

LA TRANSFORMADA DE HADAMARD

Tesis previa a la obtención del título de Ingeniero en la
especialización de Electrónica y Telecomunicaciones de la
Escuela Politécnica Nacional

GUALBERTO E. HIDALGO H.

QUITO

JUNIO 1974.

Certifico que este trabajo ha sido realizado en su totalidad por el señor Gualberto Edmundo Hidalgo Hidrovo.



Ing. Herbert P. Jacobson

Director de Tesis

Quito, Junio de 1974

PROLOGO

La lectura de algunas obras de literatura científica me llevó al convencimiento de que no era posible lograr una comprensión satisfactoria de la misma sin un conocimiento, al menos general, de las nociones básicas del análisis matemático. Con el afán de familiarizarme con las mismas decidí frecuentar la Escuela Politécnica Nacional, una institución reconocida por el elevado nivel académico de sus estudios.

Ahora que he concluido mi carrera veo que mis esperanzas no han sido defraudadas. Rindo, pues, el tributo de mi gratitud más sincera a esta benemérita institución, que tanto ha hecho por el progreso de la Patria.

La culminación de este trabajo de índole teórica, pero de inagotables proyecciones prácticas, aumenta los motivos de mi gratitud. Cómo pasar por alto la sacrificada dirección del Ing. Herbert P. Jacobson, siempre dispuesto a orientar en la mejor forma el trabajo de investigación. Gracias a él he podido obtener la adecuada información bibliográfica acerca de mi tesis. Igualmente me siento en el deber de expresar mi gratitud al Ing. Daniel Rodríguez y al Sr. José Ortega, quienes en la forma más noble y desinteresada me prestaron su ayuda en la elaboración del programa. Mi reconocimiento igualmente al personal de la Di-

I N D I C E

| | |
|--|-----|
| Prólogo | IV |
| Introducción | 1 |
| Capítulo 1 | |
| LA TRANSFORMADA DISCRETA GENERALIZADA | 9 |
| 1.1 La transformada discreta de Fourier como un ejemplo de transformación discreta | 9 |
| 1.2 La transformada discreta generalizada como un caso de transformación de vectores | 14 |
| 1.3 Matrices unitarias | 17 |
| 1.4 Propiedades de una transformación unitaria | 20 |
| 1.5 Matrices ortogonales | 22 |
| 1.6 Transformaciones ortogonales | 22 |
| 1.7 Obtención de las matrices de transformación | 24 |
| 1.8 Factorización de la matriz de transformación | 52 |
| 1.9 Fórmula general para la obtención de la matriz de transformación | 53 |
| 1.10 Propiedades de la transformada discreta generalizada | 65 |
| 1.11 Algoritmos rápidos | 71 |
| 1.12 Transformada discreta generalizada modificada | 74 |
| Capítulo 2 | |
| LA TRANSFORMADA DE HADAMARD O BIFORE | 83 |
| 2.1 Concepto general | 83 |
| 2.2 Funciones de Walsh | 85 |
| 2.3 Funciones de Walsh pares e impares | 98 |
| 2.4 Matrices de Hadamard | 100 |
| 2.5 Matrices de Hadamard y funciones de Walsh | 103 |
| 2.6 Definición de la transformada de Hadamard | 109 |
| 2.7 La transformada rápida de Hadamard | 110 |

| | | |
|--|---|-----|
| 2.8 | La transformada rápida de Hadamard en orden progresivo de secuencia: transformada rápida de Walsh | 115 |
| 2.9 | Algoritmo rápido para obtener la transformada de Walsh | 116 |
| 2.10 | Espectro de potencia de la transformada de Hadamard | 121 |
| 2.11 | Espectro de fase de la TH | 138 |
| 2.12 | La transformada de Hadamard modificada | 155 |
| 2.13 | La transformada de Hadamard multidimensional | 158 |
| Capítulo 3 | | |
| RELACION ENTRE LA TRANSFORMADA DE WALSH Y LA DE HAAR | | 162 |
| 3.1 | Definición | 162 |
| 3.2 | Relaciones básicas | 164 |
| 3.3 | Definiciones recursivas de las submatrices de Haar y de Walsh | 164 |
| 3.4 | Aplicación a los elementos transformados | 170 |
| 3.5 | Algoritmo rápido | 172 |
| Capítulo 4 | | |
| LA TRANSFORMADA BIFORE COMPLEJA | | 177 |
| 4.1 | Definición | 177 |
| 4.2 | Inversión | 178 |
| 4.3 | Algoritmo rápido | 178 |
| 4.4 | Espectro de potencia | 178 |
| 4.5 | Interpretación física del espectro de potencia | 183 |
| 4.6 | Algoritmo rápido para el cálculo del espectro de potencia | 190 |
| Capítulo 5 | | |
| ALGUNAS APLICACIONES | | 193 |

| | | |
|-----|-------------------------------------|-----|
| 5.1 | Análisis espectral de señales | 193 |
| 5.2 | Procesamiento de la palabra hablada | 196 |
| 5.3 | Codificación de imágenes | 200 |

Capítulo 6

| | |
|---|-----|
| PARTE PRACTICA: PROCESAMIENTO DEL ALGUNOS ELECTROCAR- | |
| DIOGRAMAS | 209 |

| | | |
|-----|--|-----|
| 6.1 | Objetivos | 209 |
| 6.2 | Programa utilizado | 210 |
| 6.3 | Evaluación de los resultados obtenidos | 222 |
| 6.4 | Perspectivas de aplicaciones | 229 |

| | |
|--------------|-----|
| BIBLIOGRAFIA | 243 |
|--------------|-----|

INDICE DE GRAFICOS

| | |
|-----------------------|-----|
| Fig. 1-1 | 10 |
| Fig. 1-2 | 11 |
| Fig. 1-3 | 14 |
| Fig. 1-4 y fig. 1-5 | 35 |
| Fig. 1-6 y fig. 1-7 | 36 |
| Fig. 1-8 | 37 |
| Fig. 1-9 | 38 |
| Fig. 1-10 | 40 |
| Fig. 1-11 y fig. 1-12 | 42 |
| Fig. 1-13 y fig. 1-14 | 43 |
| Figs. 1-15 a 1-17 | 46 |
| Figs. 1-18 a 1-21 | 47 |
| Fig. 1-22 | 48 |
| Fig. 1-23 | 74 |
| Fig. 1-24 | 80 |
| Fig. 2-1 | 87 |
| Figs. 2-2 y 2-3 | 88 |
| Figs. 2-4 a 2-6 | 91 |
| Figs. 2-7 y 2-8 | 92 |
| Figs. 2-9 y 2-10 | 98 |
| Fig. 2-11 | 114 |
| Figs. 2-12 y 2-13 | 115 |
| Figs. 2-14 y 2-15 | 117 |
| Fig. 2-16 | 118 |
| Fig. 2-17 | 120 |
| Fig. 2-18 | 127 |
| Fig. 2-19 | 132 |
| Fig. 2-20 | 137 |
| Fig. 2-21 | 139 |
| Figs. 2-22 a 2-24 | 148 |
| Figs. 2-25 a 2-28 | 151 |
| Fig. 2-29 | 154 |

| | |
|----------------------|-----|
| Fig. 3-1 | 163 |
| Fig. 3-2 | 173 |
| Fig. 3-3 | 175 |
| Fig. 4-1 | 179 |
| Fig. 4-2 | 184 |
| Fig. 4-3 | 188 |
| Fig. 4-4 | 192 |
| Fig. 5-1 | 199 |
| Fotocopias 5-1 a 5-3 | 207 |

INDICE DE TABLAS

| | |
|--------------------|-------|
| Tabla 1-1 | 56 |
| Tabla 1-2 | 73 |
| Tabla 1-3 | 80 |
| Tabla 2-1 | 87 |
| Tabla 2-2 | 94-95 |
| Tabla 2-3 | 97 |
| Tabla 2-4 | 104 |
| Tablas 2-5 y 2-6 | 105 |
| Tabla 2-7 | 109 |
| Tabla 2-8 | 119 |
| Tabla 2-9 | 135 |
| Tablas 2-10 y 2-11 | 136 |
| Tabla 6-1 | 224 |
| Tabla 6-2 | 225 |
| Tabla 6-3 | 226 |

RESULTADOS OBTENIDOS EN LA COMPUTADORA

| | |
|-------------------------------|-----|
| Procesamiento de la curva 6-1 | 231 |
| Procesamiento de la curva 6-2 | 233 |
| Procesamiento de la curva 6-3 | 235 |
| Procesamiento de la curva 6-4 | 237 |
| Procesamiento de la curva 6-5 | 239 |
| Procesamiento de la curva 6-6 | 242 |

ABREVIATURAS

TG = Transformada generalizada

TDF = Transformada discreta de Fourier

TH = Transformada de Hadamard

TRH = Transformada rápida de Hadamard

TBC = Transformada BIFORE compleja

Sucede no raras veces en la historia del pensamiento que ciertas contribuciones científicas que parecen meras elucubraciones del espíritu, se revelan posteriormente fecundas en aplicaciones prácticas. Tal el caso de las series de Fourier o el de la transformada de Laplace. Algo semejante ocurre en el caso de la transformada discreta generalizada, de la cual la transformada de Hadamard no es sino un caso particular. Si bien la teoría de la misma es en realidad una extensión de la transformada de Fourier al caso de magnitudes discretas, su aplicabilidad depende directamente de un artificio matemático: la posibilidad de factorar una matriz de gran redundancia (matriz con muchos elementos repetidos) en varias matrices de gran dispersión (matrices con un elevado número de elementos iguales a cero). Aun después de introducido el uso de las computadoras la obtención de la transformada discreta resultaba antieconómica por el elevado tiempo de computación requerido. Es la introducción del algoritmo rápido, basado en el factoro de matrices, el que hace posible una obtención económica de la transformada discreta.

Conscientes de la novedad de la materia tratada hemos procurado dar en el primer capítulo una exposición de tenida de la transformada discreta generalizada, para situar mejor dentro de su contexto el concepto de la transformada de Hadamard. Las bases requeridas para la compren

si3n del capitulo 1 son algunas nociones generales del algebra de matrices, con un enfoque especial respecto de las matrices ortogonales y unitarias. Este capitulo nos permite ubicar la transformada de Hadamard dentro de una gran familia de transformadas, y caracterizarla como la de mayor simplicidad y como la m1s apta para obtenerse en computadoras peque1as y de limitadas posibilidades. El capitulo 1, aunque aparentemente complejo, puede sintetizarse en una idea b1sica: la de que la transformada discreta es un caso particular de transformaci3n de vectores. Un vector determinado, que puede ser una se1al muestreada, se transforma con el concurso de una matriz. Ya en el dominio de la transformada el vector posee caracteristicas nuevas que pueden aprovecharse para determinados fines. Una vez explotadas estas caracteristicas, el vector original puede recuperarse con el concurso de la transformada inversa. Gran parte del capitulo 1 se dedica al estudio de las matrices de transformaci3n: su m3todo de obtenci3n, diversas clases, propiedades, etc. Es digno de observarse que todas las matrices de transformaci3n est1n constituidas por elementos que son las raices N-3simas de 1.

Se hace posteriormente una explicaci3n somera del procedimiento de factorizaci3n de matrices, que es la base del algoritmo r1pido utilizado en la computaci3n de la transformada. Se visualiza este por medio de diagramas de flujo. Se termina el capitulo 1 con la exposici3n de la

transformada discreta modificada, que se caracteriza por una matriz de mayor dispersión.

El capítulo 2 está dedicado a la exposición de la transformada de Hadamard propiamente dicha. Dada la estrecha relación existente entre las funciones de Walsh y la transformada de Hadamard, se comienza este capítulo con un estudio detallado de las mismas. Se estudian las funciones de Walsh en orden diádico y en orden secuencial. Se determinan las equivalencias existentes entre las funciones de Walsh y las funciones Sal y Cal, estudio este que nos servirá para determinar la estructura secuencial de las matrices de Hadamard. Las funciones Sal y Cal, asimilables por su paridad e imparidad a las funciones seno y coseno, nos permiten establecer una relación directa entre los parámetros de frecuencia y secuencia; la secuencia representa para las funciones Sal y Cal lo que la frecuencia para las funciones seno y coseno.

Se establece luego el concepto de matriz de Hadamard, de donde la transformada toma su nombre, y se examinan algunas de sus propiedades. A continuación se estudia la relación existente entre las matrices de Hadamard y las funciones de Walsh, lo que permite fijar la distribución de estas últimas en aquellas. Una observación detenida de estas matrices nos permite determinar el valor de desplazamiento temporal necesario para obtener una -

función Cal de una determinada secuencia a partir de una función Sal de la misma secuencia o viceversa.

Por un camino ligeramente diferente se estudia nuevamente el algoritmo rápido. La observación del diagrama de flujo correspondiente nos permite evaluar la notable ventaja de la transformada de Hadamard sobre las demás transformadas, desde el punto de vista de la rapidez de su computación. Efectivamente mientras la computación de la transformada de Hadamard, prescindiendo de los factores constantes, implica únicamente una secuencia determinada de sumas y restas de dos cantidades, la obtención de las restantes transformadas presupone además la multiplicación de esas cantidades por factores exponenciales de creciente complejidad.

Se aborda luego el tema de la transformada de Walsh o transformada de Hadamard en orden secuencial. La transformada de Walsh, al entregarnos los coeficientes de transformación en orden creciente de secuencia, nos permite determinar la variación de la magnitud de los coeficientes de acuerdo a su mayor o menor secuencia.

El estudio del espectro de potencia, como su nombre lo indica, determina la potencia promedio consumida en cualquiera de los procesos. Puesto que esta potencia es la misma en cualquiera de los dominios, el espectro de potencia representa un invariante en los dominios del vector original y de la transformada; igualmente se comprueba que

la potencia es invariante respecto de cualquier desplazamiento cíclico del vector muestra. El estudio del espectro de potencia nos permite además determinar los grupos de funciones de Walsh que constituyen los invariantes del espectro. Este estudio se complementa con un análisis del espectro de fase. Igual que en el caso del espectro de fase de la transformada discreta de Fourier, el espectro de fase de la transformada de Hadamard varía en forma cíclica con el desplazamiento. Sin embargo en el caso de la transformada de Hadamard la variación de este espectro tiene características especiales, ya que cada punto espectral varía en forma diferente. En conclusión tanto el espectro de potencia como el de fase, dado el limitado número de puntos espectrales, presentan la propiedad de compresión de datos, lo cual puede considerarse una ventaja desde el punto de vista de la simplificación de resultados, pero una desventaja desde el punto de vista de la recuperación de datos. El algoritmo utilizado para el cálculo de los espectros de potencia y de fase se deriva del diagrama básico utilizado para el cálculo de la transformada de Hadamard.

Como elementos complementarios se estudian la transformada de Hadamard modificada y la transformada de Hadamard multidimensional.

El capítulo 3 trata de las relaciones existentes entre la transformada de Walsh y la de Haar, que tiene caracte

terísticas semejantes. La transformada de Haar se opera con el concurso de una matriz de mayor dispersión (muchos elementos iguales a cero), pero la obtención de la misma no presenta las mismas facilidades que la obtención de la matriz de Hadamard.

Puesto que la transformada de Hadamard está limitada al procesamiento de datos reales, en el capítulo 4 se hace una exposición sucinta de la transformada BIFORE compleja que permite el procesamiento de datos complejos. Al estudiar el espectro de potencia se podrá observar un aumento del número de puntos espectrales, lo cual debe relacionarse con el aumento del número de raíces de 1 empleadas en la matriz de transformación.

Por fin en el capítulo 5 se da una breve idea de tres de las posibles aplicaciones prácticas de la transformada de Hadamard: análisis espectral de señales, procesamiento de la palabra hablada y codificación de imágenes.

La parte práctica, capítulo 6, realizada con el concurso de una computadora, es el estudio de algunos electrocardiogramas gentilmente cedidos por el eminente cardiólogo Dr. René Bustamente Riofrío. Este estudio comprende la recuperación de la curva original a partir de un número limitado de coeficientes de la transformada y el cálculo de

Capítulo 1

LA TRANSFORMADA DISCRETA GENERALIZADA

Para llegar al concepto de transformada discreta podemos seguir dos caminos: 1) Partir del concepto de transformada de Fourier y de sus fórmulas generales y luego adaptarlas a un conjunto discreto de N muestras de la señal que se quiere transformar. 2) Aplicar a la transformación de señales la teoría clásica de transformación de vectores.

1.1 La transformada discreta de Fourier como un ejemplo de transformación discreta.

Aunque la transformada discreta de Fourier es sólo un caso particular de la transformada discreta generalizada, su estudio reviste especial interés por dos razones:

- 1) La transformada discreta de Fourier es históricamente la primera en ser usada ampliamente gracias al algoritmo descubierto por Cooley y Tukey [7] (Transformada rápida de Fourier) que reduce notablemente el tiempo requerido para la computación de la misma.
- 2) Es la transformada, que por relacionarse directamente con la transformada de Fourier, permite ver mejor el paso de la transformada, que podríamos llamar continua, a la transformada discreta.

La transformada de Fourier es un caso límite de las series de Fourier. Si la función que deseamos expresar como un sumatorio de funciones exponenciales no es periódica,

obtenemos un espectro continuo de frecuencia, lo que transforma el sumatorio en un integral. Por este camino se ha llegado a las fórmulas:

$$X(t) = 1/2\pi \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (1-1) \quad (\text{Transformada inversa de Fourier})$$

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) e^{-j\omega t} dt \quad (1-2) \quad (\text{Transformada directa de Fourier})$$

Puesto que $\omega = 2\pi f$, (1-1) y (1-2) pueden expresarse también en la forma:

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(2\pi f) e^{j2\pi f t} df$$

ya que 2π es una constante podemos poner

$$S(2\pi f) = S(f)$$

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{j2\pi f t} df \quad (1-3)$$

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) e^{-j2\pi f t} dt \quad (1-4)$$

Si $X(t)$ es una señal de ancho de banda limitado, $X(t)$ y $S(f)$ se representarán gráficamente por el par de transformadas indicado en la fig. 1-1. [1] pp. 105-111.

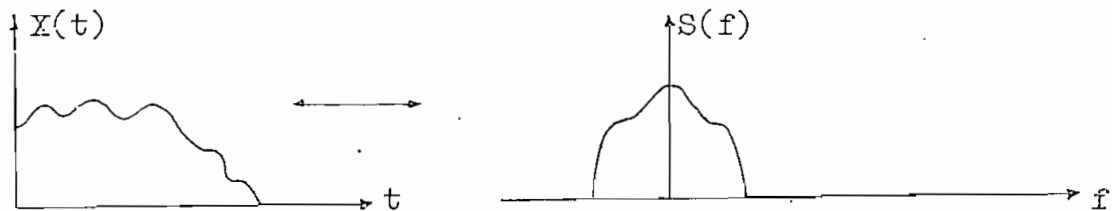


Fig. 1-1 . Par de transformadas.

En virtud del teorema de muestreo y utilizando el teorema de convolución es posible demostrar que la información contenida en $X(t)$ se conserva íntegra en sus muestras tomadas a una frecuencia igual o mayor que 2 veces la frecuencia máxima contenida en $X(t)$. La función muestreada es

equivalente al producto $X(t)$ por un tren de impulsos separados por un intervalo $= T$. O sea

$$X_S(t) = X(t)\delta_T(t) \quad (1-5) \quad T = \text{período de muestreo}$$

Siendo su transformada:

$$S_S(\omega) = 1/T \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(\omega - n\omega_0) \quad (1-6) \quad \omega_0 = 2\pi/T$$

La representación de $X_S(t)$ y de su transformada se da en la fig. 1-2. [1] pp. 437-441.

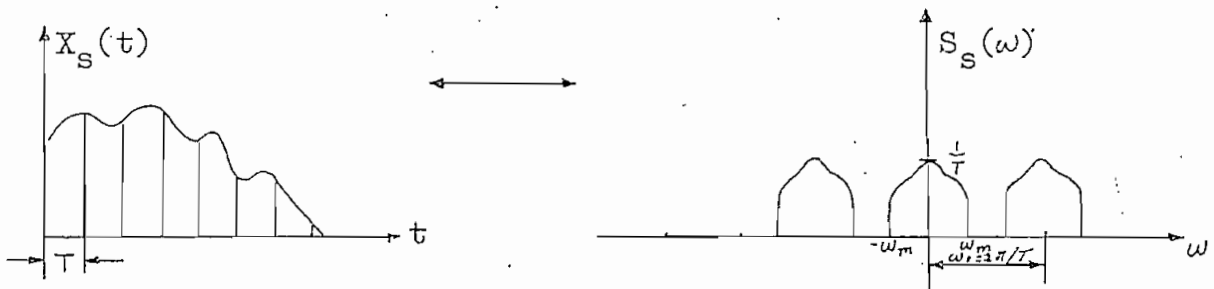


Fig. 1-2. Señal muestreada y su transformada. $T < 1/2f_m$

En todos los casos anteriores tenemos sumatorios o integrales en el ámbito $-\infty$ a $+\infty$, lo que hace imposible la manipulación de las fórmulas indicadas con la ayuda de computadoras. Para que éstas puedan sernos de utilidad es necesario renunciar a un cálculo exacto de las transformadas y contentarnos con un número limitado de muestras tanto de la función $X(t)$ como de su espectro en el dominio de frecuencia.

Para esto debemos hacer los cambios pertinentes en las fórmulas de transformación anteriormente obtenidas. Los pares de transformadas dadas por (1-3) y (1-4) se transforman en:

$$X(t_k) = \sum_{n=-N/2}^{N/2} S(f_n) e^{j2\pi f_n t_k \Delta f} \quad (1-7)$$

$$k = 0, 1, \dots, N-1.$$

$$S(f_n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(t_k) e^{-j2\pi f_n t_k \Delta t} \quad (1-8)$$

$$n = 0, 1, \dots, \pm N/2$$

Las muestras de $X(t_k)$ se han tomado de 0 a $N-1$.

Puesto que ahora sólo tomamos valores discretos, Δt y Δf se transforman en Δt y Δf respectivamente. Igualmente t_k y f_n representan valores discretos.

Hagamos

$$t_k = k\Delta t$$

$$f_n = n\Delta f$$

$$X(t_k) = X(k)$$

$$S(f_n) = S(n)$$

Si el intervalo muestreado es $= T$, entonces

$$\Delta t = T/N$$

Se tiene además

$$\Delta f = 1/T$$

Introduciendo estos valores en (1-7) y (1-8) obtenemos

$$X(k) = \Delta f \sum_{n=0}^{N-1} S(n) e^{j2\pi(nk)/N} \quad (1-9)$$

$$k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$S(n) = \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{-j2\pi(nk)/N} \quad (1-10)$$

$$n = 0, 1, \dots, N-1$$

Hemos adoptado también para n el rango de variación de 0 a $N-1$ en vez de 0 a $\pm N/2$. Esta sustitución no altera la expresión, pero simplifica el proceso de computación.

En efecto para $n = N/2 + 1$ se tiene

$$e^{j2\pi k(N/2 + 1)/N} = e^{j\pi k(N+2)/N}$$

sumando y restando al exponente $j2\pi(N-2)/N$ y tomando en cuenta que, para $k = 0, 1, \dots, N-1$, $e^{j2\pi k} = 1$ se llega a la fórmula:

$$e^{j2\pi k(N/2 + p)/N} = e^{-j2\pi k(N/2 - p)/N} \quad (1-11)$$

La fórmula (1-10) se la puede expresar mejor en forma matricial como

$$[S(n)] = [W^{nk}][X(k)] \quad (1-12)$$

En donde por razones de claridad se ha eliminado Δt que representa una constante.

En (1-12) $[S(n)]$ y $[X(k)]$ son matrices columna $N \times 1$ y $[W^{nk}]$ una matriz cuadrática $N \times N$.

Siendo $W = e^{-j2\pi/N}$

En conclusión el asumir que las N muestras se transforman en N valores transformados ha hecho posible obtener la transformada de Fourier con la intervención de matrices cuadráticas, lo cual representa una enorme ventaja desde el punto de vista de la computación, sobre todo habida cuenta de los algoritmos rápidos actualmente en uso. [8]

Como se verá en el capítulo 2 se puede llegar a la transformada de Hadamard o transformada discreta de Walsh a partir de la transformada (que podría decirse continua) de Walsh. En este caso, en vez de funciones exponenciales, se utilizan las funciones de Walsh que forman también un conjunto completo de funciones ortogonales. La matriz cua-

drática obtenida consta sólo de +1 y -1.

Este método de aproximación, aunque no sea el más elegante, tiene el mérito de haber sido el camino realmente seguido para llegar a la transformada discreta de Fourier.

1.2 La transformada discreta generalizada como un caso de transformación de vectores

Si debiéramos hacer un gráfico de la transformación que acabamos de estudiar, tendría la forma indicada en la fig. 1-3

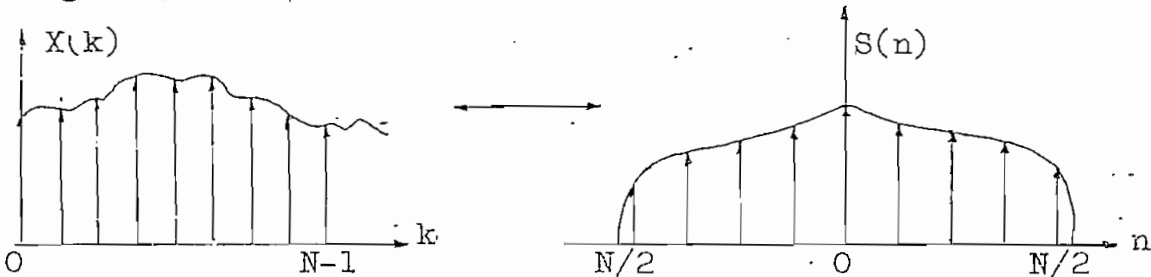


Fig. 1-3. Hipotética representación de $X(k)$ y $S(n)$

Vemos que en realidad se trata de la transformación de una serie ordenada de valores en otra serie ordenada de valores. El hecho de que tanto las muestras originales como sus transformadas formen un sistema ordenado de valores, nos permite asimilar las dos secuencias a sendos vectores. Hecha esta asimilación podemos aplicar a la transformada discreta generalizada los principios válidos para la transformación de vectores.

Las transformaciones de vectores que vamos a tratar se denominan lineales porque tienen las dos propiedades siguientes:

- 1) La transformada de la suma de vectores es igual a la suma de las transformadas de los vectores.

2) La transformada del producto de α escalar por el vector \bar{A} es igual a α por la transformada de \bar{A} .

De acuerdo a lo establecido el número de muestras de la función a transformar corresponde al número de dimensiones del vector original. Puesto que el número de dimensiones del vector transformado es idéntico al del vector original, podemos tratar éste como un caso de transformación de bases en el espacio N -dimensional, que denominaremos V_N .

Sea $e_1, e_2, \dots, e_N = \bar{E}$ una base de este espacio y $c_1, c_2, \dots, c_N = \bar{C}$ la base transformada

Tratemos de determinar las relaciones existentes entre las bases \bar{E} y \bar{C} ambas del espacio V_N .

Cualquier vector del espacio V_N es susceptible de ser expresado como la combinación de los vectores de la base \bar{E} ; como los vectores de la base \bar{C} pertenecen también al espacio V_N , cada uno de ellos podrá expresarse unívocamente mediante la base \bar{E} .

Se tendrá

$$c_1 = t_{11}e_1 + t_{12}e_2 + \dots + t_{1N}e_N$$

$$c_2 = t_{21}e_1 + t_{22}e_2 + \dots + t_{2N}e_N$$

etc.

o en forma matricial

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1N} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{N1} & t_{N2} & \dots & t_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_N \end{bmatrix} \quad (1-13)$$

Sea

$$\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1N} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{N1} & t_{N2} & \dots & t_{NN} \end{bmatrix} = [T]$$

En forma abreviada

$$[C] = [T][E]$$

La matriz $[T]$ cuyas filas representan las coordenadas de los vectores c_i en la base \bar{E} se denomina matriz de cambio de la base \bar{E} por la base \bar{C} . A su vez cualquier vector e_i de la base \bar{E} se expresará en forma unívoca como la combinación lineal de los vectores de la base \bar{C} , y siguiendo un proceso análogo al anterior se llega a la ecuación:

$$[E] = [T'] [C] \quad (1-14)$$

En donde $[T']$ designa la matriz de cambio de la base \bar{C} por la base \bar{E} .

Sustituyendo (1-13) en (1-14) y (1-14) en (1-13) obtenemos respectivamente:

$$[E] = [T'] [T] [E] \quad (1-15)$$

$$[C] = [T] [T'] [C] \quad (1-16)$$

Puesto que las dos bases son linealmente independientes $[E]$ y $[C]$ son las mismas a la derecha y a la izquierda de (1-15) y (1-16). Entonces

$$[T'] [T] = [T] [T'] = [I_N] \quad (\text{Matriz identidad de orden } N)$$

de donde

$$[T'] = [T]^{-1} \quad (1-17)$$

O sea que la matriz de cambio de una base por otra es siempre una matriz no degenerada, puesto que tiene inversa. [2] pp. 192-201.

Un rápido análisis nos demostraría que la transformación que acabamos de estudiar es una transformación lineal.

Acabamos de indicar que las transformaciones de bases se operan con el concurso de una matriz no degenerada; por consiguiente resulta una correspondencia biunívoca entre las transformaciones lineales en el espacio V_N y las matrices cuadradas de orden N no degeneradas. En otras palabras las características de una transformación son idénticas a las de la matriz con cuyo concurso se realiza.

De ordinario la transformada de una señal sólo tiene un interés transitorio, ya que lo que interesa es la señal original, que debe recuperarse a partir de la transformada. Puesto que para recuperar la señal necesitamos la matriz inversa, desde el punto de vista de la transformación de señales, resultarán aventajadas aquellas matrices cuya inversa sea más fácil de obtener. Este es precisamente el caso de las matrices de transformación discreta, pues como veremos inmediatamente, la inversa es igual a la (conjugada) transpuesta de la original.

1.3 Matrices unitarias

Sea $[\bar{A}]^T$ la conjugada transpuesta de la matriz $[A]$ -

(compleja).

Por definición una matriz $[U]$ se llama unitaria si , y sólo si, tiene la propiedad de que $[\bar{U}]^T[U] = [I_N]$, o sea, $[U]$ es unitaria si, y sólo si, su conjugada traspuesta $[\bar{U}]^T$ es igual a su inversa. Puesto que $[\bar{U}]^T = [U]^{-1}$ se tiene también $[U][\bar{U}]^T = [I_N]$

A partir de esta definición se demuestra que las filas (o columnas) de la matriz $[U]$ son ortogonales entre sí. Puesto que esta matriz es compleja, partamos de la definición de ortogonalidad para un vector complejo.

Dos vectores X y Y son ortogonales entre si si, y sólo si,

$$[\bar{X}]^T[Y] = \sum_{i=1}^N \bar{x}_i y_i = 0 \quad (1-18)$$

El escalar $[\bar{X}]^T[Y]$ recibe el nombre de producto interno de X y Y en ese orden. Si X y Y son reales el producto interno coincide con el producto escalar $[X]^T[Y]$.

Si realizamos el producto de Y y X se tiene:

$$[\bar{Y}]^T[X] = \sum_{i=1}^N \bar{y}_i x_i = \sum_{i=1}^N \overline{\bar{x}_i y_i} = \overline{[\bar{X}]^T[Y]}$$

de donde si

$$[\bar{X}]^T[Y] = 0$$

también

$$[\bar{Y}]^T[X] = \overline{[\bar{X}]^T[Y]} = 0$$

o sea que no importa el orden en que se multiplican los vectores para probar su ortogonalidad.

Si denominamos

$$\bar{U}_i^T \text{ y } U_i \quad (i = 1, \dots, N)$$

a las filas de $[\bar{U}]^T$ y $[U]$ respectivamente tendremos

$$[\bar{U}]^T[U] = \begin{bmatrix} \bar{U}_1^T \\ \bar{U}_2^T \\ \vdots \\ \bar{U}_N^T \end{bmatrix} [U_1, U_2, \dots, U_N] = [\bar{U}_i^T U_j]_N = [\delta_{ij}]_N = [I_N] \quad (1-19)$$

siendo $\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{para } i \neq j \\ 1 & \text{para } i = j \end{cases}$

o sea para todo producto en que $i \neq j$ se tendrá $\bar{U}_i^T U_j = 0$ que es la definición de ortogonalidad.

De donde se deduce el teorema: una matriz cuadrática $[U]$ es unitaria si, y sólo si, sus filas (o columnas) son mutuamente ortogonales.

Por otra parte puesto que para dos matrices $[A]$ y $[B]$ de orden N se tiene

$$\det [A][B] = \det[A]\det[B]$$

para $[\bar{U}]^T[U]$ se tendrá:

$$\det [\bar{U}]^T[U] = \det [U]^T \det [U]$$

pero

$$\det [\bar{U}]^T = \det[\bar{U}] = \overline{\det[U]}$$

de donde

$$\det[\bar{U}]^T[U] = \overline{\det[U]}\det[U] = |\det[U]|^2 = \det[I_N] = 1 \quad (1-20)$$

de donde se obtiene el teorema: si $[U]$ es unitaria, el valor absoluto de $\det[U]$ es 1

Si $\det[U]$ es 1, se dice que la matriz es unimodular.

De acuerdo a la teoría expuesta anteriormente, si sobre un vector X del espacio V_N actúa una matriz unitaria,

se habrá realizado en el mismo una transformación unitaria.

Una transformación unitaria se expresará por la ecuación:

$$[Y] = [U][X] \quad (1-21)$$

1.4 Propiedades de una transformación unitaria

En el espacio V_N una transformación lineal $[Y] = [A][X]$ deja invariante la longitud de todos los vectores - si, y sólo si es una transformación unitaria.

Puesto que nos encontramos en el plano complejo la longitud de un vector vendrá dada por la raíz cuadrada del producto del vector por su conjugado transpuesto

$$L = \left([\bar{X}]^T [X] \right)^{1/2} = \left(|X|^2 \right)^{1/2} = |X| \quad (1-22)$$

En consecuencia para demostrar el teorema antes enunciado nos bastará probar la invariabilidad del producto $[X]^T [X]$ bajo cualquier transformación unitaria.

Sea la transformación:

$$[Y] = [A][X] \quad \text{siendo } [A] \text{ una matriz unitaria}$$

entonces

$$[\bar{Y}]^T = \overline{[A][X]}^T = [\bar{X}]^T [\bar{A}]^T$$

de donde

$$[\bar{Y}]^T [Y] = [\bar{X}]^T [\bar{A}]^T [A] [X] = [\bar{X}]^T [I_N] [X] = [\bar{X}]^T [X] \quad (1-23)$$

De donde se concluye que la longitud de X permanece invariable bajo la transformación unitaria.

Sean

x_1, x_2, \dots, x_N las coordenadas de X y

y_1, y_2, \dots, y_N las coordenadas de Y

entonces (1-23) puede expresarse también en la forma:

$$y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_N^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2 \quad (1-24)$$

Esta propiedad reviste extraordinaria importancia, pues ya en el campo de la transformación de señales, la invariancia de la suma de los cuadrados en (1-24) se transforma en la invariancia de la energía de la señal y de su transformada (Teorema de Parseval).

Si $[A]$ y $[B]$ son unitarias y del mismo orden, su producto $[A][B]$ es también unitario. O sea dos transformaciones unitarias operadas con el concurso de las matrices $[B]$ y $[A]$ en ese orden equivalen a una transformación unitaria operada con el concurso de la matriz $[C] = [A][B]$

En efecto se tiene que

$$[\bar{A}]^T[A] = [I_N]$$

$$[\bar{B}]^T[B] = [I_N]$$

$$[\overline{[A][B]}]^T = [\bar{B}]^T[\bar{A}]^T$$

de donde

$$[\overline{[A][B]}]^T[A][B] = [\bar{B}]^T[\bar{A}]^T[A][B] = [\bar{B}]^T[B] = [I_N]$$

El producto interno de dos vectores permanece invariante bajo una transformación unitaria.

Sean X y Y los vectores y $[U]$ la matriz unitaria

entonces

$$[Z] = [U][X]$$

$$[W] = [U][Y]$$

$$[\bar{Z}]^T[W] = [\overline{[U][X]}]^T[U][Y] = [\bar{X}]^T[\bar{U}]^T[U][Y] = [\bar{X}]^T[Y]$$

1.5 Matrices ortogonales

Si la matriz $[U]$ es unitaria y real entonces la igualdad $[\bar{U}]^T[U] = [I_N]$ se reduce a $[U]^T[U] = [I_N]$. De donde se concluye que $[U]^T = [U]^{-1}$. O sea que podemos definir una matriz ortogonal como una matriz real cuya transpuesta es igual a su inversa.

Puesto que $[U]^T[U] = [I_N]$ se desprende, igual que en el caso de las matrices unitarias, que los vectores formados por las columnas o filas de una matriz ortogonal son ortogonales entre sí. Si designamos estos vectores como:

$$U_1^T, U_2^T, \dots, U_N^T \quad y$$

U_1, U_2, \dots, U_N respectivamente, tendremos que

$$U_i^T U_j = \begin{cases} 0 & \text{para } i \neq j \\ 1 & \text{para } i = j \end{cases}$$

Por otra parte se tiene que

$$\det[U]^T[U] = \det[U]^T \det[U] = |\det[U]|^2 = \det[I_N] = 1$$

de donde

$$\det[U] = \pm 1$$

De donde se sigue el teorema: si una matriz es ortogonal el valor absoluto de su determinante es igual a 1

1.6 Transformaciones ortogonales

Transformaciones ortogonales son aquellas que se operan con el concurso de una matriz ortogonal.

Puesto que una matriz ortogonal es una matriz unitaria que carece de elementos complejos, las transformacio -

nes ortogonales tendrán las mismas propiedades que las transformaciones unitarias.

Una transformación ortogonal deja invariante el cuadrado de cada vector, o en otras palabras, una transformación ortogonal deja invariante el cuadrado de la longitud del vector transformado. En el caso de señales esto se aplica a la invariancia de la energía

Sea la transformación ortogonal

$$[Y] = [U][X]$$

Entonces

$$\begin{aligned} [Y]^T [Y] &= [Y]^2 = ([U][X])^T [U][X] = [X]^T [U]^T [U][X] = [X]^T [X] \\ &= [X]^2 \end{aligned}$$

o también

$$y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_N^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2$$

Si $[A]$ y $[B]$ son matrices ortogonales su producto es también ortogonal.

En efecto

$$([A][B])^T [A][B] = [B]^T [A]^T [A][B] = [B]^T [B] = [I_N]$$

Toda transformación ortogonal mantiene invariable el producto escalar de dos vectores.

Sean X y Z dos vectores sometidos a la misma transformación ortogonal

$$[W] = [A][X]$$

$$[R] = [A][Z]$$

$$[W]^T [R] = ([A][X])^T [A][Z] = [X]^T [A]^T [A][Z] = [X]^T [Z]$$

[3] pp. 290-300

1.7 Obtención de las matrices de transformación

Hemos destacado anteriormente la relación biunívoca existente entre las matrices y las transformaciones lineales. Hemos afirmado luego que la transformada discreta generalizada se opera con el concurso de matrices unitarias u ortogonales. El problema es ahora encontrar métodos para obtener esta clase de matrices.

Para que el trabajo de computación se facilite ulteriormente, las matrices de transformación deben ser factorables en matrices de gran dispersión, entendiéndose por tales las que contienen un elevado número de ceros. Igualmente si la matriz utilizada puede ser expresada como el producto de Kronecker de un conjunto de matrices, la transformación puede realizarse con un reducido número de operaciones aritméticas.

Consideremos, pues, las matrices formadas a base de productos de Kronecker [4].

Sea una matriz cuadrada de orden p y elementos de la forma $m_{r,i,j}$ en donde i y j varían de 0 a $p-1$.

$$[M_r] = \begin{bmatrix} m_{r,0,0} & m_{r,0,1} & \dots & m_{r,0,p-1} \\ m_{r,1,0} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{r,p-1,0} & \dots & \dots & m_{r,p-1,p-1} \end{bmatrix} \quad (1-25)$$

Si

$[H(1)] = [M(0)]$ es una matriz de orden p

$[H(2)] = [M(1)] \otimes [M(0)] = [M(1)] \otimes [H(1)]$ será de una matriz de orden p^2 .

$[H(3)] = [M(2)] \otimes [H(2)] = [M(2)] \otimes [M(1)] \otimes [M(0)]$ será una matriz de orden p^3

En general

$$[H(n)] = [M(n-1)] \otimes [H(n-1)] \quad (1-26)$$

será una matriz de orden p^n .

En donde \otimes representa el producto de Kronecker.

El primer producto de Kronecker puede expresarse como:

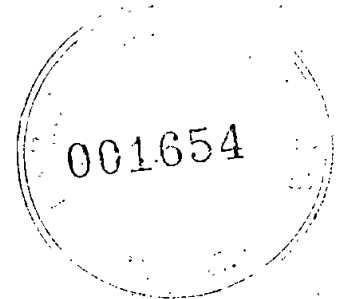
$$[H(2)] = \begin{bmatrix} m_{1,0,0}^{H(1)} & \dots & m_{1,0,p-1}^{H(1)} \\ m_{1,1,0}^{H(1)} & \dots & m_{1,1,p-1}^{H(1)} \\ \dots & \dots & \dots \\ m_{1,p-1,0}^{H(1)} & \dots & m_{1,p-1,p-1}^{H(1)} \end{bmatrix}$$

Vemos que cada elemento de $[M(1)]$ multiplica a toda la matriz $[M(0)]$; de ahí que para cada producto de Kronecker (de matrices del mismo orden) el orden de la matriz producto se eleva en una potencia de p .

En general cada elemento de la matriz $[M(n-1)]$ multiplica a toda la matriz $[H(n-1)]$.

O sea

$$[H(n)] = [M(n-1)] \otimes [H(n-1)] =$$



Así por ejemplo:

$$H(1)_{0,0} = \prod_{i=0}^2 \prod_{j=0}^2 m_{0,i,j} \delta(x_0-i) \delta(u_0-j)$$

Puesto que cero decimal = cero en el sistema ternario

$$x_0 = u_0 = 00$$

de donde

$$\begin{aligned} H(1)_{0,0} &= m_{0,0,0} \delta(0-0) \delta(0-0) m_{0,0,1} \delta(0-0) \delta(0-1) m_{0,0,2} \delta(0-0) \delta(0-2) \\ &\quad m_{0,1,0} \delta(0-1) \delta(0-0) m_{0,1,1} \delta(0-1) \delta(0-1) m_{0,1,2} \delta(0-1) \delta(0-2) \\ &\quad m_{0,2,0} \delta(0-2) \delta(0-0) m_{0,2,1} \delta(0-2) \delta(0-1) m_{0,2,2} \delta(0-2) \delta(0-2) \\ &= m_{0,0,0} \end{aligned}$$

O sea que cada elemento de $[H(1)]$ es igual al producto de todos sus elementos elevados todos, menos uno, al exponente cero.

En general los elementos de la matriz $[H(n)]$ pueden expresarse por la ecuación:

$$H(n)_{x,u} = \prod_{r=0}^{n-1} \prod_{i=0}^{p-1} \prod_{j=0}^{p-1} m_{r,i,j} \delta(x_r-i) \delta(u_r-j) \quad (1-32)$$

Si las matrices son idénticas el subíndice r será el mismo para todos los casos de 0 a $n-1$ y se tendrá la misma base afectada por diversos exponentes que se podrán expresar como un sumatorio.

O sea para matrices idénticas

$$H(n)_{x,u} = \prod_{i=0}^{p-1} \prod_{j=0}^{p-1} m_{i,j} \sum_{r=0}^{n-1} \delta(x_r-i) \delta(u_r-j) \quad (1-33)$$

en donde el subíndice r se ha suprimido.

Para que la matriz $[H(n)_{x,u}]$ sea ortogonal es neces-

rio que los elementos $\{m_{r,0,0} \dots m_{r,p-1,p-1}\}$ satisfagan los requisitos de ortogonalidad para cualquier valor de r.

Todas las matrices que se utilizan para la transformada discreta generalizada se originan de un núcleo básico para el que $p = 2$, y son de orden $N = 2^n$.

Consideremos con mayor atención esta clase de matrices.

Sea la matriz núcleo

$$[H(1)] = \begin{bmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{bmatrix}$$

$[H(n)]$ se podrá representar en la forma

$$[H(n)] = \begin{bmatrix} A_{n-1}[H(n-1)] & B_{n-1}[H(n-1)] \\ C_{n-1}[H(n-1)] & D_{n-1}[H(n-1)] \end{bmatrix}$$

Así la matriz $[H(3)]$ será de la forma:

$$[H(3)] = \begin{bmatrix} A_2 A_1 A_0 & A_2 A_1 B_0 & A_2 B_1 A_0 & A_2 B_1 B_0 & B_2 A_1 A_0 & B_2 A_1 B_0 & B_2 B_1 A_0 & B_2 B_1 B_0 \\ A_2 A_1 C_0 & A_2 A_1 D_0 & A_2 B_1 C_0 & A_2 B_1 D_0 & B_2 A_1 C_0 & B_2 A_1 D_0 & B_2 B_1 C_0 & B_2 B_1 D_0 \\ A_2 C_1 A_0 & A_2 C_1 B_0 & A_2 D_1 A_0 & A_2 D_1 B_0 & B_2 C_1 A_0 & B_2 C_1 B_0 & B_2 D_1 A_0 & B_2 D_1 B_0 \\ A_2 C_1 C_0 & A_2 C_1 D_0 & A_2 D_1 C_0 & A_2 D_1 D_0 & B_2 C_1 C_0 & B_2 C_1 D_0 & B_2 D_1 C_0 & B_2 D_1 D_0 \\ C_2 A_1 A_0 & C_2 A_1 B_0 & C_2 B_1 A_0 & C_2 B_1 B_0 & D_2 A_1 A_0 & D_2 A_1 B_0 & D_2 B_1 A_0 & D_2 B_1 B_0 \\ C_2 A_1 C_0 & C_2 A_1 D_0 & C_2 B_1 C_0 & C_2 B_1 D_0 & D_2 A_1 C_0 & D_2 A_1 D_0 & D_2 B_1 C_0 & D_2 B_1 D_0 \\ C_2 C_1 A_0 & C_2 C_1 B_0 & C_2 D_1 A_0 & C_2 D_1 B_0 & D_2 C_1 A_0 & D_2 C_1 B_0 & D_2 D_1 A_0 & D_2 D_1 B_0 \\ C_2 C_1 C_0 & C_2 C_1 D_0 & C_2 D_1 C_0 & C_2 D_1 D_0 & D_2 C_1 C_0 & D_2 C_1 D_0 & D_2 D_1 C_0 & D_2 D_1 D_0 \end{bmatrix}$$

De la estructura de los núcleos se saca las siguientes equivalencias:

$$A_0 = m_{0,0,0} \quad A_1 = m_{1,0,0} \quad \dots \quad A_n = m_{n,0,0}$$

$$B_0 = m_{0,0,1} \quad B_1 = m_{1,0,1} \quad \dots \quad B_n = m_{n,0,1}$$

$$C_0 = m_{0,1,0} \quad C_1 = m_{1,1,0} \quad \dots \quad C_n = m_{n,1,0}$$

$$D_0 = m_{0,1,1} \quad D_1 = m_{1,1,1} \quad \dots \quad D_n = m_{n,1,1}$$

Vemos que A_r siempre se asocia con los subíndices (sobreentendidos) 0,0

B_r con 0,1.

C_r con 1,0

D_r con 1,1

La fórmula general (1-32) aplicada a nuestro caso da:

$$H(n)_{x,u} = \prod_{r=0}^{n-1} A_r^{\delta(x_r-i)\delta(u_r-j)} B_r^{\delta(x_r-i)\delta(u_r-j)} C_r^{\delta(x_r-i)\delta(u_r-j)} D_r^{\delta(x_r-i)\delta(u_r-j)}$$

Puesto que A_r se asocia siempre con los subíndices 0,0, el exponente de A_r será = 1 cuando $x_r = u_r = 0$

El exponente de B_r será = 1 cuando $x_r = 0$ y $u_r = 1$

El exponente de C_r será = 1 cuando $x_r = 1$ y $u_r = 0$

El exponente de D_r será = 1 cuando $x_r = u_r = 1$

Si hacemos un cuadro tendremos

| x_r | u_r | exp. de A_r | exp. de B_r | exp. de C_r | exp. de D_r |
|-------|-------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |

Por simple inspección vemos que estas funciones correspon-

den a las funciones booleanas:

$\bar{x}_r \bar{u}_r, \bar{x}_r u_r, x_r \bar{u}_r, x_r u_r$ respectivamente

En otras palabras los exponentes de $A_r, B_r,$ etc. pueden expresarse como las funciones indicadas.

Entonces

$$H(n)_{x,u} = A_0 \bar{x}_0 \bar{u}_0 \dots \dots A_{n-1} \bar{x}_{n-1} \bar{u}_{n-1} B_0 \bar{x}_0 u_0 \dots \dots B_{n-1} \bar{x}_{n-1} u_{n-1} \\ C_0 x_0 \bar{u}_0 \dots \dots C_{n-1} x_{n-1} \bar{u}_{n-1} D_0 x_0 u_0 \dots \dots D_{n-1} x_{n-1} u_{n-1}$$

$$H(n)_{x,u} = \prod_{r=0}^{n-1} A_r \bar{x}_r \bar{u}_r B_r \bar{x}_r u_r C_r x_r \bar{u}_r D_r x_r u_r \quad (1-34)$$

Si las matrices son idénticas

$$A_0 = A_1 = \dots = A_n = A$$

$$H(n)_{x,u} = A \bar{x}_0 \bar{u}_0 \dots \dots A \bar{x}_{n-1} \bar{u}_{n-1} B \bar{x}_0 u_0 \dots \dots B \bar{x}_{n-1} u_{n-1} \\ C x_0 \bar{u}_0 \dots \dots C x_{n-1} \bar{u}_{n-1} D x_0 u_0 \dots \dots D x_{n-1} u_{n-1}$$

$$H(n)_{x,u} = A \sum_{r=0}^{n-1} \bar{x}_r \bar{u}_r B \sum_{r=0}^{n-1} \bar{x}_r u_r C \sum_{r=0}^{n-1} x_r \bar{u}_r D \sum_{r=0}^{n-1} x_r u_r \quad (1-35)$$

Para que la matriz resultante sea ortogonal (o unitaria)

se requiere que:

$$A^2 + B^2 = 1$$

$$C^2 + D^2 = 1 \quad (1-36)$$

$$AC + BD = 0$$

Es conveniente que la matriz resultante sea además simétrica, de tal manera que la transformación aplicada dos veces nos restituya el vector original. Para que la matriz sea simétrica se requiere que:

$$B = C$$

de donde

$$A = -D$$

o también

$$B = C = 0$$

Con $B = 0$ se obtiene una matriz diagonal.

$$\text{Para } B = C \quad \text{y} \quad A = -D$$

se tiene

$$B = C = (1-A^2)^{1/2}$$

Sustituyendo estos valores en (1-35)

$$H(n)_{x,u} = A \sum_{r=0}^{n-1} \bar{x}_r \bar{u}_r (1-A^2)^{1/2} \sum_{r=0}^{n-1} \bar{x}_r u_r (1-A^2)^{1/2} \sum_{r=0}^{n-1} x_r \bar{u}_r (-A) \sum_{r=0}^{n-1} x_r u_r$$

$$H(n)_{x,u} = A \sum_{r=0}^{n-1} \bar{x}_r \bar{u}_r A \sum_{r=0}^{n-1} x_r u_r (1-A^2)^{1/2} \sum_{r=0}^{n-1} (\bar{x}_r u_r + x_r \bar{u}_r) (-1) \sum_{r=0}^{n-1} x_r u_r$$

$$\text{pero } \bar{x}_r u_r + x_r \bar{u}_r = x_r \oplus u_r$$

$$H(n)_{x,u} = A \sum_{r=0}^{n-1} (\bar{x}_r \bar{u}_r + x_r u_r) (1-A^2)^{1/2} \sum_{r=0}^{n-1} (x_r \oplus u_r) (-1) \sum_{r=0}^{n-1} x_r u_r$$

Multiplicando y dividiendo el miembro de la derecha por:

$$A \sum_{r=0}^{n-1} (x_r \oplus u_r) = A \sum_{r=0}^{n-1} (\bar{x}_r u_r + x_r \bar{u}_r)$$

$$H(n)_{x,u} = A \sum_{r=0}^{n-1} (\bar{x}_r \bar{u}_r + x_r u_r + \bar{x}_r u_r + x_r \bar{u}_r) [(1-A^2)/A^2]^{1/2} \sum_{r=0}^{n-1} (x_r \oplus u_r) (-1) \sum_{r=0}^{n-1} x_r u_r$$

$$\begin{aligned} \text{pero } \bar{x}_r \bar{u}_r + x_r u_r + \bar{x}_r u_r + x_r \bar{u}_r &= \bar{x}_r (\bar{u}_r + u_r) + x_r (u_r + \bar{u}_r) \\ &= \bar{x}_r + x_r = 1 \end{aligned}$$

Luego el sumatorio exponente de A es uno para todos los valores de r, lo que equivale a elevar A a la enésima potencia

$$H(n)_{x,u} = A^n [(1-A^2)/A^2]^{1/2} \sum_{r=0}^{n-1} (x_r \oplus u_r) (-1) \sum_{r=0}^{n-1} x_r u_r \quad (1-37)$$

Las matrices de Kronecker descritas por la ecuación (1-37) son una familia de matrices simétricas y ortogonales. Elementos válidos para la formación de tales matrices pueden ser los pares: $\{\sin \theta, \cos \theta\}$, $\{1, 0\}$, $\{3/4, 4/5\}$, $\{1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\}$, etc.

