENCIA ";
635 PRINT " RELATIVA)"
640 PRINT "J  Tecla 16 - GRAFICAR FRECUENCIA RELATIVA"
650 PRINT "J  Tecla 17 - RETORNAR AL PROGRAMA PILOTO"
660 PRINT "JJJ  PRESIONE TECLA DEL PROGRAMA DESEADO ";
670 T9=MEMORY
680 END
800 REM
```

```
800 REM
805 REM                PROGRAMA: P21
810 REM
820 REM  PROGRAMA PARA GENERAR NUMEROS ALEATORIOS CON
825 REM  CUALQUIER TIPO DE DISTRIBUCION DE PROBABILIDAD
830 P$="1"
831 DELETE X,X1,X2,X3,P1,Q1,S,C1,I0,I1,C,Y,P3,A1,A,B,G
832 DELETE V,Z,U,M,P,T,P1,M
833 GO TO 44
835 PRINT "LJJ  GENERACION DE NUMEROS ALEATORIOS"
840 PRINT "  ========== == ======= =========="
845 DELETE 1401,10000
850 K$=STR(O1)
860 K$=REP("",1,1)
865 K$="P"&K$
870 GO TO 40
872 REM  INGRESO DE DATOS
875 PRINT "JJ  CANTIDAD DE NUMEROS A GENERARSE ?  ";
880 INPUT N
881 IF N>2000 THEN 875
885 PRINT "J  SEMILLA DE NUMEROS ALEATORIOS (0 a 1) ?  ";
890 INPUT R
892 REM  CREACION DE ARCHIVO DE DATOS
893 REM  ************************************
895 PRINT "JJJ  CREACION DE ARCHIVOS"
900 PRINT "JJ  FORMATO PARA NOMBRE DE ARCHIVO"
905 PRINT "J  NOMBRE DEL ARCHIVO NM/DD"
910 PRINT "J  N: NUMEROS ALEATORIOS"
915 PRINT "  M: NUMERO DEL ARCHIVO"
920 PRINT "  DD: DISTRIBUCION POR GENERARSE"
925 PRINT "JJ  NOMBRE DEL ARCHIVO ?  ";
930 INPUT Z$
935 Z$="@"&Z$
940 CALL "UNIT",P8
945 CALL "FILE",P8,Z$,I$
950 IF I$<>"" THEN 970
955 CREATE Z$;(N+5)*9+1,0
960 CALL "UNIT",P9
963 PAGE
965 GO TO 1010
970 PRINT "JJJ  ARCHIVO EXISTE"
975 PRINT "J  DESEA DESTRUIR SU CONTENIDO (SI o NO) ?  ";
980 INPUT Y$
985 IF Y$="NO" OR Y$="N" THEN 1000
990 KILL Z$
995 GO TO 955
1000 PAGE
1005 GO TO 895
1010 REM GENERACION DE LOS NUMEROS ALEATORIOS
1011 REM ************************************
1015 IF O1=5 THEN 1080
1020 DIM X1(N)
1025 FOR I=1 TO N
1030 GOSUB 1400
```

```
1035 X1(I)=X
1040 NEXT I
1042 REM GUARDAR DATOS EN ARCHIVO
1045 CALL "UNIT",P8
1050 OPEN Z$;1,"F",X$
1052 CALL "UNIT",P9
1055 WRITE #1:N,E,D,O1,R,X1
1065 DELETE X1,P1,Q1
1070 GO TO 1145
1080 DIM X2(N/2),X3(N/2)
1085 FOR I=1 TO N/2
1090 GOSUB 1400
1095 X2(I)=X
1100 X3(I)=X1
1105 NEXT I
1107 REM GUARDAR DATOS EN ARCHIVO
1110 CALL "UNIT",P8
1115 OPEN Z$;1,"F",X$
1117 CALL "UNIT",P9
1120 WRITE #1:N,E,D,O1,R
1125 FOR I=1 TO N/2
1130 WRITE #1:X2(I),X3(I)
1135 NEXT I
1136 REM *************************************
1140 DELETE X2,X3
1145 CLOSE
1155 PRINT "LJJJJJ FIN DE GENERACION "
1160 PRINT "JJ PRESIONE RETURN PARA CONTINUAR  G"
1165 INPUT A$
1170 GO TO 500
1175 END
1400 REM
```

```
1400 REM
1410 REM          SUBRUTINA  P22
1420 REM
1430 REM  SUBRUTINA PARA ESCOGER LA DISTRRIBUCION DE
1440 REM  PROBABILIDAD PARA GENERAR LOS NUMEROS ALEATORIOS
1450 REM
1470 PRINT "LJJ   TIPOS DE DISTRIBUCION"
1480 PRINT "    ===== == ============"
1490 PRINT "J     1 - UNIFORME"
1500 PRINT "      2 - EXPONENCIAL (Metodo del logaritmo)"
1510 PRINT "      3 - EXPONENCIAL (Metodo de minimizacion ";
1515 PRINT "aleatoria)"
1520 PRINT "      4 - NORMAL (Metodo del limite central)"
1530 PRINT "      5 - NORMAL (Metodo polar)"
1540 PRINT "      6 - GEOMETRICA (Primer metodo)"
1550 PRINT "      7 - GEOMETRICA (Segundo metodo)"
1560 PRINT "      8 - BINOMIAL NEGATIVA"
1570 PRINT "      9 - BINOMIAL"
1580 PRINT "     10 - HIPERGEOMETRICA"
1590 PRINT "     11 - DE POISSON"
1610 PRINT "JJ          DISTRIBUCION DESEADA ?    ";
1620 INPUT O1
1625 IF O1<1 OR O1>11 THEN 1470
1630 GOSUB O1 OF 1660,1850,1930,2220,2310,2360,2470,2560
1640 GOSUB O1-8 OF 2670,2770,2890
1650 GO TO 835
1660 REM *** PARAMETROS DE DISTRIBUCION UNIFORME ***
1670 PRINT "LJJ PARAMETROS DE DISTRIBUCION UNIFORME "
1680 PRINT "JJ VA A DEFINIR EL INTERVALO [a,b],(SI o NO):   ";
1690 INPUT A$
1700 IF A$="SI" OR A$="S" THEN 1780
1710 PRINT "JJ VALOR ESPERADO ?   ";
1720 INPUT E
1730 PRINT "JJ DESVIACION ESTANDARD ?   ";
1740 INPUT D
1750 L0=E-SQR(3*D^2)
1760 L1=2*E-L0
1770 GO TO 1840
1780 PRINT "JJJ LIMITE SUPERIOR DE INTERVALO ?   ";
1790 INPUT L1
1800 PRINT "JJ LIMITE INFERIOR DE INTERVALO ?   ";
1810 INPUT L0
1820 E=(L1-L0)/2
1830 D=SQR(L1-L0)/12
1840 L3=L1-L0
1845 RETURN
1850 REM *** PARAMETROS DE DISTRIBUCION EXPONENCIAL ***
1860 PRINT "LJJ PARAMETROS DE DISTRIBUCION EXPONENCIAL";
1870 PRINT " (Metodo del logaritmo)"
1880 PRINT "JJ VALOR ESPERADO ?    ";
1890 INPUT E
1900 PRINT "JJ DESVIACION ESTANDARD ?    ";
1910 INPUT D
1920 RETURN
```

```
1930 REM ***  PARAMETROS DE LA DISTRIBUCION EXPONENCIAL ***
1935 REM ***  METODO DE MINIMIZACION ALEATORIA          ***
1940 PRINT "LJJJ PARAMETROS DE LA DIST. EXPONENCIAL";
1950 PRINT " (Metodo de minimizacion aleatoria)"
1960 PRINT "JJ VALOR ESPERADO ?    ";
1970 INPUT E
1980 D=1
1990 REM      CALCULO DE LA TABLA DE CONSTANTES Q1(K)
2000 DELETE S,Q1
2010 DIM S(14),Q1(14)
2020 S(1)=1
2030 FOR L=2 TO 14
2040 F=1
2050 FOR L1=L TO 2 STEP -1
2060 F=F*L1
2070 NEXT L1
2080 S(L)=S(L-1)+1/F
2090 NEXT L
2100 K1=1/(EXP(1)-1)
2110 FOR K=1 TO 14
2120 Q1(K)=K1*S(K)
2130 NEXT K
2140 DELETE S
2150 REM      CALCULO DE LA TABLA DE CONSTANTES P1(K)
2160 DELETE P1
2170 DIM P1(14)
2180 FOR K=1 TO 14
2190 P1(K)=1-EXP(-K)
2200 NEXT K
2210 RETURN
2220 REM *** PARAMETROS DE LA DISTRIBUCION NORMAL ***
2230 REM *** METODO DEL LIMITE CENTRAL           ***
2240 PRINT "LJJ PARAMETORS DE LA DISTRIBUCION NORMAL";
2250 PRINT " (Metodo del limite central)"
2260 PRINT "JJ VALOR ESPERADO ?    ";
2270 INPUT E
2280 PRINT "JJ DESVIACION ESTANDAR ?    ";
2290 INPUT D
2300 RETURN
2310 REM *** PARAMETROS DE LA DISTRIBUCION NORMAL ***
2320 REM *** METODO POLAR                        ***
2330 E=0
2340 D=1
2350 RETURN
2360 REM *** PARAMETROS DE LA DISTRIBUCION GEOMETRICA ***
2370 REM *** PRIMER METODO                           ***
2380 PRINT "LJJ PARAMETROS DE LA DISTRIBUCION GEOMETRICA";
2390 PRINT " (Primer metodo)"
2400 PRINT "JJ PROBABILIDAD DE FRACASOS ?    ";
2410 INPUT Q
2420 L3=LOG(Q)
2430 I=1-Q
2440 E=Q/I
2450 D=SQR(E/I)
```

