

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL
FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA

"METODOS DE PRONY Y PISARENKO PARA ANALISIS ESPECTRAL"

PABLO W. HIDALGO LASCANO

TESIS PREVIA A LA OBTENCION DEL TITULO
DE INGENIERO EN LA ESPECIALIZACION DE
ELECTRONICA Y TELECOMUNICACIONES



QUITO, MARZO DE 1985

CERTIFICO QUE EL PRESENTE TRABAJO
HA SIDO REALIZADO EN SU TOTALIDAD
POR EL SR. PABLO W. HIDALGO LASCA
NO.



ING. GUALBERTO HIDALGO

DIRECTOR DE TESIS

AGRADECIMIENTO

AL ING. GUALBERTO HIDALGO POR SU ACERTADA
DIRECCION EN LA ELABORACION DE LA PRESEN
TE TESIS.

I N D I C E

Pág.

Capítulo I : INTRODUCCION

1.1.	Reseña histórica de la evolución de la estimación espectral -----	1
1.2.	Objetivo e importancia de la evolución de la estimación espectral -----	4
1.3.	Algunos conceptos y fundamentos de análisis espectral -----	5
1.4.	Descripción de los capítulos -----	13

Capítulo II : DESCOMPOSICION ARMONICA DE PISARENKO

2.1.	Análisis y descripción del método -----	15
2.1.1.	Análisis del método de Pisarenko basado en la función de covariancia -----	20
2.1.2.	Análisis del método de Pisarenko basado en los retrasos de autocorrelación -----	28
2.2.	Implementación de programas -----	42
2.3.	Resultados experimentales -----	52

Capítulo III: METODO DE PRONY EXTENDIDO

3.1.	Análisis y descripción del método -----	64
3.1.1.	Obtención de frecuencias y factores de amortiguamiento de las exponenciales -----	65

3.1.2. Cálculo iterativo del orden del modelo -----	72
3.1.3. Obtención de las amplitudes y fases de las exponencia <u>l</u> les -----	73
3.1.4. Cálculo del espectro Prony -----	76
3.2. Implementación de programas -----	78
3.3. Resultados experimentales -----	85

Capítulo IV : DESCOMPOSICION LINEAL ESPECTRAL DE PRONY

4.1. Análisis y descripción del método -----	96
4.1.1. Obtención de coeficientespolinomiales y frecuencias de las exponenciales -----	97
4.1.2. Cálculo iterativo del orden del modelo -----	101
4.1.3. Obtención de amplitudes y fases exponenciales -----	101
4.2. Implementación de programas -----	103
4.3. Resultados experimentales -----	108

Capítulo V : ANALISIS COMPARATIVO ENTRE LOS METODOS DESARRO LLADOS 118

Capítulo VI : COMENTARIOS Y CONCLUSIONES 129

APENDICES ----- 133

APENDICE A : Manual de uso de los programas

APENDICE B : Listado de los programas.

BIBLIOGRAFIA ----- 134

CAPITULO I

INTRODUCCION

1.1. RESEÑA HISTORICA DE LA EVOLUCION DE LA ESTIMACION ESPECTRAL

El origen de la estimación espectral se remonta a épocas antiguas , con la determinación de la longitud del día, las fases de la luna y la longitud del año; y es así como el calendario y el reloj resultaron de análisis espectrales empíricos. Luego de estos descubrimientos empíricos realizados por egipcios, babilonios y otros, se dan algunos muy importantes en el campo de la Química, que dieron sus contribuciones para el desarrollo del análisis espectral; para así llegar 1807, año en el cual Joseph de Fourier, establece que alguna señal (función) definida en un intervalo finito podría ser representada por una suma infinita de componentes sinusoidales relacionadas armónicamente.

Luego de la introducción de las series de Fourier, la teoría de Fourier fue extendida para el caso de funciones ortogonales arbitrarias por Sturm y Liouville en 1836. La teoría Sturm-Liouville guiaron al más grande suceso empírico de análisis espectral hasta ahora obtenido, a saber la formulación de mecánica cuántica dada por Heisenberg y Schrödinger en 1925 y 1926. En 1929 John von Neumann expone la teoría espectral del átomo en un fundamento matemático firme, en su teorema de representación espectral en espacio de Hilbert. Mientras tanto Norbert Wiener, en 1923 desarrolló la teoría matemática del movimiento Browniano y en 1930 describe en su artículo 'aná

lisis armónico generalizado", el soporte teórico para el tratamiento de procesos estocásticos, utilizando una aproximación de la transformada de Fourier, esto es, describe la representación espectral de un proceso estacionario aleatorio. El fundamento común de la representación espectral de von Neumann y Wiener es el espacio de Hilbert; el resultado de von Neumann es para un operador Hermítico, mientras que el resultado de Wiener es para un operador unitario. Así, estas dos representaciones espectrales son relacionadas por la transformación Cayley - Möbius.

En 1942 Wiener aplica sus métodos a problemas de predicción y filtración. Un resultado mayor fue la introducción de la función de autocorrelación de un proceso aleatorio y su transformada de Fourier relacionando con la densidad espectral de potencia. De esta manera los trabajos de Norbert Wiener y A.I. Khinchin (quien definió un análisis y relación similares a los de Wiener, pero independientemente de éste) dan la popularidad contemporánea del análisis espectral. El trabajo de Wiener fue interpretado y extendido por Norman Levinson.

La historia moderna de estimación espectral comienza con el avance sensacional de J. W. Tukey en 1949, el cual es el equivalente estadístico del avance de Fourier, 142 años más tarde. Este resultado hizo posible un desarrollo activo de análisis espectral empírico - por investigadores en todas las disciplinas científicas. Así Blackman y Tukey, en una publicación clásica en 1958, proporcionaron una implementación práctica de la autocorrelación de Wiener aproximada a estimación espectral de potencia cuando se usa una secuencia mues

treada de datos; sin embargo este análisis espectral fue computacionalmente caro, a pesar de lo cual fue la técnica de estimación espectral más popular, hasta la introducción del algoritmo de la transformada rápida de Fourier (FFT), con su publicación en 1965 por J. S. Cooley y J. W. Tukey; este algoritmo resulta computacionalmente más eficiente. La estimación espectral convencional FFT está basada en un modelo de series de Fourier de los datos, esto es, se asume que el proceso está compuesto de un conjunto de sinusoides relacionadas armónicamente.

Otros modelos de series en el tiempo han sido usados por mucho años en el campo de la no-ingeniería. Así, Yule y Walker usaron modelos autorregresivos (AR) para pronosticar la tendencia en series de tiempo económicas. Igualmente Barón de Prony proyectó un procedimiento simple para ajustar modelos exponenciales para datos obtenidos de un experimento en gas químico. Otros modelos han surgido en los campos de análisis numérico y estadístico.

Más contribuciones importantes fueron, la introducción del análisis espectral de entropía máxima (MEM), por John Burg en 1967, motivado por su trabajo con filtración de predicción lineal en aplicaciones geosismológicas; el desarrollo de ventanas espectrales por Emmanuel Parzen y otros comenzando en 1950, el trabajo estadístico de Maurice Priestley en su escuela, pruebas de hipótesis en análisis de series en el tiempo por Peter Whittle comenzando en 1951, la aproximación Box-Jenkins por George Box y G. M. Jenkins en 1970, y estimación espectral autorregresiva por Parzen y H. Akaike comenzando en 1960 y propuesta años más tarde en 1968 formalmente por Parzen

El método de Prony también sostiene algunas similitudes matemáticas a los algoritmos de estimación AR. Un área de corriente investigación es aquella de modelos de movimiento promedio autorregresivo (ARMA). El modelo ARMA es una generalización del modelo AR, y parece proporcionar una mejor resolución y realización que métodos AR. La descomposición armónica de Pisarenko (PHD) es un ejemplo de una técnica de estimación espectral basada en un caso especial del modelo ARMA.

1.2. OBJETIVO E IMPORTANCIA DE LAS NUEVAS TECNICAS DE ESTIMACION ESPECTRAL

El objetivo que persiguen las nuevas técnicas de estimación espectral, es el de intentar aliviar las limitaciones propias de la FFT, para la estimación de densidad espectral de potencia (PSD) o simplemente el espectro, de procesos estocásticos y determinísticos muestreados discretamente.

Si bien es cierto que la FFT es computacionalmente eficiente para análisis espectral y produce resultados razonables para una larga clase de procesos de señales, en cambio hay varias limitaciones inherentes a su realización.

Así entre una de sus limitaciones más importantes se tiene la resolución de frecuencia, esto es la capacidad para distinguir las respuestas espectrales de dos o más señales. La resolución de frecuencia en hertz se define como el recíproco del intervalo de tiempo en segundos, sobre el cual la muestra de datos está disponible.

Otra de las limitaciones de la FFT es el "ventaneo" implícito de los datos que ocurre cuando se procesa con la FFT. El "ventaneo" se manifiesta como "fuga" en el dominio espectral, esto es la energía en el lóbulo principal "fuga" hacia los lóbulos laterales en la respuesta espectral, cubriendo y distorsionando otras respuestas espectrales que están presentes.

Estas dos limitaciones que se han presentado por ejemplo, se encuentran particularmente cuando se analizan registros cortos de datos, los cuales ocurren frecuentemente en la práctica porque muchos procesos son cortos en duración o tienen una variación rápida en el tiempo, de tal manera que pueden ser considerados constantes sólo para longitudes cortas de registros. De ahí la importancia de las nuevas técnicas de estimación espectral, que solucionan las limitaciones de las aproximaciones espectrales tradicionales.

Por otro lado, los métodos tradicionales, no realizan ninguna consideración en el análisis de señales sinusoidales en presencia de ruido, esto es, el espectro de este tipo de señales resulta distorsionado, lo que no sucede con las modernas técnicas de estimación, especialmente el método PHD, el cual proporciona una de las mejores estimaciones espectrales, cuando se trata con señales de esta clase.

1.3. ALGUNOS CONCEPTOS Y FUNDAMENTOS DE ANALISIS ESPECTRAL

En primer lugar consideraremos algunas definiciones que son importantes en el estudio de la teoría y de los métodos de Análisis Es

pectral, sin cuyo conocimiento previo, resulta difícil la comprensión de los métodos de estimación espectral analizados en el presente trabajo.

Un proceso estocástico es una familia de funciones $x(t)$ reales o complejas definidas en algún espacio de probabilidad; para determinados tiempos t_1, \dots, t_n , las cantidades $x(t_1), \dots, x(t_n)$ son variables aleatorias, por lo que el proceso estocástico es denominado también proceso aleatorio.

La media o valor esperado del proceso $x(t)$, representada por $\overline{x(t)}$ es, por definición, el valor esperado de la variable aleatoria $x(t)$ y por consiguiente constituye su momento de primer orden:

$$E\{x(t)\} = \overline{x(t)} \quad (1.1)$$

La función de autocorrelación de un proceso $x(t)$, representada por $R_{XX}(t_1, t_2)$ o por $R(t_1, t_2)$, es por definición, el valor esperado del producto $x(t_1) x^*(t_2)$ (el asterisco señala que se trata del valor complejo conjugado):

$$E\{x(t_1)x^*(t_2)\} = R_{XX}(t_1, t_2) \quad (1.2)$$

El valor de $R_{XX}(\tau)$ para $t=t_1=t_2$ constituye la intensidad promedio o la potencia promedio del proceso $x(t)$:

$$E\{|x(t)|^2\} = R_{XX}(0) \quad (1.3)$$

La correlación cruzada de dos procesos $x(t)$ e $y(t)$, representada por $R_{xy}(t_1, t_2)$, es por definición el valor esperado del producto $x(t_1)y^*(t_2)$:

$$E\{x(t_1)y^*(t_2)\} = R_{xy}(t_1, t_2) \quad (1.4)$$

La covarianza cruzada de dos procesos $x(t)$ e $y(t)$, $K_{xy}(t_1, t_2)$, es un concepto relacionado y está definido como la covarianza de las variables aleatorias $x(t_1)$ e $y(t_2)$:

$$E\{[x(t_1) - \overline{x(t_1)}][y^*(t_2) - \overline{y^*(t_2)}]\} = K_{xy}(t_1, t_2) \quad (1.5)$$

de donde se deduce que:

$$K_{xy}(t_1, t_2) = R_{xy}(t_1, t_2) - \overline{x(t_1)}\overline{y^*(t_2)} \quad (1.6)$$

La autocovarianza $K_{xx}(t_1, t_2)$ de un proceso $x(t)$, está definida como:

$$K_{xx}(t_1, t_2) = R_{xx}(t_1, t_2) - \overline{x(t_1)}\overline{x^*(t_2)} \quad (1.7)$$

definición que proviene de (1.6) cuando se hace $y(t) = x(t)$.

Un caso particular se tiene cuando:

$$K_{xx}(\tau) = R_{xx}(\tau) - \overline{x(t)}^2 \quad (1.8)$$

y constituye la varianza de la variable aleatoria $x(t)$.

Un proceso aleatorio es denominado estacionario en sentido estricto, si todas sus propiedades estadísticas son invariantes respecto a un desplazamiento del origen de tiempo. Un proceso estocástico se de nomina estacionario en sentido amplio si su media es constante y su autocorrelación depende solamente de la diferencia $\tau = t_1 - t_2$

$$\overline{x(t)} = \text{constante para todo } t \quad (1.9)$$

$$R_{XX}(t_1, t_2) = R_{XX}(\tau) = E\{x(t + \tau)x^*(t)\} \quad (1.10)$$

De (1.10) se puede deducir que:

$$R_{XX}(\tau) = E\{x(t + \frac{\tau}{2})x^*(t - \frac{\tau}{2})\} \quad (1.11)$$

Si un proceso es estacionario en sentido estricto, entonces también lo será en sentido amplio, sin cumplirse el inverso de esta relación.

Dos procesos $x(t)$ e $y(t)$ son conjuntamente estacionarios, si cada uno es estacionario y su correlación cruzada $R_{XY}(t_1, t_2)$ depende so lamente de $\tau = t_1 - t_2$.

$$R_{XY}(t_1, t_2) = R_{XY}(\tau) = E\{x(t + \tau)y^*(t)\} \quad (1.12)$$

Un proceso es ergódico, cuando para una función muestral $x(t)$ se cumple que los promedios de tiempo son idénticos a los promedios de conjunto; ésto significa que los datos estadísticos completos pueden ser determinados de alguna función muestral. En otras palabras

cada función muestral, lleva una información estadística idéntica - y de ahí que alguna función muestral describe (estadísticamente) el proceso aleatorio entero.

Matemáticamente, podría entenderse que a partir de la integral de la variable $x(t)$:

$$\langle x(t) \rangle = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt \quad (1.13)$$

para un proceso ergódico se cumplirá que:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \langle x(t) \rangle = E\{x(t)\} \quad (1.14)$$

Si esto sucede, para un T suficientemente grande, $\langle x(t) \rangle$ estará cerca de $E\{x(t)\}$ para cualquier muestra de $x(t)$. Luego, el promedio de conjunto $E\{x(t)\}$ del proceso dado podrá ser determinado mediante un promedio temporal de una sola muestra.

Un proceso ergódico es también estacionario, puesto que los promedios de conjunto son independientes del tiempo de observación.

Una vez que se han visto los principales conceptos, utilizados en el estudio de las nuevas técnicas de estimación espectral, resumiremos a continuación, los fundamentos del análisis espectral convencional; con este motivo consideraremos una forma de onda análoga de terminística $x(t)$, que es una función continua de tiempo; por lo general $x(t)$ será considerada de valor complejo.

Si $x(t)$ es integrable absolutamente, ésto es, la energía de la se
ñal \mathcal{E} es finita:

$$\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty \quad (1.15)$$

entonces la transformada continua de Fourier (CFT), $X(f)$ de $x(t)$ -
existe y está dada por:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j2\pi ft) dt \quad (1.16)$$

El módulo al cuadrado de la transformada de Fourier, es con frecuenci
a denominado el espectro $\mathcal{S}(f)$, de $x(t)$

$$\mathcal{S}(f) = |X(f)|^2 \quad (1.17)$$

El teorema de la energía de Parseval, expresado como:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df \quad (1.18)$$

es una proposición de la conservación de la energía; la energía de
la señal en el dominio del tiempo es igual a la energía de la trans
formada en el dominio de la frecuencia $\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{S}(f) df$. Así $\mathcal{S}(f)$ es una
densidad espectral de energía (EDS), que representa la distribución
de energía como una función de la frecuencia.

Si la señal $x(t)$ es muestreada a intervalos iguales de tiempo Δt , pa

ra producir una secuencia discreta $x_n = x(n\Delta t)$ para $-\infty < n < \infty$, entonces la secuencia muestreada puede ser representada como el producto de la función $x(t)$ y un infinito conjunto de funciones equidistantes delta de Dirac. La transformada de Fourier de este producto puede ser escrita como:

$$X'(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t-n\Delta t) \Delta t \right] \exp(-j2\pi ft) dt = \Delta t \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \exp(-j2\pi fn\Delta t) \quad (1.19)$$

La expresión (1.19) es idéntica en valor a la transformada $X(f)$ de (1.16) sobre el intervalo $-\frac{1}{2\Delta t} \leq f \leq \frac{1}{2\Delta t}$, mientras $x(t)$ esté limitada en banda y todas las componentes de frecuencia estén en este intervalo; y la densidad espectral de energía continua, de manera semejante a (1.17) se determinará como:

$$\mathcal{S}(f) = |X'(f)|^2, \quad (1.20)$$

Si:

- a) La secuencia de datos está disponible en solamente una ventana - de tiempo finito sobre $n = 0$ a $n = N - 1$, y
- b) La transformada discreta para N valores se obtiene, tomando muestras para las frecuencias $f = m\Delta f$, donde $m=0,1,\dots,N-1$, y $\Delta f = 1/N\Delta t$; luego la transformada discreta de Fourier (DFT) estaría dada a partir de (1.19) por:

$$\begin{aligned} x_m &= \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} x_n \exp(-j2\pi m\Delta f n\Delta t) \\ &= \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} x_n \exp(-j2\pi mn/N) \quad \text{para } m=0,\dots,N-1 \end{aligned} \quad (1.21)$$

Tanto (1.21) como su transformada inversa son cíclicas con período N ; usando (1.21) se ha forzado a una extensión periódica tanto para los datos discretos como para los valores transformados discretos, aún cuando los datos originales continuos pueden no haber sido periódicos. Una densidad discreta de energía espectral ESD puede luego estar definida como:

$$\mathcal{S}_m = |X_m|^2 \quad (1.22)$$

también para $0 \leq m \leq N-1$. Ambos, el discreto \mathcal{S}_m y el continuo $\mathcal{S}(f)$ han sido denominados estimaciones espectrales periodograma y se puede ver que el espectro discreto \mathcal{S}_m basado en un conjunto finito de datos es una versión distorsionada de un espectro continuo $\mathcal{S}(f)$ basado en un infinito conjunto de datos.

Con diferente punto de vista debe ser enfocado el problema, cuando el proceso $x(t)$ es estacionario en amplio sentido y estocástico, más bien que una forma de onda de energía finita y determinística. La energía de tales procesos es usualmente infinita, de modo que la cantidad de interés es la distribución de potencia (promedio de energía en el tiempo) con la frecuencia. También, integrales tales como (1.16) normalmente no existen para un proceso estocástico. Para el caso de un proceso estacionario aleatorio, definido, la ecuación (1.10) proporciona las bases para el análisis espectral, más bien que el mismo proceso aleatorio $x(t)$. El teorema de Wiener - Khinchin relaciona $R_{xx}(\tau)$, vía la transformada de Fourier, con $P(f)$, la densidad espectral de potencia PSD:

$$P(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau \quad (1.23)$$

Como en la práctica no se conoce la función de autocorrelación estadística, entonces se supone que el proceso aleatorio es ergódico y la función de autocorrelación puede ser escrita como:

$$R_{XX}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t + \tau)x^*(t) dt \quad (1.24)$$

De las ecuaciones (1.23) y (1.24) podemos ver la forma en la que se determina la PSD, en procesos relacionados con señales aleatorias y sin ruido; los métodos tradicionales de análisis espectral utilizan estas operaciones fundamentadas principalmente en la Transformada de Fourier. Para procesos de señales aleatorias en ruido deben seguirse técnicas especiales de análisis espectral, siendo una de éstas, los métodos tratados en el presente trabajo de tesis.

1.4. DESCRIPCION DE LOS CAPITULOS

El origen de la estimación espectral, así como su evolución e importancia, sirven como punto de partida para enfocar el estudio de señales que contienen ruido blanco aditivo, las cuales son tratadas por tres métodos pertenecientes al conjunto de nuevas técnicas de análisis espectral. Los conceptos más importantes utilizados en la descripción de estos métodos se tratan en este capítulo, así como los fundamentos de los métodos de análisis espectral tradicionales. En los capítulos II, III y IV se realiza la descripción de los métodos de Pisarenko, Prony extendido y Descomposición lineal espectral

de Prony respectivamente, así como en cada caso se hace referencia a la implementación de los algoritmos, mediante programas computacionales a ser utilizados en el computador TEKTRONIX disponible en la Facultad. El análisis comparativo entre los métodos desarrollados, basado principalmente en la calidad de resolución, eficiencia computacional e información proporcionada, es tratado en el capítulo V. El capítulo VI hace referencia a las conclusiones, recomendaciones y comentarios del análisis desarrollado. Finalmente se acompaña este trabajo con dos apéndices en los cuales tenemos el manual de uso y el listado de los programas respectivamente, los cuales darán una rápida información de los programas, para la persona interesada en la utilización de estas nuevas técnicas de estimación espectral.

CAPITULO II

DESCOMPOSICION ARMONICA DE PISARENKO

2.1. ANALISIS Y DESCRIPCION DEL METODO

El método de Pisarenko es una de las técnicas de análisis espectral que permite la determinación de frecuencias y potencias de varias sinusoides reales, más ruido blanco aditivo, que constituye un proceso estocástico.

El análisis de esta técnica se enfocará desde dos puntos de vista. El primero que está basado en los valores y vectores propios de la matriz de covariancia, para lo cual hace uso del Teorema de Carathéodory referido al problema del momento trigonométrico. Un segundo enfoque estará dado por una aproximación trigonométrica que lleva también a un análisis de valores y vectores propios, pero en este caso de la matriz de autocorrelación. El desarrollo del algoritmo computacional se fundamentará en este segundo análisis que según se comprobará más adelante coincide con el método de covariancia, si se asume que la señal a ser analizada existe en un intervalo finito.

A continuación se verá la similitud entre el método de autocorrelación y el método de covariancia para la estimación de parámetros del modelo de predicción lineal, para el caso de mínimos cuadrados.

Se asume que la entrada u_n de un proceso, es totalmente desconocida, lo cual sucede en muchas aplicaciones, tal como en análisis E.E.G

(electro-encefalograma). Por lo tanto, la señal x_n se puede predecir solamente de forma aproximada de un sumatorio linealmente ponderado de muestras anteriores; si decimos que la aproximación de x_n es \tilde{x}_n , entonces de acuerdo a lo enunciado anteriormente se cumple que:

$$\tilde{x}_n = - \sum_{k=1}^p a_k x_{n-k} \quad (2.1)$$

El error entre los valores de las dos señales \tilde{x}_n y x_n estará dado por:

$$e_n = x_n - \tilde{x}_n = x_n + \sum_{k=1}^p a_k x_{n-k} \quad (2.2)$$

e_n es también conocido como el residuo. En el método de mínimos cuadrados, los parámetros a_k son obtenidos como resultado de minimizar el promedio del error, o el error cuadrático total con respecto a cada uno de los parámetros. Se considera que x_n es una señal de terminística. Para una señal x_n aleatoria las deducciones serán análogas.

Si denotamos por E el error cuadrático total, de acuerdo a (2.2) se cumple la siguiente relación:

$$E = \sum_n e_n^2 = \sum_n \left(x_n + \sum_{k=1}^p a_k x_{n-k} \right)^2 \quad (2.3)$$

El rango del sumatorio en (2.3) y la definición de x_n en ese rango es de importancia; sin embargo primero minimizaremos E sin especificar el rango del sumatorio. E es minimizada haciendo:

$$\frac{\partial E}{\partial a_i} = 0 \quad 1 \leq i \leq p \quad (2.4)$$

donde p es el orden del modelo.

Reemplazando (2.3) en (2.4) y resolviendo se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a_i} \left[\sum_n (x_n + \sum_{k=1}^p a_k x_{n-k})^2 \right] &= 0 \\ \sum_n 2(x_n + \sum_{k=1}^p a_k x_{n-k}) \frac{\partial}{\partial a_i} \left(\sum_{k=1}^p a_k x_{n-k} \right) &= 0 \\ \sum_n (x_n + \sum_{k=1}^p a_k x_{n-k}) x_{n-i} &= 0 \\ \sum_n x_n x_{n-i} + \sum_{k=1}^p a_k \sum_n x_{n-k} x_{n-i} &= 0 \\ \sum_{k=1}^p a_k \sum_n x_{n-k} x_{n-i} &= - \sum_n x_n x_{n-i} \quad 1 \leq i \leq p \end{aligned} \quad (2.5)$$

Las ecuaciones (2.5) son conocidas en la terminología de mínimos cuadrados como las ecuaciones normales. De esta manera para alguna definición de la señal x_n , (2.5) constituye un conjunto de p ecuaciones con p incógnitas las cuales pueden ser resueltas para los coeficientes de predicción $\{a_k, 1 \leq k \leq p\}$ que minimizan E en (2.3).

El mínimo error cuadrático total, denotado por E_p es obtenido expandiendo (2.3) y reemplazando en ella (2.5), del siguiente modo:

$$E_p = \sum_n e_n^2 = \sum_n \left(x_n + \sum_{k=1}^p a_k x_{n-k} \right)^2$$

$$E_p = \sum_n [x_n^2 + 2 x_n \sum_{k=1}^p a_k x_{n-k} + (\sum_{k=1}^p a_k x_{n-k})^2]$$

$$E_p = \sum_n x_n^2 + 2 \sum_{k=1}^p a_k \sum_n x_n x_{n-k} + \sum_n (\sum_{k=1}^p a_k x_{n-k})^2$$

$$E_p = \sum_n x_n^2 + 2 \sum_{k=1}^p a_k \sum_n x_n x_{n-k} + (\sum_{k=1}^p a_k \sum_n x_{n-k} x_{n-k}) \sum_{k=1}^p a_k$$

$$E_p = \sum_n x_n^2 + 2 \sum_{k=1}^p a_k \sum_n x_n x_{n-k} - \sum_n x_n x_{n-k} \sum_{k=1}^p a_k$$

$$E_p = \sum_n x_n^2 + \sum_{k=1}^p a_k \sum_n x_n x_{n-k} \quad (2.6)$$

De acuerdo al rango del sumatorio sobre n en las expresiones (2.3), (2.5) y (2.6), existen dos casos de interés, que conducirán a dos métodos distintos para la estimación de parámetros.

a) METODO DE AUTOCORRELACION.- Este método asume que el error en (2.3) es minimizado sobre un intervalo de duración infinita $-\infty < n < \infty$, reduciéndose entonces las ecuaciones (2.5) y (2.6) a las siguientes expresiones:

$$\sum_{k=1}^p a_k R(i-k) = -R(i), \quad 1 \leq i \leq p \quad (2.7)$$

$$E_p = R(0) + \sum_{k=1}^p a_k R(k) \quad (2.8)$$

donde:
$$R(i) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n x_{n+i} \quad (2.9)$$

es la función de autocorrelación de la señal x_n . Se puede apreciar

que $R(i)$ es una función par de i , ésto es:

$$R(-i) = R(i) \quad (2.10)$$

Puesto que los coeficientes de $R(i-k)$ forman lo que frecuentemente es conocido como una matriz de autocorrelación, éste método es llamado método de autocorrelación. Una matriz de autocorrelación es una matriz TOEPLITZ simétrica (una matriz Toeplitz es aquella en la que los elementos a lo largo de cada diagonal son iguales).

En la práctica la señal x_n es conocida solamente sobre un intervalo finito, por lo que la señal x_n se multiplica por una función "ventana" w_n para obtener otra señal x'_n que es cero fuera de algún intervalo $0 \leq n \leq N-1$:

$$x'_n = \begin{cases} x_n w_n & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases} \quad (2.11)$$

La función de autocorrelación está entonces dada por:

$$R(i) = \sum_{n=0}^{N-1-i} x'_n x'_{n+i} \quad i \geq 0 \quad (2.12)$$

b) METODO DE COVARIANCIA.- En contraste con el método de autocorrelación, este método asume que el error E en (2.3) es minimizado sobre un intervalo finito $0 \leq n \leq N-1$. Las ecuaciones (2.5) y (2.6) se reducen entonces a las siguientes expresiones:

$$\sum_{k=1}^p a_k \psi_{ki} = -\psi_{0i} \quad 1 \leq i \leq p \quad (2.13)$$

$$E_p = \psi_{00} + \sum_{k=1}^p a_k \psi_{0k} \quad (2.14)$$

donde:

$$\psi_{ik} = \sum_{n=0}^{N-1} x_{n-i} x_{n-k} \quad (2.15)$$

es la covariancia de la señal x_n en el intervalo dado. Los coeficientes ψ_{ki} en (2.13) forman una matriz de covariancia y de aquí el nombre de método de covariancia. A partir de (2.15) podemos comprobar que la matriz de covariancia es simétrica, esto es, $\psi_{ik} = \psi_{ki}$; pero a diferencia de la matriz de autocorrelación, los términos a lo largo de cada diagonal no son iguales.

De todos estos análisis podemos concluir que el método de autocorrelación se reduce al método de covariancia, si consideramos a la señal x_n existente o muestreada sobre un intervalo finito, esto es cuando n varía entre $0 \leq n \leq N-1$.

2.1.1. Análisis del método de Pisarenko basado en la función de covariancia

Sea $x(t)$ un proceso estocástico estacionario complejo, estacionario en amplio sentido, el cual depende en tiempo discreto. Asumimos que el valor medio del proceso es cero. La función espectral $F(\lambda)$ del proceso $x(t)$ es relacionada a su función de covariancia $B(k)$ ³ por:

$$B(k) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(i\lambda k) dF(\lambda) \quad -\infty \leq k \leq \infty \quad (2.16)$$

Si $F(\lambda)$ es absolutamente continua su derivada $F'(\lambda)$ es llamada Densidad Espectral $P(\lambda)$:

$$P(\lambda) = F'(\lambda) \quad (2.17)$$

Si $F(\lambda)$ tiene un salto ρ_j a la frecuencia λ_j , ésto es si $F(\lambda_j + 0) - F(\lambda_j - 0) = \rho_j$; entonces (2.17) es todavía válida si introducimos funciones δ ; en este caso $P(\lambda)$ contiene una componente $\rho_j \delta(\lambda - \lambda_j)$ y la función de covariancia $B(k)$ contiene un armónico $\rho_j \exp(i\lambda_j k)$.

El método de Pisarenko obtiene los armónicos de un segmento finito de la función de covariancia, por lo tanto si este segmento es de longitud $2m$ se tendrá que:

$$B(k) \text{ existe para } -m \leq k \leq m \quad (2.18)$$

A este segmento finito aplicaremos el teorema de Caratheodory ¹⁰ cuyo enunciado es el siguiente:

TEOREMA: Sean C_1, \dots, C_m números complejos (no todos cero) y asumimos $m > 1$, entonces existe algún número entero r , $1 \leq r \leq m$ y algunos números reales ρ_j y ω_j ($j=1, \dots, r$) tales que $\rho_j > 0$, $-\pi < \omega_j \leq \pi$ y $\omega_j \neq \omega_k$ cuando $j \neq k$; y tales que la siguiente representación de la secuencia de números C_k es verdadera:

$$C_k = \sum_{j=1}^r \rho_j \exp(i\omega_j k) \quad k=1, \dots, m \quad (2.19)$$

Las constantes ρ_j y ω_j son determinadas de manera única.

Si este teorema aplicamos al segmento (2.18) de longitud $2m$, de la función de covariancia $B(k)$, se tendrá que $C_k = B(k)$, $k=1, \dots, m$ y por lo tanto llegaremos a la siguiente representación para $B(k)$:

$$B(k) = \sum_{j=1}^r \rho_j \exp(i\omega_j k) \quad k=1, \dots, m; \quad r \leq m \quad (2.20)$$

Si en la expresión anterior $k = 0$, se tiene que generalmente se cumple la siguiente desigualdad:

$$B(0) \geq \sum_{j=1}^r \rho_j \quad (2.21)$$

Si la matriz B es degenerada, entonces el signo igual en (2.21) se mantiene; en cambio si B es no-degenerada estrictamente la desigualdad se mantiene. Para este segundo caso, que es más general, si de signamos por ρ_0 la diferencia entre el lado izquierdo y el lado de recho de la desigualdad (2.21) se tendrá:

$$\rho_0 = B(0) - \sum_{j=1}^r \rho_j \quad (2.22)$$

Puesto que $B(k) = B^*(-k)$ (el asterisco representa complejo conjugado), entonces se tiene que se cumple la siguiente igualdad para $B(k)$:

$$B(k) = \rho_0 \delta(k) + \sum_{j=1}^r \rho_j \exp(i\omega_j k) \quad |k| \leq m \quad (2.23)$$

donde $\delta(0) = 1$, $\delta(k) = 0$ cuando $k \neq 0$; $\rho_0 > 0$ para matrices B no degeneradas, y $\rho_0 = 0$ para matrices B denegeradas.

La ecuación (2.23) proporciona una representación para el segmento

de la función de covariancia $B(k)$ en términos de una suma de armónicos y posiblemente una función δ correspondiente a ruido blanco.

Se debería notar que si la verdadera función de covariancia consiste de r armónicos (donde $r \leq m$) y también de posiblemente una función δ , entonces la representación (2.23) proporciona las verdaderas frecuencias ω_j y amplitudes ρ_j , ya que de acuerdo al teorema de Caratheodory estas cantidades son determinadas de manera única. Pero si $r > m$ o si $B(k)$ contiene algunas componentes espectrales no blancas, entonces la expresión (2.23) da números ω_j y ρ_j los cuales pueden no ser las verdaderas frecuencias y amplitudes.

Si $B(k)$ es real, los armónicos complejos en (2.23) deben ser en número par y ocurrir en pares complejos conjugados para dar armónicos reales coseno:

$$\rho_{j_1} = \rho_{j_2} \quad \omega_{j_1} = -\omega_{j_2} \quad (2.24)$$

$$\rho_{j_1} \exp(i\omega_{j_1}k) + \rho_{j_2} \exp(i\omega_{j_2}k) = 2 \rho_{j_1} \cos(\omega_{j_1}k)$$

De ésta manera, si $B(k)$ es real, la expresión (2.23) puede ser escrita como:

$$B(k) = \rho_0 \delta(k) + 2 \sum_{j=1}^p \rho_j \cos(\omega_j k) \quad |k| \leq m \quad (2.25)$$

donde $p \leq m/2$. De acuerdo con esto, si el verdadero número de armónicos coseno en una función de covariancia real no es más que $m/2$, estos armónicos pueden ser recuperados exactamente de un segmento

de longitud $2m$ de la función de covariancia.

A continuación indicaremos como se deducen los números r , ρ_j y ω_j . El algoritmo consiste de cuatro pasos:

- a) Encontramos el mínimo valor propio μ_0 de la matriz B de orden $m+1$, su multiplicidad se denota por ν . El número μ_0 es igual a la amplitud ρ_0 para el término de la función δ en (2.23). Si $\rho_0 = 0$ entonces el término de la función δ en (2.23) desaparece. Dos situaciones son posibles: $\nu = 1$ y $\nu > 1$. Si $\nu = 1$ consideramos la matriz $B - \mu_0 I$ para los análisis posteriores; si $\nu > 1$ consideramos el menor principal de la matriz $B - \mu_0 I$ cuyo orden es $r+1$ (donde $r = m - \nu$). Denotamos este menor por:

$$(B - \mu_0 I)_r = \begin{bmatrix} B(0) - \mu_0 & B(1) & \dots & B(r) \\ B(-1) & B(0) - \mu_0 & \dots & B(r-1) \\ \vdots & & & \vdots \\ B(-r) & B(-r+1) & \dots & B(0) - \mu_0 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Así el rango de la matriz $(B - \mu_0 I)_r$ es r y su orden es $(r + 1)$.

- b) Encontramos el vector propio de $(B - \mu_0 I)_r$, correspondiente a su único valor propio y los componentes de este vector propio designaremos por p_0, p_1, \dots, p_r .
- c) Evaluamos las raíces del polinomio

$$p_0 + p_1 z + \dots + p_r z^r = 0 \quad (2.27)$$

denotaremos estas raíces por z_1, \dots, z_r . Estas raíces son todas diferentes y de módulo unitario, pudiendo ser escritas únicamente en la forma:

$$z_j = \exp(i\omega_j) \quad -\pi < \omega_j \leq \pi \quad j = 1, \dots, r$$

Los números $\omega_1, \dots, \omega_r$ son las frecuencias de los armónicos re queridos.

d) Las amplitudes ρ_j satisfacen el sistema de ecuaciones lineales:

$$\sum_{j=1}^r \rho_j \exp(i\omega_j k) = B(k) - \mu_0 \delta(k) \quad |k| \leq m \quad (2.28)$$

donde $\mu_0 = \rho_0$. De (2.28) deduciremos un sistema de ecuaciones lineales reales, las cuales determinan las amplitudes ρ_1, \dots, ρ_r . Primero suponemos que los valores absolutos $|\omega_1|, \dots, |\omega_r|$ son todos diferentes. Fácilmente puede demostrarse que se cumplen las siguientes expresiones:

$$\det \begin{bmatrix} \text{sen } \omega_1 & \text{sen } \omega_2 & \text{sen } \omega_r \\ \text{sen } 2\omega_1 & \text{sen } 2\omega_2 & \text{sen } 2\omega_r \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \text{sen } r\omega_1 & \text{sen } r\omega_2 & \text{sen } r\omega_r \end{bmatrix} \neq 0 \quad (2.29)$$

cuando $\omega_j \neq 0$ y $\omega_j \neq \pi$.

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos \omega_1 & \cos \omega_2 & \cos \omega_r \\ \cos(r-1)\omega_1 & \cos(r-1)\omega_2 & \cos(r-1)\omega_r \end{bmatrix} \neq 0 \quad (2.30)$$



Si ninguno de los $\omega_1, \dots, \omega_r$ es igual a cero o π , podemos tomar la parte imaginaria de las ecuaciones (2.28) para $k=1, \dots, r$:

$$\sum_{j=1}^r \rho_j \operatorname{sen} \omega_j k = \operatorname{Im} B(k) \quad k=1, \dots, r \quad (2.31)$$

De esta forma, se tiene que de acuerdo a (2.29), el sistema (2.31) determina las amplitudes ρ_1, \dots, ρ_r de manera única. Si algún $\omega_j=0$ o si $\omega_j=\pi$, las partes reales de las ecuaciones (2.28) pueden ser tomadas para $k = 0, 1, \dots, r-1$.

$$\sum_{j=1}^r \rho_j \cos \omega_j k = \operatorname{Re} B(k) - \mu_0 \delta(k) \quad k=0, \dots, r-1 \quad (2.32)$$

El determinante de este sistema es la expresión (2.30) y por lo tanto será diferente de cero.

Ahora asumimos que entre los $\omega_1, \dots, \omega_r$ hay un par con módulos idénticos y por lo tanto $\omega_1 = -\omega_2$, y los otros, $|\omega_3|, \dots, |\omega_r|$ son todos diferentes. Si en (2.31) y (2.32) consideramos únicamente los términos referidos a ω_1 y ω_2 tenemos

$$\begin{aligned} \rho_1 \operatorname{sen} \omega_1 k + \rho_2 \operatorname{sen} \omega_2 k &= (\rho_2 - \rho_1) \operatorname{sen} \omega_2 k \\ \rho_1 \cos \omega_1 k + \rho_2 \cos \omega_2 k &= (\rho_2 + \rho_1) \cos \omega_2 k \end{aligned}$$

Denotamos:

$$\rho_2 - \rho_1 = \tilde{\rho}_2 \quad ; \quad \rho_2 + \rho_1 = \tilde{\rho}_2 \quad (2.33)$$

Ahora en lugar de (2.31) y (2.32) podemos considerar los siguientes sistemas truncados:

$$\tilde{\rho}_2 \operatorname{sen} \omega_2 k + \sum_{j=3}^r \rho_j \operatorname{sen} \omega_j k = \operatorname{Im} B(k) \quad k=1, \dots, r-1 \quad (2.34)$$

$$\tilde{\tilde{\rho}}_2 \cos \omega_2 k + \sum_{j=3}^r \rho_j \cos \omega_j k = \operatorname{Re} B(k) - \mu_0 \delta(k) \quad k=0, 1, \dots, r-2 \quad (2.35)$$

En estos sistemas todos los módulos $|\omega_2|, |\omega_3|, \dots, |\omega_r|$ son diferentes, de tal manera que al utilizar los sistemas (2.34) y (2.35) podemos determinar $\tilde{\rho}_2, \tilde{\tilde{\rho}}_2, \rho_3, \dots, \rho_r$ y de éstos podemos obtener ρ_1 y ρ_2 si consideramos las ecuaciones (2.33)

$$\rho_1 = \frac{1}{2} (\tilde{\tilde{\rho}}_2 - \tilde{\rho}_2) \quad \rho_2 = \frac{1}{2} (\tilde{\tilde{\rho}}_2 + \tilde{\rho}_2) \quad (2.36)$$

Este mismo método es aplicable cuando hay varios pares de frecuencias, los cuales difieren solamente en signo. Habiendo agrupado los pares correspondientes de frecuencias en (2.31) y (2.32), se resuelve los sistemas truncados y luego se aplica (2.36) para encontrar las amplitudes. Los términos con $\omega_j = 0$ o $\omega_j = \pi$ son siempre determinados de (2.32).

De esta manera hemos detallado la forma de obtener las amplitudes y frecuencias de una función de covariancia compleja; en la práctica generalmente consideramos que trabajaremos con funciones reales, por lo tanto a partir del análisis anterior se llega a este caso particular, obteniéndose en lugar de (2.28), el sistema de ecuaciones - (2.25):

$$2 \sum_{j=1}^p \rho_j \cos \omega_j k = B(k) - \mu_0 \delta(k) \quad |k| \leq m \quad (2.37)$$

Los módulos $|\omega_1|, \dots, |\omega_p|$ son todos diferentes, de modo que podemos

utilizar las ecuaciones (2.37) para $k=0,1,\dots,p-1$. Puesto que de (2.30) el determinante de este sistema es diferente de cero, las amplitudes ρ_1, \dots, ρ_p son determinadas de manera única.

El algoritmo para determinar las amplitudes, no es único, pues como veremos más adelante podemos determinar directamente las potencias de los armónicos, así como del ruido blanco. En la práctica el procedimiento descrito por este algoritmo se lo puede implementar en el computador digital.

2.1.2. Análisis del método de Pisarenko basado en los retrasos de autocorrelación

Si un proceso estocástico consiste solamente de sinusoides en ruido blanco aditivo, entonces éste puede ser modelado como un caso especial del modelo ARMA (Autoregressive moving average)

El modelo ARMA realiza el análisis de señales, de las cuales se dispone únicamente de secuencias de datos muestreados en el tiempo, caracterizándose además esta técnica por modelar a la señal como una combinación lineal de sus valores presentes y anteriores, así como de valores anteriores de una hipotética entrada al sistema, cuya salida es la señal dada. En el dominio de la frecuencia, esto es equivalente a modelar el espectro de la señal por un espectro polos - ceros. Ya que hemos manifestado que la señal de salida x_n es una función lineal de sus salidas anteriores, y entradas u_n presentes y anteriores, tenemos que se cumple la siguiente relación:

$$x_n = - \sum_{k=1}^p a_k x_{n-k} + G \sum_{l=0}^q b_l u_{n-l} \quad b_0 = 1 \quad (2.38)$$

donde a_k, b_l y la ganancia G son los parámetros del sistema.

La ecuación anterior puede ser especificada en dominio de la frecuencia, obteniendo la transformada z a los dos lados de la ecuación, - así:

$$x_n + \sum_{k=1}^p a_k x_{n-k} = G \left[u_n + \sum_{l=1}^q b_l u_{n-l} \right]$$

$$X(z) \left[1 + \sum_{k=1}^p a_k z^{-k} \right] = U(z) G \left[1 + \sum_{l=1}^q b_l z^{-l} \right]$$

Si $H(z)$ es la función de transferencia del sistema se tiene que:

$$H(z) = \frac{X(z)}{U(z)} = G \frac{1 + \sum_{l=1}^q b_l z^{-l}}{1 + \sum_{k=1}^p a_k z^{-k}} \quad (2.39)$$

donde $X(z)$ y $U(z)$ son las transformadas z de x_n y u_n respectivamente. Si $a_k \neq 0$ para $1 \leq k \leq p$ y $b_l \neq 0$ para $1 \leq l \leq q$, entonces $H(z)$ en (2.39) constituye el modelo general ARMA conocido más familiarmente en ingeniería como modelo polo - cero.

Puesto que el método de Pisarenko en este segundo análisis se lo considera como un proceso especial ARMA, se dará para este caso un tratamiento separado.

Consideremos la siguiente identidad trigonométrica:

$$\text{sen}(\Omega n) = 2 \cos \Omega \text{sen}(\Omega[n-1]) - \text{sen}(\Omega[n-2]) \quad (2.40)$$

su verosimilitud será demostrada a continuación por inducción.

El seno de la suma de dos ángulos iguales Ω , está dado por:

$$\begin{aligned} \text{sen}(\Omega+\Omega) &= \text{sen}(2\Omega) = \text{sen}\Omega \cos\Omega + \text{sen}\Omega \cos\Omega \\ &= \text{sen}(2\Omega) = 2 \text{sen}\Omega \cos\Omega \end{aligned}$$

que como se aprecia, cumple con la expresión general (2.40).

El seno de la suma de tres ángulos Ω , se define como:

$$\text{sen}(2\Omega+\Omega) = \text{sen}(3\Omega) = \text{sen}2\Omega \cos\Omega + \cos2\Omega \text{sen}\Omega$$

puesto que:

$$\cos(2\Omega) = 2 \cos^2 \Omega - 1$$

se tiene que:

$$\text{sen}(3\Omega) = \text{sen}2\Omega \cos\Omega + 2 \cos^2\Omega \text{sen}\Omega - \text{sen}\Omega$$

$$\text{sen}(3\Omega) = \cos\Omega (\text{sen}2\Omega + 2 \text{sen}\Omega \cos\Omega) - \text{sen}\Omega$$

$$\text{sen}(3\Omega) = \cos\Omega (\text{sen}2\Omega + \text{sen}2\Omega) - \text{sen}\Omega$$

$$\text{sen}(3\Omega) = 2 \cos\Omega \text{sen}2\Omega - \text{sen}\Omega$$

que igualmente se ve, cumple con la identidad (2.40).