Reviste especial interés la matriz formada por el par $\sin \theta, \cos \theta$, cuyo núcleo es

$$[H(1)] = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}$$

$H(n)_{x,u}$ está dado por

$$H(n)_{x,u} = \cos^n \theta (\sin \theta / \cos \theta)^{\sum_{r=0}^{n-1} u_r \oplus x_r} (-1)^{\sum_{r=0}^{n-1} x_r u_r} \quad (1-38)$$

Al variar θ de 0° a 45° $[H(1)]$ varía de una matriz diagonal a una matriz en que la energía en cada fila o columna está uniformemente distribuida para cada elemento. En este último caso $H(n)_{x,u}$ se transforma en la matriz ortogonal de Hadamard.

Para $\theta = 45^\circ$ $\sin \theta = \cos \theta = 1/\sqrt{2}$

Entonces

$$H(n)_{x,u} = (1/\sqrt{2})^{n(1)} \sum_{r=0}^{n-1} u_r \oplus x_r (-1)^{\sum_{r=0}^{n-1} u_r x_r}$$

$$H(n)_{x,u} = (1/2)^{n/2} (-1)^{\sum_{r=0}^{n-1} x_r u_r} \quad (1-39)$$

El núcleo de la matriz ortogonal de Hadamard es de la forma:

$$[H(1)] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (1-40) \quad [9]$$

Desde el punto de vista de la transformada discreta generalizada tienen especial importancia las matrices que se forman a partir de las raíces N-ésimas de 1 ($N = 2^n$), las cuales pueden considerarse obtenidas en base a productos de Kronecker del núcleo básico

$$\begin{bmatrix} 1 & W^m \\ 1 & -W^m \end{bmatrix}$$
$$W = e^{-i2\pi/N}$$
$$m = 0, 1, \dots, 2^{n-1}-1$$

Las matrices que se originan de este núcleo cumplen con la condición de ortogonalidad pero no con la de simetría, excepto para $m = 0$, en que el núcleo básico toma la forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

que es el núcleo básico de la matriz de Hadamard.

Consecuencia de lo que acabamos de decir es que, de todas las matrices que vamos a estudiar a continuación, sólo la de Hadamard sea una matriz simétrica.

Respecto de la ortogonalidad se debe hacer la siguiente observación: si bien las filas o columnas de la transformada discreta generalizada son mutuamente ortogonales, el producto de un vector fila por su conjugado transpuesto no es igual a 1 sino a N; consecuentemente el producto de una matriz de transformación por su conjugada transpuesta es igual a $N[I_N]$ y no a $[I_N]$ simplemente; por esta razón -

denominaremos a estas matrices N-unitarias o N-ortogonales.

Tambi3n es posible formar las matrices de la transformada discreta generalizada combinando las raices N-3simas de 1 en orden progresivo de aparici3n en la forma que se indica a continuaci3n.

Las raices N-3simas de 1 se definen como

$$\sqrt[N]{1} = \cos 2k\pi/N - i \sin 2k\pi/N = e^{-i2k\pi/N} \quad (1-41)$$

$$k = 0, 1, \dots, N-1$$

Se elige el exponente negativo por ser este el signo del exponente de W , pero esto no altera los resultados.

Las raices N-3simas de 1 se distribuyen sim3tricamente en la circunferencia de radio unidad en el plano complejo. La ubicaci3n de las raices para $N = 2$, $N = 4$ y $N = 8$ se puede ver en las siguientes figuras

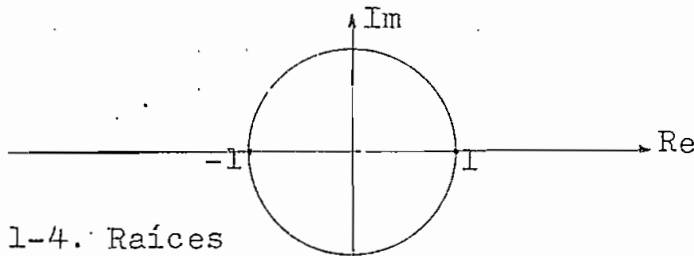


Fig. 1-4. Raices de $\sqrt{1}$.

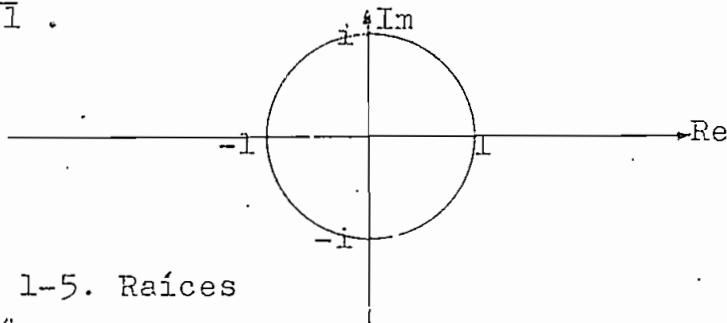


Fig. 1-5. Raices de $\sqrt[4]{1}$.

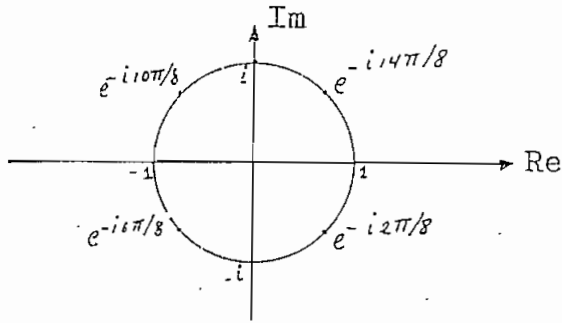


Fig. 1-6. Raíces de $\sqrt[8]{1}$

En general para ubicar las raíces de $\sqrt[N]{1}$ trazamos la circunferencia de radio unidad y la dividimos en N partes iguales, tomando como origen el eje real. Las coordenadas de estos puntos nos dan las N raíces.

Para el fin que perseguimos es conveniente numerar las raíces de 0 a N-1, a partir del eje real y girando en el sentido de las agujas del reloj.

Así para $N = 8$ tendremos

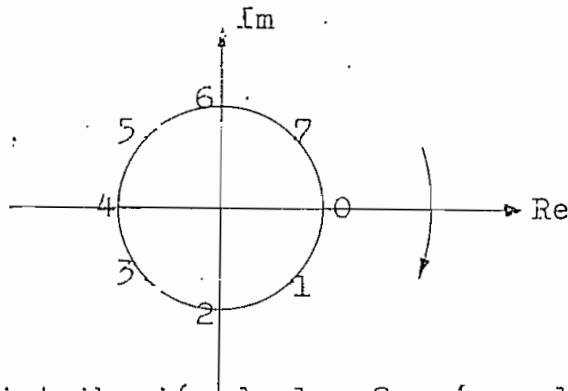


Fig. 1-7. Distribución de las 8 raíces de $\sqrt[8]{1}$

Resulta interesante comprobar que el exponente de W coincide con el valor de numeración de la fig. 1-7.

Así para $W^0 = 1$ tenemos la raíz 1 numerada con un cero para $W^2 = e^{-i4\pi/8} = -i$ tenemos la raíz numerada con 2, etc.

A partir de $N/2$ las raíces se repiten con signo cambiado

En efecto

para $m = N/2$

$$e^{-(i2\pi/N)(N/2)} = e^{-i\pi} = -1 = W^0$$

para $m = (N/2) + 1$

$$e^{-(i2\pi/N)[(N/2) + 1]} = e^{-i\pi} e^{-i2\pi/N} = -W$$

$$\text{En general } W^{(N/2) + k} = -W^k \quad (1-42)$$

En consecuencia si tenemos el par: $W^m, -W^m$ la variación máxima exigida al subíndice m para obtener las N raíces es igual a $(N/2) - 1 = 2^{n-1} - 1$

Si se hubiera elegido para W el valor $e^{i2\pi/N}$, la numeración de las raíces debería hacerse girando en sentido opuesto al de las agujas del reloj.

Si se forman vectores compuestos por las N raíces de $\sqrt[N]{1}$, ordenándolas de acuerdo a su distribución en los vértices de todos los polígonos regulares de N lados que se forman uniendo las N raíces, y de los estrellados inscritos a los mismos, se obtienen vectores ortogonales entre sí. Así para $N = 8$

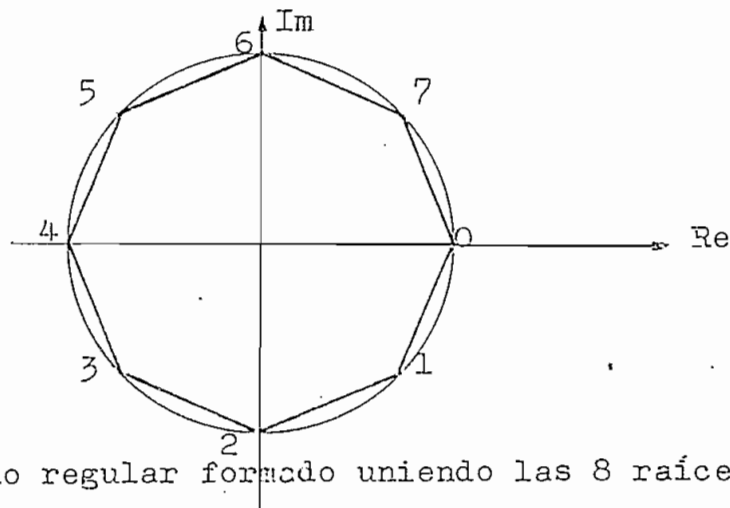


Fig. 1-8. Octógono regular formado uniendo las 8 raíces de $\sqrt[8]{1}$.

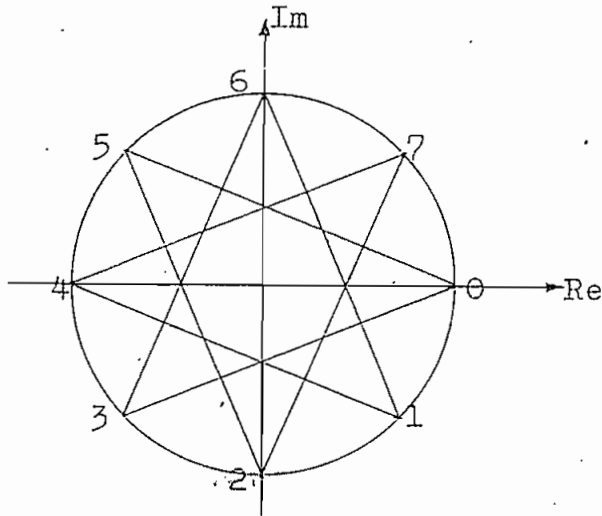


Fig. 1-9. Polígono estrellado de 8 vértices

se obtienen 4 vectores ortogonales entre sí, pues aunque se tiene solamente un octógono regular y un polígono estrellado: figs. 1-8 y 1-9, al recorrerlos en sentidos opuestos se obtienen dos vectores mutuamente ortogonales por cada polígono.

Para la obtención de las matrices podemos proceder como sigue:

$$\text{Sea } [H(0)] = [1] \quad (1-43)$$

entonces

$$[H(1)] = \begin{bmatrix} [H(0)][H(0)] \\ [R_{\text{rec}} 1 \times 2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & W^0 \\ 1 & -W^0 \end{bmatrix} \quad (1-44)$$

En donde $[R_{\text{rec}} 1 \times 2]$ es la matriz rectangular 1×2 obtenida con las raíces de $\sqrt[2]{1}$

Si elegimos cero como el único posible exponente para W , la matriz resultante, de cualquier orden que sea, tendrá como únicos elementos las dos raíces de $\sqrt[2]{1}$, o sea los elementos ± 1 .

Se tendrá, pues, la matriz N -ortogonal de Hadamard -

la cual puede constituirse por repetidos productos de Kronecker del núcleo básico:

$$[H(1)] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Así

$$[H(2)] = \begin{bmatrix} [H(1)][H(1)] \\ [H(1)][H(1)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11}H(1) & h_{12}H(1) \\ h_{21}H(1) & h_{22}H(1) \end{bmatrix}$$

$$h_{11} = h_{12} = h_{21} = 1$$

$$h_{22} = -1$$

También es posible construir la matriz de Hadamard con la siguiente fórmula:

Sea por ejemplo $[H(2)]$

$$[H(2)] = \begin{bmatrix} [H(1)][H(1)] \\ [M_{rec}^{2x4}] \end{bmatrix}$$

en donde $[M_{rec}^{2x4}]$ es una matriz rectangular $2x4$ que se obtiene realizando el producto de Kronecker de la mitad inferior de $[H(1)]$ por $[H(1)]$

O sea

$$[M_{rec}^{2x4}] = [H(1)] - [H(1)]$$

En general

$$[H(n)] = \begin{bmatrix} [H(n-1)][H(n-1)] \\ [M_{rec}^{2^{n-1}x2^n}] \end{bmatrix} \quad (1-45)$$

en donde $[M_{rec}^{2^{n-1}x2^n}] = [\text{mitad inferior de } [H(n-1)] \otimes [H(1)]]$

Se ve que la matriz de Hadamard es un caso de transformada discreta generalizada para la que el exponente de W sólo puede tomar el valor cero.

La matriz de Hadamard se conoce también con el nombre de "BIFORF" de las tres primeras sílabas de su denominación en inglés: "Binary Fourier Representation."

Si queremos formar matrices con las raíces de $\sqrt[4]{1}$, a saber $\pm 1, \pm i$; tendremos las matrices denominadas BIFORE-complejas por la presencia del elemento $i = \sqrt{-1}$. La mínima raíz que podremos formar será de 4 elementos por fila y tendrá la forma:

$$[BC(2)] = \begin{bmatrix} [H(1)] [H(1)] \\ [R_{rec} \quad 2 \times 4] \end{bmatrix} \quad (1-46)$$

en donde $[R_{rec} \quad 2 \times 4]$ es la matriz rectangular 2×4 que se forma con las 4 raíces de $\sqrt[4]{1}$, ordenándolas de acuerdo a su distribución en el cuadrado de la Fig. 1-10 (recorriéndolo en los dos sentidos)

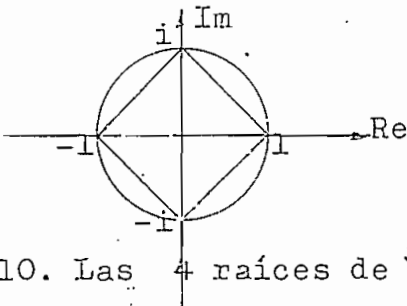


Fig. 1-10. Las 4 raíces de $\sqrt[4]{1}$

Se tiene pues..

$$[BC(2)] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix}$$

Si queremos elevar el orden de la matriz, puesto que no tenemos más elementos, deberemos repetir los ya existentes. En efecto $[BC(3)]$ es de la forma:

$$[BC(3)] = \begin{bmatrix} [BC(2)][BC(2)] \\ [M_{rec}^{4 \times 8}] \end{bmatrix} \quad (1-47)$$

en donde $[M_{rec}^{4 \times 8}]$ es el producto de Kronecker de la mitad inferior de $[BC(2)]$ por $[H(1)]$

O sea

$$[M_{rec}^{4 \times 8}] = [\text{mitad inferior de } [BC(2)] \otimes [H(1)]]$$

Entonces

$$[BC(3)] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & i \\ 1-i & 1-i & 1-i & 1-i & 1-i & 1-i & 1-i & 1-i \\ 1-i-i & i & 1-i-i & i & 1-i-i & i & 1-i-i & i \\ 1 & i-i & 1-i-i & 1 & i-i & 1-i-i & 1 & i-i \\ 1 & 1-i-i & 1-i-i & 1-i & 1-i & 1-i & 1-i & 1-i \\ 1-i & 1-i & i-i & 1 & i-i & 1-i & 1-i & i-i \\ 1 & 1 & i & i-i & 1-i & 1-i & i-i & 1-i \\ 1-i & 1-i & i-i & 1-i & 1-i & 1-i & 1-i & i \end{bmatrix}$$

En general

$$[BC(n)] = \begin{bmatrix} [BC(n-1)][BC(n-1)] \\ [M_{rec}^{2^{n-1} \times 2^n}] \end{bmatrix} \quad (1-48)$$

en donde $[M_{rec}^{2^{n-1} \times 2^n}]$ es el producto

$[\text{mitad inferior de } [BC(n-1)] \otimes [H(1)]]$

Si queremos formar matrices con las 8 raíces de $\sqrt[8]{1}$, procederemos como sigue:

$$[TG(3)_{8R}] = \begin{bmatrix} [BC(2)][BC(2)] \\ [R_{rec}^{4 \times 8}] \end{bmatrix} \quad (1-49)$$

en donde TG indica transformada generalizada. 8R indica - que la matriz está constituida en base a las 8 raíces de $\sqrt[8]{1}$. $[R_{rec}^{4 \times 8}]$ es una matriz rectangular 4x8 constituida por los cuatro vectores ortogonales que se pueden formar - con las 8 raíces de $\sqrt[8]{1}$ de la siguiente manera:

Primera fila: las 8 raíces dispuestas en los vértices del octógono regular de la fig. 1-11, recorriéndolo en el sentido de las agujas del reloj.

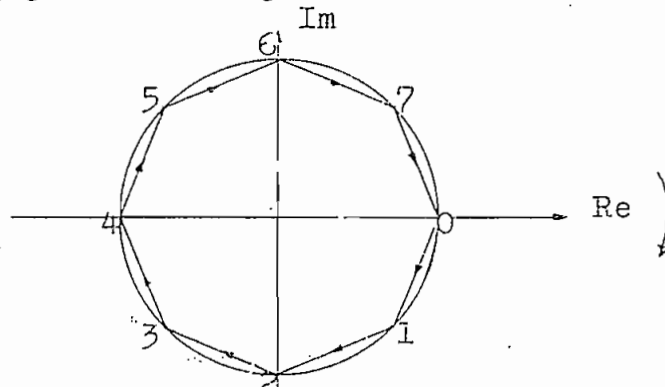


Fig. 1-11.

Polígono para la obtención de la primera fila de $[R_{rec}^{4 \times 8}]$

Segunda fila: las 8 raíces dispuestas en los vértices del polígono estrellado de la fig. 1-12, que se forma uniendo las raíces separadas por tres intervalos y girando en sentido opuesto al de las agujas del reloj.

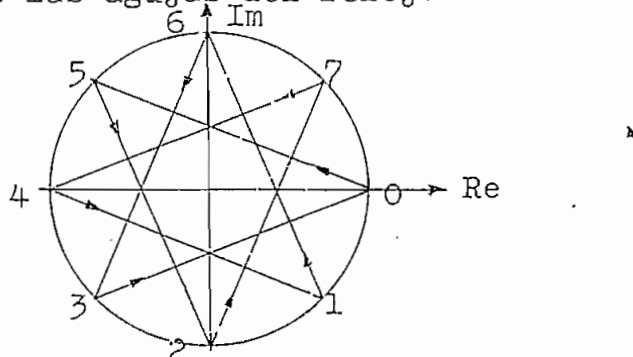


Fig. 1-12. Polígono para la obtención de la segunda fila de $[R_{rec}^{4 \times 8}]$

Tercera fila: las 8 raíces dispuestas en el polígono estre llado de la fig. 1-13, que se forma uniendo las raíces separadas por tres intervalos y girando en sentido de las agujas del reloj.

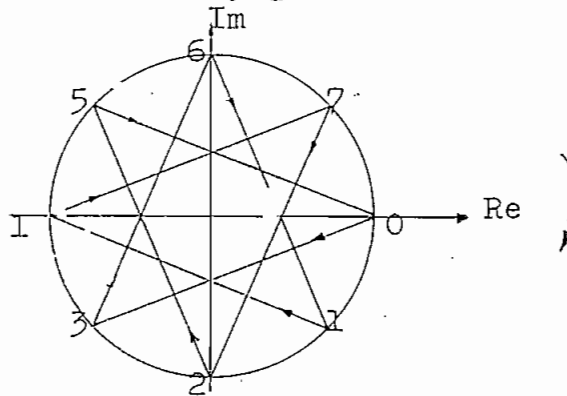


Fig. 1-13. Polígono para la obtención de la tercera fila de $[R_{rec}^{4x8}]$

Cuarta fila: las 8 raíces dispuestas en los vértices del octógono regular de la fig. 1-14, girando en sentido opues a las agujas del reloj .

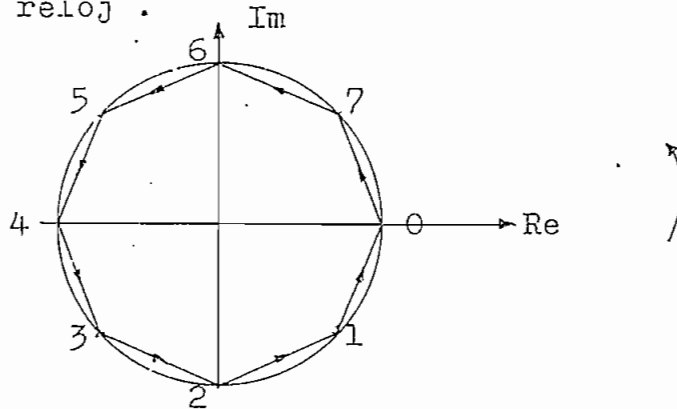


Fig. 1-14. Polígono para la obtención de la cuarta fila de $[R_{rec}^{4x8}]$

La matriz $[R_{rec}^{4x8}]$ quedará en la forma

$$[R_{\text{rec}}]_{4 \times 8} = \begin{bmatrix} 1 & W^1 & W^2 & W^3 & W^4 & W^5 & W^6 & W^7 \\ 1 & W^5 & W^2 & W^7 & W^4 & W^1 & W^6 & W^3 \\ 1 & W^3 & W^6 & W^1 & W^4 & W^7 & W^2 & W^5 \\ 1 & W^7 & W^6 & W^5 & W^4 & W^3 & W^2 & W^1 \end{bmatrix}$$

$$W = e^{-i2\pi/8}$$

Entonces

$$[TG(3)]_{8R} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i & 1 & -i & -1 & i \\ 1 & i & -1 & -i & 1 & i & -1 & -i \\ 1 & W^1 & W^2 & W^3 & W^4 & W^5 & W^6 & W^7 \\ 1 & W^5 & W^2 & W^7 & W^4 & W^1 & W^6 & W^3 \\ 1 & W^3 & W^6 & W^1 & W^4 & W^7 & W^2 & W^5 \\ 1 & W^7 & W^6 & W^5 & W^4 & W^3 & W^2 & W^1 \end{bmatrix}$$

Se puede restringir la variación del exponente de W de 1 a 3 tomado en cuenta que $W^4 = -1$

O sea $[TG(3)]_{8R}$ puede expresar también en la forma:

$$[TG(3)]_{8R} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i & 1 & -i & -1 & i \\ 1 & i & -1 & -i & 1 & i & -1 & -i \\ 1 & W & W^2 & W^3 & -1 & -W & -W^2 & -W^3 \\ 1 & -W & W^2 & -W^3 & -1 & W & -W^2 & W^3 \\ 1 & W^3 & -W^2 & W & -1 & -W^3 & W^2 & -W \\ 1 & -W^3 & -W^2 & -W & -1 & W^3 & W^2 & W \end{bmatrix}$$

Si deseamos obtener $[TG(4)]_{8R}$ tendremos

$$[TG(4)]_{8R} = \begin{bmatrix} [TG(3)]_{8R}' & [TG(3)]_{8R}' \\ [M_{\text{rec}}]_{8 \times 16} & \end{bmatrix} \quad (1-50)$$

en donde $[TG(3)_{8R}]'$ indica la matriz $[TG(3)_{8R}]$ con los exponentes de W multiplicados por 2, y $[M_{rec} 8 \times 16]$ es la matriz rectangular 8×16 que se obtiene realizando el producto de Kronecker de la mitad inferior de $[TG(3)_{8R}]$ por $[H(1)]$

En general

$$[TG(n)_{8R}] = \begin{bmatrix} [TG(n-1)_{8R}]' [TG(n-1)_{8R}]' \\ [M_{rec} 2^{n-1} \times 2^n] \end{bmatrix} \quad (1-51)$$

en donde $[TG(n-1)_{8R}]'$ es la matriz $[TG(n-1)_{8R}]$ con los exponentes de $W = e^{-i2\pi/N}$, ($N = 2^n$), multiplicados por dos, y $[M_{rec} 2^{n-1} \times 2^n]$ es la matriz rectangular que se obtiene realizando el producto de Kronecker de la mitad inferior de $[TG(n-1)_{8R}]$ por $[H(1)]$

Podemos concebir una matriz que utilice en todos los casos un número de raíces igual al orden de la matriz, se tendrá entonces la Transformada Discreta de Fourier. Para valores pequeños de N la transformada discreta de Fourier se identifica con algunas de las matrices ya estudiadas. Así por ejemplo

$$[TDF(1)] = [H(1)]$$

$$[TDF(2)] = [BC(2)]$$

$$[TDF(3)] = [TG(3)_{8R}]$$

$[TDF(4)]$ la obtendremos a partir de la fórmula:

$$[TDF(4)] = \begin{bmatrix} [TDF(3)]' [TDF(3)]' \\ [R_{rec} 8 \times 16] \end{bmatrix} \quad (1-52)$$

en donde $[TDF(3)]'$ es la matriz $[TDF(3)]$ con los exponen -

tes de W multiplicados por 2, y $[R_{rec}^{8 \times 16}]$ es la matriz rectangular 8×16 que se forma ordenando las 16 raíces de $\sqrt[16]{1}$ en la forma que se indica a continuación:

Se forman los 8 polígonos de las figuras 1-15 a 1-22

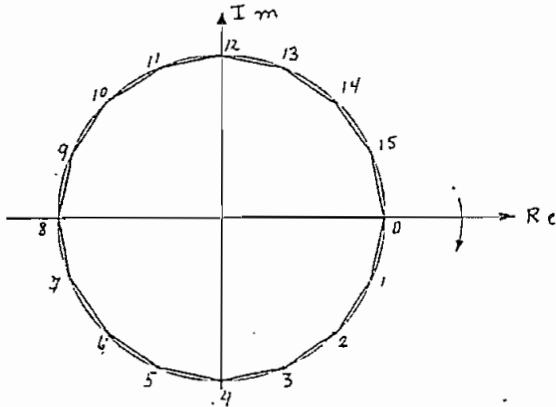


Fig. 1-15. Polígono para la fila 1

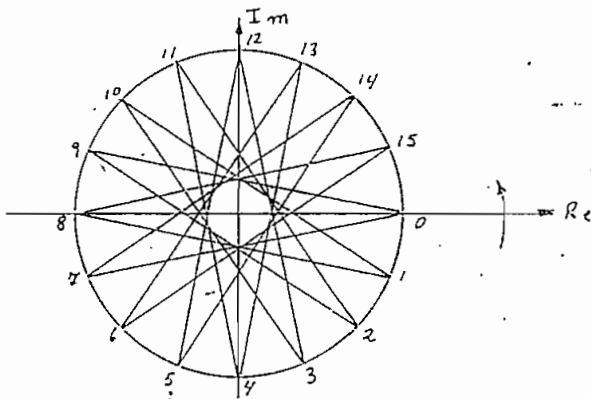


Fig. 1-16. Polígono para la fila 2

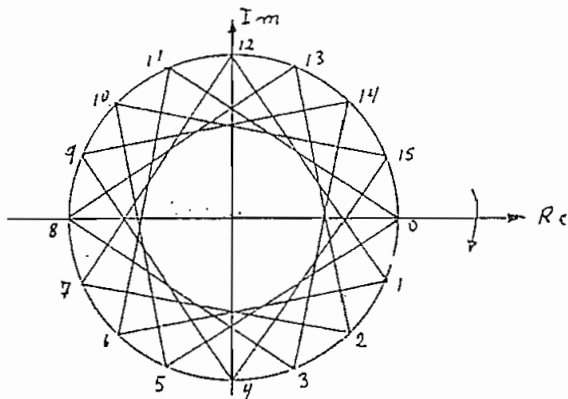


Fig. 1-17. Polígono para la fila 3

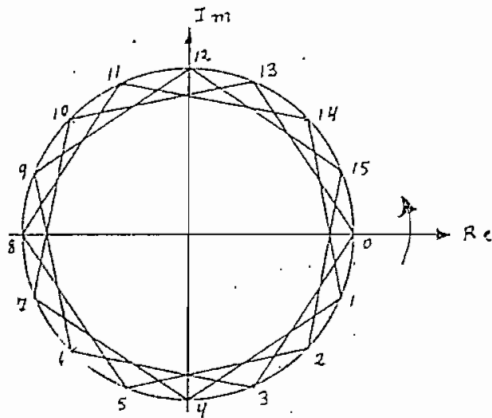


Fig. 1-18. Polígono para la fila 4

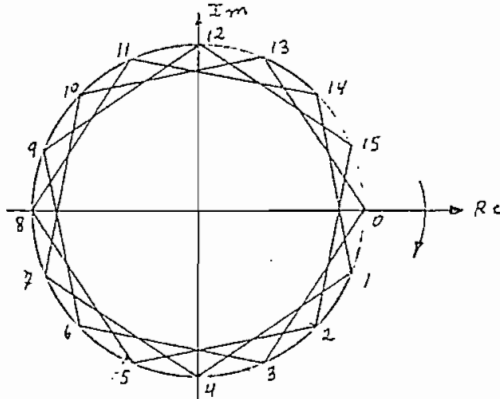


Fig. 1-19. Polígono para la fila 5

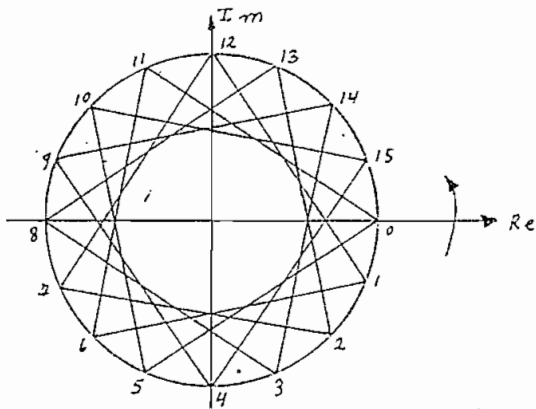


Fig. 1-20. Polígono para la fila 6

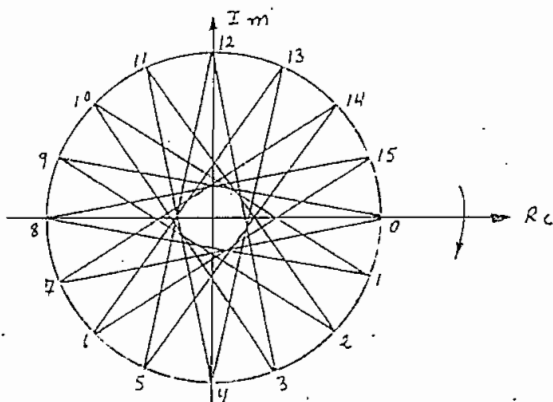


Fig. 1-21. Polígono para la fila 7

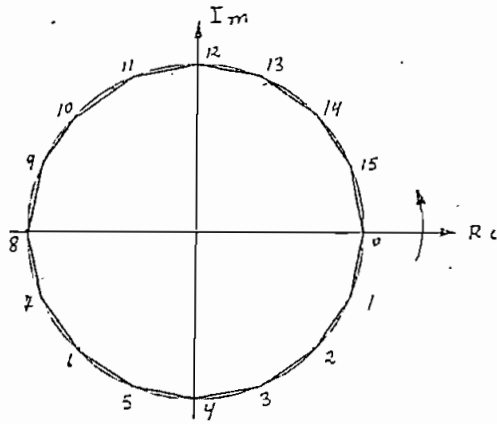


Fig. 1-22. Polígono para la fila 8

y se los recorre en la dirección que indican las flechas ; los números en los vértices de cada polígono nos dan los exponentes de W en cada una de las filas de $[R_{rec}^{8 \times 16}]$

Así pues $[TDF(4)]$ será de la forma: $[TDF(4)] =$

$$\begin{bmatrix}
 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
 1 & -i & -1 & i & 1 & -i & -1 & i & 1 & -i & -1 & i & 1 & -i & -1 & i \\
 1 & i & -1 & -i & 1 & i & -1 & -i & 1 & i & -1 & -i & 1 & i & -1 & -i \\
 1 & W^2 & W^4 & W^6 & W^8 & W^{10} & W^{12} & W^{14} & 1 & W^2 & W^4 & W^6 & W^8 & W^{10} & W^{12} & W^{14} \\
 1 & W^{10} & W^4 & W^{14} & W^8 & W^2 & W^{12} & W^6 & 1 & W^{10} & W^4 & W^{14} & W^8 & W^2 & W^{12} & W^6 \\
 1 & W^6 & W^{12} & W^2 & W^8 & W^{14} & W^4 & W^{10} & 1 & W^6 & W^{12} & W^2 & W^8 & W^{14} & W^4 & W^{10} \\
 1 & W^{14} & W^{12} & W^{10} & W^8 & W^6 & W^4 & W^2 & 1 & W^{14} & W^{12} & W^{10} & W^8 & W^6 & W^4 & W^2 \\
 1 & W^1 & W^2 & W^3 & W^4 & W^5 & W^6 & W^7 & W^8 & W^9 & W^{10} & W^{11} & W^{12} & W^{13} & W^{14} & W^{15} \\
 1 & W^9 & W^2 & W^{11} & W^4 & W^{13} & W^6 & W^{15} & W^8 & W^1 & W^{10} & W^3 & W^{12} & W^5 & W^{14} & W^7 \\
 1 & W^5 & W^{10} & W^{15} & W^4 & W^9 & W^{14} & W^3 & W^8 & W^{13} & W^2 & W^7 & W^{12} & W^1 & W^6 & W^{11} \\
 1 & W^{13} & W^{10} & W^7 & W^4 & W^1 & W^{14} & W^{11} & W^8 & W^5 & W^2 & W^{15} & W^{12} & W^9 & W^6 & W^3 \\
 1 & W^3 & W^6 & W^9 & W^{12} & W^{15} & W^2 & W^5 & W^8 & W^{11} & W^{14} & W^1 & W^4 & W^7 & W^{10} & W^{13} \\
 1 & W^{11} & W^6 & W^1 & W^{12} & W^7 & W^2 & W^{13} & W^8 & W^3 & W^{14} & W^9 & W^4 & W^{15} & W^{10} & W^5 \\
 1 & W^7 & W^{14} & W^5 & W^{12} & W^3 & W^{10} & W^1 & W^8 & W^{15} & W^6 & W^{13} & W^4 & W^{11} & W^2 & W^9 \\
 1 & W^{15} & W^{14} & W^{13} & W^{12} & W^{11} & W^{10} & W^9 & W^8 & W^7 & W^6 & W^5 & W^4 & W^3 & W^2 & W^1
 \end{bmatrix}$$

En general

$$[TDF(n)] = \begin{bmatrix} [TDF(n-1)]' & [TDF(n-1)]' \\ [R_{rec} & 2^{n-1} \times 2^n] \end{bmatrix} \quad (1-53)$$

en donde $[TDF(n-1)]'$ es la matriz $[TDF(n-1)]$ con los exponentes de W multiplicados por 2, y $[R_{rec} 2^{n-1} x 2^n]$ es una matriz rectangular $2^{n-1} x 2^n$ formada de la siguiente manera: se ubican en la circunferencia de radio unidad las N raíces de $\sqrt[n]{1}$, se forma el polígono regular de N lados, se inscriben en él todos los polígonos estrellados posibles (de N puntas). (Si $N = 2^n$, el número de polígonos estrellados posibles es igual a la cantidad de números impares comprendidos entre 3 y $(N/2 - 1)$ inclusive). Si recorremos cada uno de estos polígonos en los dos sentidos posibles, a partir del punto cero y de acuerdo al orden: $+1, -(N/2-1), +(N/2-3), -\dots, +5, -3, +3, -5, +\dots, -(N/2-3), -(N/2-1), -1$; en donde el signo $+$ indica rotación en el sentido de las agujas del reloj y el número indica la cantidad de intervalos que separan las raíces, obtendremos una matriz $2^{n-1} x 2^n$ formada por elementos W elevados a la potencia indicada por los números en los vértices de los polígonos recorridos.

Se puede formar directamente la matriz $[TDF(n)]$ de cualquier orden de la siguiente manera:

Sea la matriz de orden N . $N = 2^n$

Las filas de la matriz se obtienen de la siguiente manera:

Primera fila: la raíz 1 repetida N veces.

Segunda fila: las raíces $+1 -1$ repetidas $N/2$ veces en ese orden.

·Tercera fila: las raíces $1 -i -1 i$ repetidas $N/4$ veces - en ese orden

Cuarta fila: las raíces $1 i -1 -i$ repetidas $N/4$ veces en ese orden:

Quinta, sexta, séptima y octava filas: las 8 raíces de $\sqrt[8]{1}$ repetidas $N/8$ veces y ordenadas de la siguiente manera:

La quinta sumando cada vez 1 al exponente de W a partir de $W^0 = 1$

La séptima sumando cada vez 3 al exponente de W . En este caso cada vez que se supere el valor N , se lo resta y se reinicia la suma.

Las filas sexta y octava invirtiendo el orden de los elementos de las filas séptima y quinta respectivamente, exceptuado el uno inicial. Finalmente los exponentes obtenidos con este método deben multiplicarse por $N/8$.

Para las filas 9 a 16 se utilizan las raíces de $\sqrt[16]{1}$. Se obtiene una matriz 8×16 utilizando, con los cambios pertinentes, la regla dada a continuación. Se multiplican los exponentes por $N/16$ y se repite la matriz así obtenida $N/16$ veces en sentido horizontal.

Así se continúa hasta llegar a la fila $N/2$.

Filas $N/2 + 1, \dots, N$: se forma una matriz $\frac{N}{2} \times N$. Se antepone a cada fila el número correspondiente a la secuencia: $+1, -(N/2 - 1), \dots, +5, -3, +3, -5, \dots, -(N/2 - 1), -1$. Se llenan las filas precedidas de un número con signo positivo, sumando cada vez al exponente de W

el número que antecede a la fila. El primer número de cada fila será siempre igual a $1 = W^0$. Cada vez que se supera el valor N , se lo resta y se reinicia la suma. Luego se llenan las filas precedidas de un número con signo negativo, invirtiendo las filas correspondientes de signo positivo, exceptuado el uno inicial

La matriz $N/2 \times N$ quedará en la forma:

$$[R_{rec}^{N/2 \times N}] = \begin{matrix} +1 \\ -(N/2-1) \\ \cdot \\ +5 \\ -3 \\ +3 \\ -5 \\ \cdot \\ +(N/2-1) \\ -1 \end{matrix} \left[\begin{array}{cccccccc} 1 & W^1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & W^{N-1} \\ 1 & W^{N/2+1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & W^{N/2-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \dots & \dots & \dots & \cdot \\ 1 & W^5 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & W^{N-5} \\ 1 & W^{N-3} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & W^3 \\ 1 & W^3 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & W^{N-3} \\ 1 & W^{N-5} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & W^5 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \dots & \dots & \dots & \cdot \\ 1 & W^{N/2-1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & W^{N/2+1} \\ 1 & W^{N-1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & W^1 \end{array} \right] \quad (1-54)$$

Como se dijo anteriormente las matrices que acabamos de estudiar son N -ortogonales o N -unitarias, puesto que al multiplicarlas por su conjugada transpuesta nos dan la matriz $[NI_N]$, o sea la matriz identidad de orden N multiplicada por el escalar $N = 2^n$. Si queremos que estas matrices sean unitarias u ortogonales, deberemos anteponer a cada matriz el escalar $1/\sqrt{N}$.

Para anular el factor N en la fórmula generalizada -

de transformación se antepone el factor $1/N$ a la matriz de transformación.

1.8 Factorización de la matriz de transformación

Debido a su gran redundancia (repetición de los mismos elementos) las matrices $[TG(n)]$ pueden factorarse en $n = \log_2 N$ matrices de gran dispersión.

Para ejemplificar esto vamos a factorar la matriz $[TDF(3)]$. Para esto escribimos la matriz asignando a m el rango de variación de 0 a 3

$$[TDF(3)] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i & 1 & -i & -1 & i \\ 1 & i & -1 & -i & 1 & i & -1 & -i \\ 1 & W & W^2 & W^3 & -1 & -W & -W^2 & -W^3 \\ 1 & -W & W^2 & -W^3 & -1 & W & -W^2 & W^3 \\ 1 & W^3 & -W^2 & W & -1 & -W^3 & W^2 & -W \\ 1 & -W^3 & -W^2 & -W & -1 & W^3 & W^2 & W \end{bmatrix}$$

Utilizando partición de matrices, [5] pp. 33-35, podemos obtener la siguiente equivalencia:

$$[TDF(3)] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -i & -1 & i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & i & -1 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & W & W^2 & W^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -W & W^2 & -W^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & W^3 & -W^2 & W \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -W^3 & -W^2 & -W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$j = 1, 2, \dots, n$

Las submatrices diagonales son de la forma:

$$[A_r^m(1)] = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & w^{\langle m \rangle} \\ 1 & -w^{\langle m \rangle} \end{bmatrix} & m = 0, 1, \dots, 2^r - 1 \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} & m = 2^r, 2^r + 1, \dots, 2^{n-j} - 1 \end{cases} \quad (1-59)$$

$$[A_r^m(j)] = [A_r^m(1)] [I_{2^{j-1}}] \quad (1-60)$$

En donde

$$w = e^{-i2\pi/N}$$

$[I_{2^{j-1}}]$ es la matriz identidad de orden 2^{j-1}

El símbolo \otimes denota producto de Kronecker

$\langle m \rangle$ es el número decimal que resulta de la inversión de los "bits" de la representación binaria, con $n-1$ "bits", de m . Esto es si

$$\begin{aligned} m &= m_{n-2} 2^{n-2} + \dots + m_1 2^1 + m_0 2^0 \\ \langle m \rangle &= m_0 2^{n-2} + \dots + m_{n-3} 2^1 + m_{n-2} 2^0 \end{aligned} \quad (1-61)$$

Ejemplo:

Sea $n = 3$

Entonces $\langle m \rangle$ será un número binario expresado con $(n-1) = 2$ bits.

Se tendrá el siguiente cuadro de equivalencias

| m_{dec} | m_{bin} | $m_{\text{bin.inv.}} \langle m \rangle$ |
|------------------|------------------|---|
| 0 | 00 | 00 |
| 1 | 01 | 10 |
| 2 | 10 | 01 |
| 3 | 11 | 11 |

vemos que la inversión indicada no cambia el rango de variación, sino únicamente el orden.

El tipo de transformada varía con el subíndice r, estas variaciones se indican en el siguiente cuadro

| r | Tipo de Transf. | Variac. de m | Elementos |
|-----|-----------------|------------------------------|-------------------------------|
| 0 | Hadamard | 0 | 1 |
| 1 | B. C. | 0,1 | 1, i |
| 2 | sin nombre | 0,1,2,3 | las raíces de $\sqrt[8]{1}$ |
| . | . | . | . |
| n-1 | TDF | 0,1,...(2 ⁿ⁻¹ -1) | las raíces de $\sqrt[2^n]{1}$ |

Tabla 1-1. Tipos de transformada

Se debe anotar que la fórmula indicada nos da la transformada de Fourier en un orden con inversión de bits.

O sea

$$B_{n-1}(k) = C(\langle k \rangle)$$

en donde $\langle k \rangle$ se obtiene en la forma indicada anteriormente.

La transformada discreta de Fourier ordenada en forma normal se obtiene a partir de la fórmula:

$$C(k) = 1/N \sum_{m=0}^{N-1} X(m) e^{-i2\pi km/N}$$

$$k = 0, 1, \dots, N-1$$

El rango de variación máximo para el exponente de W se tiene para la [TDF] y es de 0 a (2ⁿ⁻¹-1).

Para esclarecer la fórmula (1-56) vamos a obtener algunas matrices a partir de la misma

Sea n = 3

$$N = 2^n = 2^3 = 8$$

$$[A_0^0(2)] = [A_0^0(1)] \otimes [I_{2,1}] = [A_0^0(1)] \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$[A_0^1(2)] = [A_0^1(1)] \otimes [I_{2,1}] = [A_0^1(1)] \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$[D_0^2(3)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ & & 1 & 0 & 1 & 0 \\ & & 0 & 1 & 0 & 1 \\ & & 1 & 0 & -1 & 0 \\ & & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$[D_0^3(3)] = [A_0^0(3)] = [A_0^0(1)] \otimes [I_{2,2}]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[D_0^3(3)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$[H(3)] =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & & & & & & & \\ 1 & -1 & & & & & & & \\ & & 1 & 1 & & & & & \\ & & 1 & -1 & & & & & \\ & & & & 1 & 1 & & & \\ & & & & 1 & -1 & & & \\ & & & & & & 1 & 1 & \\ & & & & & & 1 & -1 & \\ & & & & & & & & 1 & 1 & \\ & & & & & & & & & & 1 & -1 & \\ & & & & & & & & & & & & 1 & 1 & \\ & & & & & & & & & & & & & & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ & & & & 1 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 1 & 0 & 1 \\ & & & & 1 & 0 & -1 & 0 \\ & & & & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Realizado el producto de las 3 matrices se obtiene:

$$[H(3)] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

2) $r = 1$. MATRIZ BIFORE COMPLEJA

$$\begin{aligned} [TG_1(3)] &= [D_1^1(3)][D_1^2(3)][D_1^3(3)] \\ &= \text{Diag}[A_1^0(1)A_1^1(1)A_1^2(1)A_1^3(1)] \text{Diag}[A_1^0(2)A_1^1(2)] \\ &\quad \text{Diag}[A_1^0(3)] \end{aligned}$$

$$[D_1^2(z)] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & & & & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & & & & \\ 1 & 0 & -1 & 0 & & & & \\ 0 & 1 & 0 & -1 & & & & \\ & & & & 1 & 0 & -i & 0 \\ & & & & 0 & 1 & 0 & -i \\ & & & & 1 & 0 & i & 0 \\ & & & & c & 1 & 0 & i \end{pmatrix}$$

$$[D_1^3(z)] = \text{Diag}[A_1^0(z)] \otimes [I_2^2]$$

$$[D_1^3(z)] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$[BC(z)] = [TG_1(z)] =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & & & & & \\ 1 & -1 & & & & & & \\ & & 1-i & & & & & \\ & & 1-i & & & & & \\ & & & 1 & 1 & & & \\ & & & 1 & -1 & & & \\ & & & & & 1 & 1 & \\ & & & & & & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & & & & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & & & & \\ 1 & 0 & -1 & 0 & & & & \\ 0 & 1 & 0 & -1 & & & & \\ & & & & 1 & 0 & -i & 0 \\ & & & & 0 & 1 & 0 & -i \\ & & & & 1 & 0 & i & 0 \\ & & & & 0 & 1 & 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Realizado el producto de las tres matrices se obtiene:

$$[BD(3)] = [TG_1(3)] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i & 1 & -i & -1 & i \\ 1 & i & -1 & -i & 1 & i & -1 & -i \\ 1 & 1 & -i & -i & -1 & -1 & i & i \\ 1 & -1 & -i & i & -1 & 1 & i & -i \\ 1 & 1 & i & i & -1 & -1 & -i & -i \\ 1 & -1 & i & -i & -1 & 1 & -i & i \end{bmatrix}$$

que coincide con la matriz $[BC(3)]$ obtenida anteriormente

3) $r = 2$ MATRIZ DE LA TDF

$$\begin{aligned} [TG_2(3)] &= [TDF(3)] = [D_2^1(3)][D_2^2(3)][D_2^3(3)] \\ &= \text{Diag}[A_2^0(1)A_2^1(1) \ A_2^2(1)A_2^3(1)] \cdot \text{Diag}[A_2^0(2)A_2^1(2)] \\ &\qquad \qquad \qquad \text{Diag}[A_2^0(3)] \end{aligned}$$

Tenemos las equivalencias

$$\langle 0 \rangle = 0$$

$$\langle 1 \rangle = 2$$

$$\langle 2 \rangle = 1$$

$$\langle 3 \rangle = 3$$

m varía de 0 a 3

Puesto que $3 = 2^2 - 1 = 2^r - 1$ no existen valores de $m = 2^r$ y superiores.

$$[A_2^0(1)] = \begin{bmatrix} 1 & w^0 \\ 1 & -w^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$[A_2^1(1)] = \begin{bmatrix} 1 & w^{\langle 1 \rangle} \\ 1 & -w^{\langle 1 \rangle} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & w^2 \\ 1 & -w^2 \end{bmatrix}$$

$$[A_2^2(1)] = \begin{bmatrix} 1 & w \langle 22 \rangle \\ 1 & -w \langle 22 \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & w \\ 1 & -w \end{bmatrix}$$

$$[A_2^3(1)] = \begin{bmatrix} 1 & w \langle 33 \rangle \\ 1 & -w \langle 33 \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & w/3 \\ 1 & -w/3 \end{bmatrix}$$

de donde

$$[D_2^1(3)] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$[D_2^2(3)] = \text{diag}[A_2^0(2)A_2^1(2)]$$

$$[A_2^0(2)] = [A_2^0(1)] \otimes [I_{2,1}]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$[A_2^1(2)] = [A_2^1(1)] \otimes [I_{2,1}]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & w^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & w^2 \\ 1 & 0 & -w^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -w^2 \end{bmatrix}$$

de donde

$$[D_2^2(z)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ & & & 1 & 0 & W^2 & 0 \\ & & & 0 & 1 & 0 & W^2 \\ & & & 1 & 0 & -W^2 & 0 \\ & & & 0 & 1 & 0 & -W^2 \end{bmatrix}$$

$$[D_2^3(z)] = [A_2^0(z)] = [A_2^0(1)] \otimes [I_2^2]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$[TDF(z)] =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ & 1 & W^2 \\ & 1 & -W^2 \\ & & 1 & W \\ & & 1 & -W \\ & & & 1 & W^3 \\ & & & 1 & -W^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ & & & 1 & 0 & W^1 & 0 \\ & & & 0 & 1 & 0 & W^2 \\ & & & 1 & 0 & -W^2 & 0 \\ & & & 0 & 1 & 0 & -W^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Realizado el producto de las tres matrices se obtiene:

$$[TFD(3)] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & w^2 & -1 & -w^2 & 1 & w^2 & -1 & -w^2 \\ 1 & -w^2 & -1 & w^2 & 1 & -w^2 & -1 & w^2 \\ 1 & w & w^2 & w^3 & -1 & -w & -w^2 & -w^3 \\ 1 & -w & w^2 & -w^3 & -1 & w & -w^2 & w^3 \\ 1 & w^3 & -w^2 & -w^5 & -1 & -w^3 & w^2 & w^5 \\ 1 & -w^3 & -w^2 & w^5 & -1 & w^3 & w^2 & -w^5 \end{bmatrix}$$

Si se tiene en cuenta que:

$$w^4 = -1$$

$$w^2 = -i$$

se verá que la matriz obtenida coincide con la $[TDF(3)]$ de la página 52.