```
2460 RETURN
2470 REM *** PARAMETROS DE LA DISTRIBUCION GEOMETRICA ***
2480 REM *** SEGUNDO METODO                           ***
2490 PRINT "LJJ PARAMETROS DE LA DISTRIBUCION GEOMETRICA";
2500 PRINT " (Segundo metodo)"
2510 PRINT "JJ PROBABILIDAD DE EXITOS ?    ";
2520 INPUT P
2530 E=1/P-1
2540 D=SQR(E/P)
2550 RETURN
2560 REM *** PARAMETROS DE LA DISTRIBUCION BINOMIAL NEGATIVA ***
2570 PRINT "LJJ PARAMETROS DE LA DISTRIBUCION BINOMIAL NEGATIVA"
2580 PRINT "JJ PROBABILIDAD DE FRACASOS ?    ";
2590 INPUT Q
2600 PRINT "JJ NUMERO DE EXITOS DESEADOS ?    ";
2610 INPUT K
2620 L3=LOG(Q)
2630 P=1-Q
2640 E=K*Q/P
2650 D=SQR(E/P)
2660 RETURN
2670 REM *** PARAMETROS DE LA DISTRIBUCION BINOMIAL ***
2680 PRINT "LJJ PARAMETROS DE LA DISTRIBUCION BINOMIAL"
2690 PRINT "JJ NUMERO DE ENSAYOS ?    ";
2700 INPUT M
2710 PRINT "JJ PROBABILIDAD DE EXITOS ?    ";
2720 INPUT P
2730 Q=1-P
2740 E=M*P
2750 D=SQR(E/Q)
2760 RETURN
2770 REM *** PARAMETROS DE LA DISTRIBUCION HIPERGEOMETRICA ***
2780 PRINT "LJJ PARAMETROS DE LA DISTRIBUCION HIPERGEOMETRICA"
2790 PRINT "JJ TAMANO INICIAL DE LA POBLACION (M) ?    ";
2800 INPUT M
2810 PRINT "JJ TAMANO DE LA MUESTRA TOMADA DE LA POBLACION (M1<M) ?    ";
2820 INPUT M1
2830 PRINT "JJ PROBABILIDAD DE LOS ELEMENTOS DE ESTA MUESTRA ?    ";
2840 INPUT P
2850 Q=1-P
2860 E=M1*P
2870 D=SQR(E*Q*(M-M1/(M-1)))
2880 RETURN
2890 REM *** PARAMETROS DE LA DISTRIBUCION DE POISSON ***
2900 PRINT "LJJ PARAMETROS DE LA DISTRIBUCION DE POISSON"
2910 PRINT "JJ VALOR ESPERADO ?    ";
2920 INPUT E
2930 B=EXP(-E)
2940 D=SQR(E)
2950 RETURN
```

```
100 REM
110 REM          SUBRUTINA  F1
120 O1=1
130 REM *** DISTRIBUCION UNIFORME ***
140 REM      LO : ES EL LIMITE INFERIOR
150 REM      L1 : ES EL LIMITE SUPERIOR
160 REM      L3=L1-LO
170 REM      X : VARIABLE ALEATORIA CON DIST.UNIFORME
180 GOSUB 210
190 X=LO+L3*R
200 RETURN
210 R=9821*R+0.211327
220 R=R-INT(R)
230 RETURN
```

```
100 REM
110 REM          SUBRUTINA  F2
120 O1=2
130 REM *** DISTRIBUCION EXPONENCIAL ***
140 REM      METODO DEL LOGARITMO
150 REM      E: ES EL VALOR ESPERADO
160 REM      X : VARIABLE ALEATORIA CON DIST. EXPONENCIAL
170 GOSUB 210
180 IF R=0 THEN 170
190 X=-E*LOG(R)
200 RETURN
210 R=9821*R+0.211327
220 R=R-INT(R)
230 RETURN
```

```
100 REM
110 REM          SUBRUTINA  P3
120 O1=3
130 REM *** DISTRIBUCION EXPONENCIAL ***
140 REM      METODO DE MINIMIZACION ALEATORIA
150 REM      Q1(K) Y P1(K) : TABLAS DE CONSTANTES
160 REM      E : VALOR ESPERADO
170 REM      X : VARIABLE ALEATORIA CON DIST.EXPONENCIAL
180 K=1
190 GOSUB 380
200 R0=R
210 GOSUB 380
220 R1=R
230 X=R1
240 IF R0<Q1(K) THEN 300
250 K=K+1
260 GOSUB 380
270 IF X<=R THEN 240
280 X=R
290 GO TO 240
300 GOSUB 380
310 K=1
320 IF R<P1(K) THEN 360
330 K=K+1
340 X=X+1
350 GO TO 320
360 X=E*X
370 RETURN
380 R=9821*R+0.211327
390 R=R-INT(R)
400 RETURN
```

```
100 REM
110 REM          SUBRUTINA  P4
120 O1=4
130 REM *** DISTRIBUCION NORMAL ***
140 REM      METODO DEL LIMITE CENTRAL
150 REM      D : DESVIACION ESTANDAR
160 REM      E : VALOR ESPERADO
170 REM      X : VARIABLE ALEATORIA CON DIST.NORMAL
180 A=0
190 FOR J=1 TO 12
200 GOSUB 250
210 A=A+R
220 NEXT J
230 X=D*(A-6)+E
240 RETURN
250 R=9821*R+0.211327
260 R=R-INT(R)
270 RETURN
```

```
100 REM
110 REM         SUBRUTINA   P5
120 O1=5
130 REM *** DISTRIBUCION NORMAL ***
140 REM       METODO POLAR
150 REM       X y X1 : VARIABLES ALEATORIAS CON DIST. NORMAL
160 GOSUB 270
170 RO=R
180 GOSUB 270
190 R1=R
200 V1=2*RO-1
210 V2=2*R1-1
220 T=V1^2+V2^2
230 IF T=>1 OR T=O THEN 160
235 L3=-2*LOG(T)/T
240 X=V1*SQR(L3)
250 X1=V2*SQR(L3)
260 RETURN
270 R=9821*R+0.211327
280 R=R-INT(R)
290 RETURN
```

```
100 REM
110 REM         SUBRUTINA   P6
120 O1=6
130 REM *** DISTRIBUCION GEOMETRICA ***
140 REM       PRIMER METODO
150 REM       Q: PROBABILIDAD DE FRACASOS
160 REM       L3=LOG(Q)
170 REM       X : VARIABLE ALEATORIA CON DIST. GEOMETRICA
180 GOSUB 220
190 IF R=0 THEN 180
200 X=INT(LOG(R)/L3)
210 RETURN
220 R=9821*R+0.211327
230 R=R-INT(R)
240 RETURN
```

```
100 REM
110 REM        SUBRUTINA    F7
120 O1=7
130 REM *** DISTRIBUCION GEOMETRICA ***
140 REM      SEGUNDO METODO
150 REM      P : PROBABILIDAD DE EXITOS
160 REM      X : VARIABLE ALEATORIA CON DIST. GEOMETRICA
170 X=0
180 GOSUB 230
190 IF R<=P THEN 220
200 X=X+1
210 GO TO 180
220 RETURN
230 R=9821*R+0.211327
240 R=R-INT(R)
250 RETURN
```

```
100 REM
110 REM               SUBRUTINA  F8
120 O1=8
130 REM *** DISTRIBUCION BINOMIAL NEGATIVA ***
140 REM      Q : PROBABILIDAD DE FRACASOS
150 REM      K : NUMERO DE EXITOS DESEADOS
160 REM      L3=LOG(Q)
170 REM      X : VARIABLE ALEATORIA CON DISTRIBUCION
180 REM          BINOMIAL NEGATIVA (numero de fallas)
190 R1=1
200 FOR J=1 TO K
210 GOSUB 270
220 R1=R1*R
230 NEXT J
240 IF R1=0 THEN 190
250 X=INT(LOG(R1)/L3)
260 RETURN
270 R=9821*R+0.211327
280 R=R-INT(R)
290 RETURN
```

```
100 REM
110 REM          SUBRUTINA  P9
120 O1=9
130 REM *** DISTRIBUCION BINOMIAL ***
140 REM      M : NUMERO DE ENSAYOS
150 REM      P : PROBABILIDAD DE EXITO
160 REM      X : VARIABLE ALEATORIA CON DISTRIBUCION
170 REM          BINOMIAL  (numero de exitos)
180 X=0
190 FOR J=1 TO M
200 GOSUB 250
210 IF R>P THEN 230
220 X=X+1
230 NEXT J
240 RETURN
250 R=9821*R+0.211327
260 R=R-INT(R)
270 RETURN
```

```
100 REM
110 REM             SUBRUTINA  P10
120 O1=10
130 REM *** DISTRIBUCION HIPERGEOMETRICA ***
140 REM      M : TAMANO INICIAL DE LA POBLACION
150 REM      M1 : TAMANO DE LA MUESTRA TOMADA DE M
160 REM      P : PROBABILIDAD DE LOS ELEMENTOS DE LA MUESTRA
170 REM      X : VARIABLE ALEATORIA CON DIST. HIPERGEOMETRICA
180 M2=M
190 P1=P
200 X=0
210 FOR J=1 TO M1
220 GOSUB 340
230 IF R>P THEN 270
240 S=1
250 X=X+1
260 GO TO 280
270 S=0
280 P=(M*P-S)/(M-1)
290 M=M-1
300 NEXT J
310 M=M2
320 P=P1
330 RETURN
340 R=9821*R+0.211327
350 R=R-INT(R)
360 RETURN
```