El seno para la suma de cuatro ángulos iguales va a estar dado por:

$$\text{sen}(3\Omega + \Omega) = \text{sen}3\Omega \cos\Omega + \cos3\Omega \text{sen}\Omega$$

si se considera que:

$$\cos(2\Omega + \Omega) = \cos(3\Omega) = \cos2\Omega \cos\Omega - \text{sen}2\Omega \text{sen}\Omega$$

$$\cos(3\Omega) = 2 \cos^3\Omega - \cos\Omega - \text{sen}2\Omega \text{sen}\Omega$$

y si se reemplaza en la expresión para el seno de la suma de cuatro ángulos iguales se tendrá que:

$$\begin{aligned} \text{sen}(3\Omega + \Omega) &= \text{sen}3\Omega \cos\Omega + \cos3\Omega \text{sen}\Omega \\ &= \text{sen}3\Omega \cos\Omega + 2 \cos^3\Omega \text{sen}\Omega - \cos\Omega \text{sen}\Omega - \text{sen}2\Omega \text{sen}^2\Omega \\ &= \text{sen}3\Omega \cos\Omega + \cos^2\Omega (2 \text{sen}\Omega \cos\Omega + \text{sen} 2\Omega) - \text{sen}2\Omega - \cos\Omega \text{sen}\Omega \\ &= \cos\Omega (\text{sen}3\Omega + 2 \text{sen} 2\Omega \cos\Omega - \text{sen}\Omega) - \text{sen} 2\Omega \\ &= \cos\Omega (\text{sen}3\Omega + \text{sen}3\Omega) - \text{sen} 2\Omega \\ \text{sen} (4\Omega) &= 2 \cos\Omega \text{sen}3\Omega - \text{sen}2\Omega \end{aligned}$$

expresión que cumple también con la identidad (2.40).

Siguiendo el mismo procedimiento podemos generalizar que el seno de la suma de n ángulos iguales Ω va a estar dada por:

$$\text{sen}(n\Omega) = 2\cos\Omega \text{sen}(\Omega[n-1] - \text{sen}(\Omega[n-2]))$$

En esta identidad trigonométrica tendremos que la variación de Ω se

rá: $-\pi < \Omega \leq \pi$. Si hacemos $\Omega = 2\pi f\Delta t$, donde $-\frac{1}{2\Delta t} < f \leq \frac{1}{2\Delta t}$, $\text{sen}(\Omega n)$ representará una sinusoida muestreada para incrementos de Δt segundos, con frecuencia f , cuyo valor se trata de conocer. Podemos considerar que $x_n = \text{sen}(\Omega n)$ y por lo tanto la identidad (2.40) puede ser reescrita como una ecuación de diferencias de segundo orden:

$$x_n = (2 \cos \Omega) x_{n-1} - x_{n-2} \quad (2.41)$$

expresión esta última que nos indica que el valor de la sinusoida muestreada, puede ser calculado de dos valores previos x_{n-1} y x_{n-2} . Esta conclusión es muy importante, ya que podemos observar a partir de (2.41) que con sólo obtener dos coeficientes y conocer el valor de dos muestras anteriores podemos predecir perfectamente el proceso sinusoidal para todo tiempo.

Si a los dos miembros de la igualdad (2.41) tomamos la transformada z , se tiene que:

$$X(z)[1 - 2 \cos \Omega z^{-1} + z^{-2}] = D(z) \quad (2.42)$$

donde efectivamente se comprueba que se tiene un polinomio $D(z)$ de segundo grado que refleja las condiciones anteriores o iniciales. La expresión (2.42) tiene como polinomio característico:

$$1 - 2 \cos \Omega z^{-1} + z^{-2} = 0$$

ó equivalentemente:

$$z^2 - 2 \cos \Omega z + 1 = 0$$

La frecuencia de la senoide muestreada, será calculada a partir de las raíces del polinomio característico, por lo tanto a continuación determinamos estas raíces:

$$z_{1,2} = \frac{2 \cos \Omega \pm \sqrt{(2 \cos \Omega)^2 - 4}}{2}$$

$$z_{1,2} = \frac{2 \cos \Omega \pm 2\sqrt{-\sin^2 \Omega}}{2}$$

$$z_{1,2} = \cos \Omega \pm j \sin \Omega$$

$$z_1 = z_2^* = \exp(j\Omega)$$

y puesto que $\Omega = 2\pi f\Delta t$, se tiene que:

$$z_1 = \exp(j2\pi f\Delta t)$$

$$z_2 = \exp(-j2\pi f\Delta t)$$

Se puede notar que las raíces son de módulo unitario, es decir $|z_1| = |z_2| = 1$ y que las frecuencias estarán dadas por:

$$f_i = [\tan^{-1}(\text{Im}\{z_i\}/\text{Re}\{z_i\})]/2\pi\Delta t \quad \text{para } i=1,2 \quad (2.43)$$

A partir de este ejemplo desarrollado podemos generalizar, que una ecuación de diferencias de segundo orden de coeficientes reales, de la forma:

$$x_n = - \sum_{m=1}^p a_m x_{n-m} \quad (2.44)$$

puede representar un proceso determinístico, consistente de p sinusoides reales de la forma $\sin(2\pi f_i \Delta t)$. Para este caso, los $\{ a_m \}$ son coeficientes del polinomio característico, que resultan de la ecuación de diferencias (2.44) al aplicar la transformada z ; este polinomio tendrá la siguiente forma:

$$z^{2p} + a_1 z^{2p-1} + \dots + a_{p-1} z^{p+1} + a_p z^p + a_{p+1} z^{p-1} + \dots + a_{2p-1} z + a_{2p} = \sum_{i=1}^p (z - z_i)(z - z_i^*) = 0 \quad (2.45)$$

Las raíces de este polinomio serán de módulo unitario y ocurrirán - en pares complejos conjugados, puesto que los coeficientes $\{ a_m \}$ son reales, siendo de la forma $z_i = \exp(j2\pi f_i \Delta t)$, donde las f_i son las frecuencias desconocidas de los armónicos, tales que $-\frac{1}{2\Delta t} \leq f_i < \frac{1}{2\Delta t}$ y $i = 1, \dots, p$.

Para este proceso puramente armónico, como se comprobará más tarde se tiene que $a_i = a_{2p-i}$ para $i=0, \dots, p$, con lo que el número de coeficientes a determinarse se reduce en un factor de 2.

Para sinusoides en ruido blanco aditivo W_n , se tiene que el proceso a ser considerado es:

$$y_n = x_n + W_n = \sum_{m=1}^{2p} a_m x_{n-m} + W_n \quad (2.46)$$

El ruido blanco es de tipo aleatorio gaussiano, por lo tanto su valor medio o $E[W_n] = 0$, donde E es el valor esperado; además este tipo de ruido tiene una densidad espectral plana sobre un intervalo

amplio de frecuencias, conteniendo el espectro todos los componentes de frecuencia en igual proporción.

Puesto que decimos que el ruido blanco tiene una densidad espectral plana, podemos obtener la función de autocorrelación mediante la transformación de Fourier

$$E [W_n W_{n+k}^*] = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_w^2 e^{j\omega k} df = \sigma_w^2 \delta_k$$

σ_w^2 en este caso es la variancia del ruido y como se ve en este caso es igual a la potencia. A partir de la última ecuación se tiene que dos muestras diferentes de una señal de ruido blanco gaussiano son no correlacionadas y, por lo tanto, estadísticamente independientes. Además como se asume que el ruido es no correlacionado con las sinusoides se tiene que:

$$E[x_n W_m] = 0$$

Si consideramos que $x_{n-m} = y_{n-m} - w_{n-m}$, y sustituimos en (2.46) se llega a:

$$\begin{aligned} y_n &= - \sum_{m=1}^{2p} a_m (y_{n-m} - w_{n-m}) + w_n \\ y_n + \sum_{m=1}^{2p} a_m y_{n-m} &= \sum_{m=1}^{2p} a_m w_{n-m} + w_n \\ \sum_{m=0}^{2p} a_m y_{n-m} &= \sum_{m=0}^{2p} a_m w_{n-m} \end{aligned} \quad (2.47)$$

donde $a_0 = 1$ por definición. Esta última expresión representa el

proceso de sinusoides en ruido blanco, en términos del ruido W_n y de las observaciones con ruido y_n ; además tiene la estructura de un proceso ARMA, con la característica de tener simetría especial, esto es, los parámetros AR son idénticos a los MA del modelo.

Los parámetros pueden ser encontrados como la solución de una ecuación propia, siempre y cuando se conozca la función de autocorrelación de y_n como se verá a continuación. Una expresión equivalente a (2.47) en forma matricial será:

$$Y^T A = W^T A \quad (2.48)$$

donde:

$$Y^T = [y_n \quad y_{n-1} \quad \dots \quad y_{n-2p}]$$

$$A^T = [1 \quad a_1 \quad \dots \quad a_{2p-1} \quad a_{2p}]$$

$$W^T = [W_n \quad W_{n-1} \quad \dots \quad W_{n-2p}]$$

Si a ambos lados de (2.48) multiplicamos por el vector Y , y tomamos el valor esperado, obtendremos:

$$E[Y Y^T] A = E[Y W^T] A \quad (2.49)$$

Si se define $X^T = [x_n \quad \dots \quad x_{n-2p}]$.

y si consideramos la definición de autocorrelación para el vector Y , tendremos que:

$$E [Y Y^T] = R_{yy} = \begin{bmatrix} R_{yy}(0) & \dots\dots\dots & R_{yy}(-2p) \\ \vdots & & \vdots \\ R_{yy}(2p) & \dots\dots\dots & R_{yy}(0) \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

$$\begin{aligned} E[Y W^T] &= E[(X + W)W^T] \\ &= E[X W^T] + E[W W^T] \end{aligned}$$

$$E[Y W^T] = \sigma_w^2 I \quad (2.51)$$

donde R_{yy} es una matriz Toeplitz de autocorrelación para el proceso observado, I es la matriz identidad. El hecho de que $E[X W^T] = 0$ viene de la suposición hecha anteriormente que las sinusoides son no correlacionadas con el ruido. Por lo tanto del análisis anterior, se establece que la expresión (2.49) puede ser reescrita como:

$$R_{yy} A = \sigma_w^2 A \quad (2.52)$$

la cual es una ecuación propia, en la que la variancia del ruido (σ_w^2) es un valor propio de la matriz de autocorrelación R_{yy} . El vector A , de parámetros ARMA, es el vector propio asociado con el valor propio σ_w^2 , escalado de modo que el primer elemento a_0 es la unidad por definición; este vector propio de parámetros deberá ser simétrico, es decir $a_i = a_{2p-i}$ para $i = 0, \dots, p$; esto resulta debido a la estructura especial de la matriz de autocorrelación, que es de tipo Toeplitz simétrica, puesto que de acuerdo con la ecuación (2.11), se tiene que la función de autocorrelación es una función par, es decir:

$$R_{yy}(-i) = R_{yy}(i)$$

La ecuación (2.52) producirá los parámetros ARMA siempre y cuando los retrasos de autocorrelación sean conocidos. Con una secuencia finita de datos, se puede estimar un número finito de funciones de autocorrelación o retrasos.

Para el caso de un proceso aleatorio estacionario, la función de autocorrelación estadística, definida según (1.10) como:

$$R_{XX}(\tau) = E[x(t + \tau)x^*(t)]$$

no se conoce en la práctica, por lo que se hace una suposición adicional, que el proceso aleatorio es ergódico en el primer y segundo momentos. Esta propiedad permite sustituir los promedios de tiempo por promedios de conjunto. Para un proceso ergódico, por lo tanto, la función de autocorrelación puede ser igualada a:

$$R_{XX}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t + \tau)x^*(t)dt \quad (2.53)$$

Basándonos en esta última expresión, podemos determinar el estimador de autocorrelación no polarizado, para una secuencia finita de datos x_n .

$$\hat{R}_{XX}(m) = \frac{1}{N - m} \sum_{n=0}^{N-m-1} x_{n+m} x_n^* \quad (2.54)$$

para $m=0, \dots, M$, donde $M \leq N-1$; N representa el número de datos dis

ponibles de la secuencia y " $\hat{\cdot}$ " indica un estimador. Los retrasos estimados negativos son determinados de los retrasos estimados positivos como sigue:

$$\hat{R}_{XX}(-m) = \hat{R}_{XX}^*(m) \quad (2.55)$$

ésto, de acuerdo con la propiedad simétrica conjugada. En muchos cacos, en lugar de (2.54) se utiliza el estimador de autocorrelación polarizado:

$$\hat{R}'_{XX}(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-m-1} x_{n+m} x_n^* \quad (2.56)$$

definido para $m=0, \dots, M$, puesto que éste tiende a producir menor error cuadrado que (2.54); como se demostrará más adelante. Para el caso de análisis espectral en consideración, se dispondrá y se trabajará como sucede en la mayoría de casos prácticos, con señales y por lo tanto secuencias de datos reales, en los que se cumple que $x_n^* = x_n$, por lo que las expresiones (2.54) y (2.56) para nuestro caso se reducirán a las siguientes igualdades

$$\hat{R}_{XX}(m) = \frac{1}{N-m} \sum_{n=0}^{N-m-1} x_{n+m} x_n \quad (2.57)$$

$$\hat{R}'_{XX}(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-m-1} x_{n+m} x_n \quad (2.58)$$

para $m=0, \dots, M$.

A partir de la ecuación (2.52), se establece que no es necesario co

nocer la variancia del ruido σ_w^2 , puesto que la misma se determinará a partir de la resolución de esta ecuación propia, la cual como se conoce proporciona como solución el valor propio de la matriz de autocorrelación R_{yy} , y el vector propio A de parámetros asociado a este valor propio. Como se ha demostrado anteriormente, este valor propio corresponde a la variancia del ruido σ_w^2 , y por lo tanto, constituirá la potencia del ruido blanco, debido a que como es de tipo aleatorio y está asociado a un proceso ergódico, en éste se cumplirá que la variancia es igual a la potencia de la componente variable en el tiempo.

Mediante este proceso desarrollado por Pisarenko, podemos determinar a más de las frecuencias, las potencias de p sinusoides reales en ruido blanco, asumiendo que son conocidos $2p+1$ retrasos de autocorrelación, incluyendo el retraso cero y puesto que únicamente son conocidos los retrasos de autocorrelación, la información acerca de las fases de las sinusoides no es obtenida. Las potencias de las sinusoides se pueden determinar, siguiendo un análisis similar para la obtención de amplitudes en el método de covariancia, pues una expresión equivalente a (2.37) para la obtención de potencias en el método de autocorrelación será:

$$\sum_{i=1}^p P_i \cos k\Omega_i = R_{yy}(k) - \sigma_w^2(k) \quad (2.59)$$

Esta última expresión, representa una forma adicional de presentación de la función de autocorrelación para sinusoides en ruido blanco; pues (2.59) puede reescribirse como:

$$R_{yy}(0) = \sigma_w^2 + \sum_{i=1}^p P_i$$

$$R_{yy}(k) = \sum_{i=1}^p P_i \cos(2\pi f_i k \Delta t) \quad \text{para } k \neq 0 \quad (2.60)$$

Se puede notar que el ruido blanco únicamente afecta el término de retraso cero. De esta forma una vez que las frecuencias han sido determinadas a partir de las raíces del polinomio (2.45) las potencias de las sinusoides pueden ser determinadas utilizando (2.60). La expresión (2.60) de manera equivalente puede ser representada en forma matricial como:

$$F P = r \quad (2.61)$$

donde:

$$F = \begin{bmatrix} \cos(2\pi f_1 \Delta t) & \dots & \cos(2\pi f_p \Delta t) \\ \vdots & & \vdots \\ \cos(2\pi f_1 p \Delta t) & \dots & \cos(2\pi f_p p \Delta t) \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_p \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad r = \begin{bmatrix} R_{yy}(1) \\ \vdots \\ R_{yy}(p) \end{bmatrix}$$

El vector P de potencias sinusoidales se encuentra resolviendo el conjunto de ecuaciones simultáneas (2.61). La potencia del ruido puede también ser determinada de:

$$\sigma_w^2 = R_{yy}(0) - \sum_{i=1}^p P_i$$

En la práctica se disponen únicamente de estimaciones de autocorre-

lación, de manera que debemos determinar el número de sinusoides p ; para ello la ecuación (2.52) debe resolverse sucesivamente para órdenes más altos, hasta el punto en el cual el mínimo valor propio no cambia de un orden al próximo orden más alto, para una suposición inicial del vector de coeficientes $A(0)$. Este último procedimiento descrito, constituye el método clásico de la potencia el cual permite encontrar el mínimo valor propio y el vector propio asociado a él.

2.2. IMPLEMENTACION DE PROGRAMAS

Como se había indicado inicialmente, el desarrollo del algoritmo computacional concerniente al método de Pisarenko, estará fundamentado en el segundo análisis (2.1.2), el cual a su vez se basa en los retrasos de autocorrelación.

En resumen, el algoritmo consta de los siguientes pasos:

- a) A partir de la secuencia de datos muestreados de la señal analizada, se deben calcular $2p+1$ retrasos de autocorrelación; puesto que el número p de sinusoides no es conocido a priori, entonces el proceso iniciará con el valor $p=1$.
- b) Resolver el sistema (2.52) utilizando el método clásico de la potencia; de esta resolución se obtendrá un mínimo valor propio y el vector propio de coeficientes A asociado a este valor propio; luego se debe verificar si el mínimo valor propio calculado, ha permanecido cercanamente igual al mínimo valor propio, del orden

anterior calculado. Si no se cumple este requerimiento, se incrementa el orden p del modelo en una unidad, es decir $p = p + 1$ y se regresa al paso a); caso contrario se continúa con el paso c).

- c) Se evalúan las raíces del polinomio (2.45), formado con los coeficientes del vector propio A .
- d) En base de las raíces calculadas en c) se determinan p frecuencias sinusoidales. Se utiliza la expresión (2.43).
- e) Se determinan p potencias sinusoidales, para lo cual se resolverá el sistema (2.60). Una vez calculadas las potencias sinusoidales. Se evalúa la potencia del ruido blanco, la cual deberá coincidir con el mínimo valor propio establecido.

En la Fig. 2.1. se presente un diagrama de flujo general, del método de Pisarenko para análisis espectral.

Para el cálculo de los retrasos de autocorrelación se usa la expresión (2.58), la cual considera retrasos polarizados para la función de autocorrelación, y su utilización garantiza una matriz de autocorrelación Toeplitz definida positiva; sin embargo, el ventaneo triangular implícito que considera el estimador de autocorrelación polarizado, origina que la frecuencias y potencias estimadas no sean totalmente exactas, además de introducir componentes espúreas en la descomposición espectral. Por estas razones se podría pensar en utilizar un estimador de autocorrelación no polarizado como (2.57),

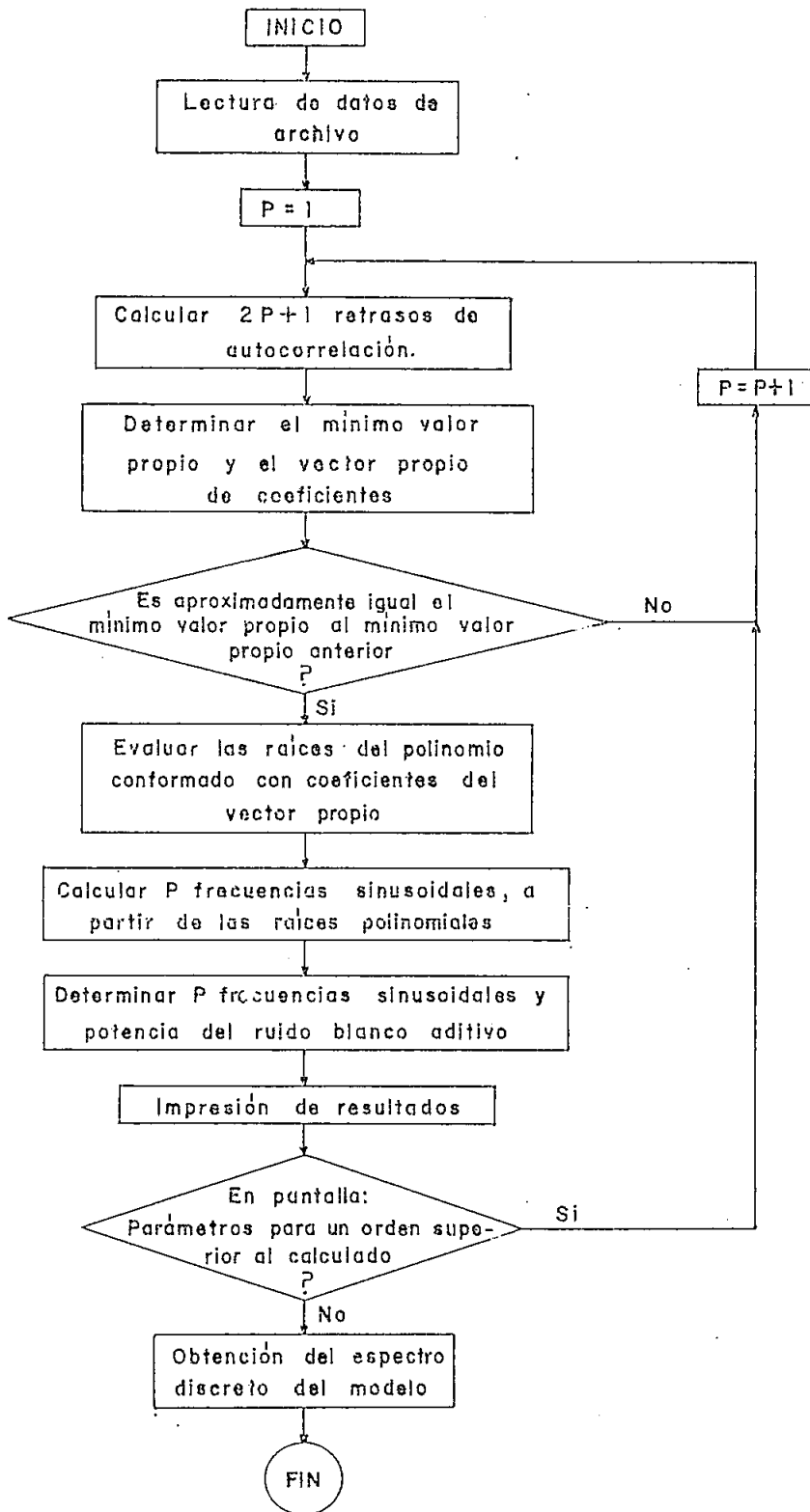


FIG. 2-1 -- Diagrama de flujo general del programa PISARENKO, que calcula las frecuencias y potencias de P sinusoides en ruido blanco aditivo.

pero la matriz de autocorrelación no está garantizada que sea definida positiva, como se requiere en la realización de la descomposición de Pisarenko y ésto puede llevar a valores propios negativos y estimaciones de frecuencia sin sentido.

Una vez que han sido calculados los retrasos de autocorrelación, se procede a estructurar la matriz Toeplitz de autocorrelación, la cual puesto que considera secuencias de datos reales, resulta simétrica ; ésto debido a que la función de autocorrelación es una función par, como se ha demostrado anteriormente. Por lo tanto la matriz de autocorrelación a estructurarse, será del siguiente tipo:

$$R_{yy} = \begin{bmatrix} R_{yy}(0) & . & . & . & . & R_{yy}(2p) \\ \vdots & & & & & \vdots \\ R_{yy}(2p) & . & . & . & . & R_{yy}(0) \end{bmatrix}$$

Para la conformación del programa computacional, debemos considerar que el índice cero no es aceptado por el computador, por esta razón los retrasos de autocorrelación a calcularse serán $R_{yy}(1) \dots R_{yy}(2p+1)$ entendiéndose que tal cambio se refiere exclusivamente a notación, ésto es, el retraso cero estará representado por $R_{yy}(1)$ en el programa.

Una vez estructurada la matriz Toeplitz de autocorrelación, se resuelve la ecuación propia (2.52) mediante el método clásico de la potencia, en el cual la secuencia de vectores:

$$A(k+1) = R_{yy}^{-1} A(k) \quad \text{para } k=1,2,\dots \quad (2.62)$$

converge con el límite, al vector propio del mínimo valor propio, para alguna suposición inicial $A(1)$. Si multiplicamos los dos miembros de la ecuación (2.62) por la matriz de autocorrelación R_{yy} , se obtendrá la ecuación:

$$R_{yy}A(k+1) = A(k) \quad (2.63)$$

la cual puede ser resuelta para el vector desconocido $A(k+1)$, dado $A(k)$. Un buen vector de inicialización, es el vector $A^T(0)=[1, \dots, 1]$ y el vector $A(\infty)$ es usualmente obtenido luego de pocas iteraciones.

El método de la potencia es un método iterativo usado frecuentemente cuando se desea conocer el mínimo y/o el máximo valor propio de una matriz. Una ventaja de este método iterativo, es que el vector propio es obtenido simultáneamente con el valor propio asociado y no requiere operaciones separadas adicionales como sucede con otros métodos. Este método es descrito a continuación. La expresión (2.52) puede ser reescrita como:

$$A = \sigma_w^2 R_{yy}^{-1} A$$

y luego:

$$R_{yy}^{-1}A = \frac{1}{\sigma_w^2} A \quad (2.64)$$

Como se indicó anteriormente esta ecuación convergerá al vector propio del mínimo valor propio, para lo cual se deben desarrollar los siguientes cuatro pasos:

1. Arbitrariamente se asumen valores para los componentes del vector propio A . Designaremos a este vector propio como $A(1)$; generalmente se escogen todos los componentes de $A(1)$ igual a la unidad. Substituyendo los componentes de $A(1)$ en el lado izquierdo de la ecuación (2.64) como los elementos de la matriz A y efectuando luego la multiplicación por la inversa de la matriz de autocorrelación, se obtiene una primera aproximación para el lado derecho de la ecuación (2.64) $\frac{1}{\sigma_w^2} A$.
2. Se normaliza el vector $\frac{1}{\sigma_w^2} A$ obtenido en el paso 1. Esto se hace dividiendo el vector por la magnitud del primer componente, reduciendo aquel componente a la unidad.
3. Los componentes del vector normalizado, son utilizados como valores mejorados de $A(i)$ y se substituyen en el lado izquierdo de la ecuación (2.64); efectuando la multiplicación se obtiene una aproximación todavía mejor del lado derecho de la ecuación (2.64).
4. Se repiten los pasos 2 y 3 hasta que la ecuación (2.64) sea esencialmente satisfecha; esto es, hasta que los componentes del vector propio en el paso 2 varien respecto de los valores previamente obtenidos, menos que algún pequeño valor ϵ preasignado, en dos iteraciones sucesivas. El inverso del factor normalizante constituirá el mínimo valor propio σ_w^2 , y los elementos de A serán los componentes del vector propio asociado con él.

Efectuando el procedimiento iterativo estamos, en efecto formando una secuencia de vectores $R_{yy}^{-1}A(1), (R_{yy}^{-1})^2A(1), (R_{yy}^{-1})^3A(1), \dots, (R_{yy}^{-1})^k A(1)$ donde $A(1)$ es el vector arbitrario inicialmente asumi

do (el nombre de método de la potencia viene del hecho que la secuencia es realizada de potencias de la matriz R_{yy}^{-1}).

En la figura 2.2. se presenta el diagrama de flujo, de la parte del programa PISARENKO que permite calcular los retrasos de autocorrelación, estructurar la matriz Toeplitz, determinar el orden P del modelo, el vector propio de coeficientes y el mínimo valor propio que constituye la potencia del ruido blanco aditivo. Las variables utilizadas en este diagrama de flujo tienen el siguiente significado:

N = número de la secuencia de datos disponible .

P = orden del modelo.

$R5(I)$ = retraso I de autocorrelación.

$T9$ = matriz Toeplitz de autocorrelación.

A = vector propio, en su inicialización es unitario, realizada la subrutina será el vector propio solución.

$L3(I)$ = mínimo valor propio (potencia del ruido) en el paso I de iteración.

$X(1)...X(N)$ = secuencia de datos muestreados disponibles.

$A2$ = vector propio normalizado auxiliar.

En base a los coeficientes del vector propio A , ya calculados, constituimos la ecuación polinomial (2.45), cuya solución estará dada por

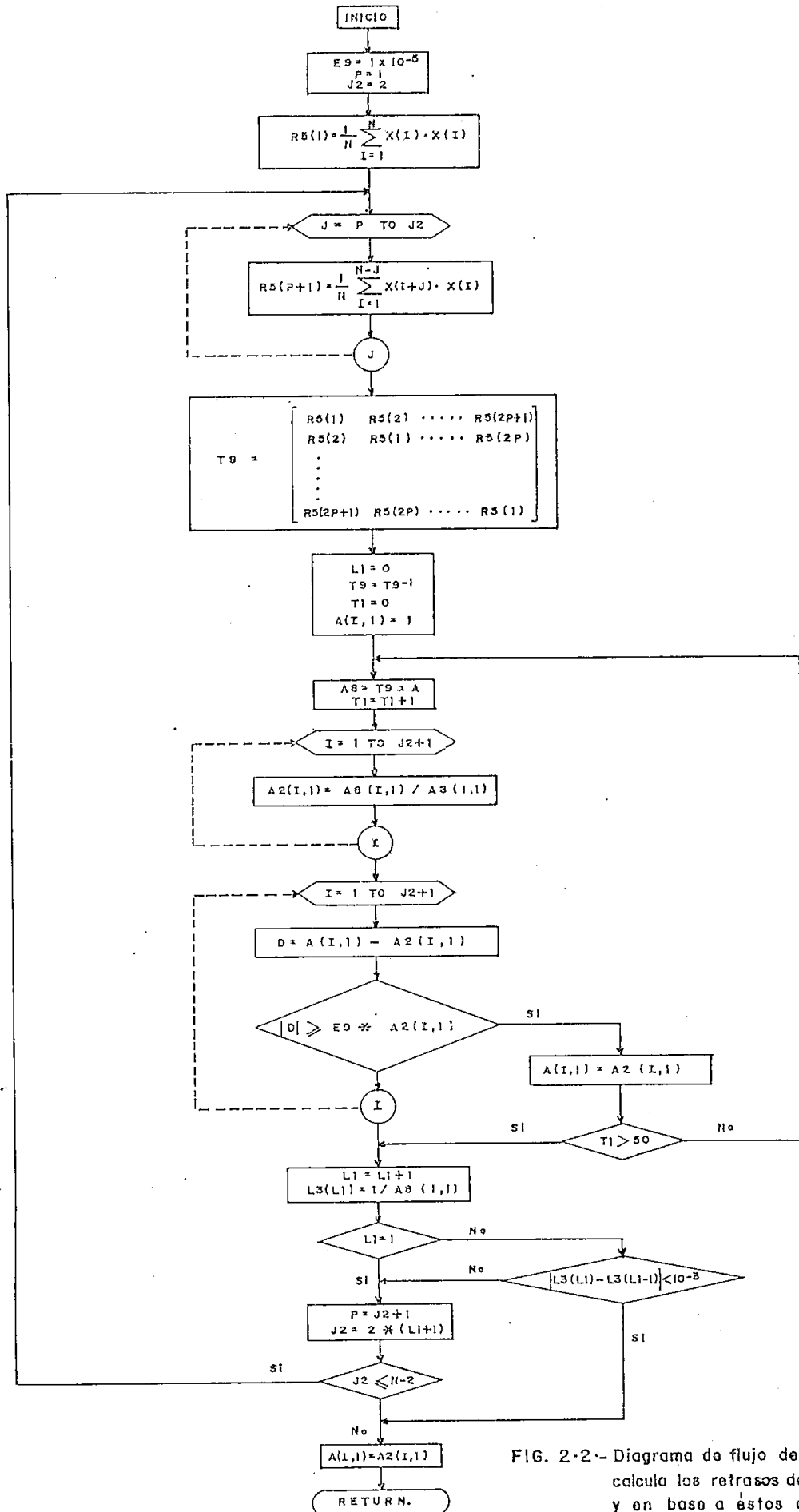


FIG. 2-2.- Diagrama de flujo de la subrutina que calcula los retrasos de autocorrelación, y en base a éstos determina el N° de sinusoides, mínimo valor propio (potencia del ruido blanco) y vector propio asociado.

el programa ECUAPOL disponible en la biblioteca de programas del computador TEKTRONIX. Las raíces que constituyen la solución serán de módulo unitario y se producirán en pares complejos conjugados como se demostró anteriormente, de acuerdo al análisis que conduce a la ecuación (2.43); por lo tanto las frecuencias se calcularán a partir de estas raíces en base a la expresión (2.43) y puesto que son obtenidas a partir de raíces complejas conjugadas, las frecuencias serán de la forma $\pm f_i$ para $i=1, \dots, p$, de las que se seleccionarán únicamente las frecuencias positivas.

Calculadas las frecuencias sinusoidales, las potencias de las sinusoides se determinarán resolviendo el sistema de ecuaciones dado por (2.61), y si consideramos el retraso cero de autocorrelación y las potencias ya calculadas, se podrá encontrar la potencia de ruido blanco aditivo mediante la ecuación (2.60) cuando $k = 0$. Este valor de potencia de ruido deberá coincidir con el mínimo valor propio encontrado en la subrutina anterior. Completado de esta manera el algoritmo computacional de la Descomposición armónica de Pisarenko, resta únicamente la impresión de resultados (frecuencias y potencias de las sinusoides, y potencia del ruido) y la grafización del espectro discreto de la señal analizada.

El diagrama de flujo de la subrutina que permite el cálculo de las frecuencias y potencias, así como la potencia del ruido blanco se presenta en la figura 2.3.

Las variables utilizadas en esta subrutina tienen la siguiente interpretación:

- R1 = vector con partes reales de las raíces.
 I1 = vector con partes imaginarias de las raíces.
 F = vector que contiene frecuencias positivas y negativas de las raíces.
 F5 = vector de frecuencias (positivas) de las sinusoides.
 R2 = matriz con términos que dependen de frecuencias sinusoidales.
 P1 = vector de las potencias sinusoidales.
 R3 = vector con p retrasos de autocorrelación.
 V8 = potencia del ruido blanco aditivo.
 N = 2P = grado del polinomio
 T2 = período de muestreo de la señal.

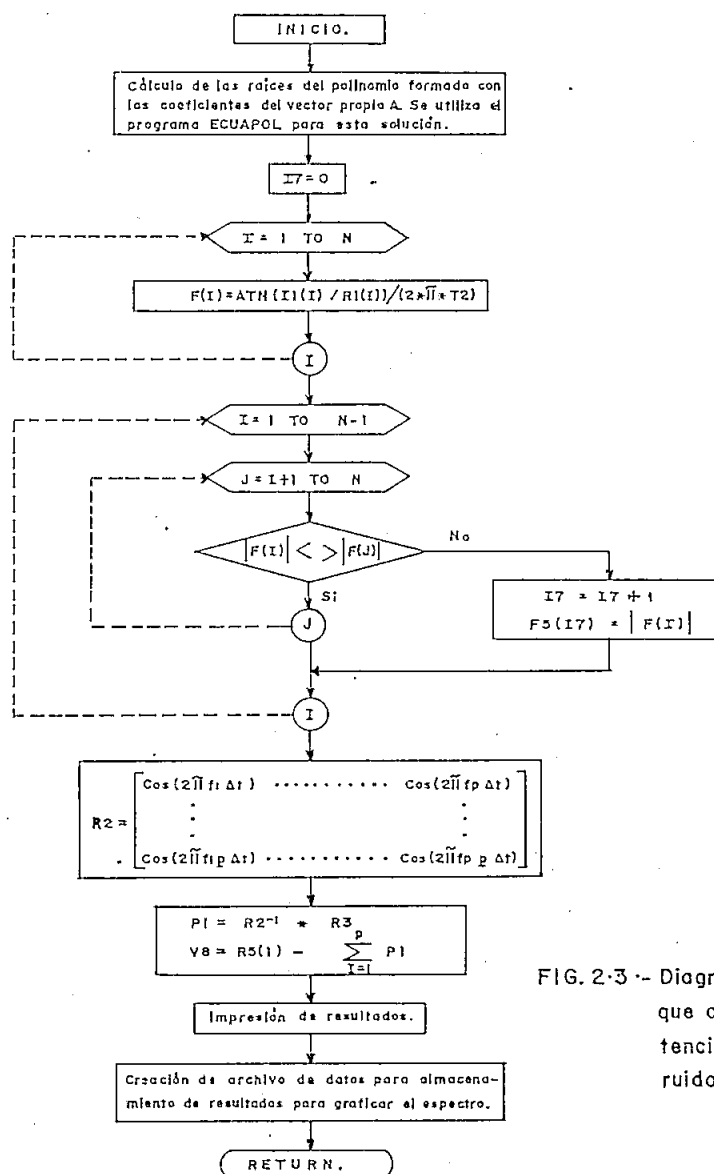


FIG. 2-3 -- Diagrama de flujo de la subrutina que calcula las frecuencias y potencias de las sinusoides y ruido blanco.

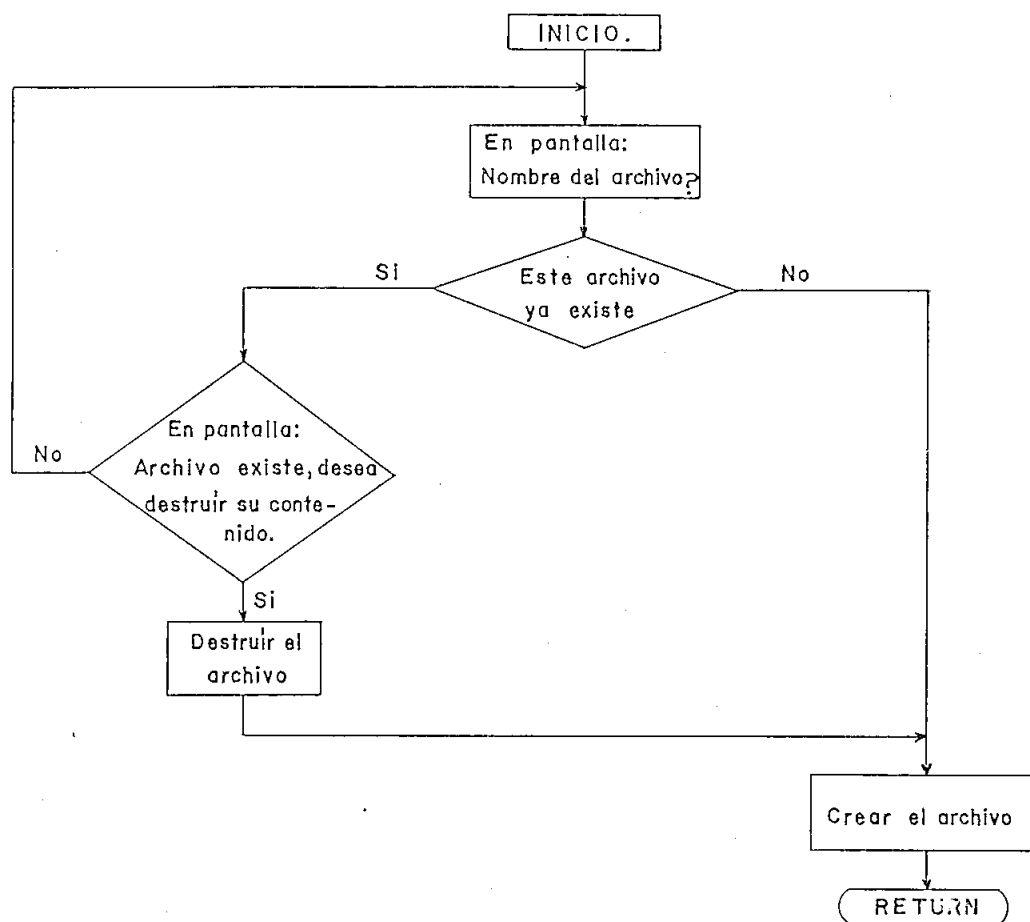


Figura 2.4. Diagrama de flujo de la subrutina que sirve para la creación de archivo de datos.

2.3: RESULTADOS EXPERIMENTALES

En esta sección presentamos los resultados obtenidos con la Descomposición armónica de Pisarenko para varias secuencias de datos reales. Por razones de comprobación las secuencias de datos reales serán muestreadas a partir de la suma de una o más señales sinusoidales de amplitud y frecuencia conocidas con ruido blanco.

Para este método, los ejemplos serán tratados con los dos tipos de estimadores de retrasos de autocorrelación, esto es, con estimadores polarizados y no polarizados, y se comprobará la mejor exactitud de resultados, cuando se utilizan los primeros estimadores. Así pues se observa que los resultados si bien es cierto son aproximados en ciertos casos, en otros carecen de sentido como sucede con la potencia del ruido en el primer ejemplo en el cual, ésta resulta de signo negativo. Igualmente en la obtención de valores propios, se tiene que algunos de ellos son de signo negativo, esto debido a que la matriz Toeplitz no es definida positiva, adicionalmente algunas de las potencias son negativas, que son resultados no válidos; con fines de grafización a estas potencias negativas se las aproxima a valores cercanos a cero, igual a $1E-10$.

Una primera secuencia de datos reales a analizarse es aquella consistente de 64 muestras obtenidas de un proceso compuesto de tres sinusoides y ruido coloreado obtenido filtrando ruido blanco Gaussiano. Las tres sinusoides están a las fracciones de la frecuencia de muestreo de 0.10, 0.20 y 0.21 y tienen relaciones señal-ruido (SNR) de +10, +30 y +30 dB respectivamente, donde SNR está definida como la relación de la potencia de la senoide a la potencia total del proceso ruidoso. El ruido pasante (coloreado) está centrado a la fracción de la frecuencia de muestreo de 0.35. La frecuencia de muestreo es $f_m = 1$ Hz.

Las potencias y frecuencias sinusoidales obtenidas son presentadas a continuación, así como la potencia del ruido y los gráficos discretos de densidad espectral de potencia; en estos gráficos el eje horizontal está en frecuencias y fracción de la frecuencia de muestreo

mientras que el eje vertical está en potencia en dB y potencia normalizada.

a) Resultados obtenidos utilizando retrasos de autocorrelación polarizados.

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL
FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA
ELECTRONICA Y TELECOMUNICACIONES

NUEVAS TECNICAS-ANALISIS ESPECTRAL FECHA: 14-FEB-85 19:33:17
=====

NUMERO DE DATOS MUESTREADOS: 64 TIEMPO DE MUESTREO: 1 SEG.
ORDEN DEL MODELO: 8 ARCHIVO DE DATOS: DATOS1

MUESTRAS DE DATOS
=====

1.29106100	-2.08636800	-1.69131600	1.24313800
1.64107200	-0.00868800	-1.65939000	-1.11146700
0.98590800	1.99197900	-0.04661300	-1.64926900
-1.04081000	1.05466500	1.85581600	-0.95118200
-1.47649500	-0.21224200	0.78020200	1.41600300
0.19920200	-2.02702600	-0.48357700	1.66491300
0.61411400	-0.79146900	-1.19531100	0.11980100
0.80763500	0.89523600	-0.01273400	-1.76384200
0.50984000	1.21289200	-0.11990500	-0.44168600
-0.87973300	0.30618100	0.79543100	0.18959800
-0.34233200	-0.32870000	0.19788100	0.07117900
0.18593100	-0.32459500	-0.36609200	0.36846700
-0.19193500	0.51911600	0.00832000	-0.42594600
0.65147000	-0.63997800	-0.34438900	0.81413000
-0.38516800	0.06421800	-0.38000800	-0.16300800
1.13096700	0.11420600	-0.66762600	-0.81499700

DESCOMPOSICION ARMONICA DE FISARENKO
=====

LAS FRECUENCIAS DE LAS SINUSOIDES DE LA SENAL SON:

- F(1)= 0.2251964
- F(2)= 0.4013811
- F(3)= 0.2001820
- F(4)= 0.0934350
- F(5)= 0.1553312

```
F(6)= 0.1723001
F(7)= 0.4042692
F(8)= 0.3569253
```

LA POTENCIA DEL RUIDO ES: -0.0012214

LAS POTENCIAS DE LAS SINUSOIDES SON:

```
P(1)= 0.0515364
P(2)= 0.0063822
P(3)= 0.0057752
P(4)= 0.6653810
P(5)= 0.0929567
P(6)= 0.0193137
P(7)= 0.0336344
P(8)= 0.0521133
```

EJEMPLO 2

Considera dos sinusoides de 3 y 4 Hz, de amplitud unitaria, con ruido blanco aditivo de varianza $S = 0.1$. Las sinusoides son muestradas con una frecuencia $f_m = 10$ Hz, obteniéndose 64 muestras. Seguidamente se presentan los resultados obtenidos de frecuencias y potencias de la señal analizada, así como los gráficos de densidad espectral de potencia.

a) Resultados obtenidos utilizando retrasos de autocorrelación polarizados.