1. 10 Propiedades de la transformada discreta generalizada

1.10 a) Linealidad

$$\text{Si } [B_R(n)] = 1/N [TG_R(n)][X(n)]$$

$$\text{y } [G_R(n)] = 1/N [TG_R(n)][Y(n)]$$

entonces

$$\begin{aligned} 1/N [TG_R(n)][\alpha X(n) + \beta Y(n)] &= \alpha/N [TG_R(n)][X(n)] + \\ &\quad \beta/N [TG_R(n)][Y(n)] \\ &= \alpha [B_R(n)] + \beta [G_R(n)] \quad (1-62) \end{aligned}$$

1.10 b) Ortogonalidad

Como es fácil comprobar en los tres ejemplos dados ,

las matrices de transformación están constituidas por filas o columnas que son mutuamente ortogonales entre sí. Por lo mismo el producto de la matriz de transformación por su conjugada transpuesta nos dará una matriz cuyos elementos, exceptuados los de la diagonal principal, serán todos iguales a cero.

Como ya se enunció anteriormente

$$[TG_R(n)][\overline{[TG_R(n)]}]^T = N[I_N]$$

1.10 c) Teorema de Parseval

Este teorema es una consecuencia de la ortogonalidad de las matrices de transformación y se puede expresar de la siguiente forma:

$$\sum_{j=0}^{N-1} |X(j)|^2 = N \sum_{l=0}^{N-1} |B_R(l)|^2 \quad (1-63)$$

Demostración

Partimos de la fórmula general

$$[B_R(n)] = 1/N [TG_R(n)] [X(n)]$$

si premultiplicamos por la matriz $[\overline{[TG_R(n)]}]^T$ ambos miembros

$$[\overline{[TG_R(n)]}]^T [B_R(n)] = 1/N [\overline{[TG_R(n)]}]^T [TG_R(n)] [X(n)] = [X(n)]$$

$$\text{Si } [X(n)] = [\overline{[TG_R(n)]}]^T [B_R(n)]$$

entonces

$$[\overline{[X(n)]}]^T = [\overline{[B_R(n)]}]^T [TG_R(n)]$$

de donde

$$[\overline{[X(n)]}]^T [X(n)] = [\overline{[B_R(n)]}]^T [TG_R(n)] [\overline{[TG_R(n)]}]^T [B_R(n)]$$

$$\sum_{j=0}^{N-1} X(j) = N [B_r(n)]^T [I_N] [B_r(n)]$$
$$\sum_{j=0}^{N-1} X(j) = N \sum_{l=0}^{N-1} B_r(l)$$

Esta propiedad se deriva directamente de la propiedad de ortogonalidad, ya que hemos definido una transformación ortogonal o unitaria como aquella que deja invariante el cuadrado del módulo del vector original y del transformado. En el caso de señales esto se aplica a la invariancia de la energía de la señal y de su transformada.

1.10 d) Teorema de desplazamiento

Sea $[X^{(\ell)}(n)]$ la secuencia obtenida desplazando cíclicamente hacia la izquierda en ℓ lugares la secuencia N -periódica dada $[X(n)]$

Así pues si

$$[X(n)]^T = X(0) X(1) \dots\dots\dots X(N-1)$$

entonces

$$[X^{(\ell)}(n)]^T = X(\ell) X(\ell+1) \dots\dots\dots X(\ell-1)$$

en donde $\ell = 1, 2, \dots\dots\dots N-1$

$[X^{(\ell)}(n)]$ puede considerarse como el producto de $[M^{(\ell)}(n)]$ por $[X(n)]$, en donde $[M^{(\ell)}(n)]$ es la matriz $[I_N]$ cuyas columnas se han desplazado cíclicamente a la derecha en ℓ lugares.

Así por ejemplo

$$[M^{(1)}(2)] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si queremos obtener la transformada de $[X^{(\ell)}(n)]$ tendremos

$$\begin{aligned} [B_R^{(\ell)}(n)] &= 1/N [TG_R(n)][X^{(\ell)}(n)] \\ &= 1/N [TG_R(n)][M^{(\ell)}(n)][X(n)] \\ &= 1/N [TG_R(n)][M^{(\ell)}(n)][\overline{TG_R}(n)]^T 1/N [TG_R(n)][X(n)] \end{aligned}$$

Hemos introducido el factor

$$[\overline{TG_R}(n)]^T 1/N [TG_R(n)] = [I_N] \text{ que no altera la ecuación}$$

de donde

$$[B_R^{(\ell)}(n)] = 1/N [TG_R(n)][M^{(\ell)}(n)][\overline{TG_R}(n)]^T [B_R(n)]$$

Si hacemos

$$[TG_R(n)][M^{(\ell)}(n)][\overline{TG_R}(n)]^T = [S_R^{(\ell)}(n)]$$

tendremos

$$[B_R^{(\ell)}(n)] = 1/N [S_R^{(\ell)}(n)][B_R(n)] \quad (1-64)$$

en donde (1-64) representa la formulación general del teorema de desplazamiento. Siendo $[B_R^{(\ell)}(n)]$ la transformada generalizada de $[X^{(\ell)}(n)]$.

La matriz $[S_R^{(\ell)}(n)] = [TG_R(n)][M^{(\ell)}(n)][\overline{TG_R}(n)]^T$ se denomina matriz de desplazamiento y tiene características especiales:

Por ser el producto de matrices unitarias y ortogonales representa una transformación unitaria u ortogonal.

Además posee estructura diagonal en bloques y cada uno de éstos es una matriz unitaria (o N)unitaria). Esto trae consigo la invariancia de los espectros de potencia bajo desplazamientos cíclicos de los datos de entrada.

1.10 e) Espectro de potencia

Desarrollando en detalle la ecuación (1-64) y elevando al cuadrado los dos miembros de la misma, se llega a la determinación de los espectros de potencia invariantes a desplazamientos cíclicos de los datos de entrada. (El desarrollo completo de estas fórmulas se dará posteriormente al tratar de la transformada de Hadamard).

Se tienen los siguientes espectros de potencia para las diversas clases de transformadas:

1) $r = 0$ Espectro de potencia de la transformada de Hadamard

$$P_0(0) = |B_0(0)|^2$$
$$P_0(l) = \sum_{m=2^{l-1}}^{2^l-1} |B_0(m)|^2 \quad (1-65)$$

$$l = 1, 2, \dots, n$$

2) $r = n-1$ Espectro de potencia de la TDF

$$P_{n-1}(s) = |B_{n-1}(\langle s \rangle)|^2 \quad (1-66)$$

$$s = 0, 1, \dots, N-1$$

en donde $\langle s \rangle$ tiene el significado ya conocido

3) $r = 1, 2, \dots, n-2$ Espectro de potencia de las restantes transformadas.

$$P_r(l) = |B_r(l)|^2$$

$$l = 0, 1, \dots, 2^{r+1} - 1 \quad (1-67)$$

$$P_r(2^{s-2} + k) = \sum_{m=\bar{k}, \bar{s}}^{(\bar{k}+1, \bar{s})-1} |B_r(m)|^2$$

para $s = r + 2, r + 3, \dots, n$

y $k = 2^r, 2^r + 1, \dots, 2^{r+1} - 1$

en donde

$$\bar{k}.\bar{s} = \sum_{j=0}^{r+1} k_{r+1-j} 2^{s-j}$$

$$\overline{k+1}.\bar{s} = \sum_{j=0}^{r+1} k'_{r+1-j} 2^{s-j}$$

siendo k_ℓ y k'_ℓ , $\ell = 0, 1, \dots, r+1$, los coeficientes (0 o 1) de la representación binaria con $r+2$ bits de (k) decimal y (k') decimal respectivamente

Se puede comprobar que, para datos reales, el número de puntos espectrales sueltos, formados por el cuadrado de un solo coeficiente, es igual al número de raíces de 1 que forman la matriz de transformación. Los restantes puntos espectrales están formados por el sumatorio de 2, 4, 8, ..., 2^{n-1} coeficientes elevados al cuadrado.

1.10 f) Composición de frecuencia

Al observar los bloques de invariancia del espectro que se obtienen utilizando la ecuación (1-64) se llega a las siguientes conclusiones:

Para la TDF el espectro de potencia representa componentes de frecuencia individual y permanece invariable

bajo desplazamientos cíclicos de los datos muestreados. Los coeficientes de la TDF de estos datos desplazados sufren un cambio en la fase, pero su magnitud permanece invariable. Esto no se aplica a las demás transformadas. Los espectros de potencia de todas las transformadas distintas de la TDF representan grupos de frecuencias.

1.10 g) Valor medio de los datos muestreados

Se tiene que

$$B_r(0) = 1/N \sum_{j=0}^{N-1} X(j)$$
$$X(0) = \sum_{\ell=0}^{N-1} B_r(\ell)$$
$$r = 0, 1, \dots, n-1$$

(1-68)

O sea $B_r(0)$ es el valor medio de todos los datos muestreados y $X(0)$ el valor medio de los valores transformados.

1.10 h) Periodicidad

$X(j)$ y $B_r(\ell)$ son secuencias periódicas con período N

O sea

$$X(j) = X(j+kN)$$
$$B_r(\ell) = B_r(\ell+kN)$$

(1-69)

1.10 i) Multidimensionalidad

La transformada generalizada $[TG_r(n)]$ puede extenderse a cualquier número de dimensiones.

1.11 Algoritmos rápidos

Si utilizando partición de matrices multiplicamos - columnas de submatrices de la matriz prefactor por las fi-

las de submatrices de la matriz postfactor, el orden de las matrices en (1-57) puede invertirse. Se tendrá pues

[H(3)] =

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ & & 1 & 0 & 1 & 0 \\ & & 0 & 1 & 0 & 1 \\ & & 1 & 0 & -1 & 0 \\ & & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & & & & \\ 1 & -1 & & & & & & \\ & & 1 & 1 & & & & \\ & & 1 & -1 & & & & \\ & & & & 1 & 1 & & \\ & & & & 1 & -1 & & \\ & & & & & & 1 & 1 \\ & & & & & & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

[BC(3)] =

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ & & 1 & 0 & -i & 0 \\ & & 0 & 1 & 0 & -i \\ & & 1 & 0 & i & 0 \\ & & 0 & 1 & 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & & & & \\ 1 & -1 & & & & & & \\ & & 1 & -i & & & & \\ & & 1 & i & & & & \\ & & & & 1 & 1 & & \\ & & & & 1 & -1 & & \\ & & & & & & 1 & 1 \\ & & & & & & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

[TDF(3)] =

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ & & 1 & 0 & W_1 & 0 \\ & & 0 & 1 & 0 & W_1 \\ & & 1 & 0 & -W_1 & C_2 \\ & & 0 & 1 & 0 & -W_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & & & & \\ 1 & -1 & & & & & & \\ & & 1 & W_1^2 & & & & \\ & & 1 & -W_1^2 & & & & \\ & & & & 1 & W_1 & & \\ & & & & 1 & -W_1 & & \\ & & & & & & 1 & W_1^3 \\ & & & & & & 1 & -W_1^3 \end{pmatrix}$$

Esta factorización nos lleva directamente al algoritmo rápido de transformación. En efecto si disponemos la transformación en la forma:

$$\begin{matrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \\ X(4) \\ X(5) \\ X(6) \\ X(7) \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a_1 \\ 1 & 0 & a_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ & 1 & a_2 \\ & & 1 & a_1 \\ & & & 1 & a_3 \\ & & & & 1 & a_4 \\ & & & & & 1 & a_6 \\ & & & & & & 1 & a_5 \end{bmatrix} \begin{matrix} B_r(0) \\ B_r(1) \\ B_r(2) \\ B_r(3) \\ B_r(4) \\ B_r(5) \\ B_r(6) \\ B_r(7) \end{matrix} \quad (1-70)$$

tendremos una disposición de las matrices que coincide con el diagrama de flujo de la fig. 1-23, que representa gráficamente la secuencia de operaciones que constituye el algoritmo rápido.

En (1-70) la multiplicación se lleva a cabo multiplicando columnas por filas.

Los valores de los factores $a_1, a_2, \text{etc.}$ se dan en la tabla adjunta

| Factor | TH = TG_0 | TBC = TG_1 | TDF = TG_{n-1} |
|--------|-------------|--------------|------------------|
| a_1 | -1 | i | i |
| a_2 | 1 | -i | -i |
| a_3 | 1 | 1 | w^1 |
| a_4 | -1 | -1 | w^5 |
| a_5 | 1 | 1 | w^3 |
| a_6 | -1 | -1 | w^7 |

Tabla 1-2. Descripción de los factores usados en (1-70) y en la fig. 1-23.

Si examinamos (1-70) vemos que para cada matriz debemos ejecutar N operaciones aritméticas; puesto que se tienen $n = \log_2 N$ matrices, para realizar la transformación se requieren alrededor de $N \log_2 N$ operaciones, lo cual represen-

ta una significativa ventaja frente a las N^2 operaciones exigidas por las matrices sin factorizar.

El diagrama de flujo para estas transformaciones se da en la fig. 1-23.

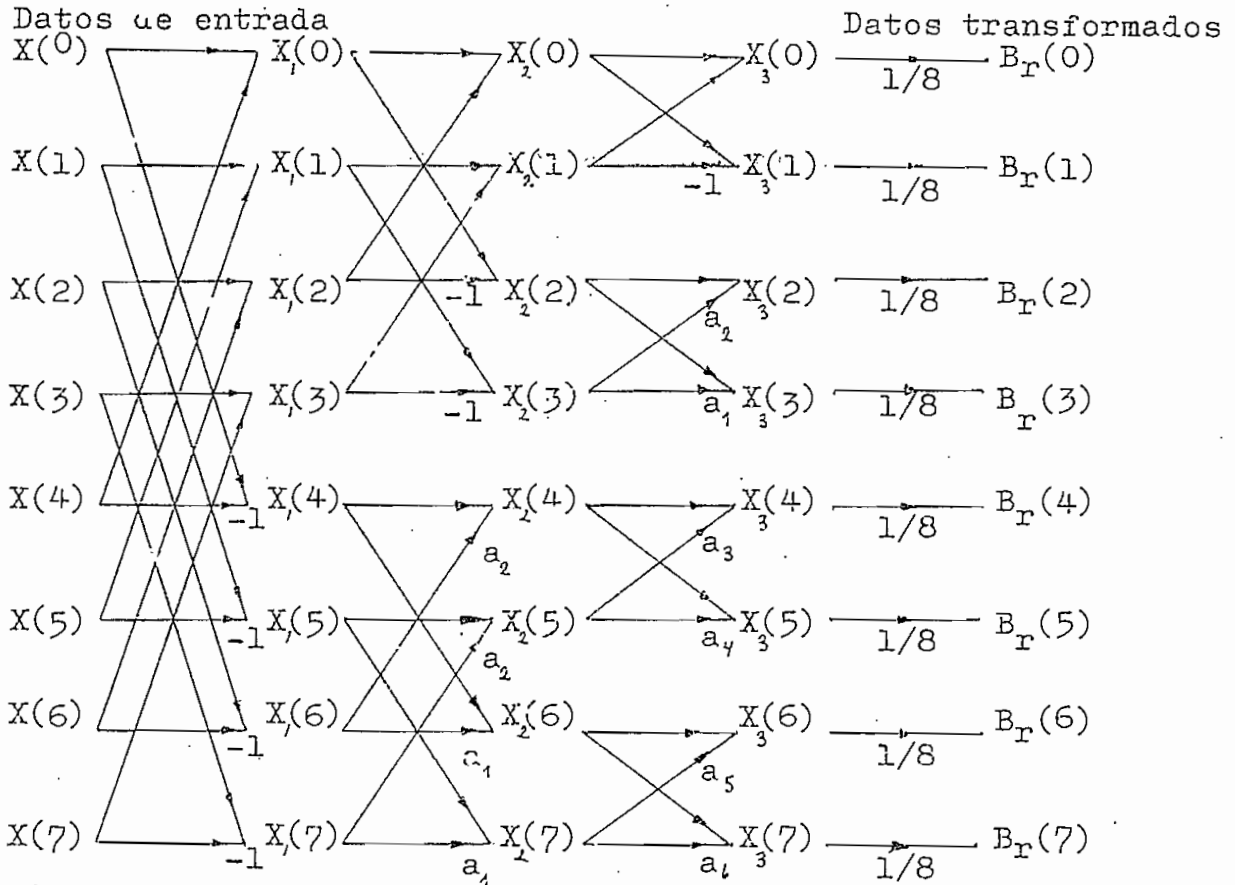


Fig. 1-23. Diagrama de flujo que ilustra la computación de la transformada generalizada $[TG_r(3)]$. $N = 8$

Vemos que es idéntico para las tres transformadas - con sólo elegir los factores para cada transformada de acuerdo a la tabla 1-2. [10] [11].

1.12 La transformada discreta generalizada modificada

1.12 a) Definición

Para terminar nuestra exposición sobre la transformada generalizada queremos exponer un método para realizar la transformación con una matriz de mayor dispersión que denominaremos $[M_r(n)]$

La versión modificada de la transformada generalizada se definen respectivamente como

$$[F_r(n)] = 1/N [M_r(n)][X(n)]$$

$$y \tag{1-71}$$

$$[X(n)] = [M_r(n)]^T [F_r(n)]$$

$$n = \log_2 N$$

$$r = 0, 1, \dots, n-2$$

en donde

$[F_r(n)]^T = F_r(0) F_r(1) \dots F_r(N-1)$ es el vector transformado modificado y

$[X(n)]^T = X(0) X(1) \dots X(N-1)$ es el vector de datos.

$[M_r(n)]$ es la matriz $N \times N$ modificada de transformación que es N -unitaria o N -ortogonal. T denota transpuesta.

Siguiendo un proceso análogo al seguido anteriormente para la $[TG]$, la matriz $[M_r(n)]$ puede factorarse en n matrices de gran dispersión como sigue:

$$[M_r(n)] = \prod_{j=1}^n [E_r^j(n)] \tag{1 - 72}$$

en donde

$$[E_r^1(n)] = \text{Diag}[e_r^0(1) e_r^1(1) \dots e_r^{(2^{n-2})}]$$

$$[E_r^j(n)] = \text{Diag}[e_r^0(j) e_r^1(j) \dots e_r^{(2^{n-j}-1)}(j)]$$

$$j = 2, 3, \dots, n$$

Las submatrices diagonales son

$$[e_r^l(1)] = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & W^{<l>} \\ 1 & -W^{<l>} \end{bmatrix}, & l = 0, 1, \dots, 2^r - 1 \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, & l = 2^r - 1, \dots, 2^{n-2} - 1 \\ 2^{1/2} [I_{2^{n-1}}], & l = 2^{n-2} \end{cases} \quad (1-73)$$

$$[e_r^l(j)] = [e_r(1)] \otimes [I_{2^{j-1}}]$$

$$W = e^{-i2\pi/N}$$

$<l>$ tiene el significado ya conocido

$[I_m]$ es la matriz identidad $m \times m$

La $[M_r(n)]$ introduce sólo una ligera variación respecto de la fórmula general de la transformada generalizada. Para esclarecer esto vamos a desarrollar algunas matrices.

1) $r = 0$ MATRIZ MODIFICADA DE HADAMARD

$$[M_0(3)] = \prod_{j=1}^3 [E_0^j(3)] = [E_0^1(3)] [E_0^2(3)] [E_0^3(3)]$$

$$[E_0^1(3)] = \text{Diag}[e_0^0(1) e_0^1(1) e_0^2(1)]$$

$$[e_0^0(1)] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$[e_0^1(1)] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$[e_0^2(1)] = 2^{1/2}[I_4] \quad \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Entonces

$$[E_0^1(3)] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & & & & \\ & 1 & -1 & & & & & \\ & & & 1 & 1 & & & \\ & & & 1 & -1 & & & \\ & & & & & \sqrt{2} & & \\ & & & & & & \sqrt{2} & \\ & & & & & & & \sqrt{2} \\ & & & & & & & & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$[E_0^2(3)] = \text{Diag}[e_0^0(2)e_0^1(2)]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & & & & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & & & & \\ 1 & 0 & -1 & 0 & & & & \\ 0 & 1 & 0 & -1 & & & & \\ & & & & 1 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 1 & 0 & 1 \\ & & & & 1 & 0 & -1 & 0 \\ & & & & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$[E_0^3(3)] = \text{Diag}[e_0^0(3)]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$[E_1^2(3)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & & & & & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & & & & & \\ 1 & 0 & -1 & 0 & & & & & \\ 0 & 1 & 0 & -1 & & & & & \\ & & & & 1 & 0 & -i & 0 & \\ & & & & 0 & 1 & 0 & -i & \\ & & & & 1 & 0 & i & 0 & \\ & & & & 0 & 1 & 0 & i & \end{bmatrix}$$

$$[E_1^3(3)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & \end{bmatrix}$$

Realizado el producto de las 3 matrices se obtiene

$$[M_1(3)] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & \\ 1 & -i & -1 & i & 1 & -i & -1 & i & \\ 1 & i & -1 & -i & 1 & i & -1 & -i & \\ \sqrt{2} & 0 & -i\sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} & 0 & i\sqrt{2} & 0 & \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & -i\sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} & 0 & i\sqrt{2} & \\ \sqrt{2} & 0 & i\sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} & 0 & -i\sqrt{2} & 0 & \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & i\sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} & 0 & -i\sqrt{2} & \end{bmatrix}$$

1.12 b) Diagrama de flujo

El diagrama de flujo se lo obtiene a partir de (1-72) invirtiendo el orden de las matrices factores, como se hizo para la $[TG_r(n)]$.

El diagrama de flujo se da en la fig. 1-24

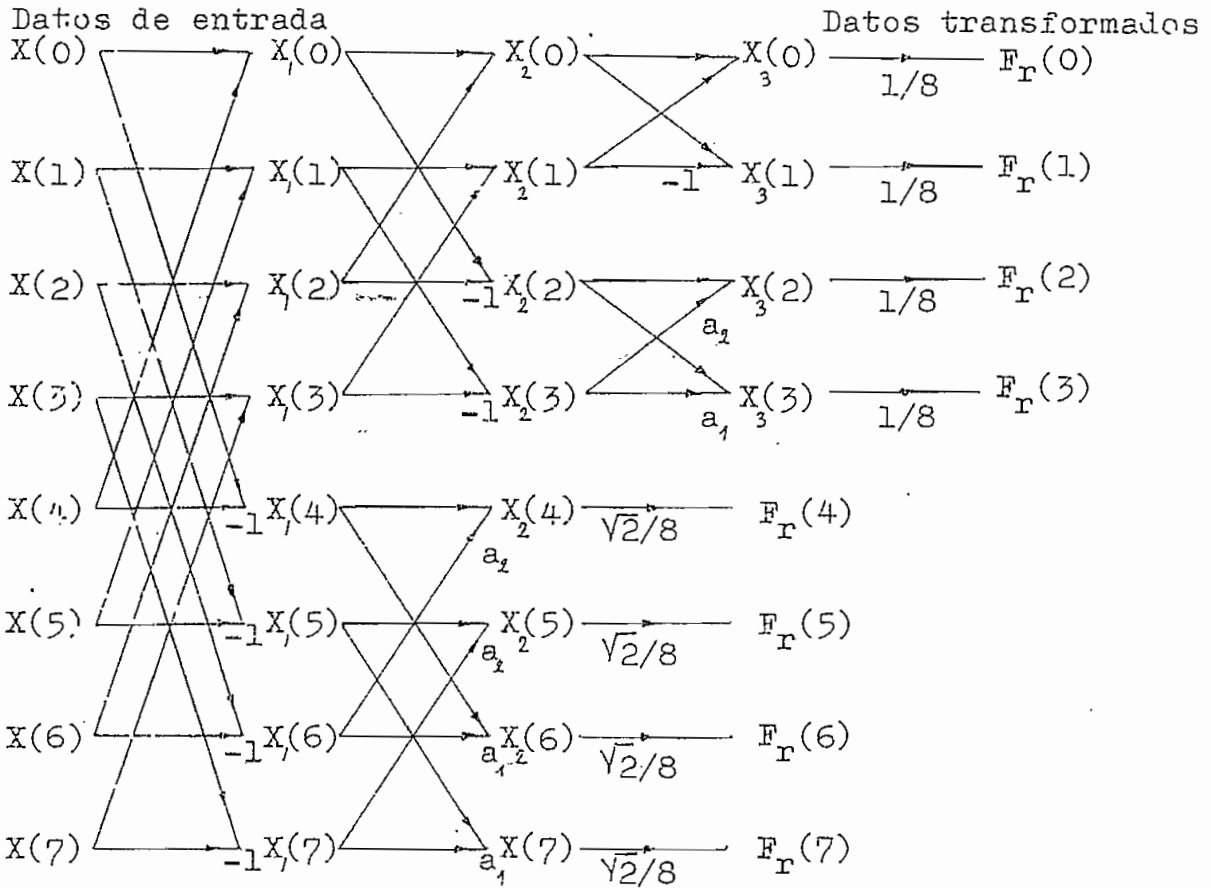


Fig. 1-24. Diagrama de flujo que ilustra la computación de $[M_r(3)]$.

Los factores se indican en la tabla adjunta

| Factor | $[M_0(3)]$ | $[M_1(3)]$ |
|--------|------------|------------|
| a_1 | -1 | i |
| a_2 | 1 | -i |

Tabla 1-3. Factores para la $[M_r(3)]$

Si comparamos el diagrama de la fig. 1-24 con el -

diagrama de flujo de la fig. 1-23 se comprueba que se necesita un menor número de operaciones aritméticas para obtener la transformada generalizada modificada. Del examen del diagrama de flujo se concluye que la disminución de operaciones es igual a $N/2$, y por lo mismo el número total de operaciones requeridas es igual a $N \log_2 N - N/2$.

Puesto que la variación máxima de l en la expresión $W^{<l>}$ es de 0 a $2^{n-2} - 1$, la variación para el subíndice r es de 0 a $n-2$. En otras palabras la única transformada discreta que no tiene versión modificada es la TDF. En efecto, si comparamos los dos diagramas de flujo vemos que en diagrama de la transformada generalizada modificada ha desaparecido la parte en que constan los factores a_3, a_4, a_5, a_6 iguales a W^1, W^5, W^3, W^7 , respectivamente, y que son las 4 raíces adicionales de $\sqrt[8]{1}$ que convierten a la $[BC(3)]$ en la $[TDF(3)]$

1.12 c) Matrices de desplazamiento y espectro de potencia

La matriz de desplazamiento que relaciona la transformada generalizada modificada de una secuencia desplazada cíclicamente y de la secuencia original tiene estructura diagonal en bloques unitarios como en el caso de la $[TG_r(n)]$. Como se verá más adelante, al tratar de la transformada de Hadamard modificada, esta estructura en bloques diagonales de las matrices de desplazamiento de la $[TG_r(n)]$ y $[M_r(n)]$ conduce a espectros de potencia para

la transformada generalizada modificada, que son idénticos a aquellos de la transformada generalizada sin modificar ; esto es, los espectros de potencia invariantes al desplazamiento de la $[TG_r(n)]$ y $[M_r(n)]$ son los mismos. Así pues - los espectros de potencia de la $[TG_r(n)]$ pueden ser evaluados usando la $[M_r(n)]$ [12].

Capítulo 2

LA TRANSFORMADA DE HADAMARD O BIFORE

2.1 Concepto general

Como dijimos en el capítulo 1 es posible llegar a la transformada discreta de Hadamard a partir de la transformada continua.

Si designamos con i el orden de la función de Walsh y tenemos en cuenta su ortogonalidad, podremos expresar la función $X(t)$ como un integral. [13]

$$X(t) = \int_0^{\infty} B(i)W(t, i)di \quad (2-1)$$

siendo

$$B(i) = \int_0^{\infty} X(t)W(i, t)dt \quad (2-2)$$

en donde $W(i, \tau)$ representa la función de Walsh de orden i .

(2-1) y (2-2) se podrían designar como transformada inversa y directa de Hadamard respectivamente.

Si del caso continuo pasamos al discreto y tomamos sólo un número limitado de muestras, que por conveniencia asumiremos igual a $N = 2^n$, tendremos que (2-1) y (2-2) se transforman en

$$X(t_k) = \sum_{i=0}^{N-1} B(i_m)W(t_k, i_m)\Delta i \quad (2-3)$$

$$B(i_m) = \sum_{k=0}^{N-1} X(t_k)W(i_m, t_k)\Delta t \quad (2-4)$$

Es conveniente para el desarrollo ulterior normaliz -

zar el tiempo. Si T es el intervalo (ventana) de muestreo, entonces

$\theta = t_k/T =$ tiempo normalizado (con variación de 0 a 1)

(2-3) y (2-4) quedarán en la forma

$$X(\theta_k) = \sum_{i=0}^{N-1} B(i_m)W(\theta_k, i_m)\Delta i \quad (2-5)$$

$$B(i_m) = \sum_{k=0}^{N-1} X(\theta_k)W(i_m, \theta_k)\Delta \theta \quad (2-6)$$

Los valores que asuman las variables en (2-5) y (2-6) serán todos discretos. Puesto que Δi y $\Delta \theta$ representan constantes, podemos eliminarlas para mayor claridad.

Si hacemos

$$\theta_k = k$$

$$i_m = m$$

tendremos

$$X(k) = \sum_{m=0}^{N-1} B(m)W(k, m) \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$B(m) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)W(m, k) \quad m = 0, 1, \dots, N-1$$

Estas ecuaciones se expresan mejor en forma matricial

$$[X] = 1/N [H][B] \quad (2-7)$$

$$[B] = [H][X] \quad (2-8)$$

en donde $[H]$ representa la matriz que resulta de las N primeras funciones de Walsh .

$1/N$ sirve para destruir el factor N que se origina el producto $[H][H]$.

$[H]$ la matriz de transformación está constituida por elementos iguales a ± 1 . Como acabamos de indicar, cada una de las filas o columnas de esta matriz, denominada de Hadamard, representa una función de Walsh. Resulta por lo mismo conveniente hacer un estudio detallado de las mismas.

2.2 Funciones de Walsh

Las funciones denominadas de Walsh fueron descubiertas por J.L. Walsh en 1923 [14]. Sin embargo, es sólo en los últimos años que se ha propuesto un número de posibles aplicaciones: procesamiento de imágenes, filtros, etc. [15]

La designación y el proceso de obtención de estas funciones varía de un autor a otro, como podrá verse en la exposición que sigue.

2.1 a) Obtención de las funciones de Walsh

Por creerla más sencilla exponemos a continuación la obtención de las funciones de Walsh a partir de las de Rademacher. Las funciones de Rademacher forman un conjunto incompleto de funciones ortogonales (son un subconjunto de las funciones de Walsh). Gráficamente se representan por ondas cuadradas cuyo valor oscila entre $+1$ y -1 .

Definición

Para $k = 1, 2, \dots$ y $0 < \theta < 1$ definimos la

k-ésima función de Rademacher como

$$R_k(\theta) = (-1)^{\theta_k} \quad (2-9)$$

en donde θ_k es el k-ésimo dígito binario de θ .

θ representa el tiempo normalizado: $\theta = t/T$

Puesto que θ varía entre 0 y 1, la representación binaria de θ tendrá la forma:

$$\theta = (0.\theta_1\theta_2 \dots \theta_k)_2$$

Así por ejemplo:

$$0.5_{\text{dec}} = 0.1_{\text{bin}}$$

$$0.25_{\text{dec}} = 0.01_{\text{bin}}$$

Al variar θ de 0 a 1, θ_k toma alternativamente los valores cero y 1, y $R_k(\theta)$ alterna entre +1 y -1. Al aumentar el valor de k, θ_k alterna con mayor rapidez, y se hace más corto el período de la onda cuadrada.[16]

Para esclarecer esta definición vamos a obtener algunas funciones de Rademacher.

Escribimos en primer lugar la representación binaria de θ para algunos valores entre 0 y 1. Tabla 2-1.

Aplicando (2-9)

$$R_0(\theta) = (-1)^{\theta_0}$$

puesto que θ_0 (primer dígito entero) = 0

$$R_0(\theta) = (-1)^0 = 1$$

La representación gráfica de $R_0(\theta)$ se da en la fig. 2-1.

| θ_{dec} | θ_{bin} | | | | |
|----------------|----------------|------------|------------|------------|------------|
| | θ_0 | θ_1 | θ_2 | θ_3 | θ_4 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1/16 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1/8 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 3/16 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1/4 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 5/16 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 3/8 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 7/16 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1/2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 9/16 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 5/8 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 11/16 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 3/4 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 13/16 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 7/8 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 15/16 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Tabla 2-1. Representación binaria de θ para algunos valores entre 0 y 1

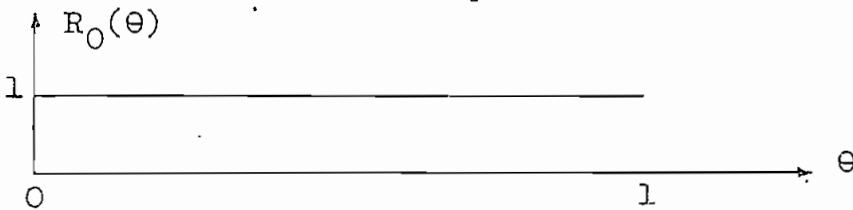


Fig. 2-1. Representación gráfica de $R_0(\theta)$

$$R_1(\theta) = (-1)^{\theta_1}$$

De la tabla 2-1 vemos que

$$\theta_1 = 0 \quad \text{para } 0 \leq \theta < 1/2$$

$$\theta_1 = 1 \quad \text{para } 1/2 \leq \theta < 1$$

de donde

$$R_1(\theta) = 1 \quad \text{para } 0 \leq \theta < 1/2$$

$$R_1(\theta) = -1 \quad \text{para } 1/2 \leq \theta < 1$$

La representación gráfica se da en la fig. 2-2.

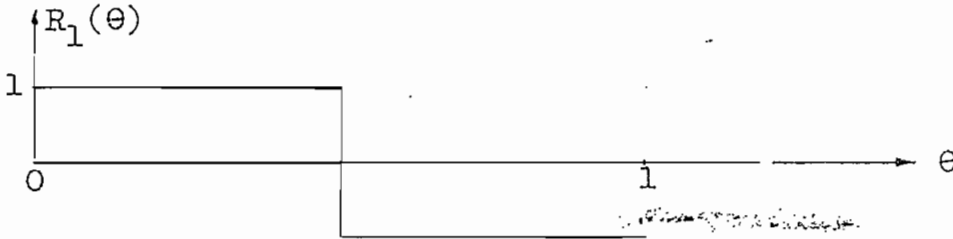


Fig. 2-2. Representación gráfica de $R_1(\theta)$

Para $R_2(\theta)$ tendremos

$$R_2(\theta) = (-1)^0 = 1 \quad \text{para } 0 \leq \theta < 1/4$$

$$R_2(\theta) = (-1)^1 = -1 \quad \text{para } 1/4 \leq \theta < 1/2$$

$$R_2(\theta) = (-1)^0 = 1 \quad \text{para } 1/2 \leq \theta < 3/4$$

$$R_2(\theta) = (-1)^1 = -1 \quad \text{para } 3/4 \leq \theta < 1$$

La representación gráfica se da en la fig. 2-3.

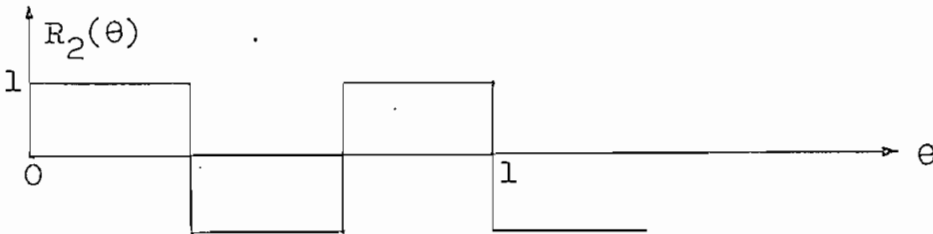


Fig. 2-3. Representación gráfica de $R_2(\theta)$

En la misma forma se pueden obtener las restantes funciones de Rademacher

A partir de las funciones de Rademacher podemos definir las funciones de Walsh como

$$\text{Pal}(i, \theta) = \prod_{k=1}^m b_k R_k(\theta) \quad (2-10) \quad [17]$$

en donde $\text{Pal}(i, \theta)$ significa la función de Walsh de orden i de acuerdo a la ordenación de Paley [18].

$i = b_m b_{m-1} \dots b_1$, ($b_k = 0, 1$) es la representación binaria de i , en donde por conveniencia el primer dígito - de la derecha lo designamos con b_1 en vez de b_0

De (2-10) se concluye que si $b_k = 1$ entonces $R_k(\theta)$ es un factor de $\text{Pal}(i, \theta)$. De donde si i contiene r unos, entonces $\text{Pal}(i, \theta)$ es el producto de r funciones de Rademacher.

Para clarificar esta definición vamos a obtener algunas funciones de Walsh.

Para $\text{Pal}(0, \theta)$ asumimos

$$\text{Pal}(0, \theta) = R_0(\theta)$$

La representación gráfica de $\text{Pal}(0, \theta)$ es idéntica a la de la fig. 2-1:

$$\text{Pal}(1, \theta)$$

$$l_{\text{dec}} = l_{\text{bin}}$$

de donde

$$b_1 = 1$$

luego

$$\text{Pal}(1, \theta) = R_1(\theta)$$

La representación gráfica de $\text{Pal}(1, \theta)$ es idéntica a la de la fig. 2-2.

Igualmente

$$\text{Pal}(2,\theta) = R_2(\theta)$$

La representación gráfica de $\text{Pal}(2,\theta)$ es idéntica a la de la fig. 2-3.

$$\text{Pal}(3,\theta)$$

$$3_{\text{dec}} = 11_{\text{bin}}$$

O sea

$$b_2 = b_1 = 1$$

Luego

$$\text{Pal}(3,\theta) = R_1(\theta)R_2(\theta)$$

Para realizar la multiplicación de las funciones de Rademacher procedemos como sigue:

Representamos los valores de las funciones por un signo + cuando la función vale 1, y por un signo - cuando vale -1, luego realizamos el producto de estos signos verticalmente de acuerdo a las reglas conocidas del algebra; los signos de la fila inferior resultante nos dan los valores de $\text{Pal}(i,\theta)$ [17].

Para $\text{Pal}(3,\theta)$ tenemos

| | | | | | | | |
|------------------------|---|---|-----|---|---|---|---|
| | 0 | | 1/2 | | 1 | | |
| $R_1(\theta)$ | + | + | + | + | - | - | - |
| $R_2(\theta)$ | + | + | - | - | + | + | - |
| $\text{Pal}(3,\theta)$ | + | + | - | - | - | - | + |

La representación gráfica de $\text{Pal}(3,\theta)$ se da en la fig. 2-4

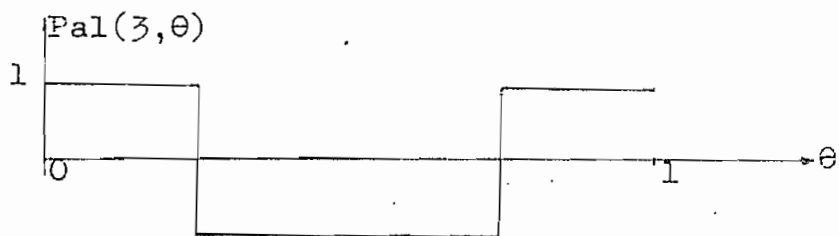


Fig. 2-4. Representación gráfica de $\text{Pal}(3, \theta)$

Igualmente

$$\text{Pal}(4, \theta) = R_3(\theta)$$

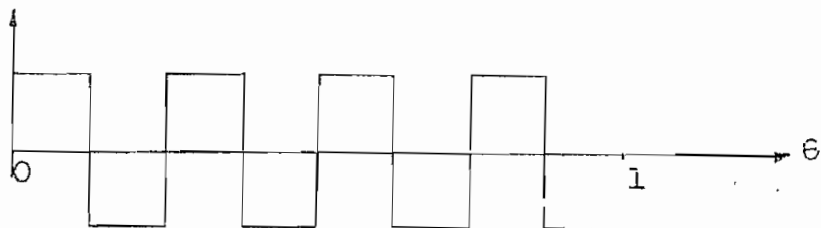


Fig. 2-5. Representación gráfica de $\text{Pal}(4, \theta)$

$$\text{Pal}(5, \theta) = R_1(\theta)R_3(\theta)$$

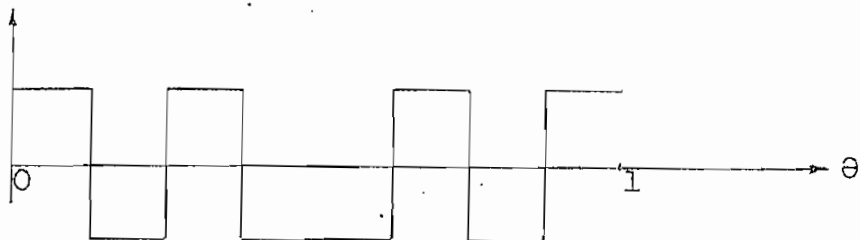


Fig. 2-6. Representación gráfica de $\text{Pal}(5, \theta)$

$$\text{Pal}(6, \theta) = R_2(\theta)R_3(\theta)$$

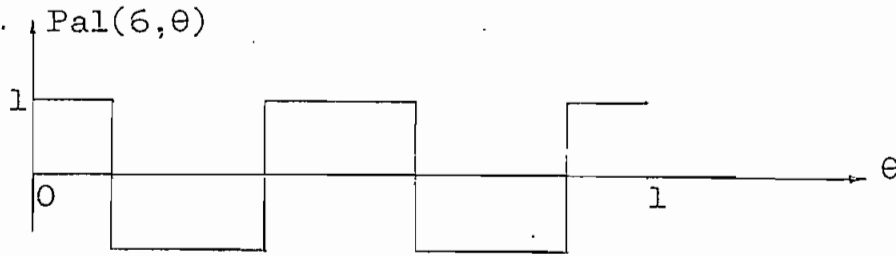


Fig. 2-7. Representación gráfica de $\text{Pal}(6, \theta)$

$$\text{Pal}(7, \theta) = R_1(\theta)R_2(\theta)R_3(\theta)$$

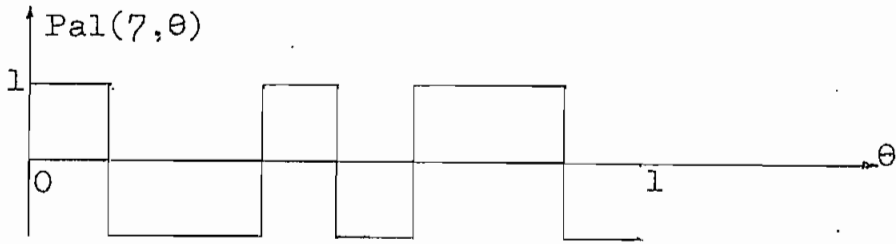


Fig. 2-8. Representación gráfica de $\text{Pal}(7, \theta)$

Se puede comprobar que se obtiene las funciones de Walsh en el mismo orden a partir de la fórmula:

$$\text{Pal}(i, \theta) = \prod_{k=1}^m (-1)^{b_k \theta_k} \quad (2-11)$$

en donde

$\theta = 0. \theta_1 \theta_2 \dots \theta_k$ representación binaria de θ (entre 0 y 1)

$i = (b_m b_{m-1} \dots b_1)$ representación binaria de i [16].

Es igualmente de la fórmula

$$\text{Pal}(i, \theta) = (-1)^{\zeta} \quad (2-12)$$

en donde

$$\zeta = \sum_{j+k=-1} i_j \theta_k \quad (2-13)$$

siendo

$$i = \sum_{j=0}^m i_j 2^j = i_0 2^0 + \dots + i_m 2^m \quad (2-14)$$

$$\theta = \sum_{k=-1}^l \theta_k 2^k = \theta_{-1} 2^{-1} + \dots + \theta_{-l} 2^{-l} \quad (2-15)$$

$$\theta_k = i_k = 0,1 \quad [19].$$

El orden de las funciones de Walsh que acabamos de exponer fue establecido por Paley [18] y se conoce también con el nombre de orden diádico.

El orden establecido por Walsh se conoce con el nombre de orden secuencial, y organiza las funciones de acuerdo al número de cambios de signo de la función en el intervalo 0,1.

Así $Wal(0,\theta)$ no tiene ningún cambio de signo y coincide con $R_0(\theta)$ y $Pal(0,\theta)$. Fig. 2-1.

$Wal(1,\theta)$ tiene un cambio de signo y coincide con $R_1(\theta)$ y $Pal(1,\theta)$. Fig. 2-2.

Se puede obtener las funciones de Walsh en orden secuencial en base a productos de funciones de Rademacher con el siguiente método.

Para formar la función de Walsh $Wal(i,\theta)$ primero obtenemos la representación binaria de i , luego formamos la versión en código Gray de i , finalmente multiplicamos las funciones de Rademacher correspondientes a los bits iguales a 1 de la expresión en código Gray de i .

Si la representación en código Gray de i es de la forma:

$$i = \varepsilon_m \varepsilon_{m-1} \dots \dots \dots \varepsilon_1.$$

entonces

$$Wal(i,\theta) = \prod_{k=1}^m \varepsilon_k R_k(\theta) \quad (2-16)$$

en donde i = número de cambios de signo de la función en -

el intervalo 0,1.

Para la obtención de los números en código Gray, correspondientes a un número binario cualquiera, se procede - como sigue:

Si

$$i = b_m b_{m-1} \dots b_1 \quad (\text{representación binaria de } i)$$

entonces i en código Gray será de la forma

$$i = g_m g_{m-1} \dots g_1$$

en donde

$$g_i = b_i \oplus b_{i+1} \quad (2.17)$$

\oplus indica la función booleana "O" exclusivo (o también adición módulo 2). Siendo $b_{m+1} = 0$ [17].

O sea para obtener i_{gray} anteponeamos un cero a i_{bin} y realizamos la suma módulo 2 de cada par de dígitos consecutivos.

Ejemplos

| i_{dec} | i_{bin} | i_{gray} |
|-----------|-----------|------------|
| 7 | 0 1 1 1 | 1 0 0 |
| 11 | 0 1 0 1 1 | 1 1 1 0 |
| 8 | 0 1 0 0 0 | 1 1 0 0 |

Así pues, para obtener las funciones de Walsh en orden secuencial, obtenemos en primer lugar los números Gray correspondientes a los binarios.

| i_{dec} | i_{bin} | i_{gray} |
|-----------|-----------|------------|
| 0 | 0 0 0 | 0 0 0 |
| 1 | 0 0 1 | 0 0 1 |

Tabla 2-2.

| i_{dec} | i_{bin} | i_{gray} |
|-----------|-----------|------------|
| 2 | 0 1 0 | 0 1 1 |
| 3 | 0 1 1 | 0 1 0 |
| 4 | 1 0 0 | 1 1 0 |
| 5 | 1 0 1 | 1 1 1 |
| 6 | 1 1 0 | 1 0 1 |
| 7 | 1 1 1 | 1 0 0 |

Tabla 2-2. Números decimales, binarios y Gray de 0 a 7.

Además de las equivalencias ya vistas se tendrá entonces:

$Wal(2, \theta) = R_1(\theta)R_2(\theta) = Pal(3, \theta)$. La representación gráfica de $Wal(2, \theta)$ será la misma de la fig. 2-4

$Wal(3, \theta) = R_2(\theta) = Pal(2, \theta)$. La representación gráfica se rá la misma de la fig. 2-3 .

$Wal(4, \theta) = R_2(\theta)R_3(\theta) = Pal(6, \theta)$. La representación gráfi ca de $Wal(4, \theta)$ será la misma de la fig. 2-7 .

$Wal(5, \theta) = R_1(\theta)R_2(\theta)R_3(\theta) = Pal(7, \theta)$. La representación gráfica de $Wal(5, \theta)$ será la misma de la fig. 2-8.

$Wal(6, \theta) = R_1(\theta)R_3(\theta) = Pal(5, \theta)$. La representación grá - fica de $Wal(6, \theta)$ será la misma de la fig. 2-6.

$Wal(7, \theta) = R_3(\theta) = Pal(4, \theta)$. El gráfico de $Wal(7, \theta)$ será el mismo de la fig. 2-5.

Si observamos en los gráficos respectivos el número de cambios de signo (cruces con el eje θ) de las funciones anteriormente descritas, veremos que este número coincide con la i de $Wal(i, \theta)$, o sea hemos obtenido las funciones -

de Walsh en orden secuencial.

Igualmente es posible obtener las funciones de Walsh en orden secuencial a partir de la fórmula:

$$\text{Wal}(i, \theta) = (-1)^{\sum_{j,k=-1}^m i_j (\theta_k \oplus \theta_{k+1})} \quad (2-18)$$

en donde

$$i = i_m 2^m + \dots + i_0 2^0$$
$$\theta = \theta_{-1} 2^{-1} + \dots + \theta_{-l} 2^{-l} \quad [19]$$

De lo anteriormente dicho podemos extraer reglas para establecer la equivalencia entre funciones diádicas y -secuenciales.

Para obtener el orden de una función diádica equivalente a una secuencial de orden i , se escribe i en código Gray, y se lee como un número binario; el número así obtenido nos da el orden buscado de la función diádica.

Si queremos saber, por ejemplo, a qué función diádica corresponde la función $\text{Wal}(5, \theta)$

escribimos 5 en código Gray

$$5_{\text{dec}} = 111_{\text{gray}}$$

leemos este número como si fuera número binario

$$111_{\text{bin}} = 7_{\text{dec}}$$

entonces

$$\text{Wal}(5, \theta) = \text{Pal}(7, \theta)$$

Para obtener el orden de una función secuencial equivalente a una diádica de orden i , se escribe i en código -

binario , y se lee en código Gray ; el número así obtenido nos da el orden buscado de la función secuencial.

Si queremos saber a que función secuencial corresponde de $Pal(6,\theta)$

escribimos 6 en código binario

$$6_{dec} = 110_{bin}$$

leemos este número en código Gray

$$110_{gray} = 4_{dec}$$

entonces

$$Pal(6,\theta) = Wal(4,\theta)$$

En base a esto podemos construir la siguiente tabla de equivalencias para las 16 primeras funciones de Walsh.

| i_{sec} | i_{diad} |
|-----------|------------|
| 0 | 0 |
| 1 | 1 |
| 2 | 3 |
| 3 | 2 |
| 4 | 6 |
| 5 | 7 |
| 6 | 5 |
| 7 | 4 |
| 8 | 12 |
| 9 | 13 |
| 10 | 15 |
| 11 | 14 |
| 12 | 10 |
| 13 | 11 |
| 14 | 9 |
| 15 | 8 |

Tabla 2-3. Equivalencias entre funciones $Wal(i,\theta)$ y $Pal(i,\theta)$

2.3 Funciones de Walsh pares e impares

Si desplazamos el origen del eje θ hacia la derecha en una distancia igual a $1/2$, se podrá observar que algunas funciones tienen simetría par y otras simetría impar. Así por ejemplo $Wal(10,\theta)$, fig. 2-9, tiene simetría par. En cambio $Wal(9,\theta)$, fig. 2-10, tiene simetría impar.