```
100 REM
110 REM          SUBRUTINA  F11
120 01=11
130 REM *** DISTRIBUCION DE FOISSON ***
140 REM      E : VALOR ESFERADO
150 REM      B=EXP(-E)
160 REM      X : VARIABLE ALEATORIA CON DIST. DE FOISSON
170 X=0
180 R1=1
190 GOSUB 250
200 R1=R1*R
210 IF R1<B THEN 240
220 X=X+1
230 GO TO 190
240 RETURN
250 R=9821*R+0.211327
260 R=R-INT(R)
270 RETURN
```

```
800 REM
810 REM                    PROGRAMA: P23
820 REM
830 REM  PROGRAMA PARA CALCULAR LA FRECUENCIA RELATIVA
840 REM  DE LOS NUMEROS ALEATORIOS EN INTERVALOS IGUALES
841 REM  ENTRE EL VALOR MINIMO Y EL MAXIMO DE LA SUCESION
843 P$='3'
845 DELETE X,X1,X2,X3,P1,Q1,S,C1,I0,I1,C,Y,P3,A1,A,B,G
846 DELETE V,Z,U,M,P,T,F1,M1
848 T9=MEMORY
850 PRINT 'LJJJ FRECUENCIA RELATIVA DE NUMEROS'
860 PRINT ' ========== ======== == ======='
865 REM  INGRESO DE DATOS
880 PRINT 'JJ NOMBRE DEL ARCHIVO DE DATOS (NM/DD) ?  ';
890 INPUT H$
900 H$='@'&H$
910 CALL 'UNIT',P8
920 OPEN H$;1,'R',X$
925 CALL 'UNIT',P9
930 READ #1:N9,E,D,O1,R
940 DIM X(N9)
950 READ #1:X
960 CLOSE
970 CALL 'MIN',X,L8,K
980 CALL 'MAX',X,L9,K
990 PRINT 'JJ DATO MINIMO: ';L8;'   DATO MAXIMO: ';L9;''
1010 PRINT 'JJ NUMERO DE INTERVALOS DESEADOS ?  ';
1020 INPUT K5
1040 GOSUB 1360
1043 REM  ORDENAMIENTO EN FORMA ASCENDENTE DEL VECTOR 'X'
1045 PAGE
1050 GOSUB 1600
1070 REM  CLASIFICACION DE LOS NUMEROS
1080 REM  Y CALCULO DE LA FRECUENCIA RELATIVA
1100 REM ***********************************************
1120 DIM C1(K5)
1125 M9=(X(N9)-X(1))/K5
1130 E7=M9*1.0E-8
1140 T6=0
1150 FOR J=1 TO K5
1160 IF J=K5 THEN 1190
1170 CALL 'CROSS',X,X(1)+J*M9-E7,T5
1180 GO TO 1200
1190 T5=N9
1200 C1(J)=INT(T5)-T6
1210 T6=T6+C1(J)
1220 NEXT J
1222 C1=C1/N9
1230 REM ***********************************************
1255 REM  GUARDAR DATOS EN ARCHIVO
1260 CALL 'UNIT',P8
1270 OPEN Z$;1,'F',X$
1275 CALL 'UNIT',P9
1280 WRITE #1:K5,E,D,O1,R,M9,C1
```

```
1290 CLOSE
1310 DELETE X,C1
1320 PRINT "LJJJJJ   FIN DE CLASIFICACION  "
1330 PRINT "JJ   PRESIONE RETURN PARA CONTINUAR  G"
1340 INPUT A$
1350 GO TO 500
1360 REM  SUBRUTINA PARA CREAR ARCHIVOS
1365 REM  ****************************************************
1370 PRINT "LJJJ CREACION DE ARCHIVOS"
1380 PRINT "JJ FORMATO PARA NOMBRE DE ARCHIVO"
1390 PRINT "J NOMBRE DEL ARCHIVO : CM/DD"
1400 PRINT "J C: CLASIFICACION"
1410 PRINT "  M: NUMERO DEL ARCHIVO"
1420 PRINT "  DD: DISTRIBUCION CLASIFICADA"
1430 PRINT "JJ NOMBRE DEL ARCHIVO    ";
1440 INPUT Z$
1450 Z$="@"&Z$
1460 CALL "UNIT",P8
1470 CALL "FILE",P8,Z$,I$
1480 IF I$<>"" THEN 1520
1490 CREATE Z$;(K5+9)*9+1,0
1500 CALL "UNIT",P9
1510 RETURN
1520 PRINT "JJ ARCHIVO EXISTENTE"
1530 PRINT "J DESEA DESTRUIR SU CONTENIDO (SI o NO) ?  ";
1540 INPUT Y$
1550 IF Y$="NO" OR Y$="N" THEN 1590
1560 KILL Z$
1570 GO TO 1490
1590 GO TO 1360
1600 REM    SUBRUTINA DE CLASIFICACION DE VECTOR NUMERICO
1610 REM    SE ORDENA ELEMENTOS DEL ARREGLO "X"
1615 REM  ******************************************************
1620 REM
1630 REM    ING. EFRAIN DEL PINO          1980
1640 REM
1650 DELETE I0,I1
1660 I9=1
1670 J9=N9
1690 N=LOG(J9-I9+1)/LOG(2)+0.9
1700 DIM I0(N),I1(N)
1710 M=1
1720 I=I9
1730 J=J9
1740 IF I=>J THEN 2110
1750 K=I
1760 J2=INT((J+I)/2)
1770 T=X(J2)
1780 IF X(I)<=T THEN 1820
1790 X(J2)=X(I)
1800 X(I)=T
1810 T=X(J2)
1820 L=J
1830 IF X(J)=>T THEN 1940
```

```
1840 X(J2)=X(J)
1850 X(J)=T
1860 T=X(J2)
1870 IF X(I)<=T THEN 1940
1880 X(J2)=X(I)
1890 X(I)=T
1900 T=X(J2)
1910 GO TO 1940
1920 X(L)=X(K)
1930 X(K)=T1
1940 L=L-1
1950 IF X(L)>T THEN 1940
1960 T1=X(L)
1970 K=K+1
1980 IF X(K)<T THEN 1970
1990 IF K<=L THEN 1920
2000 IF L-I<=J-K THEN 2060
2010 I0(M)=I
2020 I1(M)=L
2030 I=K
2040 M=M+1
2050 GO TO 2150
2060 I0(M)=K
2070 I1(M)=J
2080 J=L
2090 M=M+1
2100 GO TO 2150
2110 M=M-1
2120 IF M=0 THEN 2280
2130 I=I0(M)
2140 J=I1(M)
2150 IF J-I=>11 THEN 1750
2160 IF I=I9 THEN 1740
2170 I=I-1
2180 I=I+1
2190 IF I=J THEN 2110
2200 T=X(I+1)
2210 IF X(I)<=T THEN 2180
2220 K=I
2230 X(K+1)=X(K)
2240 K=K-1
2250 IF T<X(K) THEN 2230
2260 X(K+1)=T
2270 GO TO 2180
2280 DELETE I0,I1
2290 RETURN
```

```
800 REM
810 REM            PROGRAMA P26
820 REM
830 REM  PROGRAMA PARA GRAFICAR LA FRECUENCIA RELATIVA
840 REM  DE NUMEROS ALEATORIOS VERSUS INTERVALOS DE MUESTREO
850 P$='6'
860 DELETE X,X1,X2,X3,F1,Q1,S,C1,I0,I1,C,Y,P3,A1,A,B,G
870 DELETE V,Z,U,M,P,T,P1,M1
880 PRINT 'LJJJJJ GRAFICO DE LA FRECUENCIA RELATIVA'
890 PRINT ' ======= == == ========== ========'
900 REM  INGRESO DE DATOS
910 PRINT 'JJ NOMBRE DEL ARCHIVO DE DATOS (PM/DD) ?    ';
920 INPUT Z$
930 Z$="@'&Z$
940 CALL "UNIT",P8
950 OPEN Z$;1,"R",X$
960 CALL 'UNIT',P9
970 READ #1:K,E,D,O1,R,T6
980 DIM X(K)
990 READ #1:X
1000 CLOSE 1
1010 REM  INGRESO DE TITULO DEL GRAFICO
1020 DELETE A$,R$,S$
1030 PRINT 'JJ TITULO DEL GRAFICO ?    ';
1040 INPUT A$
1050 R$='Intervalos de clasificacion'
1060 S$='Frecuencia relativa'
1070 REM  PARAMETROS DEL PLANO DE DATOS
1080 REM  WINDOW W3,W4,W5,W6
1090 REM  EN EL EJE X: W3 Y W4
1100 REM  EN EL EJE Y: W5 Y W6
1110 CALL "MAX",X,W2,K1
1120 M2=W2/7
1130 W3=0
1140 W4=K
1150 W5=0
1160 W6=W2+M2
1170 REM  ORIGEN DE COORDENADAS
1180 M3=0
1190 M4=0
1200 REM  DIRECCION DEL PERIFERICO Y
1210 REM  TAMANO DE LAS LETRAS
1220 PRINT "JJJ DESEA GRAFICO EN LA PANTALLA (SI o NO) ?   ';
1230 INPUT Y$
1240 IF Y$='NO' OR Y$='N' THEN 1290
1250 U3=32
1260 X9=0.8*2.328
1270 Y9=0.8*3.072
1280 GO TO 1350
1290 PRINT 'LJJ ALISTE EL GRAFIZADOR Y PRESIONE RETURN G'
1300 INPUT B$
1310 U3=1
1320 X9=0.8*1.792
1330 Y9=0.8*2.816
```