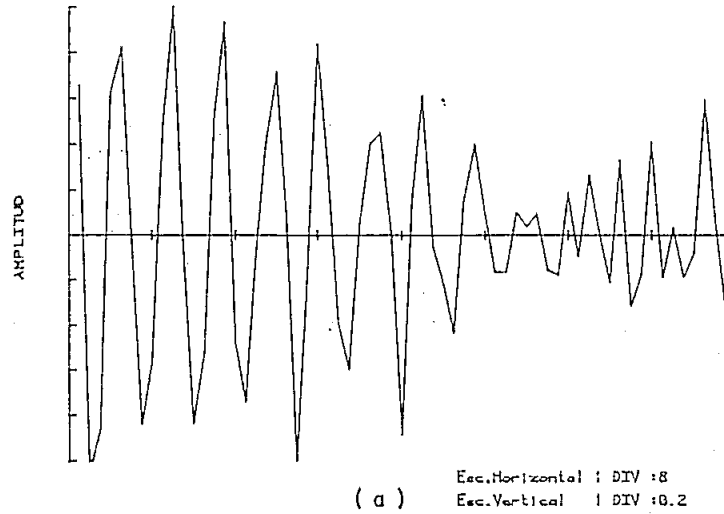
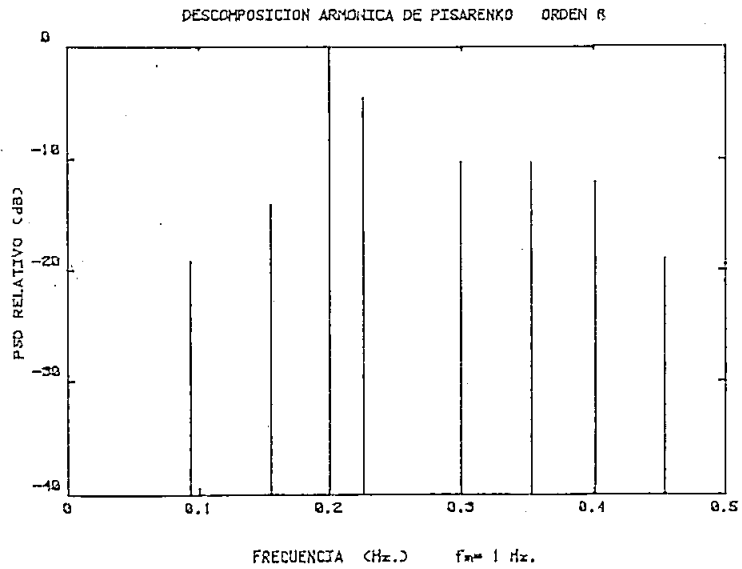
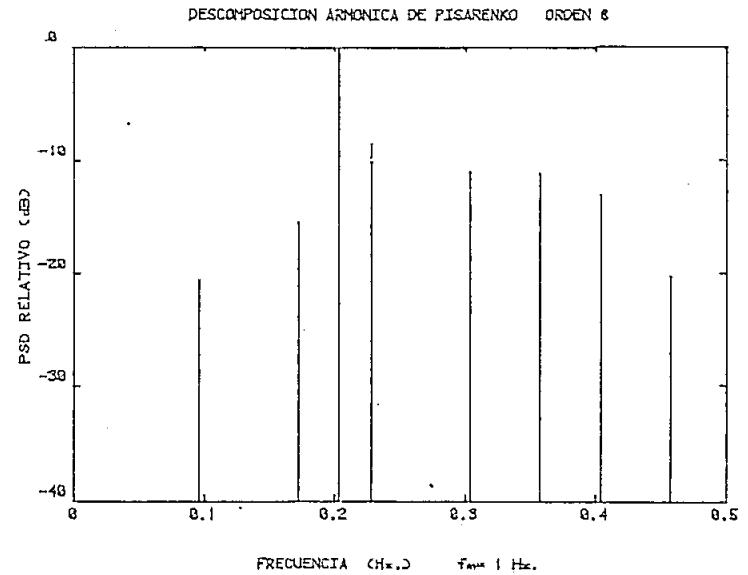


FIG. 2.5.- Análisis de tres sinusoidas a: 0.10, 0.20 y 0.21 fracciones de frecuencia de muestreo en ruido coloreado, mediante PHD.

- a) Muestras de datos
- b) PHD con retrasos polarizados
- c) PHD con retrasos NO polarizados



(b)



(c)

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL
 FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA
 ELECTRÓNICA Y TELECOMUNICACIONES

EVAN TÉCNICAS-ANÁLISIS ESPECTRAL

FECHA:15-FEB-85 07:50:56

MEME DE DATOS MUESTREADOS: 64
 DEN DEL MODELO: 4

TIEMPO DE MUESTREO: 0.1 SEG.
 ARCHIVO DE DATOS: DATOS2

MUESTRAS DE DATOS

===== == =====

0.07598054	1.85203808	-1.55709838	0.41283798
0.36416680	0.31060864	-0.10343451	-0.13264017
2.32456704	-1.31513622	0.02426951	1.47960742
-2.77057401	0.37622711	0.29646626	0.12223819
-0.48723496	-0.27698741	1.82217462	-1.39260252
-0.26182360	1.50892935	-1.61855130	0.43490074
0.42655580	0.19365853	-0.57583737	-0.13430252
2.58609565	-1.51643719	-0.12681091	1.50928241
-1.59935394	0.35492436	0.22645250	-0.13887067
0.33214902	-0.42760309	1.73240357	-1.59780050
-0.02259979	1.54333640	-1.61173181	0.19268119
0.36930844	-0.02052316	-0.45939044	-0.20903539
2.46826888	-1.47294501	-0.03540871	1.31303247
-2.41038833	0.32162548	0.65886642	0.08661134
-0.33986716	-0.29655732	1.60372686	-1.32918151
-0.01564335	1.78656190	-1.53577711	0.39155101

DESCOMPOSICION ARMONICA DE FISARENKO

===== == =====

LAS FRECUENCIAS DE LAS SINUSOIDES DE LA SENAL SON:

F(1)= 4.4089604
 F(2)= 2.9980848
 F(3)= 3.9635319
 F(4)= 2.2850423

LA POTENCIA DEL RUIDO ES: 0.0299500

LAS POTENCIAS DE LAS SINUSOIDES SON:

P(1)= 0,0663803
 P(2)= 0,4919766
 P(3)= 0,4377333
 P(4)= 0,0085812

b) Resultados obtenidos utilizando retrasos de autocorrelación no polarizados.

DESCOMPOSICION ARMONICA DE FISARENKO

=====

LAS FRECUENCIAS DE LAS SINUSOIDES DE LA SENAL SON:

F(1)= 0,7467054
 F(2)= 4,0083503
 F(3)= 1,7875410
 F(4)= 2,9996760

LA POTENCIA DEL RUIDO ES: 0,0864192

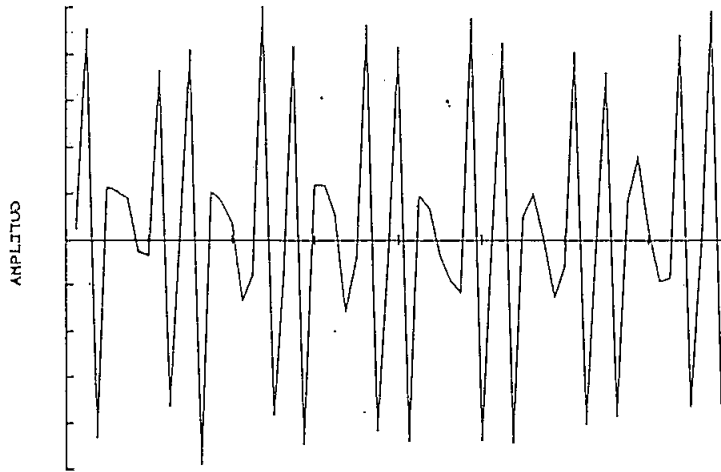
LAS POTENCIAS DE LAS SINUSOIDES SON:

P(1)= 0,0000000
 P(2)= 0,4841466
 P(3)= 0,0000000
 P(4)= 0,4964924

EJEMPLO 3

El proceso consiste de 3 sinusoides de amplitudes 3, 6, 1.5 y frecuencias de 4, 6 y 1 Hz y fases de 15°, 0°, 60° respectivamente, las cuales son muestreadas con un tiempo de 0.05 seg., para un total de 64 muestras.

MUESTRAS DE DATOS NUMERO: 01



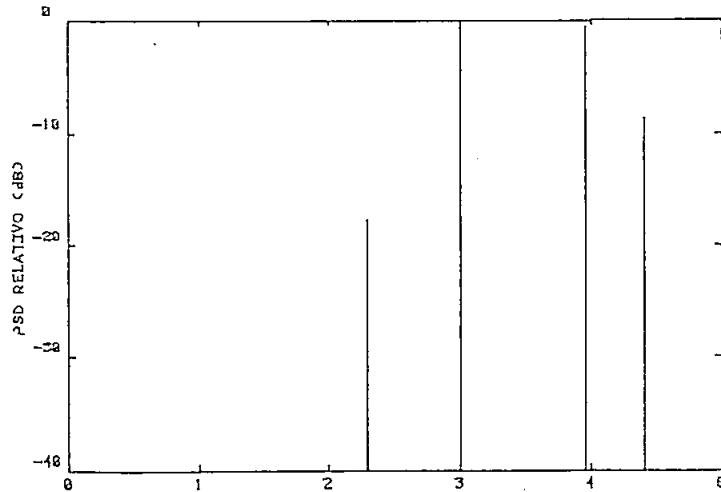
Esc. Horizontal 1 DIV : 8
Esc. Vertical 1 DIV : 0.2

(a)

FIG 2.6.- Análisis de dos sinusoidas de 3 y 4 Hz.
e igual amplitud, en ruido blanco.

- a) Muestras de datos
- b) PHD con retrasos polarizados
- c) PHD con retrasos NO polarizados

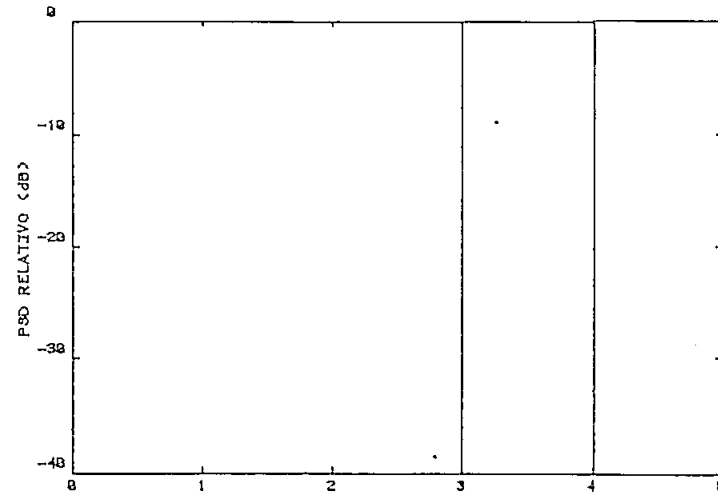
DESCOMPOSICION ARMONICA DE PISARENKO ORDEN 4



f_m = 10 Hz.

(b)

DESCOMPOSICION ARMONICA DE PISARENKO ORDEN 4



f_m = 10 Hz.

(c)

A estas sinusoides se les añade ruido blanco de varianza $S = 0.2$, obteniéndose los siguientes valores de amplitudes, potencias y densidad espectral de potencia.

a) Resultados obtenidos utilizando retrasos de autocorrelación polarizados.

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL
FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA
ELECTRONICA Y TELECOMUNICACIONES

NUEVAS TECNICAS-ANALISIS ESPECTRAL FECHA: 15-FEB-85 14:43:53
=====

NUMERO DE DATOS MUESTREADOS: 64 TIEMPO DE MUESTREO: 0.05 SEG.
ORDEN DEL MODELO: 5 ARCHIVO DE DATOS: DATOS4

MUESTRAS DE DATOS
=====

1.81919545	10.29815910	-0.88334159	-4.27639274
4.11065640	1.52046710	-2.27950793	4.44134897
0.82541604	-9.40009090	-0.26167248	7.20492508
-3.90718409	-7.04178103	1.98633773	0.45541936
-3.00320443	4.57853098	1.94103895	-7.19369163
2.47063514	10.14678533	-0.99970772	-4.25114451
4.38986000	1.53236321	-2.38419983	4.13699825
0.50743651	-8.94354191	-0.28697570	7.10686596
-3.89909018	-7.38472998	2.19056943	-0.02959994
-3.10134925	4.90389902	1.88675310	-7.38251291
1.84407145	10.33268642	-0.87188383	-4.80352994
4.20590947	1.58677516	-2.64383325	4.17407009
0.74457610	-9.00341877	-0.59146668	7.28060458
-3.95926541	-6.97761884	2.10633146	-0.23141843
-3.04791346	4.66795980	1.67941601	-7.05339040
2.00453429	9.80791427	-1.27940142	-4.57094676

DESCOMPOSICION ARMONICA DE PISARENKO
=====

LAS FRECUENCIAS DE LAS SINUSOIDES DE LA SENAL SON:

F(1)= 4.1892345
F(2)= 1.0009733
F(3)= 3.5082419
F(4)= 7.0527289
F(5)= 5.9985288

LA POTENCIA DEL RUIDO ES: 0,4379879

LAS POTENCIAS DE LAS SINUSOIDES SON:

P(1)= 3,7221908
 P(2)= 1,1862142
 P(3)= 1,3490052
 P(4)= 0,4290589
 P(5)= 16,7283112

b) Resultados obtenidos utilizando retrasos de autocorrelación no polarizados.

DESCOMPOSICION ARMONICA DE FISARENKO
 =====

LAS FRECUENCIAS DE LAS SINUSOIDES DE LA SENAL SON:

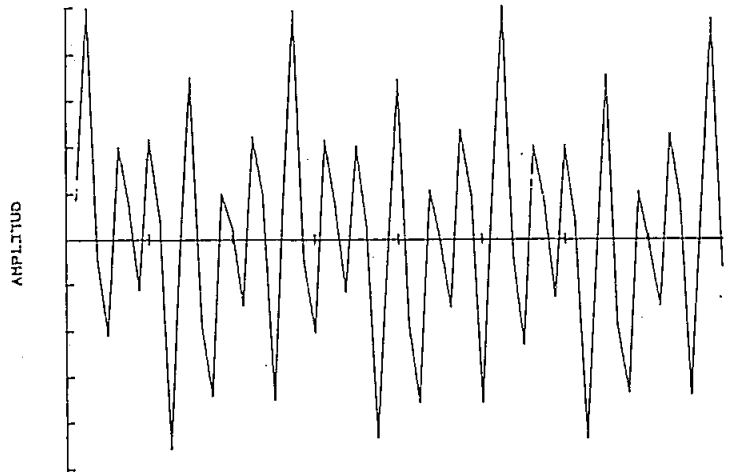
F(1)= 7,6660706
 F(2)= 1,0925484
 F(3)= 3,9730603
 F(4)= 6,0007349

LA POTENCIA DEL RUIDO ES: 0,1203022

LAS POTENCIAS DE LAS SINUSOIDES SON:

F(1)= 0,0000000
 P(2)= 1,2511571
 P(3)= 4,6740852
 P(4)= 17,9416099

MUESTRAS DE DATOS NUMERO: 64

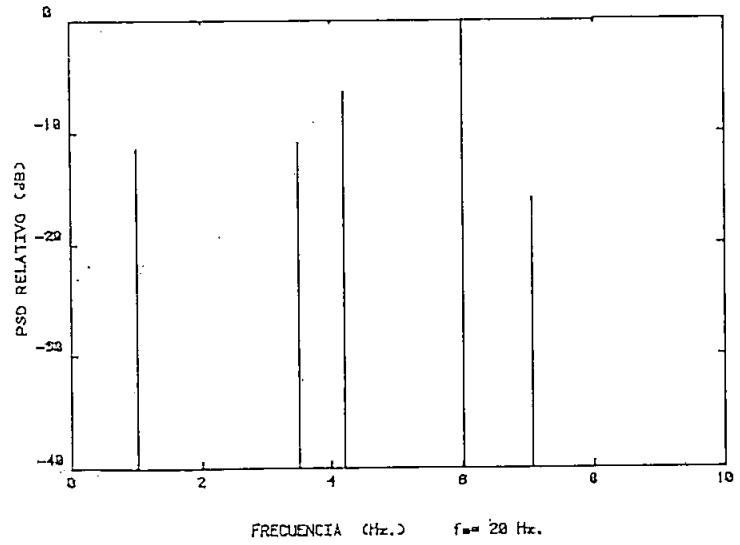


(a) Esc.Horizontal : DIV :6
Esc.Vertical : DIV :0.2

FIG. 2.7 - Análisis de tres sinusoides de frecuencias 1, 4 y 6 Hz. con diferente amplitud y fase en ruido blanco.

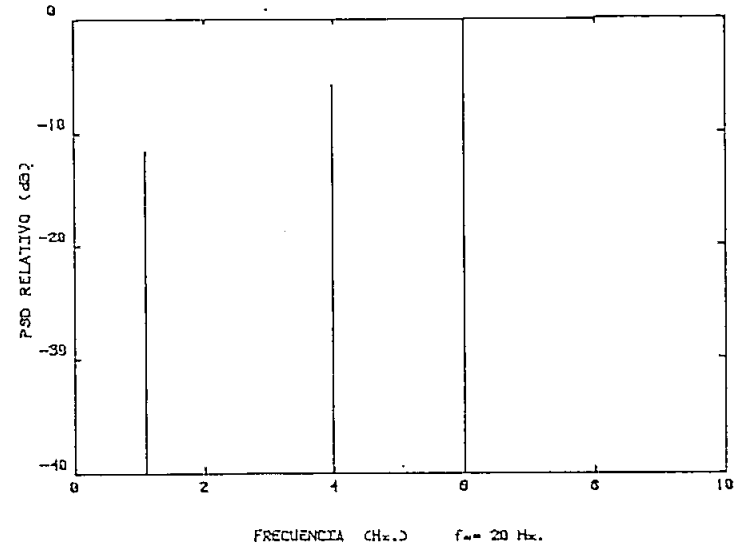
- a) Muestras de datos
- b) PHD con retrasos polarizados
- c) PHD con retrasos NO polarizados

DESCOMPOSICION ARMONICA DE PISARENKO ORDEN 5



(b)

DESCOMPOSICION ARMONICA DE PISARENKO ORDEN 4



(c)

CAPITULO III

METODO DE PRONY EXTENDIDO

3.1. ANALISIS Y DESCRIPCION DEL METODO

Cuando se disponen de datos de muestras igualmente espaciales que corresponden a un proceso de superposición de dos o más armónicos amortiguados o simples (no amortiguados), de períodos desconocidos, y se desea analizar este proceso, entonces estos datos pueden ser modelados por una combinación lineal de funciones exponenciales complejas. El procedimiento original de Prony ajusta exactamente una curva de p términos exponenciales (cada término tiene dos parámetros, una amplitud A_i y un exponente α_i , donde $A_i \exp(\alpha_i t)$) para $2p$ datos medidos. Para el caso donde solamente se desea un ajuste aproximado con p exponenciales para un conjunto de N muestras, tal que $N > 2p$, se utiliza un procedimiento de estimación de mínimos cuadrados. Este procedimiento es llamado el método de Prony extendido.

El modelo asumido en el método de Prony extendido es un conjunto de p exponenciales de amplitud, fase, frecuencia y factor de amortiguamiento arbitrario. El proceso a ser analizado será representado, por lo tanto, en forma aproximada como una función discreta de tiempo.

$$x_n \approx b_1 z_1^n + b_2 z_2^n + \dots + b_p z_p^n \quad (3.1)$$

Si consideramos que \tilde{x}_n representa la estimación de x_n , entonces \tilde{x}_n puede expresarse en la forma:

$$\hat{x}_n = \sum_{m=1}^p b_m z_m^n \quad \text{para } n=0, \dots, N-1 \quad (3.2)$$

En forma general b_m y z_m se asumen complejos y corresponden a:

$$b_m = A_m \exp(j\theta_m)$$

$$z_m = \exp[(\alpha_m + j2\pi f_m) \Delta t]$$

donde A_m es la amplitud, θ_m es la fase en radianes, α_m es un factor de amortiguamiento, f_m es la frecuencia de oscilación en hertz y Δt representa el intervalo de muestreo en segundos.

3.1.1. Obtención de frecuencias y factores de amortiguamiento de las exponenciales

Si se considera que se dispone de una secuencia de N datos medidos x_0, \dots, x_{N-1} , que corresponden a $n=0, \dots, N-1$, entonces la expresión (3.1), debe ser satisfecha para estos valores de n y para los valores estimados $\hat{x}_0, \dots, \hat{x}_{N-1}$ de los datos medidos, estableciéndose el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} b_1 + b_2 + \dots + b_p &= \hat{x}_0 \\ b_1 z_1 + b_2 z_2 + \dots + b_p z_p &= \hat{x}_1 \\ b_1 z_1^2 + b_2 z_2^2 + \dots + b_p z_p^2 &= \hat{x}_2 \\ &\dots \\ b_1 z_1^{N-1} + b_2 z_2^{N-1} + \dots + b_p z_p^{N-1} &= \hat{x}_{N-1} \end{aligned} \quad (3.4)$$

La aproximación (3.1) puede estar basada en satisfacer estas ecua-

ciones tan aproximadamente como sea posible. Si las exponenciales z_1, \dots, z_p fueran conocidas, este conjunto contendría N ecuaciones lineales en función de las p incógnitas b_1, \dots, b_p y podría ser resuelta exactamente si $N = p$ o aproximadamente por el método de mínimos cuadrados, si $N > p$.

Sin embargo si los z_1, \dots, z_p también van a ser determinados, se requieren al menos $2p$ ecuaciones; la dificultad surge en el hecho de que las ecuaciones son no lineales en los z_{in} y por lo tanto encontrar los valores de $\{A_m, \theta_m, \alpha_m, f_m\}$ y p que minimizan el error cuadrático de:

$$G = \sum_{n=0}^{N-1} |x_n - \hat{x}_n|^2 \quad (3.5)$$

es un problema no lineal de mínimos cuadrados difícil de resolver. La solución involucra un proceso iterativo en el cual una suposición inicial de los parámetros desconocidos se mejora sucesivamente. McDonough y Huggins¹³ y Holtz¹² proporcionan un programa iterativo para la solución de (3.5). Una solución alterna que no minimiza (3.5) pero que proporciona resultados satisfactorios, está basada en la técnica de Prony, la cual va a ser descrita a continuación.

El método de Prony resuelve dos conjuntos secuenciales de ecuaciones lineales con un paso intermedio de obtención de raíces de un polinomio, paso que concentra el problema de la no linealidad.

Sean z_1, \dots, z_p , las raíces de la ecuación algebraica:

$$z^p + a_1 z^{p-1} + a_2 z^{p-2} + \dots + a_p = 0 \quad (3.6)$$

de modo que el miembro izquierdo de (3.6) se identifica con el pro ducto:

$$(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_p)$$

En forma simplificada podemos representar la ecuación (3.6) como

$$\prod_{k=1}^p (z - z_k) = \sum_{i=0}^p a_i z^{p-i} = 0, \quad a_0 = 1$$

De esta manera, la ecuación polinomial tiene como sus raíces, los exponenciales complejos z_k , definidos en (3.3). Estas raíces com plejas, así como los parámetros complejos b_m , especificados en (3.3) deberán ser obtenidos en pares complejos conjugados, en orden a te ner cantidades reales en las expresiones del lado izquierdo del sis tema (3.4), correspondientes a valores reales de la secuencia de datos muestreados x_0, \dots, x_{N-1} , ya que en la práctica la gran mayo ría de señales disponibles, corresponden a procesos reales y no complejos.

Con el objeto de determinar los coeficientes a_1, \dots, a_p multipli caremos la primera ecuación de (3.4) por a_p , la segunda ecuación por a_{p-1} , ..., la p -ésima ecuación por a_1 , y la $(p+1)$ ecuación por 1 y sumamos los resultados; si se hace uso del hecho de que cada uno de los z_m debe satisfacer la ecuación (3.6), se llega a una expre sión que tiene la siguiente forma:

$$\hat{x}_p + a_1 \hat{x}_{p-1} + \dots + a_p \hat{x}_0 = 0$$

Un conjunto de $N-p-1$ ecuaciones adicionales de tipo similar, se obtienen en la misma forma, si comenzamos sucesivamente con la segunda, tercera, ..., $(N-p)$ -ésima ecuaciones. Y de esta manera encontramos que (3.4) y (3.6) implican el conjunto de $N-p$ ecuaciones lineales que se indican a continuación:

$$\begin{aligned} \hat{x}_p + a_1 \hat{x}_{p-1} + a_2 \hat{x}_{p-2} + \dots + a_p \hat{x}_0 &= 0 \\ \hat{x}_{p+1} + a_1 \hat{x}_p + a_2 \hat{x}_{p-1} + \dots + a_p \hat{x}_1 &= 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ \hat{x}_{N-1} + a_1 \hat{x}_{N-2} + a_2 \hat{x}_{N-3} + \dots + a_p \hat{x}_{N-p-1} &= 0 \end{aligned} \quad (3.7.a)$$

Este conjunto de ecuaciones, se puede representar por lo tanto por la ecuación recursiva de diferencias:

$$\hat{x}_n = - \sum_{m=1}^p a_m \hat{x}_{n-m} \quad (3.7.b)$$

definida para $p \leq n \leq N-1$, la misma que tiene como solución homogénea la función discreta de tiempo, expresada en (3.2). De esta manera los parámetros exponenciales se encuentran evaluando el polinomio (3.6), usando los coeficientes a_m .

Para establecer el método de Prony extendido, primero definimos la diferencia e_n entre los datos medidos x_n y los datos estimados o aproximados \hat{x}_n .

$$x_n = \hat{x}_n + e_n \quad (3.8)$$

definida para $0 \leq n \leq N-1$. Si en la última expresión se substituye (3.7.b) se tendrá:

$$\begin{aligned} x_n &= - \sum_{m=1}^p a_m \hat{x}_{n-m} + e_n \\ &= - \sum_{m=1}^p a_m x_{n-m} + \sum_{m=0}^p a_m e_{n-m} \end{aligned} \quad (3.9)$$

definida para $p \leq n \leq N-1$, y donde se ha hecho uso de la relación $\hat{x}_{n-m} = x_{n-m} - e_{n-m}$.

Basados en (3.9), podemos establecer un modelo alternativo que corresponde a un proceso de suma de exponenciales más ruido blanco aditivo, el cual es un modelo ARMA con parámetros AR y MA idénticos.

Puesto que el método determina los armónicos de señales en general amortiguadas, las raíces obtenidas de la ecuación polinomial (3.6), serán de módulo no unitario y por lo tanto los coeficientes a_j no serán forzados a ser simétricos a diferencia de la técnica de Pisarenko. Debido a que las raíces se establecerán en pares complejos, como ya se indicó anteriormente, el número de parámetros a_j tiene que ser el doble al número de armónicos que contiene la señal que está siendo analizada.

El verdadero método de mínimos cuadrados para la obtención de parámetros, establece que se debe minimizar

$$\sum_{n=p}^{N-1} |e_n|^2$$

pero esta minimización lleva a un conjunto de ecuaciones lineales que son difíciles de resolver, motivo por el cual el método de Prony extendido que es utilizado en este caso, define:

$$\epsilon_n = \sum_{m=0}^p a_m e_{n-m} \quad \text{para } n=p, \dots, N-1 \quad (3.10)$$

de modo que:

$$x_n = - \sum_{m=1}^p a_m x_{n-m} + \epsilon_n \quad (3.11)$$

De esta manera, la técnica de Prony extendido determina que se debe minimizar $\sum_{n=p}^{N-1} |\epsilon_n|^2$, más bien que $\sum_{n=p}^{N-1} |e_n|^2$, y el procedimiento de obtención de parámetros se reduce a una estimación de parámetros AR.

Designemos como E_p la energía de error de predicción, la cual está definida como:

$$E_p = \sum_{n=p}^{N-1} |\epsilon_n|^2 \quad (3.12)$$

La última expresión, de acuerdo a (3.11) puede escribirse como:

$$E_p = \sum_{n=p}^{N-1} \left| \sum_{m=0}^p a_m x_{n-m} \right|^2 \quad (3.13)$$

Para obtener la mínima de energía de error de predicción, se debe

derivar E_p con respecto al conjunto de parámetros $\{a_m\}$ e igualar a cero; algebraicamente el proceso establecido es el siguiente:

$$\frac{\partial E_p}{\partial a_m} = \frac{\partial}{\partial a_m} \left(\sum_{n=p}^{N-1} \left| \sum_{m=0}^p a_m x_{n-m} \right|^2 \right)$$

$$2 \sum_{n=p}^{N-1} \sum_{m=0}^p (a_m x_{n-m}) x_{n-i} = 0$$

$$\sum_{m=0}^p a_m \left(\sum_{n=p}^{N-1} x_{n-m} x_{n-i} \right) = 0 \quad \text{para } 1 \leq i \leq p \quad (3.14)$$

Estas ecuaciones resultantes, se resuelven para los parámetros AR, llegándose a obtener la siguiente mínima energía de error de predicción:

$$E_p = \sum_{m=0}^p a_m \left(\sum_{n=p}^{N-1} x_{n-m} x_n \right) \quad (3.15)$$

Las expresiones (3.14) y (3.15) pueden ser reformuladas como ecuaciones normales, de la siguiente manera:

$$(X^T X)A = \begin{bmatrix} E_p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

donde:

$$X = \begin{bmatrix} x_p & x_{p-1} & \dots & x_0 \\ x_{p+1} & x_p & \dots & x_1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{N-1} & \dots & \dots & x_{N-p-1} \end{bmatrix}$$

$$A^T = [1 \quad a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_p]$$

Las ecuaciones normales (3.16) se denominan ecuaciones de covariancia, se debe notar que el producto de las matrices de datos ($X^T X$) tiene una estructura no necesariamente Toeplitz, como sucede con la matriz de autocorrelación, en el caso de la técnica de Pisarenko.

En este análisis debemos considerar que ϵ_n representa la diferencia entre x_n y su predicción lineal basada en p muestras de datos anteriores, mientras tanto e_n constituye la diferencia entre x_n y su aproximación exponencial.

3.1.2. Cálculo iterativo del orden del modelo

Para determinar el orden del modelo o número de exponenciales p , se utilizan las técnicas de selección de orden AR; estas técnicas están basadas en calcular algún criterio del error, que determine cual orden del modelo se debe escoger. Si el orden asumido es muy bajo, entonces se tendrá una estimación espectral altamente aplanaada y por lo tanto carente de información, en cambio si se selecciona un orden muy alto, en la respuesta espectral se introducirán componentes espúreas, como son las componentes de frecuencia cero. El orden del modelo debe ser determinado incrementándose el orden hasta el punto en el cual se alcance el mínimo valor de error de predicción; pero este criterio no puede ser único ya que en algunos casos la potencia de error de predicción, decrece monotonamente cuando se incrementa el orden p .

El criterio que se toma para determinar el orden, es aquel sugerido por Akaike ¹¹ denominado criterio de error de predicción final (FPE). Este criterio selecciona el orden, de modo que el promedio de error para un paso de predicción sea minimizado.

La FPE para un proceso AR está definida como:

$$FPE = E_p \left(\frac{N + p + 1}{N - p - 1} \right) \quad (3.17)$$

donde N es el número de datos muestreados. El término en paréntesis decrementa la FPE cuando p se aproxima a N y el orden p es seleccionado para el paso en el cual FPE es mínimo.

3.1.3. Obtención de las amplitudes y fases de las exponenciales

Una vez que los parámetros a_m han sido calculados y a partir de éstos se ha encontrado las raíces polinomiales, resolviendo (3.6), la expresión (3.2) se reduce a un conjunto de ecuaciones lineales expresable en forma matricial como:

$$\Phi B = \hat{X} \quad (3.18)$$

donde:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ z_1 & z_2 & \dots & z_p \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ z_1^{N-1} & z_2^{N-1} & \dots & z_p^{N-1} \end{bmatrix}$$

$$B = [b_1 \dots b_p]^T$$

$$\hat{X} = [\hat{x}_0 \dots \hat{x}_{N-1}]^T$$

Para determinar los parámetros b_m , tendremos que aplicar el criterio de mínimos cuadrados entre los datos medidos x_n y los datos es timados \hat{x}_n , considerando además la expresión (3.18). Para mini mizar $\sum_{n=0}^{N-1} (x_n - \hat{x}_n)^2$, se derivará esta última expresión respecto a los coeficientes b_m , y el resultado se igualará a cero, llevando por lo tanto esta descripción al siguiente análisis matricial:

$$\frac{\partial}{\partial B} [X - \hat{X}]^2 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial B} [X - \phi B]^2 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial B} [X^2 - 2\phi B X + (\phi B)^2] = 0$$

$$- 2\phi X + 2\phi^2 B = 0$$

$$\phi B = X$$

De esta última expresión se podría pensar en obtener directamente la matriz de coeficientes B, si se multiplica la inversa de la ma triz ϕ por la matriz de datos X, pero puesto que la inversa de una matriz que no es cuadrada no se puede obtener, entonces ϕ^{-1} no exis te por lo tanto se tendrá que estructurar una matriz cuadrada para obtener su inversa. Si pre-multiplicamos a los dos miembros de la última ecuación por ϕ^H , donde H indica matriz compleja conjugada -

transpuesta, se tiene:

$$\Phi^H \Phi B = \Phi^H X$$

expresión en la cual puede comprobarse que $\Phi^H \Phi$ constituye una matriz cuadrada; por lo tanto de esta última igualdad se llega finalmente a obtenerse los parámetros b_m , que en forma matricial estarán dados por:

$$B = (\Phi^H \Phi)^{-1} \Phi^H X \quad (3.19)$$

En resumen, el determinar los parámetros a_j por una estimación de mínimos cuadrados, las raíces del polinomio conformado con los coeficientes a_j , y luego resolver para los parámetros b_j , constituye el método de Prony extendido.

Como ya se indicó anteriormente, únicamente se considera en el presente trabajo señales que corresponden a procesos reales, que son las que frecuentemente se encuentran en las aplicaciones prácticas de análisis espectral y por lo tanto los parámetros complejos b_j son obtenidos en pares complejos conjugados, puesto que las raíces z_k también se generaron en pares complejos conjugados. De este análisis se concluye que la ecuación (3.2) para procesos puramente reales puede ser escrita como:

$$\hat{x}_n = \sum_{m=1}^p (b_m z_m^n + b_m^* z_m^{*n}) = \sum_{m=1}^p A_m e^{\alpha_m n} \cos(2\pi f_m n \Delta t + \theta_m) \quad (3.20)$$

donde:

$$b_m = \frac{A_m}{2} \exp(j\theta_m)$$

$$z_m = \exp [(\alpha_m + j2 f_m) \Delta t] \quad (3.21)$$

Para obtener la amplitud A_i , la fase θ_i , el factor de amortiguamiento α_i y la frecuencia f_i de cada una de las exponenciales, se considerará la expresión (3.21) a partir de la cual se tendrá que:

$$A_i = 2 |b_i|$$

$$\theta_i = \tan^{-1} [\text{Im}(b_i)/\text{Re}(b_i)]$$

$$\alpha_i = \ln |z_i|/\Delta t$$

$$f_i = \tan^{-1} [\text{Im}(z_i)/\text{Re}(z_i)]/2\pi\Delta t \quad (3.22)$$

3.1.4. Cálculo del espectro Prony

Normalmente el método de Prony se completa con la obtención de su espectro, para lo cual se hace la suposición de que el modelo del proceso tiene simetría como se indica en la figura 3.1. para una senoide real amortiguada. Puesto que para análisis espectral únicamente se consideran las frecuencias positivas y no sus

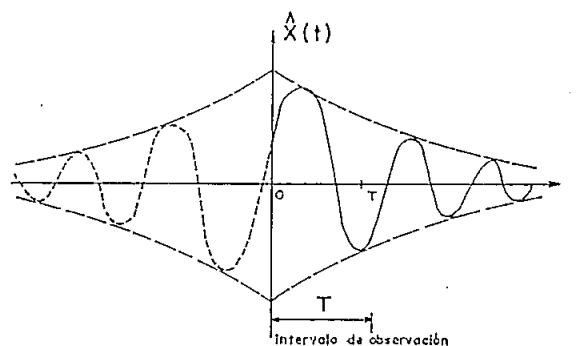


Fig. 3-1.- Modelo exponencial simétrico.

equivalentes negativas. Un modelo útil para la función aproximada $x(t)$, se obtiene a partir de las ecuaciones (3.2) y (3.3) y es aquel definido como:

$$\hat{x}(t) = \sum_{m=1}^p A_m \exp(\alpha_m |t|) \exp(j[2\pi f_m t + \theta_m]) \quad (3.23)$$

definida para $-\infty < t < \infty$. Además se asume que todos los factores de amortiguamiento son negativos, de modo que se obtengan exponenciales decrecientes. Observando (3.23), notamos que es una expresión determinística y su densidad espectral de energía (ESD) es:

$$\hat{S}_{\text{PRONY}}(f) = |\hat{X}(f)|^2 \quad (3.24)$$

donde $\hat{X}(f)$ es calculado a partir de la transformada de Fourier de (3.23). Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \hat{X}(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(t) \exp(-j2\pi ft) dt \\ \hat{X}(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^p A_m \exp(\alpha_m |t|) \exp(j[2\pi f_m t + \theta_m]) \exp(-j2\pi ft) dt \\ &= \int_{-\infty}^0 \sum_{m=1}^p A_m \exp(\alpha_m t) \exp(j2\pi[f_m - f]t + j\theta_m) dt + \\ &+ \int_0^{\infty} \sum_{m=1}^p A_m \exp(-\alpha_m t) \exp(j2\pi[f_m - f]t + j\theta_m) dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{m=1}^p A_m \exp(j\theta_m) \frac{\exp(\alpha_m t + j2\pi[f_m - f] t)}{\alpha_m + j2\pi[f_m - f]} \Bigg|_{-\infty}^0 + \\
&+ \sum_{m=1}^p A_m \exp(j\theta_m) \frac{\exp(-\alpha_m t + j2\pi[f_m - f] t)}{-\alpha_m + j2\pi[f_m - f]} \Bigg|_0^{\infty} \\
&= \sum_{m=1}^p A_m \exp(j\theta_m) \left\{ \frac{1}{\alpha_m + j2\pi[f_m - f]} + \frac{-1}{-(\alpha_m - j2\pi[f_m - f])} \right\} \\
&= \sum_{m=1}^p A_m \exp(j\theta_m) \frac{2\alpha_m}{\alpha_m^2 + (2\pi[f_m - f])^2} \quad (3.25)
\end{aligned}$$

De las expresiones (3.24) y (3.25) obtenemos el espectro del método de Prony extendido. Se puede notar que la estimación espectral - (3.24) tiene picos que son linealmente proporcionales a la energía.

Finalmente se puede notar que para la selección del orden del modelo p , se requiere obtener $2p$ parámetros, por lo que desde ya vemos que este método será uno de los que más tiempo emplea computacionalmente, de los tres métodos analizados, en calcular los parámetros del modelo, si consideramos que este cálculo se lo hace en forma iterativa.

3.2. IMPLEMENTACION DE PROGRAMAS

Un diagrama de flujo, bastante general, que representa el procedimiento de estimación del espectro de Prony extendido se indica a continuación en la figura 3.2.

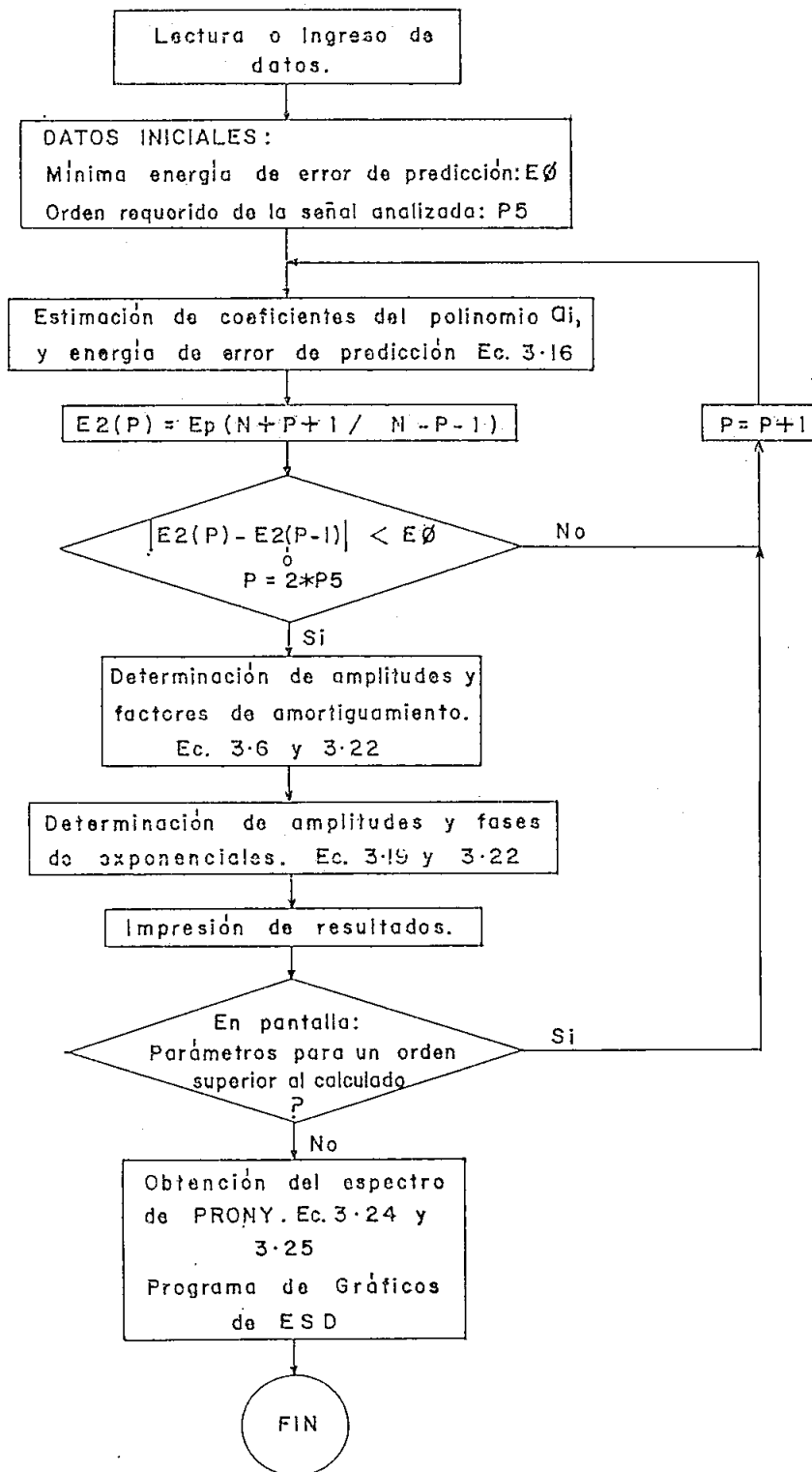


FIG. 3-2 -- Diagrama de flujo general del Método de Prony extendido.

Seguidamente observaremos en forma más detallada cada uno de los bloques representativos del método de Prony extendido.

Independientemente de las tres técnicas de estimación espectral, que son objeto de análisis de la presente tesis, se tiene un programa de ingreso o lectura de datos de la señal que está siendo analizada. Este programa de ingreso de datos es el que nos da la única información de la señal estudiada, con la que contamos para iniciar el tratamiento de la señal; específicamente esta información consiste de: número de muestras N , valor de las muestras de la señal $x(1), x(2), \dots, x(N)$, e intervalo del tiempo de muestreo T_2 .

Adicionalmente se tienen varias opciones para el ingreso de la señal, las cuales son:

1. Ingreso de datos en forma directa.- En la mayoría de casos que se tienen en la práctica, únicamente se disponen de datos muestreados de señales desconocidas, por lo tanto el análisis espectral estará basado en el número de estas muestras y el valor de cada una de ellas, el que se ingresará en forma discreta, sin ser necesario una evaluación adicional.
2. Ingreso de datos muestreados a partir de la función matemática (con ruido blanco gaussiano).- En otros casos se dispone de la función matemática, en cuyo caso se debe obtener muestras de la misma, dado un intervalo de tiempo de muestreo; una vez obtenidas las muestras de la señal, se generan muestras de ruido blanco para lo cual es necesario proporcionar la varianza S del ruido. Las muestras de ruido blanco serán añadidas a los datos de la señal, conformándose la señal a ser analizada.

3. Ingreso de datos muestreados a partir de la función matemática (sin ruido).- Se sigue el mismo procedimiento anterior, con la única diferencia de que no se genera ruido, es decir que esta opción únicamente se limita a una evaluación de cierta función matemática para instantes discretos de tiempo.

Estas dos últimas opciones, serán utilizadas especialmente para probar la validez de los métodos desarrollados, puesto que se parten de señales conocidas y por lo tanto los resultados deben reflejar lo más cercanamente la señal estudiada.

Una vez que se dispone de todos los datos, éstos son almacenados - en un archivo, verificándose primero la existencia o no del archivo de datos. Los tres programas de análisis espectral iniciarán por lo tanto con la lectura de datos de archivo.

Para la estimación de los coeficientes a_i del polinomio, se tiene que resolver el sistema de ecuaciones de covariancia (3.16). Si representamos el producto matricial $X^T X$ por la matriz $X'(P+1, P+1)$, el sistema (3.16) puede ser expresado como:

$$\begin{bmatrix} x'_{1,1} & x'_{1,2} & \dots & x'_{1,p+1} \\ x'_{2,1} & x'_{2,2} & \dots & x'_{2,p+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x'_{p+1,1} & x'_{p+1,2} & \dots & x'_{p+1,p+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

En este sistema se puede apreciar que los vectores columnas de términos independientes y de coeficientes no son conocidos completamente,

y por lo tanto no es posible resolverlo directamente. La metodología a seguirse sugiere obtener un segundo sistema a partir del original, que no considere la primera ecuación y en cuyo caso se tendrá el siguiente sistema simultáneo de ecuaciones algebraicas lineales:

$$\begin{bmatrix} x'_{2,2} & x'_{2,3} & \dots & x'_{2,p+1} \\ x'_{3,2} & x'_{3,3} & \dots & x'_{3,p+1} \\ \vdots & & & \\ x'_{p+1,1} & x'_{p+1,2} & \dots & x'_{p+1,p+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x'_{2,1} \\ -x'_{3,1} \\ \vdots \\ -x'_{p+1,1} \end{bmatrix}$$

De este último conjunto de ecuaciones obtendremos de una manera directa los coeficientes a_1, \dots, a_p y en base a éstos y utilizando la primera ecuación del sistema de ecuaciones (3.16) calculamos el valor de energía de preuicción de error E_p , que a su vez sirve en la determinación del orden del modelo. Calculados los parámetros a_1, \dots, a_p , se encuentra las raíces de la ecuación polinomial (3.6) para cuyo efecto utilizamos el programa ECUAPOL, disponible en la biblioteca de programas, que permite la resolución de ecuaciones polinomiales haciendo uso del método denominado del "Descenso más Pronunciado". En base a estas raíces obtenidas y aplicando las expresiones (3.22) determinaremos las frecuencias y factores de amortiguamiento de las exponenciales, para el orden pedido o estimado.

Debido a la limitación de memoria del computador TEKTRONIX de la Facultad, en la resolución de los sistemas de ecuaciones, se utiliza archivos aleatorios, lo que hace lenta la ejecución del programa y aún más si se considera que el método es iterativo. La limitación

de memoria también determina que el programa para el método de Prony extendido se establezca en dos partes; la primera que calcula el orden del modelo, parámetros a_j , frecuencias y factores de amortiguamiento de exponenciales y la segunda parte que determina las amplitudes y fases de las exponenciales.

El programa que evalúa las amplitudes y fases de las exponenciales, básicamente resuelve el sistema de ecuaciones sintetizado por la expresión (3.19), utilizando para ello las raíces polinomiales encontradas en la primera parte y los datos muestreados x_1, \dots, x_N . Resuelto el sistema (3.19) se aplicará la expresión (3.22) para obtener las amplitudes y fases. Igualmente debido a la limitación de memoria del computador, este programa utiliza archivos aleatorios y por tanto las operaciones son realizadas no directamente en RAM, si no a través de archivos, haciendo lenta su ejecución a pesar de no ser iterativo el algoritmo.