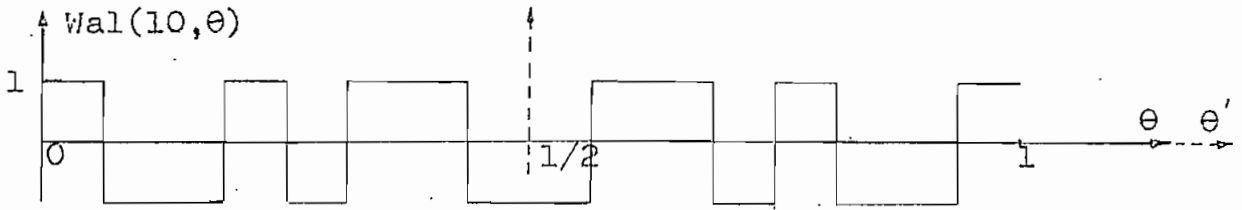


Fig. 2-9. Representación gráfica de $Wal(10,\theta)$

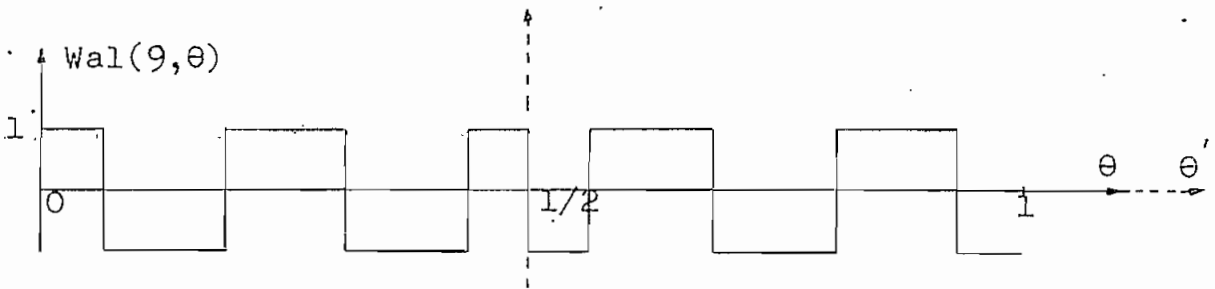


Fig. 2-10. Representación gráfica de $Wal(9,\theta)$

O sea que las funciones de Walsh pueden catalogarse en dos grandes grupos: funciones de Walsh pares y funciones de Walsh impares.

Por su similitud con las funciones seno y coseno se ha convenido en llamar funciones $Cal(i,\theta)$ a las funciones pares y funciones $Sal(i,\theta)$ a las impares. Para que esta asimilación sea más completa se ha buscado un parámetro que corresponda al parámetro frecuencia de las funciones seno

y coseno. Puesto que para un intervalo dado T el parámetro f de $\text{sen } 2\pi ft$ es igual a la mitad de cruces con el eje t por unidad de tiempo, se ha elegido como parámetro de las funciones de Walsh la mitad del número de cruces con el eje θ en el intervalo $0,1$. Este parámetro se designa con el nombre de secuencia. Se tiene pues

$$\text{Secuencia } i = 1/2 \text{ (cruces con el eje } \theta \text{ por unidad de tiempo)} \quad (2-19) \quad [20].$$

Para contar el número de cruces tomaremos en cuenta solamente el intervalo $0 < \theta \leq 1/2$ que está a la izquierda del eje desplazado. (Debe tenerse en cuenta que en las funciones de Walsh, a diferencia de las funciones seno y coseno, los cruces no son equidistantes).

Así por ejemplo la función $\text{Wal}(10, \theta)$, fig. 2-9, es equivalente a $\text{Cal}(5, \theta)$ puesto que tiene simetría par y 5 cruces en el intervalo $0 < \theta \leq 1/2$.

La función $\text{Wal}(9, \theta)$, fig. 2-10, es igual a $\text{Sal}(5, \theta)$ puesto que tiene simetría impar y 5 cruces en el intervalo $0 < \theta \leq 1/2$.

Por este camino se ha llegado a establecer la siguiente correspondencia entre las funciones $\text{Wal}(i, \theta)$ y las funciones $\text{Cal}(i, \theta)$ y $\text{Sal}(i, \theta)$

$$\begin{aligned} \text{Wal}(2i, \theta) &= \text{Cal}(i, \theta) \\ \text{Wal}(2i-1, \theta) &= \text{Sal}(i, \theta) \end{aligned} \quad (2-20) \quad [17].$$

Se verá posteriormente que la secuencia de las funciones de Walsh se relaciona con la composición de los puntos del espectro de potencia de la transformada de Hadamard.

2.4 Matrices de Hadamard

Como se dijo anteriormente, una matriz de Hadamard es una matriz cuyos elementos son +1 y -1 y cuyos vectores columnas (o filas) son mutuamente ortogonales. Se dan a continuación ejemplos de matrices de Hadamard.

$$[H(1)] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$[H(2)] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[H(3)] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$[H(3)]' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Se desprende de la definición de estas matrices que es posible:

- 1) intercambiar las filas,
- 2) intercambiar las columnas,
- 3) cambiar los signos de todos los elementos de una fila,
- 4) cambiar los signos de todos los elementos de una columna,

sin que se pierda la ortogonalidad de los vectores componentes. Usando estas operaciones es posible establecer una forma normal para las matrices de Hadamard en la que la primera fila y la primera columna contengan sólo +1. Si es que dos matrices pueden ser transformadas la una en la otra por una serie de operaciones como las indicadas arriba, se denominan equivalentes. Por ejemplo las matrices $[H(3)]$ y $[H(3)]'$ son equivalentes. Este ejemplo demuestra que la forma normal no es única para un caso de equivalencia.

La existencia de matrices de Hadamard de todas las dimensiones es un problema no resuelto en matemáticas. mientras se han dado métodos para la construcción de un nú

mero indefinido de matrices, existe todavía un número ilimitado de casos sin solución.

El proceso más simple de construcción se tiene para matrices cuyo orden es $N = 2^n$. Siendo n un entero. En este caso si $[H(n)]$ es una matriz de Hadamard de orden N , la matriz

$$[H(n+1)] = \begin{bmatrix} [H(n)] & [H(n)] \\ [H(n)] & -[H(n)] \end{bmatrix} \quad (2-21)$$

es una matriz de orden $2N$.

La matriz de Hadamard tal como se la obtiene a partir de (2-21) es una matriz simétrica y N -ortogonal. Denominaremos a esta forma de la matriz de Hadamard: forma canónica. Es la que utilizaremos en forma casi exclusiva a lo largo de nuestro estudio. [6] pp. 53-55.

También puede obtenerse la matriz de Hadamard en su forma canónica para cualquier orden $N = 2^n$ por repetidos productos de Kronecker del núcleo básico

$$[H(1)] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Si aplicamos a estas matrices la desigualdad de Hadamard

$$|H|^2 \leq \prod_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^N h_{ij}^2 \right) \quad (2-22) \quad [4] \text{ pp.141-142}$$

tendremos el siguiente resultado

$$\det[H][H]^T = \det[H][H] = \det[H]^2 = |H|^2$$

Pero al realizar el producto $[H][H]^T = [H][H]$ obtenemos una matriz diagonal cuyo determinante $= |H|^2$ es igual al miembro derecho de la desigualdad (2-22) desarrollado.

Se tiene pues

$$\begin{aligned}
 |H|^2 &= (h_{11}^2 + h_{12}^2 + \dots + h_{1n}^2) (h_{21}^2 + h_{22}^2 + \dots + h_{2n}^2) \\
 &\quad \dots \dots \dots (h_{n1}^2 + h_{n2}^2 + \dots + h_{nn}^2) \\
 &= \prod_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^N h_{ij}^2 \right) = N^N \quad (2-23)
 \end{aligned}$$

O sea que para la matriz de Hadamard la desigualdad del mismo nombre se transforma en igualdad, ya que el miembro de la izquierda alcanza su valor máximo.

Para $N = 4$ se tendrá:

$$|H(2)|^2 = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = 4^4 = 256$$

2.5 Matrices de Hadamard y funciones de Walsh

Una vez que hemos delimitado el concepto de las funciones de Walsh y el de las matrices de Hadamard, tratemos de poner en evidencia la relación existente entre las mismas.

Hemos dicho que cada vector de la matriz de Hadamard puede considerarse formado por una función distinta de Walsh en el intervalo 0,1. Una matriz de Hadamard de orden N estará constituida por N funciones de Walsh.

Examinemos la disposición de estas funciones en una matriz canónica de Hadamard de orden N. Para este estudio utilizaremos únicamente las funciones: Wal, Cal y Sal.

Veamos algunos ejemplos:

En la representación de las matrices utilizaremos los signos de cada elemento. Así pues, pondremos + donde tengamos +1 y - donde tengamos -1.

Sea la matriz $[H(2)]$

$$[H(2)] = \begin{bmatrix} + & + & + & + \\ + & - & + & - \\ + & + & - & - \\ + & - & - & + \end{bmatrix}$$

Contando el número de cambios de signo y utilizando las ecuaciones (2-20) concluimos que las filas de $[H(2)]$ tienen la siguiente correspondencia:

primera fila = Wal(0, θ) = Cal(0, θ)

segunda fila = Wal(3, θ) = Sal(2, θ)

tercera fila = Wal(1, θ) = Sal(1, θ)

cuarta fila = Wal(2, θ) = Cal(1, θ)

En esta forma se puede obtener las siguientes tablas que disponemos a la derecha de la matriz correspondiente.

$$[H(2)] = \begin{bmatrix} + & + & + & + \\ + & - & + & - \\ + & + & - & - \\ + & - & - & + \end{bmatrix}$$

$$\text{Wal}(0, \theta) = \text{Cal}(0, \theta)$$

$$\text{Wal}(3, \theta) = \text{Sal}(2, \theta)$$

$$\text{Wal}(1, \theta) = \text{Sal}(1, \theta)$$

$$\text{Wal}(2, \theta) = \text{Cal}(1, \theta)$$

Tabla 2-4. Funciones de Walsh para $[H(2)]$

En $[H(2)]$ y $[H(3)]$ los escalones indican el desplazamiento temporal necesario para obtener una función Sal a partir de una función Cal de la misma secuencia y viceversa.

| | | |
|------------|--|---|
| $[H(3)] =$ | $\begin{bmatrix} + & + & + & + & + & + & + \\ + & - & + & - & + & - & + \\ + & + & - & - & + & + & - \\ + & - & - & + & + & - & - \\ + & + & + & + & - & - & - \\ + & - & + & - & - & + & - \\ + & + & - & - & - & - & + \\ + & - & - & + & - & + & - \end{bmatrix}$ | <p>Wal(0,θ) = Cal(0,θ)</p> <p>Wal(7,θ) = Sal(4,θ)</p> <p>Wal(3,θ) = Sal(2,θ)</p> <p>Wal(4,θ) = Cal(2,θ)</p> <p>Wal(1,θ) = Sal(1,θ)</p> <p>Wal(6,θ) = Cal(3,θ)</p> <p>Wal(2,θ) = Cal(1,θ)</p> <p>Wal(5,θ) = Sal(3,θ)</p> |
| | | <p>Tabla 2-5. Funciones de Walsh para $[H(3)]$</p> |

De la matriz $[H(4)]$ que omitimos por razones de espacio se obtiene la siguiente tabla:

| | |
|----------------------|----------------------|
| Wal(0,θ) = Cal(0,θ) | Wal(1,θ) = Sal(1,θ) |
| Wal(15,θ) = Sal(8,θ) | Wal(14,θ) = Cal(7,θ) |
| Wal(7,θ) = Sal(4,θ) | Wal(6,θ) = Cal(3,θ) |
| Wal(8,θ) = Cal(4,θ) | Wal(9,θ) = Sal(5,θ) |
| Wal(3,θ) = Sal(2,θ) | Wal(2,θ) = Cal(1,θ) |
| Wal(12,θ) = Cal(6,θ) | Wal(13,θ) = Sal(7,θ) |
| Wal(4,θ) = Cal(2,θ) | Wal(5,θ) = Sal(3,θ) |
| Wal(11,θ) = Sal(6,θ) | Wal(10,θ) = Cal(5,θ) |

Tabla 2-6. Funciones de Walsh para $[H(4)]$

Relacionando las tablas de funciones de Walsh con las correspondientes matrices se pueden formular las siguientes conclusiones:

- La primera fila de $[H(n)]$ corresponde siempre a $Cal(0,θ)$
- La segunda fila de $[H(n)]$ corresponde a $Sal(N/2,θ)$
- Las dos filas siguientes corresponden a $Sal(N/4,θ)$ y $Cal(N/4,θ)$
- Las cuatro filas a continuación corresponden a dos pa -

res de funciones Sal y Cal de secuencias $N/8$ y $3N/8$.

Esta forma de agrupamiento en bloques de una fundamental - y de sus armónicas impares continúa hasta llegar a la mitad inferior de $[H(n)]$, cuyas filas corresponden a $N/4$ pares de funciones Sal y Cal de secuencias 1, 3,, $(N/2 - 1)$.

Una observación detenida de las matrices $[H(n)]$ y de las correspondientes funciones Sal y Cal nos permite obtener reglas muy sencillas para determinar el desplazamiento temporal necesario para obtener una función Sal a partir - de una Cal de la misma secuencia y viceversa. Se puede comprobar fácilmente que si a las funciones ubicadas en la mitad superior de cada grupo de secuencias se las desplaza - cíclicamente hacia la izquierda en un intervalo igual al - indicado por los trazos en forma de escalón, se obtiene una función Sal a partir de una Cal o viceversa. A partir de esta comprobación podemos establecer las siguientes fórmulas de desplazamiento:

$$\text{Cal}(i, \theta) = \text{Sal}(i, \theta \pm \theta_0)$$

$$\theta_0 = 1/4 \text{ para } i = \text{número impar} \quad (2-24)$$

$$\theta_0 = 1/8 \text{ para } i = 2 \text{ o múltiplo impar de } 2$$

$$\theta_0 = 1/16 \text{ para } i = 4 \text{ o múltiplo impar de } 4$$

etc.

La determinación del símbolo de θ_0 se hace en base a la ubicación del par de funciones en cuestión dentro de la ma-

triz de Hadamard correspondiente.

Puesto que en base a las reglas que se darán posteriormente es posible determinar la distribución de las funciones de Walsh dentro de una matriz de cualquier orden - sin necesidad de construir la misma, la regla anterior no presenta mayores dificultades.

Poderos asignar al orden en que se disponen las funciones de Walsh en una matriz de Hadamard un nombre específico, y establecer la relación existente entre este orden y el orden secuencial.

Denominemos orden ortogonal $Ort_n(i, \theta)$ ($n = \log_2 N$) - al orden de las funciones de Walsh en una matriz de Hadamard de orden N.

Para las matrices $[H(2)]$ y $[H(3)]$ el orden de las funciones de Walsh ortogonales será el indicado a la derecha de las matrices

$$[H(2)] = \begin{bmatrix} + & + & + & + \\ + & - & + & - \\ + & + & - & - \\ + & - & - & + \end{bmatrix} \begin{array}{l} Ort_2(0, \theta) \\ Ort_2(1, \theta) \\ Ort_2(2, \theta) \\ Ort_2(3, \theta) \end{array}$$

$$[H(3)] = \begin{bmatrix} + & + & + & + & + & + & + & + \\ + & - & + & - & + & - & + & - \\ + & + & - & - & + & + & - & - \\ + & - & - & + & + & - & - & + \\ + & + & + & + & - & - & - & - \\ + & - & + & - & - & + & - & + \\ + & + & - & - & - & - & + & + \\ + & - & - & + & - & + & + & - \end{bmatrix} \begin{array}{l} Ort_3(0, \theta) \\ Ort_3(1, \theta) \\ Ort_3(2, \theta) \\ Ort_3(3, \theta) \\ Ort_3(4, \theta) \\ Ort_3(5, \theta) \\ Ort_3(6, \theta) \\ Ort_3(7, \theta) \end{array}$$

Un examen detenido de las funciones ortogonales y de las equivalentes secuenciales, para diferentes valores de n , nos permite formular la siguiente regla para obtener las funciones $Wal(i, \theta)$ equivalentes a las funciones $Ort_n(i, \theta)$.

Se parte de la función $[H(1)]$ que está ordenada secuencialmente, o sea está formada por las funciones $Wal(0, \theta)$ y $Wal(1, \theta)$.

$$[H(1)] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} Ort_1(0, \theta) = Wal(0, \theta) \\ Ort_1(1, \theta) = Wal(1, \theta) \end{array}$$

Tomando como base esta ordenación fundamental y aplicando en forma recursiva el procedimiento que se indica a continuación, se puede obtener la ubicación de las funciones de Walsh en cualquier matriz canónica de Hadamard de orden N .

Como se indica en la tabla 2-7, si se conoce la disposición de las funciones de Walsh en una matriz $[H(n)]$, es posible determinar la distribución de las mismas en una matriz $[H(n+1)]$. Para esto se escriben encolumnados a doble espacio los valores de secuencia de las funciones de Walsh en la matriz $[H(n)]$, los 2^n lugares restantes se llenan de tal manera que la suma de 2 números consecutivos, a partir del primero, sea igual a $2^{n+1} - 1$, como se indica en la columna de la extrema derecha. La columna de números así obtenida nos da la distribución de las funciones de Walsh en la matriz $[H(n+1)]$.

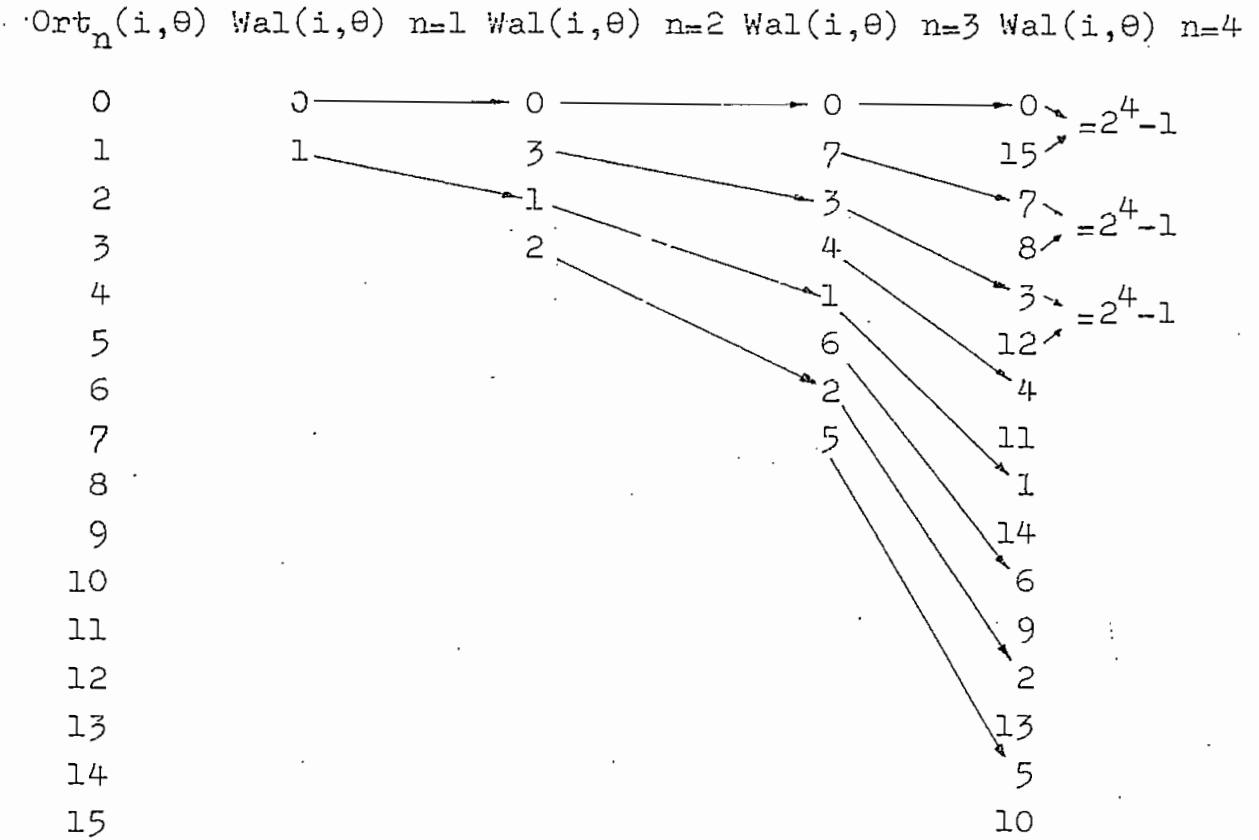


Tabla 2-7. Equivalencias entre las funciones $\text{Ort}_n(i, \theta)$ y $\text{Wal}(i, \theta)$

2.6 Definición de la transformada de Hadamard

La transformada de Hadamard o BIFORE de una secuencia N -periódica $\{X(n)\} = X(0) X(1) \dots X(N-1)$ se define como

$$[B(n)] = 1/N [H(n)][X(n)] \quad (2-25)$$

en donde

$[X(n)]^T = X(0) X(1) \dots X(N-1)$ es la representación vectorial de la secuencia $\{X(n)\}$

$[B(n)]^T = B(0) B(1) \dots B(N-1)$ es el vector transfor-

mado . Los elementos $B(k)$, $k = 0, 1, \dots, N-1$, se denominan coeficientes de la transformada de Hadamard.

Dadas las características de simetría y ortogonalidad de la matriz de Hadamard, la señal puede recuperarse en forma única aplicando una vez más la matriz $[H(n)]$ a la transformada directa. O sea la transformada inversa se define como

$$[X(n)] = [H(n)][B(n)] \quad (2-26)$$

2.7 La transformada rápida de Hadamard

La computación de la transformada de Hadamard por métodos ordinarios requiere N^2 operaciones, siendo cada operación una adición o una substracción. La aplicación del algoritmo rápido, de que se ha hablado anteriormente, permite obtener la transformada de Hadamard con $N \log_2 N$ operaciones, exceptuado el factor $1/N$. Este algoritmo se conoce con el nombre de transformada rápida de Hadamard. La reducción en el trabajo de la computadora se obtiene gracias al almacenaje de los resultados intermedios.

Fuesto que la computación de la transformada de Hadamard exige solamente adiciones y substracciones reales, mientras que la computación de la transformada de Fourier y de las restantes transformadas incluye adiciones, substracciones y multiplicaciones complejas, la transformada de Hadamard resulta la más aventajada desde el punto de vista de su computación. Se han programado transformadas

de Fourier y de Hadamard para un computador digital TRW - 530. Para una escena de 256x256 puntos la transformada de Fourier puede computarse en 20 minutos y la transformada de Hadamard en 3 minutos [21].

Hemos visto en el primer capítulo como se obtenía el algoritmo rápido utilizando factorización de matrices. En este punto queremos llegar al mismo resultado utilizando un método ligeramente diferente.

Consideremos el caso de una transformada para $n = 8$. De la definición de la transformada tendremos

$$\begin{bmatrix} B(0) \\ B(1) \\ B(2) \\ B(3) \\ B(4) \\ B(5) \\ B(6) \\ B(7) \end{bmatrix} = 1/8 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \\ X(4) \\ X(5) \\ X(6) \\ X(7) \end{bmatrix}$$

Utilizando partición de matrices para las submatrices indicadas con líneas de segmentos

$$\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = 1/8 \begin{bmatrix} A & A \\ A & -A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = 1/8 \begin{bmatrix} AX_1 & AX_2 \\ AX_1 & -AX_2 \end{bmatrix}$$

de donde

$$B_1 = 1/8 A(X_1 + X_2)$$

$$B_2 = 1/8 A(X_1 - X_2)$$

Escribiendo en forma desarrollada las dos últimas ecuaciones matriciales

$$\begin{bmatrix} B(0) \\ B(1) \\ B(2) \\ B(3) \end{bmatrix} = 1/8 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(0) + X(4) \\ X(1) + X(5) \\ X(2) + X(6) \\ X(3) + X(7) \end{bmatrix}$$

$$= 1/8 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(0) \\ X_1(1) \\ X_1(2) \\ X_1(3) \end{bmatrix}$$

(2-27)

$$\begin{bmatrix} B(4) \\ B(5) \\ B(6) \\ B(7) \end{bmatrix} = 1/8 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(0) - X(4) \\ X(1) - X(5) \\ X(2) - X(6) \\ X(3) - X(7) \end{bmatrix}$$

$$= 1/8 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(4) \\ X_1(5) \\ X_1(6) \\ X_1(7) \end{bmatrix}$$

Con esto se ha completado la iteración 1 del diagrama de flujo de la fig. 2-11

Repitiendo el proceso anteriormente indicado se tiene

$$\begin{bmatrix} B(0) \\ B(1) \end{bmatrix} = 1/8 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(0) + X_1(2) \\ X_1(1) + X_1(3) \end{bmatrix} = 1/8 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_2(0) \\ X_2(1) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} B(2) \\ B(3) \end{bmatrix} = 1/8 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(0) - X_1(2) \\ X_1(1) - X_1(3) \end{bmatrix} = 1/8 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_2(2) \\ X_2(3) \end{bmatrix} \quad (2-28)$$

$$\begin{bmatrix} B(4) \\ B(5) \end{bmatrix} = 1/8 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(4) + X_1(6) \\ X_1(5) + X_1(7) \end{bmatrix} = 1/8 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_2(4) \\ X_2(5) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} B(6) \\ B(7) \end{bmatrix} = 1/8 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(4) - X_1(6) \\ X_1(5) - X_1(7) \end{bmatrix} = 1/8 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_2(6) \\ X_2(7) \end{bmatrix} \quad (2-28)$$

Iteración 2

y finalmente

$$\begin{aligned} B(0) &= 1/8 [X_2(0) + X_2(1)] = 1/8 X_3(0) \\ B(1) &= 1/8 [X_2(0) - X_2(1)] = 1/8 X_3(1) \\ B(2) &= 1/8 [X_2(2) + X_2(3)] = 1/8 X_3(2) \\ B(3) &= 1/8 [X_2(2) - X_2(3)] = 1/8 X_3(3) \\ B(4) &= 1/8 [X_2(4) + X_2(5)] = 1/8 X_3(4) \\ B(5) &= 1/8 [X_2(4) - X_2(5)] = 1/8 X_3(5) \\ B(6) &= 1/8 [X_2(6) + X_2(7)] = 1/8 X_3(6) \\ B(7) &= 1/8 [X_2(6) - X_2(7)] = 1/8 X_3(7) \end{aligned} \quad (2-29)$$

Tercera iteración

[22]

El diagrama de flujo para el algoritmo indicado se muestra en la fig. 2-11.

En la misma forma se puede obtener la transformada de Hadamard para valores de n superiores a 3. La estructura del diagrama de flujo será similar a la indicada en la fig. 2-11.

A propósito del algoritmo estudiado se pueden hacer las siguientes observaciones.

1) El número total de iteraciones está dado por $n = \log_2 N$.

O sea si r representa el índice de iteración, entonces $r = 1, 2, \dots, n$.

2) La r -ésima iteración contiene 2^{r-1} grupos con $N/2^{r-1}$

miembros en cada grupo . La mitad de los miembros de cada grupo se asocia con una operación de adición y la mitad restante con una operación de sustracción.

- 3) El número total de operaciones aritméticas para computar todos los coeficientes de la transformada es aproximadamente igual a $N \log_2 N$. En el caso indicado se ve que es de $8 \times 3 = 24$.
- 4) El mismo algoritmo puede usarse para computar la transformada inversa omitiendo únicamente el factor $1/N$.

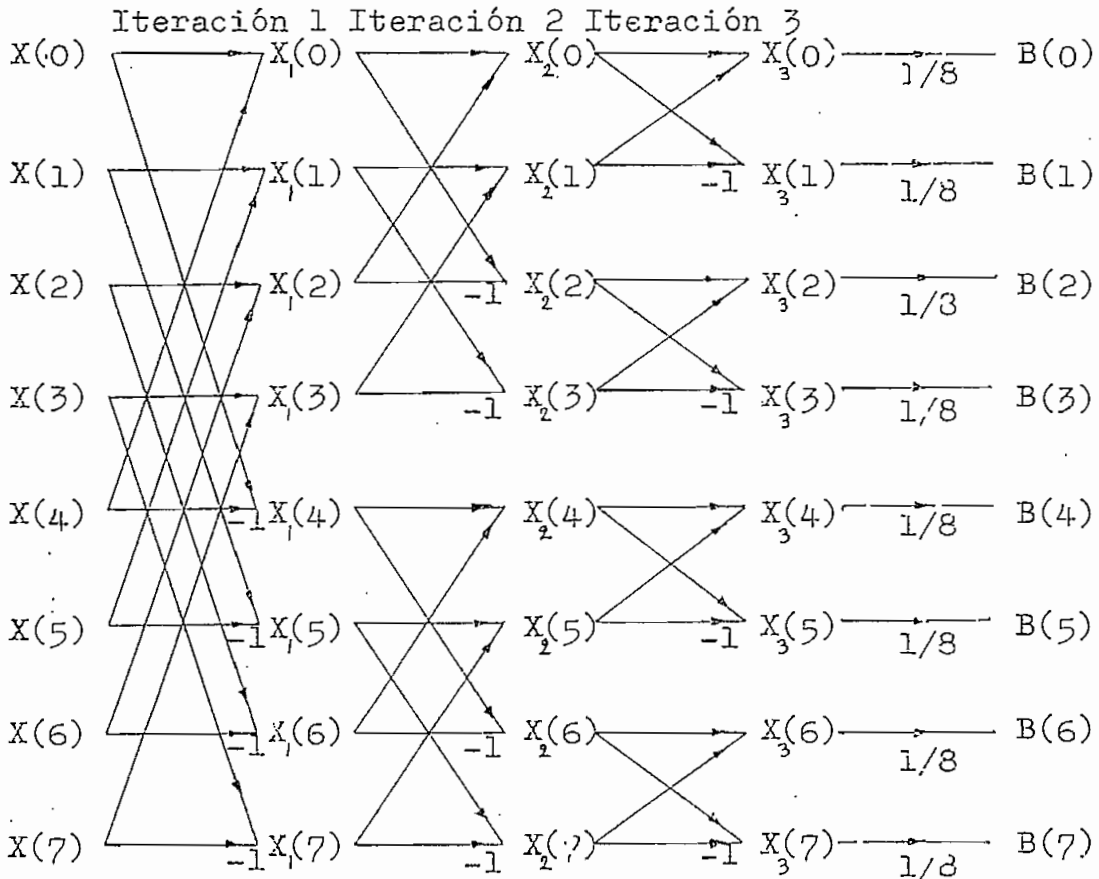


Fig. 2-11. Diagrama de flujo que ilustra la computación de la transformada de Hadamard para $n = 3$

2.8 La transformada rápida de Hadamard en orden progresivo de secuencia: transformada rápida de Walsh

Una de las desventajas del algoritmo rápido que acabamos de estudiar es que no está en la medida de darnos a la salida los coeficientes de la transformada en orden secuencial progresivo. De acuerdo a lo establecido anteriormente el orden secuencial está dado por el número de cambios de signo de la función de Walsh (correspondiente a un vector fila de la matriz de Hadamard) en el intervalo $0,1$. Para visualizar lo que queremos decir, graficamos a continuación la variación de signos en una matriz canónica de Hadamard y en otra estructurada en orden secuencial.

Figs. 2-12 y 2-13. $n = 3$

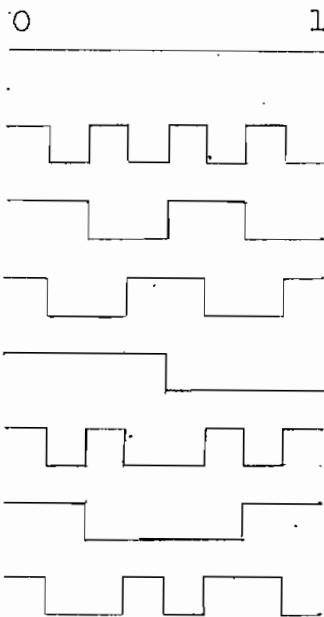


Fig. 2-12. Funciones de Walsh para $[H(3)]$.

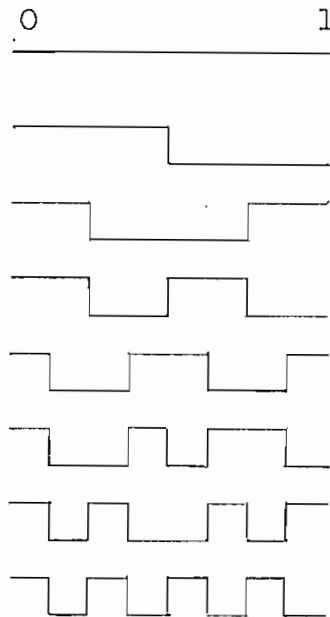


Fig. 2-13. Funciones de Walsh para una matriz $[H(3)]$ secuenc.

2.9 Algoritmo rápido para obtener la transformada de Walsh

Modificando apropiadamente la transformada rápida de Hadamard se puede obtener la denominada transformada rápida de Walsh, llamada así porque los coeficientes están en orden de secuencia. Esta modificación la ejemplificamos para el caso en que $n = 3$

A diferencia de la TRH que da los coeficientes en completo desorden respecto a la secuencia, la transformada rápida debe entregarlos en orden secuencial creciente. Para obtener esto se deben hacer transformaciones tanto en el orden de los datos de entrada como en el diagrama de flujo. Para precisar las modificaciones que deben hacerse primero debemos definir lo que es una inversión. Para esto presentamos el diagrama de flujo para la transformada rápida de Hadamard en la forma indicada en la fig. 2-14.

Una inversión implica el intercambio de la acción representada por las líneas: sólida y de segmentos, que se originan de los nodos de la fig. 2-14. La línea sólida indica el traspaso de la cantidad desde el nodo en que se origina la línea hacia el nodo en el cual termina y la multiplicación de esta cantidad por +1. La línea de segmentos representa un traspaso similar, pero el factor en este caso es -1. La fig. 2-15 ilustra lo que es una inversión. Los papeles de la línea sólida y de la de segmentos se intercambian: la línea sólida se transforma en línea de seg-

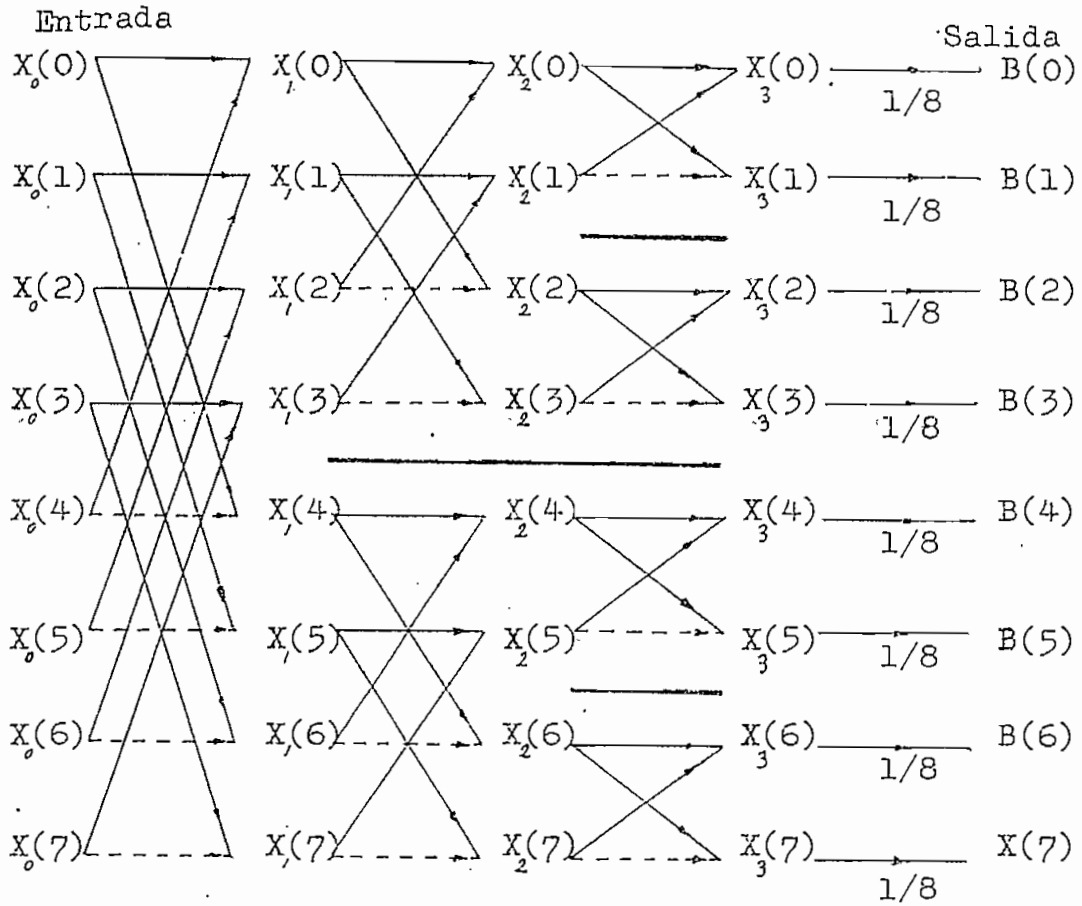


Fig. 2-14. Diagrama de flujo para la transformada rápida de Hadamard. Los factores +1 y -1 se indican por líneas sólidas y de segmentos respectivamente. Las líneas de trazo grueso sirven para separar los bloques

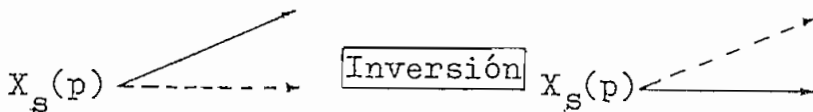


Fig. 2-15 Ilustración de lo que significa una inversión en el diagrama de flujo.

mentos y viceversa. Una inversión puede tener lugar solamente en aquellos nodos que dan origen a una línea sólida

y otra de segmentos.

El siguiente paso es determinar los nodos que deben cambiarse y los nodos que deben permanecer inalterados. Para esto se procede como sigue

En el diagrama de flujo se conoce con el nombre de bloque aquel grupo de cálculos, representado por líneas de flujo, que están desconectadas de las contiguas de arriba y de abajo. En la fig. 2-14 los bloques están separados por líneas de trazo grueso. Utilizando este criterio se puede comprobar que el número de bloques en el diagrama de flujo crece de izquierda a derecha. El número de bloques es igual a 2^s , siendo s el subíndice de $X_s(p)$ que aparece a la izquierda de cada columna de bloques. De este modo la variación del número de bloques será de 1 a $N/2$.

Regla única para la inversión.- Si se numera de arriba hacia abajo cada columna de bloques, tendrán inversión todos los bloques que tengan numeración par. En la fig. 2-16 se indica tanto el número de bloques que existen por columna como los que tienen inversión.

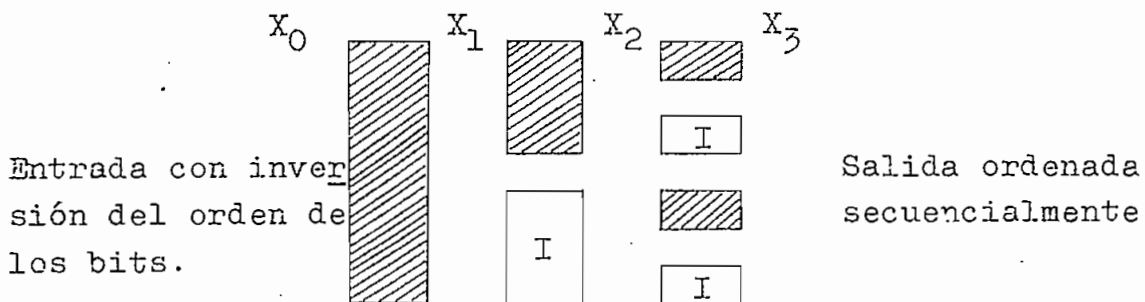


Fig. 2-16. Posición de los bloques en el diagrama de flujo. "I" indica que el bloque correspondiente tiene inversión.

Organización de los datos de entrada..- Además para obtener los coeficientes $B(k)$ en orden secuencial creciente, los datos de entrada deben disponerse de la siguiente manera:

Se escribe la representación binaria de los números de 0 a $N-1$, se hace una inversión del orden de los bits. Los números decimales correspondientes a los binarios invertidos nos dan el orden de sucesión de los datos de entrada.

Para $N = 8$ tendremos

| k_{dec} | k_{bin} | $\langle k_{bin} \rangle$ | Orden de los datos de entr. |
|-----------|-----------|---------------------------|-----------------------------|
| 0 | 0 0 0 | 0 0 0 | 0 |
| 1 | 0 0 1 | 1 0 0 | 4 |
| 2 | 0 1 0 | 0 1 0 | 2 |
| 3 | 0 1 1 | 1 1 0 | 6 |
| 4 | 1 0 0 | 0 0 1 | 1 |
| 5 | 1 0 1 | 1 0 1 | 5 |
| 6 | 1 1 0 | 0 1 1 | 3 |
| 7 | 1 1 1 | 1 1 1 | 7 |

Tabla 2-8. Orden de los datos de entrada para la computación de la transformada de Walsh.

La fig. 2-17 indica el diagrama de flujo final, para $N = 8$, de la transformada de Walsh. [25].

Los coeficientes tal como nos da la transformada de Walsh son:

$$B(0) = 1/8[X(0)+X(1)+X(2)+X(3)+X(4)+X(5)+X(6)+X(7)]$$

$$B(1) = 1/8[X(0)+X(1)+X(2)+X(3)-X(4)-X(5)-X(6)-X(7)]$$

$$B(2) = 1/8[X(0)+X(1)-X(2)-X(3)-X(4)-X(5)+X(6)+X(7)]$$

$$B(3) = 1/8[X(0)+X(1)-X(2)-X(3)+X(4)+X(5)-X(6)-X(7)]$$

etc.

Si se examina el número de cambios de signo de los coeficientes , se puede comprobar que están ordenados secuencialmente.

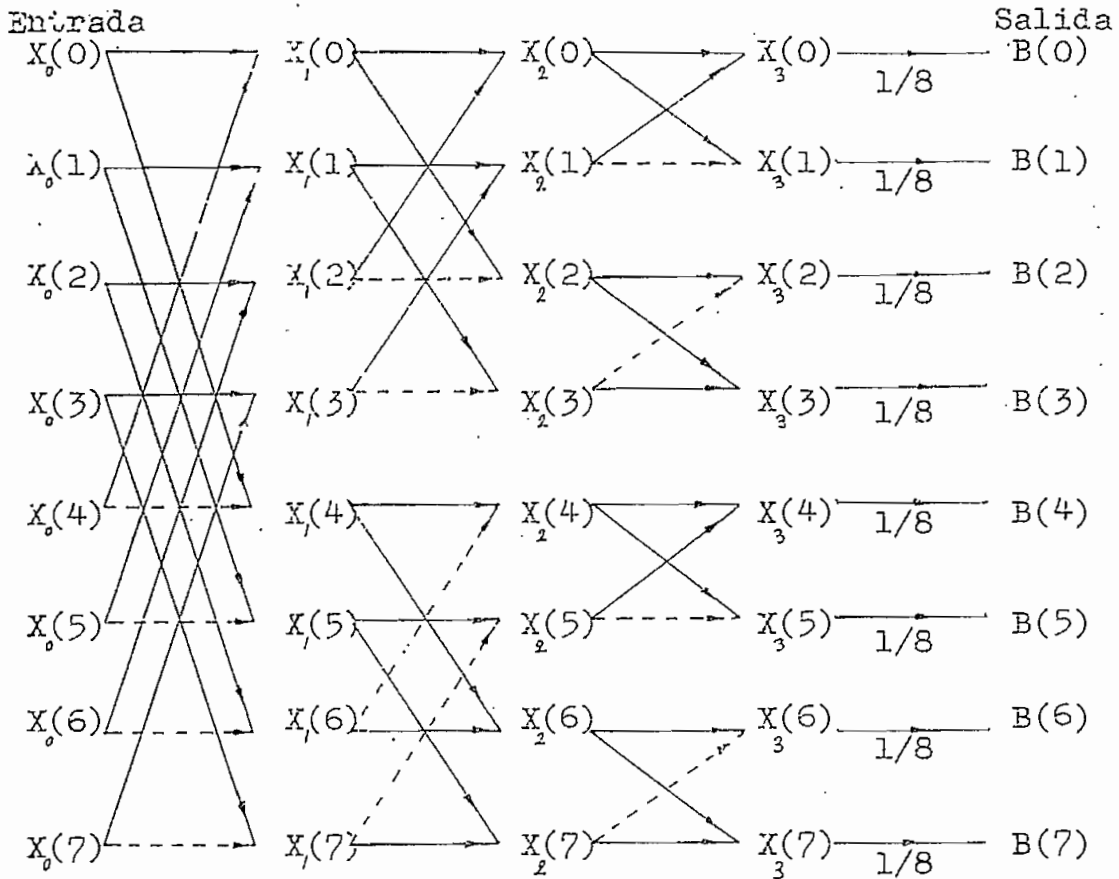


Fig. 2-17. Diagrama de flujo para la transformada de Walsh que nos da los coeficientes en orden de secuencia.

2.10 Espectro de potencia de la transformada de Hadamard

2.10 a) Teorema de Parseval

De acuerdo a lo que se dijo en el capítulo 1 la transformada de Hadamard se caracteriza por mantener invariante la suma de los cuadrados de los datos y de los coeficientes de la transformada. Es esto lo que expresa el teorema de Parseval.

Para nuestro caso el teorema de Parseval se demuestra en la forma siguiente:

Sea

$$[B(n)]^T = 1/N [X(n)]^T [H(n)]^T$$

entonces

$$[B(n)]^T [B(n)] = 1/N^2 [X(n)]^T [H(n)]^T [H(n)] [X(n)]$$

pero $[H(n)]^T [H(n)] = N[I_N]$ luego

$$[B(n)]^T [B(n)] = 1/N [X(n)]^T [X(n)]$$

O sea

$$1/N \sum_{i=0}^{N-1} X^2(i) = \sum_{i=0}^{N-1} B^2(i) \quad (2-30) \text{ Teorema de Parseval}$$

Así pues si la secuencia $\{X(n)\}$ representa los valores de muestreo del voltaje o corriente de la señal $X(t)$, y se asume una carga puramente resistiva de un ohmio, Entonces el miembro de la izquierda de (2-30) representa la potencia promedio disipada. El sumatorio a la derecha de (2-30) implica que la potencia de la señal se conserva en el dominio de la transformada. El conjunto $\{B^2(n)\}$, sin -

embargo, no representa los puntos individuales del espectro, ya que no es invariante al desplazamiento de los datos muestreados.

2.10 b) Desarrollo del espectro

El desarrollo del espectro se ilustra considerando el caso cuando $N = 8$. Hagamos que $[X^{(\ell)}(n)]^T$ denote $[X(n)]^T$ desplazado a la izquierda ℓ posiciones. Esto es

$$[X^{(\ell)}(3)]^T = [X(\ell) \quad X(\ell+1) \quad \dots \quad X(\ell-1)]$$

$$\ell = 1, 2, \dots, 7$$

con $\ell = 1$ se tiene

$$[X^{(1)}(3)] = [S^{(1)}(3)][X(3)]$$

en donde

$$[S^{(1)}(3)] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2-31)$$

La transformada de Hadamard de $[X^{(1)}(3)]$ es

$$[B^{(1)}(3)] = 1/8 [H(3)][S^{(1)}(3)][X(3)]$$

o también

$$[B^{(1)}(3)] = 1/8 [H(3)][S^{(1)}(3)][H(3)]1/8[H(3)][X(3)]$$

ya que $1/8 [H(3)][H(3)] = [I_8]$

$$\begin{bmatrix} B(0) \\ B(1) \\ B(2) \\ B(3) \\ B(4) \\ B(5) \\ B(6) \\ B(7) \end{bmatrix} = 1/2^{\ell} \begin{bmatrix} 2 & & & & & & & \\ & -2 & & & & & & \\ & & -2 & & & & & \\ & & & 2 & & & & \\ & & & & 1 & -1 & -1 & -1 \\ & & & & 1 & -1 & 1 & 1 \\ & & & & 1 & 1 & 1 & -1 \\ & & & & -1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B(0) \\ B(1) \\ B(2) \\ B(3) \\ B(4) \\ B(5) \\ B(6) \\ B(7) \end{bmatrix}$$

[A(3)] está constituida por matrices de orden creciente a lo largo de la diagonal principal. De la estructura diagonal en bloques de [A(3)] y de (2-34) se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones.

$$B(0) = B(0)$$

$$B^{(\ell)}(1) = (-1)^{\ell} B(1)$$

$$\begin{bmatrix} B^{(\ell)}(2) \\ B^{(\ell)}(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{\ell} \begin{bmatrix} B(2) \\ B(3) \end{bmatrix}$$

(2-35)

$$\begin{bmatrix} B^{(\ell)}(4) \\ B^{(\ell)}(5) \\ B^{(\ell)}(6) \\ B^{(\ell)}(7) \end{bmatrix} = 1/2^{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^{\ell} \begin{bmatrix} B(4) \\ B(5) \\ B(6) \\ B(7) \end{bmatrix}$$

Si hacemos

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = [D(1)]$$

$$1/2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = [D(2)]$$

las 2 últimas ecuaciones quedarán en la forma

$$\begin{bmatrix} B^{(\ell)}(2) \\ B^{(\ell)}(3) \end{bmatrix} = [D(1)]^\ell \begin{bmatrix} B(2) \\ B(3) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} B^{(\ell)}(4) \\ B^{(\ell)}(5) \\ B^{(\ell)}(6) \\ B^{(\ell)}(7) \end{bmatrix} = 1/2^\ell [D(2)]^\ell \begin{bmatrix} B(4) \\ B(5) \\ B(6) \\ B(7) \end{bmatrix}$$

$[D(1)]$ y $[D(2)]$ son ortogonales

Si elevamos al cuadrado el grupo de ecuaciones (2-35) tendremos

$$B^{(\ell)2}(0) = B^2(0)$$

$$B^{(\ell)2}(1) = B^2(1)$$

$$B^{(\ell)2}(2) + B^{(\ell)2}(3) = B^2(2) + B^2(3)$$

$$B^{(\ell)2}(4) + B^{(\ell)2}(5) + B^{(\ell)2}(6) + B^{(\ell)2}(7) = B^2(4) + B^2(5) + B^2(6) + B^2(7)$$

O en forma abreviada

$$B^{(\ell)2}(k) = B^2(k) \quad k = 0, 1$$

$$\sum_{k=2}^3 B^{(\ell)2}(k) = \sum_{k=2}^3 B^2(k) \quad (2-36)$$

$$\sum_{k=4}^7 B^{(\ell)2}(k) = \sum_{k=4}^7 B^2(k)$$

$$\ell = 1, 2, \dots, 7$$

Puesto que la potencia total es un invariante respecto del desplazamiento de las muestras, el conjunto de invariantes definido por las ecuaciones (2-36) representa el espectro de potencia. En general este espectro se expresa como sigue:

$$\begin{aligned}
 P_0 &= B^2(0) \\
 P_s &= \sum_{k=2^{s-1}}^{2^s-1} B^2(k)
 \end{aligned}
 \tag{2-37}$$

2.10 c) Algoritmo rápido para el cálculo del espectro de potencia

Modificando apropiadamente la TRH se puede computar el espectro de potencia sin necesidad de computar todos los coeficientes $B(k)$. Esta modificación se ilustra para $N = 8$

De las ecuaciones (2-27), (2-28) y (2-29) se obtiene

$$B(0) = 1/8 X_3(0)$$

$$B(1) = 1/8 X_3(1)$$

$$\begin{bmatrix} B(2) \\ B(3) \end{bmatrix} = 1/8 [H(1)] \begin{bmatrix} X_2(2) \\ X_2(3) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} B(4) \\ B(5) \\ B(6) \\ B(7) \end{bmatrix} = 1/8 [H(2)] \begin{bmatrix} X_1(4) \\ X_1(5) \\ X_1(6) \\ X_1(7) \end{bmatrix}$$

A partir de estas ecuaciones y tomando en cuenta la ortogonalidad de las matrices $[H(n)]$ tenemos

$$P_0 = B^2(0) = 1/8^2 X_3^2(0)$$

$$P_1 = B^2(1) = 1/8^2 X_3^2(1)$$

$$P_2 = B^2(2) + B^2(3) = 2/8^2 [X_2^2(2) + X_2^2(3)] \tag{2-38}$$

$$P_2 = \sum_{m=2}^3 B^2(m) = 2/8^2 \sum_{m=2}^3 X_2^2(m)$$

en la misma forma

$$P_3 = \sum_{m=4}^7 B^2(m) = 4/8^2 \sum_{m=4}^7 X_1^2(m) \quad (2-38)$$

Las fórmulas generales para el cómputo del espectro de potencia son de la forma

$$P_0 = X_n^2(0)/N^2 \quad (2-39)$$

$$P_s = 2^{s-1}/N^2 \sum_{m=2^{s-1}}^{2^s-1} X_{n+1-s}^2(m)$$

$$s = 1, 2, \dots, n$$

El diagrama de flujo se indica en la fig. 2-18

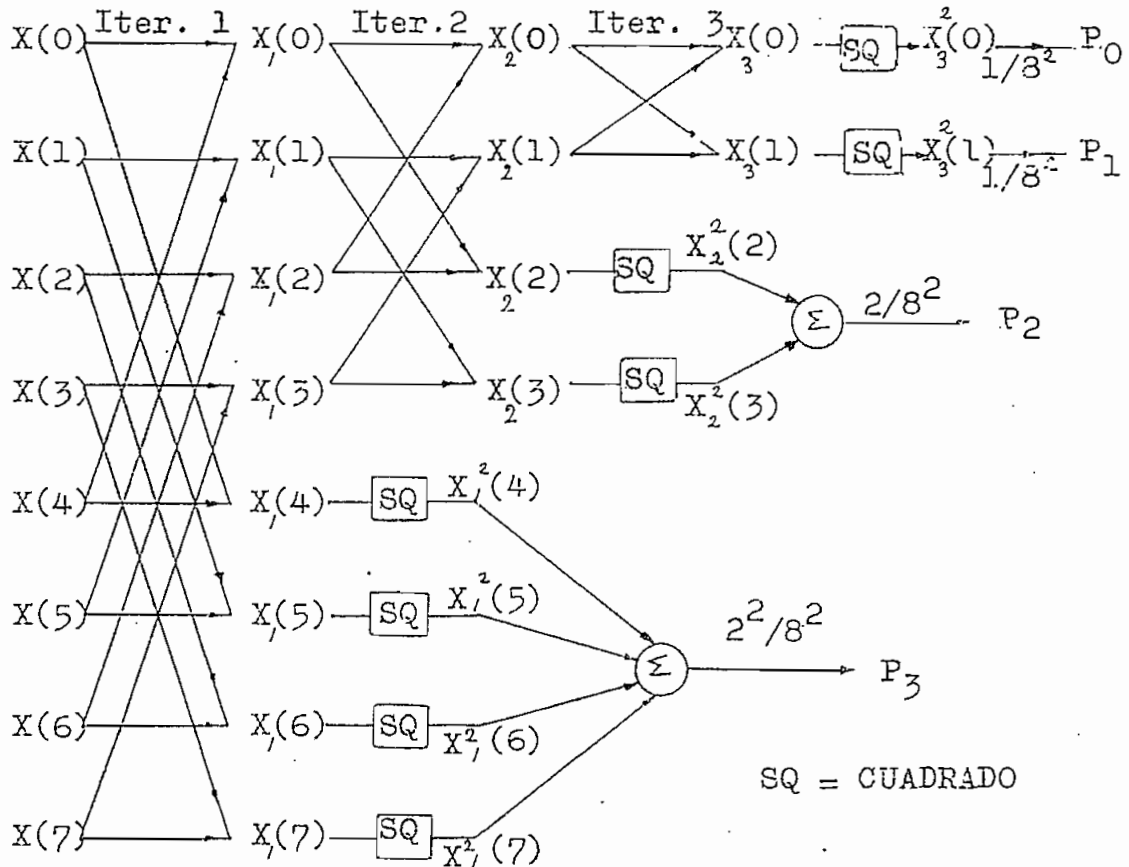


Fig. 2-18. Diagrama de flujo para la computación del espectro de potencia de la TH.