```
1340 REM  REALIZACION DE GRAFICO
1350 PRINT @1,17:X9,Y9
1360 A6=(W6-W5)/M2+1
1370 T$=STR(A6)
1380 T$=SEG(T$,2,4)
1390 A6=VAL(T$)
1400 J=0
1410 PAGE
1420 GOSUB 2160
1430 FOR I=1 TO K
1440 J=J+1
1450 MOVE @U3:I,M3
1460 DRAW @U3:I,X(J)
1470 NEXT I
1480 DELETE X
1490 REM  IMPRESION DE EJES
1500 MOVE @U3:W3,W5
1510 DRAW @U3:W4,W5
1530 MOVE @U3:W3,W5
1540 FOR J=1 TO A6
1550 DRAW @U3:W3,W5+(J-1)*M2
1560 SCALE 1,1
1570 RDRAW @U3:1,0
1580 Y$=STR(W5+(J-1)*M2)
1590 Y$=SEG(Y$,2,5)
1600 RMOVE @U3:-2*X9,0
1610 RMOVE @U3:-LEN(Y$)*X9,-Y9/2
1620 PRINT @U3:Y$;
1630 GOSUB 2160
1640 MOVE @U3:W3,W5+(J-1)*M2
1650 NEXT J
1660 REM  IMPRESION DE TITULOS
1670 A9=LEN(A$)
1680 A1=-A9/2*X9
1690 MOVE @U3:(W3+W4)/2,W6
1700 SCALE 1,1
1710 RMOVE @U3:A1,Y9
1720 PRINT @U3:A$;
1730 GOSUB 2160
1740 MOVE @U3:(W3+W4)/2,W6
1750 SCALE 1,1
1760 RMOVE @U3:A1,0.2*Y9
1770 FOR J=1 TO A9
1780 PRINT @U3:"=";
1790 NEXT J
1800 GOSUB 2160
1810 MOVE @U3:(W3+W4)/2,W5
1820 SCALE 1,1
1830 RMOVE @U3:-LEN(R$)/2*X9,-2*Y9
1840 PRINT @U3:R$
1850 GOSUB 2160
1860 MOVE @U3:W3,(W5+W6)/2
1870 Y9=0.8*2.816
1880 X9=0.41*1.792
```

```
1890 PRINT @1,17:X9,Y9
1900 SCALE 1,1
1910 RMOVE @U3:-15*X9,-LEN(S$)/6.1*Y9
1920 PRINT @1,25:90
1930 PRINT @U3:S$
1940 PRINT @1,25:0
1950 GOSUB 2160
1960 MOVE @U3:W3,W6
1970 PRINT 'JJ DESEA ESCRIBIR LEYENDAS (SI o NO) ?    ';
1980 INPUT C$
1990 IF C$='NO' OR C$='N' THEN 2100
1995 GOSUB 2160
1996 MOVE @U3:W3,W6
2000 PRINT 'JJJ TITULO DE LA LEYENDA ?    ';
2010 INPUT D$
2020 X9=0.7*1.792
2030 Y9=0.5*2.816
2040 PRINT @1,17:X9,Y9
2050 A2=-LEN(D$)/2*X9
2060 MOVE @U3:(W3+W4)/2,W5
2070 SCALE 1,1
2080 RMOVE @U3:A2,-6.7*Y9
2090 PRINT @U3:D$;
2100 GOSUB 2160
2110 MOVE @U3:W3,W6
2120 PRINT 'JJJJ PRESIONE RETURN PARA CONTINUAR G'
2130 INPUT B$
2140 GO TO 500
2160 REM *** SUBRUTINA DE WINDOW Y VIEPORT ***
2170 IF U3=32 THEN 2200
2180 VIEWPORT 15,140,15,90
2190 GO TO 2210
2200 VIEWPORT 20,115,20,90
2210 WINDOW W3,W4,W5,W6
2220 RETURN
```

```
500 REM
510 REM                  PROGRAMA  P28
520 REM
530 REM  PROGRAMA PARA GENERAR RUIDO BLANCO GAUSSIANO
535 DELETE X,X1,X2,X3,P1,Q1,S,C1,I0,I1,C,Y,P3,A1,A,B,G
536 DELETE V,Z,U,M,P,T,P1,M1
538 T9=MEMORY
540 T$="1"
550 PRINT "LJJJJJ RUIDO BLANCO GAUSSIANO"
560 PRINT " ===== ====== ========="
570 REM  INGRESO DE DATOS
580 PRINT "JJ NUMERO DE MUESTRAS A GENERARSE ?   ";
590 INPUT N
595 IF N>2000 THEN 580
600 PRINT "J SEMILLA PARA NUMEROS ALEATORIOS ?   ";
610 INPUT R
615 REM  CREACION DE ARCHIVO DE DATOS
620 GOSUB 1280
625 REM  METODOS DE GENERACION
630 PRINT "LJJJJJ METODOS DE GENERACION"
640 PRINT "JJJ 1 - LIMITE CENTRAL"
650 PRINT "JJ 2 - METODO POLAR"
660 PRINT "JJJ      ESCOJA OPCION :    ";
670 INPUT X0
675 IF NOT(X0=1 OR X0=2) THEN 630
680 IF X0=2 THEN 960
690 REM  GENERACION USANDO LA DISTRIBUCION NORMAL
700 REM  MEDIANTE EL METODO DEL LIMITE CENTRAL
710 REM  ********************************************
730 E=0
740 PRINT "JJ VOLTAJE EFICAZ DEL RUIDO (en milivoltios) ?   ";
750 INPUT V
755 D=SQR(V)
760 PAGE
770 DIM X(N)
780 FOR I=1 TO N
790 A=0
800 FOR J=1 TO 12
810 GOSUB 1250
820 A=A+R
830 NEXT J
840 X(I)=D*(A-6)
850 NEXT I
853 REM   ********************************************
855 REM  GUARDAR DATOS EN ARCHIVO
860 CALL "UNIT",P8
870 OPEN Z$;1,"F",X$
875 CALL "UNIT",P9
880 WRITE #1:N,X
890 CLOSE
900 REM
910 PRINT "JJJ FIN DE GENERACIONG"
920 PRINT "JJ Tecla 7 - ESPECTRO DE FRECUENCIA"
930 PRINT "JJ Tecla 1 - INDICE DE PROGRAMAS"
```

```
940 DELETE X,X1,X2
945 V$='*'
946 T9=MEMORY
950 END
960 REM   GENERACION USANDO LA DISTRIBUCION NORMAL
970 REM   MEDIANTE EL METODO POLAR
980 REM   ********************************************
990 PAGE
1000 N1=INT(N/2)
1010 DIM X1(N1),X2(N1)
1020 FOR I=1 TO N1
1030 GOSUB 1250
1040 R0=R
1050 GOSUB 1250
1060 R1=R
1070 V1=2*R0-1
1080 V2=2*R1-1
1090 T=V1^2+V2^2
1100 IF T=>1 OR T=0 THEN 1030
1110 L3=-2*LOG(T)/T
1120 X1(I)=V1*SQR(L3)
1130 X2(I)=V2*SQR(L3)
1140 NEXT I
1141 REM   **********************************************
1145 REM   GUARDAR DATOS EN ARCHIVO
1150 CALL "UNIT",P8
1160 OPEN Z$;1,"F",X$
1165 CALL "UNIT",P9
1170 WRITE #1:N
1180 FOR I=1 TO N1
1190 WRITE #1:X1(I),X2(I)
1200 NEXT I
1210 CLOSE
1230 GO TO 900
1240 REM   SUBRUTINA DE NUMEROS ALEATORIOS UNIFORMES
1245 REM   ****************************************
1250 R=9821*R+0.211327
1260 R=R-INT(R)
1270 RETURN
1280 REM   SUBRUTINA PARA CREAR ARCHIVOS DE DATOS
1285 REM   ****************************************
1290 PRINT "JJJ CREACION DE ARCHIVOS"
1300 PRINT "J FORMATO PARA NOMBRE DE ARCHIVO"
1310 PRINT "J NOMBRE DEL ARCHIVO : RM/BG"
1320 PRINT "J R: RUIDO"
1330 PRINT "  M: NUMERO DEL ARCHIVO"
1340 PRINT "  BG: BLANCO GAUSSIANO"
1350 PRINT "JJ NOMBRE DEL ARCHIVO ?     ";
1360 INPUT Z$
1370 Z$="@"&Z$
1380 CALL "UNIT",P8
1390 CALL "FILE",P8,Z$,I$
1400 IF I$<>"" THEN 1440
1410 CREATE Z$;(N+1)*9+1,0
```

```
1420 CALL 'UNIT',P9
1430 RETURN
1440 PRINT 'JJ ARCHIVO EXISTE'
1450 PRINT 'J DESEA DESTRUIR SU CONTENIDO (SI o NO) ?  ';
1460 INPUT Y$
1470 IF Y$='NO' OR Y$='N' THEN 1500
1480 KILL Z$
1490 GO TO 1410
1500 PAGE
1510 GO TO 1290
```