Cabe recalcar que en la solución de los sistemas de ecuaciones lineales se utilizan los métodos numéricos tradicionales, Gauss Jordan por ejemplo, lo cual consume memoria (se utiliza matrices cuadradas), y por lo tanto es ineficiente computacionalmente. Desafortunadamente el tener una estructura no necesariamente Toeplitz en las matrices de los sistemas de ecuaciones, no permite utilizar algoritmos especiales, como en el caso de los modelos de estimación espectral autorregresivos, en los cuales se hace uso del algoritmo Levinson-Durbin por ejemplo.

El programa correspondiente al método de Prony extendido, utiliza

principalmente las siguientes variables:

$N1$ = número de muestras.

$T2$ = intervalo de tiempo de muestreo.

$X\emptyset$ = vector de muestras dadas.

$P5$ = orden del modelo requerido.

$E2$ = vector de energía de error de predicción.

$E\emptyset$ = mínima energía de error de predicción.

$X1$ = matriz de datos (equivalente a matriz X en la Ec. 3.16).

$X3 = X1^T X1$ = matriz de covariancia correspondiente a ec. 3.16.

A = matriz de coeficientes o parámetros a_j .

$R1$ = vector con partes reales de las raíces polinomiales.

$I1$ = vector con partes imaginarias de las raíces polinomiales.

N = grado de la ecuación polinomial.

$A\emptyset$ = vector con los factores de amortiguamiento de las exponenciales.

$F5$ = vector con las frecuencias de las exponenciales.

$M3$ = vector con módulos de las raíces.

$R2$ = matriz de Van der Monde con partes reales (corresponde a la parte real de la matriz ϕ , ec. 3.19).

$I2$ = matriz de Van der Monde con partes imaginarias (corresponde a la parte imaginaria de la matriz ϕ , ec. 3.19)

B = matriz con partes reales de los parámetros b_j .

H = matriz con partes imaginarias de los parámetros b_j .

$B2$ = vector con amplitudes de exponenciales.

$H2$ = vector con ángulos o fases de las exponenciales.

Obtenidas las frecuencias, factores de amortiguamiento, amplitudes y

fases de las exponenciales, se puede concluir la técnica de Prony extendido, determinando el espectro del modelo en base a las ecuaciones (3.24) y (3.25), para lo cual se debe utilizar el programa de gráficos de los espectros, el cual para esta técnica presenta algunas opciones como son grafización del espectro continuo entre las frecuencias $0 - f_m/2$; espectro continuo con el doble de resolución que el último realizado y espectro continuo con el doble de resolución en la mitad inferior o superior del intervalo de frecuencia.

Las principales variables utilizadas en la estimación del espectro continuo de Prony son:

O6 = vector con partes reales de $\hat{X}(f)$ (Ec. 3.25).

S1 = vector con partes imaginarias de $\hat{X}(f)$ (Ec. 3.25).

O4 = vector de densidad espectral de energía.

J8 = puntos del espectro del modelo.

Cabe señalar que el programa de gráficos es utilizable para los tres métodos de análisis espectral que son estudiados en el presente trabajo.

3.3. RESULTADOS EXPERIMENTALES

A continuación se presentan algunos ejemplos que permitan probar la validez del método, y a la vez realizar comparaciones con las otras técnicas de análisis espectral; por lo tanto estos ejemplos serán

los mismos que se han considerado en la Descomposición armónica de Pisarenko y se harán referencia en la Estimación Lineal espectral de Prony.

Junto con los resultados numéricos de amplitud, fase, factores de amortiguamiento y frecuencia de las exponenciales, se presenta un gráfico de las muestras de datos, así como el espectro de energía, en el que la escala vertical está normalizada en dB y la escala horizontal está en frecuencia.

EJEMPLO 1.

El primer ejemplo considerado se refiere a tres sinusoides a las fracciones de frecuencia de muestreo de: 0.10, 0.21, y 0.21 y tienen relaciones de señal ruido de +10, + 30 y + 30 dB respectivamente, estando centrado el ruido coloreado a 0.35; para estas señales se tiene los siguientes valores de amplitud, fase, factores de amortiguamiento y frecuencia:

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL
 FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA
 ELECTRONICA Y TELECOMUNICACIONES

LABORATORIO DE TECNICAS DE ANALISIS ESPECTRAL

FECHA: 16-FEB-85 15:55:33

NUMERO DE DATOS MUESTREADOS: 64
 ORDEN DEL MODELO: 8

TIEMPO DE MUESTREO: 1 SEG.
 ARCHIVO DE DATOS: DATOS1

MUESTRAS DE DATOS

```

===== == =====
1.29106100    -2.08636800    -1.69131600    1.24313800
1.64107200    -0.00868800    -1.65939000    -1.11146700
0.98590800     1.99197900    -0.04661300    -1.64926900
-1.04081000    1.05466500     1.85581600    -0.95118200
-1.47649500   -0.21224200     0.78020200     1.41600300
0.19920200   -2.02702600   -0.48357700     1.66491300
0.61411400   -0.79146900   -1.19531100     0.11980100
0.80763500    0.89523600   -0.01273400    -1.76384200
0.30984000    1.21289200   -0.11990500    -0.44168600
-0.87973300    0.30618100    0.79543100     0.18959800
-0.34233200   -0.32870000    0.19788100     0.07117900
0.18593100   -0.32459500   -0.36609200     0.36846700
-0.19193500    0.51911600    0.00832000    -0.42594600
0.65147000   -0.63997800   -0.34438900     0.81413000
-0.38516800    0.06421800   -0.38000800    -0.16300800
1.18096100    0.11420600   -0.66762600    -0.81499700
  
```

METODO DE PRONY EXTENDIDO
 ===== == =====

LOS FACTORES DE ATENUACION SON:

```

ATEN(1)= -0.0320262
ATEN(2)= 0.0001263
ATEN(3)= 0.0092930
ATEN(4)= -0.0383031
ATEN(5)= -0.0592411
  
```

ATEN(6)= -0.0119492
ATEN(7)= 0.0006903
ATEN(8)= -0.0738380

88

LAS FRECUENCIAS DE LAS SINUSOIDES SON:

FREC(1)= 0.3577243
FREC(2)= 0.1000335
FREC(3)= 0.2089490
FREC(4)= 0.3102005
FREC(5)= 0.2759757
FREC(6)= 0.4020385
FREC(7)= 0.2011507
FREC(8)= 0.4516161

LAS AMPLITUDES DE LAS SINUSOIDES SON:

AMP(1)= 0.2562842
AMP(2)= 0.0924045
AMP(3)= 0.8448245
AMP(4)= 0.5834590
AMP(5)= 0.2364022
AMP(6)= 0.2442895
AMP(7)= 1.2756149
AMP(8)= 0.1313757

LAS FASES DE LAS SINUSOIDES SON:

FASE(1)= 101.3526916
FASE(2)= 127.8653304
FASE(3)= 190.7101441
FASE(4)= 51.5215802
FASE(5)= -71.0450701
FASE(6)= 103.9521629
FASE(7)= 150.5095385
FASE(8)= 51.7071346

EJEMPLO 2

El segundo ejemplo se refiere a una señal de la forma:

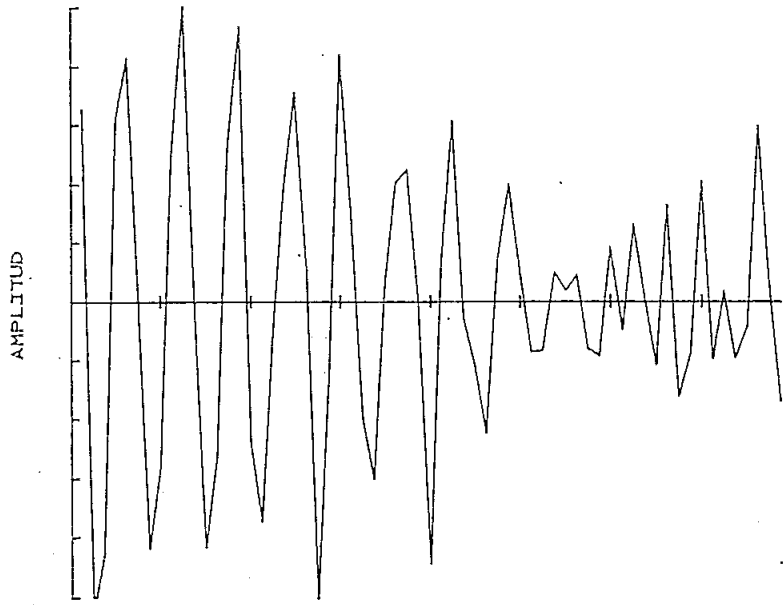
$$x(t) = \text{sen}(3\omega t) + \text{sen}(4\omega t) + \eta(t)$$

donde: varianza del ruido blanco $S = 0.1$;

intervalo de tiempo de muestreo $T_2 = 0.1$ seg.

Los resultados obtenidos son expuestos a continuación:

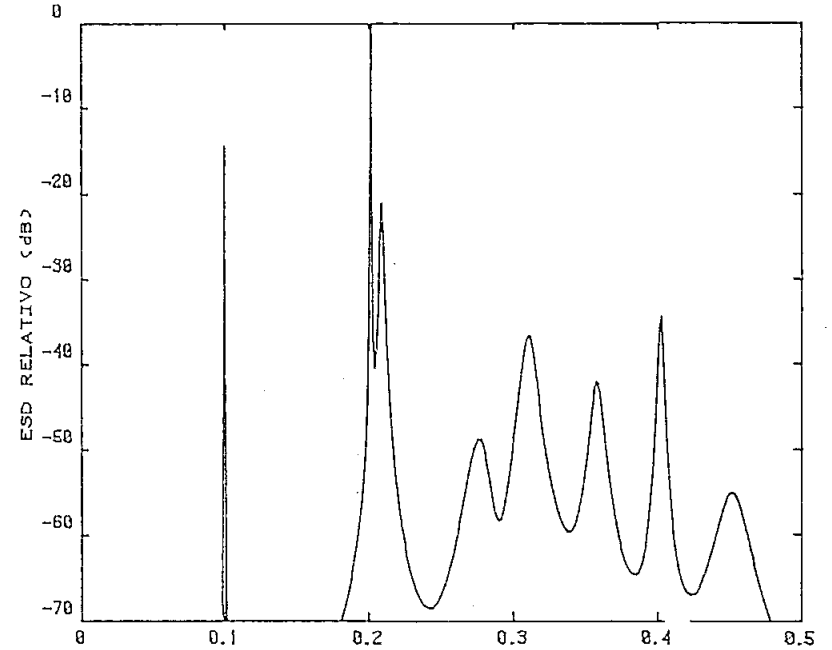
MUESTRAS DE DATOS NUMERO: 64



Esc. Horizontal: 1 DIV : 8
Esc. Vertical: 1 DIV : 0.2

(a)

METODO DE PRONY EXTENDIDO ORDEN 6



FRECUENCIA (Hz.) $f_n = 1$ Hz.

(b)

FIG. 3.3 -- a) Muestras de datos de tres sinusoidas con ruido coloreado a fracciones de la frecuencia de muestreo de 0.10, 0.20 y 0.21
b) Analisis espectral segun el Metodo de PRONY Extendido.

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL
 FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA
 ELECTRONICA Y TELECOMUNICACIONES

ANÁLISIS TÉCNICO-ANÁLISIS ESPECTRAL

FECHA:16-FEB-85 20:42:13

NÚMERO DE DATOS MUESTREADOS: 64
 ORDEN DEL MODELO: 4

TIEMPO DE MUESTREO: 0,1 SEG.
 ARCHIVO DE DATOS: DATOS2

MUESTRAS DE DATOS

===== == =====

0.07598054	1.65203808	-1.55709838	0.41283798
0.36416660	0.31060864	-0.10343451	-0.13264017
1.32456704	-1.31513622	0.02426951	1.47960742
-1.77057401	0.37622711	0.29646626	0.12223819
-0.48723496	-0.27698741	1.82217462	-1.39260252
-0.26182360	1.50892935	-1.61855130	0.43490074
0.42655580	0.19365853	-0.57583737	-0.13430252
1.68609365	-1.51643719	-0.12681091	1.50928241
-1.59935396	0.35492436	0.22645250	-0.13887067
-0.33214902	-0.42760309	1.73240357	-1.59780050
-0.02259879	1.54332640	-1.61173181	0.19268119
0.36930844	-0.02052316	-0.45939044	-0.20903539
1.46826588	-1.47294501	-0.03540871	1.31303247
-1.41038533	0.12162548	0.65886642	0.08661134
-0.33986716	-0.29655732	1.60372686	-1.32918151
-0.01564385	1.78656190	-1.53577711	0.39155101

METODO DE PRONY EXTENDIDO

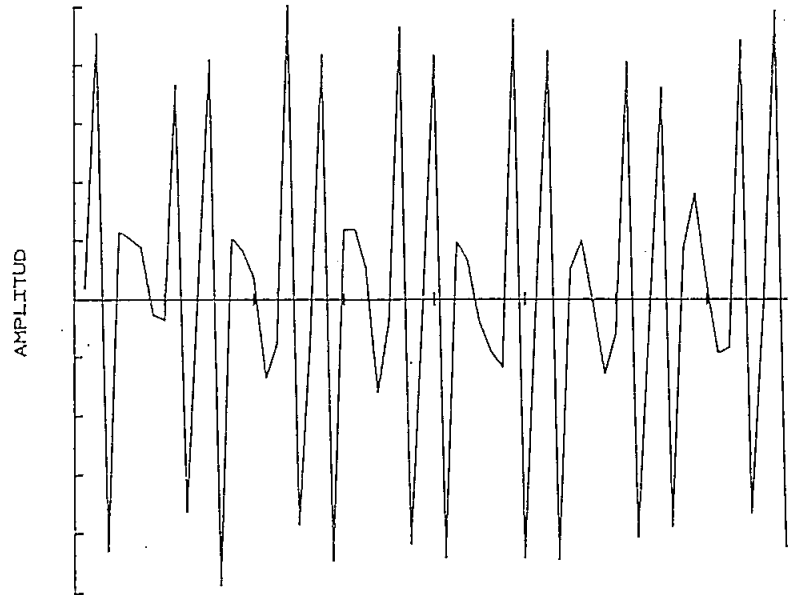
===== == =====

LOS FACTORES DE ATENUACIÓN SON:

ATEN(1)= -0,9324647
 ATEN(2)= 0,0168271
 ATEN(3)= 0,0053547
 ATEN(4)= -1,0540036

LAS FRECUENCIAS DE LAS SINUSOIDES SON:

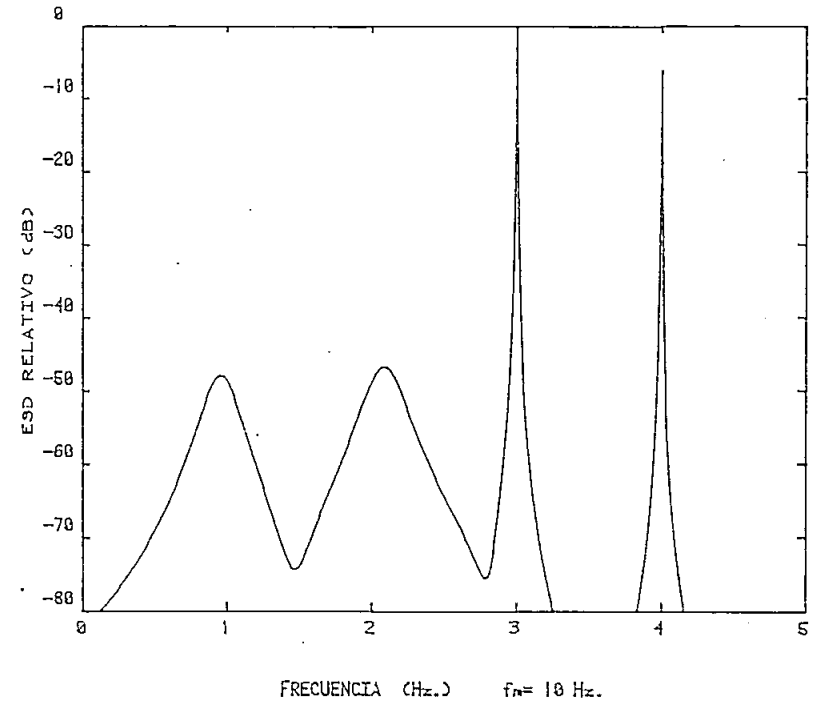
MUESTRAS DE DATOS NUMERO: 64



Esc. horizontal 1 DIV : 8
Esc. Vertical : DIV : 0.2

(a)

METODO DE PRONY EXTENDIDO ORDEN 4



(b)

FIG. 3-4.- a) Muestras de dos sinusoides de 3 y 4 Hz. e igual amplitud con ruido blanco.

b) Analisis espectral segun el Metodo de PRONY Extendido.

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL
 FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA
 ELECTRONICA Y TELECOMUNICACIONES

TECNICAS TECNICAS-ANALISIS ESPECTRAL

FECHA:16-FEB-85 23:20:04

NUMERO DE DATOS MUESTREADOS: 64
 ORDEN DEL MODELO: 5

TIEMPO DE MUESTREO: 0.05 SEG.
 ARCHIVO DE DATOS: DATOS4

MUESTRAS DE DATOS

=====

1.81919545	10.29815910	-0.88334159	-4.27639274
4.11065640	1.52046710	-2.27950793	4.44134897
0.82541604	-9.40009090	-0.26167248	7.20492508
-3.90718409	-7.04178103	1.98633773	0.45541936
-3.00320443	4.57853098	1.94103895	-7.19369163
2.47063514	10.14678533	-0.99970772	-4.25114451
4.38986000	1.53236321	-2.38419983	4.13699825
0.50743651	-8.94354191	-0.28697570	7.10686596
-3.89909018	-7.38472998	2.19056943	-0.02959994
-3.10134925	4.90389902	1.88675310	-7.38251791
1.84407145	10.33268642	-0.87188383	-4.80352994
4.20590947	1.58677516	-2.64383325	4.17407009
0.74457610	-9.00341877	-0.59146668	7.28060458
-3.95926541	-6.97761884	2.10633146	-0.23141843
-3.04791346	4.66795980	1.67941601	-7.05339040
2.00453429	9.80791427	-1.27940142	-4.57094676

METODO DE PRONY EXTENDIDO
 =====

LOS FACTORES DE ATENUACION SON:

ATEN(1)= -10.3475204
 ATEN(2)= -0.0496183
 ATEN(3)= -0.0050165
 ATEN(4)= -0.0200473
 ATEN(5)= -2.1060501

LAS FRECUENCIAS DE LAS SINUSOIDES SON:

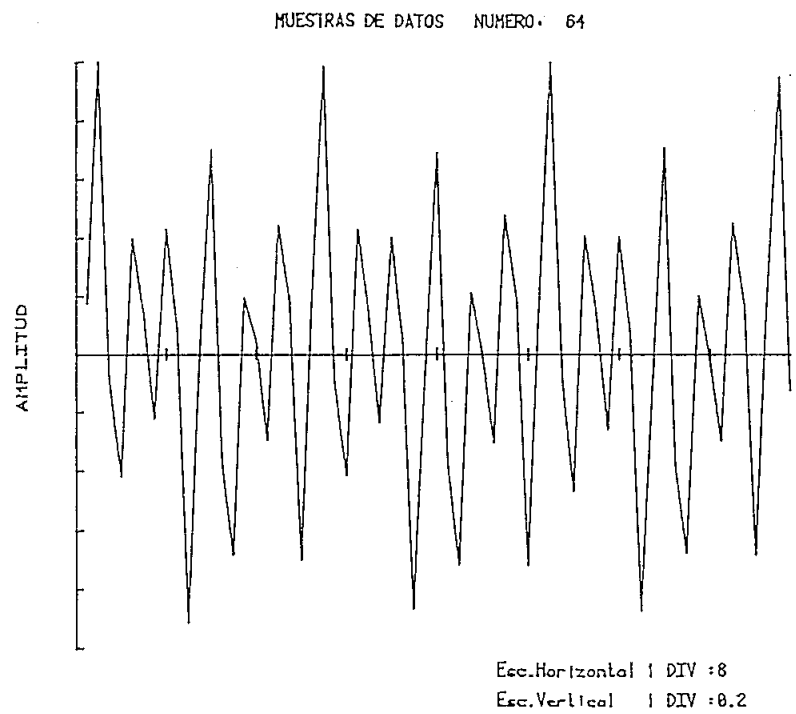
FREC(1)=	3.0036238
FREC(2)=	1.0013822
FREC(3)=	5.9995269
FREC(4)=	4.0025998
FREC(5)=	7.9916764

LAS AMPLITUDES DE LAS SINUSOIDES SON:

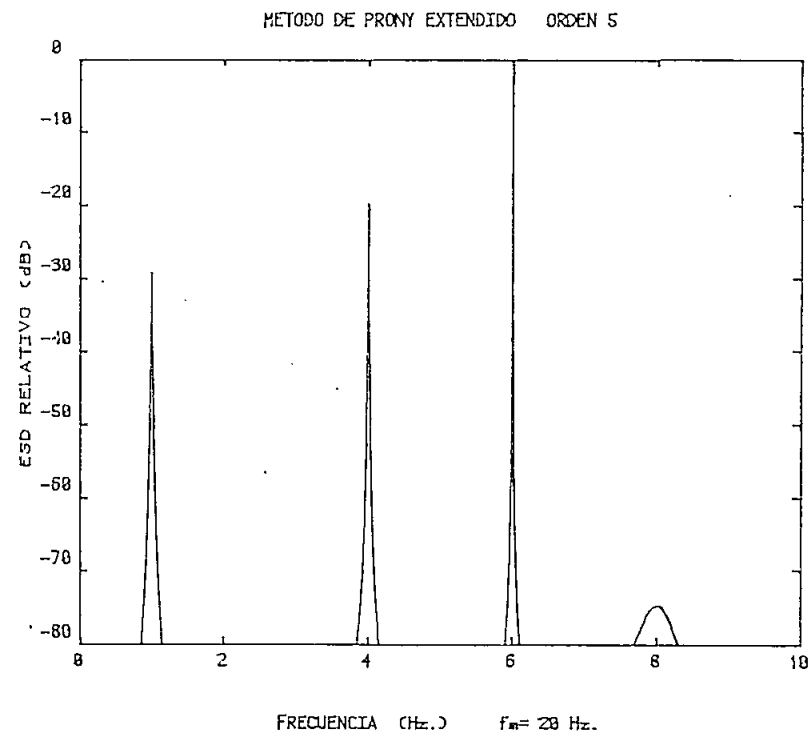
AMP(1)=	0.5715074
AMP(2)=	1.5735111
AMP(3)=	6.0323507
AMP(4)=	3.0611877
AMP(5)=	0.3463920

LAS FASES DE LAS SINUSOIDES SON:

FASE(1)=	-56.8315954
FASE(2)=	59.6235303
FASE(3)=	0.1315582
FASE(4)=	14.2776730
FASE(5)=	39.6785915



(a)



(b)

FIG. 3-5.- a) Muestras de tres sinusoides de 1, 4 y 6 Hz. con diferente amplitud y fase, con ruido blanco.

b) Análisis espectral según el Método de PRONY Extendido.

CAPITULO IV

DESCOMPOSICION LINEAL ESPECTRAL DE PRONY

4.1. ANALISIS Y DESCRIPCION DEL METODO

Esta técnica fue desarrollada como un caso especial del método de Prony Extendido, y es utilizada en procesos que consisten de p sinusoides reales no amortiguadas ($\alpha = 0$), en presencia de ruido. La ecuación (3.2), que describe el proceso de Prony, puede ser expresada en este caso como :

$$\hat{x}_n = \sum_{m=1}^p [b_m z_m^n + b_m^* z_m^{*n}] = \sum_{m=1}^p A_m \cos(2\pi f_m n \Delta t + \theta_m) \quad (4.1)$$

para $n = 0, \dots, N-1$; expresión en la que:

$$b_m = \frac{A_m}{2} \exp(j\theta_m)$$

$$z_m = \exp(j2\pi f_m \Delta t) \quad (4.2)$$

Puede apreciarse que las raíces polinomiales z_m son de módulo unitario, con frecuencias arbitrarias, y se producen en pares complejos conjugados mientras f_m sea diferente de 0 ó de $1/2\Delta t$. La ecuación polinomial, de la cual se obtienen las raíces z_m , será de la forma:

$$\psi(z) = \prod_{i=1}^p (z - z_i)(z - z_i^*) = \sum_{k=0}^{2p} a_k z^{2p-k} = 0 \quad (4.3)$$

con $a_0 = 1$ y con coeficientes a_i reales.

Puesto que las raíces de (4.3) son de módulo unitario y ocurren en pares complejos, la ecuación (4.3) debe permanecer invariante si se realiza la substitución de z^{-1} por z .

$$z^{2p} \psi\left(\frac{1}{z}\right) = z^{2p} \sum_{k=0}^{2p} a_k z^{k-2p} = \sum_{k=0}^{2p} a_k z^k = 0 \quad (4.4)$$

Si se compara (4.3) con (4.4), podemos concluir que $a_j = a_{2p-j}$ para $j = 0$ a p , con $a_0 = a_{2p} = 1$. De esta manera el requerimiento de raíces en pares complejos conjugados de módulo unitario, es implementado forzando a los coeficientes del polinomio a ser simétricos alrededor del elemento central, esto conduce a que se requiera determinar únicamente la mitad de coeficientes a_j .

4.1.1. Obtención de coeficientes polinomiales y frecuencias de las exponenciales

Un sistema de ecuaciones similar a (3.4), que puede ser estructurado en base a (4.1) es:

$$\begin{aligned} b_1 &+ b_1^* &+ b_2 &+ b_2^* &+ \dots &+ b_p &+ b_p^* &= \hat{x}_0 \\ b_1 z_1 &+ b_1^* z_1^* &+ b_2 z_2 &+ b_2^* z_2^* &+ \dots &+ b_p z_p &+ b_p^* z_p^* &= \hat{x}_1 \\ b_1 z_1^2 &+ b_1^* z_1^{*2} &+ b_2 z_2^2 &+ b_2^* z_2^{*2} &+ \dots &+ b_p z_p^2 &+ b_p^* z_p^{*2} &= \hat{x}_2 \\ \dots &\dots &\dots &\dots &\dots &\dots &\dots &\dots \\ b_1 z_1^{N-1} &+ b_1^* z_1^{*N-1} &+ b_2 z_2^{N-1} &+ b_2^* z_2^{*N-1} &+ \dots &+ b_p z_p^{N-1} &+ b_p^* z_p^{*N-1} &= \hat{x}_{n-1} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Con el fin de obtener los coeficientes a_1, \dots, a_p , multiplicamos la primera ecuación de (4.5) por $a_{2p} = a_0 = 1$, la segunda ecuación por

$a_{2p-1} = a_1, \dots$, la $2p$ -ésima ecuación por a_1 , y la $(2p+1)$ ecuación por 1; sumando los resultados y si se utiliza el hecho de que cada uno de los z_i y z_i^* deben satisfacer la ecuación (4.3), se llega a una expresión de la forma:

$$\hat{x}_{2p} + a_1 \hat{x}_{2p-1} + \dots + a_1 \hat{x}_1 + \hat{x}_0 = 0$$

Si comenzamos en cambio sucesivamente con la segunda, tercera, ..., $(N-2p)$ -ésima ecuaciones, se obtendrá un sistema de $N-2p$ ecuaciones lineales de tipo similar, el cual como se ve se encuentra a partir de (4.3) y (4.5) y es el siguiente:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{2p} + a_1 \hat{x}_{2p-1} + \dots + a_1 \hat{x}_1 + \hat{x}_0 &= 0 \\ \hat{x}_{2p+1} + a_1 \hat{x}_{2p} + \dots + a_1 \hat{x}_2 + \hat{x}_1 &= 0 \\ \dots & \\ \hat{x}_{N-1} + a_1 \hat{x}_{N-2} + \dots + a_1 \hat{x}_{N-2p} + \hat{x}_{N-2p-1} &= 0 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Este conjunto de ecuaciones puede escribirse también como:

$$\begin{aligned} \hat{x}_0 + \hat{x}_{2p} + (\hat{x}_1 + \hat{x}_{2p-1})a_1 + \dots + (\hat{x}_{p-1} + \hat{x}_{p+1})a_{p-1} + \hat{x}_p a_p &= 0 \\ \hat{x}_1 + \hat{x}_{2p+1} + (\hat{x}_2 + \hat{x}_{2p})a_1 + \dots + (\hat{x}_p + \hat{x}_{p+2})a_{p-1} + \hat{x}_{p+1} a_p &= 0 \\ \dots & \\ \hat{x}_{N-2p+1} + \hat{x}_{N-1} + (\hat{x}_{N-2p} + \hat{x}_{N-2})a_1 + \dots + (\hat{x}_{N-p-2} + \hat{x}_{N-p})a_{p-1} + \hat{x}_{N-p-1} a_p &= 0 \end{aligned}$$

o en forma simplificada, por la ecuación recursiva de diferencias:

$$\sum_{m=0}^p a_m (\hat{x}_{n+m-2p} + \hat{x}_{n-m}) = 0 \tag{4.7}$$

definida para $2p \leq n \leq N-1$, en la cual el último coeficiente real es $\frac{a_p}{2}$ en lugar de a_p . El factor $\frac{1}{2}$ se debe a la simetría de la ecuación polinomial, lo que hace que el último factor a_p sea contado dos veces.

Basados en (4.7) se puede escribir una expresión para la predicción lineal de error, similar a (3.11) en el método de Prony Extendido.

$$\epsilon_n = \sum_{m=0}^p a_m (x_{n+m-2p} + x_{n-m}) \quad (4.8)$$

definida para $2p \leq n \leq N-1$. Para encontrar los coeficientes $a_1, \dots, a_{p-1}, a_p/2$, de la misma manera que en el método de Prony Extendido, se tendrá que minimizar $\sum_{n=2p}^{N-1} |\epsilon_n|^2$, de modo que todos los conceptos de mínimos cuadrados son aplicables, con excepción de que ahora la matriz de datos X tiene una estructura Toeplitz más Hankel, por tanto la ecuación (4.8) expresada en forma matricial será:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{2p} \\ \vdots \\ \epsilon_{N-1} \end{bmatrix} = X A \quad (4.9)$$

donde:

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{p-1} \\ \frac{1}{2} a_p \end{bmatrix}, \quad X = T + H,$$

Matriz de datos Toeplitz

Matriz de datos Hankel

$$T = \begin{bmatrix} x_{2p+1} & \dots & x_{p+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{N-p} & & x_{2p+1} \\ \vdots & & \vdots \\ x_N & & x_{N-p} \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} x_1 & & x_{p+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{p+1} & & x_{N-2p} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{N-2p} & & x_{N-p} \end{bmatrix}$$

Minimizando la energía de predicción de error E_p , se llega a un conjunto de ecuaciones normales similar a (3.16), que tiene la forma:

$$(X^T X)A = \begin{bmatrix} E_p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

expresión en la que las matrices X y A han sido ya definidas como en (4.9).

Resumiendo, podemos manifestar que el método de Descomposición Lineal Espectral de Prony consiste en resolver el conjunto de ecuaciones normales, descrito en (4.10), y obtener la mínima energía de error de predicción E_p y los coeficientes a_m . Estos coeficientes sirven para estructurar la ecuación polinomial representada por la expresión (4.3), a partir de la cual obtenemos las raíces z_m definidas en (4.2) y en base a éstas se determinan las frecuencias exponenciales f_m .

4.1.2. Cálculo iterativo del orden del modelo

El número p de exponenciales es calculado de una manera análoga al método de Prony extendido, es decir utilizando la técnica de selección de orden, denominada criterio de error de predicción final (FPE) sugerido por Akaike; de acuerdo a esta técnica el orden del modelo es determinado en el instante en el cual la mínima energía de error de predicción E_p permanece casi invariable respecto al orden anterior

4.1.3. Obtención de amplitudes y fases exponenciales

El algoritmo de estimación espectral lineal de Prony es completado con el cálculo de las amplitud y fases de las exponenciales mediante la resolución del sistema de ecuaciones (3.19). En este caso la expresión (4.5) puede ser representada en forma matricial como:

$$\Phi B = \hat{X} \quad (4.11)$$

donde:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 \\ z_1 & z_1^* & z_2 & z_2^* & \cdot & \cdot & \cdot & z_p & z_p^* \\ z_1 & z_1^{*2} & z_2 & z_2^{*2} & \cdot & \cdot & \cdot & z_p^2 & z_p^{*2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_1^{N-1} & z_1^{*N-1} & z_2^{N-1} & z_2^{*N-1} & \cdot & \cdot & \cdot & z_p^{N-1} & z_p^{*N-1} \end{bmatrix}$$

$$B = [b_1 \quad b_1^* \quad \dots \quad b_p \quad b_p^*]^T$$

$$\hat{X} = [\hat{x}_0 \quad \dots \quad \hat{x}_{N-1}]^T$$

Una vez aplicado el criterio del mínimo error cuadrático entre los valores medidos x_n y los valores estimados \hat{x}_n , en la ecuación (4.11) se llega a obtener la expresión:

$$\Phi B = X \quad (4.12)$$

donde: $X = [x_0, \dots, x_{N-1}]^T$ constituyen los datos medidos.

De esta última ecuación se pueden determinar los parámetros b_m , pues (4.12) puede escribirse también como:

$$B = (\Phi^H \Phi)^{-1} \Phi^H X \quad (4.13)$$

ecuación en la que se ha estructurado la matriz cuadrada $\Phi^H \Phi$ con el propósito de obtener los parámetros b_m de una manera directa.

Finalmente los valores de amplitud A_i , fase θ_i , factor de amortiguamiento α_i y frecuencia f_i de las exponenciales no amortiguadas, se encuentran a partir de (4.14), la cual constituye la expresión (4.2) escrita de una manera diferente:

$$A_i = |b_i^*| + |b_i| = 2 |b_i|$$

$$\theta_i = \tan^{-1} [\text{Im}(b_i) / \text{Re}(b_i)]$$

$$\alpha_i = \ln |z_i|/\Delta t$$

$$f_i = \tan^{-1} [\text{Im}(z_i)/\text{Re}(z_i)]/2\pi\Delta t \quad (4.14)$$

Se puede comprobar que los valores que se obtiene para los factores de amortiguamiento, para cada una de las exponenciales es cero, con lo cual se ratifica el criterio inicial de análisis, el cual es que el método estudia señales exponenciales no amortiguadas con ruido.

En lo que se refiere a la obtención del espectro del modelo, éste se obtiene a partir de la grafización de la amplitud al cuadrado de las exponenciales a las frecuencias respectivas, es decir se tratará de un gráfico de estimación espectral de potencia relativa.

4.2. IMPLEMENTACION DE PROGRAMAS

El método de Descomposición lineal espectral de Prony, se resume en el diagrama de flujo de la figura 4.1.

Básicamente el programa de ingreso de datos, establece la creación de un archivo de datos el cual contiene: número de datos muestreados, intervalo de tiempo de muestreo y valores de las N muestras con o sin ruido; de manera que al inicio de cualquier programa de análisis espectral, necesariamente debe realizarse la lectura del archivo de datos que ha sido creado en el programa de ingreso de datos.

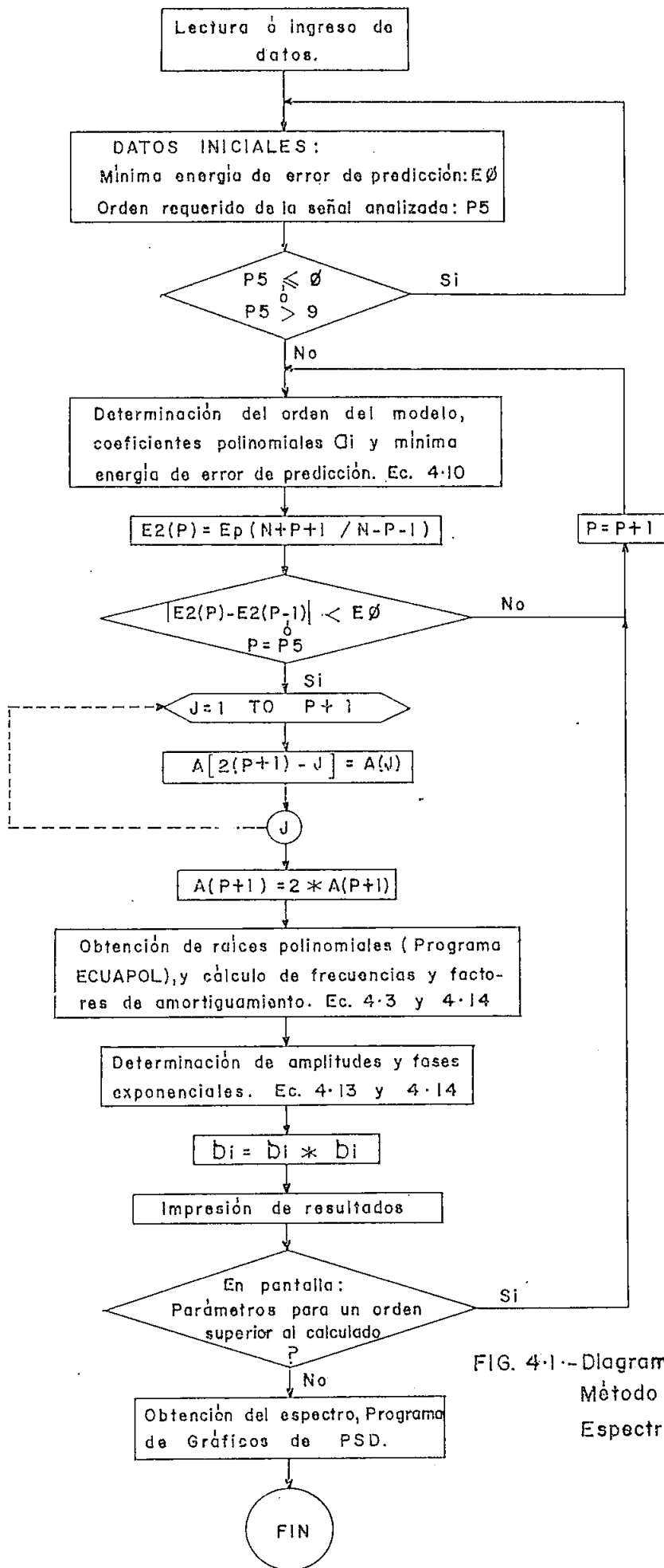


FIG. 4-1.- Diagrama de flujo general del Método de Descomposición Lineal Espectral de Prony.

El programa tiene como dato inicial, la mínima energía de error de predicción E_0 , el cual tiene como valor 0.01 puesto que con éste, se han logrado resultados razonables y mejores que con otros valores; a su vez el programa solicita el orden requerido P_5 , para analizar la señal, si este orden es menor o igual a cero o mayor que 9 no se podrá continuar en la ejecución, debido a que no es un orden adecuado en el primer caso y a la limitación de memoria en el segundo, y se solicitará ingresar nuevamente el orden requerido.

Una vez ingresado un orden adecuado, se calculan los coeficientes polinomiales a_j y la mínima energía de error de predicción E_p para un orden l ; E_p se calcula con el fin de aplicar el criterio de AKAIKE en la determinación del orden del modelo, si no se cumple con este criterio se incrementa en 1 el orden del modelo y se determina nuevamente los coeficientes polinomiales a_j y la mínima energía de predicción de error E_p para ese orden. Este procedimiento se realiza hasta el instante en el que se cumpla con el criterio de AKAIKE o hasta cuando el orden que está siendo analizado sea igual al orden pedido.

Un diagrama de flujo que describe la obtención de los coeficientes polinomiales a_j y E_p es el de la figura 4.2.

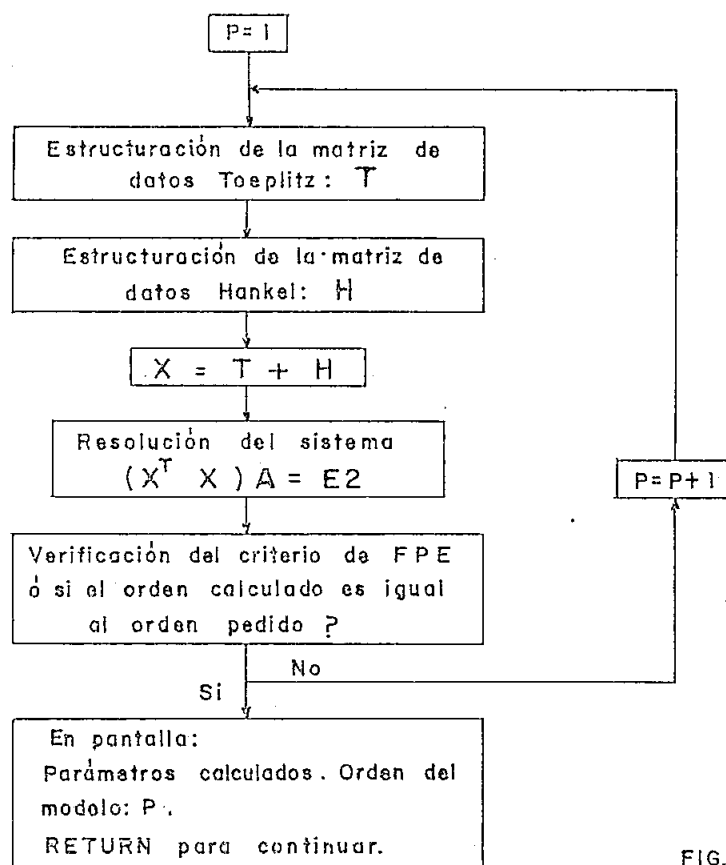


FIG. 4-2--

Cabe anotar que la forma de resolución de la ecuación (4.10), es la misma que la utilizada para el sistema de ecuaciones de covariancia, ecuación (3.16), y que se analizó en detalle en el capítulo anterior.

Calculados los parámetros del modelo, se establece la ecuación polinomial (4.3), cuya solución está dada por el programa ECUAPOL; obtenidas estas raíces se utilizará las ecuaciones (4.14) para calcular las amplitudes y los factores de amortiguamiento.

Para la determinación de las amplitudes y fases exponenciales, se utilizará un programa adicional que fundamentalmente resuelve el siste

ma de ecuaciones (4.14), y cuyo diagrama de flujo representativo está dado en la figura 4.3.

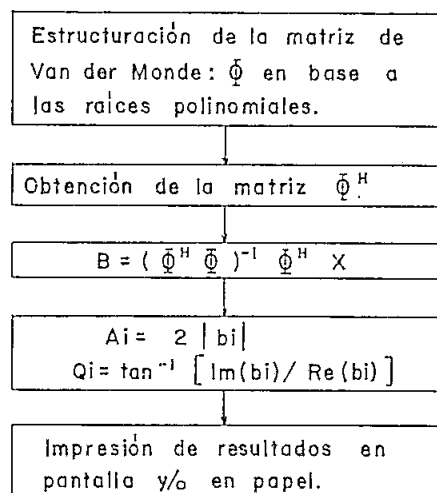


FIG. 4-3.-

Se debe anotar que en este programa, todas las operaciones a realizarse con números complejos, se las efectúa trabajando en forma rectangular y no en forma polar o combinada; ésto debido a los grandes errores que se producen al trabajar en esta última forma. Esta manera de operación, así como la utilización de archivos aleatorios debidos a la limitación de memoria del computador, hace que el tiempo de ejecución de los programas sea relativamente grande.

Obtenidos los resultados finales, se presenta la opción de calcular todos los parámetros para un orden superior al pedido, sin tener en este caso, que iniciar el cálculo desde el orden 1, sino desde el último orden calculado.

Una forma adicional de observar los resultados es obtener el espectro del modelo, para lo cual se deberá ejecutar el programa de grā

ficos, en el cual se elegirá las versiones discretas de PSD.

Finalmente se debe indicar que las variables principales utilizadas en el programa de Descomposición lineal espectral de Prony, en su mayoría coinciden con las del método de Prony extendido, motivo por el cual no se realiza la descripción de las mismas.

4.3. RESULTADOS EXPERIMENTALES

Como se dijo en el capítulo anterior, los tres ejemplos que se presentarán serán los mismos de los métodos de Pisarenko y Prony extendido, para permitir su comparación.

EJEMPLO 1

Tres sinusoides con ruido, con relación S/N de +10, +30 y +30dB, - fracciones de frecuencia de muestreo 0.10, 0.20 y 0.21 respectivamente. Se obtienen los siguientes resultados de factores de amortiguamiento, frecuencias, amplitudes y fases de las sinusoides, a los cuales se adjunta el gráfico de muestras de datos y PSD discreto.