2.10 d) Sentido físico del espectro de potencia de la transformada de Hadamard

Como acabamos de ver cada punto espectral representa el contenido de potencia de un grupo de frecuencias (se - cuencias) antes que el de una sola frecuencia.

Además los puntos P_s representan las potencias promedio contenidas en un conjunto de $(n+1)$ subsecuencias mutuamente ortogonales, en que se descompone la secuencia $\{X(k)\}$ siguiendo el proceso que se indica a continuación.

La secuencia N -periódica $\{X(k)\}$ puede descomponerse - en una secuencia $N/2$ -periódica $\{F_1(k)\}$ y una secuencia - $N/2$ -antiperiódica $\{G_1(k)\}$ [una secuencia $\{X(k)\}$ se dice - que es M -antiperiódica si $X(m) = -X(M+m)$. En donde M y m se refieren al orden en la secuencia] como sigue

$$\{X(k)\} = \{F_1(k)\} + \{G_1(k)\} \quad (2-40)$$

en donde

$$\begin{aligned} \{F_1(k)\} &= 1/2\{X(k) + X(k+N/2)\} \\ \{G_1(k)\} &= 1/2\{X(k) - X(k+N/2)\} \end{aligned} \quad (2-41)$$

$\{F_1(k)\}$ puede descomponerse ulteriormente en una secuencia $N/4$ -periódica y una secuencia $N/4$ -antiperiódica, $\{F_2(k)\}$ y $\{G_2(k)\}$ respectivamente

$$\{F_1(k)\} = \{F_2(k)\} + \{G_2(k)\} \quad (2-42)$$

en donde

$$\begin{aligned} \{F_2(k)\} &= 1/2 \{F_1(k) + F_1(k+N/4)\} \\ \{G_2(k)\} &= 1/2 \{F_1(k) - F_1(k+N/4)\} \end{aligned} \quad (2-43)$$

Continuando este proceso se puede establecer que una secuencia N-periódica puede descomponerse en (n+1) subsecuencias.

En efecto se tiene

$$\begin{aligned} \{X(k)\} &= \{F_1(k)\} + \{G_1(k)\} \\ &= \{F_2(k)\} + \{G_2(k)\} + \{G_1(k)\} \end{aligned}$$

y así sucesivamente hasta llegar a

$$\{X(k)\} = \{F_n(k)\} + \{G_n(k)\} + \{G_{n-1}(k)\} + \dots + \{G_2(k)\} + \{G_1(k)\} \quad (2-44)$$

en donde

$\{F_n(k)\}$ es una secuencia 1-periódica
 $\{G_n(k)\}$ es una secuencia 1-antiperiódica
 $\{G_{n-1}(k)\}$ es una secuencia 2-antiperiódica
 $\{G_{n-2}(k)\}$ es una secuencia 4-antiperiódica
 etc. Finalmente

$\{G_1(k)\}$ es una secuencia N/2-antiperiódica

En general

$$\{G_{n-r}(k)\} \quad r = 0, 1, \dots, (n-1)$$

es una secuencia 2^r -antiperiódica

Para $N = 8$, aplicando (2-44), se tiene

$$\{X(k)\} = \{F_3(k)\} + \{G_3(k)\} + \{G_2(k)\} + \{G_1(k)\}$$

Utilizando en forma recursiva las ecuaciones (2-40) y -

(2-41) se obtiene

$$\begin{aligned} \{G_1(k)\} &= 1/2 \{X(k) - X(k+4)\} \\ \{G_2(k)\} &= 1/4 \{X(k) + X(k+4) - X(k+2) - X(k+6)\} \\ \{G_3(k)\} &= 1/8 \{X(k) + X(k+4) + X(k+2) + X(k+6) - X(k+1) - X(k+5) \\ &\quad - X(k+3) - X(k+7)\} \\ \{F_3(k)\} &= 1/8 \{X(k) + X(k+4) + X(k+2) + X(k+6) + X(k+1) + X(k+5) \\ &\quad + X(k+3) + X(k+7)\} \end{aligned}$$

(2-45)

Desarrollando $\{G_1(k)\}$, y tomando en cuenta que $X(N+m) = X(m)$ obtenemos

$$\{G_1(3)\} = 1/2 \{X(0) - X(4), X(1) - X(5), X(2) - X(6), X(3) - X(7), \\ X(4) - X(0), X(5) - X(1), X(6) - X(2), X(7) - X(3)\}$$

si hacemos

$$1/2[X(0) - X(4)] = b(4)$$

$$1/2[X(1) - X(5)] = b(5)$$

$$1/2[X(2) - X(6)] = b(6)$$

$$1/2[X(3) - X(7)] = b(7)$$

$$\{G_1(3)\} = \{b(4) \ b(5) \ b(6) \ b(7) \ -b(4) \ -b(5) \ -b(6) \ -b(7)\}$$

de donde resulta que $\{G_1(3)\}$ es 4-antiperiódica.

Utilizando un procedimiento semejante se puede llegar a establecer el siguiente conjunto de ecuaciones

$$\{G_1(3)\} = \{b(4) \ b(5) \ b(6) \ b(7) \ -b(4) \ -b(5) \ -b(6) \ -b(7)\}$$

$$\{G_2(3)\} = \{b(2) \ b(3) \ -b(2) \ -b(3) \ b(2) \ b(3) \ -b(2) \ -b(3)\}$$

$$\{G_3(3)\} = \{b(1) \ -b(1) \ b(1) \ -b(1) \ b(1) \ -b(1) \ b(1) \ -b(1)\}$$

$$\{F_3(3)\} = \{b(0) \ b(0) \ b(0) \ b(0) \ b(0) \ b(0) \ b(0) \ b(0)\} \quad (2-46)$$

siendo

$$b(0) = 1/8[X(0)+X(1)+X(2)+X(3)+X(4)+X(5)+X(6)+X(7)]$$

$$b(1) = 1/8[X(0)-X(1)+X(2)-X(3)+X(4)-X(5)+X(6)-X(7)]$$

$$b(2) = 1/4[X(0) \quad -X(2) \quad +X(4) \quad -X(6) \quad]$$

$$b(3) = 1/4[\quad X(1) \quad -X(3) \quad +X(5) \quad -X(7)]$$

$$b(4) = 1/2[X(0) \quad \quad \quad -X(4) \quad \quad \quad]^{(2-47)}$$

$$b(5) = 1/2[\quad X(1) \quad \quad \quad -X(5) \quad \quad \quad]$$

$$b(6) = 1/2[\quad \quad X(2) \quad \quad \quad -X(6) \quad \quad \quad]$$

$$b(7) = 1/2[\quad \quad \quad X(3) \quad \quad \quad -X(7)]$$

Se puede comprobar de (2-46) que $\{G_1(z)\}$ es 4-antiperiódica, $\{G_2(z)\}$ es 2-antiperiódica, $\{G_3(z)\}$ es 1-antiperiódica y $\{F_3(z)\}$ 1-periódica, como se había establecido.

A partir de (2-47) podemos obtener el diagrama de flujo para el cálculo de los elementos de las subsecuencias. Fig. - 2-19.

$\{X(z)\}$ podrá entonces expresarse en la forma

$$\{X(z)\} = \begin{pmatrix} |b(0)| & |b(1)| & |b(2)| & |b(4)| \\ |b(0)| & |-b(1)| & |b(3)| & |b(5)| \\ |b(0)| & |b(1)| & |-b(2)| & |b(6)| \\ |b(0)| & |-b(1)| & |-b(3)| & |b(7)| \\ |b(0)| & |b(1)| & |b(2)| & |-b(4)| \\ |b(0)| & |-b(1)| & |b(3)| & |-b(5)| \\ |b(0)| & |b(1)| & |-b(2)| & |-b(6)| \\ |b(0)| & |-b(1)| & |-b(3)| & |-b(7)| \end{pmatrix} \quad (2-48)$$

Se puede comprobar que

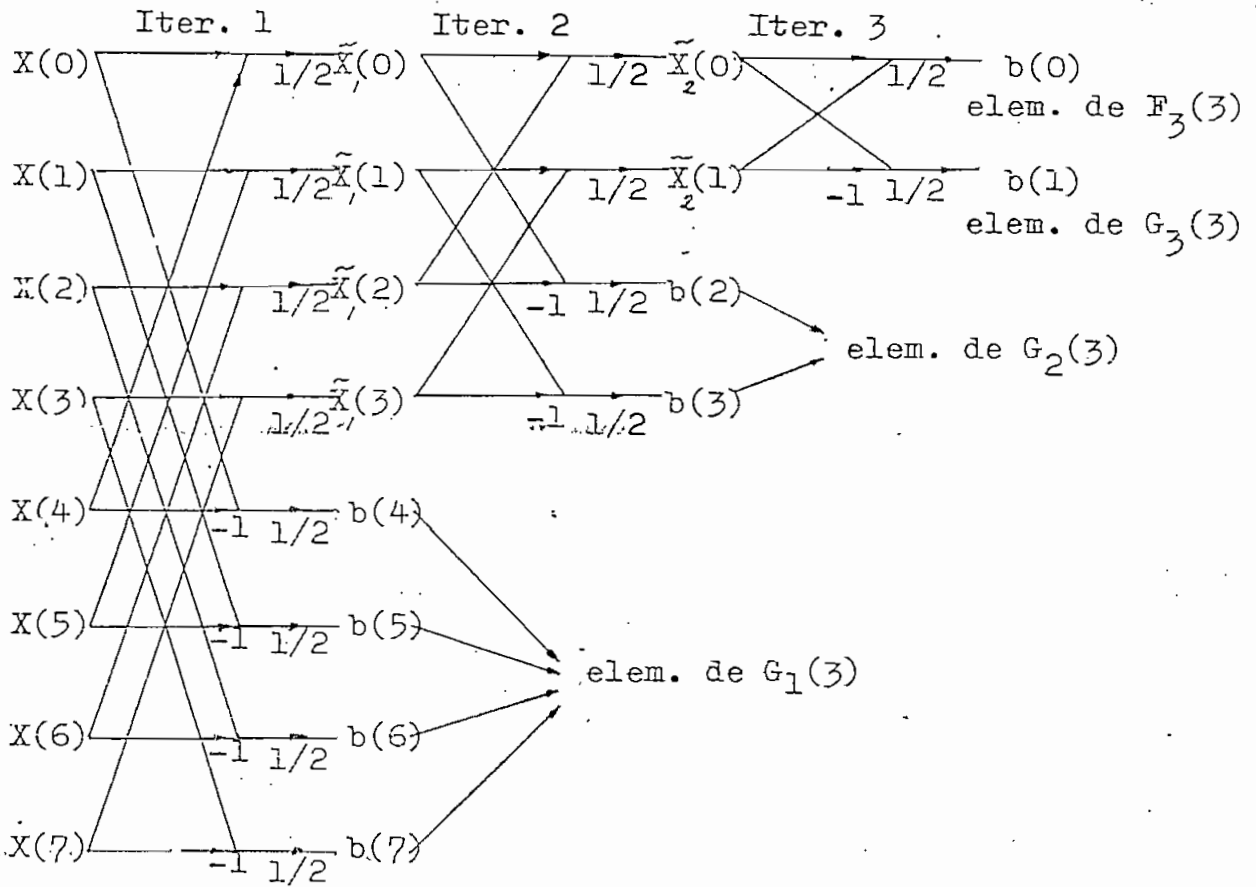


Fig. 2-19. Diagrama de flujo para la obtención de los elementos $b(k)$ de las $(n+1)$ subsecuencias.

$$X(0) = b(0) + b(1) + b(2) + b(4)$$

$$X(1) = b(0) - b(1) + b(3) + b(5)$$

etc.

O sea la suma de los valores de una misma fila de las subsecuencias nos da el valor correspondiente de la secuencia $\{X(3)\}$.

Se puede verificar por simple inspección que los vectores que forman las 4 subsecuencias son mutuamente ortogonales entre sí, de donde se sigue que

$$|X(z)|^2 = |F_3(z)|^2 + |G_3(z)|^2 + |G_2(z)|^2 + |G_1(z)|^2 \quad (2-49)$$

en donde $|\cdot|$ representa el producto de un vector por su transpuesto.

O sea

$$|F_3(z)|^2 = [b(0) \dots\dots\dots b(0)] \begin{bmatrix} b(0) \\ \cdot \\ b(0) \end{bmatrix} = 8 b^2(0)$$

$$|G_3(z)|^2 = 8 \cdot b^2(1)$$

$$|G_2(z)|^2 = 4 \sum_{k=2}^3 b^2(k) \quad (2-50)$$

$$|G_1(z)|^2 = 2 \sum_{k=4}^7 b^2(k)$$

De las ecuaciones (2-49) y (2-50) se desprende que la potencia promedio es

$$P_{pr} = 1/8 \sum_{m=c}^7 X^2(m) = b^2(0) + b^2(1) + 1/2 \sum_{k=2}^3 b^2(k) + 1/4 \sum_{k=4}^7 b^2(k) \quad (2-51)$$

Si utilizamos las subsecuencias en la fórmula (2-25) tendremos

$$\begin{bmatrix} B(0) \\ B(1) \\ B(2) \\ B(3) \\ B(4) \\ B(5) \\ B(6) \\ B(7) \end{bmatrix} = 1/8 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b(0) & b(1) & b(2) & b(4) \\ b(0) & -b(1) & b(3) & b(5) \\ b(0) & b(1) & -b(2) & b(6) \\ b(0) & -b(1) & -b(3) & b(7) \\ b(0) & b(1) & b(2) & -b(4) \\ b(0) & -b(1) & b(3) & -b(5) \\ b(0) & b(1) & -b(2) & -b(6) \\ b(0) & -b(1) & -b(3) & -b(7) \end{bmatrix}$$

Multiplicando cada fila de $[H(z)]$ por todas las columnas de las subsecuencias se obtiene:

$$B(0) = b(0)$$

$$B(1) = b(1)$$

$$B(2) = 1/2[b(2) + b(3)]$$

$$B(3) = 1/2[b(2) - b(3)]$$

Expresando en forma matricial las dos últimas ecuaciones -
tenemos

$$\begin{bmatrix} B(2) \\ B(3) \end{bmatrix} = 1/2 [H(1)] \begin{bmatrix} b(2) \\ b(3) \end{bmatrix}$$

Para los 4 coeficientes restantes se obtienen 4 ecuaciones más, las cuales se pueden reducir a una ecuación matricial de la forma

$$\begin{bmatrix} B(4) \\ B(5) \\ B(6) \\ B(7) \end{bmatrix} = 1/4 [H(2)] \begin{bmatrix} b(4) \\ b(5) \\ b(6) \\ b(7) \end{bmatrix}$$

Puesto que las matrices $[H(1)]$ y $[H(2)]$ son N-ortogonales se tiene que

$$B^2(2) + B^2(3) = 1/2 [b^2(2) + b^2(3)]$$

$$B^2(4) + B^2(5) + B^2(6) + B^2(7) = 1/4 [b^2(4) + b^2(5) + b^2(6) + b^2(7)]$$

Si igualamos los cuadrados de las ecuaciones anteriores se tendrá

$$B^2(0) = b^2(0)$$

$$B^2(1) = b^2(1)$$

(2-52)

$$2 \sum_{k=2}^3 B^2(k) = \sum_{k=2}^3 b^2(k)$$

$$4 \sum_{k=4}^7 B^2(k) = \sum_{k=4}^7 b^2(k)$$

Sustituyendo en P_{pr} los valores de $b^2(k)$ en función de -

$B^2(k)$ tenemos

$$P_{pr} = B^2(0) + B^2(1) + \sum_{k=2}^3 B^2(k) + \sum_{k=4}^7 B^2(k) \quad (2-53)$$

$$P_{pr} = P_0 + P_1 + P_2 + P_3 \quad (2-54)$$

Entonces P_0 representa la potencia promedio contenida en la secuencia 1-periódica $\{F_3(z)\}$, mientras que P_1, P_2, P_3 representan las potencias contenidas en las subsecuencias $\{G_3(z)\}, \{G_2(z)\}$ y $\{G_1(z)\}$ respectivamente, siendo $\{G_3(z)\}$ 1-antiperiódica, $\{G_2(z)\}$ 2-antiperiódica y $\{G_1(z)\}$ 4-antiperiódica. En general P_r ($r = 1, 2, \dots, n$) representa la potencia promedio contenida en la subsecuencia $\{G_{n+1-r}(k)\}$, y esta es la interpretación física del espectro.

Una interpretación adicional del espectro de potencia se obtiene a partir de las tablas 2-9, 2-10, 2-11 que dan los valores de frecuencia-secuencia de los coeficientes de la transformada de Hadamard, a partir de la definición de secuencia dada por Harmuth. Estas tablas se obtienen de las tablas 2-4, 2-5, 2-6.

| Coeficiente | frec-secuencia | $N = 4$ |
|-------------|----------------|---------|
| $B(0)$ | 0 | |
| $B(1)$ | 2 | |
| $B(2)$ | 1 | |
| $B(3)$ | 1 | |

Tabla 2-9. Contenido de frecuencia de la TH para $N = 4$

| Coeficiente | frec-secuencia | N = 8 |
|-------------|----------------|-------|
| B(0) | 0 | |
| B(1) | 4 | |
| B(2) | 2 | |
| B(3) | 2 | |
| B(4) | 1 | |
| B(5) | 3 | |
| B(6) | 1 | |
| B(7) | 3 | |

Tabla 2-10. Contenido de frecuencia de la TH para N = 8

| Coeficiente | frec-secuencia | N = 16 |
|-------------|----------------|--------|
| B(0) | 0 | |
| B(1) | 8 | |
| B(2) | 4 | |
| B(3) | 4 | |
| B(4) | 2 | |
| B(5) | 6 | |
| B(6) | 2 | |
| B(7) | 6 | |
| B(8) | 1 | |
| B(9) | 7 | |
| B(10) | 3 | |
| B(11) | 5 | |
| B(12) | 1 | |
| B(13) | 7 | |
| B(14) | 3 | |
| B(15) | 5 | |

Tabla 2-11. Contenido de frecuencia de la TH para N = 16

Denotando la frecuencia contenida en un punto espectral P_s por $F(P_s)$, para cuando $N = 8$, tabla 2-10, se tiene

$$F(P_0) = 0$$

$$F(P_3) = 1, 3$$

$$F(P_2) = 2$$

$$F(P_1) = 1$$

A partir de la estructura en bloques diagonales de la matriz de desplazamiento y tomando en cuenta las tablas 2-9, 2-10 y 2-11, se puede establecer en general la siguiente tabla de composición de frecuencia de los $(n+1)$ puntos espectrales. Fig. 2-20.

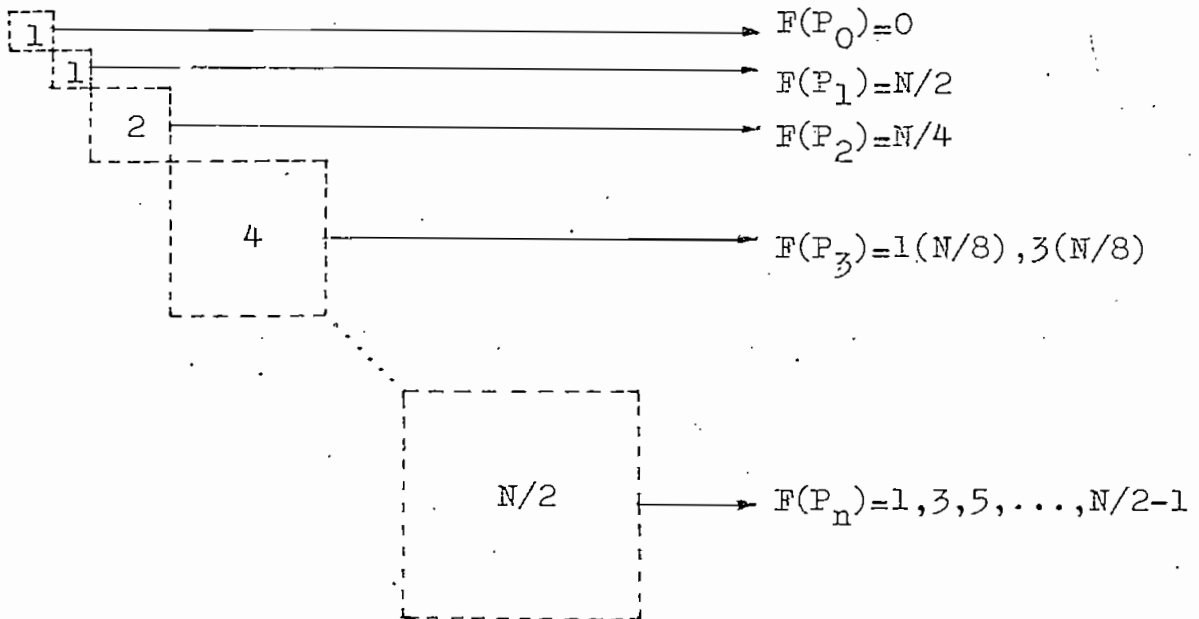


Fig. 2-20. Estructura diagonal en bloques de la matriz de desplazamiento con las frecuencias correspondientes a la derecha. El número dentro del cuadrado indica el orden del bloque diagonal correspondiente.

De la observación del cuadro anterior y de las tablas 2-4, 2-5 y 2-6 se pueden extraer las siguientes con

clusiones:

Sólo P_0 y P_1 corresponden a frecuencias individuales, P_2 contiene dos veces la frecuencia $N/4$ [para $\text{Sal}(N/4, \theta)$ y $\text{Cal}(N/4, \theta)$].

Los restantes grupos contienen una fundamental y una serie de armónicos impares relativos a esta fundamental. En cada frecuencia se tiene una función Sal y otra Cal . El último grupo P_n contiene la frecuencia 1 y todos sus armónicos impares hasta $(N/2 - 1)$ [24].

2.11 Espectro de fase de la TH

Por su mayor simplicidad comencemos definiendo lo que es el espectro de fase de la transformada discreta de Fourier de una secuencia N -periódica. El espectro de fase de la TDF para una secuencia N -periódica se define como

$$\psi(k) = \tan^{-1} (I(k)/R(k)) \quad (2-55)$$

$$k = 0, 1, \dots, N-1$$

en donde $R(k)$ e $I(k)$ son respectivamente las partes real e imaginaria de los coeficientes $C(k)$ de la TDF. Geométricamente $\psi(k)$ representa la orientación de la amplitud del punto espectral $|C(k)|$ con respecto al eje real que se asume como referencia. Fig. 2-21.

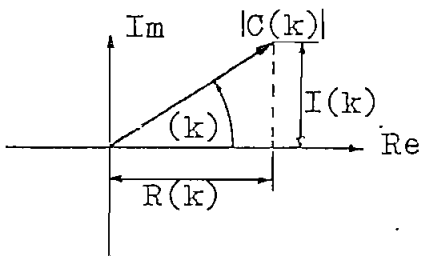


Fig. 2-21. Interpretación geométrica del espectro de fase de la TDF.

El espectro de fase está dado también por

$$\psi(k) = \cos^{-1}(R(k)/|C(k)|) \quad k = 0, 1, \dots, (N-1) \quad (2-56)$$

y tiene las siguientes características:

- 1) $\psi(k)$ representa la orientación del punto espectral $C(k)$ con respecto al eje real que es el eje de referencia.
- 2) $\psi(k)$ caracteriza el desplazamiento cíclico de la secuencia N -periódica de datos.
- 3) $\psi(k)$ es invariante respecto de la amplificación o atenuación de la secuencia de datos.

Nos proponemos desarrollar aquí un espectro de fase de la TH que tenga características análogas al descrito de la TDF.

Para esto utilizaremos la técnica de descomposición en subsecuencias anteriormente descrita. Además necesitamos una expresión para la potencia promedio de dos secuencias N -periódicas.

2.11. a) Potencia promedio de dos secuencias N -periódicas

Sean las secuencias N -periódicas $\{x_1(n)\}$ y $\{x_2(n)\}$ -

que representan los valores de muestreo del voltaje y corriente de la señal respectivamente.

Entonces la potencia promedio correspondiente se define como

$$P_{pr} = 1/N [X_1(n)]^T [X_2(n)] = 1/N \sum_{j=0}^{N-1} X_1(j) X_2(j) \quad (2-57)$$

en donde $[X_1(n)]^T [X_2(n)]$ es el producto interno (escalar) de los vectores $[X_1(n)]$ y $[X_2(n)]$.

De los principios generales del análisis vectorial - sabemos que el producto escalar de dos vectores N-dimensionales se define como

$$\overline{X_1} \cdot \overline{X_2} = [X_1(n)]^T [X_2(n)] = |X_1(n)| |X_2(n)| \cos \theta = \sum_{j=0}^{N-1} X_1(j) X_2(j) \quad (2-58)$$

en donde $|\cdot|$ indica la norma (magnitud) del vector.

Entonces P_{pr} quedará en la forma

$$P_{pr} = 1/N |X_1(n)| |X_2(n)| \cos \theta = 1/N \overline{X_1}(n) \cdot \overline{X_2}(n) \quad (2-59)$$

de donde

$$\cos \theta = (\overline{X_1}(n) \cdot \overline{X_2}(n)) / |X_1(n)| |X_2(n)| \quad (2-60)$$

$$\theta = \cos^{-1} [(\overline{X_1}(n) \cdot \overline{X_2}(n)) / |X_1(n)| |X_2(n)|] \quad (2-61)$$

θ es el ángulo entre los dos vectores N-dimensionales $[X_1(n)]$ y $[X_2(n)]$.

Como se ha hecho para las anteriores demostraciones, en el desarrollo del espectro de fase elegiremos en caso - cuando $N = 8$.

Hemos visto que una secuencia $X(n)$ puede descomponerse en 4 subsecuencias como se indica a continuación.

$$\{X(z)\} = \{F_3(z)\} + \{G_3(z)\} + \{G_2(z)\} + \{G_1(z)\}$$

Consideremos dos secuencias 8-periódicas cada una de las cuales se ha descompuesto en las 4 subsecuencias indicadas.

Si deseamos obtener la potencia promedio de estas dos secuencias tendremos

$$P_{pr} = 1/8 [X_1(z)]^T [X_2(z)] = 1/8 \sum_{j=0}^7 X_1(j) X_2(j)$$

Utilizando las subsecuencias

$$P_{pr} = 1/8 [\{F_3^{(1)}(z)\}^T + \{G_3^{(1)}(z)\}^T + \{G_2^{(1)}(z)\}^T + \{G_1^{(1)}(z)\}^T] \\ [\{F_3^{(2)}(z)\} + \{G_3^{(2)}(z)\} + \{G_2^{(2)}(z)\} + \{G_1^{(2)}(z)\}]$$

Teniendo en cuenta la ortogonalidad de las subsecuencias los únicos productos que no se anulan son los indicados en (2-62).

$$P_{pr} = 1/8 [\{F_3^{(1)}(z)\}^T \{F_3^{(2)}(z)\} + \{G_3^{(1)}(z)\}^T \{G_3^{(2)}(z)\} + \{G_2^{(1)}(z)\}^T \{G_2^{(2)}(z)\} + \\ \{G_1^{(1)}(z)\}^T \{G_1^{(2)}(z)\}] \quad (2-62)$$

Expandiendo las subsecuencias se obtiene :

$$P_{pr} = b^{(1)}(0)b^{(2)}(0) + b^{(1)}(1)b^{(2)}(1) + 1/2 \sum_{k=2}^3 b^{(1)}(k)b^{(2)}(k) + \\ 1/4 \sum_{k=4}^7 b^{(1)}(k)b^{(2)}(k) \quad (2-63)$$

en donde los factores $b^{(1)}(k)$ y $b^{(2)}(k)$ son los elementos de las subsecuencias de $\{X_1(z)\}$ y $\{X_2(z)\}$ respectivamente.

Para $\{X_1(z)\} = \{X_2(z)\} = \{X(z)\}$ (2-63) se transforma en

$$P_{pr} = b^2(0) + b^2(1) + 1/2 \sum_{k=2}^3 b^2(k) + 1/4 \sum_{k=4}^7 b^2(k)$$

De (2-37) y (2-52) se sigue que

$$P_0 = b^2(0) = B^2(0)$$

$$P_1 = b^2(1) = B^2(1)$$

$$P_2 = 1/2 \sum_{k=2}^3 b^2(k) = \sum_{k=2}^3 B^2(k) \quad (2-64)$$

$$P_3 = 1/4 \sum_{k=4}^7 b^2(k) = \sum_{k=4}^7 B^2(k)$$

2.11 b) Obtención del espectro de fase de la TH

Para obtener el espectro de fase es necesario definir un vector de referencia apropiado. Sea $\{X_2(3)\}$ el vector de referencia. La potencia promedio de $\{X(3)\}$ y $\{X_2(3)\}$ es

$$P_{pr} = b(0)b^{(2)}(0) + b(1)b^{(2)}(1) + 1/2 \sum_{k=2}^3 b(k)b^{(2)}(k) + 1/4 \sum_{k=4}^7 b(k)b^{(2)}(k) \quad (2-65)$$

Para mayor simplicidad escogemos como vector de referencia $\{X_2(3)\}$ aquel en que los valores $b(k)$, $k = 1, 2, \dots, 7$, se definen como sigue

$$b^{(2)}(0) = b^{(2)}(1) = b^{(2)}(2) = b^{(2)}(4) = 1$$

$$b^{(2)}(3) = b^{(2)}(5) = b^{(2)}(6) = b^{(2)}(7) = 0$$

Como consecuencia de la asunción hecha, P_{pr} queda en la forma

$$P_{pr} = b(0) + b(1) + 1/2 b(2) + 1/4 b(4) \quad (2-66)$$

Si usamos (2-44) y (2-58) la expresión para la potencia promedio de $\{X(3)\}$ y $\{X_2(3)\}$ queda en la forma

$$P_{pr} = 1/8 [|F_3(z)| |F_3^{(1)}(z)| \cos \theta_0 + |G_3(z)| |G_3^{(2)}(z)| \cos \theta_1 + |G_2(z)| |G_2^{(2)}(z)| \cos \theta_2 + |G_1(z)| |G_1^{(2)}(z)| \cos \theta_3]$$

(2-67)

igualando componentes en (2-66) y (2-67) tenemos

$$\begin{aligned} b(0) &= 1/8 [|F_3(z)| |F_3^{(1)}(z)| \cos \theta_0] \\ b(1) &= 1/8 [|G_3(z)| |G_3^{(2)}(z)| \cos \theta_1] \\ 1/2 b(2) &= 1/8 [|G_2(z)| |G_2^{(2)}(z)| \cos \theta_2] \\ 1/4 b(4) &= 1/8 [|G_1(z)| |G_1^{(2)}(z)| \cos \theta_3] \end{aligned}$$

(2-68)

de donde

$$\begin{aligned} \cos \theta_0 &= [8 b(0)] / |F_3(z)| |F_3^{(1)}(z)| \\ \cos \theta_1 &= [8 b(1)] / |G_3(z)| |G_3^{(2)}(z)| \\ \cos \theta_2 &= [4 b(2)] / |G_2(z)| |G_2^{(2)}(z)| \\ \cos \theta_3 &= [2 b(4)] / |G_1(z)| |G_1^{(2)}(z)| \end{aligned}$$

(2-69)

Anteriormente hemos obtenido los valores

$$|F_3(z)|^2 = 8 b^2(0)$$

$$|G_3(z)|^2 = 8 b^2(1)$$

$$|G_2(z)|^2 = 4 \sum_{k=2}^3 b^2(k)$$

$$|G_1(z)|^2 = 2 \sum_{k=4}^7 b^2(k)$$

siguiendo el mismo procedimiento se obtiene

$$|F_3^{(1)}(z)|^2 = 8$$

$$|G_3^{(2)}(z)|^2 = 8$$

$$|G_2^{(2)}(z)|^2 = 4$$

$$|G_1(z)|^2 = 2$$

Sustituyendo estos valores en (2-69) obtenemos

$$\cos \theta_0 = \frac{b(0)}{|h(0)|}$$

$$\cos \theta_1 = \frac{b(1)}{|b(1)|}$$

(2-70)

$$\cos \theta_2 = \frac{b(2)}{\left(\sum_{k=2}^{\infty} b(k)\right)^{1/2}}$$

$$\cos \theta_3 = \frac{b(4)}{\left(\sum_{k=4}^{\infty} b(k)\right)^{1/2}}$$

Con referencia a las últimas fórmulas se pueden hacer las siguientes observaciones:

- 1) Los valores de $\cos \theta_0$ y $\cos \theta_1$ son iguales a ± 1 . Los valores de $|\cos \theta_j|$ ($j = 2, 3$) son menores que 1
- 2) Los valores de θ_j son los valores de los ángulos entre $\{F_j(z)\}, \{G_j(z)\}$, $j = 1, 2, 3$, y un conjunto de vectores de referencia $\{F_j^{(2)}(z)\}, \{G_j^{(1)}(z)\}$ respectivamente.
- 3) El valor de $\cos \theta_j$ es un invariante con respecto a cualquier posible amplificación de $\{X(z)\}$ por un número real. O sea los valores de $\cos \theta_j$ no cambian si la secuencia de datos es amplificada o atenuada.
- 4) Puesto que tenemos un punto espectral para cada una de las subsecuencias, se sigue de lo anteriormente dicho - que θ_j en (2-70) representa la orientación del punto espectral P_j con respecto a los vectores de referencia. O sea θ_0 representa la orientación de P_0 con respecto a

$$[F_3^{(2)}(z)]^T = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$$

θ_1 la orientación de P_1 con respecto a

$$[G_3^{(2)}(z)]^T = [1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 1 \ -1]$$

θ_2 la orientación de P_2 con respecto a

$$[G_2^{(2)}(z)]^T = [1 \ 0 \ -1 \ 0 \ 1 \ 0 \ -1 \ 0]$$

θ_3 la orientación de P_3 con respecto a

$$[G_1^{(2)}(z)]^T = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0]$$

De lo dicho se desprende que θ_i representa una cantidad análoga a $\psi(k)$ en (2-55) y por lo mismo se justifica su denominación de espectro de fase de la TH.

Es más ventajoso expresar el espectro de fase en función de los coeficientes $B(k)$ y de los puntos espectrales P_i . Tomando en cuenta (2-64) y (2-70) obtenemos

$$\cos \theta_0 = \frac{B(0)}{P_0^{1/2}}$$

$$\cos \theta_1 = \frac{B(1)}{P_1^{1/2}}$$

$$\text{de} \begin{bmatrix} B(2) \\ B(3) \end{bmatrix} = 1/2 [H(1)] \begin{bmatrix} b(2) \\ b(3) \end{bmatrix}$$

premultiplicando ambos miembros por $[H(1)]$ se obtiene

$$\begin{bmatrix} b(2) \\ b(3) \end{bmatrix} = [H(1)] \begin{bmatrix} B(2) \\ B(3) \end{bmatrix}$$

de donde

$$b(2) = B(2) + B(3)$$

Igualmente se demuestra que

$$\begin{bmatrix} b(4) \\ b(5) \\ b(6) \\ b(7) \end{bmatrix} = [H(2)] \begin{bmatrix} B(4) \\ B(5) \\ B(6) \\ B(7) \end{bmatrix}$$

de donde

$$b(4) = B(4) + B(5) + B(6) + B(7)$$

entonces

$$\cos \theta_2 = \frac{\sum_{k=2}^3 B(k)}{(2 P_2)^{1/2}}$$

$$\cos \theta_3 = \frac{\sum_{k=4}^7 B(k)}{(4 P_3)^{1/2}}$$

en resumen

$$\cos \theta_0 = \frac{B(0)}{P_0^{1/2}}$$

$$\cos \theta_1 = \frac{B(1)}{P_1^{1/2}}$$

$$\cos \theta_2 = \frac{\sum_{k=2}^3 B(k)}{(2 P_2)^{1/2}} \quad (2-71)$$

$$\cos \theta_3 = \frac{\sum_{k=4}^7 B(k)}{(4 P_3)^{1/2}}$$

Estas fórmulas pueden generalizarse para obtener

$$\cos \theta_0 = \frac{B(0)}{P_0^{1/2}}$$

$$\cos \theta_s = \frac{\sum_{k=2^{s-1}}^{2^s-1} B(k)}{(2^{s-1} P_s)^{1/2}} \quad (2-72)$$

$$s = 1, 2, \dots, n$$

En síntesis se pueden hacer las siguientes observaciones generales:

- 1) El concepto de fase se define para un grupo de frecuencias cuya composición es la misma que la del espectro de potencia. Esto contrasta con el espectro de fase de la TDF que se define para frecuencias individuales.
- 2) Los valores de $\cos \theta_s$ en (2-72) son invariantes respecto a cualquier amplificación o atenuación de la secuencia N -periódica. En esto la TH y la TDF coinciden.
- 3) El espectro de fase de la TDF caracteriza el desplazamiento en una secuencia N -periódica. En forma similar los valores $\cos \theta_s$ en (2-72) caracterizan el desplazamiento en una secuencia N -periódica. Exceptuado el valor de $\cos \theta_0$ que es 1-periódico, los valores de $\cos \theta_s$ son 2^{s-1} -antiperiódicos respecto a desplazamientos cíclicos de la secuencia, como se demuestra a continuación.

Como se ha hecho para las demostraciones anteriores se elegirá el caso cuando $N = 8$. Para la demostración se utilizará un procedimiento gráfico.

Sea la curva de la fig. 2-22 con sus 8 muestras.

De acuerdo al concepto de desplazamiento cíclico, un desplazamiento cíclico unitario consistirá en desplazar todo el conjunto de muestras un lugar hacia la derecha (o hacia la izquierda), pasando la muestra del ex -

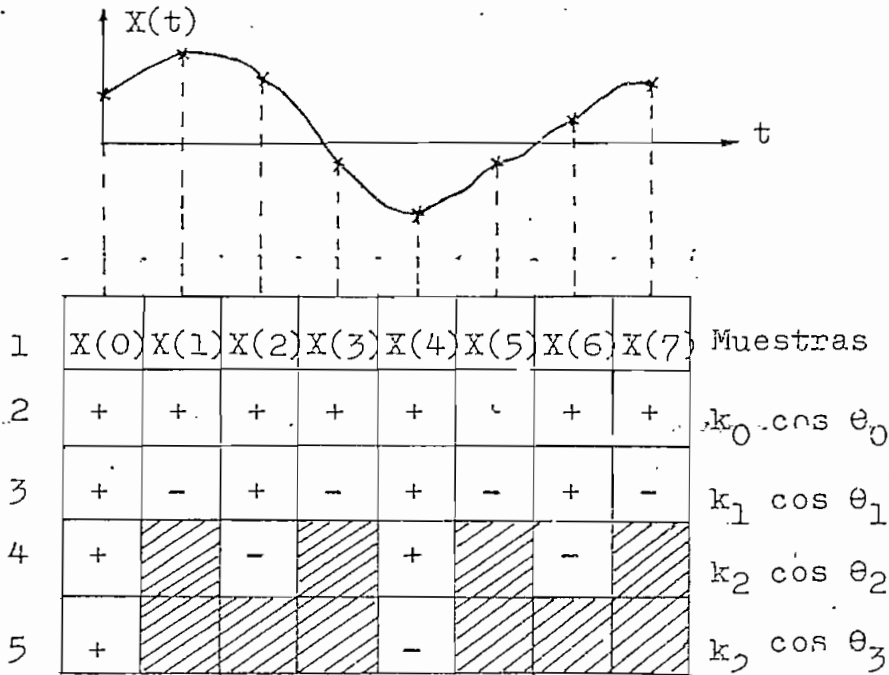


Fig. 2-22. Gráfico utilizado para ilustrar la variación de $\cos \theta_s$ con el desplazamiento

tremo derecho (o izquierdo) a ocupar el recuadro vacío dejado por la muestra del extremo izquierdo (o derecho), como se indica en las figs. 2-23, 2-24.

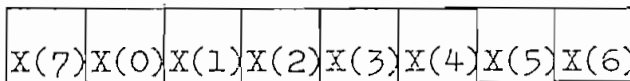


Fig. 2-23. Desplazamiento cíclico unitario hacia la derecha.

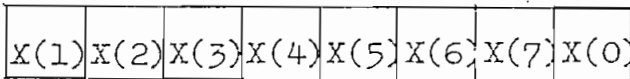


Fig. 2-24. Desplazamiento cíclico unitario hacia la izquierda.

Suponemos que las muestras se desplazan en esta forma, permaneciendo siempre dentro de los recuadros de la -

fig. 2-22.

Si examinamos las fórmulas (2-73) (ver más adelante) y el diagrama de flujo de la fig. 2-11 comprobaremos que el valor de $\cos \theta_0$ es igual al sumatorio de las 8 muestras multiplicado por una constante. El valor de $\cos \theta_1$ es igual al sumatorio de las 8 muestras afectadas alternativamente por signo positivo y negativo, y multiplicado por una constante. El valor de $\cos \theta_2$ es igual al sumatorio de las muestras de los recuadros primero, tercero, quinto y séptimo afectadas alternativamente por signos + y -, y multiplicado por una constante. Finalmente el valor de $\cos \theta_3$ es igual a la diferencia de las muestras de los recuadros primero y quinto, en ese orden, multiplicadas por una constante.

Esto se insinúa en la fig. 2-22: el valor de $k_s \cos \theta_s$ es igual al sumatorio de las muestras de la fila superior afectadas por el signo de los recuadros de la fila a la izquierda del valor del coseno correspondiente. Las muestras ubicadas sobre recuadros sin signo no intervienen en el sumatorio.

Como consecuencia de lo expuesto se tendrán los siguientes resultados:

$\cos \theta_0$ es 1-periódico, o sea es idéntico para cualquier valor de desplazamiento. Además es proporcional a la componente continua de la onda muestreada. El signo de

$\cos \theta_0$ es idéntico al de la componente continua de la onda.

$\cos \theta_1$ es 1-antiperiódico pues al producirse un desplazamiento unitario las muestras que estaban en recuadros con signo + pasarán a ocupar los recuadros con signo - y viceversa, y se tendrá un cambio de signo en el valor de $\cos \theta_1$.

$\cos \theta_2$ es 2-antiperiódico pues deberán producirse 2 desplazamientos en un mismo sentido para que las muestras que originalmente ocupaban recuadros con signo + pasen a ocupar recuadros con signo - y viceversa. El valor de $\cos \theta_2$ se repetirá con signo cambiado cada 2 desplazamientos.

Por último $\cos \theta_3$ es 4-antiperiódico pues se necesitarán 4 desplazamientos en un mismo sentido para que haya un intercambio en los signos de las muestras cuya diferencia multiplicada por una constante es igual a $\cos \theta_3$. Este valor se repetirá con signo cambiado cada cuatro desplazamientos.

Para dar una idea más clara de lo que es la periodicidad y antiperiodicidad damos a continuación una representación gráfica de la variación (hipotética) del valor de estos puntos espectrales en función del desplazamiento. Figs. 2-25 a 2-28.

4) Un punto del espectro de fase de la TDF representa la o

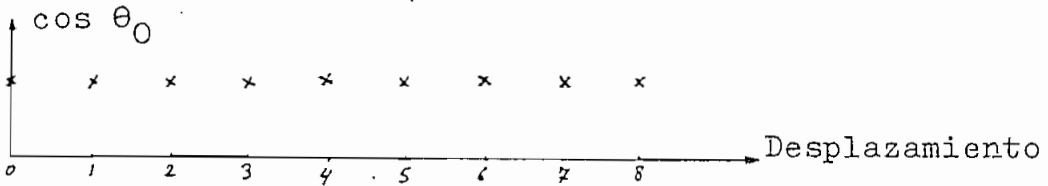


Fig. 2-25. 1-periódicidad de $\cos \theta_0$

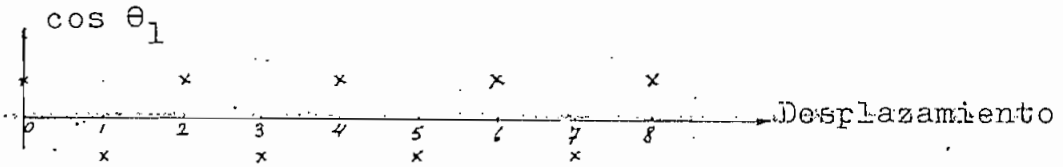


Fig. 2-26. 1-antiperiodicidad de $\cos \theta_1$

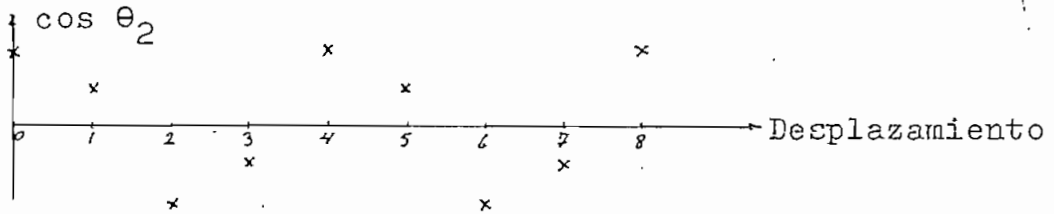


Fig. 2-27. 2-antiperiodicidad de $\cos \theta_2$

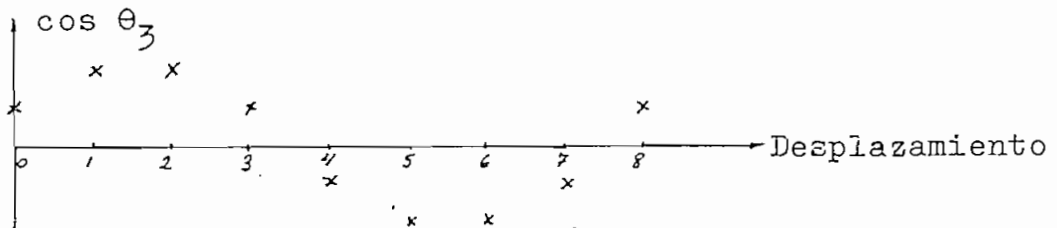


Fig. 2-28. 4-antiperiodicidad de $\cos \theta_3$

orientación del punto espectral de potencia correspondiente con respecto al eje real en un espacio de 2 dimensiones. Igualmente los valores θ_s en (2-72) representan el ángulo entre la representación vectorial de la -

secuencia $[G_{n-r}(n)]$ 2^r -antiperiódica en un espacio N-dimensional y un vector de referencia $[\hat{G}_{n-r}(n)]$. Siendo $[\hat{G}_{n-r}(n)]^T = [1 \ 0 \ \dots \ 0 \ -1 \ 0 \ \dots \ 0]$. En donde -1 es la componente (2^r+1) -ésima.

- 5) Los valores obtenidos son relativos al vector de referencia elegido, y, por lo mismo, son hasta cierto punto arbitrarios. Si nuestra elección hubiera sido distinta, cambiarían los valores, pero los principios de deducción serían los mismos.

