

LA TRANSFORMADA RAPIDA DE FOURIER

TESIS PREVIA A LA OBTENCION DEL TITULO DE  
INGENIERO EN LA ESPECIALIZACION DE ELECTRO  
NICA DE LA ESCUELA POLITECNICA NACIONAL .

F. MARCELO RODAS POSSO

Quito, Enero de 1977.

CERTIFICO, QUE EL PRESENTE TRABA-  
JO HA SIDO REALIZADO INTEGRAMENTE  
POR EL SEÑOR MARCELO RODAS POSSO.

A handwritten signature in black ink, reading "G. E. Hidalgo". The signature is written in a cursive style with a large, prominent initial "G".

ING. GUALBERTO HIDALGO

Director de Tesis

AGRADECIMIENTO

Quiero expresar mi agradecimiento al Ing. Gualberto Hidalgo, Director de Tesis, quien con sus consejos, sugerencias y críticas ha hecho posible la realización de este trabajo.

## INTRODUCCION

El presente trabajo tiene por objeto realizar un análisis matemático de la Transformada de Fourier, para luego realizar un programa principal para obtener la Transformada Rápida de Fourier.

La Tesis consta de 4 capítulos; en el primer capítulo se realiza un estudio sobre la Transformada discreta Generalizada, en el segundo capítulo se hace un estudio de las Transformadas continua y discreta de Fourier, así como también un análisis de la matriz de transformación o matriz de Fourier, en el tercer capítulo se hace un estudio del algoritmo rápido para el cálculo de la Transformada discreta de Fourier, así como el estudio de los Espectros de Potencia y Fase. Finalmente, en el cuarto capítulo se presentan los resultados obtenidos al procesar las distintas curvas, mediante el programa que obtiene la Transformada Rápida de Fourier.

Hay que anotar, que todos los programas presentados han sido escritos en FORTRAN IV y corridos en la computadora IBM 370-125, propiedad de la Escuela Politécnica Nacional.

## INDICE

Página

### CAPITULO I

#### LA TRANSFORMADA DISCRETA GENERALIZADA

- 1.1 La Transformada discreta generalizada como una caso de transformación de vectores 1

### CAPITULO II

#### ESTUDIO DE LA TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER

- 2.1 Transformadas continua y discreta de Fourier 6
- 2.2 Matrices de Fourier ..... 12
- 2.2.1 Características de las matrices de Fourier 12
- 2.2.2 Obtención de las matrices de Fourier .... 15
- Programa para la obtención de los valores de  $\langle K \rangle$  ..... 18

### CAPITULO III

#### TRANSFORMADA RAPIDA DE FOURIER

- 3.1 Factorización de las matrices de Fourier. 21
- 3.2 Algoritmo para el cálculo de la Transformada de Fourier ..... 24
- Programa para la obtención de la Transformada Rápida de Fourier ..... 34
- 3.3 Espectros de Potencia y Fase de la Transformada de Fourier ..... 39
- 3.3.1 Espectro de Potencia ..... 39

	<u>Página</u>
3.3.2 Espectro de Fase .....	46
Programa para obtener los Espectros de Po tencia y Fase de la Transformada de Fourier	47
Programa para ordenar los Espectros.....	51
Programa para realizar los gráficos de la curva original, Espectros de Potencia y Fase	54
3.4 La Transformada de Fourier multidimensional	61

#### CAPITULO IV

##### APLIACION PRACTICA

Resultados y gráficos del procesamiento de las curvas #1, #2, #3 y #4.....	65
Programa para seleccionar los valores más altos de la Transformada Directa de Fourier	93
Resultados y gráficos de las curvas recons- tituidas a partir de un determinado número de coeficientes .....	96

CAPITULO I

LA TRANSFORMADA DISCRETA GENERALIZADA

1.1 LA TRANSFORMADA DISCRETA GENERALIZADA COMO UN CASO DE TRANSFORMACION DE VECTORES.

Sea una señal analógica cualquiera  $f(t)$ , la cual debe ser muestreada con alguna finalidad, siendo  $N$  el número de muestras en un intervalo de tiempo.