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL
 FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA
 ELECTRONICA Y TELECOMUNICACIONES

TECNICAS-ANALISIS ESPECTRAL

FECHA:17-FEB-85 01:27:34

NUMERO DE DATOS MUESTREADOS: 64
 ORDEN DEL MODELO: 8

TIEMPO DE MUESTREO: 1 SEG,
 ARCHIVO DE DATOS: DATOS1

MUESTRAS DE DATOS

```

===== == =====
1.29106100    -2.08636800    -1.69131600    1.24313800
1.64107200    -0.00868800    -1.65939000    -1.11146700
0.98590800     1.79197900    -0.04661300    -1.64926900
-1.04081000    1.05466500     1.85581600    -0.95118200
-1.47649500    -0.21224200     0.78020200    1.41600300
0.19920200    -2.02702600    -0.48357700    1.66491300
0.61411400    -0.79146900    -1.19531100    0.11980100
0.80763500     0.89523600    -0.01273400    -1.76384200
0.30984000     1.21289200    -0.11990500    -0.44168600
-0.87973300    0.30618100     0.79543100    0.18959800
-0.34233200    -0.32870000     0.19788100    0.07117900
0.18593100    -0.32459500    -0.36609200    0.36846700
-0.19193500    0.51911600     0.00832000    -0.42594600
0.65147000    -0.63997800    -0.34438900    0.81413000
-0.38516800    0.06421800    -0.38000800    -0.16300800
1.18096100     0.11420600    -0.66762600    -0.61499700

```

ESTIMACION LINEAL ESPECTRAL DE PRONY
 =====

LOS FACTORES DE ATENUACION SON:

```

ATEN(1)= 0.0000000
ATEN(2)= 0.0000000
ATEN(3)= 0.0000000
ATEN(4)= 0.0000000
ATEN(5)= 0.0000000
ATEN(6)= 0.0000000

```


ATEN(7)= 0.0000000
ATEN(8)= 0.0000000

110

LAS FRECUENCIAS DE LAS SINUSOIDES SON:

FREC(1)= 0.1000387
FREC(2)= 0.2708862
FREC(3)= 0.2002671
FREC(4)= 0.3587349
FREC(5)= 0.3094598
FREC(6)= 0.4508097
FREC(7)= 0.2095986
FREC(8)= 0.4023811

LAS AMPLITUDES DE LAS SINUSOIDES SON:

AMP(1)= 0.1033467
AMP(2)= 0.0564425
AMP(3)= 1.0255709
AMP(4)= 0.1186514
AMP(5)= 0.2108555
AMP(6)= 0.0278792
AMP(7)= 1.0396470
AMP(8)= 0.1971183

LAS FASES DE LAS SINUSOIDES SON:

FASE(1)= 125.2777726
FASE(2)= 36.3531895
FASE(3)= 156.4707262
FASE(4)= 174.4051274
FASE(5)= 65.7853533
FASE(6)= 32.9261813
FASE(7)= 170.5971711
FASE(8)= 95.5920054

EJEMPLO 2

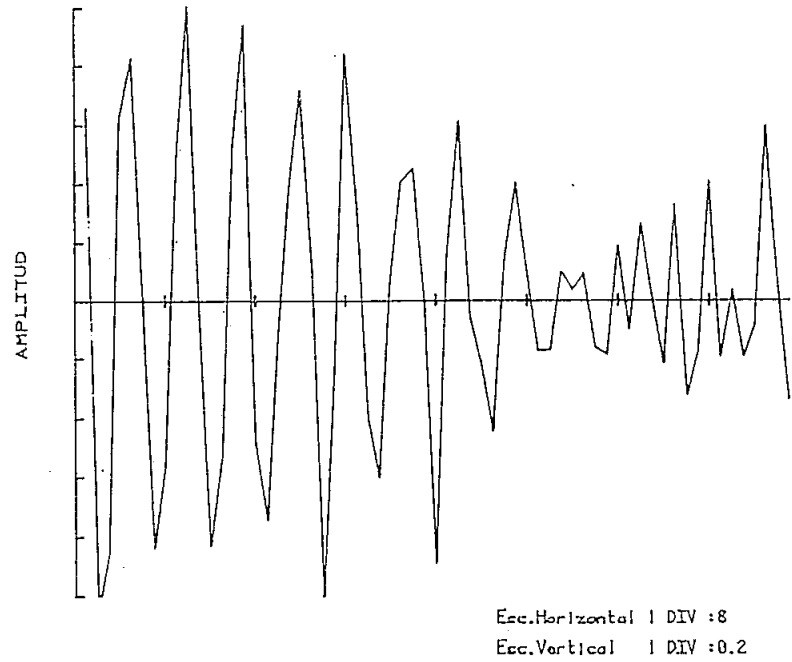
La forma matemática de la señal analizada es:

$$x(t) = \text{sen}(3\omega t) + \text{sen}(4\omega t) + n(t)$$

con varianza de ruido: 0.1; tiempo de muestreo: 0.1 seg.

Los resultados obtenidos son:

MUESTRAS DE DATOS NUMERO: 64



DESCOMPOSICION LINEAL ESPECTRAL DE PRONY ORDEN 6

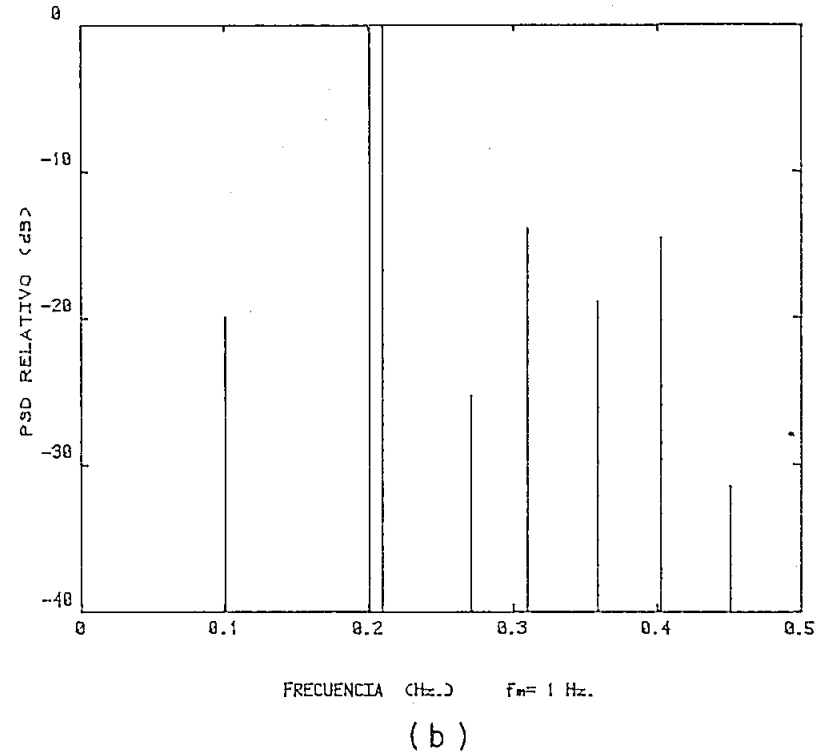


FIG. 4.4.- a) Muestras de datos de tres sinusoides con ruido coloreado a fracciones de la frecuencia de muestreo de 0.10, 0.20 y 0.21
b) Análisis espectral según el Método de Descomposición Lineal Espectral de PRONY.

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL
 FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA
 ELECTRONICA Y TELECOMUNICACIONES

DESVAS TECNICAS-ANALISIS ESPECTRAL

FECHA:17-FEB-85 05:15:03

NUMERO DE DATOS MUESTREADOS: 64
 ORDEN DEL MODELO: 4

TIEMPO DE MUESTREO: 0.1 SEG.
 ARCHIVO DE DATOS: DATOS2

MUESTRAS DE DATOS

```

===== == =====
0.07598054      1.65203808      -1.55709838      0.41283798
0.36416660      0.31060864      -0.10343451      -0.13264017
1.32456704      -1.31513622      0.02426951      1.47960742
-1.77057401      0.37622711      0.29646626      0.12223819
-0.48723496      -0.27698741      1.82217462      -1.39260252
-0.26182360      1.50892935      -1.61855130      0.43490074
0.42655580      0.19365853      -0.57583737      -0.13430252
1.68609365      -1.51643719      -0.12681091      1.50928241
-1.59935396      0.35492436      0.22645250      -0.13887067
-0.33214902      -0.42760309      1.73240357      -1.59780050
-0.02259879      1.54332640      -1.61173181      0.19268119
0.36930844      -0.02052316      -0.45939044      -0.20903539
1.46826588      -1.47294501      -0.03540871      1.31303247
-1.41038533      0.32162548      0.65886642      0.08661134
-0.33986716      -0.29655732      1.60372686      -1.32918151
-0.01564385      1.78656190      -1.53577711      0.39155101

```

```

ESTIMACION LINEAL ESPECTRAL DE PRONY
===== == =====

```

LOS FACTORES DE ATENUACION SON:

```

ATEN(1)= 0.0000000
ATEN(2)= 0.0000000
ATEN(3)= 0.0000000
ATEN(4)= 0.0000000

```

LAS FRECUENCIAS DE LAS SINUSOIDES SON:

```
FREC(1)= 0.6808536
FREC(2)= 3.0099517
FREC(3)= 2.3311560
FREC(4)= 4.0031586
```

LAS AMPLITUDES DE LAS SINUSOIDES SON:

```
AMP(1)= 0.0051571
AMP(2)= 1.0086093
AMP(3)= 0.0464350
AMP(4)= 0.9817076
```

LAS FASES DE LAS SINUSOIDES SON:

```
FASE(1)= 71.2218798
FASE(2)= -12.3012457
FASE(3)= -43.9997491
FASE(4)= -3.6738096
```

EJEMPLO 3

La señal a estudiarse, matemáticamente puede ser expresada como:

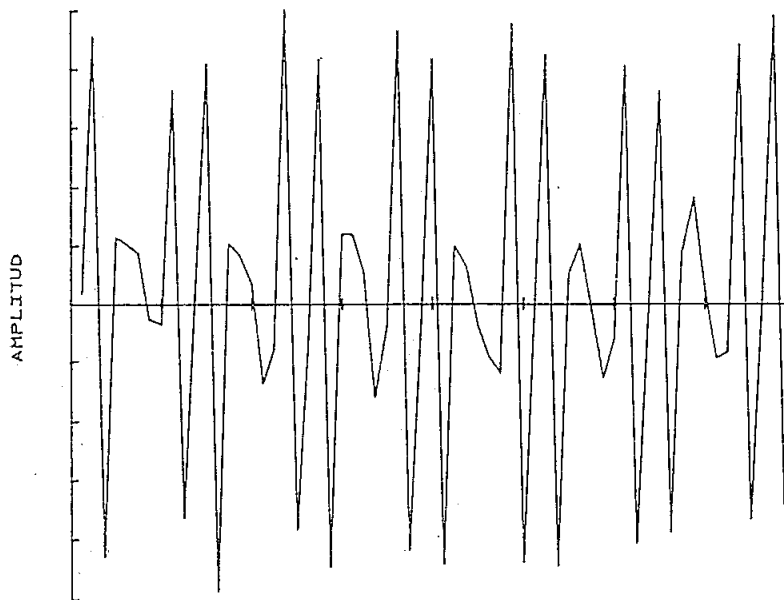
$$x(t) = 3 \operatorname{sen}(4\omega t + 15^\circ) + 6 \operatorname{sen}(6\omega t) + 1.5 \operatorname{sen}(\omega t + 60^\circ) + \eta(t)$$

donde: varianza de ruido : 0.2

tiempo de muestreo : 0.05 seg.

Los siguientes resultados fueron obtenidos:

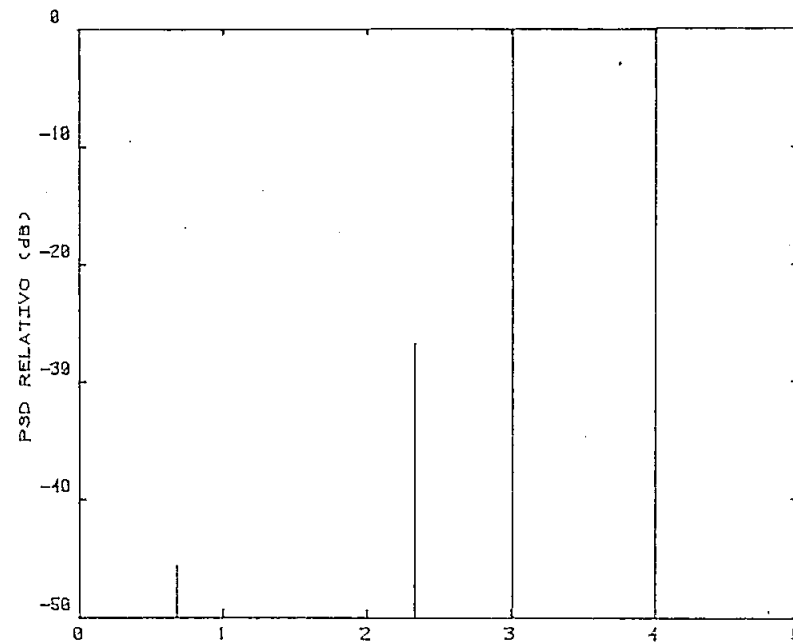
MUESTRAS DE DATOS NUMERO. 64



Esc.Horizontal 1 DIV :8
Esc.Vertical 1 DIV :0.2

(a.)

DESCOMPOSICION LINEAL ESPECTRAL DE PRONY ORDEN 4



FRECUENCIA (Hz.) $f_n = 10$ Hz.

(b.)

FIG. 4.5-- a) Muestras de dos sinusoides de 3 y 4 Hz. e igual amplitud con ruido blanco.

b) Analisis espectral segun el Metodo de Descomposicion Lineal Espectral de PRONY.

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL
 FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA
 ELECTRONICA Y TELECOMUNICACIONES

UEVAS TECNICAS-ANALISIS ESPECTRAL

FECHA:17-FEB-85 06:19:16

NUMERO DE DATOS MUESTREADOS: 64
 ORDEN DEL MODELO: 5

TIEMPO DE MUESTREO: 0.05 SEG.
 ARCHIVO DE DATOS: DATOS4

MUESTRAS DE DATOS

===== == =====

1.81919545	10.29815910	-0.88334159	-4.27639274
4.11065640	1.52046710	-2.27950793	4.44134897
0.82541604	-9.40009090	-0.26167248	7.20492508
-3.90718409	-7.04178103	1.98633773	0.45541936
-3.00320443	4.57853098	1.94103895	-7.19369163
2.47063514	10.14678533	-0.99970772	-4.25114451
4.38986000	1.53236321	-2.38419983	4.13699825
0.50743651	-8.94354191	-0.28697570	7.10686596
-3.89909018	-7.38472998	2.19056943	-0.02959994
-3.10134925	4.90389902	1.88675310	-7.38251291
1.84407145	10.33268642	-0.87188383	-4.80352994
4.20590947	1.58677516	-2.64383325	4.17407009
0.74457610	-9.00341877	-0.59146668	7.28060458
-3.95926541	-6.97761884	2.10633146	-0.23141843
-3.04791346	4.66795980	1.67941601	-7.05339040
2.00453429	9.80791427	-1.27940142	-4.57094676

ESTIMACION LINEAL ESPECTRAL DE PRONY
 =====

LOS FACTORES DE ATENUACION SON:

ATEN(1)= 0.0000000
 ATEN(2)= 0.0000000
 ATEN(3)= 0.0000000
 ATEN(4)= 0.0000000
 ATEN(5)= 0.0000000

LAS FRECUENCIAS DE LAS SINUSOIDES SON:

FREC(1)= 5.1627320
FREC(2)= 0.9988817
FREC(3)= 6.0003743
FREC(4)= 4.0016153
FREC(5)= 8.4138056

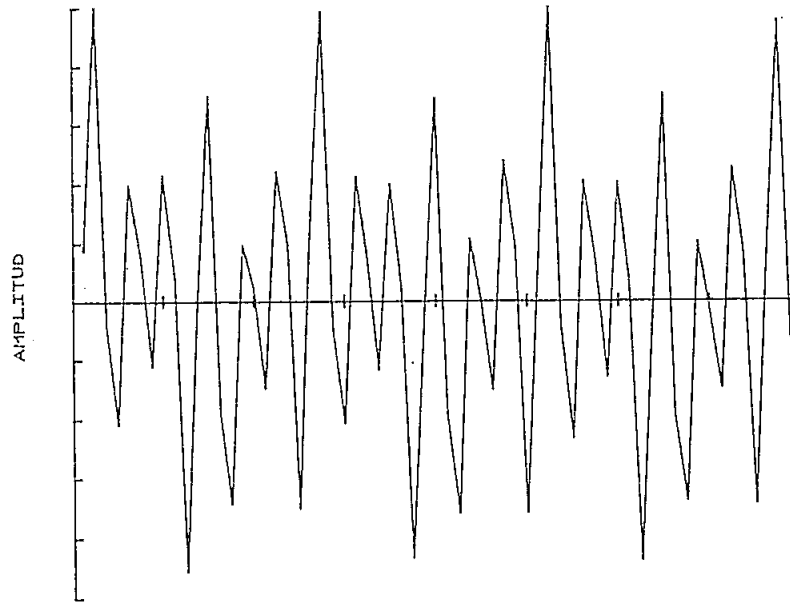
LAS AMPLITUDES DE LAS SINUSOIDES SON:

AMP(1)= 0.0770404
AMP(2)= 1.4630590
AMP(3)= 5.9763823
AMP(4)= 2.9538143
AMP(5)= 0.0797439

LAS FASES DE LAS SINUSOIDES SON:

FASE(1)= 223.3921504
FASE(2)= 60.8420236
FASE(3)= -0.4891687
FASE(4)= 14.7175472
FASE(5)= -56.3668216

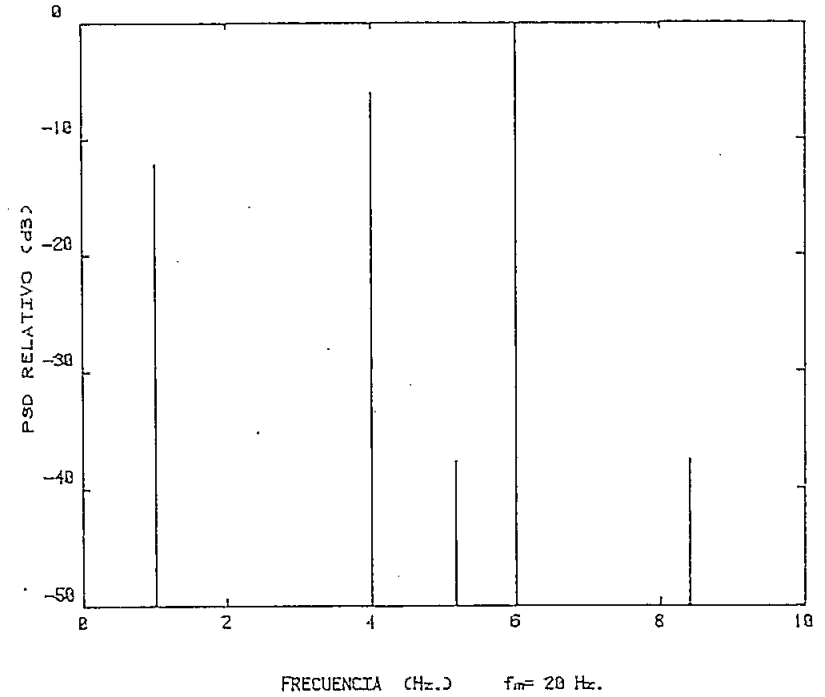
MUESTRAS DE DATOS NUMERO: 64



Esc. Horizontal 1 DIV : 8
Esc. Vertical 1 DIV : 8.2

(a)

DESCOMPOSICION LINEAL ESPECTRAL DE PRONY ORDEN 5



(b)

FIG. 4-6.- a) Muestras de tres sinusoides de 1, 4 y 6 Hz. con diferente amplitud y fase, con ruido blanco.

b) Análisis espectral según el Método de Descomposición Lineal Espectral de PRONY.

CAPITULO V

ANALISIS COMPARATIVO ENTRE LOS METODOS DESARROLLADOS

En estos últimos años muchos comentarios han surgido acerca de las grandes propiedades de los métodos autorregresivos (AR) de análisis espectral para sinusoides en ruido. Sin embargo, el modelo AR no es el modelo correcto para un proceso consistente de señales sinusoidales más ruido blanco aditivo. Se ha demostrado que cuando la relación señal a ruido (SNR) decrece, la capacidad de resolución de los métodos de análisis espectral también disminuye. De hecho, para SNR bajo 0 db, la resolución de los métodos convencionales de análisis espectral utilizando FFT es comparable a aquella de un análisis AR, y en general para bajas SNR, las técnicas AR no resultan mejores que las que utilizan la FFT.

Las técnicas de estimación espectral: de Prony extendido, Descomposición lineal espectral de Prony, y de Pisarenko, representan tres métodos para analizar sinusoides en ruido blanco aditivo cuyas ventajas y desventajas pasamos a analizar a continuación.

La técnica de Pisarenko utiliza una aproximación estadística mediante la función de autocorrelación. Puesto que en la práctica no se conocen los retrasos de autocorrelación, éstos deben ser únicamente estimados, lo cual origina que los resultados obtenidos contengan componentes sinusoidales espúreas, aún cuando las señales analizadas sean exclusivamente sinusoides puras, sin ruido. El método de Prony en cambio hace uso de una aproximación determinística, median

te un procedimiento de estimación de mínimos cuadrados, motivo por el cual la cantidad de componentes espúreas que se obtienen, es mucho menor en comparación con la técnica de Pisarenko. Lo enunciado se pone de manifiesto si analizamos dos señales sinusoidales sin ruido, en donde se observa que en el método de Prony, las componentes fundamentales obtenidas corresponden a las sinusoides analizadas, aún cuando se utilice un orden superior a dos; ésto no sucede en el método de Pisarenko el cual como se ve nos da información de ruido, que corresponde a componentes espúreas.

La función matemática analizada es: $x(t) = \text{sen}(\omega t) + 2 \cos(1.5 \omega t)$ y los espectros obtenidos con los tres métodos de análisis espectral son graficados en la figura 5.1.

De los resultados obtenidos, se observa que información de fase es proporcionada únicamente en los métodos de Prony, lo cual constituye una ventaja sobre el método de Pisarenko y más aún sobre las técnicas autorregresivas que no proporcionan una estimación de fase.

Para referirnos a la calidad de resolución de los métodos, revisaremos el ejemplo 1 desarrollado para cada uno de los tres métodos en los capítulos correspondientes. Para este caso, tenemos que dos de las tres sinusoides están muy próximas entre sí, siendo las mismas de igual amplitud. Las tres técnicas de análisis espectral estudiadas resuelven estas sinusoides, con la diferencia de que el método de Pisarenko presenta señales y frecuencias inexactas, que en todo caso se asemejan a los valores reales, notándose en particular que la senoide de amplitud más pequeña tiene una línea es

CUELA POLITECNICA NACIONAL
 CULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA
 ELECTRONICA Y TELECOMUNICACIONES

EVAS TECNICAS-ANALISIS ESPECTRAL

FECHA:17-FEB-85 08:03:12

NUMERO DE DATOS MUESTREADOS: 32
 ORDEN DEL MODELO: 5

TIEMPO DE MUESTREO: 0.2 SEG.
 ARCHIVO DE DATOS: DATOS6

MUESTRAS DE DATOS

===== == =====

2.00000000	0.33302253	-1.03024874	1.03024874
-0.33302253	-2.00000000	1.56909051	2.20581924
-2.20581924	-1.56909051	2.00000000	0.33302253
-1.03024874	1.03024874	-0.33302253	-2.00000000
1.56909051	2.20581924	-2.20581924	-1.56909051
2.00000000	0.33302253	-1.03024874	1.03024874
-0.33302253	-2.00000000	1.56909051	2.20581924
-2.20581924	-1.56909051	2.00000000	0.33302253

DESCOMPOSICION ARMONICA DE FISARENKO

===== == =====

LAS FRECUENCIAS DE LAS SINUSOIDES DE LA SENAL SON:

F(1)= 1.4976567
 F(2)= 0.3049654
 F(3)= 0.9045276
 F(4)= 1.1274439
 F(5)= 1.7534477

LA POTENCIA DEL RUIDO ES: 0.0585032

LAS POTENCIAS DE LAS SINUSOIDES SON:

P(1)= 1.7181197
 P(2)= 0.0136809
 P(3)= 0.2504223
 P(4)= 0.3350194
 P(5)= 0.0964703

CUELA POLITECNICA NACIONAL
 CULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA
 ECTRONICA Y TELECOMUNICACIONES

EVAS TECNICA-ANALISIS ESPECTRAL

FECHA:17-FEB-85 08:32:46

MERO DE DATOS MUESTREADOS: 32
 DEN DEL MODELO: 2

TIEMPO DE MUESTREO: 0.2 SEG.
 ARCHIVO DE DATOS: DATOS6

MUESTRAS DE DATOS

===== == =====

2.00000000	0.33302253	-1.03024874	1.03024874
-0.33302253	-2.00000000	1.56909051	2.20581924
-2.20581924	-1.56909051	2.00000000	0.33302253
-1.03024874	1.03024874	-0.33302253	-2.00000000
1.56909051	2.20581924	-2.20581924	-1.56909051
2.00000000	0.33302253	-1.03024874	1.03024874
-0.33302253	-2.00000000	1.56909051	2.20581924
-2.20581924	-1.56909051	2.00000000	0.33302253

METODO DE PRONY EXTENDIDO

===== == =====

LOS FACTORES DE ATENUACION SON:

ATEN(1)= 0.0000000
 ATEN(2)= 0.0000000

LAS FRECUENCIAS DE LAS SINUSOIDES SON:

FREC(1)= 1.0000000
 FREC(2)= 1.5000000

LAS AMPLITUDES DE LAS SINUSOIDES SON:

AMP(1)= 0.9838343
 AMP(2)= 1.9675058

LAS FASES DE LAS SINUSOIDES SON:

FASE(1)= 0.2140282
 FASE(2)= 89.7525952

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL
 FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA
 ELECTRONICA Y TELECOMUNICACIONES

TECNICAS-ANALISIS ESPECTRAL

FECHA:17-FEB-85 08:56:14

NUMERO DE DATOS MUESTREADOS: 32
 ORDEN DEL MODELO: 2

TIEMPO DE MUESTREO: 0.2 SEG.
 ARCHIVO DE DATOS: DATOS6

MUESTRAS DE DATOS
 ===== == =====

2.00000000	0.33302253	-1.03024874	1.03024874
-0.33302253	-2.00000000	1.56909051	2.20581924
-2.20581924	-1.56909051	2.00000000	0.33302253
-1.03024874	1.03024874	-0.33302253	-2.00000000
1.56909051	2.20581924	-2.20581924	-1.56909051
2.00000000	0.33302253	-1.03024874	1.03024874
-0.33302253	-2.00000000	1.56909051	2.20581924
-2.20581924	-1.56909051	2.00000000	0.33302253

ESTIMACION LINEAL ESPECTRAL DE PRONY
 =====

LOS FACTORES DE ATENUACION SON:

ATEN(1)= 0.0000000
 ATEN(2)= 0.0000000

LAS FRECUENCIAS DE LAS SINUSOIDES SON:

FREC(1)= 1.0000000
 FREC(2)= 1.5000000

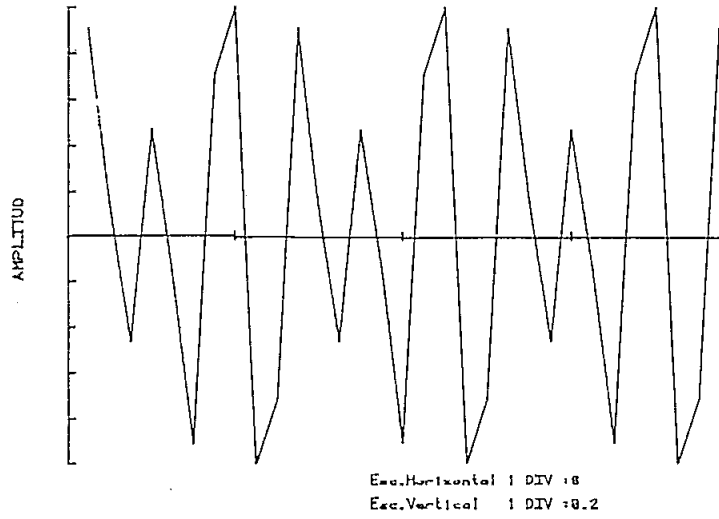
LAS AMPLITUDES DE LAS SINUSOIDES SON:

AMP(1)= 0.9957967
 AMP(2)= 1.9880163

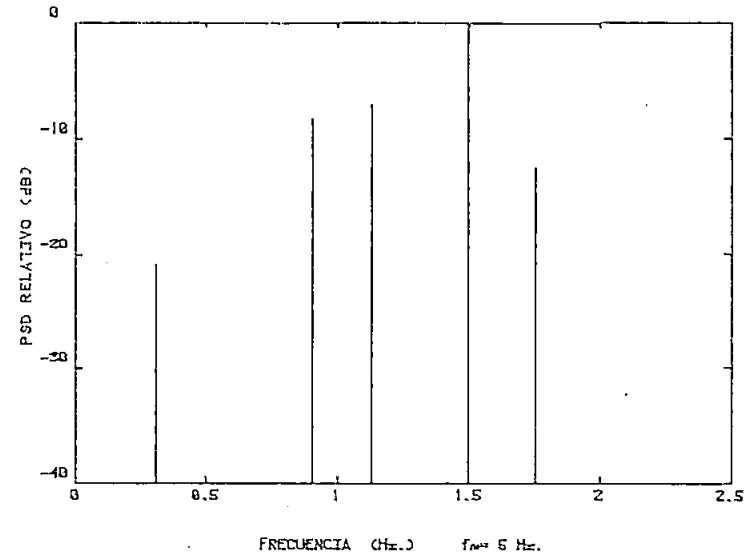
LAS FASES DE LAS SINUSOIDES SON:

FASE(1)= 0.4345385
 FASE(2)= 89.7872943

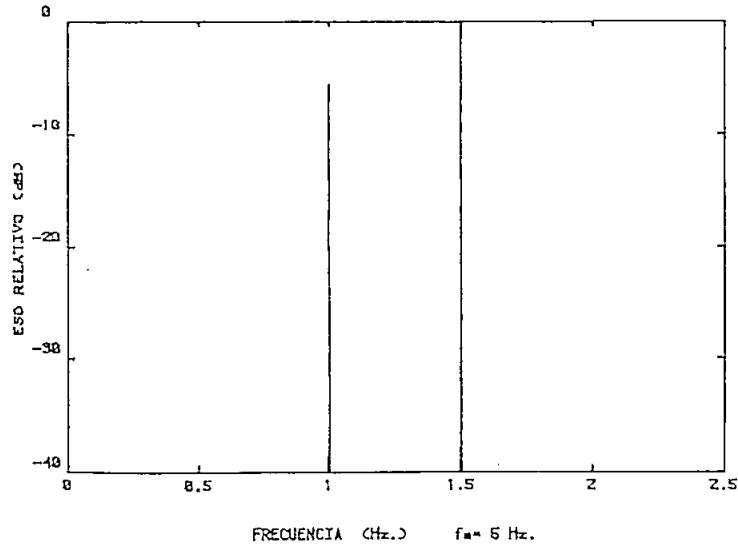
MUESTRAS DE DATOS NUMERO: 32



DESCOMPOSICION ARMONICA DE PISARENKO ORDEN 5



METODO DE PRONY EXTENDIDO ORDEN 2



DESCOMPOSICION LINEAL ESPECTRAL DE PRONY ORDEN 2

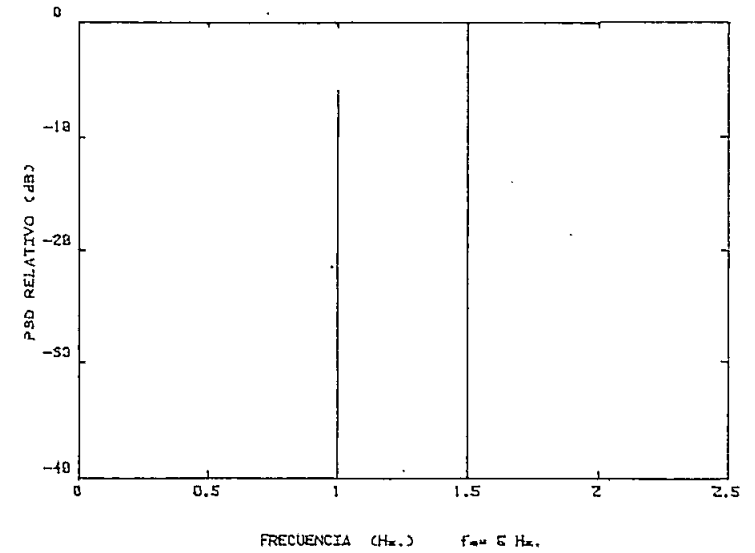


FIG. 5-1.- Analisis espectral de la señal: $X(t) = \text{Sen}(wt) + 2 \text{Cos}(1.5wt)$ en ausencia de ruido.

pectral cercana a la frecuencia de 0.10, existiendo, además muchas otras líneas espectrales espúreas que dificultan su localización, pero que sin embargo nos dan buena información acerca de la presencia de ruido. El método de Prony extendido en cambio, muestra una densidad espectral de energía con frecuencias grandemente cercanas a las reales y las dos sinusoides cercanas son resueltas con gran exactitud, aún cuando en lo que se refiere a la amplitud existe una pequeña diferencia que puede ser aceptable si nos referimos a los listados de valores, pero si observamos su espectro, la diferencia aparece en mayor magnitud debido únicamente a la calidad de resolución del gráfico; de dicho espectro se puede concluir además que la presencia de ruido es notoria. La más exacta estimación espectral de las potencias y frecuencias de las tres sinusoides se logra con la Descomposición espectral lineal de Prony, lo cual no debe sorprender por cuanto esta técnica es una aproximación de mínimos cuadrados que asume un modelo sinusoidal; la diferencia de amplitudes entre las dos sinusoides cercanas, existente en el método de Prony extendido desaparece, y es así como las amplitudes obtenidas son de valores 0.1, 1 y 1 que coinciden prácticamente con los datos reales. La información de ruido, para esta última técnica es muy buena, notándose además la casi ausencia de componentes espúreas.

En lo que se refiere a la determinación del orden, el método de Pisarenko lo hace de una forma más directa y por lo tanto más rápida que las técnicas de Prony, las cuales, como se ha visto utilizan formas autorregresivas de selección del orden, las cuales no son las más adecuadas y además encuentran limitación dependiendo del -

número de muestras disponibles.

En resumen podemos concluir que en cuanto a calidad de resolución los métodos de Prony son superiores al de Pisarenko, puesto que la estimación de potencia y frecuencia son menos polarizadas que aquellas obtenidas por el método de Pisarenko.

En lo que se refiere a eficiencia computacional, manifestaremos que si bien éste es un punto necesario en el análisis de los métodos implementados, no resulta muy importante, debido a que es un criterio relativo que depende principalmente del tipo de computador utilizado en la solución y aún más del tipo de aplicación, entrando en juego factores importantes como son la velocidad del computador para resolver determinadas operaciones propias del algoritmo, y capacidad de memoria del computador para almacenar en su memoria RAM resultados parciales sin necesidad de utilizar archivos, lo cual - hace lenta su ejecución.

El análisis se lo realiza en base a obtener los tiempos de ejecución de los algoritmos correspondientes a los métodos desarrollados, en función del número de muestras analizadas y el orden del modelo; los resultados obtenidos pueden resumirse en las figuras 5.2.a., 5.2.b. y 5.2.c.

A partir de estos gráficos puede observarse que el método de Pisarenko es más eficiente que el de Descomposición lineal espectral - de Prony, y esté a su vez que el de Prony extendido, lo cual es bastante razonable si consideramos que en general los métodos de Pro

ny proporcionan mayor cantidad de información que la técnica de Pisarenko y por lo tanto serán más lentos. El método de Descomposición lineal espectral de Prony, aparece más rápido que el de Prony extendido, puesto que en este último el número de parámetros a calcularse es el doble. Debemos mencionar adicionalmente que los tiempos de ejecución en la técnica de Pisarenko son muy sensibles a su aplicación, esto es, dependerán de la clase de datos que están siendo procesados, lo cual no se observa en alto grado en los métodos de Prony.

Utilizando regresión multilínea y una aproximación logarítmica para los tiempos de ejecución, se han obtenido las siguientes fórmulas para estimar el tiempo de demora en obtener los parámetros de los métodos estudiados:

METODO DE PISARENKO

$$t = 10^{(-1.87+0.0038N_1+0.1638P)}$$

t = tiempo

N₁ = número de muestras

P = orden del modelo.

METODO DE DESCOMPOSICION LINEAL ESPECTRAL DE PRONY

$$t = 10^{(-1.72+0.0103N_1+0.2253P)}$$

t = tiempo

N1 = número de muestras.

P = orden del modelo.

METODO DE PRONY EXTENDIDO

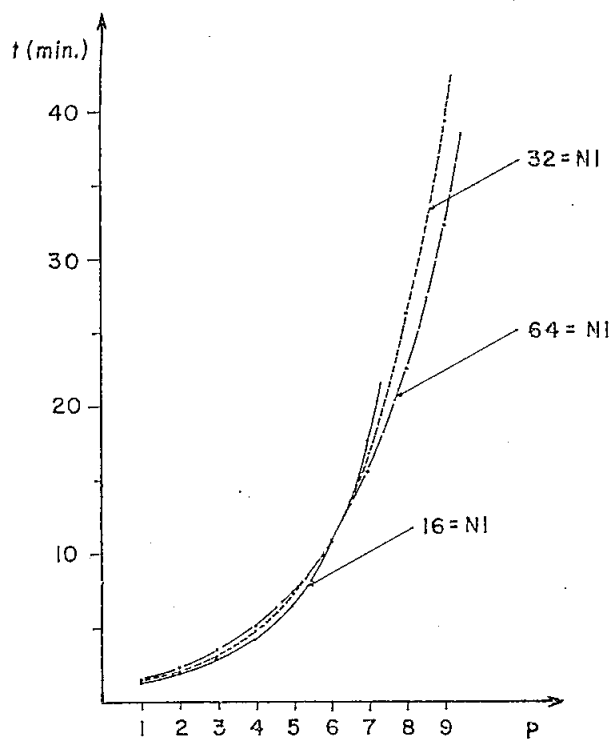
$$t = 10^{(-1.77+0.0119N1+0.2336P)}$$

t = tiempo.

N1 = número de muestras.

P = orden del modelo.

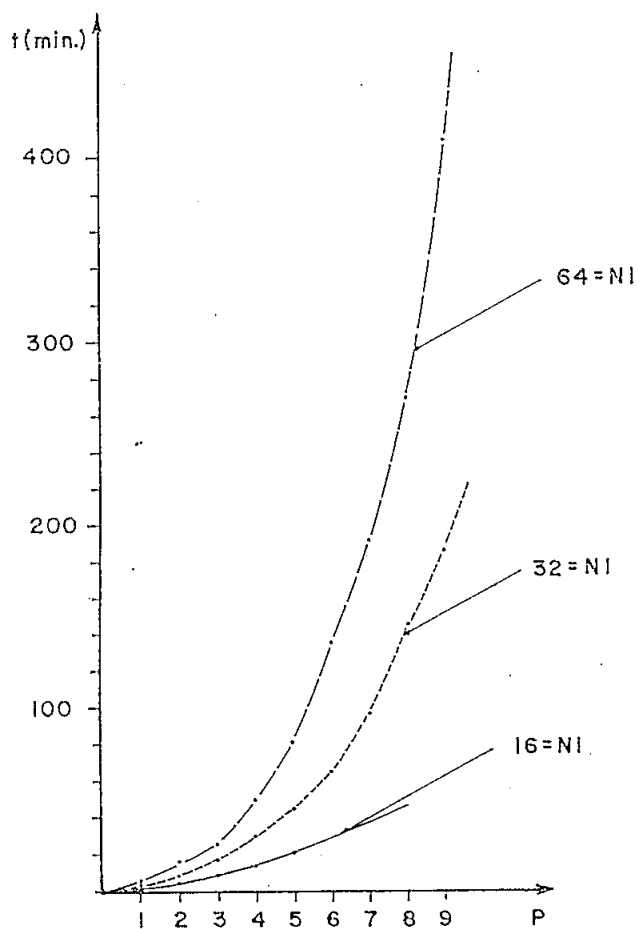
Es importante señalar que los tiempos estimados son aproximaciones que dependerán a más de los factores antes mencionados (tipo de señales analizadas), también de la clase de regresión multilínea y el tipo de aproximación utilizada, dando en todo caso una razonable idea del tiempo estimado de ejecución.



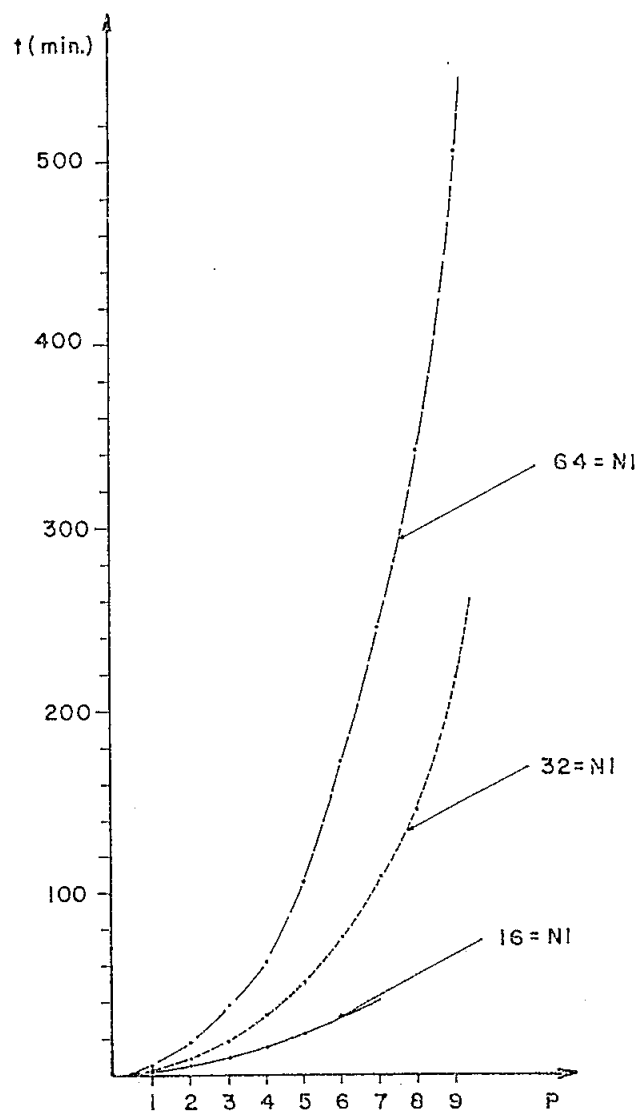
(a)

FIG.5-2-- Tiempos de ejecución en función del número de muestras N_1 y del orden del modelo P , para los métodos de:

- PISARENKO
- Densidad Lineal Espectral de PRONY
- PRONY extendido.



(b)



(c)

CAPITULO VI

COMENTARIOS Y CONCLUSIONES

A partir de los análisis y comparaciones de los métodos de estimación espectral, estudiados en los capítulos anteriores, se llega a las siguientes conclusiones:

- Las técnicas de Pisarenko y Prony son adecuadas para analizar procesos consistentes de sinusoides con ruido blanco gaussiano aditivo, los cuales se usan frecuentemente para evaluar técnicas de análisis espectral.
- El método de Pisarenko proporciona las frecuencias y potencias exactas de sinusoides reales en ruido blanco, solamente si se conoce con certeza los retrasos de autocorrelación. Adicionalmente no se obtiene información de fase con este método, puesto que se asume que se dispone únicamente de retrasos estimados de autocorrelación.
- Si los niveles de ruido son altos, la técnica de Pisarenko no trabaja bien y los resultados son inexactos. Igualmente si el orden seleccionado es muy alto aparece un gran número de líneas espectrales espúreas. Si el orden es muy bajo, las componentes espectrales encontradas tienden a aparecer en frecuencia bastante incorrectas.
- Si se utiliza estimación de retrasos de autocorrelación no polarizada

zados, se puede obtener valores propios negativos y valores de frecuencia sin sentido (absurdos).

- Se comprueba la existencia del efecto "line splitting" (efecto por el cual una señal de frecuencia determinada aparece desdoblada en dos señales muy próximas entre sí y a la frecuencia de la señal original) en el método de Prony extendido, el cual ha sido observado por varios autores, en procesos de estimación de parámetros autorregresivos.
- Tanto el método de Prony extendido, como el de Descomposición lineal espectral de Prony, presentan resultados precisos en análisis de señales sinusoidales en ausencia de ruido; de la misma manera en el estudio de procesos sinusoidales con ruido, los resultados obtenidos con los métodos de Prony, son mejores que los de la técnica de Pisarenko.
- El número de parámetros determinados en el método de Prony extendido es el doble que se requieren ya sea en la técnica de Pisarenko, o en el modelo de Descomposición lineal espectral de Prony.
- El algoritmo utilizado para calcular las amplitudes y fases de las sinusoides, es el mismo para los métodos de Prony extendido y Descomposición lineal espectral de Prony.
- El método de Descomposición armónica de Pisarenko, es computacionalmente más eficiente que el de Descomposición lineal espectral de Prony, y éste a su vez lo es más que el modelo de Prony extendido.

dido. Cabe señalar que el criterio de eficiencia computacional es bastante relativo, dependiendo en todo caso del tipo de computador utilizado en el análisis espectral.

- Para el método de Prony extendido, el máximo orden del modelo está limitado a ser $p \leq N/2$, al igual que para Descomposición lineal espectral de Prony. En base a los retrasos estimados de autocorrelación, podemos llegar a concluir que el máximo orden a obtener con la técnica de Pisarenko es también $p \leq N/2$.

Adicionalmente presentamos entre otras, las siguientes recomendaciones:

- No utilizar los programas implementados, para gran cantidad de datos muestreados, porque del análisis de eficiencia computacional - observamos que requeriremos de un alto tiempo de procesamiento, lo cual no resulta conveniente, ni práctico.
- Adecuar los programas realizados, para ser procesados en computadores de mayor capacidad de memoria, con lo cual el tiempo de ejecución se reduciría notablemente y se podría utilizar estos programas sin mayor limitación.
- Considerar las técnicas de análisis espectral estudiadas, en el procesamiento de señales sinusoidales con ruido coloreado.
- Estudiar el método de Pisarenko, mediante una matriz de autocorrelación no Toeplitz definida positiva, similar a la matriz de cova-

riancia $X_1^H X_1$ utilizada en el método de Prony, con lo que se tendría tal vez raíces de módulo unitario y se mejorarían los resultados,

- Aplicar los métodos de estimación espectral estudiados, al análisis de fonemas puros y a secuencia de fonemas, puesto que parece que los resultados a obtenerse serán mejores que los correspondientes a los métodos AR, de acuerdo a las características estudiadas y a algunos resultados obtenidos.

Finalmente se puede indicar, que se cree haber cumplido con el objetivo propuesto, el cual se refiere a proporcionar métodos computacionales que permitan analizar y obtener espectros de señales con ruido, tal es el caso de señales de radar y sonar en las que interesa localizar y clasificar objetos que emiten o reflejan energía, señales de EEG, señales sísmicas, geomagnéticas, etc.

APENDICE A

MANUAL DE USO DE LOS PROGRAMAS

A.1. OBJETO

Este manual permite la utilización de los programas implementados, con el fin de obtener el espectro de un conjunto de muestras, mediante las técnicas de análisis espectral que han sido estudiadas.

A.2. METODO DE SOLUCION

La técnica de Pisarenko utiliza el método de autocorrelación, en el que se resuelve la ecuación propia

$$R_{yy} A = \sigma_w^2 A$$

donde:

R_{yy} = matriz de autocorrelación, dependiente de los datos muestreados.

σ_w^2 = varianza del ruido; corresponde al mínimo valor propio de R_{yy} .

$A(2P)$ = vector de parámetros del modelo.

P = orden del modelo.

Determinados los parámetros del modelo se obtienen a partir de éstos las frecuencias de las sinusoides, las cuales a su vez sirven

para calcular las potencias sinusoidales y el espectro del modelo.