2.11 c) Computación del espectro de fase

Hemos obtenido anteriormente el siguiente conjunto de ecuaciones.

$$P_0 = 1/8^2 X_3^2(0) = B^2(0)$$

$$P_1 = 1/8^2 X_3^2(1) = B^2(1)$$

$$P_2 = 2/8^2 \sum_{k=2}^3 X_2^2(k) = \sum_{k=2}^3 B^2(k)$$

$$P_3 = 4/8^2 \sum_{k=4}^7 X_1^2(k) = \sum_{k=4}^7 B^2(k)$$

Si premultiplicamos los dos miembros de la segunda ecuación (2-28) y de la segunda ecuación (2-27) por $[H(1)]$ y $[H(2)]$ respectivamente, obtenemos

$$2/8 \begin{bmatrix} X_2(2) \\ X_2(3) \end{bmatrix} = [H(1)] \begin{bmatrix} B(2) \\ B(3) \end{bmatrix}$$

y

$$4/8 \begin{bmatrix} X_1(4) \\ X_1(5) \\ X_1(6) \\ X_1(7) \end{bmatrix} = [H(2)] \begin{bmatrix} B(4) \\ B(5) \\ B(6) \\ B(7) \end{bmatrix}$$

de donde

$$B(2) + B(3) = \sum_{k=2}^3 B(k) = 2/8 X_2(2)$$

igualmente

$$\sum_{k=4}^7 B(k) = 4/8 X_1(4)$$

Sustituyendo estos valores y los dados por la ecuación

(2-38) en (2-71) se tiene

$$\cos \theta_0 = \frac{X_3(0)}{8 P_0^{1/2}}$$

$$\cos \theta_1 = \frac{X_3(1)}{8 P_1^{1/2}}$$

(2-73)

$$\cos \theta_2 = \frac{\sqrt{2} X_2(2)}{8 P_2^{1/2}}$$

$$\cos \theta_3 = \frac{2 X_1(4)}{8 P_3^{1/2}}$$

A partir de estas últimas ecuaciones obtenemos el diagrama de flujo para la computación del espectro de fase. Fig. 2-29.

De este diagrama se concluye que se requieren aproximadamente $N \log_2 N$ operaciones para obtener los $2(\log_2 N + 1)$ puntos espectrales de potencia y de fase.

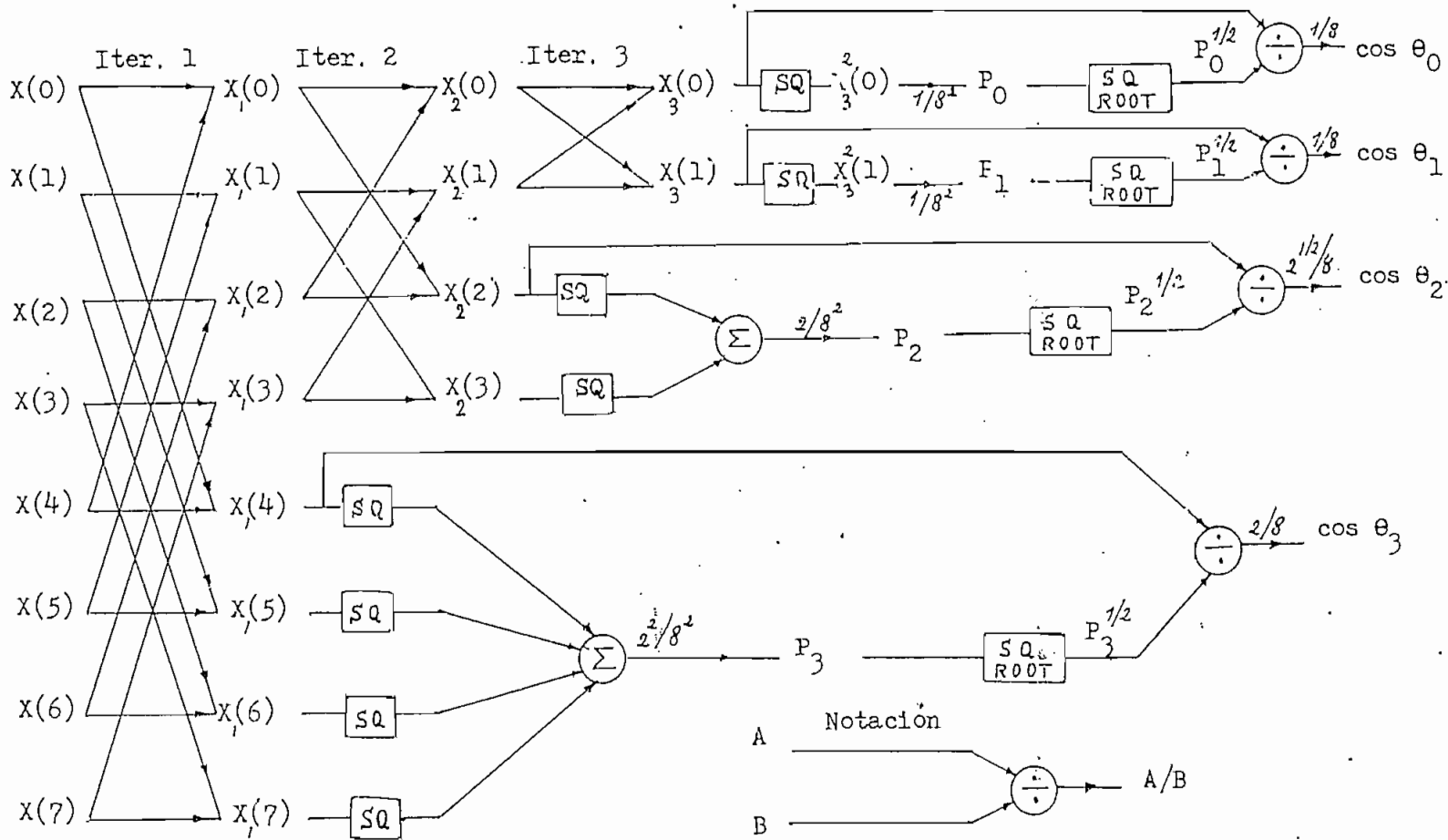


Fig. 2-29. Diagrama de flujo para la computación del espectro de fase (y de potencia) de la TH. $N = 8$

La expresión general para (2-73) es

$$\cos \theta_0 = \frac{X_n(0)}{N P_0^{1/2}} \quad (2-74)$$

$$\cos \theta_s = \frac{2^{(s-1)/2} X_{n+1-s}(2^{s-1})}{N P_s^{1/2}} \quad s = 1, 2, \dots, n \quad [25] .$$

2.12 La transformada de Hadamard moodificada

Hemos visto en el capítulo 1 la fórmula para la obtención de la transformada generalizada modificada. La hemos utilizado para la obtención de la TH modificada para $N = 8$. En este punto únicamente añadiremos algunas consideraciones sobre el espectro de potencia y la matriz de desplazamiento de la TH modificada.

Para $N = 8$ la matriz de transformación de la TH modificada tiene la forma

$$[MH(3)] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

El diagrama de flujo se da en la fig. 1-24.

$$\text{Sea } \{X^{(l)}(3)\} = \{X(l) \quad X(l+1) \quad \dots \quad X(l-1)\}$$

Desarrollando (2-79) obtenemos

$$BM^{(\ell)}(0) = BM(0)$$

$$BM^{(\ell)}(1) = (-1)^\ell BM(1)$$

$$\begin{bmatrix} BM^{(\ell)}(2) \\ BM^{(\ell)}(3) \end{bmatrix} = [DM(1)]^\ell \begin{bmatrix} BM(2) \\ BM(3) \end{bmatrix} \quad (2-80)$$

$$\begin{bmatrix} BM^{(\ell)}(4) \\ BM^{(\ell)}(5) \\ BM^{(\ell)}(6) \\ BM^{(\ell)}(7) \end{bmatrix} = [DM(2)]^\ell \begin{bmatrix} BM(4) \\ BM(5) \\ BM(6) \\ BM(7) \end{bmatrix}$$

en donde

$$[DM(1)] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[DM(2)] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Puesto que tanto $[DM(1)]$ como $[DM(2)]$ son ortogonales, de (2-80) se obtienen las siguientes equivalencias

$$BM^{(\ell)2}(0) = BM^2(0) = P_{M0}$$

$$BM^{(\ell)2}(1) = BM^2(1) = P_{M1}$$

$$\sum_{k=2}^3 BM^{(\ell)2}(k) = \sum_{k=2}^3 BM^2(k) = P_{M2} \quad (2-81)$$

$$\sum_{k=4}^7 BM^{(\ell)2}(k) = \sum_{k=4}^7 BM^2(k) = P_{M3}$$

O sea se tiene el mismo número de puntos espectrales para la TH y para la TH modificada, lo cual debe atribuirse a la analogía de la estructura diagonal en bloques de las matrices de desplazamiento $[A(3)]$ y $[AM(3)]$.

Del diagrama de flujo obtenemos

$$BM(0) = 1/8 X_3(0)$$

$$BM(1) = 1/8 X_3(1)$$

$$\begin{bmatrix} BM(2) \\ BM(3) \end{bmatrix} = 1/8 [H(1)] \begin{bmatrix} X_2(2) \\ X_2(3) \end{bmatrix} \quad (2-82)$$

$$\begin{bmatrix} BM(4) \\ BM(5) \\ BM(6) \\ BM(7) \end{bmatrix} = 2/8 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(4) \\ X_1(5) \\ X_1(6) \\ X_1(7) \end{bmatrix}$$

De las ecuaciones (2-82) y tomando en cuenta (2-81) obtenemos

$$P_{M0} = BM^2(0) = 1/8^2 X_3^2(0) = P_0$$

$$P_{M1} = BM^2(1) = 1/8^2 X_3^2(1) = P_1$$

$$P_{M2} = \sum_{k=2}^3 BM^2(k) = 2/8^2 \sum_{k=2}^3 X_2^2(k) = P_2 \quad (2-83)$$

$$P_{M3} = \sum_{k=4}^7 BM^2(k) = 4/8^2 \sum_{k=4}^7 X_1^2(k) = P_3$$

O sea los espectros de potencia de la TH y de la TH modificada son idénticos. De (2-83) se desprende que el diagrama de flujo para la obtención del espectro de potencia de la TH modificada es idéntico al de la TH. Fig. 2-18.

2.13 La transformada de Hadamard multidimensional

2.13 a) Definición

Igual que la TDF la TH puede extenderse a cualquier número de dimensiones. La transformada r-dimensional se de

fine como

$$B(u_1, \dots, u_r) = \sum_{x_1=0}^{N_1-1} \dots \sum_{x_r=0}^{N_r-1} f(x_1, \dots, x_r) (-1)^{\sum_{j=1}^r \langle x_j, u_j \rangle} \quad (2-84)$$

en donde $B(u_1, \dots, u_r)$ representa los coeficientes de la transformada

$f(x_1, \dots, x_r)$ son los datos de entrada

$$\langle x_i, u_i \rangle = \sum_{m=0}^{k_i-1} x_i(m) u_i(m) \quad (2-85)$$

$$u_i, x_i = 0, 1, \dots, N_i-1$$

$$i = 1, 2, \dots, r$$

$$k_i = \log_2 N_i$$

los términos $u_i(m)$ y $x_i(m)$ son las representaciones binarias de u_i y x_i respectivamente, o sea

$$u_i \text{ dec} = [u_i(k_i-1) u_i(k_i-2) \dots u_i(1) u_i(0)]_{\text{binario}}$$

Al tratar de la aplicación de la TH a la codificación de imágenes, veremos como se explicita esta fórmula para el caso en que $r = 2$.

2.13 b) Transformada inversa

$f(x_1, \dots, x_r)$ puede recuperarse en forma única con ayuda de la transformada inversa, esto es

$$f(x_1, \dots, x_r) = 1/N \sum_{u_1=0}^{N_1-1} \dots \sum_{u_r=0}^{N_r-1} B(u_1, \dots, u_r) (-1)^{\sum_{j=1}^r \langle u_j, x_j \rangle} \quad (2-86)$$

en donde

$$N = \prod_{i=1}^r N_i \quad (2-87)$$

2.13 c) Espectro de potencia

La extensión del espectro de potencia unidimensional de la TH al caso multidimensional conduce a la siguiente fórmula

$$P(z_1, \dots, z_r) = \sum_{u_1=2^{z_1-1}}^{2^{z_1}-1} \dots \sum_{u_r=2^{z_r-1}}^{2^{z_r}-1} B^2(u_1, \dots, u_r) \quad (2-88)$$

en donde

$$z_i = 0, 1, \dots, k_i$$

Puesto que para cada dimensión se tienen (k_i+1) puntos para r dimensiones se tendrán

$$\prod_{i=1}^r (1 + k_i) \text{ puntos}$$

2.13 d) Composición de frecuencia

La composición de frecuencia del espectro de potencia consta de todas las combinaciones posibles de grupos de frecuencias basadas en la estructura de armónicos impares en cada dimensión.

Para la dimensión i -ésima la agrupación es de la forma:

0

$N_i/2$

$N_i/4$

$1(N_i/8), 3(N_i/8)$

...

$1, 3, \dots, \frac{N_i}{2} - 1$

Como un ejemplo para una transformación tridimensional se tienen los siguientes grupos en cada dimensión

| | | |
|--------------------|----------------------|----------------------------|
| $N_1 = 16$ | $N_2 = 32$ | $N_3 = 64$ |
| 0 | 0 | 0 |
| 8 | 16 | 32 |
| 4 | 8 | 16 |
| 2,6 | 4,12 | 8,24 |
| 1,3,5,7 | 2,6,10,14 | 4,12,20,28 |
| | 1,3,5,7,9,11,13,15 | 2,6,10,14,18,22,26,30 |
| | | {1,3,5,7,9,11,13,15,17,19, |
| | | 21,23,25,27,29,31 |

El número total de puntos espectrales será

$$\prod_{i=1}^3 (1 + k_i)$$

siendo

$$k_1 = 4$$

$$k_2 = 5$$

$$k_3 = 6$$

Número total de puntos espectrales:

$$5 \times 6 \times 7 = 210$$

El espectro de potencia definido en (2-88) es invariante respecto a desplazamientos cíclicos de los datos - en cualquiera de las dimensiones.

2.13 e) Teorema de Parseval

El teorema de Parseval tiene vigencia también para - la TH multidimensional y se expresa en la forma

$$1/N \sum_{x_1=0}^{N_1-1} \dots \sum_{x_r=0}^{N_r-1} f^2(x_1, \dots, x_r) = \sum_{u_1=0}^{N_1-1} \dots \sum_{u_r=0}^{N_r-1} B^2(u_1, \dots, u_r) \quad (2-89)$$

[24] p. 233 y [26] .

Capítulo 3

RELACION ENTRE LA TRANSFORMADA DE WALSH Y LA DE HAAR

3.1 Definición

Igual que la transformada de Hadamard la transformada de Haar se define como

$$[A(n)] = 1/N [H_a(n)][X(n)]$$

en donde

$[X(n)]^T = [X(0) X(1) \dots X(N-1)]$ es la representación vectorial de la secuencia $\{X(n)\}$

$[A(n)]^T = [A(0) A(1) \dots A(N-1)]$ es el vector transformado. Los elementos $A(k)$, $k = 0, 1, \dots, N-1$, se denominan coeficientes de la transformada de Haar.

$[H_a(n)]$ es la matriz de transformación. En la fig.3-1 se tiene una matriz de Haar de orden 8.

Como se verá en la exposición que sigue, existe notable similitud entre la transformada de Walsh y la Haar. Por otra parte como se desprenderá de la factorización de $[H_a(n)]$ y del diagrama de flujo correspondiente, la transformada de Haar exige menos operaciones aritméticas para su computación. Por estas razones creemos oportuno analizar las relaciones existentes entre estas dos clases de transformadas. Tanto la transformada de Walsh como la de Haar se operan con el concurso de matrices ortogonales y cuadráticas $[H_w(n)]$ y $[H_a(n)]$ de orden 2^n cuyas filas son funciones de Walsh y de Haar respectivamente.

De las funciones de Walsh hemos hablado en el capítulo 2. Para las funciones de Haar se puede consultar G. Alexits, "Convergence Problems of Orthogonal series", New York, Pergamon, 1961, pp. 46-62.

Vamos a demostrar que existen relaciones simples entre las submatrices de Haar y de Walsh. Estas submatrices se obtienen por partición de matrices de las matrices $[H_a(n)]$ y $[H_w(n)]$, respectivamente, en $(n+1)$ matrices rectangulares $[MH_a(n)_k]$ y $[MH_w(n)_k]$ de dimensiones $2^{k-1} \times 2^n$ ($k = 1, \dots, n$). Las matrices y submatrices, para $n = 3$, se muestran en la fig. 3-1.

$$\text{funciones de Haar} \left\{ \begin{array}{l} \{ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \} \\ \{ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1 \} \\ \{ \sqrt{2} \ \sqrt{2} \ -\sqrt{2} \ -\sqrt{2} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \} \\ \{ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \sqrt{2} \ \sqrt{2} \ -\sqrt{2} \ -\sqrt{2} \} \\ \{ 2 \ -2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \} \\ \{ 0 \ 0 \ 2 \ -2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \} \\ \{ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2 \ -2 \ 0 \ 0 \} \\ \{ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2 \ -2 \} \end{array} \right. \begin{array}{l} [MH_a(3)_0] \\ [MH_a(3)_1] \\ [MH_a(3)_2] \\ [MH_a(3)_3] \end{array}$$

Matriz de Haar de orden 8

$$\text{funciones de Walsh} \left\{ \begin{array}{l} \{ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \} \\ \{ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1 \} \\ \{ 1 \ 1 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1 \ 1 \ 1 \} \\ \{ 1 \ 1 \ -1 \ -1 \ 1 \ 1 \ -1 \ -1 \} \\ \{ 1 \ -1 \ -1 \ 1 \ 1 \ -1 \ -1 \ 1 \} \\ \{ 1 \ -1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 1 \ 1 \ -1 \} \\ \{ 1 \ -1 \ 1 \ -1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 1 \} \\ \{ 1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 1 \ -1 \} \end{array} \right. \begin{array}{l} [MH_w(3)_0] \\ [MH_w(3)_1] \\ [MH_w(3)_2] \\ [MH_w(3)_3] \end{array}$$

Matriz de Walsh de orden 8

Fig. 3-1. Matrices de Haar y de Walsh y su partición en submatrices.

3.2 Relaciones básicas

La relación que existe entre las submatrices $[MH_a(n)_k]$ y $[MH_w(n)_k]$ es la siguiente:

$$[MH_w(n)_k] = 1/\sqrt{2^{k-1}}[S(k-1)][H_w(k-1)][MH_a(n)_k] \quad (3-1)$$

en donde $[H_w(k-1)]$ es la matriz de Walsh de orden 2^{k-1} y $[S(k-1)]$ es la siguiente matriz de permutación de orden 2^{k-1}

$$[S(k-1)] = \begin{bmatrix} & & & 1 \\ & 0 & 1 & \\ & & & \\ 1 & & 0 & \end{bmatrix} \quad (3-2)$$

La relación inversa se obtiene a partir de la fórmula (3-1) teniendo en cuenta que tanto $[S(k-1)]$ como $[H_w(k-1)]$ son simétricas y ortogonales.

En efecto si premultiplicamos ambos miembros de (3-1) por $[H_w(k-1)][S(k-1)]$ obtenemos

$$[H_w(k-1)][S(k-1)][MH_w(k-1)_k] = 2^{k-1}/\sqrt{2^{k-1}}[I(k-1)][MH_a(k-1)_k]$$

de donde

$$[MH_a(k-1)_k] = 1/\sqrt{2^{k-1}}[H_w(k-1)][S(k-1)][MH_w(k-1)_k] \quad (3-3)$$

3.3 Definiciones recursivas de las submatrices de Haar y de Walsh

Definimos en primer lugar los operadores \mathcal{H} , \mathcal{W} , \mathcal{W}' que

aplicados a una matriz $[M]$ de orden $m \times p$ generan las siguientes matrices de orden $2m \times 2p$.

Operador \mathcal{H}

$$[\mathcal{H}([M])] = \begin{bmatrix} [M] & [0] \\ [0] & [M] \end{bmatrix} \quad (3-4)$$

Operadores \mathcal{W} y \mathcal{W}'

Cada fila (a_1, a_2, \dots, a_m) de $[M]$ se reemplaza con 2 filas

$$\left. \begin{matrix} \mathcal{L} \\ \mathcal{L}' \end{matrix} \right\} \text{ para } \mathcal{W} \quad \text{y} \quad \left. \begin{matrix} \mathcal{L}' \\ \mathcal{L} \end{matrix} \right\} \text{ para } \mathcal{W}'$$

en donde

$$\mathcal{L} = (a_1, \dots, a_m, \text{signo de } (a_1 x a_m) x (a_1, \dots, a_m)) \quad (3-5)$$

$$\mathcal{L}' = (a_1, \dots, a_m, \text{signo de } (-a_1 x a_m) x (a_1, \dots, a_m)) \quad (3-6)$$

Usando estos operadores es posible demostrar que

$$[MH_a(n)_k] = \sqrt{2} [H([MH_a(n-1)_{k-1}])] \quad (3-7)$$

$$k = 1, 2, \dots, n$$

$$[MH_w(n)_k] = [W([MH_w(n-1)_{k-1}])] \quad (3-8)$$

$$k = 1, 2, \dots, n$$

Y globalmente para las matrices de Walsh se tiene

$$[H_w(n)] = [W([H_w(n-1)])] \quad (3-9)$$

Estas fórmulas se clarifican con los siguientes ejemplos

Sean dadas las matrices

$$[H_a(2)] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{matrix} [MH_a(2)_0] \\ [MH_a(2)_1] \\ [MH_a(2)_2] \end{matrix}$$

$$[S(m)][W'([M])] = [W([S(m-1)])[M]] \quad (3-11)$$

Ejemplo

Sea

$$[S(m)] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[M] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left(W \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right) = \left(W' \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \left(W' \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

de donde se obtiene la identidad

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sea $[M] = \{m_{ij}\}$ una matriz $(m \times p)$, $[N]$ una matriz $(p \times q)$, y

$[P] = [M][N] = \{p_{ij}\}$ una matriz $(m \times q)$

Se dice que la matriz producto $[P]$ es signo-invariante (signo-contravariante) si para todo i el producto -

$(p_{i1} \times p_{iq})$ tiene el mismo (opuesto) signo que $(m_{i1} \times m_{ip})$.

Entonces

si $[P]$ es signo-invariante

$$[W([M])][H([N])] = [W([P])] \quad (3-12)$$

si $[P]$ es signo-contravariante

$$[W([M])][H([N])] = [W'([P])] \quad (3-13)$$

Sea

$$[M] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

y

$$[N] = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

entonces

$$[P] = [M][N] = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

para $[M]$ y $[P]$ se tiene que $m_{i1} \times m_{i2}$ tiene signo opuesto a $p_{i1} \times p_{i2}$ ($i = 1, 2$).

Luego $[P] = [H_w(1)][MH_a(2)_2]$ es signo contravariante

Entonces debe tenerse también que

$$[W([H_w(2)])][H([MH_a(3)_3])] = [W'([P])] = [W'([H_w(2) \\ [MH_a(3)_3]])]$$

lo cual es fácil comprobar.

Con estos elementos podemos proceder a la demostración de (3-1).

Asumiendo que (3-2) es verdadero para el orden $(n-1)$ tenemos

$$[MH_w(n-1)_k] = 1/\sqrt{2^{k-1}}[S(k-1)][H_w(k-1)][MH_a(n-1)_k] \quad (3-14)$$

$$k = 1, 2, \dots, (n-1)$$

Aplicamos el operador W a ambos miembros de (3-14)

$$[W([MH_W(n-1)_k])] = 1/\sqrt{2^{k-1}} [W([S(k-1)] [H_W(k-1)] [MH_a(n-1)_k])]$$

Utilizando (3-8) para el miembro de la izquierda y (3-11) para el miembro de la derecha se tiene

$$[MH_W(n)_{k+1}] = [S(k)] [W'([H_W(k-1)] [MH_a(n-1)_k])] (1/\sqrt{2^{k-1}})$$

Se ha comprobado anteriormente que el producto:

$[H_W(k-1)] [MH_a(n)_k]$ es signo-contravariante. Entonces utilizando (3-13)

$$[MH_W(n)_{k+1}] = 1/\sqrt{2^{k-1}} [S(k)] [W'([H_W(k-1)])] [H([MH_a(n-1)_k])]$$

Tomando en cuenta (3-7) y (3-9) tenemos

$$[MH_W(n)_{k+1}] = 1/\sqrt{2^{k-1}} [S(k)] [H_W(k)] [MH(n)_{k+1}] \quad (3-1)$$

Así se ha obtenido (3-1) para $k = 2, 3, \dots, n$. Puesto que - (3-1) es obvio para $k = 1$ (Las dos primeras filas de las 2 matrices son iguales), se tiene la prueba completa de (3-1) y en consecuencia de (3-3)

Ejemplo:

Verificar que

$$\begin{aligned} [MH_W(2)_2] &= 1/\sqrt{2} [S(1)] [H_W(1)] [MH_a(2)_2] \\ &= 1/\sqrt{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

que es efectivamente el valor de $[MH_W(2)_2]$

3.4 Aplicación a los elementos transformados

Las relaciones matriciales (3-1) y (3-3) implican a su vez relaciones entre los vectores transformados $[A(n)]$ y $[B(n)]$, en donde $[A(n)]$ es el vector transformado en el dominio de Haar.

Para un vector $[X(3)]$ se tiene

$$\begin{bmatrix} B(0) \\ B(1) \\ B(2) \\ B(3) \\ B(4) \\ B(5) \\ B(6) \\ B(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \\ X(4) \\ X(5) \\ X(6) \\ X(7) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A(0) \\ A(1) \\ A(2) \\ A(3) \\ A(4) \\ A(5) \\ A(6) \\ A(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \\ X(4) \\ X(5) \\ X(6) \\ X(7) \end{bmatrix}$$

De donde por simple inspección

$$B(0) = A(0)$$

Si aplicamos a los elementos correspondientes de $[X(n)]$ - las matrices de transformación contenidas en (3-1) obtenemos:

$B(1) = A(1)$ teniendo en cuenta que $[S(0)] = [H_w(0)] = 1$

$$\begin{bmatrix} B(2) \\ B(3) \end{bmatrix} = 1/\sqrt{2} [S(1)][H_w(1)] \begin{bmatrix} A(2) \\ A(3) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} B(4) \\ B(5) \\ B(6) \\ B(7) \end{bmatrix} = 1/2 [S(2)][H_w(2)] \begin{bmatrix} A(4) \\ A(5) \\ A(6) \\ A(7) \end{bmatrix}$$

generalizando

$$\begin{bmatrix} B(2^{k-1}) \\ \vdots \\ B(2^k-1) \end{bmatrix} = 1/\sqrt{2^{k-1}} [S(k-1)][H_w(k-1)] \begin{bmatrix} A(2^{k-1}) \\ \vdots \\ A(2^k-1) \end{bmatrix} \quad (3-15)$$

$$k = 1, 2, \dots, n$$

que nos da la relación entre los coeficientes de las dos transformadas a partir de $B(1)$ y $A(1)$.

La relación inversa será

$$A(0) = B(0)$$

y para los coeficientes restantes

$$\begin{bmatrix} A(2^{k-1}) \\ \vdots \\ A(2^k-1) \end{bmatrix} = 1/\sqrt{2^{k-1}} [H_w(k-1)][S(k-1)] \begin{bmatrix} B(2^{k-1}) \\ \vdots \\ B(2^k-1) \end{bmatrix} \quad (3-16)$$

$$k = 1, 2, \dots, n$$

Si llamamos zona al conjunto de coeficientes de la transformación que aparecen en estas relaciones, entonces se ve que una zona en una transformación determina la correspondiente zona de la otra transformación. Esta propiedad muestra que si aproximamos $[X(n)]$ con el mismo conjun-

to de subzonas de los coeficientes de transformación B(n) y A(n) o, en especial, si truncamos estos coeficientes hacia el fin de una zona obtenemos el mismo vector aproximado después de las transformaciones inversas.

Vemos que las zonas correspondientes de (3-15) están relacionadas por medio de una transformación ortogonal. En efecto, si elevamos al cuadrado los dos miembros de (3-15) obtenemos

$$\sum_{\ell=2^{k-1}}^{2^k-1} B^2(\ell) = \sum_{\ell=2^{k-1}}^{2^k-1} A^2(\ell) \quad (3-17)$$

O sea que la energía contenida en zonas correspondientes del vector transformado es la misma (Teorema de Parseval).

3.5 Algoritmo rápido

Dada su estructura sencilla la matriz de Haar es fácilmente factorizable. En un primer paso tenemos.

$$[H_a(3)] =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & \\ 1 & & & & & & & & \\ & \sqrt{2} & & & & & & & \\ & & \sqrt{2} & & & & & & \\ & & & \sqrt{2} & & & & & \\ & & & & \sqrt{2} & & & & \\ & & & & & \sqrt{2} & & & \\ & & & & & & \sqrt{2} & & \\ & & & & & & & \sqrt{2} & \\ & & & & & & & & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Si factorizamos una vez más la segunda matriz tenemos

$$[H_a(3)] =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & & & & & & \\ 1 & -1 & & & & & & \\ & & \sqrt{2} & & & & & \\ & & & \sqrt{2} & & & & \\ & & & & \sqrt{2} & & & \\ & & & & & \sqrt{2} & & \\ & & & & & & \sqrt{2} & \\ & & & & & & & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 1 & & & & \\ 1 & -1 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 1 & -1 & & & & \\ & & & & \sqrt{2} & & & \\ & & & & & \sqrt{2} & & \\ & & & & & & \sqrt{2} & \\ & & & & & & & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & & & & \\ & & 1 & 1 & & & & \\ & & & & 1 & 1 & & \\ & & & & & & 1 & 1 \\ 1 & -1 & & & & & & \\ & & 1 & -1 & & & & \\ & & & & 1 & -1 & & \\ & & & & & & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

[9] .

A partir de este factoro de matrices y siguiendo el mismo procedimiento indicado en el capítulo 1 se obtiene el diagrama de flujo para la computación de la transformada de Haar , (Algoritmo rápido) , Fig. 3-2.

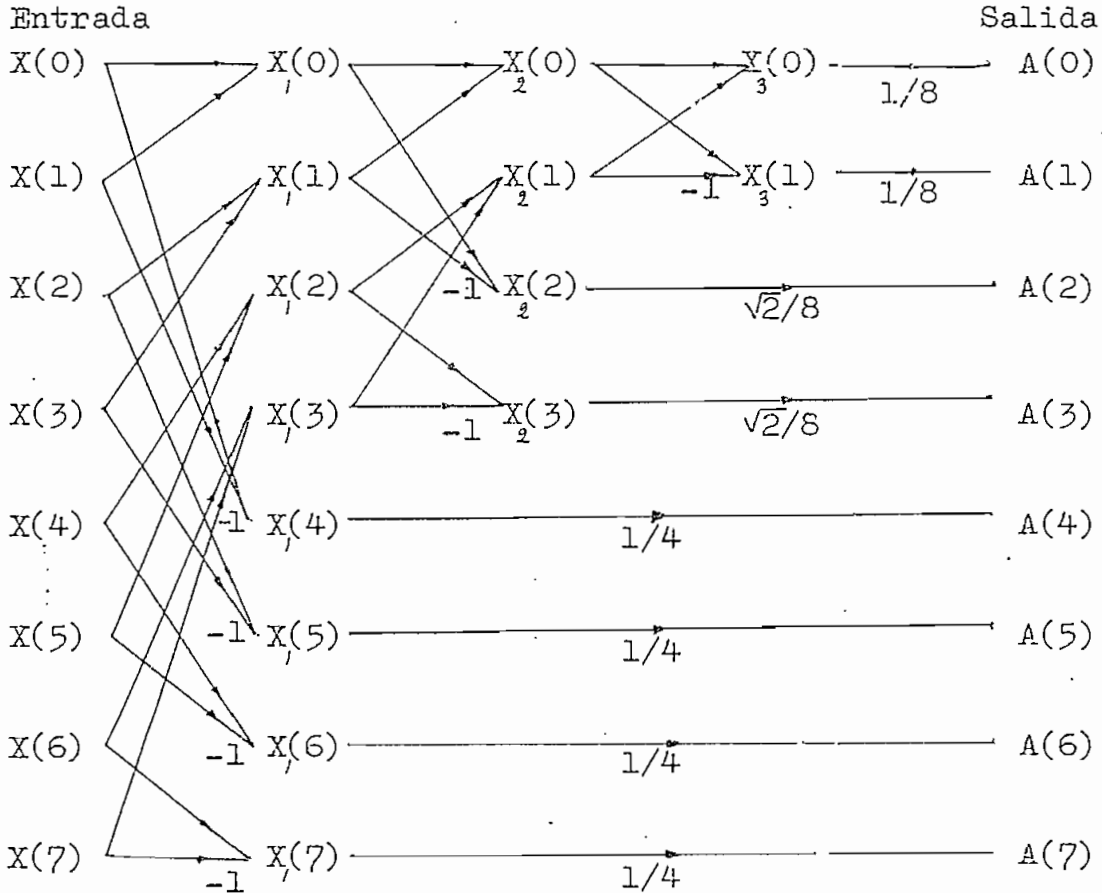


Fig. 3-2. Diagrama de flujo para la computación de la transformada de Haar. N = 8

Aplicando la relación (3-1) podemos obtener el diagrama de flujo de la transformada de Walsh a partir del diagrama de la fig. 3-2.

Para los dos primeros coeficientes de la transformada de Walsh el diagrama es idéntico.

Para B(2) y B(3) tenemos

$$\begin{aligned}
 [MH_w(3)_2] &= 1/\sqrt{2} [S(1)][H_w(1)][MH_a(3)_2] \\
 &= 1/\sqrt{2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & | & 1 & 1 & | & \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & | & 1 & -1 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{vmatrix} \quad (3-18)
 \end{aligned}$$

Para los restantes coeficientes

$$[MH(3)] = 1/2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} \quad (3-19)$$

Si se multiplican columnas por filas el orden de las matrices en (3-18) y (3-19) deberá invertirse, y es así cómo aparecerá la secuencia de operaciones en el diagrama de flujo.

Introduciendo en el diagrama de flujo de la fig. 3-2 el conjunto de operaciones representado por (3-18) y (3-19) se obtiene el diagrama de flujo de la transformada de Walsh. Fig. 3-3.

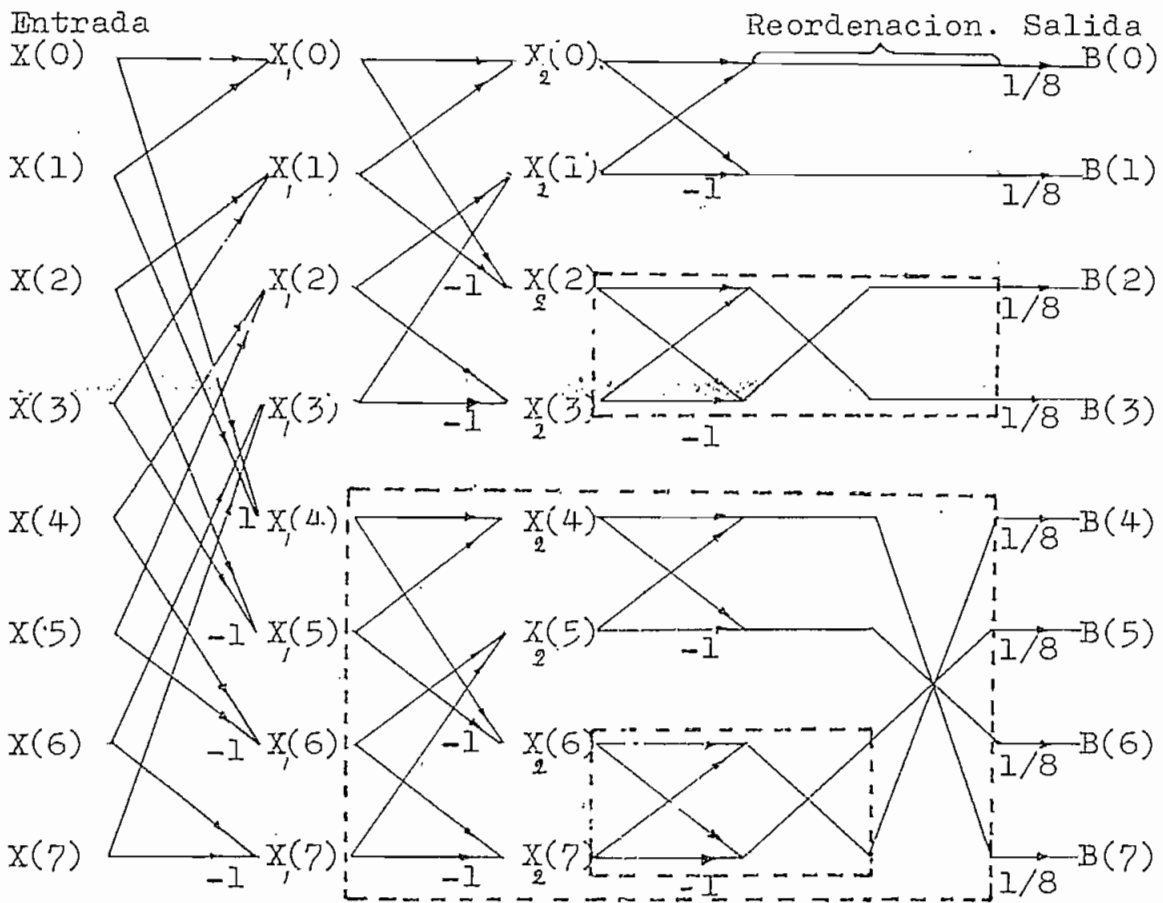


Fig. 3-3. Diagrama de flujo para la obtención de la transformada de Walsh a partir de la de Haar. Los recuadros en líneas de segmentos indican las matrices $[H_w(k-1)]$ seguidas por las reordenaciones introducidas por las matrices $[S(k-1)]$.

Este sería otro método para obtener los coeficientes de la transformada de Hadamard en orden secuencial.

De la observación del diagrama de flujo se concluye que la computación de la transformada de Haar y la de Walsh de un vector de 2^n dimensiones requiere $2(2^n-1)$ y $n2^n$ operaciones elementales respectivamente. Así pues cuan

de son aplicables las relaciones (3-1) y (3-3) la transformada de Haar se revela más rápida que la de Walsh. Para $N = 2^8 = 256$ tenemos

$2(2^8-1) = 2(255) = 510$ operaciones para la trans. de Haar

$8 \times 2^8 = 8 \times 256 = 2048$ operaciones para la trans. de Walsh

[27] .

Capítulo 4

LA TRANSFORMADA BIFORE COMPLEJA

La transformada de Hadamard que estudiamos en el capítulo 2 a pesar de tener un vasto campo de aplicaciones, está limitada al procesamiento de datos de entrada reales. Para el procesamiento de datos complejos se utiliza la transformada BIFORE compleja cuyas propiedades vamos a estudiar someramente.

4.1 Definición

La transformada BIFORE compleja de una secuencia N-periódica se define como

$$[F(n)] = 1/N [BC(n)][X(n)] \quad (4-1)$$

en donde

$[X(n)]^T = [X(0) X(1) \dots X(N-1)]$ es la representación vectorial de la secuencia de datos.

$[F(n)]^T = [F(0) F(1) \dots F(N-1)]$ es el vector transformado.

La matriz de transformación $[BC(n)]$ es una matriz compleja cuya obtención a partir de la fórmula general se ha dado en el capítulo 1. A continuación se indica la matriz $[BC(3)]$

$$[BC(3)] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i & 1 & -i & -1 & i \\ 1 & i & -1 & -i & 1 & i & -1 & -i \\ 1 & 1 & -i & -i & -1 & -1 & i & i \\ 1 & -1 & -i & i & -1 & 1 & i & -i \\ 1 & 1 & i & i & -1 & -1 & -i & -i \\ 1 & -1 & i & -i & -1 & 1 & -i & i \end{bmatrix}$$

4.2 Inversión

La recuperación de la forma original se obtiene aplicando al vector transformado la matriz $[\overline{BC}(n)]^T$ o sea

$$[X(n)] = [\overline{BC}(n)]^T [F(n)] \quad (4-2)$$

en donde \overline{BC} y T indican conjugada y transpuesta respectivamente.

4.3 Algoritmo rápido

El algoritmo rápido para la transformada RIFORE compleja es idéntico al de la transformada discreta generalizada, con sólo elegir los factores apropiados. En la fig. 4-1 se da el diagrama de flujo correspondiente.

4.4 Espectro de potencia

El desarrollo del espectro de potencia se ilustra mejor considerando un caso determinado: $N = 8$
Sea la secuencia $\{X^{(l)}(3)\}$ la secuencia $\{X(3)\}$ desplazada a la izquierda l posiciones.

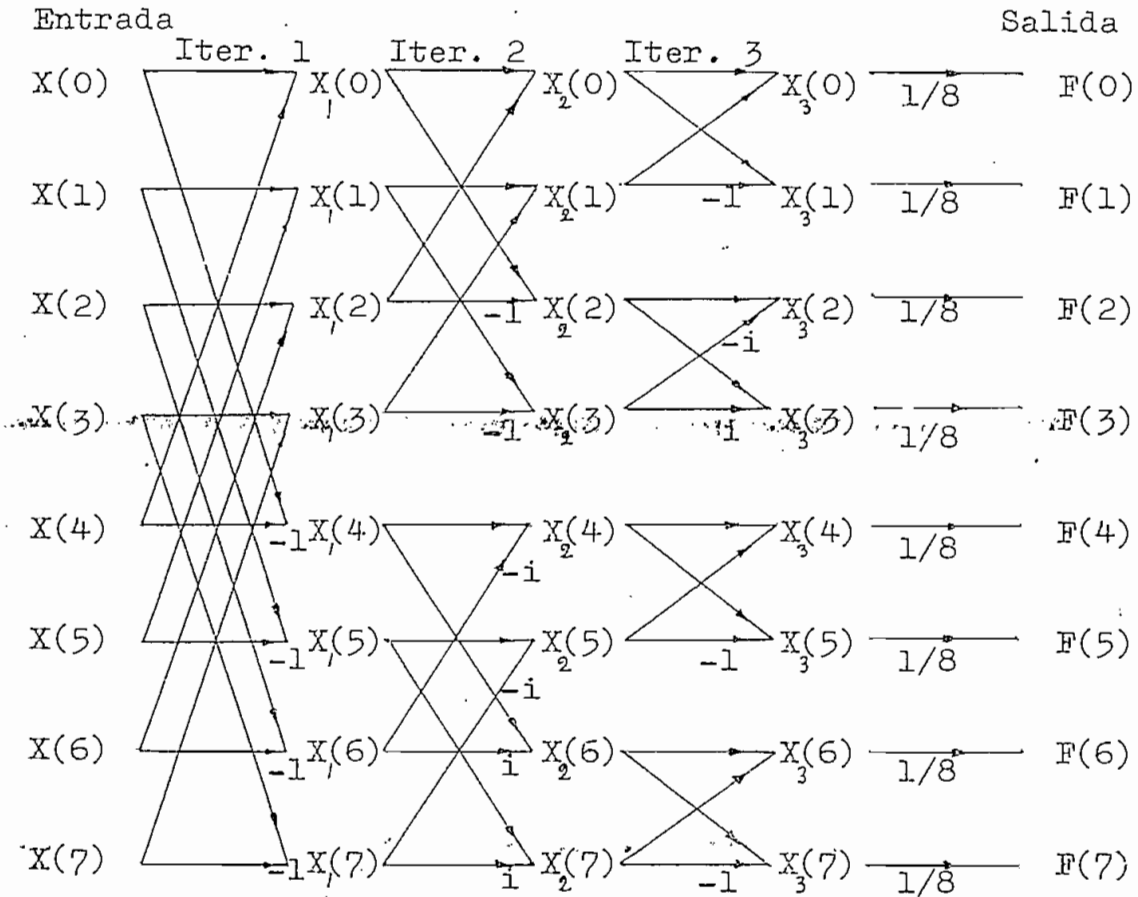


Fig. 4-1. Diagrama de flujo para la computación de la transformada BIFFORE compleja. $N = 8$

$$[X^{(l)}(3)]^T = [X(l) \ X(l+1) \ \dots \ X(l-1)]$$

$$l = 1, 2, \dots, 7$$

Si $l = 1$

$$[X^{(1)}(3)] = [S^{(1)}(3)][X(3)]$$

en donde $[S^{(1)}(3)]$ tiene la forma indicada en (2-31)

Entonces la transformada de $[X^{(1)}(3)]$ será

$$[F^{(1)}(3)] = 1/8 [BC(3)][S^{(1)}(3)][X(3)]$$

puesto que

$$[\overline{BC}(z)]^T [BC(z)] = 8 [I(z)]$$

$$\begin{aligned} [F^{(1)}(z)] &= 1/8 [BC(z)] [S^{(1)}(z)] [\overline{BC}(z)]^T 1/8 [BC(z)] [X(z)] \\ &= 1/8 [BC(z)] [S^{(1)}(z)] [\overline{BC}(z)]^T [F(z)] \end{aligned}$$

si hacemos

$$[A(z)] = 1/8 [BC(z)] [S^{(1)}(z)] [\overline{BC}(z)]^T \quad (4-3)$$

$$[F^{(1)}(z)] = [A(z)] [F(z)] \quad (4-4)$$

La evaluación de $[A(z)]$ nos da

$$[A(z)] = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & -1 & & & & & & \\ & & i & & & & & \\ & & & -i & & & & \\ & & & & \frac{1+i}{2} & \frac{-1+i}{2} & & \\ & & & & \frac{1-i}{2} & \frac{-1-i}{2} & & \\ & & & & & & \frac{1-i}{2} & \frac{-1-i}{2} \\ & & & & & & & \frac{1+i}{2} & \frac{-1+i}{2} \end{pmatrix} \quad (4-5)$$

Igualmente

$$[F^{(2)}(z)] = [A(z)] [F^{(1)}(z)] = [A(z)]^2 [F(z)]$$

etc.

En general

$$[F^{(l)}(z)] = [A(z)]^l [F(z)] \quad (4-6)$$

De (4-5) se ve que $[A(z)]$ está constituida por matrices cu^{yo} orden aumenta a lo largo de la diagonal. La elevación a

una potencia ℓ no cambia la estructura de estos bloques diagonales.

En base a esto se pueden obtener las siguientes identidades:

$$F^{(\ell)}(0) = F(0)$$

$$F^{(\ell)}(1) = (-1)^\ell F(1)$$

$$F^{(\ell)}(2) = i^\ell F(2)$$

$$F^{(\ell)}(3) = -i^\ell F(3)$$

$$\begin{bmatrix} F^{(\ell)}(4) \\ F^{(\ell)}(5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1+i}{2} & \frac{-1+i}{2} \\ \frac{1-i}{2} & \frac{-1-i}{2} \end{bmatrix}^\ell \begin{bmatrix} F(4) \\ F(5) \end{bmatrix} \quad (4-7)$$

$$\begin{bmatrix} F^{(\ell)}(6) \\ F^{(\ell)}(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1-i}{2} & \frac{-1-i}{2} \\ \frac{1+i}{2} & \frac{-1+i}{2} \end{bmatrix}^\ell \begin{bmatrix} F(6) \\ F(7) \end{bmatrix}$$

Cada uno de los bloques diagonales de la matriz de desplazamiento $[A(3)]$ está constituido por una matriz unitaria, de donde se tiene que

$$|F^{(\ell)}(0)|^2 = |F(0)|^2$$

$$|F^{(\ell)}(1)|^2 = |F(1)|^2$$

$$|F^{(\ell)}(2)|^2 = |F(2)|^2$$

$$|F^{(\ell)}(3)|^2 = |F(3)|^2$$

(4-8)

$$|F^{(\ell)}(4)|^2 + |F^{(\ell)}(5)|^2 = |F(4)|^2 + |F(5)|^2$$

$$|F^{(\ell)}(6)|^2 + |F^{(\ell)}(7)|^2 = |F(6)|^2 + |F(7)|^2$$

Los valores obtenidos representan la magnitud del espec -

tro de potencia de la transformada. Puesto que la magnitud del espectro es invariante respecto de cualquier desplazamiento de la secuencia de entrada, se concluye que cada conjunto de invariantes contenidos en (4-8) representa un punto del espectro. C sea que para una secuencia $\{X(3)\}$ se tienen 6 puntos para el espectro de potencia. En general se puede demostrar que la transformada BIFORE compleja de una secuencia $\{X(n)\}$ tiene $2n$ puntos espectrales de potencia.

En consecuencia el espectro de potencia se define como, sigue:

$$\begin{aligned}
 P_0 &= |F(0)|^2 \\
 P_1 &= |F(1)|^2 \\
 P_2 &= |F(2)|^2 \\
 P_3 &= |F(3)|^2 \\
 P_4 &= \sum_{k=4}^5 |F(k)|^2 \\
 P_5 &= \sum_{k=6}^7 |F(k)|^2
 \end{aligned}
 \tag{4-9}$$

En general

$$\begin{aligned}
 P_0 &= |F(0)|^2 \\
 P_1 &= |F(1)|^2 \\
 P_{(2s+2)} &= \sum_{k=2^{s+1}}^{3 \cdot 2^s - 1} |F(k)|^2 \\
 P_{(2s+3)} &= \sum_{k=3 \cdot 2^s}^{2^{s+2} - 1} |F(k)|^2
 \end{aligned}
 \tag{4-10}$$

4.5 Interpretación física del espectro de potencia

Igual que en el caso de la TH para la TBC podemos llegar a definir una serie de subsecuencias que corresponden a cada punto del espectro. Puesto que estos puntos suman en total $m = 2 \log_2 N = 2n$, el número de subsecuencias debe ser también igual a $2n$.

Si $N = 8$ la secuencia de datos deberá descomponerse en la forma:

$$\begin{aligned} \{X(z)\} &= \sum_{j=0}^5 \{G_j(z)\} \\ &= \{G_0(z)\} + \{G_1(z)\} + \{G_2(z)\} + \{G_3(z)\} + \{G_4(z)\} + \{G_5(z)\} \end{aligned}$$

(4-11)

Como se hizo para la TH las subsecuencias se organizarán de tal manera que cada secuencia conste de 8 elementos. Si delineamos un diagrama de flujo para la obtención de estas subsecuencias, los elementos que las constituyen deben estar en la misma línea horizontal que los coeficientes de la TBC que entran en la composición de ese punto espectral. De la matriz de desplazamiento se desprende que los 4 primeros puntos espectrales están constituidos por el cuadrado de un solo coeficiente, y los dos últimos por la suma de los cuadrados de 2 coeficientes. Entonces para las 4 primeras subsecuencias elegiremos los elementos que se encuentran después de la tercera iteración: $X_3(k)$, y para las dos últimas los elementos que se encuentran después

de la segunda iteración (fig. 4-1). Se tendrá el factor $1/2$ para cada iteración.

La obtención de los elementos de las subsecuencias - se indica en la fig. 4-2.