Si se considera que la señal  $f(t)$  es de la siguiente forma:

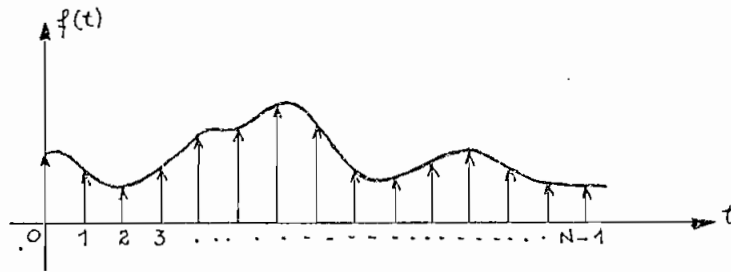


fig. (1.1)

y si se conoce que la Transformada de Fourier de la señal  $f(t)$  es  $F(\omega)$ , se puede realizar un gráfico hipotético de lo que sería la transformada  $F(\omega)$ :

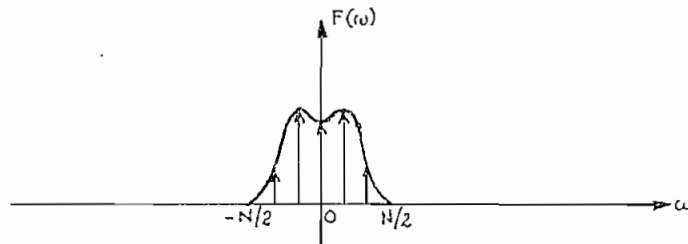


fig. (1.2)

Como se puede observar, las muestras tomadas de la señal  $f(t)$ , no son sino una serie ordenada de valores, los cuales en el dominio de frecuencia se han transfor-

mado en otra serie ordenada de valores, razón por la cual se puede estudiar la Transformada Discreta Generalizada como un caso de transformación de vectores. Esta transformación de vectores, es una transformación lineal ya que cumple con las siguientes propiedades:

- a) La transformada de la suma de vectores, es igual a la suma de las transformadas de los vectores.
- b) La transformada del producto de un escalar por un vector, es igual al escalar por la transformada del vector.

Se puede asumir que el número de dimensiones del vector transformado es igual al número de dimensiones del vector muestra, de tal manera que si tenemos  $N$  muestras, éstas se transformarán en  $N$  valores transformados; razón por la cual ésta transformación se la puede estudiar como una transformación de bases en el espacio  $N$  dimensional, al cual representaremos por  $B_N$ . Sea:  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_N = \bar{X}$ , una base del espacio  $B_N$ . y  $XT_1, XT_2, XT_3, \dots, XT_N = \overline{X\bar{T}}$ , la base  $\bar{X}$  transformada. Como se mencionó anteriormente, ambas bases pertenecen al espacio  $N$  dimensional, de tal manera que encontrando la relación o relaciones existentes entre las dos bases, se habrá llegado a la definición de la Transformada discreta Generalizada.





La ecuación (1.1) en forma simplificada:

$$[XT] = [T][X] \quad (1.2)$$

siendo ésta ecuación la que determina la Transformada discreta generalizada; donde  $[T]$  es una matriz de transformación, por intermedio de la cual se puede conseguir la transformación de los vectores de la base  $\bar{X}$  en los vectores de la base  $\bar{XT}$ .

La matriz  $[T]$  representa las coordenadas de los vectores  $\bar{XT}$  en la base  $\bar{X}$ , por lo que se le denomina matriz de transformación de la base  $\bar{X}$  por la base  $\bar{XT}$ .

De igual manera que se obtuvo los vectores de la base  $\bar{XT}$  expresados en función de la base  $\bar{X}$ , ahora se obtienen los vectores de la base  $\bar{X}$  como una combinación lineal de los vectores de la base  $\bar{XT}$ . Entonces se tiene:

$$\begin{aligned} \bar{X}_1 &= t_{11}^i XT_1 & t_{12}^i XT_2 & \dots \dots \dots & t_{1n}^i XT_n \\ \bar{X}_2 &= t_{21}^i XT_1 & t_{22}^i XT_2 & \dots \dots \dots & t_{2n}^i XT_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \bar{X}_n &= t_{n1}^i XT_1 & t_{n2}^i XT_2 & \dots \dots \dots & t_{nn}^i XT_n \end{aligned}$$

expresando en forma matricial se tiene:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11}^i & t_{12}^i & \dots \dots \dots & t_{1n}^i \\ t_{21}^i & t_{22}^i & \dots \dots \dots & t_{2n}^i \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_{n1}^i & t_{n2}^i & \dots \dots \dots & t_{nn}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} XT_1 \\ XT_2 \\ \vdots \\ XT_n \end{bmatrix}$$

(1.3)

Si se tiene la ecuación (1.3) en forma simplificada se tiene que:

$$[X] = [T'] [XT] \quad (1.4)$$

donde  $[T']$  es la matriz de transformación de la base  $\overline{XT}$  por la base  $\overline{X}$ .