```
500 REM
510 REM            PROGRAMA   P29
520 REM
530 REM  PROGRAMA PARA GENERAR RUIDO BLANCO
540 REM  USANDO LA DISTRIBUCION DE POISSON
550 T$="2"
555 DELETE X,X1,X2,X3,P1,Q1,S,C1,I0,I1,C,Y,P3,A1,A,B,G
556 DELETE V,Z,U,M,P,T,F1,M1
558 T9=MEMORY
560 PRINT "LJJJ RUIDO BLANCO CON DISTRIBUCION DE POISSON"
570 PRINT " ===== ====== === ============ == ======="
580 REM  INGRESO DE DATOS
590 PRINT "J NUMERO DE MUESTRAS A GENERARSE ?    ";
600 INPUT N
605 IF N>2000 THEN 590
610 PRINT "J SEMILLA PARA LOS NUMEROS ALEARORIOS ?    ";
620 INPUT R
630 PRINT "J VOLTAJE PICO DEL RUIDO (en milivoltios) ?    ";
640 INPUT K
650 PRINT "J VALOR ESPERADO DEL RUIDO (mayor o igual a 1) ?    ";
660 INPUT E
670 REM  CREACION DE ARCHIVO DE DATOS
680 GOSUB 940
690 PAGE
700 REM  GENERACION DEL RUIDO
710 REM  ******************************
730 B=EXP(-E)
740 DIM X(N)
750 X=0
760 FOR I=1 TO N
770 R2=1
780 GOSUB 1300
790 R2=R2*R
800 IF R2<B THEN 830
810 X(I)=X(I)+1
820 GO TO 780
830 NEXT I
840 GOSUB 1180
842 REM  *******************************
845 REM  GUARDAR DATOS EN ARCHIVO
850 CALL "UNIT",P8
860 OPEN Z$;1,"F",X$
865 CALL "UNIT",P9
870 WRITE #1:N,X
880 CLOSE
890 DELETE X
900 PRINT "JJJ FIN DE GENERACION G"
910 PRINT "J Tecla 7 - ESPECTRO DE FRECUENCIA"
920 PRINT "J Tecla 1 - INDICE DE PROGRAMAS"
925 V$="*"
926 T9=MEMORY
930 END
940 REM  SUBRUTINA PARA CREAR ARCHIVOS
945 REM  **********************************
```

```
950 PRINT "JJ CREACION DE ARCHIVOS"
960 PRINT "J FORMATO PARA NOMBRE DE ARCHIVO"
970 PRINT "J NOMBRE DEL ARCHIVO : RM/BP"
980 PRINT "J R: RUIDO"
990 PRINT " M: NUMERO DE ARCHIVO"
1000 PRINT " BP: BLANCO CON DIST. DE POISSON"
1010 PRINT "JJ NOMBRE DEL ARCHIVO ?    ";
1020 INPUT Z$
1030 Z$="@"&Z$
1040 CALL "UNIT",P8
1050 CALL "FILE",P8,Z$,I$
1060 IF I$<>"" THEN 1100
1070 CREATE Z$;(N+1)*9+1,0
1080 CALL "UNIT",P9
1090 RETURN
1100 PRINT "JJ ARCHIVO EXISTE"
1110 PRINT " DESEA DESTRUIR SU CONTENIDO (SI o NO) ? ";
1120 INPUT Y$
1130 IF Y$="NO" OR Y$="N" THEN 1160
1140 KILL Z$
1150 GO TO 1070
1160 PAGE
1170 GO TO 940
1180 REM  SUBRUTINA PARA CALCULAR LOS IMPULSOS
1185 REM  ************************************
1190 FOR I=1 TO N
1200 IF X(I)=0 THEN 1280
1210 GOSUB 1310
1220 IF R=>0.5 THEN 1250
1230 X(I)=-K
1240 GO TO 1280
1250 X(I)=K
1280 NEXT I
1290 RETURN
1300 REM  SUBRUTINA DE NUMEROS ALEATORIOS UNIFORMES
1305 REM  *****************************************
1310 R=9821*R+0.211327
1320 R=R-INT(R)
1330 RETURN
```

```
500 REM
510 REM                PROGRAMA  P30
520 REM  PROGRAMA PARA GENERAR RUIDO COLOREADO CON UNA
525 REM  FUNCION DE AUTOCORRELACION PREESTABLECIDA
530 REM
540 T$="3"
545 DELETE X,X1,X2,X3,P1,Q1,S,C1,I0,I1,C,Y,P3,A1,A,B,G
546 DELETE V,Z,U,M,F,T,F1,M1
548 T9=MEMORY
550 PRINT "LJJJJJ RUIDO COLOREADO"
560 PRINT "  ===== =========="
570 REM  INGRESO DE DATOS
600 PRINT "JJ NUMERO DE MUESTRAS A CALCULARSE ?    ";
610 INPUT N
615 IF N>2000 THEN 600
620 PRINT "J NUMERO DE POLOS DEL FILTRO (2<P<16) ?    ";
630 INPUT P
635 IF P<3 OR P>15 THEN 620
640 PRINT "J VOLTAGE EFICAZ DEL RUIDO (en milivoltios) ?    ";
650 INPUT V1
660 PRINT "J SEMILLA DE NUMEROS ALEATORIOS ?    ";
670 INPUT R
680 PRINT "J ARCHIVO DE DATOS DEL RUIDO BLANCO";
690 PRINT " (RM/BG o RM/BP) ?    ";
700 INPUT Y$
710 Y$="@"&Y$
715 REM  CREACION DE ARCHIVO DE DATOS
720 GOSUB 2210
730 PAGE
740 REM  CALCULO DE LOS PARAMETROS
745 REM  DE LA FUNCION DE AUTOCORRELACION
760 DIM Y(N),C(P+1)
770 T=N/2
780 FOR I=1 TO N
790 Y(I)=V1*(1-ABS(I-T)/N)
800 NEXT I
810 C=0
820 FOR K=1 TO P+1
830 I1=N-K+1
840 FOR J=1 TO I1
850 I2=J+K-1
860 C(K)=C(K)+Y(J)*Y(I2)
870 NEXT J
880 NEXT K
890 DELETE Y
900 REM  CALCULO DE LOS COEFICIENTES DEL FILTRO DE ORDEN I9-ESIMO
910 REM  PROGRAMA DE TESIS "PREDICCION LINEAL"
911 REM  ********************************************************
915 DELETE P3,A1
920 DIM P3(P+1),A1(P+1,P+1)
930 A1=0
940 P3(1)=C(1)
950 A1(1,1)=1
960 P3(2)=C(1)-C(1)*(-C(2)/C(1))^2
```

```
970 A1(2,2)=1
980 A1(1,2)=-C(2)/C(1)
990 FOR I9=3 TO P+1
1000 P2=I9-1
1010 DELETE A,B,G
1020 DIM A(P2+1),B(P2),G(P2)
1030 B1=C(1)
1040 G(1)=-C(2)/C(1)
1050 A(1)=1
1060 A(2)=G(1)
1070 B1=B1-B1*G(1)^2
1080 P1=P2
1090 FOR I=2 TO P2
1100 P1=I-1
1110 FOR J=1 TO I
1120 J1=I-J+1
1130 B(J)=A(J1)
1140 NEXT J
1150 P1=P1+1
1160 S1=0
1170 FOR J=1 TO P1
1180 J1=P1-J+2
1190 S1=S1+C(J1)*A(J)
1200 NEXT J
1210 G(P1)=-S1/B1
1220 FOR J=2 TO P1
1230 A(J)=A(J)+G(P1)*B(J-1)
1240 NEXT J
1250 A(P1+1)=G(P1)
1260 B1=B1-B1*G(P1)^2
1270 IF B1<=0 THEN 1300
1280 NEXT I
1290 GO TO 1330
1300 PRINT "          PRESICION INSUFICIENTE  GG"
1320 END
1325 REM   *******************************************************
1330 P3(I9)=B1
1340 J=I9
1350 FOR K=1 TO I9
1360 A1(K,I9)=A(J)
1370 J=J-1
1380 NEXT K
1390 NEXT I9
1400 DELETE B,G,C,X,X1,V
1410 P3=SQR(P3)
1420 A1=TRN(A1)
1430 REM  CALCULO DE LAS CONDICIONES INICIALES
1440 N1=INT(N/2)+1
1450 DIM X(N1),X1(N1),V(P)
1460 FOR I=1 TO N1
1470 GOSUB 2170
1480 R0=R
1490 GOSUB 2170
1500 R1=R
```

```
1510 V1=2*R0-1
1520 V2=2*R1-1
1530 T=V1^2+V2^2
1540 IF T=>1 OR T=0 THEN 1470
1550 L3=-2*LOG(T)/T
1560 X(I)=V1*SQR(L3)
1570 X1(I)=V2*SQR(L3)
1580 NEXT I
1590 J=0
1600 L=1
1610 FOR I=1 TO P
1620 J=J+1
1630 IF L>P THEN 1680
1640 V(L)=X(J)
1650 IF L=P THEN 1680
1660 V(L+1)=X1(J)
1670 L=L+2
1680 NEXT I
1690 DELETE X,X1,S
1700 DIM S(P)
1710 S(1)=P3(1)*V(1)
1720 FOR K=2 TO P
1730 Y=0
1740 FOR L=1 TO K-1
1750 Y=Y+A1(K,L)*S(L)
1760 NEXT L
1770 S(K)=P3(K)*V(K)-Y
1780 NEXT K
1790 DELETE A,Z,V,P3
1800 DIM A(P),Z(N)
1810 J=P
1820 FOR I=1 TO P
1830 A(I)=A1(P+1,J)
1840 Z(J)=S(I)
1850 J=J-1
1860 NEXT I
1870 DELETE S,A1,U
1880 REM  CALCULO DE LAS MUESTRAS DE RUIDO
1890 DIM U(N)
1900 CALL "UNIT",P8
1910 OPEN Y$;1,"R",X$
1915 CALL "UNIT",P9
1920 READ #1:N1,U
1930 CLOSE
1950 J1=P
1960 I=1
1970 FOR K=P+1 TO N
1980 Y=0
1990 J=J1
2000 FOR L=1 TO P
2010 Y=Y+A(L)*Z(J)
2020 J=J-1
2030 NEXT L
2040 Z(K)=U(I)-Y
```