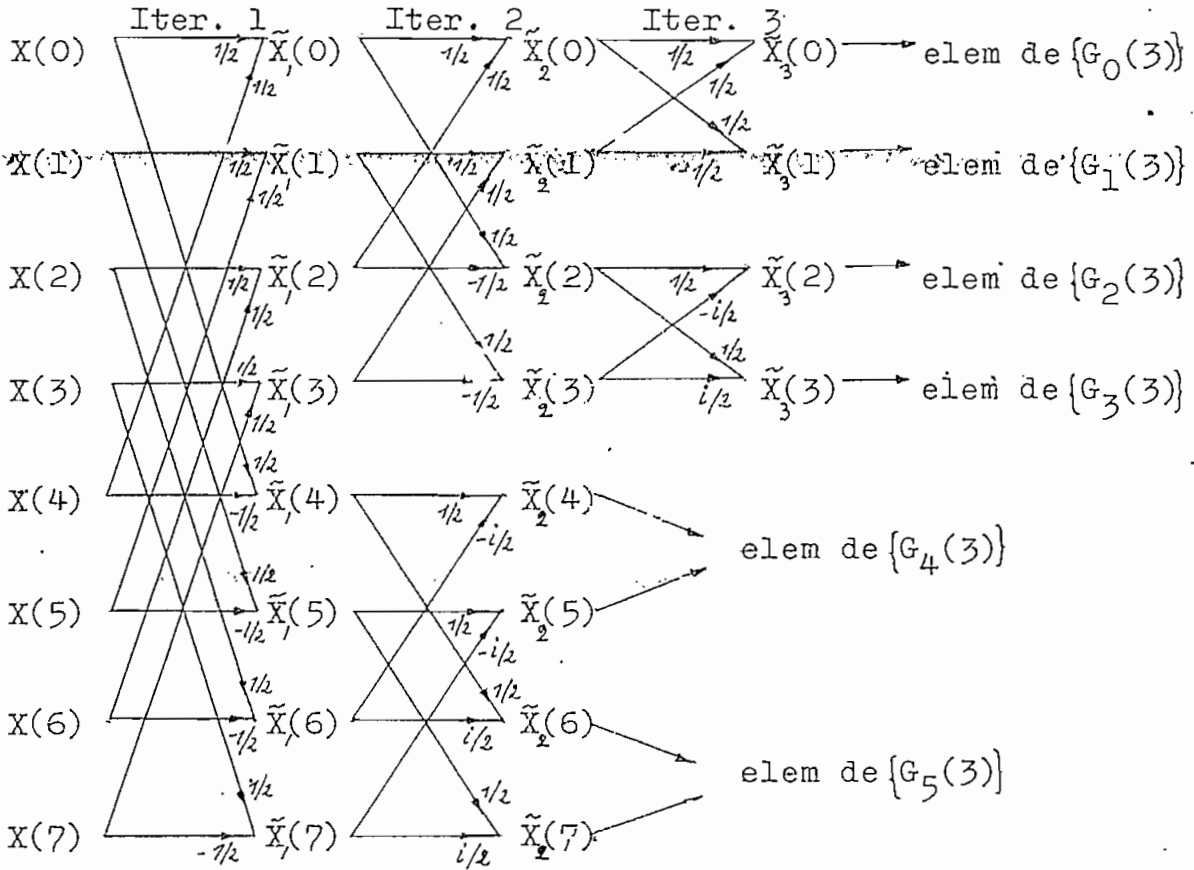


Fig. 4-2. Diagrama de flujo para la obtención de las subsecuencias $\{G_j(n)\}$. $N = 8$

Una vez obtenidos los elementos de cada subsecuencia los debemos ordenar en secuencias periódicas y antiperiódicas como sigue:

- $\{G_0(3)\}$ 1-periódica
- $\{G_1(3)\}$ 1-antiperiódica

$\{G_2(3)\}$ 2-antiperiódica

$\{G_3(3)\}$ 2-antiperiódica

$\{G_4(3)\}$ 4-antiperiódica

$\{G_5(3)\}$ 4-antiperiódica

Para $\{G_0(3)\}$ repetimos $\tilde{X}_3(0)$ 8 veces con el mismo signo y tenemos una secuencia 1-periódica

Para $\{G_1(3)\}$ repetimos $\tilde{X}_3(1)$ 8 veces alternando el signo cada vez: secuencia 1-antiperiódica

Para $\{G_2(3)\}$ repetimos el elemento $\tilde{X}_3(2)$ multiplicándolo primero por 1 y luego por i y cambiando el signo cada dos elementos: secuencia 2-antiperiódica

Para $\{G_3(3)\}$ utilizamos $\tilde{X}_3(3)$ afectado por los factores $1 -i$ (en ese orden) y cambiando el signo cada dos elementos: secuencia 2-antiperiódica

Para $\{G_4(3)\}$ los elementos $\tilde{X}_2(4)$ y $\tilde{X}_2(5)$ afectados por los factores $1 \quad 1 \quad i \quad i$ (en ese orden) y cambiando de signo cada 4 elementos: secuencia 4-antiperiódica

Para $\{G_5(3)\}$ los elementos $\tilde{X}_2(6)$ y $\tilde{X}_2(7)$ afectados por los factores $1 \quad 1 \quad -i \quad -i$ (en ese orden) cambiando de signo cada 4 elementos: secuencia 4-antiperiódica.

Las subsecuencias quedan en la forma:

$$\{X(3)\} = \begin{bmatrix} \tilde{X}(0) & \tilde{X}(1) & \tilde{X}(2) & \tilde{X}(3) & \tilde{X}(4) & \tilde{X}(6) \\ \tilde{X}(0) & -\tilde{X}(1) & i\tilde{X}(2) & -i\tilde{X}(3) & \tilde{X}(5) & \tilde{X}(7) \\ \tilde{X}(0) & \tilde{X}(1) & -\tilde{X}(2) & -\tilde{X}(3) & i\tilde{X}(4) & -i\tilde{X}(6) \\ \tilde{X}(0) & -\tilde{X}(1) & -i\tilde{X}(2) & i\tilde{X}(3) & i\tilde{X}(5) & -i\tilde{X}(7) \\ \tilde{X}(0) & \tilde{X}(1) & \tilde{X}(2) & \tilde{X}(3) & -\tilde{X}(4) & -\tilde{X}(6) \\ \tilde{X}(0) & -\tilde{X}(1) & i\tilde{X}(2) & -i\tilde{X}(3) & -\tilde{X}(5) & -\tilde{X}(7) \\ \tilde{X}(0) & \tilde{X}(1) & -\tilde{X}(2) & -\tilde{X}(3) & -i\tilde{X}(4) & i\tilde{X}(6) \\ \tilde{X}(0) & -\tilde{X}(1) & -i\tilde{X}(2) & i\tilde{X}(3) & -i\tilde{X}(5) & i\tilde{X}(7) \end{bmatrix} \quad (4-12)$$

Se puede comprobar fácilmente que estas subsecuencias son mutuamente ortogonales.

Se desprende de lo expuesto anteriormente que la presencia del factor i nos permite aumentar en número de subsecuencias en que se descompone la secuencia $\{X(n)\}$.

A partir del diagrama de flujo de la fig. 4-2 obtenemos

$$\begin{aligned} \tilde{X}_3(0) &= 1/8[X(0)+X(1)+X(2)+X(3)+X(4)+X(5)+X(6)+X(7)] \\ \tilde{X}_3(1) &= 1/8[X(0)-X(1)+X(2)-X(3)+X(4)-X(5)+X(6)-X(7)] \\ \tilde{X}_3(2) &= 1/8[X(0)-iX(1)-X(2)+iX(3)+X(4)-iX(5)-X(6)+iX(7)] \\ \tilde{X}_3(3) &= 1/8[X(0)+iX(1)-X(2)-iX(3)+X(4)+iX(5)-X(6)-iX(7)] \\ \tilde{X}_2(4) &= 1/4[X(0) \quad -iX(2) \quad -X(4) \quad +iX(6) \quad] \\ \tilde{X}_2(5) &= 1/4[\quad X(1) \quad -iX(3) \quad -X(5) \quad +iX(7)] \\ \tilde{X}_2(6) &= 1/4[X(0) \quad +iX(2) \quad -X(4) \quad -iX(6) \quad] \\ \tilde{X}_2(7) &= 1/4[\quad X(1) \quad +iX(3) \quad -X(5) \quad -iX(7)] \end{aligned} \quad (4-13)$$

Se puede comprobar que sumando los elementos de la misma fila de cada subsecuencia se obtiene el elemento correspondiente de la secuencia $\{X(n)\}$.

Así por ejemplo:

$$X(0) = \tilde{X}_3(0) + \tilde{X}_3(1) + \tilde{X}_3(2) + \tilde{X}_3(3) + \tilde{X}_2(4) + \tilde{X}_2(6)$$

$$X(1) = \tilde{X}_3(0) - \tilde{X}_3(1) + i\tilde{X}_3(2) - i\tilde{X}_3(3) + \tilde{X}_2(5) + \tilde{X}_2(7)$$

etc.

De lo expuesto anteriormente se obtienen las siguientes reglas para la obtención de las $2 \log_2 N$ subsecuencias.

1) La secuencia $\{X(n)\}$ puede descomponerse en $2 \log_2 N$ subsecuencias mutuamente ortogonales. O sea

$$\{X(n)\} = \sum_{j=0}^{2n-1} \{G_j(n)\}$$

2) $\{G_0(n)\}$ es una secuencia 1-periódica

$\{G_1(n)\}$ es una secuencia 1-antiperiódica

$\{G_{2s+2}(n)\}$ y $\{G_{2s+3}(n)\}$ son 2^{s+1} -antiperiódicas

$$s = 0, 1, \dots, (n-2)$$

3) Los elementos de $\{G_0(n)\}$ son $\tilde{X}_n(0) = X_n(0)/2^n$

Los de $\{G_1(n)\}$ son $\tilde{X}_n(1) = X_n(1)/2^n$

Los de $\{G_2(n)\}$ son $\tilde{X}_n(2) = X_n(2)/2^n$

Los de $\{G_3(n)\}$ son $\tilde{X}_n(3) = X_n(3)/2^n$

Los de $\{G_4(n)\}$ son $\tilde{X}_{n-1}(4) = X_{n-1}(4)/2^{n-1}$

y $\tilde{X}_{n-1}(5) = X_{n-1}(5)/2^{n-1}$

etc.

Las subsecuencias $\{G_{2n-2}(n)\}$ y $\{G_{2n-1}(n)\}$ (última y penúltima) están constituidas por 2^{n-2} elementos de la forma $\tilde{X}_2(k)$. $k = N/2, \dots, N-1$.

4) El factor asociado con una secuencia 1-periódica y 1-antiperiódica es 1.

Los factores asociados con una secuencia 2-antiperiódica son: $1 i$ y $1 -i$.

Los factores asociados con una secuencia 4-antiperiódica son: $1 1 i i$ y $1 1 -i -i$.

Los factores asociados con una secuencia 8-antiperiódica son: $1 1 1 1 i i i i$ y $1 1 1 1 -i -i -i -i$. Etc.

Para $n = 3$ los elementos de las subsecuencias son afectados por los factores 1 e i en la forma indicada en la fig. 4-3.

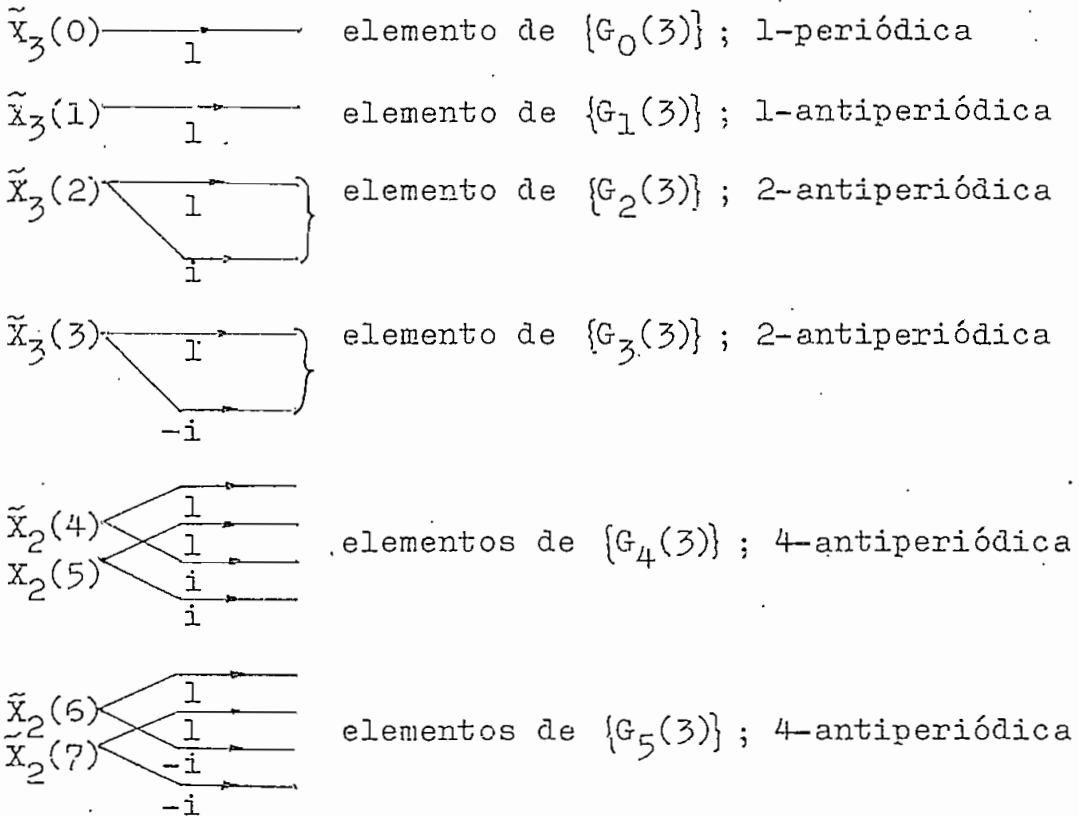


Fig. 4-3. Factores de las subsecuencias $\{G_j(3)\}$.

Puesto que las subsecuencias son mutuamente ortogona

les se tiene

$$[G_p(z)]^T [G_q(z)] = C \quad p \neq q$$

Siendo 8 el período de la secuencia, la potencia promedio de cada subsecuencia será

$$P_{pr} \text{ de } [G_j(z)] = 1/8 [\overline{G_j(z)}]^T [G_j(z)] \\ j = 1, 2, \dots, 5$$

de donde

$$\begin{aligned} P_{pr} \text{ de } [G_0(z)] &= |\tilde{X}_3(0)|^2 \\ P_{pr} \text{ de } [G_1(z)] &= |\tilde{X}_3(1)|^2 \\ P_{pr} \text{ de } [G_2(z)] &= |\tilde{X}_3(2)|^2 \\ P_{pr} \text{ de } [G_3(z)] &= |\tilde{X}_3(3)|^2 \\ P_{pr} \text{ de } [G_4(z)] &= 1/2 [\overline{\tilde{X}_2(4)} \tilde{X}_2(4) + \overline{\tilde{X}_2(5)} \tilde{X}_2(5)] = 1/2 [|\tilde{X}_2(4)|^2 + |\tilde{X}_2(5)|^2] \\ P_{pr} \text{ de } [G_5(z)] &= 1/2 [\overline{\tilde{X}_2(6)} \tilde{X}_2(6) + \overline{\tilde{X}_2(7)} \tilde{X}_2(7)] = 1/2 [|\tilde{X}_2(6)|^2 + |\tilde{X}_2(7)|^2] \end{aligned} \tag{4-14}$$

Si comparamos los valores desarrollados de $F(k)$ ($k = 1, 2, \dots, N-1$) con los valores de las ecuaciones (3-13) obtenemos

$$\begin{aligned} \tilde{X}_3(0) &= F(0) \\ \tilde{X}_3(1) &= F(1) \\ \tilde{X}_3(2) &= F(2) \\ \tilde{X}_3(3) &= F(3) \\ \tilde{X}_2(4) &= F(4) + F(5) \\ \tilde{X}_2(5) &= F(4) - F(5) \\ \tilde{X}_2(6) &= F(6) + F(7) \\ \tilde{X}_2(7) &= F(6) - F(7) \end{aligned} \tag{4-15}$$

Entonces tomando en cuenta (4-14), (4-15) y (4-9) tenemos

$$\begin{aligned} P_{pr} \text{ de } [G_0(3)] &= |\tilde{X}_3(0)|^2 = |F(0)|^2 = P_0 \\ P_{pr} \text{ de } [G_1(3)] &= |\tilde{X}_3(1)|^2 = |F(1)|^2 = P_1 \\ P_{pr} \text{ de } [G_2(3)] &= |\tilde{X}_3(2)|^2 = |F(2)|^2 = P_2 \\ P_{pr} \text{ de } [G_3(3)] &= |\tilde{X}_3(3)|^2 = |F(3)|^2 = P_3 \end{aligned} \quad (..-16)$$

$$\begin{aligned} P_{pr} \text{ de } [G_4(3)] &= 1/2[|\tilde{X}_2(4)|^2 + |\tilde{X}_2(5)|^2] = [|F(4)|^2 + |F(5)|^2] = P_4 \\ P_{pr} \text{ de } [G_5(3)] &= 1/2[|\tilde{X}_2(6)|^2 + |\tilde{X}_2(7)|^2] = [|F(6)|^2 + |F(7)|^2] = P_5 \end{aligned}$$

O sea la comparación entre la potencia promedio de las subsecuencias $\{G_j(3)\}$ y el espectro de potencia de la TBC conduce a las siguientes observaciones:

- 1) El punto P_0 del espectro de potencia representa la potencia promedio contenida en la secuencia 1-periódica $\{G_0(n)\}$.
- 2) El punto P_1 del espectro de potencia representa la potencia promedio contenida en la secuencia 1-antiperiódica $\{G_1(n)\}$.
- 3) Los puntos P_{2s+2} y P_{2s+3} del espectro de potencia representan las potencias promedio contenidas en las secuencias 2^{s+1} -antiperiódicas $\{G_{2s+2}(n)\}$ y $\{G_{2s+3}(n)\}$ respectivamente.

En donde

$$n = \log_2 N$$

$$s = 0, 1, \dots, (n-2) \quad [28], [29] .$$

4.6 Algoritmo rápido para el cálculo del espectro de potencia

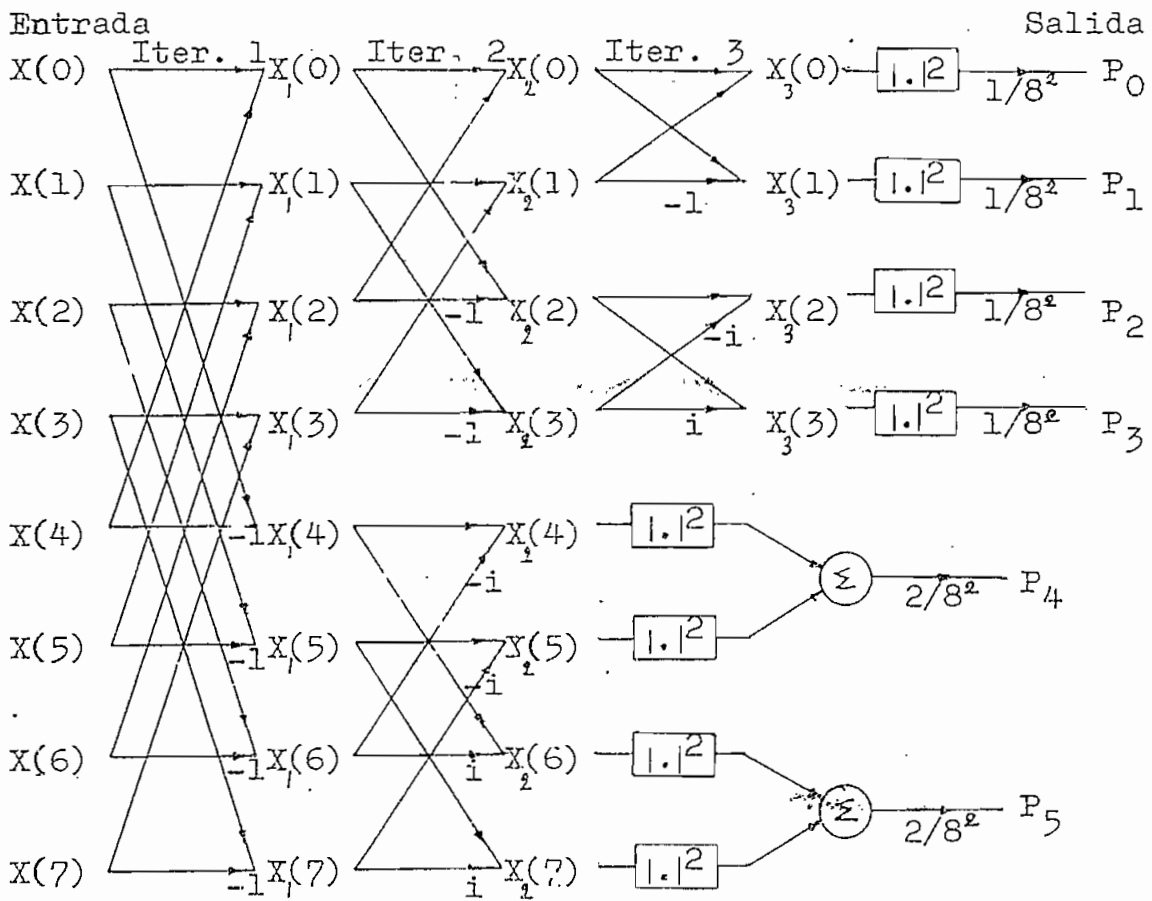
De los diagramas de flujo de las figs. 4-1 y 4-2 obtenemos

$$\begin{aligned}\tilde{X}_3(0) &= 1/8 X_3(0) & \tilde{X}_2(4) &= 1/4 X_2(4) \\ \tilde{X}_3(1) &= 1/8 X_3(1) & \tilde{X}_2(5) &= 1/4 X_2(5) \\ \tilde{X}_3(2) &= 1/8 X_3(2) & \tilde{X}_2(6) &= 1/4 X_2(6) \\ \tilde{X}_3(3) &= 1/8 X_3(3) & \tilde{X}_2(7) &= 1/4 X_2(7)\end{aligned}\tag{4-17}$$

A partir de estas ecuaciones y tomando en cuenta (4-16) tenemos

$$\begin{aligned}P_0 &= |\tilde{X}_3(0)|^2 = 1/8^2 |X_3(0)|^2 \\ P_1 &= |\tilde{X}_3(1)|^2 = 1/8^2 |X_3(1)|^2 \\ P_2 &= |\tilde{X}_3(2)|^2 = 1/8^2 |X_3(2)|^2 \\ P_3 &= |\tilde{X}_3(3)|^2 = 1/8^2 |X_3(3)|^2 \\ P_4 &= 1/2[|\tilde{X}_2(4)|^2 + |\tilde{X}_2(5)|^2] = 2/8^2[|X_2(4)|^2 + |X_2(5)|^2] \\ P_5 &= 1/2[|\tilde{X}_2(6)|^2 + |\tilde{X}_2(7)|^2] = 2/8^2[|X_2(6)|^2 + |X_2(7)|^2]\end{aligned}\tag{4-18}$$

Tomando como base estas ecuaciones se obtiene el diagrama de flujo de la fig. 4-4.



$|\cdot|^2 = \text{Cuadrado del módulo}$

Fig. 4-4. Diagrama de flujo para la obtención del espectro de potencia de la TBC. $N = 8$

Capítulo 5

ALGUNAS APLICACIONES

Son numerosas las aplicaciones prácticas de la transformada de Hadamard: representación y clasificación de señales, codificación de imágenes, análisis espectral de sistemas digitales, procesamiento de la palabra hablada, análisis secuencial y síntesis de la voz, etc. [24]. No estando en la posibilidad de examinarlas todas en detalle, vamos a dar un rápido esbozo de las que enumeramos a continuación:

- 1) Análisis espectral de señales
- 2) Procesamiento de la palabra hablada
- 3) Codificación de imágenes

5.1 Análisis espectral de señales

En el capítulo 2 examinamos la composición de frecuencia-secuencia del espectro de potencia. Relacionando la matriz de Hadamard con las funciones de Walsh pares e impares llegamos a determinar la siguiente composición de frecuencia de los $(n+1)$ puntos espectrales de la transformada:

- 0
- $N/2$
- $N/4$
- $1(N/8), 3(N/8)$
-
- $1, 3, 5, \dots, \frac{N}{2} - 1$

Cada punto espectral representa el contenido de un grupo de frecuencias. El agrupamiento de frecuencias, sin embargo, no es arbitrario. De la distribución citada anteriormente se observa que cada grupo, a partir de P_3 , contiene una fundamental y un conjunto de armónicas impares relativos a esta fundamental. Esto corresponde a la estructura de simetría de media onda. La interpretación de este agrupamiento puede darse descomponiendo la función $X(t)$, periódica con período T [$X(t) = X(T+t)$], en la siguiente forma:

$$X(t) = X_1(t) + g_1(t) \quad (5-1)$$

con la condición de que

$$g_1(t) = -g_1(t + T/2) \quad (5-2)$$

(condición de simetría de media onda)

Utilizando (5-1) y (5-2) obtenemos

$$g_1(t) = X(t) - X_1(t) = -X(t + T/2) + X_1(t + T/2) \quad (5-3)$$

si hacemos

$$X_1(t) = X_1(t + T/2)$$

entonces

$$X_1(t) = 1/2 [X(t) + X(t + T/2)] \quad (5-4)$$

sustituyendo este valor en (5-3) obtenemos

$$g_1(t) = 1/2 [X(t) - X(t + T/2)] \quad (5-5)$$

(5-4) y (5-5) cumplen con (5-1) y (5-2) con lo cual hemos logrado descomponer $X(t)$ en la suma de 2 funciones: $X_1(t)$ y $g_1(t)$; de las cuales la última tiene simetría impar, o

sea contiene las armónicas impares de $X(t)$

$X_1(t)$ puede descomponerse en forma similar

$$X_1(t) = X_2(t) + g_2(t) \quad (5-6)$$

en donde

$$X_2(t) = 1/2[X_1(t) + X_1(t + T/4)] \quad (5-7)$$

$$g_2(t) = 1/2[X_1(t) - X_1(t + T/4)] \quad (5-8)$$

La descomposición completa nos da

$$X(t) = g_1(t) + g_2(t) + \dots + g_n(t) + X_n(t) \quad (5-9)$$

en donde

$g_1(t) = -g_1(t + T/2)$ contiene las armónicas impares de $X(t)$ periódica con período T .

$g_2(t) = -g_2(t + T/4)$ contiene las armónicas impares de $X_1(t)$ periódica con período $T/2$.

$g_3(t) = -g_3(t + T/8)$ contiene las armónicas impares de $X_2(t)$ periódica con período $T/4$.

En general

$g_j(t) = -g_j(t + T/2^j)$ contiene las armónicas impares de $X_{j-1}(t)$ periódica con período $T/2^{j-1}$.

En síntesis P_n representa la potencia de la señal $g_1(t)$, P_{n-1} la potencia de la señal $g_2(t)$, etc. ; P_1 la potencia de la señal $g_n(t)$ y P_0 la potencia de la señal $X_n(t)$ [30].

Si en lugar de t utilizamos el tiempo normalizado t/T y, en vez de la onda continua, las N muestras de cada función, tendremos que $g_1(t)$ se relaciona con la subsecuen

cia $\{G_1(n)\}$, $g_2(t)$ con la subsecuencia $\{G_2(n)\}$, etc.; $g_n(t)$ con la subsecuencia $\{G_n(n)\}$ y finalmente $X_n(t)$ con la subsecuencia $\{F_n(n)\}$.

Podemos utilizar este análisis espectral para estudiar el espectro de una señal. Se elige una ventana apropiada de muestreo, se cuantiza las muestras, luego aplicando el algoritmo ya indicado se obtendrá la estructura espectral de la señal muestreada.

Cabe observar, sin embargo, que dada la agrupación de frecuencias del espectro de potencia de la TH, la información obtenida no nos dará un conocimiento individualizado del aporte de cada una de las frecuencias dentro del espectro de potencia. Para llenar este vacío, este análisis espectral deberá complementarse con la obtención del espectro de potencia de la TDF. Esto último, sin embargo, exige el disponer de computadoras capaces de operar con cantidades complejas.

5.2 Procesamiento de la palabra hablada

Diversas clases de sistemas ortogonales se han utilizado en el procesamiento de señales digitizadas de audio. Se ha establecido una comparación entre las transformadas de Fourier y de Hadamard en lo que respecta a la reducción de la velocidad de bits requerida para la transmisión de la palabra hablada. Tomando como punto de comparación el -

sistema PCM, la reducción de bits necesaria para obtener el mismo error de cuantización es de 10 y 7.5 kbits/s para las transformadas de Fourier y Hadamard respectivamente. Esta reducción se la toma a partir de los 56 kbits/s requeridos por el sistema PCM. [31]

Estos resultados indican que la transformada de Fourier ofrece mayor eficiencia, en cuanto a compresión de datos, que la transformada de Hadamard. Sin embargo esta última, que implica solamente adiciones y subtracciones reales, posee notables ventajas en lo que se refiere a su obtención por medio de computadoras digitales, particularmente cuando se dispone de una computadora con capacidades limitadas.

Hechas estas observaciones preliminares veamos en qué consiste y cómo se opera el procesamiento de la palabra hablada utilizando la TH.

Puesto que la transformada de Hadamard es una transformada discreta, lo primero que se impone es el muestreo de la señal. Al tratar de determinar las condiciones de muestreo se debe atender en primer lugar a la velocidad de muestreo (número de muestras por segundo), que se la determinará de acuerdo a la anchura de banda que se desee preservar. Cuando la transformada a aplicarse es la de Hadamard (o cualquier otra transformada discreta generalizada como las estudiadas en el capítulo 1) tiene especial impor

tancia el tamaño de la ventana de muestreo. Debido a que las matrices de transformación son de orden 2^n , la ventana de muestreo deberá elegirse de tal manera que el número total de muestras por ventana sea igual a 2^n . Una vez obtenidas estas muestras, deben cuantizarse. Las muestras digitalizadas serán transformadas aplicando a cada ventana una matriz de transformación del tamaño correspondiente. Obtenidos los coeficientes de la TH, se ponderan los que tienen mayor significado para la transmisión de la señal y se descartan los demás. En esta forma se puede obtener una notable reducción del ancho de banda requerido para la transmisión de la palabra hablada. Una vez en el lugar de su utilización la señal será recuperada aplicando un proceso inverso al que acabamos de describir.

Como ejemplo vamos a mencionar los resultados obtenidos por un grupo de científicos patrocinados por la National Research Council of Canada.

En el ejemplo en mención una señal de audio fue muestreada a una velocidad de 8 kHz. Se eligió un valor de 64 igual a 2^6 para la ventana de muestreo. La computadora utilizada fue una CDC-1700. La fig. 5-1 muestra un diagrama de bloques del sistema de computación y de los aparatos utilizados en esta investigación.

La configuración del sistema es tal que el "bus" entrada/salida (E/S) puede realizar a un tiempo sólo conver-

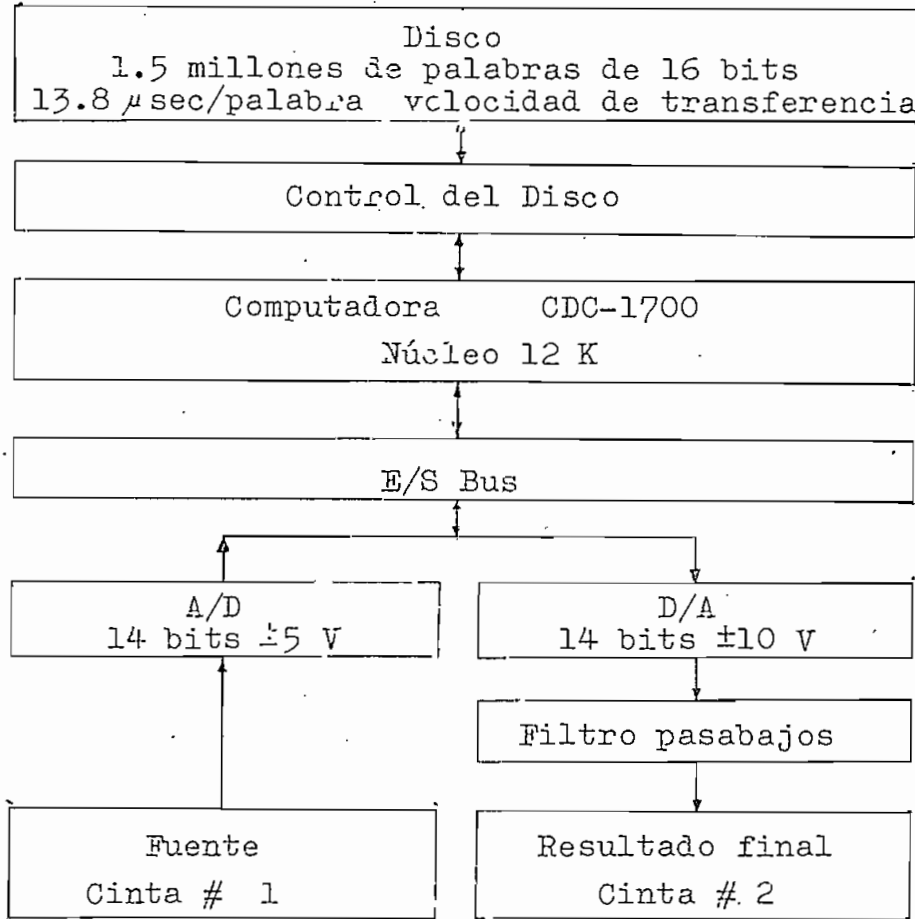


Fig. 5-1. Diagrama de bloques del sistema utilizado para el procesamiento de palabra hablada con ayuda de una computadora CDC-1700.

sión analógica-digital (A/D) o digital analógica (D/A), pero no las dos a la vez. La señal de entrada muestreada a 8 kHz recibió un formato de palabras de 14 bits en el convertidor A/D. Las muestras digitales fueron almacenadas en un disco capaz de contener 1.5 millones de palabras. Cada grupo de 64 palabras se transformó en 64 coeficientes en el dominio de Hadamard. Teniendo en cuenta la velocidad de

muestreo cada grupo de 64 palabras corresponde a 8 milisegundos de locución. Los 8 o 4 coeficientes dominantes (en el sentido de mayor valor absoluto) fueron seleccionados con el correspondiente algoritmo. Este algoritmo es la búsqueda, comparación y retención de las magnitudes de los coeficientes mayores y de su número correspondiente. La reconstrucción de la locución (speech synthesis) se hizo utilizando los coeficientes dominantes, su número correspondiente y la transformada inversa. Los resultados se almacenaron en el disco destruyendo los datos originales.

Se pudo obtener una reproducción inteligible de la locución con los 4 u 8 coeficientes predominantes de un campo de 64. Al disminuir el número de coeficientes retenidos, aumentó el número de fonemas sujetos a notable deformación [32].

De lo dicho anteriormente se concluye que la utilización de la transformada de Hadamard en el procesamiento de la palabra hablada tiene amplias perspectivas.

5.3 Codificación de imágenes

5.3 a) La transformada de Fourier de imágenes

La utilización de la transformada de Hadamard para la codificación de imágenes es posterior y, en cierto sentido, derivada de la aplicación de la transformada de Fourier para el mismo propósito. Si $f(x,y)$ representa la am -

plitud de las muestras de la imagen sobre un arreglo cuadrático de N^2 puntos, entonces la transformada bidimensional de Fourier se define como:

$$F(u,v) = \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) \exp\left[-\frac{2\pi i}{N}(ux + vy)\right] \quad (5-10)$$

La transformada de Fourier es cuantificada, codificada y transmitida sobre un canal. Luego en el lugar de recepción se toma la transformada inversa de Fourier de $F(u,v)$

$$\hat{f}(x,y) = \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u,v) \exp\left[\frac{2\pi i}{N}(xu + yv)\right] \quad (5-11)$$

para reconstruir en la forma más aproximada la imagen original.

La transformada de Fourier garantiza una buena calidad de transmisión; además la transmisión de la transformada de Fourier, antes que de la imagen misma, ofrece cierta inmunidad a errores de canal y la posibilidad de obtener una reducción del ancho de banda. La tolerancia a errores de canal se debe al proceso de promediación de la transformada de Fourier que se deduce de la inspección de las fórmulas (5-10) y (5-11). Cada punto en una imagen reconstruida es la suma ponderada de todos los puntos en el dominio de frecuencia espacial. La reducción del ancho de banda es posible porque la energía de la imagen, que generalmente está distribuida uniformemente en el dominio espacial, tiende a concentrarse cerca del origen en el dominio de Fourier.

Muchas de las componentes altas de frecuencia espacial tienen una magnitud despreciable y no necesitan ser transmitidas.

Las ventajas ofrecidas por la transformada de Fourier condujeron a la búsqueda de otros métodos de transformación. Para la codificación de imágenes todo lo que se requería era un operador bidimensional que tuviera su inverso, poseyese la propiedad de promediar, y que redistribuyese la energía de la imagen apropiadamente. Desde el punto de vista de la computación es importante que exista un algoritmo rápido de computación y que el operador sea su propio inverso. Todos estos requisitos son llenados por la matriz simétrica de Hadamard. En realidad la transformada de Hadamard es más ventajosa que la de Fourier para la codificación de imágenes en muchos aspectos.

5.3 b) La transformada de Hadamard de imágenes

Sea un arreglo $f(x,y)$ que representa las muestras de intensidad de una imagen sobre un arreglo de N^2 puntos. Entonces la transformada bidimensional de Hadamard, $B(u,v)$, de $f(x,y)$ está dada por el producto matricial

$$[B(u,v)] = [H(n)][f(x,y)][H(n)] \quad (5-12)$$

en donde $[H(n)]$ representa la matriz de Hadamard de orden N .

La pre- y post-multiplicación de $[B(u,v)]$ por la matriz de Hadamard da

$$[H(n)][B(u,v)][H(n)] = N^2[f(x,y)]$$

o sea

$$[f(x,y)] = 1/N^2 [H(n)][B(u,v)][H(n)] \quad (5-13)$$

(transformada inversa)

Así pues, dejando aparte el factor $1/N^2$, los arreglos $[f(x,y)]$ y $[B(u,v)]$ constituyen un par de transformadas bi dimensionales.

Los elementos del arreglo $[B(u,v)]$ (coeficientes de la transformada) pueden obtenerse también a partir de la fórmula

$$B(u,v) = \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) (-1)^{p(x,y,u,v)} \quad (5-14)$$

en donde

$$p(x,y,u,v) = \sum_{i=0}^{n-1} (u_i x_i + v_i y_i) \quad (5-15)$$

con lo cual (5-14) resulta ser una particularización de (2-84) con $x_1 = x$, $x_2 = y$ y $N_1 = N_2 = N$

u_i, v_i, x_i, y_i son las representaciones binarias de u, v, x, y respectivamente. O sea $u_{dec} = (u_{n-1}u_{n-2} \dots u_1u_0)_{bin}$, en donde $u: \in \{0,1\}$

En (5-15) la suma es una suma módulo 2

Para hacer más comprensibles estas fórmulas vamos a obtener algunos elementos de $[B(u,v)]$ a partir de (5-12) y (5-14). Sea $N = 4$

El arreglo cuadrático $[f(x,y)]$ será de la forma

$$[f(x,y)] = \begin{bmatrix} f_{00} & f_{10} & f_{20} & f_{30} \\ f_{01} & f_{11} & f_{21} & f_{31} \\ f_{02} & f_{12} & f_{22} & f_{32} \\ f_{03} & f_{13} & f_{23} & f_{33} \end{bmatrix}$$

Entonces

$$[B(u,v)] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{00} & f_{10} & f_{20} & f_{30} \\ f_{01} & f_{11} & f_{21} & f_{31} \\ f_{02} & f_{12} & f_{22} & f_{32} \\ f_{03} & f_{13} & f_{23} & f_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} B_{00} & B_{01} & B_{02} & B_{03} \\ B_{01} & B_{11} & B_{21} & B_{31} \\ B_{02} & B_{12} & B_{22} & B_{32} \\ B_{03} & B_{13} & B_{23} & B_{33} \end{bmatrix}$$

Teniendo en cuenta los desarrollos completos se tiene

$$B_{00} = f_{00} + f_{01} + f_{02} + f_{03} + f_{10} + f_{11} + f_{12} + f_{13} + f_{20} + f_{21} + f_{22} + f_{23} \\ + f_{30} + f_{31} + f_{32} + f_{33} \quad (5-16)$$

$$B_{01} = f_{00} - f_{01} + f_{02} - f_{03} + f_{10} - f_{11} + f_{12} - f_{13} + f_{20} - f_{21} + f_{22} - f_{23} \\ + f_{30} - f_{31} + f_{32} - f_{33} \quad (5-17)$$

etc.

A partir de la fórmula (5-14).

$$B(u,v) = \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) (-1)^{p(x,y,u,v)}$$

para $u = v = 0$

$$B_{00} = \sum_{x=0}^3 \sum_{y=0}^3 f(x,y) (-1)^{p(x,y,0,0)}$$

$$p(x,y,0,0) = \sum_{i=0}^l (u_i x_i + v_i y_i) \quad (\text{módulo } 2)$$

Puesto que $u_i = v_i = 0$ para todos los casos

$$p(x,y,0,0) = \sum_{i=0}^1 (0x_i + 0y_i) = 0$$

$$B_{00} = \sum_{x=0}^3 \sum_{y=0}^3 f(x,y) \\ = f_{00}+f_{01}+f_{02}+f_{03}+f_{10}+f_{11}+f_{12}+f_{13}+f_{20}+f_{21}+f_{22}+f_{23} \\ +f_{30}+f_{31}+f_{32}+f_{33}$$

que coincide con (5-16)

$$B_{01} = \sum_{x=0}^3 \sum_{y=0}^3 f(x,y) (-1)^p(x,y,0,1)$$

$$p(x,y,0,1) = \sum_{i=0}^1 0x_i + v_i y_i \quad \text{siendo } v_0 = 1$$

Siendo $u = 0$, x carece de importancia y sólo deberemos tomar en cuenta y .

$$\text{para } y_{dec} = 0 \quad \rightarrow y_i = 0$$

$$\text{para } y_{dec} = 1 = y_0 2^0 \quad \rightarrow y_0 = 1$$

$$\text{para } y_{dec} = 2 = y_1 2^1 \quad \rightarrow y_1 = 1$$

$$\text{para } y_{dec} = 3 = y_1 2^1 + y_0 2^0 \quad \rightarrow y_1 = y_0 = 1$$

de donde

$$p(x,y,0,1) = 0 + v_0 y_0 = 1 \quad \text{para } y = 1 \quad \text{y para } y = 3$$

$$p(x,y,0,1) = 0 \quad \text{para } y = 0 \quad \text{y para } y = 2$$

Entonces

$$B_{01} = f_{00}-f_{01}+f_{02}-f_{03}+f_{10}-f_{11}+f_{12}-f_{13}+f_{20}-f_{21}+f_{22}-f_{23} \\ +f_{30}-f_{31}+f_{32}-f_{33}$$

que coincide con (5-17)

En la misma forma se puede obtener el valor de cualquier elemento del arreglo $[B(u,v)]$.

Para la transformada inversa, por el mismo procedimiento, tendríamos por ejemplo:

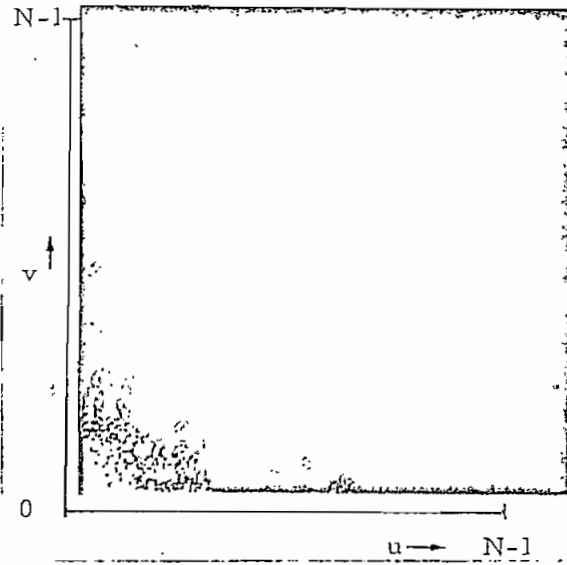
$$\hat{f}_{00} = 1/N^2 [B_{00} + B_{01} + B_{02} + B_{03} + B_{10} + B_{11} + B_{12} + B_{13} + B_{20} + B_{21} + B_{22} + B_{23} + B_{30} + B_{31} + B_{32} + B_{33}] \quad (5-18)$$

Lo cual comprueba nuestra afirmación de que cada punto de la imagen reconstruida es la suma ponderada de todos los puntos en el dominio de frecuencia espacial.

La transformada bidimensional de Hadamard puede ser calculada por la aplicación reiterada del algoritmo rápido ya estudiado anteriormente. Se han hecho experimentos para determinar la naturaleza de la transformada bidimensional de Hadamard de una imagen. La fotocopia 5-1 contiene la representación de la imagen obtenida en la pantalla de un osciloscopio de la magnitud del logaritmo de la transformada de Hadamard de una escena del Surveyor. En esta fotografía el origen (secuencia cero) aparece en la esquina inferior izquierda. Al aumentar la secuencia la magnitud de los coeficientes tiende a disminuir. Esto permite concluir que hay relativamente pocas transiciones de brillo de alta amplitud entre los elementos de la escena original. La fotocopia 5-2 muestra la transformada inversa de esta escena (imagen reconstruida). La fotocopia 5-3 muestra la fotografía original de la escena. No hay una degradación perceptible entre el original y la transformada doble de Hadamard.

5.3 c) Computación de la transformada de una imagen

Como lo insinúa la fórmula (5-14) la computación de



Fotocopia 5-1. Magnitud del logaritmo de la transformada de Hadamard de una escena del Surveyor.



Fotocopia 5-2. Transformada inversa.



Fotocopia 5-3. Fotografía original.

la transformada de Hadamard de una imagen se realiza en dos pasos. Primero se obtiene la transformada unidimensional de Hadamard a lo largo de cada fila del arreglo $[f(x,y)]$. Luego se opera una segunda transformada unidimensional de Hadamard a lo largo de cada columna de $[B(u,y)]$ obteniéndose el resultado deseado. Para cada uno de estos pasos se empleará el algoritmo rápido ya estudiado [21].

Capítulo 6

PARTE PRACTICA: PROCESAMIENTO DE ALGUNOS ELECTROCARDIOGRAMAS

6.1 Objetivos

Inicialmente se pensó aplicar la transformada de Hadamard a una señal de audio, para procesarla y luego examinar la calidad de la señal reconstituida a partir de un número limitado de coeficientes de la transformada. Sin embargo, la imposibilidad de disponer del equipo necesario para este objeto, nos impulsó a buscar un campo de aplicación más acorde con el equipo existente. Teniendo en cuenta la relativa lentitud de las computadoras disponibles, así como la limitada memoria de las mismas, decidimos hacer un estudio de las curvas de algunos electrocardiogramas.

El análisis a realizar comprende en primer lugar el cálculo de los espectros de potencia y de fase, que nos suministran una información en bloque acerca de la composición de la curva. A continuación se obtiene la transformada directa. Luego se trata de reconstituir la onda original, reteniendo sólo una parte de los coeficientes de la transformada: los de mayor valor absoluto. Si asimilamos la curva del electrocardiograma a una señal de audio, podremos controlar gráficamente cómo se reconstituye la señal a partir de un número limitado de coeficientes.

6.2 Programa utilizado

De acuerdo a estos objetivos el programa (en FORTRAN IV) se elaboró con 4 subrutinas y un programa principal.

La subrutina ESPEC obtiene directamente, a partir de las muestras, los espectros de potencia y de fase. La subrutina TRH realiza las transformadas directa e inversa. La subrutina SELEC selecciona los M coeficientes de mayor valor absoluto, a partir de los cuales se reconstituye la señal. La subrutina PLOT nos entrega el gráfico simultáneo de la curva original y de dos curvas reconstituídas a partir de M y de M/2 coeficientes. El programa principal describe la mayor parte de los encabezamientos y llama a trabajar a las diversas subrutinas.

El listado del programa es como sigue:

```
SUBROUTINE ESPEC (A)
  DIMENSION P(8), FAS(8), B(128), A(128)
  COMMON ILE,IES,N
  L=1
  K = N/2
  DO 2 I = 1,N
    2 B(I) = A(I)
C CALCULO DE LOG
  MAX = 1
  LOG = 0
  5 IF (MAX*2-N) 10,10,20
  10 LOG = LOG + 1
  MAX = MAX*2
  GO TO 5
C COMIENZO DE LAS ITERACIONES
```



```
20 MO = LOG + 1
   LT = LOG + 2
   IF (LT-8) 21,21,23
21 DO 22 I = LT,8
   P(I) = 0.0
22 FAS(I) = 0.0
23 DO 40 NM = 1,LOG
   I = 0
   P(MO) = 0.0
   DO 30 NK = 1,K
   I = I + 1
   J = I + K
   B(I) = B(I) + B(J)
   B(J) = B(I) - B(J) - B(J)
   CUA = B(J)*B(J)*2**(LOG-L)/(N*N)
30 P(MO) = P(MO) + CUA
   M = J/2
   FAS(MO) = 1.41421356**(LOG-L)*B(M+1)/(SQRT(P(MO))*N)
   MO = MO -1
   L = L + 1
40 K = K/2
   P(1) = B(1)*B(1)/(N*N)
   FAS(1) = B(1)/(SQRT(P(1))*N)
   WRITE (IES,50) P
50 FORMAT ('0' 50X, 'ESPECTRO DE POTENCIA'// '0' 8F15.6/)
   WRITE (IES,60) FAS
60 FORMAT ('0' 52X, 'ESPECTRO DE FASE'// '0' 8F15.6/)
   RETURN
   END
```

```
SUBROUTINE TRH (A,B,IND)
DIMENSION A(128),B(128)
COMMON ILE,IES,N
```

```
L = 1
K = N/2
DO 2 I = 1,N
2 B(I) = A(I)
C CALCULO DE LOG
MAX = 1
LOG = 0
5 IF (MAX*2-N) 10,10,20
10 LOG = LOG + 1
MAX = MAX*2
GO TO 5
C COMIENZO DE LAS ITERACIONES
20 DO 60 NM = 1,LOC
I = 0
DO 50 NL = 1,L
DO 40 NK = 1,K
I = I+1
J = I+K
BMAS = B(I)+B(J)
BMEN = B(I)-B(J)
GO TO (25,30), IND
25 B(I) = BMAS*0.5
B(J) = BMEN*0.5
GO TO 40
30 B(I) = BMAS
B(J) = BMEN
40 CONTINUE
50 I = J
L = L*2
60 K = K/2
RETURN
END
```

```
SUBROUTINE SELEC (B,A,M)
DIMENSION A(128),B(128),ISUB(128)
COMMON ILE,IES,N
```

```
C INICIALIZACIONES
```

```
NA = N-1
DO 10 I = 1,N
ISUB(I) = I
```

```
10 A(I) = B(I)
```

```
C ORDENAMIENTO DE LOS COEFICIENTES
```

```
DO 20 K = 1,NA
L = K+1
DO 20 J = L,N
IF (ABS(A(K))-ABS(A(J))) 15,20,20
```

```
15 AUX = A(K)
A(K) = A(J)
A(J) = AUX
LUX = ISUB(K)
ISUB(K) = ISUB(J)
ISUB(J) = LUX
```

```
20 CONTINUE
```

```
C SUPRESION DE LOS COEFICIENTES PEQUEÑOS
```

```
MA = M+1
DO 25 I = 1,N
25 A(I) = B(I)
IF. (M-N) 26,35,35
26 DO 30 I = MA,N
K = ISUB(I)
30 A(K) = 0.0
35 RETURN
END
```

```
SUBROUTINE PLOT (X,A,B)
DIMENSION LINE(101),X(128),A(128),B(128),NUM(5)
```

```
COMMON ILE,IES,N
DATA NUM/'1','2','3','.', '/'
C IMPRESION DE UNA LINEA DE PUNTOS PARA EL EJE VERTICAL
DO 10 J = 1,101
10 LINE(J) = NUM(4)
WRITE (IES,100) (LINE(K), K = 1,101)
100 FORMAT (1H0,101A1)
C PONER BLANCOS EN EL RENGLON
DO 20 J = 1,101
20 LINE(J) = NUM(5)
C PONER UN PUNTO EN LINE(51) PARA EL EJE HORIZONTAL
DO 30 I = 1,N
LINE(51) = NUM(4)
J = X(I)+51.5
LINE(J) = NUM(1)
L = A(I)+51.5
LINE(L) = NUM(2)
M = B(I)+51.5
LINE(M) = NUM(3)
WRITE (IES,200) (LINE(K), K = 1,101)
200 FORMAT (1H ,101A1)
LINE(J) = NUM(5)
LINE(L) = NUM(5)
30 LINE(M) = NUM(5)
RETURN
END
```

```
C HADAM PROGRAMA PRINCIPAL PARA LA TRANSFORMADA DE HADA-
MARD Y GRAFICOS
DIMENSION X(128),B(128),BA(128),XA(128),BB(128),XB(128)
COMMON ILE,IES,N
ILE = 2
IES = 3
```

```
      READ (ILE,100) N,M
100 FORMAT (2I3)
C LECTURA DE LAS MUESTRAS
      READ (ILE,110) (X(I), I = 1,N)
110 FORMAT (8F10.0)
C TITULARES
      WRITE (IES,120)
120 FORMAT ('1' ///' ' 42X,'TRANSFORMADA DE HADAMARD Y
          GRAFICOS'//
C CALCULO DE LOS ESPECTROS DE POTENCIA Y DE FASE
      CALL ESPEC (X)
C CALCULO DE LAS TRANSFORMADAS
      CALL TRH (X,B,1)
      CALL SELEC (B,BA,M)
      CALL TRH (BA,XA,2)
      CALL SELEC (B,BB,M/2)
      CALL TRH (BB,XB,2)
      MITAD = M/2
C IMPRESION DE LOS RESULTADOS
      WRITE (IES,130) M,MITAD
130 FORMAT (//'0' T14,'MUESTRAS' T28,'TRANS. DIRECTA'
          T43,I3,' COEF. R
          LETENIDOS' T68,'TRANS. INVERSA' T83,I3,' COEF. RETE
          NIDOS' T108,'TRA
          2NS. INVERSA'/)
      WRITE (IES,140) (X(I),B(I),BA(I),XA(I),BB(I),XB(I),
          I = 1,N)
140 FORMAT (' ' 6F20.4)
C TITULO PARA EL GRAFICO
      WRITE (IES,150) M,MITAD
150 FORMAT ('1' ///'0' 15X,'GRAFICOS'/'0' 15X,'1 CURVA
          ORIGINAL'/' ' '
          115X,'2 CURVA RECONSTITUIDA A PARTIR DE 'I3,' COEFI
          CIENTES'/' ' 15X
```

2, '3 CURVA RECONSTITUIDA A PARTIR DE ' I3, ' COEFI
CIENTES'//)

CALL PLOT (X,XA,XB)

CALL EXIT

END

La subrutina ESPEC con argumento (A) lleva a ejecución con insignificantes variaciones el diagrama de flujo de la fig. 2-29 para la obtención de los espectros de potencia y de fase. La proposición DIMENSION establece los arreglos P(I), espectro de potencia, FAS(I), espectro de fase, y los arreglos B(I), A(I), estos dos últimos de 128 elementos. La proposición COMMON establece como elementos comunes a la subrutina y al programa principal la unidad de lectura, la unidad de escritura y el número N de muestras. Las dos proposiciones siguientes establecen valores iniciales para L y K. La proposición DO 2 con su recorrido copia el arreglo A(I) en el arreglo B(I). Las seis proposiciones siguientes (los comentarios no se cuentan) obtienen el logaritmo de base 2 de N. El valor MO de la proposición 20 nos da el mayor subíndice de los arreglos P(I) y FAS(I). Puesto que en caso de que N sea menor que 128, no se copiarán todos los lugares de estos arreglos, las 5 proposiciones siguientes sirven para anular todos los valores de los mencionados arreglos, que no serán sustituidos por nuevos valores. A continuación, y siguiendo el diagrama de la fig. 2-29, la proposición DO 40 fija el número de iteracio

nes en el sentido horizontal del diagrama de flujo. Luego de las inicializaciones pertinentes el DO 30 con su respectivo recorrido realiza las sumas y restas contenidas en cada uno de los bloques verticales. Los resultados obtenidos en la mitad inferior de cada bloque se elevan al cuadrado, se multiplican por una constante y se suman para constituir los diversos puntos espectrales. Salidos del recorrido del DO 30, las dos proposiciones siguientes sirven para la obtención del espectro de fase. Se disminuye en 1 el valor del subíndice de $P(I)$ y $FAS(I)$, y se cambian luego los límites de variación de los índices L y K , para comenzar otra iteración del DO 40. Una vez terminadas las iteraciones del DO 40 se obtienen los valores de $P(1)$ y $FAS(1)$ que caen fuera de los recorridos de los DO anteriores. Las proposiciones siguientes escriben los resultados.