Para el caso de la segunda técnica, el método de Prony extendido , su modelo puede escribirse como:

$$\hat{x}_n = \sum_{m=1}^p b_m z_m^n \quad \text{para } n = 1, \dots, N$$

donde:

$$b_m = A_m \exp(j\theta_m)$$

$$z_m = \exp [(\alpha_m + j2\pi f_m) \Delta t]$$

La técnica de Prony se basa en resolver dos conjuntos secuenciales de ecuaciones lineales, con un paso intermedio de obtención de raíces polinomiales; este método permite obtener las amplitudes A_m , fases θ_m , factores de amortiguamiento α_m y frecuencias f_m , de p sinusoides que conforman el proceso analizado por medio de una estimación de mínimos cuadrados.

El método de Descomposición lineal espectral de Prony es un caso especial del método Prony extendido, en el cual $\alpha_m = 0$, sigue por lo tanto un proceso similar de solución, con la diferencia que en lugar de utilizar una estructura de covariancia para la matriz, se usa matrices de datos Toeplitz y Hankel.

Estos programas disponen en común los siguientes datos:

N = número de muestras.

T_2 = intervalo de tiempo de muestreo.

$X(N)$ = vector de datos.

A.3. DESCRIPCION DE LOS PROGRAMAS

Los programas han sido desarrollados en lenguaje BASIC, para ser utilizados en el microcomputador TEKTRONIX de la Facultad de Ingeniería Eléctrica.

Debido a las limitaciones de memoria del microcomputador (30 kbytes de RAM), los programas se han dividido, correspondiendo a cada técnica de análisis un programa. Adicionalmente se dispone de un programa de ingreso de datos y otro para la grafización de espectros. A la memoria del computador se cargará únicamente el programa de inmediata utilización. El manejo y utilización de estos programas se hace mediante un programa maestro.

El programa maestro y los subprogramas están grabados en disco, correspondiéndoles la siguiente identificación:

Programa maestro	: @ PHIDALGO/TESIS
Ingreso y almacenamiento de datos	: @ PHIDALGO/INGDATOS
Descomposición armónica de Pisarenko	: @ PHIDALGO/PISARENKO
Prony extendido	: @ PHIDALGO/PRONY
Descomposición Lineal Espectral de Prony:	@ PHIDALGO/DLEP
Determinación de amplitudes y fases exponenciales Prony:	@ PHIDALGO/ANGULO
Gráficos de Estimación Espectral	: @ PHIDALGO/GRAFICOS

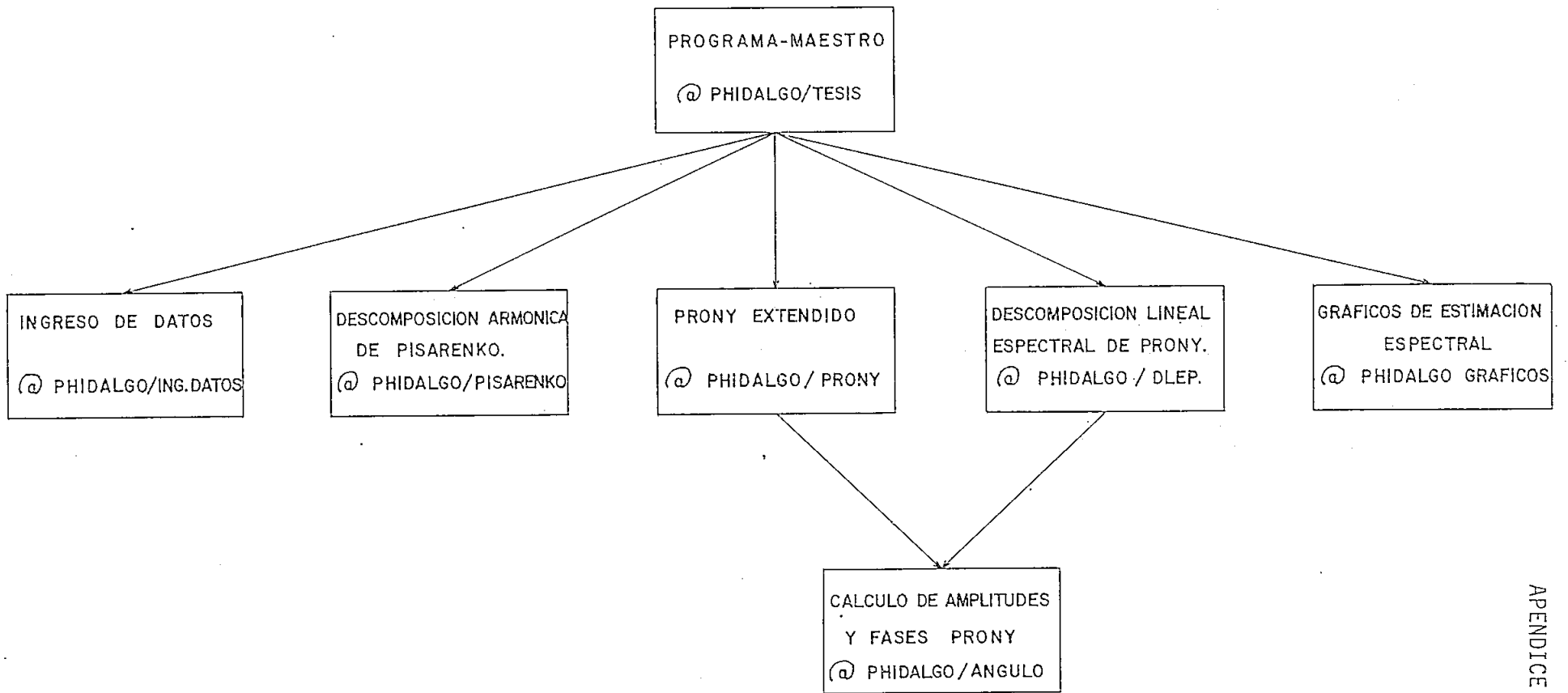


FIG. A.1.- Biblioteca de Programas.

En base a estos programas se estructura la biblioteca de programas como se indica en la figura A.1.

A.3.1. Programa Maestro: @PHIDALGO/TESIS

Es el programa piloto que comanda a los demás. Pide el ingreso de la unidad donde se encuentra el disco de trabajo. Presenta también un menú de los programas principales, las cuales carga a la memoria del computador según la tecla definible que se presione. Por su objetivo, permanece siempre en memoria.

Menú :

- Tecla 1.- Índice de programas.
- Tecla 2.- Ingreso y almacenamiento de datos.
- Tecla 3.- Descomposición armónica de Pisarenko.
- Tecla 4.- Método de Prony extendido.
- Tecla 5.- Descomposición lineal espectral de Prony.
- Tecla 6.- Gráficos.

A.3.2. Programa de ingreso de datos: @PHIDALGO/INGDATOS

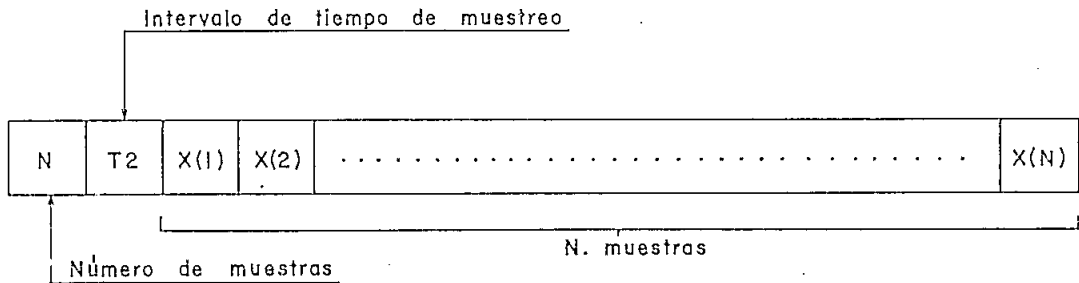
Permite el ingreso y almacenamiento de los datos a ser analizados. Además se puede generar muestras en base a una función matemática elegida por el usuario, a la que se puede adicionar muestras de ruido blanco.

El menú que presenta este programa es:

1. Ingreso de datos en forma directa.

2. Ingreso de datos muestreados a partir de la función matemática (con ruido blanco gaussiano).
3. Ingreso de datos muestreados a partir de la función matemática (sin ruido).
4. Retorno al programa principal.

Opción 1: Permite ingresar manualmente un conjunto de muestras. Una vez ingresadas, se listan en la pantalla del microcomputador, se corrigen y se almacenan en un archivo de datos con el siguiente formato:



Opción 2: Permite generar muestras en base a una función matemática que debe definir el usuario a partir de la línea 2120, tomando en cuenta las variables presentadas en el ejemplo. A las muestras generadas, se le agrega ruido blanco gaussiano, necesitando para ello ingresar únicamente la varianza S del ruido. Finalmente las muestras generadas se almacenan en un archivo de datos con un formato igual al descrito en la opción 1.

Opción 3: Igual a la opción 2, pero no añade muestras de ruido blanco gaussiano.

Opción 4: Permite retornar al menú del programa maestro.

A.3.3. Descomposición armónica de Pisarenko: @PHIDALGO/PISARENKO

Este programa permite determinar las frecuencias y potencias de si nusoides en ruido blanco, así como también proporciona el valor de la potencia del ruido.

El menú de este programa contiene:

1. Lectura de datos de archivo.
2. Cálculo de parámetros y la potencia del ruido para un orden re querido.
3. Cálculo de parámetros y la potencia del ruido para un orden su perior al calculado.
4. Cálculo de las frecuencias y potencias de la sinusoides.
5. Retorno al programa maestro.

Opción 1: Necesariamente la realización del método, iniciará con la lectura del archivo de datos generado en el programa anterior, para lo cual se deberá ingresar el nombre del archivo de datos.

Opción 2: Requiere ingresar el orden requerido del modelo y permi te determinar los parámetros y la potencia del ruido . El orden del modelo indica el número máximo de sinusoi- des que pueden existir con el proceso.

Opción 3: Mediante esta opción se puede calcular los parámetros y potencia del ruido para un orden dado en función del or

den anterior, debido a que el proceso es iterativo.

Opción 4: A ser ejecutado luego de la opción 2 o 3. Permite la determinación de las frecuencias y potencias de las si nusoides. Al final de la ejecución de esta opción se presenta un listado en pantalla de estos valores, pudiendo los mismos imprimirse en papel, luego de lo cual pasarán a almacenarse para la graficación del espectro - sin ser necesario ingresar el nombre del archivo de almacenamiento de datos.

Opción 5: Permite retornar al menú del programa maestro.

A.3.4. Método de Prony extendido: @PHIDALGO/PRONY

Permite determinar los factores de amortiguamiento y frecuencias - de las sinusoides del proceso analizado. El menú presentado por este programa es:

1. Lectura de datos de archivo.
2. Estimación de parámetros para un orden dado.
3. Determinación de frecuencias y factores de amortiguamiento.
4. Estimación de parámetros para un orden superior al calculado.
5. Programa para determinación de amplitudes y fases de exponenciales.
6. Retorno al programa maestro.

Opción 1: El programa necesariamente comenzará con esta opción, -

pues se necesita ingresar los datos a ser analizados, para lo cual se deberá ingresar el nombre del archivo de datos, creado en el programa de ingreso de datos.

Opción 2: Requiere ingresar como dato el orden requerido del modelo. El programa procede a calcular los parámetros del modelo hasta el orden pedido a menos que se cumpla el criterio de predicción de error final que determina el orden del modelo.

Opción 3: A ejecutarse luego de la opción 2 o 4. Determina las frecuencias y factores de amortiguamiento de las exponenciales, presentando al mismo tiempo en pantalla un listado de las mismas y la posibilidad de obtener su impresión en papel, luego de lo cual se almacenarán para ser utilizadas en el cálculo de amplitudes y fases exponenciales mediante la opción 5.

Opción 4: Puesto que el método de cálculo de parámetros es recursivo, se puede calcular un orden dado en función del inmediato anterior, por lo cual esta opción ahorra esfuerzo computacional. Esta opción puede ejecutarse luego de la opción 3 o 5.

Opción 5: Necesariamente se ejecutará luego de la opción 3. Su descripción se realiza en A.3.5.

Opción 6: Permite retornar al menú del programa maestro.

A.3.5. Determinación de amplitudes y fases exponenciales :

@PHIDALGO/ANGULO

Permite obtener las amplitudes y fases exponenciales tanto de los métodos de Prony extendido y Descomposición lineal espectral de Prony. Presenta dos opciones:

1. Evaluación de amplitudes y fases exponenciales.
2. Retorno al programa maestro.

Opción 1: Se debe ejecutar luego de la opción 3 de los programas A.3.4. o A.3.6. Calcula las amplitudes y fases exponenciales, las cuales se listan en pantalla, posibilitando su impresión en papel. Tanto los factores de amortiguamiento, frecuencias como amplitudes y fases de las exponenciales se almacenarán en un archivo de datos, para poder obtener la grafización de su espectro. Al igual que en el programa A.3.3. no es necesario ingresar el nombre del archivo de almacenamiento de datos.

Opción 2: Permite retornar al menú del programa maestro.

A.3.6. Descomposición lineal espectral de Prony: @PHIDALGO/DLEP.

Este programa permite determinar factores de amortiguamiento, frecuencias, amplitudes y fases del método de Descomposición lineal espectral de Prony.

En cuanto a las opciones que tiene y el significado de las mismas, se aplican los mismos criterios de A.3.4.

A.3.7. Programa de gráficos: @PHIDALGO/GRAFICOS

En base a los parámetros calculados anteriormente, permite calcular y grafizar los espectros correspondientes a los modelos de estimación espectral analizados.

El menú que contiene este programa es:

1. Espectro continuo entre las frecuencias $0 - f_m/2$.
2. Espectro continuo con el doble de resolución.
3. Espectro continuo con el doble de resolución que el último realizado, de la mitad superior o inferior del intervalo de frecuencia.
4. Espectro discreto entre las frecuencias $0 - f_m/2$.
5. Espectro discreto entre dos frecuencias cualquiera.
6. Retorno al programa maestro.

Opcción 1: Válida exclusivamente para el método de Prony extendido, que es el único de los tres métodos analizados que presenta un espectro continuo. Permite la realización de un gráfico del espectro entre la frecuencia 0 y la frecuencia de muestreo dividida para dos.

Opcción 2: Igual a la opción 1, pero el gráfico será de resolución igual al doble del último realizado, es decir el núme

ro de puntos del gráfico será el doble del gráfico anterior.

Opción 3: Similar a la opción 2, pero permite elegir si el cálculo se realiza en la mitad superior o inferior del intervalo de frecuencias.

Opción 4: Válida para los métodos de Pisarenko y Descomposición lineal espectral de Prony que presentan espectros discretos. El gráfico se obtiene entre la frecuencia 0 y la mitad de la frecuencia de muestreo.

Opción 5: Similar a la opción 4, pero permite escoger entre que frecuencia se obtiene el espectro. Para ello el usuario deberá ingresar las frecuencias inferior y superior del intervalo requerido.

Opción 6: Permite retornar el menú del programa maestro.

Cabe señalar además que la realización de los espectros continuos, pide ingresar el número de puntos que se desea obtener en el gráfico.

Durante la ejecución de las cinco primeras opciones de gráficos, adicionalmente se pide ingresar si el espectro se desea obtener normalizado respecto del valor máximo en escala lineal o en dB y si se desea obtener el gráfico en pantalla o en papel. La grafización se puede repetir si se requiere, finalizada la obtención del espectro.

A.4. NOMENCLATURA (Variables de entrada y salida)

Variables de entrada:

N = Número de muestras.

T = Intervalo de tiempo entre muestras.

$X(N)$ = Vector de N muestras.

$P5$ = Orden del modelo.

Variables de salida:

$V8$ = Potencia del ruido.

$P1(P5)$ = Vector de las potencias de las sinusoides.

$F5(P5)$ = Vector de las frecuencias de las sinusoides.

$A\emptyset(P5)$ = Vector de los factores de amortiguamiento de las sinusoides.

$B2(P5)$ = Vector de las amplitudes de las sinusoides.

$H2(P5)$ = Vector de las fases de las sinusoides.

La descripción de las restantes variables utilizadas, se encuentra en la implementación de los programas en los capítulos correspondientes al análisis de los métodos desarrollados.

A.5. FORMA DE PROPORCIONAR DATOS AL PROGRAMA

La manera de ingresar datos al programa se indica en A.3.2.

Podemos señalar además que el computador Tektronix utiliza lengua-

je BASIC, el cual permite tratar a las variables numéricas sin tener necesidad de definir formatos, como los que pueda requerir un número expresado en forma decimal entera, exponencial, etc.

Puesto que los programas implementados son de tipo iterativo, podemos indicar que cuando un programa requiere el ingreso de un dato, éste detendrá su ejecución indicando en pantalla la variable requerida, debiendo el usuario a través del teclado ingresar la variable y presionar luego la tecla RETURN para continuar con la ejecución del programa.

A.6. FORMA DE UTILIZAR EL PROGRAMA

1. Prenda el computador, de acuerdo a la siguiente secuencia:
 - 1.1. Unidad de discos superior (1 y 2).
 - 1.2. Unidad de discos inferior (0).
 - 1.3. Computadora.
2. Coloque el disco de Tesis en cualquiera de las unidades libres.
3. Inicialice el sistema de reloj del computador desde el teclado mediante la instrucción:

CALL "SETTIM", "DD-MMM-AABHH:MM:SS"

y luego presione la tecla RETURN.

Siendo, DD : día.
 MMM: mes (iniciales en inglés).
 AA : año.
 ␣ : espacio en blanco.
 HH : horas.
 MM : minutos.
 SS : segundos (opcional).

4. Cargue el disco de tesis en el sistema, usando las instrucciones

4.1. CALL "UNIT",U presione RETURN

4.2. CALL "MOUNT",U,A\$ presione RETURN

Siendo, U ; número de la unidad donde se colocó el disco.

NOTA: Si el disco fue colocado en la unidad 0, no es necesario ejecutar la instrucción 4.1.

5. Cargue a la memoria del computador el programa maestro, mediante la instrucción:

OLD"@PHIDALGO/TESIS" presione RETURN

6. Ejecute el programa con la instrucción:

RUN presione RETURN

7. Siga las instrucciones que aparecen en la pantalla.

8. Cuando desee interrumpir la ejecución de algún programa, presione dos veces la tecla BREAK, y para continuar asegúrese que los archivos estén cerrados; luego presione la tecla definible #1. Para cerrar los archivos use la instrucción: CLOSE.

9. Si en la pantalla aparece el mensaje de alistar el grafizador , debe proceder de la siguiente manera:

9.1. Encienda en grafizador.

9.2. Coloque papel y pluma.

9.3. Fije los límites del tamaño del gráfico con las teclas SET.

9.4. Presione la tecla RETURN.

10. Si en la pantalla aparece el mensaje de alistar el impresor, debe proceder de la siguiente manera:

10.1. Encienda el impresor.

10.2. Ponga "en línea" al impresor presionando la tecla "ON-LINE".

10.3. Presione la tecla RETURN.

NOTA: No se debe encender o apagar el grafizador o el impresor cuando existen archivos de disco abiertos, igualmente no se deben sacar los discos en el citado caso.

A.7. RESTRICCIONES

La principal restricción que se presenta en los programas se debe a la limitada capacidad de memoria del computador y por lo mismo

al tiempo de duración de ejecución, razón por la cual se recomienda utilizar los programas para un número no mayor de 128 datos y un orden no mayor a 9.

Vale la pena insistir en este punto que el orden del modelo no representa el número de parámetros o coeficientes que se han estimado sino el número máximo de sinusoides que están presentes en el proceso. Si se tiene una cantidad de datos mayor a la sugerida, se recomienda reducirlos a una cantidad menor, sin importarnos si estos datos representan todo un período de la señal, puesto que los métodos analizados en ningún caso consideran señales periódicas.

Si durante la ejecución de un programa se ingresa alguna opción que no ha sido contemplada en el menú, no aparece ningún comentario de error, pero se pide volver a ingresar una opción de las expuestas - en el menú. Igual situación acontece si el dato ingresado no corresponde lógicamente al dato pedido.

A.8. EJEMPLO

Se realiza a partir de un conjunto de 32 muestras que corresponde a un fonema de la vocal "a" que se encuentra en el archivo de datos "VOCAL.A", se los analiza mediante la técnica de Prony extendido para un orden 4. Los pasos a seguirse son:

1. De acuerdo a las instrucciones dadas se carga en programa maestro y puesto que los datos han sido ya ingresados y están en archivo, no es necesario escoger la opción de ingreso de datos, si

no directamente la del método solicitado, con la tecla definible 4.

2. En el programa Prony extendido:

- Se escoge la opción 1 de lectura de datos del archivo "VOCAL.A".
- Se calculan los parámetros para un orden dado, ingresando $P = 4$ (orden del modelo) y utilizando opción 2.
- Se elige opción 3 para el cálculo de frecuencias y factores de amortiguamiento. Si se desea se realiza la impresión de los resultados en papel.
- Se elige la opción 5 para cargar el programa que permite el cálculo de las amplitudes y fases exponenciales.

3. En el programa que determina amplitudes y fases exponenciales:

- Se elige la opción 1. Si se requiere se imprimen los resultados obtenidos en papel.
- Se regresa al programa maestro con la opción 2.

4. Se determina el espectro del modelo, eligiendo la opción de gráficos con la tecla definible 2 la cual carga este programa en la memoria del computador y luego:

- Se elige la opción 1.
- Se pide obtener el espectro en el grafizador.
- Se regresa al programa maestro con la opción 6.

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL
 FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA
 ELECTRONICA Y TELECOMUNICACIONES

LABORATORIO DE TECNICAS DE ANALISIS ESPECTRAL

FECHA: 17-FEB-85 09:32:45

NUMERO DE DATOS MUESTREADOS: 32
 ORDEN DEL MODELO: 4

TIEMPO DE MUESTREO: 8.3E-5 SEG.
 ARCHIVO DE DATOS: VOCAL.A

MUESTRAS DE DATOS
 =====

0.33740234	0.33496094	0.26464844	0.12158203
-0.01757813	-0.09765625	-0.13720703	-0.16992188
-0.19091797	-0.17431641	-0.12500000	-0.06884766
-0.01562500	0.03808594	0.11230469	0.20019531
0.25439453	0.24462891	0.17236328	0.06591797
-0.04052734	-0.14160156	-0.21289063	-0.20703125
-0.12646484	-0.02148438	0.07910156	0.15429688
0.17187500	0.14257813	0.08740234	-0.00244141

METODO DE FRONY EXTENDIDO
 =====

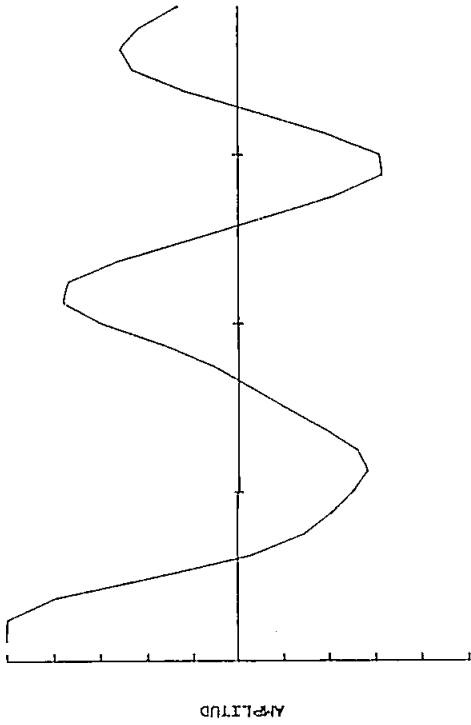
LOS FACTORES DE ATENUACION SON:

ATEN(1)= -570.6024591
 ATEN(2)= -142.3565010
 ATEN(3)= -1366.2385432
 ATEN(4)= 239.0033613

LAS FRECUENCIAS DE LAS SINUSOIDES SON:

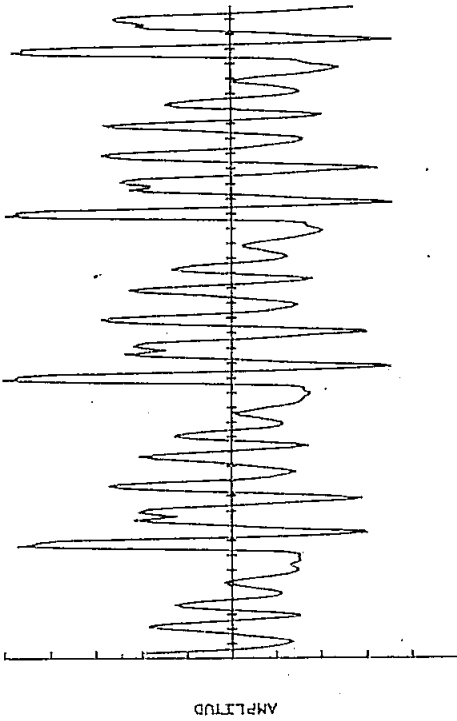
FREC(1)= 822.7042279
 FREC(2)= 1199.0097465
 FREC(3)= 2575.5248816
 FREC(4)= 3840.0173119

MUESTRAS DE DATOS NÚMERO, 32



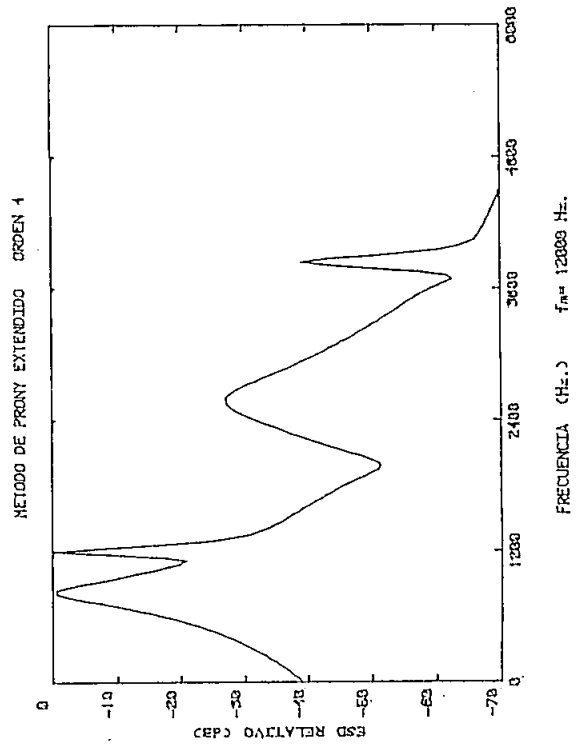
Esc. Horizontal | DIV : 8
Esc. Vertical | DIV : 0.2

MUESTRAS DE DATOS NÚMERO, 351



Esc. Horizontal | DIV : 8
Esc. Vertical | DIV : 0.2

FIG. A-2.- Análisis de la vocal "e" según el Método de PRONY Extendido.



```

2 U9=-1
3 K2=0
4 GO TO 100
5 Z6=1
6 IF K2=1 THEN 1000
7 K1=1
8 GO TO 470
9 IF K2=2 THEN 1000
10 K1=2
11 GO TO 470
12 IF K2=3 THEN 1000
13 K1=3
14 GO TO 470
15 IF K2=4 THEN 1000
16 K1=4
17 GO TO 470
18 IF K2=5 THEN 1000
19 K1=5
20 B4=0
21 GO TO 470
22 GO TO 1860

```

100 REM ***** PROGRAMA MAESTRO:@PHIDALGO/TESIS *****

110 REM
120 REM ESCUELA POLITECNICA NACIONAL
130 REM FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA
140 REM ELECTRONICA Y TELECOMUNICACIONES
150 REM
160 REM METODOS DE PRONY Y FISARENKO PARA ANALISIS ESPECTRAL
170 REM =====

180 REM
190 REM TESIS DE GRADO

200 REM
210 REM PABLO W. HIDALGO LASCANO

220 REM
230 REM MARZO/1985

240 IF U9=0 OR U9=1 OR U9=2 THEN 330
250 REM ***** INGRESO DE LA UNIDAD DE DISCO *****

260 PRINT "LJJJJJ UNIDAD DONDE SE ENCUENTRA EL DISCO? GG";

270 INPUT U9

280 IF NOT(U9=0 OR U9=1 OR U9=2) THEN 260

290 CALL "UNIT",U9

300 REM
310 REM ***** INDICE DE PROGRAMAS *****

320 REM
330 PRINT "L NUEVAS TECNICAS DE ANALISIS ESPECTRAL"

340 PRINT " ===== ===== == ===== ===== "

350 PRINT "JJJ TECLA 1 ==> INDICE DE PROGRAMAS"

360 PRINT "J TECLA 2 ==> INGRESO Y ALMACENAMIENTO DE DATOS"

370 PRINT "J TECLA 3 ==> DESCOMPOSICION ARMONICA DE FISARENKO"

380 PRINT "J TECLA 4 ==> METODO DE PRONY EXTENDIDO"

390 PRINT "J TECLA 5 ==> DESCOMPOSICION LINEAL ESPECTRAL DE PRONY"

400 PRINT "J TECLA 6 ==> GRAFICOS"

410 PRINT "JJJJG Presione la tecla del programa a ejecutar"

420 END

```

30 REM ***** SELECCION DE PROGRAMAS *****
40 PAGE
50 DATA "@PHIDALGO/INGDATOS", "@PHIDALGO/PISARENKO", "@PHIDALGO/PRONY"
60 DATA "@PHIDALGO/DLEP", "@PHIDALGO/GRAFICOS", "@PHIDALGO/ANGULO"
70 RESTORE 450
80 FOR J=1 TO K1
90 READ R$
00 NEXT J
10 DELETE 1001,30000
20 J=MEMORY
30 APPEND R$;1000
40 GO TO 1000
000 REM ***** CARGA DEL PROGRAMA SELECCIONADO *****

```

```

000 REM @PHIDALGO/INGDATOS
010 K2=1
020 REM PROGRAMA PARA INGRESO Y ALMACENAMIENTO DE DATOS
030 REM
040 PRINT "LJJJ INGRESO Y ALMACENAMIENTO DE DATOS"
050 PRINT " *****"
060 PRINT "JJ1 ---> INGRESO DE DATOS EN FORMA DIRECTA"
070 PRINT "JJ2 ---> INGRESO DE DATOS MUESTREADOS A PARTIR DE LA "
080 PRINT "FUNCION MATEMATICA"
090 PRINT " (CON RUIDO BLANCO GAUSSIANO)"
100 PRINT "JJ3 ---> INGRESO DE DATOS MUESTREADOS A PARTIR DE LA "
110 PRINT "FUNCION MATEMATICA"
120 PRINT " (SIN RUIDO)"
130 PRINT "JJ4 ---> RETORNO AL PROGRAMA PRINCIPAL"
140 PRI "JJJJ Ingrese el numero de la operacion a ejecutarse:G"
150 INPUT Q9
160 IF Q9<>1 AND Q9<>2 AND Q9<>3 AND Q9<>4 THEN 1140
170 GO TO Q9 OF 1180,1180,1180,2140
180 REM *** INICIALIZACION DE INGRESO DE DATOS ***
190 PRINT "LJJINGRESE EL NUMERO DE DATOS N="
200 INPUT N
210 IF N>128 THEN 1190
220 PRINT "JJINGRESE EL INTERVALO DE TIEMPO DE MUESTREO T2(seg.) ="
230 INPUT T2
240 DELETE X,Z,S
250 DIM X(N),Z(N)
260 IF Q9=2 OR Q9=3 THEN 1730
270 REM *** INGRESO DE DATOS EN FORMA DIRECTA ***
280 PRINT "JJINGRESE LOS DATOS MUESTREADOS DE LA SENAL ANALIZADA"
290 PRINT @32,26:2
300 FOR I=1 TO N
310 PRINT "J X("I;")="
320 INPUT X(I)
330 NEXT I
340 PRINT "LJJ LOS DATOS INGRESADOS SON:GG"
350 PRINT "JJJ NUMERO DE DATOS N ="
360 PRINT "J INTERVALO DE TIEMPO DE MUESTREO T2(seg.) ="
370 PRINT @32,26:0
380 FOR I=1 TO N
390 PRINT "J X("I;")="X(I)
400 NEXT I
410 PRINT "JJJ VERIFIQUE DATOS,DESEA CORREGIRLOS?(SI O NO) "
420 INPUT X#
430 IF X#="SI" OR X#="S" THEN 1450
440 GO TO 1530
450 PRINT @32,26:2
460 PRINT "J DATO # : "
470 INPUT N1
480 PRINT "K X("N1;")="
490 INPUT X(N1)
500 PRINT "JDESEA CORREGIR OTRO DATO?(SI O NO)GG: "
510 GO TO 1420
520 REM
530 REM ***** CREACION Y ALMACENAMIENTO DE DATOS EN ARCHIVO *****

```

```

1540 REM
1550 PRINT "LJJGG LOS DATOS SE ALMACENARAN EN EL ARCHIVO A$ = ";
1560 INPUT A$
1570 CALL "FILE",U9,A$,X$
1580 IF X$="" THEN 1640
1590 PRI "¿ARCHIVO ";A$;" YA EXISTE,DESEA DESTRUIR SU CONTENIDO?(S/N) ";
1600 INPUT Y$
1610 IF Y$="SI" OR Y$="S" THEN 1630
1620 GO TO 1550
1630 KILL A$
1640 CREATE A$;(4+N)*9+1,0
1650 OPEN A$;1,"F",X$
1660 WRITE #1;N,T2,X
1670 CLOSE
1680 DELETE Z
1690 PRINT "JJ LOS DATOS HAN SIDO ALMACENADOS; RETURN PARA CONTINUARGG";
1700 INPUT Y$
1710 GO TO 1000
1720 REM
1730 REM *** INGRESO DE DATOS A PARTIR DE LA FUNCION MATEMATICA ***
1740 PRINT "LJJ Esta definida la funcion matematica?(SI o NO); GG";
1750 INPUT T$
1760 IF T$="SI" OR T$="S" THEN 1860
1770 PRINT "JJDEFINA LA FUNCION MATEMATICA A PARTIR DE LA LINEA 2120";
1780 PRINT " TOMANDO EN "
1790 PRINT "CUENTA LAS VARIABLES CONSIDERADAS EN EL EJEMPLO";
1800 PRINT " PRESENTADO; ESTO ES: "
1810 PRINT "          J ---- TIEMPO"
1820 PRINT "          X(I) ---- VALOR DE LA FUNCIONJJ"
1830 LIST 2110,2130
1840 PRINT "J PRESIONE TECLA 20 PARA CONTINUAR JJG"
1850 END
1860 J=-T2
1870 REM *** EVALUACION DE DATOS MEDIANTE LA FUNCION MATEMATICA ***
1880 REM
1890 REM
1900 REM MUESTREO DE LA SENAL
1910 FOR I=1 TO N
1920 J=T2+J
1930 GOSUB 2100
1940 NEXT I
1950 IF Q9=3 THEN 1530
1960 REM *** SE GENERA LAS MUESTRAS DE RUIDO BLANCO ***
1970 PRINT "JJINGRESAR LA VARIANZA DEL RUIDO, S = ";
1980 INPUT S
1990 S1=SQR(S)
2000 Q1=12
2010 Z=0
2020 FOR I=1 TO N
2030 FOR J=1 TO Q1
2040 Z(I)=Z(I)+RND(-1)
2050 NEXT J
2060 Z(I)=(Z(I)-0.5*Q1)*S1/2
2070 NEXT I

```

```

2080 X=X+Z
2090 GO TO 1530
2100 SET RADIANS
2110 REM *** SUBROUTINA QUE DEFINE Y EVALUA LA FUNCION ***
2120 X(I)=SIN(2*PI*3*J)+SIN(2*PI*4*J)
2130 RETURN
2140 REM **** RETORNO AL PROGRAMA MAESTRO ****
2150 GO TO 100

```



```

000 REM      @PHIDALGO/PISARENKO
010 REM
020 K2=2
030 Z6=1
040 REM      ESTIMACION ESPECTRAL CON DESCOMPOSICION ARMONICA DE FISARENKO
050 REM
060 PRINT "LJJJ      DESCOMPOSICION ARMONICA DE FISARENKO"
070 PRINT "      *****"
080 PRINT "JJ1 --->   LECTURA DE DATOS DE ARCHIVO"
090 PRINT "JJ2 --->   CALCULO DE PARAMETROS Y LA POTENCIA DEL RUIDO ";
100 PRINT "PARA UN ORDEN "
110 PRINT "J      REQUERIDO"
120 PRINT "JJ3 --->   CALCULO DE PARAMETROS Y POTENCIA DEL RUIDO PARA";
130 PRINT "UN ORDEN"
140 PRINT "J      SUPERIOR AL CALCULADO"
150 PRINT "JJ4 --->   CALCULO DE LAS FRECUENCIAS Y POTENCIAS DE LAS";
160 PRINT "SINUSOIDES"
170 PRINT "JJ5 --->   RETORNO AL PROGRAMA MAESTRO"
180 PRINT "JJJ      Ingrese el numero de la operacion a ejecutarse: GGG";
190 INPUT B3
200 IF B3<>1 AND B3<>2 AND B3<>3 AND B3<>4 AND B3<>5 THEN 1180
210 GO TO B3 OF 1220,1430,1830,2900,5980
220 REM
230 REM ***** LECTURA DE DATOS DE ARCHIVO *****
240 REM
250 PRINT "LJJJJJ      LOS DATOS A LEERSE ESTAN EN EL ARCHIVO A$ = ";
260 INPUT K$
270 OPEN K$;1,"R",X$
280 READ #1;N5,T2
290 DELETE X0
300 DIM X0(N5)
310 READ #1;X0
320 CLOSE 1
330 PRINT "JJJJ      LOS DATOS HAN SIDO LEIDOS; RETURN PARA CONTINUARGGG";
340 INPUT Y$
350 T$="PERIODO/MUESTREO"
360 KILL T$
370 CREATE T$;9+1,0
380 OPEN T$;1,"F",S$
390 WRITE #1;T2
400 CLOSE 1
410 GO TO 1060
420 REM
430 REM ***** CALCULO DE LOS RETRAZOS ESTIMADOS DE AUTOCORRELACION *****
440 REM
450 PRINT "LJJJJJINGRESE EL ORDEN REQUERIDO DE LA SENAL ANALIZADA ";
460 PRINT "P5 = GG";
470 INPUT P5
480 IF P5<=0 OR P5>9 THEN 1450
490 GOSUB 6090
500 DELETE L3,F,R5,S
510 DIM L3(N5/2),R5(N5),S(N5+1)
520 L3=0
530 E9=1.0E-5

```

```

540 R5=0
550 F=1
560 J2=2
570 S(1)=0
580 FOR I=1 TO N5
590 S(I+1)=S(I)+X0(I)*X0(I)/N5
600 NEXT I
610 R5(1)=S(I)
620 FOR J=P TO J2
630 S(1)=0
640 FOR I=1 TO N5-J
650 S(I+1)=S(I)+X0(I+J)*X0(I)/N5
660 R5(J+1)=S(I+1)
670 NEXT I
680 NEXT J
690 DELETE T9,A,D,O,Q,AB,K,A2
700 DIM T9(J,J)
710 I=1
720 H=1
730 T9(I,I)=R5(1)
740 IF I=J THEN 2000
750 FOR K=I TO J
760 IF I=K THEN 1800
770 H=H+1
780 T9(I,K)=R5(H)
790 T9(K,I)=R5(H)
800 NEXT K
810 I=I+1
820 GO TO 1720
830 REM**CALCULO DE PARAMETROS PARA UN ORDEN SUPERIOR AL DETERMINADO**
840 N$="ORDEN/SUPE."
850 OPEN N$;1,"R",Z$
860 READ #1:N5,T2,L1,J2
870 DELETE R5,X0,S,L3
880 DIM X0(N5),S(N5+1),L3(N5/2),R5(N5)
890 READ #1:R5,X0,L3
900 CLOSE
910 E9=1.0E-5
920 PRINT "LJJJSE HAN ESTIMADO PARAMETROS HASTA UN ORDEN P = ";L1
930 PRI "JJJJINGRESE EL NUEVO ORDEN REQUERIDO DE LA SENAL ANALIZADA ";
940 PRINT " P5 = GG";
950 INPUT P5
960 IF P5<=L1 OR P5>9 THEN 1920
970 GOSUB 6090
980 P=J2+1
990 GO TO 2710
000 REM
010 REM *** CALCULADOS LOS RETRAZOS DE AUTOCORRELACION ; SE CALCULA
020 REM *** EL VALOR PROPIO LAMBDA,EL VECTOR PROPIO A, EL NUMERO P DE
030 REM *** DE SINUSOIDES DE LA SENAL ANALIZADA
040 REM *** RESOLUCION DEL SISTEMA TOEPLITZ RyyA(K+1)=A(K) *****
050 REM Ryy - Matriz Simetrica Toeplitz Inversa
060 REM
070 IF J2>2 THEN 2180

```

```

080 L1=0
090 REM   ESTA SUBROUTINA RESUELVE EL SISTEMA:  A(k+1)=Rinv'A(k)
100 REM   Donde:
110 REM       Rinv' - Matriz Simetrica Toeplitz Inversa
120 REM       A     - Vector de inicializacion, unitario; realizada
130 REM               la subrutina sera el vector solucion(vector
140 REM               propio)
150 REM   ESTA SUBROUTINA ENCUENTRA TAMBIEN EL VALOR PROPIO MAS PEQUENO
160 REM       SE UTILIZA EL METODO DE LA POTENCIA
170 REM
180 T9=INV(T9)
190 F$="DATOS/PSNKO"
200 KILL F$
210 CREATE F$;2*J*J,10
220 G5=0
230 OPEN F$;1,"F",Y$
240 FOR I=1 TO J
250 FOR K=1 TO J
260 G5=G5+1
270 WRITE #1,G5:T9(I,K)
280 NEXT K
290 NEXT I
300 CLOSE
310 DELETE T9,A,AB,A2
320 DIM A(J,1),AB(J,1),A2(J,1)
330 FOR I=1 TO J
340 A(I,1)=1
350 NEXT I
360 T1=0
370 OPEN F$;1,"R",X$
380 FOR I=1 TO J
390 AB(I,1)=0
400 FOR K=1 TO J
410 G5=(I-1)*J+K
420 READ #1,G5:T9
430 AB(I,1)=AB(I,1)+T9*A(K,1)
440 NEXT K
450 NEXT I
460 CLOSE
470 T1=T1+1
480 FOR I=1 TO J
490 A2(I,1)=AB(I,1)/AB(1,1)
500 NEXT I
510 FOR I=1 TO J
520 D=A(I,1)-A2(I,1)
530 IF ABS(D)=>E9*A2(I,1) THEN 2560
540 NEXT I
550 GO TO 2610
560 FOR I=1 TO J
570 A(I,1)=A2(I,1)
580 NEXT I
590 IF T1>50 THEN 2610
2600 GO TO 2370
2610 L1=L1+1

```

```

620 L3(L1)=1/AB(1,1)
630 IF L1=1 THEN 2650
640 IF ABS(L3(L1)-L3(L1-1))<1.0E-5 THEN 2760
650 IF L1=P5 THEN 2760
660 F=J2+1
670 PRINT "LJJJJORDEN CALCULADO: ";L1
680 PRINT "JJJEL ERROR EN EL CALCULO DE LOS PARAMETROS NO ES MINIMO,";
690 PRINT " ESTOY"
700 PRINT "JCALCULANDO PARAMETROS PARA UN ORDEN: GG";L1+1
710 J2=2*(L1+1)
720 IF J2<=N5-2 THEN 1620
730 PRINT "JJJ DATOS INGRESADOS INSUFICIENTES;RETURN PARA CONTINUAR"
740 INPUT Y$
750 GO TO 1000
760 FOR I=1 TO J
770 A(I,1)=A2(I,1)
780 NEXT I
790 N$="ORDEN/SUPE."
800 KILL N$
810 CREATE N$;(2*N5+3)*9+1,0
820 OPEN N$;1,"F",Y$
830 WRITE #1;N5,T2,L1,J2,R5,X0,L3
840 CLOSE
850 PRINT "JJJ EL NUMERO DE SINUSOIDES DE LA SENAL ANALIZADA ES: ";L1
860 PRINT "JJJ LA POTENCIA DEL RUIDO ES: ";L3(L1)
870 PRINT "JJJ          PRESIONE RETURN PARA CONTINUAR;G";
880 INPUT Y$
890 GO TO 1060
900 REM
910 REM **** SE CALCULAN LAS RAICES DEL POLINOMIO FORMADO CON LOS
920 REM **** COEFICIENTES DEL VECTOR PROPIO A
930 REM **** SE UTILIZA EL PROGRAMA ECUAPOL PARA ESTA SOLUCION
940 P2=L1
950 N=2*P2
960 REM
970 P9=32
980 GOSUB 3240
990 REM *** VERIFICACION EN U+JV
1000 DELETE U,V
1010 DIM U(N),V(N)
1020 FOR J=1 TO N
1030 U(J)=A(1,1)
1040 V(J)=0
1050 FOR J1=1 TO N
1060 T=U(J)*R1(J)-V(J)*I1(J)+A(J1+1,1)
1070 V(J)=V(J)*R1(J)+U(J)*I1(J)
1080 U(J)=T
1090 NEXT J1
1100 NEXT J
1110 U=U*U
1120 V=V*V
1130 U=U+V
1140 U=SQR(U)
1150 REM **** AQUI IMPRESION DE RAICES

```

```

160 PRINT @P9: USING 3170:
170 IMAGE /" RAICES:"/" NO,"10X"PARTE REAL"13X"PARTE IMAG."S
180 PRINT @P9:" VERIF,J"
190 FOR J=1 TO N
200 PRINT @P9: USING 3210:J,R1(J),I1(J),U(J)
210 IMAGE 3X,2D,2(13D,9D),8X3E
220 NEXT J
230 GO TO 4590
240 REM RAIZPOLI2
250 REM
260 REM SUB. PARA SOLUCION DE ECUACIONES POLINOMIALES
270 REM METODO: DESCENSO MAS PRONUNCIADO CON ESCALAMIENTO DE RAICES
280 REM 31 DE MAYO DE 1980
290 REM ING. EFRAIN DEL PINO V.
300 REM
310 REM N - GRADO DEL POLINOMIO
320 REM A - VECTOR CON COEFICIENTES EN ORDEN DESCENDENTE
330 REM DE POTENCIAS
340 REM
350 REM R1 - VECTOR CON PARTES REALES DE LAS RAICES
360 REM I1 - VECTOR CON PARTES IMAGINARIAS DE LAS RAICES
370 REM
380 REM N, A NO SON ALTERADOS POR LA SUBROUTINA
390 REM
400 PAGE
410 NO=N
420 DELETE A1,C,R1,I1,U,V,U1,V1,T9,A8,A2,X,Y
430 DIM A1(NO),C(NO),R1(NO),I1(NO)
440 J9=0
450 E=1.0E-10
460 E1=E^2
470 R1=0
480 I1=0
490 FOR J=1 TO NO
500 A1(J)=A(J+1,1)/A(1,1)
510 NEXT J
520 IF NO>0 THEN 3540
530 RETURN
540 IF A1(NO)<>0 THEN 3580
550 J9=J9+1
560 NO=NO-1
570 GO TO 3520
580 IF NO<>1 THEN 3620
590 J9=J9+1
600 R1(J9)=-A1(NO)
610 RETURN
620 IF NO<>2 THEN 3940
630 X=-A1(1)/2
640 J9=J9+1
650 T=X*X-A1(2)
660 IF T<0 THEN 3710
670 T=SQR(T)
680 R1(J9)=X+T
690 R1(J9+1)=X-T