```
2050 I=I+1
2060 J1=J1+1
2070 NEXT K
2075 REM  GUARDAR DATOS EN ARCHIVO
2080 CALL "UNIT",F8
2090 OPEN Z$;1,"F",X$
2095 CALL "UNIT",F9
2100 WRITE #1:N,Z
2110 CLOSE
2120 DELETE U,Z,A
2130 PRINT " JJJJJ FIN DE GENERACION G"
2140 PRINT "JJ Tecla 7 - ESPECTRO DE FRECUENCIA"
2150 PRINT "JJ Tecla 1 - INDICE DE PROGRAMAS"
2155 V$="*"
2156 T9=MEMORY
2160 END
2170 REM  SUBRUTINA DE NUMEROS UNIFORMES
2175 REM  ******************************
2180 R=9821*R+0.211327
2190 R=R-INT(R)
2200 RETURN
2210 REM  SUBRUTINA PARA CREAR ARCHIVOS DE DATOS
2215 REM  *************************************
2220 PRINT "LJJ CREACION DE ARCHIVOS"
2230 PRINT "J FORMATO PARA NOMBRE DE ARCHIVO"
2240 PRINT "J NOMBRE DEL ARCHIVO : RM/C"
2250 PRINT "J R: RUIDO"
2260 PRINT " M: NUMERO DE ARCHIVO"
2270 PRINT " C: COLORADO"
2280 PRINT "J NOMBRE DEL ARCHIVO ?     ";
2290 INPUT Z$
2300 Z$="@"&Z$
2310 CALL "UNIT",F8
2320 CALL "FILE",F8,Z$,I$
2330 IF I$<>"" THEN 2370
2340 CREATE Z$;(N+1)*9+1,0
2350 CALL "UNIT",F9
2360 RETURN
2370 PRINT "JJ ARCHIVO EXISTE"
2380 PRINT "J DESEA DESTRUIR SU CONTENIDO (SI o NO) ?  ";
2390 INPUT A$
2400 IF Y$="NO" OR Y$="N" THEN 2430
2410 KILL Z$
2420 GO TO 2340
2430 PAGE
2440 GO TO 2220
```

```
500 REM
510 REM                  PROGRAMA P31
520 REM
530 REM  PROGRAMA PARA CALCULAR Y GRAFICAR EL ESPECTRO DE FRECUENCIA
540 REM  USANDO LA FUNCION 'FFT' DEFINIDA EN EL COMPUTADOR
550 V$='3'
560 T$='*'
570 DELETE X,X1,X2,X3,P1,Q1,S,C1,I0,I1,C,Y,P3,A1,A,B,G
580 DELETE V,Z,U,M,P,T,F1,M1
585 T9=MEMORY
590 PRINT 'LJJJJJ ESPECTRO DE FRECUENCIA DE RUIDO'
600 PRINT ' ======== == ========== == ====='
610 PRINT 'JJ 1 - ESPECTRO'
620 PRINT 'JJ 2 - GRAFICO'
630 PRINT 'JJ 3 - RETORNAR AL PROGRAMA PILOTO'
640 PRINT 'JJJ       ESCOJA OPCION :    ';
650 INPUT X0
660 IF NOT(X0=1 OR X0=2 OR X0=3) THEN 590
670 IF X0=3 THEN 100
680 IF X0=2 THEN 1310
690 REM  INGRESO DE DATOS
700 PRINT 'LJJJJ NOMBRE DEL ARCHIVO DE RUIDO ?    ';
710 INPUT M$
720 M$='@'&M$
730 PRINT 'JJ NUMERO DE MUESTRAS A CALCULARSE ?    ';
740 INPUT N
750 IF NOT(N=16 OR N=32 OR N=64 OR N=128 OR N=256) THEN 770
760 GO TO 780
770 IF NOT(N=512 OR N=1024) THEN 730
780 REM  CREACION DE ARCHIVO DE DATOS
790 REM  ****************************
800 PRINT 'JJJ CREACION DE ARCHIVOS'
810 PRINT 'J FORMATO PARA NOMBRE DE ARCHIVO'
820 PRINT 'J NOMBRE DEL ARCHIVO : EM/RR'
830 PRINT 'J E: ESPECTRO DE FRECUENCIA'
840 PRINT ' M: NUMERO DEL ARCHIVO'
850 PRINT ' RR: RUIDO AL QUE SE OBTIENE EL ESPECTRO'
860 PRINT 'JJ NOMBRE DEL ARCHIVO ?    ';
870 INPUT Z$
880 Z$='@'&Z$
890 CALL 'UNIT',P8
900 CALL 'FILE',P8,Z$,I$
910 IF I$<>'' THEN 950
920 CREATE Z$;(N/2+1)*9+1,0
930 CALL 'UNIT',P9
940 GO TO 1030
950 PRINT 'JJ ARCHIVO EXISTE'
960 PRINT 'JJ DESEA DESTRUIR SU CONTENIDO (SI o NO) ?   ';
970 INPUT Y$
980 IF Y$='NO' OR Y$='N' THEN 1010
990 KILL Z$
1000 GO TO 920
1010 PAGE
1020 GO TO 800
```

```
1030 REM
1040 REM  LECTURA DE LOS DATOS
1050 PAGE
1060 CALL "UNIT",P8
1070 OPEN M$;1,"R",X$
1080 CALL "UNIT",P9
1090 READ #1:N1
1100 DIM X(N),M(N/2+1),P(N/2+1)
1110 READ #1:X
1120 CLOSE 1
1130 REM  TRANSFORMADA RAPIDA DE FOURIER
1140 CALL "FFT",X
1150 CALL "POLAR",X,M,P
1160 CALL "MAX",M,I1,I2
1170 M=M/I1
1180 M=LGT(M)
1190 M=10*M
1200 REM  GUARDAR DATOS DE FOURIER
1210 CALL "UNIT",P8
1220 OPEN Z$;1,"F",X$
1230 CALL "UNIT",P9
1240 WRITE #1:N/2+1,M
1250 CLOSE 1
1260 DELETE X,M,P
1270 PRINT "LJJJJJ FIN DE CALCULO "
1280 PRINT "JJ PRESIONE RETURN PARA CONTINUAR  G"
1290 INPUT A$
1300 GO TO 500
1310 REM  GRAFICO DE ESPECTRO DE FRECUENCIA
1320 REM  ********************************
1330 PRINT "LJJJJJ GRAFICO DE ESPECTRO DE FRECUENCIA"
1340 PRINT " ======= == ======== == =========="
1350 PRINT "JJ NOMBRE DEL ARCHIVO DE MUESTRAS (EM/RR) ?  ";
1360 INPUT Z$
1370 Z$="@"&Z$
1380 CALL "UNIT",P8
1390 OPEN Z$;1,"R",X$
1400 CALL "UNIT",P9
1410 READ #1:N
1420 DIM X(N)
1430 READ #1:X
1440 CLOSE 1
1450 REM  INGRESO DE TITULOS
1460 DELETE A$,R$,S$
1470 PRINT "JJ TITULO DEL GRAFICO ?   ";
1480 INPUT A$
1490 R$="Fraccion de la frecuencia de muestreo"
1500 S$="PSD Relativo en DB"
1510 REM  PARAMETROS DEL PLANO DE GRAFICO Y DE DATOS
1520 CALL "MIN",X,W1,L
1530 PRINT "JJ MAGNITUD DE LA COMPONENTES DE FRECUENCIA: ";W1;""
1540 PRINT "JJ POTENCIA REFERIDA A CERO ? G ";
1550 INPUT W5
1560 PRINT "JJ INTERVALOS DE MARCAS ? G ";
```

```
1570 INPUT M2
1580 W6=0
1590 W3=0
1600 W4=0.5
1610 M1=0.05
1620 M3=W5
1630 M4=0
1640 REM  DIRECCION DEL PERIFERICO Y TAMANO DE LETRAS
1650 PRINT "JJJ DESEA GRAFICO EN LA PANTALLA (SI o NO) ? G";
1660 INPUT Y$
1670 IF Y$="NO" OR Y$="N" THEN 1720
1680 U3=32
1690 X9=0.8*2.328
1700 Y9=0.8*3.072
1710 GO TO 1770
1720 PRINT "LJJJJJ ALISTE EL GRAFIZADOR Y PRESIONE RETURN GG "
1730 INPUT Y$
1740 U3=1
1750 X9=0.8*1.792
1760 Y9=0.8*2.816
1770 PRINT @1,17:X9,Y9
1780 REM  REALIZACION DEL GRAFICO
1790 A5=(W4-W3)/M1+1
1800 A6=(W6-W5)/M2+1
1810 PAGE
1820 GOSUB 2620
1830 J=0
1840 FOR I=1 TO N
1850 MOVE @U3:J,M3
1860 DRAW @U3:J,X(I)
1870 J=J+0.5/N
1880 NEXT I
1890 MOVE @U3:W3,W5
1900 REM  IMPRESION DE EJES
1910 FOR J=1 TO A5
1920 DRAW @U3:W3+(J-1)*M1,W5
1930 SCALE 1,1
1940 RDRAW @U3:0,1
1950 Y$=STR(W3+(J-1)*M1)
1960 Y$=REP("",1,1)
1970 RMOVE @U3:-LEN(Y$)/2*X9,-1.5*Y9
1980 PRINT @U3:Y$;
1990 GOSUB 2620
2000 MOVE @U3:W3+(J-1)*M1,W5
2010 NEXT J
2020 MOVE @U3:W3,W5
2030 FOR J=1 TO A6
2040 DRAW @U3:W3,W5+(J-1)*M2
2050 SCALE 1,1
2060 RDRAW @U3:1,0
2070 Y$=STR(W5+(J-1)*M2)
2080 Y$=SEG(Y$,2,5)
2090 RMOVE @U3:-X9,-Y9
2100 RMOVE @U3:-LEN(Y$)*X9,Y9/2
```