La subrutina TRH de argumentos (A,B,IND) es la subrutina medular del programa, pues realiza tanto la transformada directa como la inversa. La hemos tomado de [32] si bien adaptándola al diagrama de flujo de la fig. 2-11 que sigue un proceso inverso al seguido por los autores del artículo en mención.

A la proposición SUBROUTINE sigue la proposición DIMENSION que establece dos arreglos de 128 elementos. La proposición COMMON es la misma que se ha visto anteriormente. Las dos proposiciones siguientes establecen valo -

res iniciales. El DO 2 que sigue copia el arreglo A(I) en el arreglo B(I). Las seis proposiciones siguientes obtienen el logaritmo de base 2 de N. La proposición DO 60 establece el índice de variación para las iteraciones en el sentido horizontal del diagrama de flujo de la fig. 2-11. La siguiente proposición inicializa el valor de I. La proposición DO 50 establece el número de iteraciones correspondientes al número de bloques en el sentido vertical. Puesto que el bloque de la extrema izquierda es único, el índice L vale 1 para la primera iteración. La proposición DO 40 establece el índice de variación para el número de sumas y restas contenidas en cada bloque. Las dos proposiciones siguientes establecen el valor inicial de I y de J. Se definen luego las variables BMAS y BMEN. Un GO TO calculado nos lleva a la ejecución de la transformada directa si $IND = 1$, o a la transformada inversa si $IND = 2$. Como se ve el proceso matemático para la obtención de las dos transformadas sólo difiere en un factor constante. La proposición CONTINUE indica la terminación de una iteración dentro del recorrido del DO 40. Las proposiciones siguientes ajustan los valores de I, L y K para las nuevas iteraciones de los DO respectivos. Con esto termina la subrutina TRH.

La subrutina SELEC con los argumentos (B,A,M) establece en una proposición DIMENSION 3 arreglos de 128 ele -

mentos. La proposición COMMON es idéntica a la de la subrutina ESPEC. El DO 10 con su recorrido copia todos los subíndices en el arreglo ISUB(I) y todos los elementos del arreglo B(I) en el arreglo A(I). Se procede luego al ordenamiento de los coeficientes y de los subíndices respectivos de acuerdo al mayor valor absoluto de los primeros, con dos proposiciones DO 20 de las cuales la segunda tiene un recorrido interior al de la primera. Se establece luego la variable MA que fija el límite inferior de variación del índice de la proposición DO 30 que anula los coeficientes de menor valor absoluto. La proposición DO 25 dispone el arreglo A(I) en el mismo orden que el arreglo B(I). Este paso es importante por cuanto los coeficientes retenidos del arreglo A(I) deben ocupar el mismo lugar que ocupan en el arreglo B(I), para que sea posible recuperar la onda aproximada a partir de un número limitado de coeficientes. El IF aritmético que sigue nos permite reconstruir la onda a partir de todos los coeficientes: si es este el caso el control de la subrutina irá a la proposición RETURN. Si M, número de coeficientes retenidos, menor que N, número de muestras, las proposiciones comprendidas entre la 26 y la 30 inclusive, anularán todos los coeficientes cuyo subíndice (ordenado) es mayor o igual que MA,

La subrutina PLOT tiene los argumentos (X,A,B). La proposición DIMENSION, que sigue, establece el arreglo

LINE(I) para cada línea de impresión con 101 elementos. -
Los arreglos X(I), A(I) y B(I) representan los arreglos a -
graficar. El arreglo NUM(I) contiene las 5 constantes alfa -
numericas que sirven para el gráfico. Después de la propo -
sición COMMON se introducen las 5 constantes alfanuméricas
con una proposición DATA. Las 4 proposiciones siguientes -
sirven para poner una línea de puntos que representa el e -
je vertical. La proposición DO 20 con su respectivo recor -
rido borra todos los puntos del arreglo LINE(I). La propo -
sición DO 30 con su recorrido grafiza línea por línea -
las curvas correspondientes a los arreglos X(I), A(I) y -
B(I). La proposición LINE(51) = NUM(4) pone un punto en -
LINE(51) para formar el eje horizontal. La ubicación de -
los puntos de cada curva se establece en las 6 proposicio -
nes siguientes. Una vez impresos estos valores, las tres -
proposiciones anteriores a RETURN borran estos valores an -
tes de proceder a la impresión de otra línea. Una vez que
se ha terminado esta grafización se produce el retorno al
programa principal.

El programa principal establece 6 arreglos de 128 e -
lementos. La proposición COMMON es seguida por dos proposi -
ciones que establecen como comunes las unidades de entrada
y de salida. Luego se introducen los valores N y M e inme -
diatamente después se realiza la lectura de las muestras ,
que se grabarán en el arreglo X(I). Se pone luego el títu -

lo general "TRANSFORMADA DE HADAMARD Y GRAFICOS". Poste -
riormente se llama a operar a la subrutina ESPEC la cual -
escribe por sí misma los resultados obtenidos . La proposi -
ción CALL TRH (X,B,1) llama a la subrutina TRH que realiza
la transformada directa del vector X(I). La proposición -
CALL SELEC (B,BA,M) llama a la subrutina SELEC, la cual se -
lecciona del arreglo B(I), formado por los N coeficientes
de la transformada, los M valores de mayor valor absoluto,
y anula los restantes, para constituir el arreglo BA(I). La
proposición CALL TRH (BA,XA,2) llama nuevamente a la subru -
tina TRH, la cual ejecuta la transformada inversa a partir
de los M coeficientes retenidos. La señal recuperada en es -
ta forma constituye el arreglo XA(I). Un nuevo llamado a -
la subrutina SELEC obtiene que esta selección los M/2 co -
eficientes de mayor valor absoluto, anulando los restantes;
se obtiene así el arreglo BB(I). La proposición CALL TRH -
(BB,XB,2) llama nuevamente a operar a la subrutina TRH, la
cual recupera la señal a partir de los M/2 coeficientes re -
tenidos. La señal así recuperada constituye el arreglo -
XB(I). Terminadas estas operaciones se imprimen los resul -
tados con sus respectivos encabezamientos en 6 columnas -
que corresponden a los arreglos X(I),B(I),BA(I),XA(I), -
BB(I) y XB(I). Las proposiciones WRITE y 150 imprimen el -
título para el gráfico. Luego la proposición CALL PLOT lla -
ma a actuar a la subrutina PLOT, la cual traza el gráfico.
Terminado éste, el control regresa al programa principal -

para su terminación.

6.3 Evaluación de los resultados obtenidos

Para la evaluación de los resultados obtenidos vamos a seguir el mismo orden en que éstos aparecen al salir de la computadora

Tenemos en primer lugar el espectro de potencia. Se puede comprobar que el número de puntos espectrales es siempre igual a $n+1$, siendo $n = \log_2 N$. Para comprobar la invariancia de este espectro respecto de cualquier desplazamiento cíclico, se invirtió el orden de las tarjetas de datos colocando al final las que estaban al comienzo; los valores así obtenidos fueron siempre los mismos para cualquier valor de desplazamiento. Ver curvas 6-2, 6-3, 6-4. Se puede observar que la información dada por este espectro a parece muy condensada, pues el último valor representa la suma de los cuadrados de 32 coeficientes, cuando $N = 64$, y de 64 coeficientes cuando $N = 128$.

El espectro de fase tiene el mismo número de puntos que el espectro de potencia. El valor de los mismos nunca supera el valor de ± 1 , lo cual es correcto ya que en realidad se trata del coseno de un ángulo. Los desplazamientos cíclicos realizados para comprobar la invariancia del espectro de potencia sirven también para demostrar la variabilidad del espectro de fase respecto de estos des~~plaza~~

mientos. De acuerdo a lo establecido anteriormente, se com
prueba, comparando el espectro de fase de las curvas 6-2 y
6-3, que el valor de $\cos \theta_4$ es 8-antiperiódico, y el de
las curvas 6-2 y 6-4, que el valor de $\cos \theta_5$ es 16-antipe
riódico.

A continuación la computadora nos entrega los resul-
tados de la transformada directa e inversa, a partir de un
número de coeficientes que puede variar de 1/16 a la tota-
lidad de los mismos. La impresión de los resultados en co-
lumnas permite una inspección fácil y rápida de los mismos.
Puesto que los coeficientes tal como se obtienen no están
ordenados secuencialmente, para poder apreciar la relación
secuencia-magnitud de los mismos, se los ordena secuencial
mente como se indica en las tablas 6-1, 6-2 y 6-3. No se -
da la ordenación secuencial para la curva 6-6.

Se puede apreciar de estas tablas que si bien la dis
tribución de los coeficientes de mayor magnitud es arbitra-
ria, los de mayor magnitud tienden a acumularse en la re-
gión de baja secuencia. Excepcionalmente, sin embargo, es
posible tener alguno que otro coeficiente muy significati-
vo en la región de alta secuencia. Teniendo en cuenta esta
distribución se puede pensar que la mejor forma de preser-
var una señal, desechando un número determinado de coefi-
cientes, es buscar un umbral de magnitud antes que de se-
cuencia.

| Sec. | Curva 6-1 | Curva 6-2 | Sec. | Curva 6-1 | Curva 6-2 |
|------|-----------|-----------|------|-----------|-----------|
| 0 | -2.5453 | -2.1609 | 32 | 0.0796 | 1.8609 |
| 1 | -0.3515 | 1.7953 | 33 | -0.2203 | 0.0984 |
| 2 | -3.8765 | -3.9046 | 34 | -0.1828 | 1.8609 |
| 3 | -2.2453 | -2.0296 | 35 | -0.3328 | 0.4171 |
| 4 | -1.0359 | -2.6671 | 36 | -0.3796 | 2.4609 |
| 5 | -0.1546 | -1.7296 | 37 | -0.4546 | 0.1546 |
| 6 | -3.6421 | -0.7359 | 38 | 0.0703 | 1.2609 |
| 7 | -3.3984 | -3.6046 | 39 | 0.0703 | 0.1734 |
| 8 | -2.3671 | -0.4265 | 40 | 0.2578 | 1.4765 |
| 9 | 0.2015 | 0.2109 | 41 | 0.4078 | -0.1921 |
| 10 | -3.5484 | -0.8390 | 42 | -0.0421 | 0.5578 |
| 11 | -0.9046 | 0.7546 | 43 | 0.2203 | -0.7546 |
| 12 | -2.9578 | 1.1296 | 44 | 0.1734 | 0.9890 |
| 13 | -0.7640 | 1.8234 | 45 | 0.1359 | -0.4734 |
| 14 | -2.2265 | -0.2953 | 46 | 0.0234 | 0.9328 |
| 15 | 0.4921 | 2.2546 | 47 | 0.0984 | -0.3884 |
| 16 | -0.8484 | 0.6515 | 48 | -0.4921 | 0.6796 |
| 17 | 0.1453 | 1.6265 | 49 | 0.4078 | 0.5109 |
| 18 | 0.7265 | 3.2578 | 50 | 0.1265 | 1.4671 |
| 19 | 1.4203 | 3.9515 | 51 | 0.8390 | 1.5421 |
| 20 | -0.6890 | 2.0578 | 52 | -0.5390 | 1.3921 |
| 21 | -0.0328 | 2.1890 | 53 | 0.2109 | 0.8296 |
| 22 | -0.2390 | 1.2890 | 54 | -0.3328 | 0.6796 |
| 23 | 1.2421 | 3.0140 | 55 | 0.9046 | 1.1109 |
| 24 | -1.1390 | 1.2421 | 56 | -0.4828 | 0.3015 |
| 25 | -0.5203 | -1.1765 | 57 | 0.1171 | -0.2484 |
| 26 | -0.9140 | 0.7546 | 58 | -0.7265 | 0.3703 |
| 27 | -0.1078 | -0.3328 | 59 | -0.0515 | -0.3234 |
| 28 | -0.4921 | 3.0234 | 60 | -0.4171 | 0.8390 |
| 29 | -0.1734 | 0.8109 | 61 | -0.0796 | -0.0796 |
| 30 | -1.2046 | 0.2484 | 62 | -0.5859 | 0.7453 |
| 31 | -0.5484 | -0.1828 | 63 | -0.0234 | 0.2578 |

Tabla 6-1. Coeficientes de las curvas 6-1 y 6-2 ordenados secuencialmente.

| Sec. | Curva 6-3 | Curva 6-4 | Sec. | Curva 6-3 | Curva 6-4 |
|------|-----------|-----------|------|-----------|-----------|
| 0 | -2.1609 | -2.1609 | 32 | 1.8608 | 1.8609 |
| 1 | 4.0828 | 3.9046 | 33 | -1.5890 | -1.8609 |
| 2 | -0.5578 | 1.7953 | 34 | 1.5328 | 0.0984 |
| 3 | 2.6671 | 2.0296 | 35 | -2.4609 | -0.4171 |
| 4 | -2.0296 | 2.6671 | 36 | 0.4171 | -2.4609 |
| 5 | -1.6171 | -0.7359 | 37 | 0.1734 | 1.2609 |
| 6 | -1.5515 | 1.7296 | 38 | 0.4265 | -0.1546 |
| 7 | 3.6046 | -3.6046 | 39 | -0.1734 | 0.1734 |
| 8 | 0.4265 | -0.4265 | 40 | -1.4765 | 1.4765 |
| 9 | 0.2390 | 0.8390 | 41 | 0.6046 | -0.5578 |
| 10 | 1.3734 | 0.2109 | 42 | -0.8859 | -0.1921 |
| 11 | 1.1296 | -0.7546 | 43 | 0.9890 | 0.7546 |
| 12 | -0.7546 | -1.1296 | 44 | 0.7546 | -0.9890 |
| 13 | 1.2890 | -0.2953 | 45 | -0.1453 | 0.9328 |
| 14 | -0.7453 | -1.8234 | 46 | 0.5203 | 0.4734 |
| 15 | 2.2546 | 2.2546 | 47 | -0.3984 | -0.3984 |
| 16 | 0.6515 | 0.6515 | 48 | 0.6796 | 0.6796 |
| 17 | -2.5546 | -3.2778 | 49 | -1.2328 | -1.4671 |
| 18 | 1.9921 | 1.6265 | 50 | 0.9140 | 0.5109 |
| 19 | -2.0578 | -3.9515 | 51 | -1.3921 | -1.5421 |
| 20 | 3.9515 | -2.0578 | 52 | 1.5421 | -1.3921 |
| 21 | -0.9234 | 1.2890 | 53 | -0.2765 | 0.6796 |
| 22 | 2.8921 | -2.1890 | 54 | 1.0640 | -0.8296 |
| 23 | -3.0140 | 3.0140 | 55 | -1.1109 | 1.1109 |
| 24 | -1.2421 | 1.2421 | 56 | -0.8015 | 0.8015 |
| 25 | 1.4953 | -0.7546 | 57 | 0.6421 | -0.3703 |
| 26 | 0.4921 | -1.1765 | 58 | -0.4734 | -0.2484 |
| 27 | 3.0234 | 0.3328 | 59 | 0.8390 | 0.3234 |
| 28 | 0.3328 | -3.0234 | 60 | 0.3234 | -0.8390 |
| 29 | -0.4359 | 0.2484 | 61 | 0.0234 | 0.7453 |
| 30 | -0.0703 | -0.8109 | 62 | 0.3515 | 0.0796 |
| 31 | -0.1828 | -0.1828 | 63 | 0.2578 | 0.2578 |

Tabla 6-2. Coeficientes de las curvas 6-3 y 6-4 ordenados secuencialmente.

Curva 6-5

| Sec. | Coef. | Sec. | Coef. | Sec. | Coef. | Sec. | Coef. |
|------|---------|------|---------|------|---------|------|---------|
| 0 | 1.1023 | 32 | 0.6242 | 64 | 0.2242 | 96 | 0.2804 |
| 1 | -5.7132 | 33 | -0.5007 | 65 | 0.1867 | 97 | -0.0289 |
| 2 | 0.6710 | 34 | -0.3695 | 66 | -0.4039 | 98 | -0.1976 |
| 3 | -5.2164 | 35 | 2.8085 | 67 | -0.2820 | 99 | 0.9648 |
| 4 | 1.2179 | 36 | 0.7773 | 68 | 0.5398 | 100 | 0.4085 |
| 5 | 2.9710 | 37 | 0.1773 | 69 | 0.3335 | 101 | 0.1367 |
| 6 | -1.3039 | 38 | 0.5242 | 70 | -0.2664 | 102 | -0.0039 |
| 7 | -5.0914 | 39 | 3.0835 | 71 | 0.0804 | 103 | 1.1398 |
| 8 | -4.6304 | 40 | 1.6976 | 72 | 0.5007 | 104 | 0.7445 |
| 9 | 1.3039 | 41 | 0.4789 | 73 | 0.0695 | 105 | 0.3226 |
| 10 | -0.1960 | 42 | 0.0007 | 74 | -0.2117 | 106 | 0.0132 |
| 11 | 0.3664 | 43 | 1.9601 | 75 | -0.3335 | 107 | 0.5382 |
| 12 | 0.2664 | 44 | 0.5195 | 76 | 0.6851 | 108 | 0.3664 |
| 13 | 1.0445 | 45 | 0.6132 | 77 | -0.1023 | 109 | 0.2820 |
| 14 | 0.7164 | 46 | -0.2304 | 78 | -0.1117 | 110 | -0.2054 |
| 15 | -2.0210 | 47 | 1.9726 | 79 | -0.0460 | 111 | 0.7507 |
| 16 | -0.4225 | 48 | 0.0335 | 80 | 0.3742 | 112 | -0.0195 |
| 17 | 0.1179 | 49 | 0.5304 | 81 | 0.0835 | 113 | 0.1679 |
| 18 | 1.4773 | 50 | 0.4742 | 82 | -0.2445 | 114 | 0.1492 |
| 19 | 0.9429 | 51 | 0.7929 | 83 | -0.1320 | 115 | 0.1023 |
| 20 | 1.3117 | 52 | 0.7585 | 84 | -0.0320 | 116 | 0.2492 |
| 21 | -0.6007 | 53 | 0.0179 | 85 | 0.0710 | 117 | -0.0507 |
| 22 | 1.6117 | 54 | 0.4023 | 86 | -0.3039 | 118 | 0.2585 |
| 23 | 1.9773 | 55 | 1.0398 | 87 | -0.4539 | 119 | 0.1929 |
| 24 | 0.5351 | 56 | -0.2992 | 88 | -0.1742 | 120 | -0.0054 |
| 25 | 1.0601 | 57 | 0.7226 | 89 | 0.0226 | 121 | 0.3882 |
| 26 | 1.0039 | 58 | 0.2632 | 90 | -0.3148 | 122 | -0.1273 |
| 27 | 1.1632 | 59 | 1.2195 | 91 | -0.0523 | 123 | 0.1445 |
| 28 | 3.0601 | 60 | 0.7632 | 92 | -0.6179 | 124 | 0.4132 |
| 29 | 0.1914 | 61 | 0.3976 | 93 | 0.2726 | 125 | 0.2820 |
| 30 | 1.0820 | 62 | 0.0601 | 94 | -0.3929 | 126 | -0.0742 |
| 31 | 1.5039 | 63 | 1.1851 | 95 | -0.4679 | 127 | -0.0835 |

Tabla 6-3. Coeficientes de la curva 6-5 ordenados secuencialmente.

La parte más instructiva de los resultados, por la visualización gráfica que permite, está representada por los gráficos. Como tesis general se demuestra la posibilidad de recuperar con mayor o menor fidelidad una señal a partir de un número limitado de coeficientes. No hace falta resaltar la enorme ventaja que esto representa en el campo de las telecomunicaciones. Como dijimos antes, se ha probado la reconstitución de la curva original a partir de un número de coeficientes que va de 1/16 a la totalidad de los coeficientes. La fidelidad de la reconstitución de la curva aumenta con el número de coeficientes. La parte de los coeficientes requeridos para una reproducción fidedigna de la curva original, varía con el tipo de curva en cuestión. En ciertos casos se logra una reproducción bastante fiel de la curva con un número de coeficientes inferior a $N/2$, en otros casos aun con $N/2$ coeficientes no se logra una relevante fidelidad. Procediendo a un examen individual de cada curva tenemos los siguientes resultados.

Curva 6-1

Se trata de una curva de 64 muestras. La recuperación de la curva se hace utilizando primero 8 y luego 4 coeficientes. La reproducción se hace en los dos casos con secuencias de 4 valores repetidos. Sin embargo, la curva reconstituída a partir de 8 coeficientes sigue más de cerca a la curva original. La razón para este tipo de recons-

titución en forma de amplios escalones, es que todos los coeficientes retenidos son de baja secuencia, como se puede comprobar en la respectiva ordenación secuencial de los coeficientes: tabla 6-1.

Curva 6-2

Esta curva de 64 muestras se reconstituye a partir de 32 y 16 coeficientes. La curva reconstituída a partir de 32 coeficientes sigue con mayor fidelidad a la curva original. Sin embargo, se dan excepcionalmente valores de la curva reconstituída a partir de 15 coeficientes que se aproximan más a la original.

Curva 6-3

Se trata de la curva 6-2 con un desplazamiento cíclico de 8 muestras. Se puede observar; de las tablas de coeficientes ordenados en forma secuencial, que los valores de los coeficientes varían con el desplazamiento, lo cual demuestra que los valores de las funciones componentes se alteran con el desplazamiento. El espectro de potencia permanece invariable.

Curva 6-4

Se trata de la curva 6-2 con un desplazamiento cíclico de 16 muestras. Una vez más se observa la variación de los valores de los coeficientes con el desplazamiento.

Curva 6-5

Esta curva es reconstituída a partir de 64 y 32 coeficien-

tes. La curva reconstituída utilizando 64 coeficientes sigue más de cerca a la original. La curva original se ha obtenido muestreando 2 períodos ligeramente diferentes de un electrocardiograma. Se nota el predominio de los armónicos pares sobre los impares, lo cual es fácil comprobar en el espectro de potencia, pues para $P_7 = 59.832695$, que representa la suma de los cuadrados de los 64 coeficientes de secuencia :1, 3, 5,,63, se tiene un valor inferior a $P_6 = 61.246777$, que reúne los cuadrados de los 32 coeficientes de secuencia:2, 6, 10,,62 y a P_5 , que representa la suma de los cuadrados de los 16 coeficientes de secuencia: 4, 12, 20,,60. $P_5 = 67.505810$.

Curva 6-6

De esta curva sólo se presenta el gráfico. Es la curva 6-1 reconstituída en todos los casos a partir de 64 coeficientes. Las 3 curvas coinciden excepto en dos puntos en los que el redondeo de enteros da lugar a valores diferentes. La curva aparece trazada con el valor alfanumérico 3, pues este es el último valor que sustituye a los otros dos.

6.4 Perspectivas de aplicaciones

Los resultados matemáticos obtenidos están listos para su aplicación. Su aplicabilidad al diagnóstico automático dependerá en primer lugar del establecimiento de criterios muy definidos respecto de los indicios característicos de una enfermedad o anormalidad, en segundo lugar de

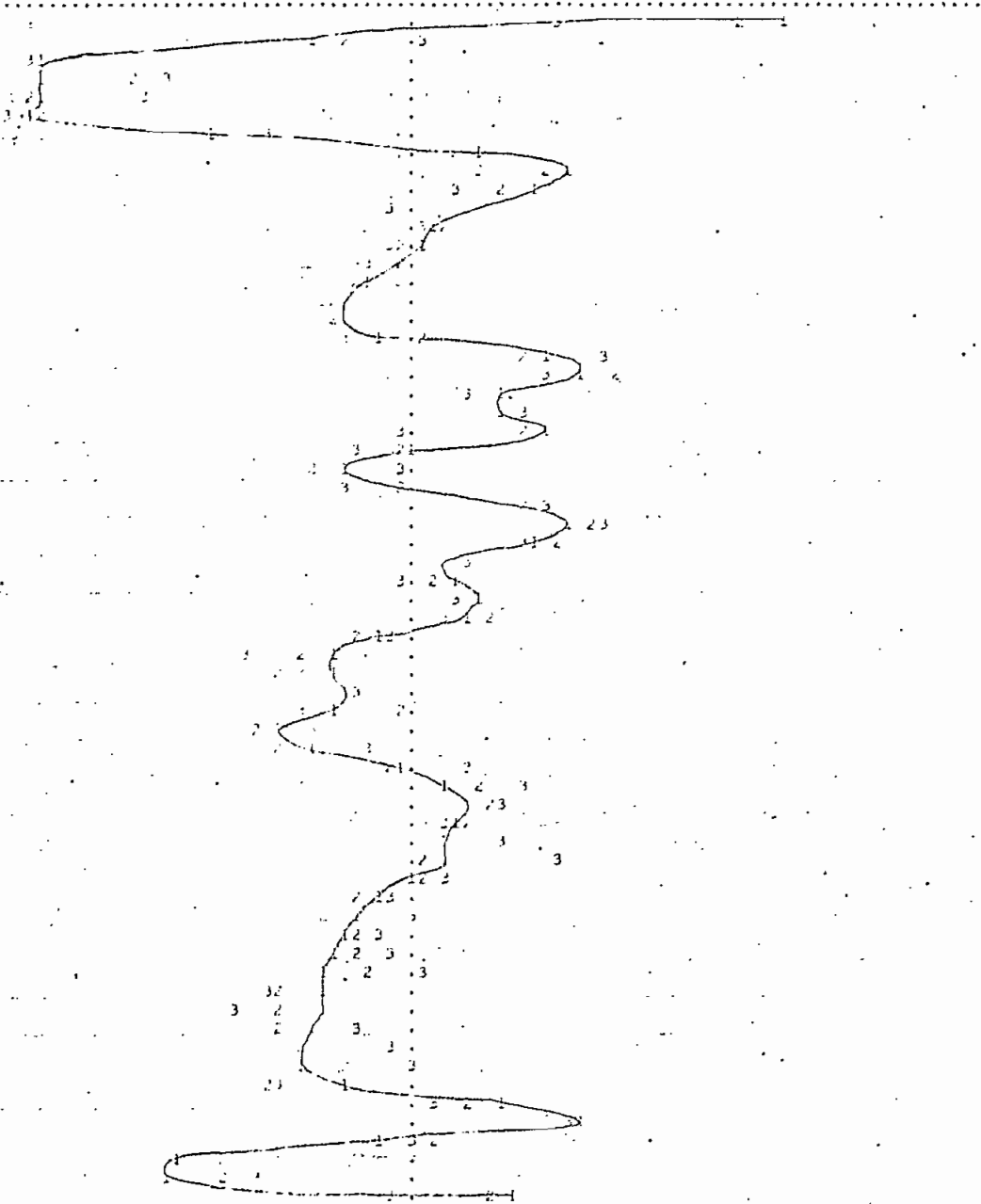
la posibilidad de procesar un elevado número de curvas para la extracción de criterios más generales y, por último, de una estrecha colaboración entre el teórico y el cardiólogo, ya que solamente así el aspecto matemático estudiado por el primero podrá ser complementado con las observaciones y valoraciones clínicas del segundo.

Cabe observar que este estudio sobre la transformada de Hadamard podría ser aplicado igualmente a la identificación automática de huellas dactilares, ya en un plano bidimensional.

A continuación siguen las fotocopias reducidas de los resultados obtenidos al procesar las 6 curvas arriba mencionadas. La computadora utilizada fue la IBM 1130 de la Universidad Central.

STATIONS

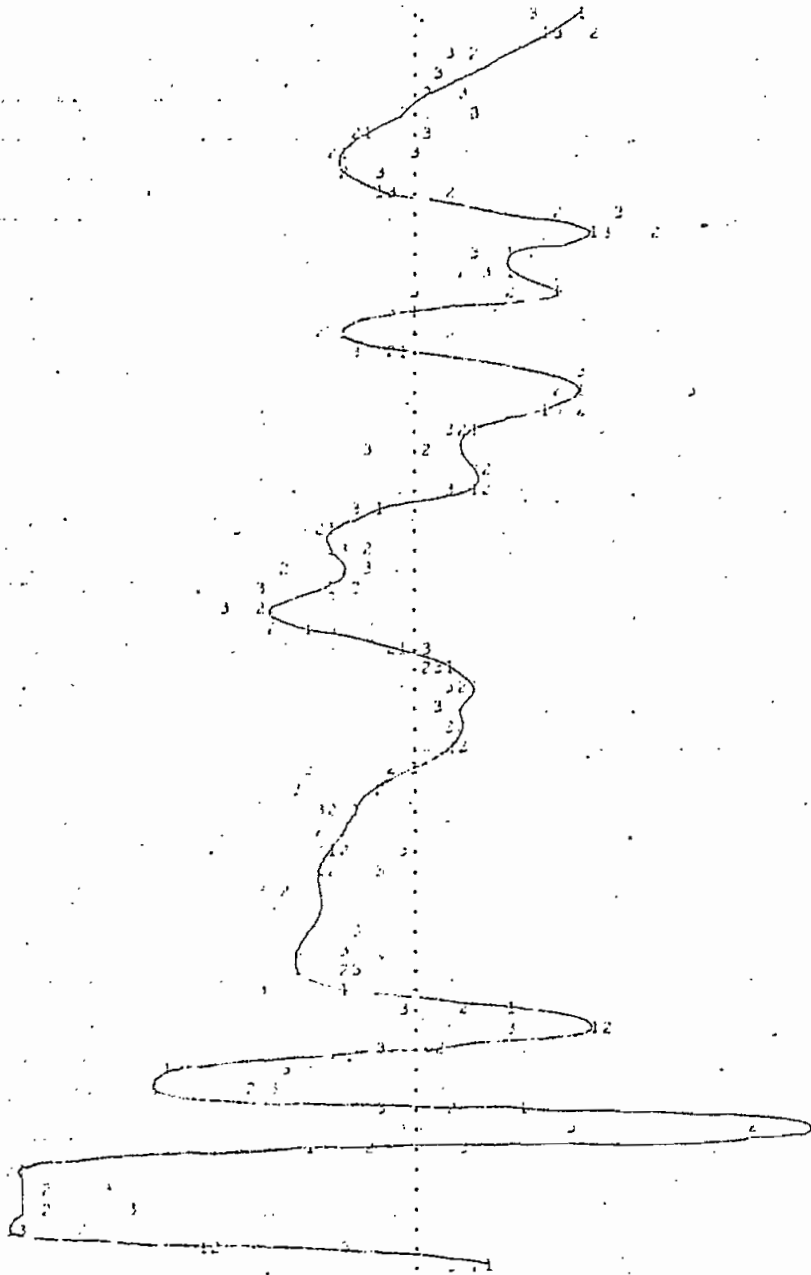
- 1 CURVA INTERMEDIA
- 2 CURVA DE ACCESORIE A FLEXIEI 32 COEFICIENTES
- 3 CURVA DE ACCESORIE A FLEXIEI 16 COEFICIENTES



CURVA 6-2

WATTCO

- 1 CURVA ORIGINAL
- 2 CURVA RECONSTRUIDA A PARTIR DE 32 COEFICIENTES
- 3 CURVA RECONSTRUIDA A PARTIR DE 16 COEFICIENTES



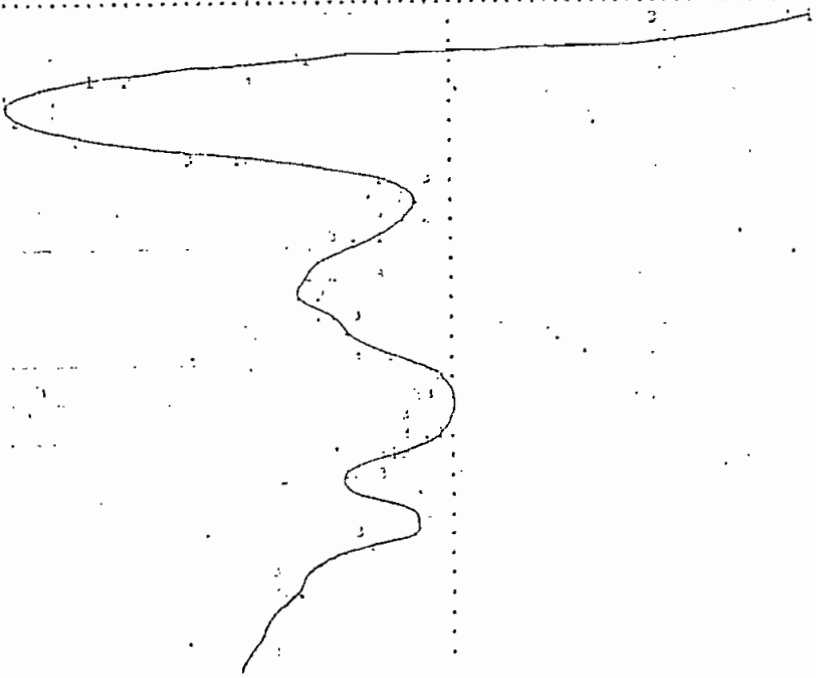
CURVA 6 - 3

| | | | | | |
|--------|---------|--------|--------|---------|--------|
| 1.4000 | -1.3000 | 0.0000 | 1.4000 | -1.3000 | 0.0000 |
| 1.4100 | -1.3100 | 0.0000 | 1.4100 | -1.3100 | 0.0000 |
| 1.4200 | -1.3200 | 0.0000 | 1.4200 | -1.3200 | 0.0000 |
| 1.4300 | -1.3300 | 0.0000 | 1.4300 | -1.3300 | 0.0000 |
| 1.4400 | -1.3400 | 0.0000 | 1.4400 | -1.3400 | 0.0000 |
| 1.4500 | -1.3500 | 0.0000 | 1.4500 | -1.3500 | 0.0000 |
| 1.4600 | -1.3600 | 0.0000 | 1.4600 | -1.3600 | 0.0000 |
| 1.4700 | -1.3700 | 0.0000 | 1.4700 | -1.3700 | 0.0000 |
| 1.4800 | -1.3800 | 0.0000 | 1.4800 | -1.3800 | 0.0000 |
| 1.4900 | -1.3900 | 0.0000 | 1.4900 | -1.3900 | 0.0000 |
| 1.5000 | -1.4000 | 0.0000 | 1.5000 | -1.4000 | 0.0000 |
| 1.5100 | -1.4100 | 0.0000 | 1.5100 | -1.4100 | 0.0000 |
| 1.5200 | -1.4200 | 0.0000 | 1.5200 | -1.4200 | 0.0000 |
| 1.5300 | -1.4300 | 0.0000 | 1.5300 | -1.4300 | 0.0000 |
| 1.5400 | -1.4400 | 0.0000 | 1.5400 | -1.4400 | 0.0000 |
| 1.5500 | -1.4500 | 0.0000 | 1.5500 | -1.4500 | 0.0000 |
| 1.5600 | -1.4600 | 0.0000 | 1.5600 | -1.4600 | 0.0000 |
| 1.5700 | -1.4700 | 0.0000 | 1.5700 | -1.4700 | 0.0000 |
| 1.5800 | -1.4800 | 0.0000 | 1.5800 | -1.4800 | 0.0000 |
| 1.5900 | -1.4900 | 0.0000 | 1.5900 | -1.4900 | 0.0000 |
| 1.6000 | -1.5000 | 0.0000 | 1.6000 | -1.5000 | 0.0000 |
| 1.6100 | -1.5100 | 0.0000 | 1.6100 | -1.5100 | 0.0000 |
| 1.6200 | -1.5200 | 0.0000 | 1.6200 | -1.5200 | 0.0000 |
| 1.6300 | -1.5300 | 0.0000 | 1.6300 | -1.5300 | 0.0000 |
| 1.6400 | -1.5400 | 0.0000 | 1.6400 | -1.5400 | 0.0000 |
| 1.6500 | -1.5500 | 0.0000 | 1.6500 | -1.5500 | 0.0000 |
| 1.6600 | -1.5600 | 0.0000 | 1.6600 | -1.5600 | 0.0000 |
| 1.6700 | -1.5700 | 0.0000 | 1.6700 | -1.5700 | 0.0000 |
| 1.6800 | -1.5800 | 0.0000 | 1.6800 | -1.5800 | 0.0000 |
| 1.6900 | -1.5900 | 0.0000 | 1.6900 | -1.5900 | 0.0000 |
| 1.7000 | -1.6000 | 0.0000 | 1.7000 | -1.6000 | 0.0000 |
| 1.7100 | -1.6100 | 0.0000 | 1.7100 | -1.6100 | 0.0000 |
| 1.7200 | -1.6200 | 0.0000 | 1.7200 | -1.6200 | 0.0000 |
| 1.7300 | -1.6300 | 0.0000 | 1.7300 | -1.6300 | 0.0000 |
| 1.7400 | -1.6400 | 0.0000 | 1.7400 | -1.6400 | 0.0000 |
| 1.7500 | -1.6500 | 0.0000 | 1.7500 | -1.6500 | 0.0000 |
| 1.7600 | -1.6600 | 0.0000 | 1.7600 | -1.6600 | 0.0000 |
| 1.7700 | -1.6700 | 0.0000 | 1.7700 | -1.6700 | 0.0000 |
| 1.7800 | -1.6800 | 0.0000 | 1.7800 | -1.6800 | 0.0000 |
| 1.7900 | -1.6900 | 0.0000 | 1.7900 | -1.6900 | 0.0000 |
| 1.8000 | -1.7000 | 0.0000 | 1.8000 | -1.7000 | 0.0000 |
| 1.8100 | -1.7100 | 0.0000 | 1.8100 | -1.7100 | 0.0000 |
| 1.8200 | -1.7200 | 0.0000 | 1.8200 | -1.7200 | 0.0000 |
| 1.8300 | -1.7300 | 0.0000 | 1.8300 | -1.7300 | 0.0000 |
| 1.8400 | -1.7400 | 0.0000 | 1.8400 | -1.7400 | 0.0000 |
| 1.8500 | -1.7500 | 0.0000 | 1.8500 | -1.7500 | 0.0000 |
| 1.8600 | -1.7600 | 0.0000 | 1.8600 | -1.7600 | 0.0000 |
| 1.8700 | -1.7700 | 0.0000 | 1.8700 | -1.7700 | 0.0000 |
| 1.8800 | -1.7800 | 0.0000 | 1.8800 | -1.7800 | 0.0000 |
| 1.8900 | -1.7900 | 0.0000 | 1.8900 | -1.7900 | 0.0000 |
| 1.9000 | -1.8000 | 0.0000 | 1.9000 | -1.8000 | 0.0000 |
| 1.9100 | -1.8100 | 0.0000 | 1.9100 | -1.8100 | 0.0000 |
| 1.9200 | -1.8200 | 0.0000 | 1.9200 | -1.8200 | 0.0000 |
| 1.9300 | -1.8300 | 0.0000 | 1.9300 | -1.8300 | 0.0000 |
| 1.9400 | -1.8400 | 0.0000 | 1.9400 | -1.8400 | 0.0000 |
| 1.9500 | -1.8500 | 0.0000 | 1.9500 | -1.8500 | 0.0000 |
| 1.9600 | -1.8600 | 0.0000 | 1.9600 | -1.8600 | 0.0000 |
| 1.9700 | -1.8700 | 0.0000 | 1.9700 | -1.8700 | 0.0000 |
| 1.9800 | -1.8800 | 0.0000 | 1.9800 | -1.8800 | 0.0000 |
| 1.9900 | -1.8900 | 0.0000 | 1.9900 | -1.8900 | 0.0000 |
| 2.0000 | -1.9000 | 0.0000 | 2.0000 | -1.9000 | 0.0000 |

Procesamiento de la curva 6-5

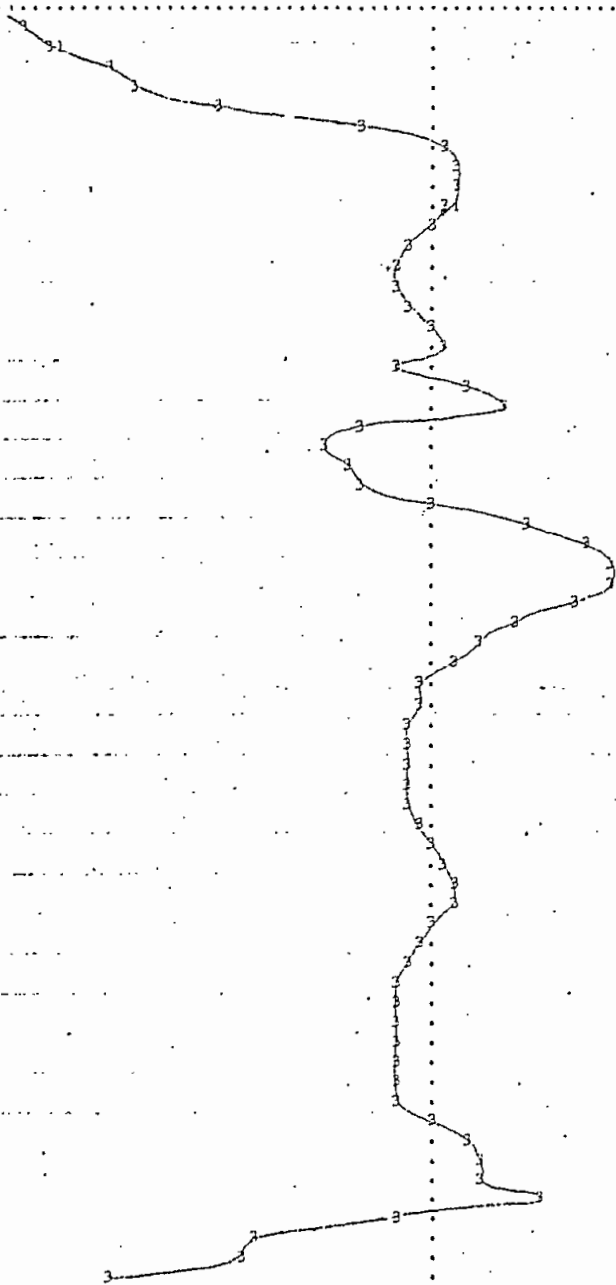
- 1 CURVA ORIGINAL
- 2 CURVA CORREGIDA A PARTIR DE 60 COEFICIENTES
- 3 CURVA CORREGIDA A PARTIR DE 32 COEFICIENTES

CURVA 6-5



GRAFICOS

- 1 CURVA ORIGINAL
- 2 CURVA RECONSTITUIDA A PARTIR DE 64 COEFICIENTES
- 3 CURVA RECONSTITUIDA A PARTIR DE 86 COEFICIENTES



CURVA 6 - 6

BIBLIOGRAFIA

Libros

- [1] B. P. Lathi, Signals, Systems and Communication, John Wiley and Sons, New York, 1965
- [2] A. G. Kurosch, Curso de Algebra Superior, Editorial Mir, Moscú, 1968.
- [3] Franz E. Hohn, Algebra de Matrices, Editorial F. Trillas, México, 1970.
- [4] Richard Bellman, Introducción al Análisis Matricial, Editorial Reverté, Barcelona, 1965.
- [5] Lawrence P. Huelsman, Circuit Matrices and Linear Space Vectors, Mc Graw-Hill Book Company, New York, 1963.
- [6] S. W. Golomb, L. D. Baumert, M. F. Easterling y J. J. Stiffler, Digital Communications, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1964.

Revistas

- [7] J. W. Cooley y J. W. Tukey, "An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series," Math. of Comp., vol. 19, Abril 1965, pp. 297-301.
- [8] E. O. Brigham y R. E. Morrow, "The fast Fourier transform," IEEE Spectrum, vol. 4, nro. 12, Diciembre 1967, pp. 65-70
- [9] H. C. Andrews y K. L. Caspari, "A generalized technique for spectral analysis," IEEE Transactions on Com-

- nuters, vol. C-19, nro. 1, Enero 1970, pp. 16-25.
- [10] N. Ahmed, K. R. Rao y R. B. Schultz, "A generalized discrete transform," Proceedings of the IEEE, vol. 59, nro. 9, Septiembre 1971, pp. 1360-1362.
- [11] N. Ahmed, K. R. Rao y R. B. Schultz, "The generalized transform," IEEE Trans. on Electromagnetic Compatibility, vol. EMC-13, nro. 3, Agosto 1971, pp. 60-67.
- [12] K. R. Rao, L. C. Mrig y N. Ahmed, "A modified generalized discrete transform," Proceedings of the IEEE, vol. 61, nro. 5, Mayo 1973, pp. 668-669.
- [13] D. K. Cheng y D. L. Johnson, "Walsh transform of sampled time functions and the sampling principle," Proceedings of the IEEE, vol. 61, nro. 5, Mayo 1973, p. 74.
- [14] J. L. Walsh, "A closed set of orthogonal functions," Amer. J. Math., vol. 55, 1923, pp. 5-24.
- [15] IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility (Special Issue on Applications of Walsh Functions 1971 Symposium Proceedings), vol. EMC-13, Agosto 1971, nro. 3.
- [16] Chung-Kwuong Yuen, "Upper bounds on Walsh Transforms," IEEE Trans. on Computers, vol. C-21, nro. 12, Diciembre 1972, pp. 1274-1275.
- [17] R. B. Lackey y D. Heltzer, "A simplified definition of Walsh functions," IEEE Trans. on Computers, vol. C-20,

- Febrero 1971, nro. 2, pp. 211-213.
- [18] R. E. A. C. Paley, "A remarkable series of orthogonal functions," Proc. London Math. Soc., vol. 2, nro. 34, 1932, pp. 241-279.
- [19] G. R. Redinbo, "Transforms of generalized Walsh functions," Proceedings of the IEEE, vol. 59, nro. 9, Septiembre 1971, pp. 1352-1353.
- [20] H. F. Harmuth, "Applications of Walsh functions in communications," IEEE Spectrum, vol. 60, nro. 11, Noviembre 1969, p. 82.
- [21] W. K. Pratt, J. Kane y H. C. Andrews, "Hadamard transform image coding," Proceedings of the IEEE, vol. 57, nro. 1, Enero 1969, pp. 58-68.
- [22] N. Ahmed y S. M. Cheng, "On matrix partitioning and a class of algorithms," IEEE Trans. on Education, vol. E-13, nro. 2, Agosto 1970, pp. 103-104.
- [23] J. W. Manz, "A sequency ordered fast Walsh transform," IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics, vol. AU-20, nro. 3, Agosto 1972, pp. 204-205.
- [24] N. Ahmed, K. R. Rao y A. L. Abdussattar, "BIFORE or Hadamard transform," IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics, vol. AU-19, nro. 3, Septiembre 1971, pp. 225-234.
- [25] N. Ahmed y K. R. Rao, "A phase spectrum for binary Fourier representacion," Inter. J. Computer Math.,

Sección B, vol. 3, 1971, pp. 85-101.

- [26] N. Ahmed, R. M. Bates y K. R. Rao, "Multidimensional BIFORE Transform," Electronics Letters, vol. 6, Abril 16, 1970, pp. 237-238.
- [27] B. J. Fino, "Relations between Haar and Walsh/Hadamard Transforms," Proceedings of the IEEE, vol. 60, nro. 5, Mayo 1972, pp. 647-648.
- [28] N. Ahmed y K. R. Rao, "Additional properties of complex BIFORE Transform," IEEE Trans. on Audio and Electroac., vol. AU-19, nro. 3, Septiembre 1971, pp. 252-253.
- [29] N. Ahmed y K. R. Rao, "A decomposition technique for complex N-periodic sequences," IEEE Trans. on Audio and Electroac., vol. AU-19, nro. 4, Diciembre 1971, pp. 324-326.
- [30] N. Ahmed y K. R. Rao, "Spectral analysis of linear digital systems using BIFORE," Electronics Letters, vol. 6, Enero 22, 1970, pp. 43-44.
- [31] S. J. Campanella y G. S. Robinson, "A comparison of Walsh and Fourier transformations for application to speech," IEEE Trans. on Electromagnetic Compatibility (Applications of Walsh functions 1971 Symposium proceedings), vol. EMC-13, nro. 3, Agosto 1971, pp. 199-202.
- [32] F. Ying T. Shum, A. Ronald Elliot y W. Owen Brown,

"Speech processing with Walsh-Hadamard transforms,"
IEEE Trans. on Audio and Electroac., vol. AU-21, nro.
3, Junio 1973, pp. 174-179.