```

```

700 RETURN
710 R1(J9)=X
720 R1(J9+1)=R1(J9)
730 I1(J9)=SQR(-T)
740 I1(J9+1)=-I1(J9)
750 RETURN
760 REM SUB. EVALUACION DE F(Z)=U + JV
770 U=1
780 V=0
790 FOR J=1 TO NO
800 T=U*X-V*Y+C(J)
810 V=V*X+U*Y
820 U=T
830 NEXT J
840 RETURN
850 REM SUB. EVAL. F'(Z)=U1 + JV1
860 U1=NO
870 V1=0
880 FOR J=1 TO NO-1
890 T=U1*X-V1*Y+(NO-J)*C(J)
900 V1=V1*X+U1*Y
910 U1=T
920 NEXT J
930 RETURN
940 REM DESCENSO MAS PRONUNCIADO
950 T=ABS(A1(NO))
960 DIM A1(NO),C(NO)
970 IF T=1 THEN 4050
980 H=T^(1/NO)
990 T=1
4000 FOR J=1 TO NO
4010 T=T*H
4020 C(J)=A1(J)/T
4030 NEXT J
4040 GO TO 4070
4050 C=A1
4060 H=1
4070 X=0.7
4080 Y=0.6
4090 GOSUB 3760
4100 F1=U*U+V*V
4110 IF F1<E1 THEN 4310
4120 GOSUB 3850
4130 T=U1*U1+V1*V1
4140 X1=-(U*U1+V*V1)/T
4150 Y1=(U*V1-V*U1)/T
4160 X=X+X1
4170 Y=Y+Y1
4180 GOSUB 3760
4190 F2=U*U+V*V
4200 IF F2<E1 THEN 4290
4210 IF F2<F1 THEN 4270
4220 X=X-X1
4230 Y=Y-Y1

```

```

4240 X1=0.8*X1
4250 Y1=0.8*Y1
4260 GO TO 4160
4270 F1=F2
4280 GO TO 4120
4290 IF ABS(X1)<E AND ABS(Y1)<E THEN 4310
4300 GO TO 4270
4310 X=X*H
4320 Y=Y*H
4330 IF ABS(Y)>E THEN 4350
4340 Y=0
4350 J9=J9+1
4360 R1(J9)=X
4370 I1(J9)=Y
4380 IF Y=0 THEN 4520
4390 J9=J9+1
4400 R1(J9)=X
4410 I1(J9)=-Y
4420 R=-2*X
4430 S9=X*X+Y*Y
4440 A1(1)=A1(1)-R
4450 A1(2)=A1(2)-R*A1(1)-S9
4460 IF NO<5 THEN 4500
4470 FOR J=3 TO NO-2
4480 A1(J)=A1(J)-R*A1(J-1)-S9*A1(J-2)
4490 NEXT J
4500 NO=NO-2
4510 GO TO 3580
4520 T=1
4530 FOR J=1 TO NO-1
4540 T=T*X+A1(J)
4550 A1(J)=T
4560 NEXT J
4570 NO=NO-1
4580 GO TO 3580
4590 REM
4600 REM *** A PARTIR DE LAS RAICES DEL POLINOMIO SE CALCULAN
4610 REM *** F FRECUENCIAS SINUSOIDALES
4620 REM
4630 I9=0
4640 FOR I=1 TO N
4650 IF R1(I)=0 OR I1(I)=0 THEN 4690
4660 I9=I9+1
4670 R1(I9)=R1(I)
4680 I1(I9)=I1(I)
4690 NEXT I
4700 N=I9
4710 DELETE F,F5,I7
4720 DIM F(N),F5(N/2)
4730 FOR I=1 TO N
4740 IF R1(I)<0 AND I1(I)>0 THEN 4780
4750 IF R1(I)<0 AND I1(I)<0 THEN 4800
4760 F(I)=ATN(I1(I)/R1(I))/(2*PI*T2)
4770 GO TO 4810

```

```

780 F(I)=ATN(I1(I)/R1(I))/(2*PI*T2)+1/(2*T2)
790 GO TO 4810
800 F(I)=ATN(I1(I)/R1(I))/(2*PI*T2)-1/(2*T2)
810 NEXT I
820 I7=0
830 FOR I=1 TO N-1
840 FOR J=I+1 TO N
850 IF ABS(F(I))<>ABS(F(J)) THEN 4890
860 I7=I7+1
870 F5(I7)=ABS(F(I))
880 GO TO 4900
890 NEXT J
900 NEXT I
910 REM
920 REM *** SE DETERMINAN LAS P POTENCIAS SINUSOIDALES ***
930 REM
940 P2=N/2
950 DELETE R2,P1,R3,P6,P4,R6,R7,W
960 DIM R2(P2,P2),P1(P2),R3(P2),P4(P2+1),R6(P2,P2+1),R7(P2,P2+1),W(P2)
970 FOR J=1 TO P2
980 W(J)=2*PI*T2*F5(J)
990 R2(1,J)=COS(W(J))
000 IF P2=1 THEN 5050
010 FOR I=2 TO P2
020 R2(I,J)=COS(I*W(J))
030 NEXT I
040 NEXT J
050 FOR I=2 TO P2+1
060 R3(I-1)=R5(I)
070 NEXT I
080 REM
090 REM *** SE RESUELVE EL SISTEMA FF=R ***
100 REM R2 MATRIZ CON TERMINOS QUE DEPENDEN DE FREQ. SINUSOIDALES
110 REM P1 VECTOR DE LAS POTENCIAS SINUSOIDALES
120 REM R3 VECTOR CON P RETRAZOS DE AUTOCORRELACION
130 REM
140 FOR I=1 TO P2
150 FOR J=1 TO P2
160 R6(I,J)=R2(I,J)
170 NEXT J
180 NEXT I
190 FOR I=1 TO P2
200 R6(I,P2+1)=R3(I)
210 NEXT I
220 R7=INV(R6)
230 FOR I=1 TO P2
240 P1(I)=R7(I,P2+1)
250 NEXT I
260 V8=R5(1)-SUM(P1)
270 Q=32
280 CALL "TIME",Z$
290 PRINT @Q:"LJJJJJESCUELA POLITECNICA NACIONAL"
300 PRINT @Q:"FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA"
310 PRINT @Q:"ELECTRONICA Y TELECOMUNICACIONES"

```



```

320 Q7=1
330 Q9=50
340 PRI @Q: USI 5350: "NUEVAS TECNICAS-ANALISIS ESPECTRAL", "FECHA:", Z$
350 IMAGE FA, 10X, FA, 18A
360 PRI @Q: "===== " ;
370 PRINT @Q: "===== "
380 PRINT @Q: "NUMERO DE DATOS MUESTREADOS: " ; N5 ; " TIEMPO " ;
390 PRINT @Q: " DE MUESTREO: " ; T2 ; " SEG. "
400 PRINT @Q: "ORDEN DEL MODELO: " ; F2 ; " ARCHIVO " ;
410 PRINT @Q: " DE DATOS: " ; K$
420 PRINT @Q: "JJJ MUESTRAS DE DATOS"
430 PRINT @Q: " ===== == =====JJJ "
440 Q7=Q7+18
450 FOR Q9=1 TO N5 STEP 4
460 PRINT @Q: USING 5470: X0(Q9), X0(Q9+1), X0(Q9+2), X0(Q9+3)
470 IMAGE 10X3D, 8D3X3D, 8D3X3D, 8D3X3D, 8D
480 GOSUB 6030
490 NEXT Q9
500 PRINT @Q: "JJJ DESCOMPOSICION ARMONICA DE PISARENKO"
510 PRINT @Q: " ===== "
520 PRINT @Q: "JJJ LAS FRECUENCIAS DE LAS SINUSOIDES DE LA " ;
530 PRINT @Q: "SEÑAL SON: J"
540 Q7=Q7+9
550 GOSUB 6030
560 FOR I=1 TO N/2
570 PRINT @Q: " F(" ; I ; ")=" ;
580 PRINT @Q: USING 5590: F5(I)
590 IMAGE 4D, 7D
600 GOSUB 6030
610 NEXT I
620 PRINT @Q: "JJJ LA POTENCIA DEL RUIDO ES: " ;
630 PRINT @Q: USING 5640: V8
640 IMAGE 4D, 7D
650 GOSUB 6030
660 REM *** SE IMPRIME LAS POTENCIAS DE LAS SINUSOIDES ***
670 PRINT @Q: "JJJJ LAS POTENCIAS DE LAS SINUSOIDES SON: J"
680 FOR I=1 TO F2
690 IF F1(I) > 0 THEN 5710
700 F1(I) = 1.0E-10
710 PRINT @Q: " F(" ; I ; ")=" ;
720 PRINT @Q: USING 5730: F1(I)
730 IMAGE 4D, 7D
740 GOSUB 6030
750 NEXT I
760 IF Q=51 THEN 5820
770 PRI "¿Desea la impresion de estos resultados en papel (SI o NO): " ;
780 INPUT Z$
790 IF Z$="NO" OR Z$="N" THEN 5820
800 Q=51
810 GO TO 5280
820 PRINT "LJJJJJ SE ALMACENAN LAS FRECUENCIAS Y POTENCIAS DE LAS SI " ;
830 PRINT "NUSOIDES"
840 REM **** CREACION DE ARCHIVO DE DATOS ****
850 A$=" @PHIDALGO/ESPECTRO"

```

```

5860 KILL A$
5870 CREATE A$;2*(N*9+1),0
5880 OPEN A$;1,"F",Y$
5890 WRITE #1;P2,T2,F5,P1
5900 CLOSE 1
5910 S$="DATO"
5920 KILL S$
5930 CREATE S$;9+1,0
5940 OPEN S$;1,"F",T$
5950 WRITE #1;Z6
5960 CLOSE 1
5970 GO TO 1000
5980 REM **** RETORNO AL PROGRAMA MAESTRO ****
5990 DEL B3,A$,N5,T2,X0,T$,L3,R5,S,E9,P,J2,T9,A,AB,A2,I,H,K,L1,P$,G5,T1
000 DEL D,P2,N,P9,U,V,J1,T,R1,I1,J,A1,C,J9,E,E1,N0,X,Y,U1,V1,F1,X1,Y1
0010 DELETE F2,S9,I9,F,F5,I7,R2,P1,R3,P4,R6,R7,W,V8,Q,Z$,N$,P5
0020 GO TO 100
0030 REM SUB. CAMBIO DE PAG
0040 Q7=Q7+1
0050 IF Q7<Q8 THEN 6080
0060 PRINT @Q:"LJJ"
0070 Q7=5
0080 RETURN
0090 REM *** SUB. PARA CALCULAR EL TIEMPO DE DURACION DEL PROGRAMA ***
0100 IF B3=3 THEN 6150
0110 H5=0
0120 H5=10^(-1.876887+0.0038763*N5+0.163817*P5)
0130 H5=H5*3600
0140 GO TO 6180
0150 H6=10^(-1.876887+0.0038763*N5+0.163817*P5)
0160 H6=H6*3600
0170 H5=H6-H5
0180 IF H5>60 THEN 6210
0190 H4=H5
0200 GO TO 6300
0210 H4=H5/60
0220 I=INT(H4)
0230 H4=(H4-I)*60
0240 IF I>60 THEN 6270
0250 H3=I
0260 GO TO 6300
0270 H3=I/60
0280 J=INT(H3)
0290 H3=(H3-J)*60
0300 CALL "TIME",J$
0310 PRINT "LJJJ HORA DE INICIO DEL PROGRAMA: " ;J$
0320 PRINT "JJ TIEMPO ESTIMADO DE DURACION DEL PROGRAMA:K"
0330 IF H5<60 THEN 6370
0340 IF I<60 THEN 6360
0350 PRINT USING "50X2D,2XFA ":J,"H."
0360 PRINT USING "50X 2D,2XFA ":H3,"MIN."
0370 PRINT USING "50X 2D,2XFA ":H4,"SEG."
0380 RETURN

```

```

1000 REM      @PHIDALGO/PRONY
1010 REM
1020 Z6=2
1030 K2=3
1040 REM      DENSIDAD ESPECTRAL DE ENERGIA -PRONY-
1050 REM
1060 PRINT "LJJ      DENSIDAD ESPECTRAL DE ENERGIA DE PRONY"
1070 PRINT "      *****"
1080 PRINT "JJ1 ---->  LECTURA DE DATOS DE ARCHIVO"
1090 PRINT "JJ2 ---->  ESTIMACION DE PARAMETROS AR PARA UN ORDEN DADO"
1100 PRINT "JJ3 ---->  DETERMINACION DE FRECUENCIAS Y FACTORES DE ";
1110 PRINT "  AMORTIGUAMIENTO"
1120 PRINT "JJ4 ---->  ESTIMACION DE PARAMETROS AR PARA UN ORDEN SUPE";
1130 PRINT "RIOR AL CALCULADO"
1140 PRINT "JJ5 ---->  PROGRAMA PARA DETERMINACION DE LAS AMPLITUDES Y"
1150 PRINT "  J      FASES DE EXPONENCIALES"
1160 PRINT "JJ6 ---->  RETORNO AL PROGRAMA MAESTRO"
1170 PRINT "JJJ      Ingresa el numero de la operacion a ejecutarse:G";
1180 INPUT B9
1190 IF B9<>1 AND B9<>2 AND B9<>3 AND B9<>4 AND B9<>5 AND B9<>6 THEN 1170
1200 GO TO B9 OF 1210,1560,2760,1400,5810,5910
1210 REM ***** LECTURA DE DATOS DE ARCHIVO *****
1220 REM
1230 PRINT "LJJJ      LOS DATOS A LEERSE ESTAN EN EL ARCHIVO A# = ";
1240 INPUT K#
1250 OPEN K#;1,"R",X#
1260 READ #1:N1,T2
1270 DELETE X0
1280 DIM X0(N1)
1290 READ #1:X0
1300 CLOSE 1
1310 PRI "JJJ      LOS DATOS HAN SIDO LEIDOS; RETURN PARA CONTINUARGG";
1320 INPUT Z#
1330 T#="PERIODO/MUESTREO"
1340 KILL T#
1350 CREATE T#;9+1,0
1360 OPEN T#;1,"F",S#
1370 WRITE #1:T2
1380 CLOSE 1
1390 GO TO 1000
1400 REM
1410 REM **CALCULO DE PARAMETROS PARA UN ORDEN SUPERIOR AL DETERMINADO**
1420 N#="ORDEN/SUP,"
1430 OPEN N#;1,"R",Z#
1440 READ #1:N1,P,T2
1450 DELETE X0
1460 DIM X0(N1)
1470 READ #1:X0
1480 CLOSE 1
1490 PRINT "LJJJSE HAN ESTIMADO PARAMETROS HASTA UN ORDEN  P = ";P/2
1500 PRI "JJJJINGRESE EL NUEVO ORDEN REQUERIDO DE LA SENAL ANALIZADA ";
1510 PRINT "  P5 = GG";
1520 INPUT P5
1530 IF P5<=P/2 OR P5>9 THEN 1490

```

```

540 P=F+2
550 GO TO 1740
560 REM
570 REM *** ESTIMACION DEL ORDEN DEL MODELO Y DE PARAMETROS AR - LS ***
580 REM SE UTILIZA EL ALGORITMO DE COVARIANCIA DE MINIMOS CUADRADOS
590 REM EL NUMERO DE EXPONENCIALES P ES DETERMINADO USANDO LAS
600 REM TECNICAS DE SELECCION DE ORDEN AR
610 REM
620 REM EO -- MINIMA ENERGIA DE ERROR DE PREDICCION
630 PRINT "LJJJJINGRESE EL ORDEN REQUERIDO DE LA SENAL ANALIZADA ";
640 PRINT " P5 =GG";
650 INPUT P5
660 IF P5<=0 OR P5>9 THEN 1630
670 DELETE E2
680 DIM E2(N1/2)
690 IF N1>40 THEN 1720
700 DELETE E2
710 DIM E2(N1)
720 E2=0
730 P=2
740 GOSUB 5510
750 EO=0,01
760 DELETE X1,A1,E,M1,K,G,G1,K1,K2
770 DIM X1(N1-P,P+1),A1(P+1,1)
780 REM SE ESTRUCTURA LA MATRIZ DE DATOS X1
790 M=1
800 M1=P+1
810 FOR I=1 TO P+1
820 X1(M,I)=X0(M1)
830 M1=M1-1
840 NEXT I
850 M=M+1
860 M1=M1+P+2
870 IF M1>N1 THEN 1890
880 GO TO 1810
890 A$="DAT08"
900 B$="DAT09"
910 KILL A$
920 KILL B$
930 CREATE A$;(N1-P)*(P+1),10
940 CREATE B$;(N1-P)*(P+1),10
950 K=0
960 OPEN A$;1,"F",X$
970 OPEN B$;2,"F",Y$
980 FOR I=1 TO P+1
990 FOR J=1 TO N1-P
2000 K=K+1
2010 WRITE #1,K;X1(J,I)
2020 WRITE #2,K;X1(J,I)
2030 NEXT J
2040 NEXT I
2050 CLOSE
2060 DELETE X1,X2,X3,X4,X5
2070 DIM X3(P+1,P+1)

```

```

2080 OPEN A$;1,"R",X$
2090 OPEN B$;2,"R",Y$
2100 FOR I=1 TO F+1
2110 FOR J=1 TO F+1
2120 X3(I,J)=0
2130 FOR K=1 TO N1-P
2140 K1=(J-1)*(N1-P)+K
2150 K2=(I-1)*(N1-P)+K
2160 READ #1,K1;G
2170 READ #2,K2;G1
2180 X3(I,J)=X3(I,J)+G*G1
2190 NEXT K
2200 NEXT J
2210 NEXT I
2220 CLOSE
2230 REM *** SE MINIMIZA LA ENERGIA DE ERROR DE PREDICCION, PARA LO CUAL
2240 REM SE RESUELVE EL SISTEMA (X1'X1)A=EP
2250 REM DONDE: X1' - Matriz compleja conjugada transpuesta de X1
2260 REM A - Matriz de coeficientes
2270 REM EP - Matriz de minima energia de error de prediccion
2280 A1(1,1)=1
2290 DELETE X1
2300 DIM X4(P,P+1),X5(P,P+1)
2310 REM SE CALCULA LA MATRIZ DE COEFICIENTES
2320 FOR I=1 TO P
2330 FOR J=1 TO P
2340 X4(I,J)=X3(I+1,J+1)
2350 NEXT J
2360 NEXT I
2370 FOR I=1 TO P
2380 X4(I,P+1)=-X3(I+1,1)
2390 NEXT I
2400 X5=INV(X4)
2410 DELETE X2,X4
2420 E2(P)=0
2430 FOR I=1 TO P
2440 A1(I+1,1)=X5(I,P+1)
2450 NEXT I
2460 FOR I=1 TO P+1
2470 E2(P)=E2(P)+X3(1,I)*A1(I,1)
2480 NEXT I
2490 DELETE X5,A
2500 DIM A(P+1)
2510 FOR I=1 TO P+1
2520 A(I)=A1(I,1)
2530 NEXT I
2540 E2(P)=E2(P)*(N1+P+1)/(N1-P-1)
2550 IF P=2*P5 THEN 2640
2560 IF ABS(E2(P))<EO THEN 2640
2570 PRINT "LJJJJORDEN CALCULADO: ";P/2;" ENERGIA DE ERROR DE PRED";
2580 PRINT " ICCION ";E2(P)
2590 PRINT "JJJENERGIA DE ERROR DE PREDICCION NO ES MINIMA";
2600 PRINT ", ESTOY"
2610 PRINT "JCALCULANDO PARAMETROS PARA ORDEN: GG";P/2+1

```

```

2620 P=P+2
2630 GO TO 1760
2640 N$="ORDEN/SUP."
2650 KILL N$
2660 CREATE N$(N1+3)*9+1,0
2670 OPEN N$;1,"F",Y$
2680 WRITE #1:N1,F,T2,X0
2690 CLOSE 1
2700 PRINT "LJJJ CALCULADOS LOS PARAMETROS, ORDEN DEL MODELO: ";P/2
2710 PRINT "JJENERGIA DE ERROR DE PREDICCION: ";E2(P)
2720 PRINT "JJJJJ          RETURN PARA CONTINUARGGG";
2730 INPUT Z$
2740 GO TO 1000
2750 REM
2760 REM ***** SE CALCULAN LAS RAICES DEL POLINOMIO (FORMADO CON
2770 REM ***** LOS PARAMETROS DEL FILTRO).
2780 REM ***** PARA ESTA SOLUCION SE UTILIZA EL PROGRAMA ECUAPOL
2790 N=P
2800 P9=32
2810 GOSUB 3070
2820 REM *** VERIFICACION EN U+JV
2830 DELETE U,V
2840 DIM U(N),V(N)
2850 FOR J=1 TO N
2860 U(J)=A(1)
2870 V(J)=0
2880 FOR J1=1 TO N
2890 T=U(J)*R1(J)-V(J)*I1(J)+A(J1+1)
2900 V(J)=V(J)*R1(J)+U(J)*I1(J)
2910 U(J)=T
2920 NEXT J1
2930 NEXT J
2940 U=U*U
2950 V=V*V
2960 U=U+V
2970 U=SQR(U)
2980 REM **** AQUI IMPRESION DE RAICES
2990 PRINT @P9: USING 3000:
3000 IMAGE /" RAICES:"/" NO."10X"PARTE REAL"13X"PARTE IMAG."S
3010 PRINT @P9:" VERIF,J"
3020 FOR J=1 TO N
3030 PRINT @P9: USING 3040:J,R1(J),I1(J),U(J)
3040 IMAGE 3X,2D,2(13D,9D),8X3E
3050 NEXT J
3060 GO TO 4420
3070 REM          RAIZPOLI2
3080 REM
3090 REM          SUB. PARA SOLUCION DE ECUACIONES POLINOMIALES
3100 REM          METODO: DESCENSO MAS PRONUNCIADO CON ESCALAMIENTO DE RAICES
3110 REM          31 DE MAYO DE 1980
3120 REM          ING. EFRAIN DEL PINO V.
3130 REM
3140 REM          N - GRADO DEL POLINOMIO
3150 REM          A - VECTOR CON COEFICIENTES EN ORDEN DESCENDENTE

```

```

3160 REM                DE POTENCIAS
3170 REM
3180 REM                R1 - VECTOR CON PARTES REALES DE LAS RAICES
3190 REM                I1 - VECTOR CON PARTES IMAGINARIAS DE LAS RAICES
3200 REM
3210 REM                N, A NO SON ALTERADOS POR LA SUBROUTINA
3220 REM
3230 PAGE
3240 NO=N
3250 DELETE A1,C,R1,I1,U,V,U1,V1,X,R,Y,I7,S
3260 DIM A1(NO),C(NO),R1(NO),I1(NO)
3270 J9=0
3280 E=1.0E-10
3290 E1=E^2
3300 R1=0
3310 I1=0
3320 FOR J=1 TO NO
3330 A1(J)=A(J+1)/A(1)
3340 NEXT J
3350 IF NO>0 THEN 3370
3360 RETURN
3370 IF A1(NO)<>0 THEN 3410
3380 J9=J9+1
3390 NO=NO-1
3400 GO TO 3350
3410 IF NO<>1 THEN 3450
3420 J9=J9+1
3430 R1(J9)=-A1(NO)
3440 RETURN
3450 IF NO<>2 THEN 3770
3460 X=-A1(1)/2
3470 J9=J9+1
3480 T=X*X-A1(2)
3490 IF T<0 THEN 3540
3500 T=SQR(T)
3510 R1(J9)=X+T
3520 R1(J9+1)=X-T
3530 RETURN
3540 R1(J9)=X
3550 R1(J9+1)=R1(J9)
3560 I1(J9)=SQR(-T)
3570 I1(J9+1)=-I1(J9)
3580 RETURN
3590 REM SUB. EVALUACION DE F(Z)=U + JV
3600 U=1
3610 V=0
3620 FOR J=1 TO NO
3630 T=U*X-V*Y+C(J)
3640 V=V*X+U*Y
3650 U=T
3660 NEXT J
3670 RETURN
3680 REM SUB. EVAL. F'(Z)=U1 + JV1
3690 U1=NO

```

```

3700 V1=0
3710 FOR J=1 TO NO-1
3720 T=U1*X-V1*Y+(NO-J)*C(J)
3730 V1=V1*X+U1*Y
3740 U1=T
3750 NEXT J
3760 RETURN
3770 REM DESCENSO MAS PRONUNCIADO
3780 T=ABS(A1(NO))
3790 DIM A1(NO),C(NO)
3800 IF T=1 THEN 3880
3810 H=T^(1/NO)
3820 T=1
3830 FOR J=1 TO NO
3840 T=T*H
3850 C(J)=A1(J)/T
3860 NEXT J
3870 GO TO 3900
3880 C=A1
3890 H=1
3900 X=0.7
3910 Y=0.6
3920 GOSUB 3590
3930 F1=U*U+V*V
3940 IF F1<E1 THEN 4140
3950 GOSUB 3680
3960 T=U1*U1+V1*V1
3970 X1=-(U*U1+V*V1)/T
3980 Y1=(U*V1-V*U1)/T
3990 X=X+X1
4000 Y=Y+Y1
4010 GOSUB 3590
4020 F2=U*U+V*V
4030 IF F2<E1 THEN 4120
4040 IF F2<F1 THEN 4100
4050 X=X-X1
4060 Y=Y-Y1
4070 X1=0.8*X1
4080 Y1=0.8*Y1
4090 GO TO 3990
4100 F1=F2
4110 GO TO 3950
4120 IF ABS(X1)<E AND ABS(Y1)<E THEN 4140
4130 GO TO 4100
4140 X=X*H
4150 Y=Y*H
4160 IF ABS(Y)>E THEN 4180
4170 Y=0
4180 J9=J9+1
4190 R1(J9)=X
4200 I1(J9)=Y
4210 IF Y=0 THEN 4350
4220 J9=J9+1
4230 R1(J9)=X

```



```

4240 I1(J9)=-Y
4250 R=-2*X
4260 S=X*X+Y*Y
4270 A1(1)=A1(1)-R
4280 A1(2)=A1(2)-R*A1(1)-S
4290 IF NO<5 THEN 4330
4300 FOR J=3 TO NO-2
4310 A1(J)=A1(J)-R*A1(J-1)-S*A1(J-2)
4320 NEXT J
4330 NO=NO-2
4340 GO TO 3410
4350 T=1
4360 FOR J=1 TO NO-1
4370 T=T*X+A1(J)
4380 A1(J)=T
4390 NEXT J
4400 NO=NO-1
4410 GO TO 3410
4420 REM
4430 REM ** CALCULO DE LAS FRECUENCIAS Y FACTORES DE AMORTIGUAMIENTO **
4440 REM
4450 SET RADIANS
4460 I9=0
4470 FOR I=1 TO N
4480 IF R1(I)=0 OR I1(I)=0 THEN 4520
4490 I9=I9+1
4500 R1(I9)=R1(I)
4510 I1(I9)=I1(I)
4520 NEXT I
4530 N=I9
4540 DELETE F,F5,M1,M2,A0,M3,I9
4550 DIM F(N),F5(N/2),M1(N),M2(N),A0(N/2),M3(N/2)
4560 FOR I=1 TO N
4570 IF R1(I)<0 AND I1(I)>0 THEN 4620
4580 IF R1(I)<0 AND I1(I)<0 THEN 4650
4590 F(I)=ATN(I1(I)/R1(I))/(2*PI*T2)
4600 M1(I)=SQR(R1(I)^2+I1(I)^2)
4610 GO TO 4670
4620 F(I)=ATN(I1(I)/R1(I))/(2*PI*T2)+1/(2*T2)
4630 M1(I)=SQR(R1(I)^2+I1(I)^2)
4640 GO TO 4670
4650 F(I)=ATN(I1(I)/R1(I))/(2*PI*T2)-1/(2*T2)
4660 M1(I)=SQR(R1(I)^2+I1(I)^2)
4670 NEXT I
4680 I7=0
4690 FOR I=1 TO N-1
4700 FOR J=I+1 TO N
4710 IF ABS(F(I))<>ABS(F(J)) THEN 4790
4720 IF F(I)>F(J) THEN 4760
4730 F9=F(J)
4740 F(J)=F(I)
4750 F(I)=F9
4760 I7=I7+1
4770 F5(I7)=ABS(F(I))

```

```

4780 GO TO 4800
4790 NEXT J
4800 NEXT I
4810 FOR I=1 TO N STEP 2
4820 M2(I)=M1(I)
4830 NEXT I
4840 FOR I=1 TO N/2
4850 M3(I)=M2(2*I-1)
4860 A0(I)=LOG(M3(I))/T2
4870 NEXT I
4880 Q=32
4890 CALL "TIME",Z$
4900 PRINT @Q:"LJJJJJESCUELA POLITECNICA NACIONAL"
4910 PRINT @Q:"FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA"
4920 PRINT @Q:"ELECTRONICA Y TELECOMUNICACIONES"
4930 Q7=1
4940 Q8=50
4950 PRI @Q: USI 4960:"JNUEVAS TECNICA-ANALISIS ESPECTRAL", "FECHA:",Z$
4960 IMAGE FA,10X,FA,18A
4970 PRI @Q:"===== ";
4980 PRINT @Q:"===== "
4990 PRINT @Q:"JNUMERO DE DATOS MUESTREADOS: ";N1;" TIEMPO DE ";
5000 PRINT @Q:" MUESTREO: ";T2;" SEG."
5010 PRINT @Q:"ORDEN DEL MODELO: ";N/2;" ARCHIVO ";
5020 PRINT @Q:" DE DATOS: ";K$
5030 PRINT @Q:"JJJ MUESTRAS DE DATOS"
5040 PRINT @Q:" ===== == =====JJ"
5050 Q7=Q7+18
5060 FOR Q9=1 TO N1 STEP 4
5070 PRINT @Q: USING 5080:X0(Q9),X0(Q9+1),X0(Q9+2),X0(Q9+3)
5080 IMAGE 10X3D,8D3X3D,8D3X3D,8D3X3D,8D
5090 GOSUB 5930
5100 NEXT Q9
5110 PRINT @Q:"JJJ METODO DE PRONY EXTENDIDO"
5120 PRINT @Q:" ===== == ====="
5130 PRINT @Q:" JJJ LOS FACTORES DE ATENUACION SON:J"
5140 Q7=Q7+9
5150 GOSUB 5930
5160 FOR I=1 TO N/2
5170 PRINT @Q:" ATEN(";I;" )=";
5180 PRINT @Q: USING 5190:A0(I)
5190 IMAGE 5D,7D
5200 GOSUB 5930
5210 NEXT I
5220 PRINT @Q:"JJ LAS FRECUENCIAS DE LAS SINUSOIDES ";
5230 PRINT @Q:"SON:J"
5240 Q7=Q7+4
5250 GOSUB 5930
5260 FOR I=1 TO N/2
5270 PRINT @Q:" FREC(";I;" )=";
5280 PRINT @Q: USING 5290:F5(I)
5290 IMAGE 5D,7D
5300 GOSUB 5930
5310 NEXT I

```

```

5320 IF Q=51 THEN 5390
5330 PRI "¿Desea la impresion de los resultados en papel?(SI o NO):";
5340 INPUT Z$
5350 IF Z$="SI" OR Z$="S" THEN 5370
5360 GO TO 5390
5370 Q=51
5380 GO TO 4890
5390 REM *** ALMACENAMIENTO DE DATOS PARA LA OBTENCION DE AMPLITUDES **
5400 REM      Y FASES EXPONENCIALES
5410 B$="DATOS/PRON1"
5420 KILL B$
5430 CREATE B$;2*(N1*9+1),0
5440 OPEN B$;1,"F",Y$
5450 WRITE #1:N1,N,T2,F,M1,X0,A0,F5,Z6
5460 CLOSE 1
5470 PRI "LJJSE HAN OBTENIDO FRECUENCIAS Y FACTORES DE AMORTIGUAMIENTO"
5480 PRINT "J                      RETURN PARA CONTINUARGG";
5490 INPUT Z$
5500 GO TO 1000
5510 REM *** SUB. PARA CALCULAR EL TIEMPO DE DURACION DEL PROGRAMA ***
5520 IF B9=4 THEN 5570
5530 H5=0
5540 H5=10^(-2.238244+0.0106817*N1+0.2474671*F5)
5550 H5=H5*3600
5560 GO TO 5600
5570 H6=10^(-2.238244+0.0106817*N1+0.2474671*F5)
5580 H6=H6*3600
5590 H5=H6-H5
5600 IF H5>60 THEN 5630
5610 H4=H5
5620 GO TO 5720
5630 H4=H5/60
5640 I=INT(H4)
5650 H4=(H4-I)*60
5660 IF I>60 THEN 5690
5670 H3=I
5680 GO TO 5720
5690 H3=I/60
5700 J=INT(H3)
5710 H3=(H3-J)*60
5720 CALL "TIME",J$
5730 PRINT "LJJJ HORA DE INICIO DEL PROGRAMA:           ";J$
5740 PRINT "JJ TIEMPO ESTIMADO DE DURACION DEL PROGRAMA:K"
5750 IF H5<60 THEN 5790
5760 IF I<60 THEN 5780
5770 PRINT USING "50X2D,2XFA ":J,"H."
5780 PRINT USING "50X 2D,2XFA ":H3,"MIN."
5790 PRINT USING "50X 2D,2XFA ":H4,"SEG."
5800 RETURN
5810 DELETE B9,N1,T2,X0,T$,N$,P,F5,E0,A1,M,M1,A$,B$,K,X3,K1,K2,G,G1,A,N$
5820 REM
5830 REM ***PROGRAMA PARA OBTENCION DE AMPLITUDES Y FASES EXPONENCIALES**
5840 REM
5850 DELETE B9,N1,T2,X0,T$,N$,P,F5,E0,A1,M,M1,A$,B$,K,X3,K1,K2,G,G1,A,N$

```

```

5860 DEL N,F9,U,V,T,J,R1,I1,NO,C,E,E1,J9,X,U1,V1,H,Y,F2,F1,S,F,F5,M2,A0
5870 DELETE M3,I7,F9,Q
5880 K1=6
5890 GO TO 470
5900 REM
5910 REM *****      RETORNO AL PROGRAMA MAESTRO      *****
5920 GO TO 100
5930 REM SUB. CAMBIO DE PAGINA
5940 Q7=Q7+1
5950 IF Q7<Q8 THEN 5980
5960 PRINT @Q:"LJJ"
5970 Q7=5
5980 RETURN

```

```

1000 REM @PHIDALGO/DLEP
1010 REM
1020 K2=4
1030 Z6=3
1040 REM ESTIMACION LINEAL ESPECTRAL DE PRONY
1050 REM
1060 PRI "LJJ ESTIMACION LINEAL ESPECTRAL DE PRONY"
1070 PRINT " *****"
1080 PRINT "JJ1 ---> LECTURA DE DATOS DE ARCHIVO"
1090 PRINT "JJ2 ---> DETERMINACION DE PARAMETROS PARA UN ORDEN DADO"
1100 PRINT "JJ3 ---> OBTENCION DE FRECUENCIAS Y FACTORES DE "
1110 PRINT "AMORTIGUAMIENTO"
1120 PRINT "JJ4 ---> DETERMINACION DE PARAMETROS PARA UN ORDEN SUPE";
1130 PRINT "RIOR AL CALCULADO"
1140 PRINT "JJ5 ---> PROGRAMA PARA DETERMINACION DE AMPLITUDES Y"
1150 PRINT "J FASES DE EXPONENCIALES"
1160 PRINT "JJ6 ---> RETORNO AL PROGRAMA PRINCIPAL"
1170 PRINT "JJJJ Ingrese el numero de la operacion a ejecutar:G";
1180 INPUT B8
1190 IF B8<>1 AND B8<>2 AND B8<>3 AND B8<>4 AND B8<>5 AND B8<>6 THE 1170
1200 GO TO B8 OF 1210,1560,3400,1390,6520,6580
1210 REM **** LECTURA DE DATOS DE ARCHIVO ****
1220 PRINT "LJJJ LOS DATOS A LEERSE ESTAN EN EL ARCHIVO A# = ";
1230 INPUT K#
1240 OPEN K#;1,"R",X#
1250 READ #1:N1,T2
1260 DELETE X0
1270 DIM X0(N1)
1280 READ #1:X0
1290 CLOSE 1
1300 PRINT "JJJ LOS DATOS HAN SIDO LEIDOS; RETURN PARA CONTINUAR GGG";
1310 INPUT Z#
1320 T#="PERIODO/MUESTREO"
1330 KILL T#
1340 CREATE T#;9+1,0
1350 OPEN T#;1,"F",S#
1360 WRITE #1:T2
1370 CLOSE 1
1380 GO TO 1000
1390 REM
1400 REM *ESTIMACION DE PARAMETROS PARA UN ORDEN SUPERIOR AL CALCULADO*
1410 Q#="ORDEN/SUF"
1420 OPEN Q#;1,"R",Z#
1430 READ #1:N1,P,T2
1440 DELETE X0
1450 DIM X0(N1)
1460 READ #1:X0
1470 CLOSE 1
1480 PRINT "LJJJSE HAN ESTIMADO PARAMETROS HASTA UN ORDEN P= ";P
1490 PRI "JJJJINGRESE EL NUEVO ORDEN REQUERIDO DE LA SENAL ANALIZADA ";
1500 PRINT " P5 = GG";
1510 INPUT P5
1520 IF P5<=P OR P5>9 THEN 1480
1530 P=P+1

```

```

1540 GO TO 1790
1550 REM
1560 REM ** DETERMINACION DEL ORDEN DEL MODELO Y PARAMETROS RECURSIVAM.
1570 REM *** EL ORDEN DEL MODELO SE DETERMINA USANDO TECNICAS AR DE
1580 REM *** SELECCION DEL ORDEN
1590 REM *** LOS COEFICIENTES SE CALCULAN RESOLVIENDO EL SISTEMA E = XA
1600 REM          DONDE: E - Matriz de prediccion lineal de error
1610 REM          X - Matriz de datos, estructura:Toeplitz+Hankel
1620 REM          A - Matriz de coeficientes
1630 REM *** EL ORDEN DEL MODELO SE DETERMINA USANDO EL CRITERIO FPE
1640 REM          (PREDICCION DE ERROR FINAL)
1650 REM
1660 REM          EO -- MINIMA ENERGIA DE ERROR DE PREDICCION
1670 EO=1.0E-5
1680 PRINT "LJJJJINGRESE EL ORDEN REQUERIDO DE LA SENAL ANALIZADA " ;
1690 PRINT " P5 = GG" ;
1700 INPUT P5
1710 IF P5<=0 OR P5>9 THEN 1680
1720 F=1
1730 DELETE E2
1740 DIM E2(N1/2)
1750 IF N1>20 THEN 1780
1760 DELETE E2
1770 DIM E2(N1)
1780 E2=0
1790 GOSUB 6210
1800 DELETE X1,T,H,A1,E,M1,S,Y,I7,K,G,G1
1810 DIM T(N1-2*P,P+1),A1(P+1,1)
1820 REM SE ESTRUCTURA LA MATRIZ DE DATOS TOEPLITZ
1830 M=1
1840 M1=2*P+1
1850 FOR I=1 TO P+1
1860 T(M,I)=X0(M1)
1870 M1=M1-1
1880 NEXT I
1890 M=M+1
1900 M1=M1+P+2
1910 IF M1>N1 THEN 1930
1920 GO TO 1850
1930 A$="DAT015"
1940 KILL A$
1950 CREATE A$(N1-2*P)*(P+1),10
1960 K=0
1970 OPEN A$;1,"F",X$
1980 FOR I=1 TO N1-2*P
1990 FOR J=1 TO P+1
2000 K=K+1
2010 WRITE #1,K:T(I,J)
2020 NEXT J
2030 NEXT I
2040 CLOSE
2050 DELETE T,H
2060 DIM H(N1-2*P,P+1)
2070 REM SE ESTRUCTURA LA MATRIZ DE DATOS HANKEL

```

```

080 M=1
090 M1=1
100 FOR I=1 TO P+1
110 H(M,I)=X0(M1)
120 M1=M1+1
130 NEXT I
140 M=M+1
150 M1=M1-P
160 IF M1>N1-2*P THEN 2180
170 GO TO 2100
180 B$="DATO16"
190 KILL B$
200 CREATE B$(N1-2*P)*(P+1),10
210 K=0
220 OPEN B$;1,"F",X$
230 FOR I=1 TO N1-2*P
240 FOR J=1 TO P+1
250 K=K+1
260 WRITE #1,K;H(I,J)
270 NEXT J
280 NEXT I
290 CLOSE
300 REM SE ESTRUCTURA MATRIZ DE DATOS: X = T + H
310 DELETE H,X1
320 DIM X1(N1-2*P,P+1)
330 OPEN A$;1,"R",X$
340 OPEN B$;2,"R",Y$
350 K=0
360 FOR I=1 TO N1-2*P
370 FOR J=1 TO P+1
380 X1(I,J)=0
390 K=K+1
400 READ #1,K;T
410 READ #2,K;H
420 X1(I,J)=T+H
430 NEXT J
440 NEXT I
450 CLOSE
460 REM ** SE MINIMIZA LA ENERGIA DE ERROR DE PREDICCION, PARA LO CUAL
470 REM SE RESUELVE EL SISTEMA (X`X)A = Ep
480 REM DONDE: X` - Matriz compleja conjugada transpuesta de X
490 REM A - Matriz de coeficientes
500 REM Ep - Matriz de minima energia de error de prediccion
510 REM
520 A$="DATO17"
530 B$="DATO18"
540 KILL A$
550 KILL B$
560 CREATE A$(N1-2*P)*(P+1),10
570 CREATE B$(N1-2*P)*(P+1),10
580 K=0
590 OPEN A$;1,"F",X$
600 OPEN B$;2,"F",Y$
610 FOR I=1 TO P+1

```

```

620 FOR J=1 TO N1-2*P
630 K=K+1
640 WRITE #1,K;X1(J,I)
650 WRITE #2,K;X1(J,I)
660 NEXT J
670 NEXT I
680 CLOSE
690 DELETE X1,X2,X3,X4,X5
700 DIM X3(P+1,P+1)
710 OPEN A#;1,"R",X$
720 OPEN B#;2,"R",Y$
730 FOR I=1 TO P+1
740 FOR J=1 TO P+1
750 X3(I,J)=0
760 FOR K=1 TO N1-2*P
770 K1=(J-1)*(N1-2*P)+K
780 K2=(I-1)*(N1-2*P)+K
790 READ #1,K1;G
800 READ #2,K2;G1
810 X3(I,J)=X3(I,J)+G*G1
820 NEXT K
830 NEXT J
840 NEXT I
850 CLOSE
860 A1(1,1)=1
870 DELETE X1
880 DIM X4(P,P+1),X5(P,P+1)
890 REM SE CALCULA LA MATRIZ DE COEFICIENTES
900 FOR I=1 TO P
910 FOR J=1 TO P
920 X4(I,J)=X3(I+1,J+1)
930 NEXT J
940 NEXT I
950 FOR I=1 TO P
960 X4(I,P+1)=-X3(I+1,1)
970 NEXT I
980 X5=INV(X4)
990 DELETE X2,X4,A
000 E2(P)=0
010 DIM A(2*P+1)
020 FOR I=1 TO P
030 A1(I+1,1)=X5(I,P+1)
040 NEXT I
050 FOR I=1 TO P+1
060 E2(P)=E2(P)+X3(1,I)*A1(I,1)
070 NEXT I
080 E2(P)=E2(P)*(N1+P+1)/(N1-P-1)
090 DELETE X5
100 IF P=P5 THEN 3190
110 IF ABS(E2(P))<EO THEN 3190
120 PRINT "LJJJJORDEN CALCULADO: ";P;" ENERGIA DE ERROR DE PREDI";
130 PRINT "CCION: ";E2(P)
140 PRINT "JJJENERGIA DE ERROR DE PREDICCION NO ES MINIMA";
150 PRINT ", ESTOY"

```



```

160 PRINT "JCALCULANDO PARAMETROS PARA ORDEN: GG";P+1
170 P=P+1
180 GO TO 1800
190 FOR I=1 TO P+1
200 A(I)=A1(I,1)
210 NEXT I
220 K=P+2
230 FOR I=P TO 1 STEP -1
240 A(K)=A1(I,1)
250 K=K+1
260 NEXT I
270 A(P+1)=2*A(P+1)
280 Q$="ORDEN/SUP"
290 KILL Q$
300 CREATE Q$;(N1+3)*9+1,0
310 OPEN Q$;1,"F",Y$
320 WRITE #1;N1,P,T2,X0
330 CLOSE 1
340 CALL "TIME",I$
350 PRINT "JJPARAMETROS DETERMINADOS, ORDEN DEL MODELO: ";P
360 PRINT "JJENERGIA DE ERROR DE PREDICCION: ";E2(P)
370 PRINT "JJJJJ          RETURN PARA CONTINUARGGG";
380 INPUT Z$
390 GO TO 1000
400 REM
410 REM *** CALCULO DE FRECUENCIAS Y FACTORES DE AMORTIGUAMIENTO ***
420 REM   PARA ELLO SE DETERMINAN LAS RAICES DEL POLINOMIO FORMADO
430 REM   CON LA MATRIZ DE COEFICIENTES A(PARAMETROS DEL MODELO)
440 REM   SE UTILIZA EL PROGRAMA ECUAPOL PARA ESTA SOLUCION
450 PAGE
460 N=2*P
470 REM
480 GOSUB 3740
490 REM *** VERIFICACION EN U+JV
500 DELETE U,V
510 DIM U(N),V(N)
520 FOR J=1 TO N
530 U(J)=A(1)
540 V(J)=0
550 FOR J1=1 TO N
560 T=U(J)*R1(J)-V(J)*I1(J)+A(J1+1)
570 V(J)=V(J)*R1(J)+U(J)*I1(J)
580 U(J)=T
590 NEXT J1
600 NEXT J
610 U=U*U
620 V=V*V
630 U=U+V
640 U=SQR(U)
650 REM **** AQUI IMPRESION DE RAICES
660 PRINT @32: USING 3670:
670 IMAGE /"   RAICES:"/" NO."10X"PARTE REAL"13X"PARTE IMAG,"S
680 PRINT @32:"   VERIF,J"
690 FOR J=1 TO N