```
2110 PRINT @U3:Y$;
2120 GOSUB 2620
2130 MOVE @U3:W3,W5+(J-1)*M2
2140 NEXT J
2150 AXIS @U3:M1,M2,W4,W6
2160 REM  IMPRESION DE TITULOS
2170 A9=LEN(A$)
2180 A1=-A9/2*X9
2190 MOVE @U3:(W3+W4)/2,W6
2200 SCALE 1,1
2210 RMOVE @U3:A1,3*Y9
2220 PRINT @U3:A$;
2230 GOSUB 2620
2240 MOVE @U3:(W3+W4)/2,W6
2250 SCALE 1,1
2260 RMOVE @U3:A1,2.1*Y9
2270 FOR J=1 TO A9
2280 PRINT @U3:"=";
2290 NEXT J
2300 GOSUB 2620
2310 MOVE @U3:(W3+W4)/2,W5
2320 SCALE 1,1
2330 RMOVE @U3:-LEN(R$)/2*X9,-3.5*Y9
2340 PRINT @U3:R$
2350 GOSUB 2620
2360 MOVE @U3:W3,(W5+W6)/2
2370 SCALE 1,1
2380 RMOVE @U3:-5*Y9,-LEN(S$)/2*X9
2390 PRINT @1,25:90
2400 PRINT @U3:S$
2410 PRINT @1,25:0
2420 GOSUB 2620
2430 MOVE @U3:W3,W6
2440 PRINT "JJ DESEA ESCRIBIR LEYENDAS (SI o NO) ? G ";
2450 INPUT C$
2460 IF C$="NO" OR C$="N" THEN 2570
2470 GOSUB 2620
2480 MOVE @U3:W3,W6
2490 PRINT "JJJ TITULO DE LA LEYENDA ? G ";
2500 INPUT D$
2510 A2=-LEN(D$)/2*X9
2520 GOSUB 2620
2530 MOVE @U3:(W3+W4)/2,W5
2540 SCALE 1,1
2550 RMOVE @U3:A2,-6.3*Y9
2560 PRINT @U3:D$;
2570 GOSUB 2620
2580 MOVE @U3:W3,W6
2590 PRINT "JJJJ PRESIONE RETURN PARA CONTINUAR GG"
2600 INPUT R$
2610 GO TO 500
2620 REM  SUBRUTINA DE WINDOW Y VIEPORT
2630 IF U3=32 THEN 2660
2640 VIEWPORT 15,140,15,90
```

```
500 REM
510 REM                    PROGRAMA  P32
520 REM   SIMULACION DE TRAFICO TELEFONICO EN UN SISTEMA
530 REM   DE LLAMADAS PERDIDAS - ENTRADAS POISSONIANAS Y
540 REM   TIEMPO DE DURACION DE LAS LLAMADAS DISTRIBUIDO
550 REM   EXPONENCIALMENTE
560 V$="4"
570 DELETE X,X1,X2,X3,P1,Q1,S,C1,I0,I1,C,Y,P3,A1,A,B,G
575 DELETE V,Z,U,M,P,T,P1,M1
577 T9=MEMORY
580 PRINT "LJJJJ SIMULACION DE TRAFICO TELEFONICO"
590 PRINT " ========== == ======= =========="
600 PRINT "JJJ       1 - SIMULACION"
610 PRINT "JJ       2 - IMPRESION DE RESULTADOS"
620 PRINT "JJ       3 - RETORNAR AL PROGRAMA PILOTO"
630 PRINT "JJJ           ESCOJA OPCION :  ";
640 INPUT X0
650 IF NOT(X0=1 OR X0=2 OR X0=3) THEN 580
660 IF X0=3 THEN 100
670 IF X0=2 THEN 2230
680 REM
690 REM   INGRESO DE DATOS PARA LA SIMULACION
700 PRINT "LJJ NUMERO DE ABONADOS ?    ";
710 INPUT P
720 IF P>100 OR P<4 THEN 700
730 PRINT "JJ NUMERO DE CONECTORES ?    ";
740 INPUT N
750 IF N<2 OR N>100 THEN 730
760 PRINT "JJ NUMEROS DE LLAMADAS A SER SIMULADAS ?    ";
770 INPUT M
780 PRINT "JJ INTENSIDAD DE TRAFICO (en Erlans) ?    ";
790 INPUT I2
800 PRINT "JJ TIEMPO PROMEDIO DE DURACION DE LAS LLAMADAS (en";
810 PRINT " min.) ?    ";
820 INPUT E1
830 PRINT "JJ SEMILLA DE NUMEROS ALEATORIOS ?    ";
840 INPUT R
850 REM   CONDICIONES INICIALES
860 DIM T(N+2),P1(P),M1(2*N+4)
870 R6=R
880 M1=0
890 J1=0
900 J2=0
910 H=0
920 L=0
930 O=0
940 D=0
950 B=0
960 C=0
970 C1=0
980 P1=0
990 A=0
1000 B1=0
1010 T=1.0E+200
```

```
1020 E=1/I2
1030 REM   CREACION DE ARCHIVO DE DATOS
1040 GOSUB 2000
1050 PAGE
1060 REM   GUARDAR EN ARCHIVO LOS DATOS INICIALES
1070 CALL 'UNIT',P8
1080 OPEN Z$;1,'F',X$
1090 CALL 'UNIT',P9
1100 WRITE #1:P,N,M,I2,E1,R6
1110 REM              PROCESO DE SIMULACION
1120 REM   *************************************
1130 REM   GENERACION DE TIEMPO DE LLEGADA
1140 GOSUB 1950
1150 IF R=0 THEN 1140
1160 I=-E*LOG(R)
1170 REM   GUARDAR MUESTRAS DEL ESTADO DEL SISTEMA
1180 WRITE #1:O,D,A,H,L,C,C1,B1,B
1190 REM   GENERACION DEL ORIGEN DE LAS LLAMADAS
1200 A=A+I
1210 GOSUB 1950
1220 O=INT(1+(P-1)*R)
1230 IF P1(O)=0 THEN 1250
1240 GO TO 1210
1250 REM   CHEQUEO DEL EFECTO DEL NUEVO EVENTO
1260 CALL "MIN",T,N1,I5
1270 IF A<N1 THEN 1420
1280 REM   DESCONECCION DE LLAMADAS COMPLETADAS
1290 REM   Y LIBERACION DE CONECTORES
1300 J7=I5*2-1
1310 J5=M1(J7)
1320 J6=M1(J7+1)
1330 P1(J5)=0
1340 P1(J6)=0
1350 M1(J7)=0
1360 M1(J7+1)=0
1370 L=L-1
1380 T(I5)=1.0E+200
1390 C=C+1
1400 C1=C1+1
1410 GO TO 1250
1420 REM
1440 REM   CHEQUEO DE DE CONECTORES LIBRES
1450 IF L+1<=N THEN 1530
1460 REM   INCREMENTO DE LLAMADAS BLOQUEADAS
1470 B1=B1+1
1480 C=C+1
1490 P1(O)=0
1500 H=0
1510 D=1.0E+100
1515 IF C=>M THEN 1525
1520 GO TO 1130
1525 L=L-1
1526 GO TO 1670
1530 REM   GENERACION DEL DESTINO DE LAS LLAMADAS
```

```
1540 GOSUB 1950
1550 D=INT((P-1)*R)+1
1560 IF D=0 THEN 1540
1570 IF P1(D)=0 THEN 1640
1580 REM    INCREMENTO DE LLAMADAS OCUPADAS
1590 B=B+1
1600 C=C+1
1610 P1(0)=0
1620 H=0
1625 IF C=>M THEN 1635
1630 GO TO 1130
1635 L=L-1
1636 GO TO 1670
1640 REM    ACTUALIZACION DEL ESTADO DE LAS LINEAS
1650 P1(D)=1
1660 P1(O)=1
1670 REM    GENERACION DE TIEMPOS DE DURACION Y TERMINACION
1680 REM    E INCREMENTO DEL NUMERO DE CONECTORES OCUPADOS
1690 GOSUB 1950
1700 IF R=0 THEN 1690
1710 H=-E1*LOG(R)
1720 J=0
1721 J=J+1
1730 IF T(J)=1.0E+200 THEN 1750
1740 IF J<N THEN 1721
1750 T(J)=A+H
1760 IF T(J)<J2 THEN 1780
1770 J2=T(J)
1780 L=L+1
1790 REM    GUARDAR LLAMADAS QUE SE ESTAN ATENDIENDO
1800 I1=-1
1801 I1=I1+2
1810 IF M1(I1)=0 THEN 1830
1820 IF I1<2*N-1 THEN 1801
1830 M1(I1)=O
1840 M1(I1+1)=D
1845 IF C=>M THEN 1870
1850 GO TO 1130
1860 REM
1870 WRITE #1:O,D,A,H,L,C,C1,B1,B,J2
1875 DELETE T,P1,M1
1880 CLOSE
1885 T9=MEMORY
1900 REM    ******************************************
1910 PRINT "LJJJJ FIN DE SIMULACION    "
1920 PRINT "JJJ PRESIONE RETURN PARA CONTINUAR  G"
1930 INPUT A$
1940 GO TO 500
1950 REM    SUBRUTINA GENERADORA DE NUMEROS ALEATORIOS
1960 REM    ******************************************
1970 R=9821*R+0.211327
1980 R=R-INT(R)
1990 RETURN
2000 REM    SUBRUTINA PARA CREAR ARCHIVOS DE DATOS
```