```

```

700 PRINT @32: USING 3710:J,R1(J),I1(J),U(J)
710 IMAGE 3X,2D,2(13D.9D),8X3E
720 NEXT J
730 GO TO 5090
740 REM          RAIZPOLI2
750 REM
760 REM          SUB. PARA SOLUCION DE ECUACIONES POLINOMIALES
770 REM          METODO: DESCENSO MAS PRONUNCIADO CON ESCALAMIENTO DE RAICES
780 REM          31 DE MAYO DE 1980
790 REM          ING. EFRAIN DEL PINO U.
800 REM
810 REM          N - GRADO DEL POLINOMIO
820 REM          A - VECTOR CON COEFICIENTES EN ORDEN DESCENDENTE
830 REM          DE POTENCIAS
840 REM
850 REM          R1 - VECTOR CON PARTES REALES DE LAS RAICES
860 REM          I1 - VECTOR CON PARTES IMAGINARIAS DE LAS RAICES
870 REM
880 REM          N, A NO SON ALTERADOS POR LA SUBROUTINA
890 REM
900 NO=N
910 DELETE A1,C,R1,I1,U,V,U1,V1,X,E,R,X4,X5
920 DIM A1(NO),C(NO),R1(NO),I1(NO)
930 J9=0
940 E=1.0E-10
950 E1=E^2
960 R1=0
970 I1=0
980 FOR J=1 TO NO
990 A1(J)=A(J+1)/A(1)
000 NEXT J
010 IF NO>0 THEN 4030
020 RETURN
030 IF A1(NO)<>0 THEN 4070
040 J9=J9+1
050 NO=NO-1
060 GO TO 4010
070 IF NO<>1 THEN 4110
080 J9=J9+1
090 R1(J9)=-A1(NO)
100 RETURN
110 IF NO<>2 THEN 4430
120 X=-A1(1)/2
130 J9=J9+1
140 T=X*X-A1(2)
150 IF T<0 THEN 4200
160 T=SQR(T)
170 R1(J9)=X+T
180 R1(J9+1)=X-T
190 RETURN
200 R1(J9)=X
210 R1(J9+1)=R1(J9)
220 I1(J9)=SQR(-T)
230 I1(J9+1)=-I1(J9)

```

```

240 RETURN
250 REM SUB. EVALUACION DE F(Z)=U + JV
260 U=1
270 V=0
280 FOR J=1 TO NO
290 T=U*X-V*Y+C(J)
300 V=V*X+U*Y
310 U=T
320 NEXT J
330 RETURN
340 REM SUB. EVAL. F'(Z)=U1 + JV1
350 U1=NO
360 V1=0
370 FOR J=1 TO NO-1
380 T=U1*X-V1*Y+(NO-J)*C(J)
390 V1=V1*X+U1*Y
400 U1=T
410 NEXT J
420 RETURN
430 REM DESCENSO MAS PRONUNCIADO
440 T=ABS(A1(NO))
450 DIM A1(NO),C(NO)
460 IF T=1 THEN 4540
470 H=T^(1/NO)
480 T=1
490 FOR J=1 TO NO
500 T=T*H
510 C(J)=A1(J)/T
520 NEXT J
530 GO TO 4560
540 C=A1
550 H=1
560 X=0.7
570 Y=0.6
580 GOSUB 4250
590 F1=U*U+V*V
600 IF F1<E1 THEN 4800
610 GOSUB 4340
620 T=U1*U1+V1*V1
630 X1=-(U*U1+V*V1)/T
640 Y1=(U*V1-V*U1)/T
650 X=X+X1
660 Y=Y+Y1
670 GOSUB 4250
680 F2=U*U+V*V
690 IF F2<E1 THEN 4780
700 IF F2<F1 THEN 4760
710 X=X-X1
720 Y=Y-Y1
730 X1=0.8*X1
740 Y1=0.8*Y1
750 GO TO 4650
760 F1=F2
770 GO TO 4610

```

```

280 IF ABS(X1)<E AND ABS(Y1)<E THEN 4800
290 GO TO 4760
300 X=X*H
310 Y=Y*H
320 IF ABS(Y)>E THEN 4840
330 Y=0
340 J9=J9+1
350 R1(J9)=X
360 I1(J9)=Y
370 IF Y=0 THEN 5010
380 J9=J9+1
390 R1(J9)=X
400 I1(J9)=-Y
410 R=-2*X
420 S=X*X+Y*Y
430 A1(1)=A1(1)-R
440 A1(2)=A1(2)-R*A1(1)-S
450 IF NO<5 THEN 4990
460 FOR J=3 TO NO-2
470 A1(J)=A1(J)-R*A1(J-1)-S*A1(J-2)
480 NEXT J
490 NO=NO-2
500 GO TO 4070
510 T=1
520 FOR J=1 TO NO-1
530 T=T*X+A1(J)
540 A1(J)=T
550 NEXT J
560 NO=NO-1
570 GO TO 4070
580 REM
590 REM ** CALCULO DE LAS FRECUENCIAS Y FACTORES DE AMORTIGUAMIENTO **
600 SET RADIANS
610 I9=0
620 FOR I=1 TO N
630 IF R1(I)=0 OR I1(I)=0 THEN 5180
640 IF (R1(I)^2+I1(I)^2)^0.5>1.01 THEN 5180
650 I9=I9+1
660 R1(I9)=R1(I)
670 I1(I9)=I1(I)
680 NEXT I
690 N=I9
700 DELETE F,F5,M1,M2,A0,I9
710 DIM F(N),F5(N/2),M1(N),M2(N),A0(P)
720 FOR I=1 TO N
730 IF R1(I)<0 AND I1(I)>0 THEN 5280
740 IF R1(I)<0 AND I1(I)<0 THEN 5310
750 F(I)=ATN(I1(I)/R1(I))/(2*PI*T2)
760 M1(I)=SQR(R1(I)^2+I1(I)^2)
770 GO TO 5330
780 F(I)=ATN(I1(I)/R1(I))/(2*PI*T2)+1/(2*T2)
790 M1(I)=SQR(R1(I)^2+I1(I)^2)
800 GO TO 5330
810 F(I)=ATN(I1(I)/R1(I))/(2*PI*T2)-1/(2*T2)

```

```

520 M1(I)=SQR(R1(I)^2+I1(I)^2)
530 NEXT I
540 I7=0
550 FOR I=1 TO N-1 STEP 2
560 FOR J=I+1 TO N
570 IF ABS(F(I))<>ABS(F(J)) THEN 5450
580 IF F(I)=>F(J) THEN 5420
590 F9=F(J)
600 F(J)=F(I)
610 F(I)=F9
620 I7=I7+1
630 F5(I7)=ABS(F(I))
640 GO TO 5460
650 NEXT J
660 NEXT I
670 I7=0
680 FOR I=1 TO N STEP 2
690 M2(I)=M1(I)
700 NEXT I
710 DELETE M3
720 DIM M3(N/2)
730 FOR I=1 TO N/2
740 M3(I)=M2(2*I-1)
750 NEXT I
760 FOR I=1 TO N/2
770 A0(I)=LOG(M3(I))/T2
780 NEXT I
790 Q=32
800 CALL "TIME",Z#
810 PRINT @Q:"LJJJJJESCUELA POLITECNICA NACIONAL"
820 PRINT @Q:"FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA"
830 PRINT @Q:"ELECTRONICA Y TELECOMUNICACIONES"
840 Q7=1
850 Q8=50
860 PRI @Q: USI 5670;"NUEVAS TECNICAS-ANALISIS ESPECTRAL","FECHA:",Z#
870 IMAGEFA,10X,FA,18A
880 PRI @Q:"===== ";
890 PRINT @Q:"===== "
900 PRINT @Q:"JNUMERO DE DATOS MUESTREADOS: ";N1;" TIEMPO DE ";
910 PRINT @Q:" MUESTREO: ";T2;" SEG." ARCHIVO ";
920 PRINT @Q:"ORDEN DEL MODELO: ";N/2;"
930 PRINT @Q:" DE DATOS: ";K#
940 PRINT @Q:"JJJ MUESTRAS DE DATOS"
950 PRINT @Q:" ===== == =====JJ"
960 Q7=Q7+18
970 FOR Q9=1 TO N1 STEP 4
980 PRINT @Q: USING 5790:X0(Q9),X0(Q9+1),X0(Q9+2),X0(Q9+3)
990 IMAGE 10X3D,8D3X3D,8D3X3D,8D3X3D,8D
1000 GOSUB 6610
1010 NEXT Q9
1020 PRINT @Q:"JJ ESTIMACION LINEAL ESPECTRAL DE PRONY"
1030 PRINT @Q:" ===== == ===== == ===== "
1040 PRINT @Q:" JJJ LOS FACTORES DE ATENUACION SON:J"
1050 Q7=Q7+8

```

```

860 GOSUB 6610
870 FOR I=1 TO N/2
880 PRINT @Q:" ATEN(";I;")=";
890 PRINT @Q: USING 5900:A0(I)
900 IMAGE 5D.7D
910 GOSUB 6610
920 NEXT I
930 PRINT @Q:"JJJ LAS FRECUENCIAS DE LAS SINUSOIDES SON:J"
940 Q7=Q7+5
950 GOSUB 6610
960 FOR I=1 TO N/2
970 PRINT @Q:" FREC(";I;")=";
980 PRINT @Q: USING 5990:F5(I)
990 IMAGE 5D.7D
000 GOSUB 6610
010 NEXT I
020 IF Q=51 THEN 6090
030 ?RI "JJGDesea la impresion de estos resultados en papel?(SI o NO)";
040 INPUT Z$
050 IF Z$="SI" OR Z$="S" THEN 6070
060 GO TO 6090
070 Q=51
080 GO TO 5600
090 REM *** ALMACENAMIENTO DE RESULTADOS PARA OBTENCION DEL ESPECTRO **
100 REM
110 B$="DATOS/PRON1"
120 KILL B$
130 CREATE B$;2*(N1*9+1);0
140 OPEN B$;1,"F",Y$
150 WRITE #1;N1,N,T2,F,M1,X0,M3,F5,Z6
160 CLOSE 1
170 PRI "LJJ SE HAN OBTENIDO FRECUENCIAS Y FACTORES DE AMORTIGUAMIENTO "
180 PRINT "J RETURN PARA CONTINUARGGG";
190 INPUT Z$
200 GO TO 1000
210 REM *** SUB. PARA CALCULAR EL TIEMPO DE DURACION DEL PROGRAMA ***
220 IF B8=4 THEN 6270
230 H5=0
240 H5=10^(-2.0925259+0.0126934*N1+0.1758917*F5)
250 H5=H5*3600
260 GO TO 6300
270 H6=10^(-2.0925259+0.0126934*N1+0.1758917*F5)
280 H6=H6*3600
290 H5=H6-H5
300 IF H5>60 THEN 6330
310 H4=H5
320 GO TO 6420
330 H4=H5/60
340 I=INT(H4)
350 H4=(H4-I)*60
360 IF I>60 THEN 6390
370 H3=I
380 GO TO 6420
390 H3=I/60

```

```

00 J=INT(H3)
10 H3=(H3-J)*60
20 CALL "TIME",J$
30 PRINT "LJJJ HORA DE INICIO DEL PROGRAMA: " ;J$
40 PRINT "JJ TIEMPO ESTIMADO DE DURACION DEL PROGRAMA:K"
50 IF H5<60 THEN 6490
60 IF I<60 THEN 6480
70 PRINT USING "50X2D,2XFA " ;J,"H."
80 PRINT USING "50X 2D,2XFA " ;H3,"MIN."
90 PRINT USING "50X 2D,2XFA " ;H4,"SEG."
600 RETURN
510 REM **PROGRAMA PARA OBTENCION DE AMPLITUDES Y FASES EXPONENCIALES**
520 REM
530 DELETE B8,A$,N1,T2,X0,T$,F,F5,E0,T,A1,M,M1,H,B$,K,X3,K1,K2,G,G1,A,U
540 DEL U,V,R1,I1,J,C,J9,E,E1,NO,X,U1,V1,Y,X1,Y1,F1,F2,S,N,F,F5,M2,A0
550 DELETE I7,Q
560 K1=6
570 GO TO 470
580 REM
590 REM ***** RETORNO AL PROGRAMA MAESTRO *****
600 GO TO 100
610 REM SUB. CAMBIO DE PAGINA
620 Q7=Q7+1
630 IF Q7<Q8 THEN 6660
640 PRINT @Q:"LJJ"
650 Q7=5
660 RETURN

```

```

000 REM      @PHIDALGO/ANGULO
010 REM
020 REM  METODO DE PRONY - CALCULO DE AMPLITUDES Y FASES EXPONENCIALES
030 REM
040 PRI "LJJJ  CALCULO DE AMPLITUDES Y FASES EXPONENCIALES - PRONY -"
050 PRINT "      *****"
060 PRINT "JJ1 --->  EVALUACION DE AMPLITUDES Y FASES EXPONENCIALES"
070 PRINT "JJ2 --->  RETORNO AL PROGRAMA MAESTRO"
080 PRI "JJJJ      Ingrese el numero de la operacion a ejecutarse!GG";
090 INPUT B7
100 IF B7<>1 AND B7<>2 THEN 1080
110 GO TO B7 OF 1120,3200
120 REM ***** LECTURA DE DATOS PARA CALCULO DE AMPLITUDES Y FASES *****
130 REM
140 OFEN "DATOS/PRON1";1,"R",X$
150 READ #1:N1,P,T2
160 DELETE F5,M2,X,M1,F,R1
170 DIM F5(P),M2(P),X(N1),M1(P/2),F(P/2)
180 READ #1:F5,M2,X,M1,F,Z6
190 CLOSE 1
200 S$="DATO"
210 KILL S$
220 CREATE S#$9+1,0
230 OPEN S#$1,"F",T$
240 WRITE #1:Z6
250 CLOSE 1
260 REM
270 REM *** DETERMINACION DE AMPLITUDES Y FASES EXPONENCIALES ***
280 REM      PARA ESTA EVALUACION SE MINIMIZA EL SISTEMA  $OB=X'$ 
290 REM      OBTENIENDOSE LA SOLUCION  $B=[O'O]'O'X$ 
300 REM DONDE: B - Matriz de parametros complejos  $b_m$ (amplitud y fase)
310 REM      O' - Matriz de Van der Monde compleja conjugada transp.
320 REM      X - Matriz de muestras ingresadas
330 REM      SE ESTRUCTURA LA MATRIZ  $[O'O]$ 
340 SET RADIANS
350 GOSUB 3260
360 DELETE O2
370 DIM O2(P)
380 FOR I=1 TO P
390 O2(I)=F5(I)*2*PI*T2
400 NEXT I
410 A$="DATO1"
420 KILL A$
430 CREATE A#$P*N1,25
440 OPEN A#$1,"F",X$
450 FOR J=1 TO P
460 FOR I=1 TO N1
470 K=N1*(J-1)+I
480 IF I<>1 THEN 1530
490 R=1
500 S=0
510 WRITE #1,K:R,S
520 GO TO 1650
530 IF I<>2 THEN 1600

```



```

40 R7=M2(J)*COS(O2(J))
50 S7=M2(J)*SIN(O2(J))
60 R=R7
70 S=S7
80 WRITE #1,K;R,S
90 GO TO 1650
00 R9=R*R7-S*S7
10 S9=S*R7+R*S7
20 R=R9
30 S=S9
40 WRITE #1,K;R,S
50 NEXT I
60 NEXT J
70 CLOSE
80 B$="DATO2"
90 KILL B$
00 CREATE B$;P*N1,25
10 OPEN A$;1,"R",X$
20 OPEN B$;2,"F",Y$
30 FOR K=1 TO P*N1
40 READ #1,K;R,S
50 WRITE #2,K;R,-S
60 NEXT K
70 CLOSE
80 DELETE R2,I2
90 DIM R2(P,P),I2(P,P)
00 OPEN A$;1,"R",X$
10 OPEN B$;2,"R",Y$
20 FOR I=1 TO P
30 FOR J=1 TO P
40 R2(I,J)=0
50 I2(I,J)=0
60 FOR K=1 TO N1
70 K1=(J-1)*N1+K
80 K2=(I-1)*N1+K
90 READ #1,K1;R1,S1
00 READ #2,K2;R6,S2
10 R2(I,J)=R2(I,J)+R1*R6-S1*S2
20 I2(I,J)=I2(I,J)+R1*S2+S1*R6
30 NEXT K
40 NEXT J
50 NEXT I
60 CLOSE
70 DELETE I3,R3,A8,A9
80 DIM I3(P,P),R3(P,P),A8(P,P),A9(P,P)
90 I3=INV(I2)
00 R3=INV(R2)
10 A8=I3 MPY R2
20 A9=R3 MPY I2
30 A8=A8+A9
40 A9=INV(A8)
50 A8=A9 MPY I3
60 R3=-R3
70 R2=R3 MPY I2

```

```

080 A9=R2 MPY A8
090 C$="DAT04"
100 KILL C$
110 CREATE C$;P*P,25
120 OPEN C$;1,"F",X$
130 K=1
140 FOR I=1 TO P
150 FOR J=1 TO P
160 WRITE #1,K:A8(I,J),A9(I,J)
170 K=K+1
180 NEXT J
190 NEXT I
200 CLOSE 1
210 DELETE I2,R2,I3,R3,A8,A9,R4
220 DIM R4(P,N1)
230 OPEN C$;1,"R",X$
240 OPEN B$;2,"R",Y$
250 FOR I=1 TO P
260 FOR J=1 TO N1
270 R4(I,J)=0
280 FOR K=1 TO P
290 K1=(I-1)*P+K
300 K2=(K-1)*N1+J
310 READ #1,K1:R3,S3
320 READ #2,K2:R5,S5
330 R4(I,J)=R4(J,J)+R3*R5-S3*S5
340 NEXT K
350 NEXT J
360 NEXT I
370 DELETE B,H
380 DIM B(P,1),H(P,1)
390 B=R4 MPY X
400 B=2*B
410 FOR I=1 TO P
420 FOR J=1 TO N1
430 R4(I,J)=0
440 FOR K=1 TO P
450 K1=(I-1)*P+K
460 K2=(K-1)*N1+J
470 READ #1,K1:R3,S3
480 READ #2,K2:R5,S5
490 R4(I,J)=R4(I,J)+R3*S5+S3*R5
500 NEXT K
510 NEXT J
520 NEXT I
530 H=R4 MPY X
540 H=2*H
550 CLOSE
560 DELETE R4,B1,H1,B2,H2
570 DIM B1(P,1),H1(P,1),B2(P/2,1),H2(P/2,1)
580 SET DEGREES
590 FOR I=1 TO P
600 IF B(I,1)<0 AND H(I,1)<0 THEN 2650
610 IF B(I,1)<0 AND H(I,1)>0 THEN 2680

```

```

620 B1(I,1)=SQR(B(I,1)^2+H(I,1)^2)
630 H1(I,1)=ATN(H(I,1)/B(I,1))
640 GO TO 2700
650 B1(I,1)=SQR(B(I,1)^2+H(I,1)^2)
660 H1(I,1)=ATN(H(I,1)/B(I,1))-180
670 GO TO 2700
680 B1(I,1)=SQR(B(I,1)^2+H(I,1)^2)
690 H1(I,1)=ATN(H(I,1)/B(I,1))+180
700 NEXT I
710 DELETE B2,H2
720 DIM B2(P/2,1),H2(P/2,1)
730 FOR I=1 TO P/2
740 B2(I,1)=B1(2*I-1,1)
750 H2(I,1)=H1(2*I-1,1)
760 H2(I,1)=H2(I,1)+90
770 NEXT I
780 Q=32
790 IF Z6=3 THEN 2830
800 PRINT @Q:"LJ          METODO DE PRONY EXTENDIDO"
810 PRINT @Q:"          ===== == ===== ====="
820 GO TO 2850
830 PRINT @Q:"LJ          ESTIMACION LINEAL ESPECTRAL DE PRONY"
840 PRINT @Q:"          ===== ===== ===== == ====="
850 PRINT @Q:"JJJ          LAS AMPLITUDES DE LAS SINUSOIDES SON:J"
860 FOR I=1 TO P/2
870 PRINT @Q:"          AMP(",I;")=";
880 PRINT @Q: USING 2890:B2(I,1)
890 IMAGE 4D,7D
900 NEXT I
910 PRINT @Q:"JJJ          LAS FASES DE LAS SINUSOIDES SON:J"
920 FOR I=1 TO P/2
930 PRINT @Q:"          FASE(",I;")=";
940 PRINT @Q: USING 2950:H2(I,1)
950 IMAGE 4D,7D
960 NEXT I
970 IF Q=51 THEN 3040
980 FRI "JGDesea la impresion de estos resultados en papel?(SI o NO) ";
990 INPUT Z$
000 IF Z$="SI" OR Z$="S" THEN 3020
010 GO TO 3040
020 Q=51
030 GO TO 2850
040 REM *** ALMACENAMIENTO DE RESULTADOS PARA OBTENCION DEL ESPECTRO **
050 REM
060 IF Z6=3 THEN 3090
070 C$="@PHIDALGO/AMPLITUD"
080 GO TO 3100
090 C$="@PHIDALGO/ESPECTRO"
100 KILL C$
110 CREATE C$;2*(P*9)+1,0
120 OPEN C$;1,"F",Y$
130 IF Z6=2 THEN 3170
140 B2=B2*B2
150 WRITE #1;P/2,T2,F,B2

```

```

60 GO TO 3180
70 WRITE #1:F/2,T2,F,M1,B2,H2
80 CLOSE 1
90 GO TO 1000
000 REM
010 REM ***** RETORNO AL PROGRAMA MAESTRO *****
020 DEL B7,N1,P,T2,F5,M2,X,M1,F,Z6,S#,O2,A#,K,R,S,R7,S7,R9,S9,B#,K1,K2
030 DELETE R1,S1,R6,S2,K,C#,R3,S3,R5,S5,B,H,B1,H1,B2,H2,Q
040 K2=6
050 GO TO 100
060 REM *** SUB. PARA CALCULAR EL TIEMPO DE DURACION DEL PROGRAMA ***
070 H6=10^(-1.96261314+0.0104566*N1+0.2393425*P/2)
080 H6=H6*3600
090 IF H6>60 THEN 3320
100 H4=H6
110 GO TO 3410
120 H4=H6/60
130 I=INT(H4)
140 H4=(H4-I)*60
150 IF I>60 THEN 3380
160 H3=I
170 GO TO 3410
180 H3=I/60
190 J=INT(H3)
200 H3=(H3-J)*60
210 CALL "TIME",J#
220 PRINT "LJJJ HORA DE INICIO DEL PROGRAMA; " ;J#
230 PRINT "JJ TIEMPO ESTIMADO DE DURACION DEL PROGRAMA;K"
240 IF H6<60 THEN 3480
250 IF I<60 THEN 3470
260 PRINT USING "50X2D,2XFA " ;J,"H."
270 PRINT USING "50X 2D,2XFA " ;H3,"MIN."
280 PRINT USING "50X 2D,2XFA " ;H4,"SEG."
290 RETURN

```

```

000 REM      @PHIDALGO/GRAFICOS
010 K2=5
020 REM
030 SET DEGREES
040 OPEN "DATO";1,"R",S$
050 READ #1:Z6
060 CLOSE 1
070 REM ***** PROGRAMA PARA GRAFICOS DE ESTIMACION ESPECTRAL *****
080 REM
090 PRINT "LJJJ      GRAFICOS DE ESTIMACION ESPECTRAL"
100 PRINT "      ===== = ====="
110 PRI "JJ 1 ---->   ESPECTRO CONTINUO ENTRE LAS FRECUENCIAS 0 - fm/2"
120 PRI "J 2 ---->   ESPECTRO CONTINUO CON EL DOBLE DE RESOLUCION QUE"
130 PRINT "      EL ULTIMO REALIZADO"
140 PRI "J 3 ---->   ESPECTRO CONTINUO CON EL DOBLE DE RESOLUCION QUE"
150 PRI "      EL ULTIMO REALIZADO,DE LA MITAD SUPERIOR-INFERIOR"
160 PRINT "      DEL INTERVALO DE FRECUENCIA"
170 PRI "J 4 ---->   ESPECTRO DISCRETO ENTRE LAS FRECUENCIAS 0 - fm/2"
180 PRI "J 5 ---->   ESPECTRO DISCRETO ENTRE DOS FRECUENCIAS CUALQUIE";
190 PRINT "RA"
200 PRINT "J 6 ---->   RETORNO AL PROGRAMA MAESTRO"
210 PRINT "JJJ      Ingrese el numero de la operacion a ejecutarse;G";
220 INPUT B5
230 IF B5<>1 AND B5<>2 AND B5<>3 AND B5<>4 AND B5<>5 AND B5<>6 THE 1210
240 GO TO B5 OF 1260,1530,1690,1930,2100,4890
250 REM
260 REM ***** ESPECTRO CONTINUO ENTRE LAS FRECUENCIAS 0 -fm/2 *****
270 REM
280 IF Z6<>1 THEN 1340
290 PRI "JJJ EL METODO DE PISARENKO TIENE UN ESPECTRO DISCRETO Y NO ";
300 PRINT "CONTINUO"
310 PRINT "JJJJJ      RETURN PARA CONTINUARG";
320 INPUT X$
330 GO TO 1080
340 IF Z6<>3 THEN 1410
350 PRI "JJJJ EL METODO DE DESCOMPOSICION LINEAL ESPECTRAL DE PRONY ";
360 PRINT "PRESENTA UN "
370 PRINT "J ESPECTRO DISCRETO Y NO CONTINUO."
380 PRINT "JJJJ      RETURN PARA CONTINUARG";
390 INPUT X$
400 GO TO 1080
410 T7=2
420 OPEN "PERIODO/MUESTREO";1,"R",Z$
430 READ #1:T2
440 CLOSE 1
450 B4=1
460 F0=0
470 F9=1/T2/2
480 GOSUB 2460
490 GOSUB 2210
500 GO TO 1090
510 REM
520 REM
530 REM ***** ESPECTRO CONTINUO CON EL DOBLE DE RESOLUCION *****

```

```

540 IF B4=0 THEN 1090
550 F0=F0+F8/2
560 DELETE Y5,Y6
570 DIM Y5(R1),Y6(2*R1-1)
580 X3=0
590 Y5=04
600 R2=R1
610 R1=R1-1
620 GOSUB 2530
630 X3=1
640 R1=2*R2-1
650 GOSUB 2260
660 GOSUB 2210
670 GO TO 1090
680 REM
690 REM *** ESPECTRO CONTINUO CON DOBLE RESOL. EN LA MITAD SUP,-INF.**
700 IF B4=0 THEN 1090
710 PRINT "LJJ      ESPECTRO CONTINUO CON DOBLE DE RESOLUCION"
720 PRINT "JJJG Desea en la mitad inferior(1) o superior(2): ";
730 INPUT X3
740 X3=X3-1
750 IF X3<>0 AND X3<>1 THEN 1720
760 DELETE Y5,Y6
770 F0=F0+F8/2+(F9-F0)/2*X3
780 R2=R1
790 R1=(R1-1)/2
800 IF X3=1 THEN 1840
810 DIM Y6(R2),Y5(R1+1),O4(R1+1)
820 Y5=04
830 GO TO 1880
840 DIM Y6(R2),Y5(R1+1)
850 FOR I=1 TO R1+1
860 Y5(I)=O4(R1+I)
870 NEXT I
880 GOSUB 2530
890 R1=R2
900 GOSUB 2260
910 GOSUB 2210
920 GO TO 1090
930 REM **** ESPECTRO DISCRETO ENTRE LAS FRECUENCIAS 0 - fm/2 ****
940 IF Z6<>2 THEN 2000
950 PRI "JJJ EL ESPECTRO DEL METODO DE PRONY EXTENDIDO ES CONTINUO Y ";
960 PRINT "NO DISCRETO"
970 PRINT "JJJJ      RETURN PARA CONTINUARG";
980 INPUT X$
990 GO TO 1000
2000 T7=1
2010 B4=0
2020 OPEN "PERIODO/MUESTREO";1,"R",Z$
2030 READ #1:T2
2040 CLOSE 1
2050 F0=0
2060 F9=1/T2/2
2070 GOSUB 2800

```

```

80 GOSUB 2210
90 GO TO 1090
00 REM **** ESPECTRO DISCRETO ENTRE DOS FRECUENCIAS CUALQUIERA ****
10 T7=1
20 B4=0
30 PRINT "LJJJ ESPECTRO DISCRETO ENTRE DOS FRECUENCIAS CUALQUIERA"
40 PRINT "JJJ Ingrese la frecuencia inferior en hertz F0= ";
50 INPUT F0
60 PRINT "J Ingrese la frecuencia superior en hertz F9= ";
70 INPUT F9
80 GOSUB 2800
90 GOSUB 2210
000 GO TO 1090
10 REM **** SUBROUTINA DE LLAMADA A OTRAS SUBROUTINAS ****
20 GOSUB 3350
30 GOSUB 2920
40 GOSUB 4580
50 RETURN
60 REM **** SUBROUTINA DE INTERCALACION DE RESULTADOS ****
70 J=0
80 I=-1
90 J=J+1
00 I=I+2
10 IF J>(R1-1)/2 THEN 2350
20 Y6(I)=Y5(J)
30 Y6(I+1)=O4(J)
40 GO TO 2290
50 Y6(R1)=Y5(J)
60 F0=F0-F8/2
70 F8=F8/2
80 IF X3=1 THEN 2400
90 F9=(F0+F9)/2
00 DELETE O4,I7
10 DIM O4(R1),I7(R1)
20 O4=Y6
30 I7=O4
40 RETURN
50 REM
60 REM **** OBTENCION DEL ESPECTRO DEL MODELO ****
70 REM CALCULO DE PUNTOS DEL GRAFICO
80 PRINT "LJJJG INGRESE EL NUMERO(IMPARG) DE PUNTOS DEL GRAFICO R1= ";
90 INPUT R1
00 R6=INT(R1/2)-R1/2
10 IF R6=0 THEN 2480
20 F8=(F9-F0)/(R1-1)
30 OPEN "@PHIDALGO/AMPLITUD";1,"R",X$
40 READ #1:P9,T2
50 DELETE O4,O6,S1,A9,I7,B1,H1,F5
60 DIM O4(R1),O6(P9),S1(P9),A9(P9),I7(R1),B1(P9,1),H1(P9,1),F5(P9)
70 READ #1:F5,A9,B1,H1
80 CLOSE
90 FOR I=1 TO P9
00 IF A9(I)<>0 THEN 2620
10 A9(I)=5.0E-15

```

```

620 NEXT I
630 N8=0
640 J8=1
650 J=F0-F8
660 N8=N8+1
670 IF N8=R1+1 THEN 2780
680 J=J+F8
690 FOR I=1 TO P9
700 O6(I)=B1(I,1)*COS(H1(I,1))*2*A9(I)/(A9(I)*A9(I)+(2*PI*(J-F5(I)))^2)
710 S1(I)=B1(I,1)*SIN(H1(I,1))*2*A9(I)/(A9(I)*A9(I)+(2*PI*(J-F5(I)))^2)
720 NEXT I
730 C9=SUM(O6)
740 S9=SUM(S1)
750 O4(J8)=C9*C9+S9*S9
760 J8=J8+1
770 GO TO 2660
780 I7=O4
790 RETURN
800 REM ***      OBTENCION DEL ESPECTRO      ***
810 OPEN "@PHIDALGO/ESPECTRO";1,"R",X$
820 READ #1:F9,T2
830 DELETE F5,A9,I7,Y,A1
840 DIM F5(P9),A9(P9),I7(P9),Y(P9)
850 READ #1:F5,A9
860 CLOSE
870 I7=A9
880 FOR I=1 TO P9
890 Y(I)=F5(I)
900 NEXT I
910 RETURN
920 REM ***** DETERMINACION DEL TITULO SUPERIOR *****
930 X$=STR(P9)
940 D$="DESCOMPOSICION ARMONICA DE PISARENKO      ORDEN"&X$
950 IF Z6=1 THEN 2990
960 D$="METODO DE PRONY EXTENDIDO      ORDEN"&X$
970 IF Z6=2 THEN 2990
980 D$="DESCOMPOSICION LINEAL ESPECTRAL DE PRONY      ORDEN"&X$
990 REM ***** FACTOR DE TAMANO DE CARACTERES      *****
000 DELETE X0,Y0
010 F1=1
020 F2=1
030 X9=1.792
040 Y9=2.816
050 X0=X9*F1
060 Y0=Y9*F1
070 RETURN
080 REM ***** IMPRESION DE TITULOS      *****
090 F7=1/T2
100 G$=STR(F7)
110 H$=" Hz."
120 G$=" fm="&G$
130 REM ***** TITULO INFERIOR      *****
140 GOSUB 4790
150 MOVE @PB:(W1+W2)/2,W3

```



```

160 SCALE 1,1
170 RMOVE @P8:-(LEN(E$)+LEN(G$)+LEN(H$))/2*X0,-4*Y0
180 PRINT @P8:E$;G$;H$;
190 REM *****          TITULO LATERAL IZQUIERDO          *****
200 IF P8=32 THEN 3280
210 GOSUB 4790
220 MOVE @P8:W1,(W3+W4)/2
230 SCALE 1,1
240 RMOVE @P8:-2.5*Y0-2,-LEN(F$)/2*X0
250 PRINT @1,25:90
260 PRINT @P8:F$;
270 PRINT @1,25:0
280 REM *****          TITULO SUPERIOR          *****
290 GOSUB 4790
300 MOVE @P8:(W1+W2)/2,W4
310 SCALE 1,1
320 RMOVE @P8:-LEN(D$)/2*X0,0.2*Y0+4
330 PRINT @P8:D$;
340 RETURN
350 REM *** INICIALIZACION DE GRAFICO DE ESTIMACION ESPECTRAL ***
360 T8=1
370 PRINT "L          DETERMINACION DE FORMATOS DEL GRAFICO"
380 PRINT "JJJG Desea: - eje horizontal en frecuencias(1), o"
390 PRINT "          - eje horizontal en fraccion de la frecuencia de ";
400 PRINT "muestreo(2): ";
410 INPUT S9
420 IF S9<>1 AND S9<>2 THEN 3380
430 PRINT "JJG Desea PSD normalizado en veces(1), o en dB(2):";
440 INPUT T8
450 IF T8<>2 AND T8<>1 THEN 3430
460 T8=NOT(T8-1)
470 IF T8=1 THEN 3520
480 PRINT "JJG Ingresar dB minimo en el grafico M7: ";
490 INPUT M7
500 IF M7=>0 THEN 3480
510 GO TO 3530
520 M7=0
530 T7=NOT(T7-1)
540 REM *****          NORMALIZACION DE DATOS A GRAFIZAR          *****
550 CALL "MAX",I7,W4,W9
560 I7=I7/W4
570 IF T8=1 THEN 3600
580 I7=LGT(I7)
590 I7=10*I7
600 REM *** INICIALIZACION DE DATOS DEL GRAFICO          *****
610 IF T7=1 THEN 3690
620 DELETE Y
630 DIM Y(R1)
640 Y=1
650 CALL "INT",Y,Y
660 W1=0
670 W2=R1-1
680 GO TO 3710
690 W1=0

```

```

700 W2=1/(2*T2)
710 W3=M7
720 W4=1
730 IF T8=1 THEN 3750
740 W4=0
750 RETURN
760 REM *****          GRAFICO DE LINEAS          *****
770 W2=1/(2*T2)
780 W1=0
790 GOSUB 4790
800 MOVE @P8:Y(1),I7(1)
810 DRAW @P8:Y(1),W3
820 FOR I=2 TO P9
830 MOVE @P8:Y(I),W3
840 DRAW @P8:Y(I),I7(I)
850 NEXT I
860 RETURN
870 REM *****          GRAFICO CONTINUO          *****
880 W2=R1-1
890 W1=0
900 GOSUB 4790
910 MOVE @P8:Y(1),I7(1)
920 DRAW @P8:Y,I7
930 RETURN
940 REM *** EJES PARA ESTIMACION ESPECTRAL INICIALIZACION ***
950 A3=F0
960 A4=W3
970 A1=(F9-F0)/10
980 A2=10
990 IF T8=0 THEN 4010
4000 A2=0.1
4010 A5=2
4020 A6=1
4030 REM *****          EJES          *****
4040 REM          EJE HORIZONTAL
4050 W1=F0
4060 W2=F9
4070 GOSUB 4790
4080 MOVE @P8:W1,A4
4090 M8=5
4100 GOSUB 4790
4110 FOR J=1 TO M8+1
4120 GOSUB 4790
4130 DRAW @P8:W1+(J-1)*A1*2,A4
4140 SCALE 1,1
4150 RDRAW @P8:0,1
4160 S2=(W1+(J-1)*A1*2)*1
4170 IF S9=1 THEN 4190
4180 S2=S2*T2
4190 X$=STR(S2)
4200 X$=REP(" ",1,1)
4210 RMOVE @P8:-LEN(X$)/2*X0,-1-1.05*Y0
4220 PRINT @P8:X$
4230 GOSUB 4790

```

```

2240 MOVE @P8:W1+(J-1)*A1*2,A4
2250 .NEXT J
2260 REM                               EJE VERTICAL
2270 GOSUB 4790
2280 MOVE @P8:A3,W3
2290 M8=(W4-W3)/A2+1
2300 FOR J=1 TO M8
2310 GOSUB 4790
2320 DRAW @P8:A3,W3+(J-1)*A2
2330 SCALE 1,1
2340 RDRAW @P8:1,0
2350 X$=STR(W3+(J-1)*A2)
2360 X$=REP(" ",1,1)
2370 RMOVE @P8:-LEN(X$)/2*X0-5,11/36*Y0
2380 FRINT @P8:X$
2390 GOSUB 4790
2400 MOVE @P8:A3,W3+(J-1)*A2
2410 NEXT J
2420 REM ****      EJES SUPERIOR E INFERIOR      *****
2430 AXIS @P8:A1*2,A2,W2,W4
2440 RETURN
2450 E$="FRECUENCIA (Hz.)"
2460 IF S9=1 THEN 4480
2470 E$="FRACCION DE LA FRECUENCIA DE MUESTREO"
2480 F$="PSD RELATIVO"
2490 IF Z6=1 OR Z6=3 THEN 4510
2500 F$="ESD RELATIVO"
2510 IF T8=1 THEN 4540
2520 F$=F$&" (dB)"
2530 IF T8<>1 THEN 4560
2540 IF Z6=2 THEN 4560
2550 F$="PSD NORMALIZADO"
2560 RETURN
2570 REM
2580 REM *****      EJECUCION DEL PROGRAMA DE GRAFICOS      *****
2590 FRINT "JJG Desea grafico en pantalla(1) o en grafizador(2): ";
2600 INPUT W9
2610 IF W9<>1 AND W9<>2 THEN 4590
2620 IF W9=1 THEN 4650
2630 GOSUB 4840
2640 GO TO 4660
2650 P8=32
2660 REM *****      SE ESCOGE ESPECTRO DE LINEAS O CONTINUO      *****
2670 PAGE
2680 GOSUB T7+1 OF 3870,3760
2690 REM *****      SE EJECUTA LA SUBROUTINA DE EJES      *****
2700 GOSUB 3940
2710 REM *****      SE EJECUTA LA SUBROUTINA DE TITULOS      *****
2720 GOSUB 4450
2730 GOSUB 3080
2740 HOME
2750 FRINT "G Desea repetir este grafico (SI O NO): ";
2760 INPUT X$
2770 IF X$="S" OR X$="SI" THEN 4590

```

```

780 RETURN
790 WINDOW W1,W2,W3,W4
800 VIEWPORT 15,143,15,92
810 IF P8=1 THEN 4830
820 VIEWPORT 15,123,15,90
830 RETURN
840 P8=1
850 PRINT "LJJJJB ALISTE EL GRAFIZADOR,RETURN PARA CONTINUAR";
860 INPUT X$
870 RETURN
880 REM
890 REM *** RETORNO AL PROGRAMA MAESTRO *
900 DEL B5,Z6,T7,T2,B4,F0,F9,Y5,Y6,X3,D4,R2,R1,J,I,F8,I7,R6,Q6,S1,A9,B1
910 DEL H1,F5,N8,J8,C9,S9,F9,Y,F1,F2,X9,Y9,X0,Y0,F7,G$,H$,W1,W2,W3,W4
920 DELETE F8,F$,I$,T8,M7,A3,A4,A1,A2,A5,A6,M8,S2,X$,E$,W9
930 GO TO 100

```

```

00 REM          @GRAF/DAT
10 REM
20 REM  PROGRAMA PARA GRAFICAR DATOS MUESTREADOS
30 REM
40 PRINT "LJJJ LOS DATOS A GRAFICARSE ESTAN EN EL ARCHIVO A$ = G";
50 INPUT K$
60 OPEN K$;1,"R",X$
70 READ #1:N1,T2
80 DELETE X0
90 DIM X0(N1)
00 READ #1:X0
10 CLOSE 1
20 PRINT "JJLOS DATOS HAN SIDO LEIDOS; RETURN PARA CONTINUARGG";
30 INPUT X$
40 REM
50 F1=1
60 F2=1
70 X9=1.792
80 Y9=2.816
90 M0=X9*F1
00 N0=Y9*F1
10 CALL "MAX",X0,L9,K9
20 X0=X0/L9
30 W1=0
40 W2=N1-1
50 W3=-1
60 W4=1
70 PRINT "JJGDesea grafico en pantalla(1) o en grafizador(2); ";
80 INPUT W9
90 IF W9<>1 AND W9<>2 THEN 370
00 IF W9=1 THEN 430
10 GOSUB 930
20 GO TO 440
30 P8=32
40 GOSUB 970
50 PAGE
60 MOVE @P8:1,X0(1)
70 FOR I=2 TO N1
80 DRAW @P8:I,X0(I)
90 NEXT I
00 REM ***** E J E S *****
10 A3=W1
20 A4=W3
30 A1=8
40 A2=0.2
50 AXIS @P8:A1,A2,W1,W1
60 Y$=STR(N1)
70 D$="MUESTRAS DE DATOS   NUMERO: "&Y$
80 F$="AMPLITUD"
90 M$="Esc.Horizontal 1 DIV : "
00 N$="Esc.Vertical 1 DIV : "
10 IF P8=32 THEN 690
20 GOSUB 970
30 MOVE @P8:W1,(W3+W4)/2

```

```

40 SCALE 1,1
50 RMOVE @P8:-2.5*N0-2,-LEN(F$)/2*M0
60 PRINT @1,25:90
70 PRINT @P8:F$;
80 PRINT @1,25:0
90 GOSUB 970
00 MOVE @P8:(W1+W2)/2,W4
10 SCALE 1,1
20 RMOVE @P8:-LEN(D$)/2*M0,0.2*N0+4
30 PRINT @P8:D$
40 GOSUB 970
50 MOVE @P8:(W1+W2)/2,W3
60 SCALE 1,1
70 RMOVE @P8:(W1+W2)/2,W3
80 SCALE 1,1
90 RMOVE @P8:-LEN(M$)/2*M0,-0.2*N0-2
00 PRINT @P8:M$;A1
10 GOSUB 970
20 MOVE @P8:(W1+W2)/2,W3
30 SCALE 1,1
40 RMOVE @P8:(W1+W2)/2,W3
50 SCALE 1,1
60 RMOVE @P8:-LEN(M$)/2*M0,-0.2*N0-6
70 PRINT @P8:N$;1/5
80 HOME
90 PRINT "GDESEA REPETIR ESTE GRAFICO (SI O NO): ";
00 INPUT X$
10 IF X$="S" OR X$="SI" THEN-370
20 RETURN
30 P8=1
40 PRINT "LJJJALISTE EL GRAFIZADOR, RETURN PARA CONTINUAR ";
50 INPUT X$
60 RETURN
70 WINDOW W1,W2,W3,W4
80 VIEWPORT 15,143,15,92
90 IF P8=1 THEN 1010
1000 VIEWPORT 15,123,15,90
1010 RETURN

```

BIBLIOGRAFIA

- 1) S. M. Kay y S. L. Marple; Spectrum - Analysis - A Modern Perspective, Proceedings of the IEEE, Vol. 69, No. 11, Noviembre 1981.
- 2) E. A. Robinson; A Historical Perspective of Spectrum Estimation, Proceedings of the IEEE, Vol. 70, No. 9, Septiembre 1982.
- 3) V. F. Pisarenko; The Retrieval of Harmonics from a Covariance - Function, Geophysics Journal of the Royal Astronomical Society , Vol. 33, 1973, pp. 347-366.
- 4) L. Marple; Spectral Line Analysis by Pisarenko and Prony Methods, IEEE Press.
- 5) A. Papoulis; Sistemas Digitales y Analógicos, Transformadas de Fourier, Estimación Espectral, Marcombo, Barcelona, 1978.
- 6) F. B. Hildebrand; Introduction to Numerical Analysis, McGraw-Hill Inc., New York, 1974.
- 7) M. L. James, G. M. Smith y J. C. Wolford; Applied Numerical Methods for Digital Computation, International Textbook Company, 1967.
- 8) B. P. Lathi; An Introduction to Random Signals and Communications Theory, International Textbook Company, Pennsylvania, 1968.

- 9) J. Makhoul; Linear Prediction: A Tutorial Review, Proceedings - of the IEEE, Vol. 63, No. 4, April 1975.
- 10) O. Grenander and G. Szego; Toeplitz Forms and Their Applications, Berkeley, C.A.: Univ. California Press, 1958.
- 11) D. G. Childers; Modern Spectrum Analysis, IEEE Press, New York , 1978.
- 12) H. Holtz; Prony's method and related approaches to exponential approximation, Aerospace Corp., June 15, 1973.
- 13) R. N. McDonough and W. H. Huggins, Best least-squares representation of signals by exponentials, IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. AC-13, pp. 408 - 412, Aug. 1968.
- 14) M. Bayas; Modelos Autorregresivos de Análisis Espectral, Tesis de Grado, Escuela Politécnica Nacional, Facultad de Ingeniería Eléctrica, 1984.
- 15) Tektronix; 4050 series R07 signal processing ROM PACK No. 1 instruction manual, Tektronix, 1980.
- 16) Tektronix; 4051 series R01 Matrix Functions, Tektronix, 1980.