```
2010 REM    *********************************
2020 PRINT "LJJJ FORMATO PARA NOMBRE DE ARCHIVO"
2030 PRINT "JJ NOMBRE DEL ARCHIVO: TTM"
2040 PRINT "J TT: TRAFICO TELEFONICO"
2050 PRINT " M: NUMERO DEL ARCHIVO"
2060 PRINT "JJJ NOMBRE DEL ARCHIVO ?:   ";
2070 INPUT Z$
2080 Z$="@"&Z$
2090 CALL "UNIT",P8
2100 CALL "FILE",P8,Z$,X$
2110 IF X$="" THEN 2190
2130 PRINT "JJ ARCHIVO EXISTE "
2140 PRINT "JJ DESEA DESTRUIR SU CONTENIDO ?   ";
2150 INPUT I$
2160 IF I$="NO" OR I$="N" THEN 2020
2180 KILL Z$
2190 CREATE Z$;(9*M+7)*9+1,0
2200 CALL "UNIT",P9
2210 RETURN
2220 REM            IMPRESION DE RESULTADOS
2230 REM    ************************************
2240 DELETE O$
2250 PRINT "LJJJ NOMBRE DEL ARCHIVO DE DATOS ?   ";
2260 INPUT Z$
2270 Z$="@"&Z$
2280 PRINT "JJJ DESEA IMPRESION EN PANTALLA (SI O NO) ?    ";
2290 INPUT O$
2300 IF O$="NO" OR O$="N" THEN 2330
2310 U3=32
2320 GO TO 2360
2330 U3=51
2340 PRINT "JJ ALISTE EL IMPRESOR Y PRESIONE RETURN G"
2350 INPUT A$
2360 PRINT "JJ   POSIBILIDADES:"
2370 PRINT "J   1 - IMPRESION DE MUESTRAS TOMADAS DEL SISTEMA"
2380 PRINT "J   2 - IMPRESION DE RESULATADOS TOTALES"
2390 PRINT "JJ        ESCOJA OPCION :   ";
2400 INPUT X1
2410 IF NOT(X1=1 OR X1=2) THEN 2360
2420 PAGE
2430 B$="LLAMADAS"
2440 C$="TIEMPOS (min)"
2450 D$="CONECT"
2460 E$="ESTADO DEL SISTEMA"
2470 F$="ORIG"
2480 G$="DEST"
2490 H$="LLEG"
2500 I$="DURA"
2510 J$="OCUP"
2520 K$="PROC"
2530 L$="COMP"
2540 M$="BLOQ"
2550 N$="OCUP"
2560 P$="----"
```

```
2570 CALL "UNIT",P8
2580 OPEN Z$;1,"R",X$
2590 CALL "UNIT",P9
2600 READ #1:P,N,M,I2,E1,R6
2610 PRINT @U3:"JJJJ                    SIMULACION DE TRAFICO TELEFONICO"
2620 PRINT @U3:"                    ========== == ======= =========="
2630 PRINT @U3:"J                    Numero de abonados: ";P
2640 PRINT @U3:"                    Numero de conectores: ";N
2650 PRINT @U3:"                    Numero de llamadas simuladas: ";M
2660 PRINT @U3:"                    Intensidad de trafico: ";I2;" erlangs"
2670 PRINT @U3:"                    Tiempo promedio de servicio: ";E1;" min."
*2680 PRINT @U3:"                    (semilla de numeros aleatorios: ";R6;")"
2690 IF X1=2 THEN 3010
2700 PRINT @U3:"J"
2710 PRINT @U3: USING 2720:
2720 IMAGE "|",9("="),"|",13("="),"|",6("="),"|",27("="),"|"
2730 PRINT @U3: USING 2740:B$,C$,D$,E$
2740 IMAGE"|",8A,X,"|",13A"|",6A,"|",5X,18A,4X,"|"
2750 PRINT @U3: USING 2760:
2760 IMAGE "|",9("="),"|",13("="),"|",6("="),"|",27("="),"|"
2770 PRINT @U3: USING 2780:F$,G$,H$,I$,J$,K$,L$,M$,N$
2780 IMAGE "|",2(4A,"|"),7(X,4A,X,"|")
2790 PRINT @U3: USING 2800:
2800 IMAGE "|",2(4("="),"|"),7(6("="),"|")
2810 READ #1:O,D,A,H,L1,C,C1,B1,B
2820 IF C=>M THEN 2920
2830 IF D=1.0E+100 THEN 2870
2840 PRINT @U3: USING 2850:O,D,A,H,L1,C,C1,B1,B
2850 IMAGE "|",2(3D,X,"|"),2(3D.2D,"|"),5(5D,X,"|")
2860 GO TO 2890
2870 PRINT @U3: USING 2880:O,P$,A,H,L1,C,C1,B1,B
2880 IMAGE "|",3D,X,"|",4A,"|",2(3D.2D,"|"),5(5D,X,"|")
2890 PRINT @U3: USING 2900:
2900 IMAGE "|",2(4("-"),"|"),7(6("-"),"|")
2910 GO TO 2810
2920 IF D=1.0E+100 THEN 2960
2930 PRINT @U3: USING 2940:O,D,A,H,L1,C,C1,B1,B
2940 IMAGE "|",2(3D,X,"|"),2(3D.2D,"|"),5(5D,X,"|")
2950 GO TO 2980
2960 PRINT @U3: USING 2970:O,P$,A,H,L1,C,C1,B1,B
2970 IMAGE "|",3D,X,"|",4A,"|",2(3D.2D,"|"),5(5D,X,"|")
2980 PRINT @U3: USING 2990:
2990 IMAGE "L",2(4("-"),"|"),7(6("-"),"|")
3000 GO TO 3040
*3010 READ #1:O,D,A,H,L1,C,C1,B1,B
3020 IF C=>M THEN 3040
3030 GO TO 3010
3040 READ #1:J2
3050 CLOSE
3060 IF O$="SI" OR O$="S" THEN 3080
3070 PRINT @U3:"J"
3080 PRINT @U3:"J                    LLAMADAS PROCESADAS: ";C
3090 PRINT @U3:"                    LLAMADAS COMPLETADAS: ";C1
3100 PRINT @U3:"                    LLAMADAS BLOQUEADAS: ";B1
```

```
3110 PRINT @U3:"               LLAMADAS OCUPADAS: ";B
3120 PRINT @U3: USING 3130:J2
3130 IMAGE 13X,"TIEMPO TOTAL DE SIMULACION :"X,FD.2D,X,"min."
3140 PRINT "JJ                  FIN DE IMPRESION  G"
3150 PRINT "J                  PRESIONE RETURN PARA CONTINUAR G"
3160 INPUT O$
3170 GO TO 500
```

B I B L I O G R A F I A

1) NAYLOR Y OTROS.- "Técnicas de simulación en computadoras", Editorial Limusa, 1980.

2) KNUTH.- "The art of computer programming", Addison - Wesley Publishing Company, Vol. 2, 1969.

3) B.P. LATHY.- "An introduction to random signals and communication theory", International Textbook Company, 1968.

4) G. GORDON.- "System simulation", Prentice Hall, 1978.

5) THOMOPOULOS.- "Applied forecasting methods", Prentice Hall, 1980.

6) PAPOULIS ATHANASIOS.- "Probability, random variables, and stochastic processes", Mc Graw-Hill, 1965.

7) D. BEAR.- "Principles of telecommunication - trafic engineering", IEE Telecommunications series 2, 1980.

8) STEVEN M. KAY.- "Efficient generation of coloread noise", Proccedings of IEEE, Vol. 69, April 1981.

9) JOHN M. GEIST.- "Computer generation of correlated gaussian random variables", Proccedings of IEEE, Vol. 67, May 1979.

10) A.M. LAW y W.D. KELTON.- "Simulation modeling and analysis", MaGraw-Hill, 1982.

11) P.L. MEYER.- "Probabilidad y sus aplicaciones estadisticas", Fondo Educativo Interamericano, 1973.

12) J. AYALA.- "Predicción lineal", Tesis de Grado, Escuela Politécnica Nacional, Facultad de Ingeniería Eléctrica, 1983.

13) J.J. KOMO y A. ARIDGIDES.- "Modified square - root method for generating correlated gaussian pseudo-random variables", Proccedings of IEEE, Vol. 68, November 1980.

14) TEKTRONIX.- "4050 series R08 signal processing ROM PACK No.2 (FFT) instruction manual". Tektronix. 1982.

15) TEKTRONIX.- "4050 series R07 signal processing ROM PACK No. 1 instruction manual", Tektronix, 1982.