Si se reemplaza (1.2) en (1.4) y viceversa, se llega a demostrar que:  $[T'] [T] = [T] [T'] = I_N$ , matriz unitaria de orden N;  $[T'] = [T]^{-1}$ , donde  $[T]^{-1}$  es la matriz inversa de  $[T]$ ; matriz con la cual se puede recuperar la señal original, ya que generalmente el análisis de una señal solo tiene un interés transitorio.

Se tiene entonces que la Transformada discreta generalizada queda definida mediante las relaciones (1.2) y (1.4); relaciones en las cuales las matrices  $[T]$  y  $[T]^{-1}$  son de gran importancia para la obtención de los vectores transformados  $\overline{XT}$ , así como también para la recuperación de los vectores originales  $\overline{X}$ , siendo éstas materia de un estudio aparte, el cual se realizará en el siguiente capítulo.

CAPITULO II

ESTUDIO DE LA TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER

2.1 TRANSFORMADAS CONTINUA Y DISCRETA DE FOURIER.

La transformada continua de Fourier, no es sino un caso límite de las series de Fourier. Si tenemos una función periódica  $f(t)$  de período  $T$ , es posible expresarla como una serie trigonométrica de Fourier, mediante la siguiente fórmula:

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos \omega_0 t + a_2 \cos 2\omega_0 t + \dots + b_1 \operatorname{sen} \omega_0 t + b_2 \operatorname{sen} 2\omega_0 t + \dots \quad (2.1)$$

la cual expresada como un sumatorio:

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t) \quad (2.2)$$

donde:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot \cos(n\omega_0 t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot \operatorname{sen}(n\omega_0 t) dt$$

Para llegar a la definición de la transformada continua de Fourier, es necesario que se obtenga lo que se conoce con el nombre de la Serie compleja de Fourier, para lo cual se expresa las funciones trigonométricas seno y coseno en términos exponenciales y se reemplaza en la ecuación (2.2):

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \frac{1}{2} (e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}) + b_n \frac{1}{j} (e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}) \right] \quad (2.3)$$

si se hace que:

$$C_0 = 1/2 a_0$$

$$C_n = 1/2(a_n - j b_n)$$

$$C_{-n} = 1/2(a_n + j b_n)$$

se llega a la definición de la Serie compleja de Fourier:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot e^{jn\omega_0 t} \quad (2.4)$$

$$\text{donde: } C_n = 1/T \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (2.5)$$

Si se reemplaza (2.5) en (2.4) se tiene que:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ 1/T \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-jn\omega_0 x} dx \right] e^{jn\omega_0 t} \quad (2.6)$$

Se ha utilizado la variable  $x$  a fin de evitar cualquier confusión con la variable  $t$ .

Si se reemplaza en (2.6) en valor de  $T = 2\pi/\omega_0$ :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ 1/2\pi \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-jn\omega_0 x} dx \right] e^{jn\omega_0 t} \cdot \omega_0 \quad (2.7)$$

Ahora, si  $T \rightarrow \infty$ ,  $\omega_0$  tiene que ser pequeña, o sea  $\omega_0 = \Delta\omega$  entonces la frecuencia de cualquier armónica  $n\omega_0$  debe ahora corresponder a la frecuencia general variable, la que describe el espectro continuo.

En otras palabras, si  $n \rightarrow \infty$  y como  $\omega_0 = \Delta\omega \rightarrow 0$ , realizando el producto  $n \cdot \omega_0$  que tiene que ser un valor finito:  $n\omega_0 = n\Delta\omega \rightarrow \omega$ , (2.7) se transforma en:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ 1/2\pi \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-j\omega x} dx \right] e^{j\omega t} \cdot \Delta\omega \quad (2.8)$$

En el límite,  $T \rightarrow \infty$ ,  $\Delta\omega \rightarrow d\omega$ , la sumatoria se transforma en un integral sobre  $\omega$ , entonces la función  $f(t)$  ahora es no-periódica y tiene la forma:

$$f(t) = 1/2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-t_0}^{\infty} f(x) e^{-j\omega x} dx \right] e^{j\omega t} d\omega \quad (2.9)$$

De la ecuación (2.9) llegamos a la definición de la Transformada continua de Fourier, para lo cual se define a  $F(\omega)$  como:  $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j\omega x} dx$  (2.10) con lo cual la ecuación (2.9) llega a ser,

$$f(t) = 1/2\pi \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (2.11)$$

Si en la ecuación (2.10) se restituye la variable  $t$  por la variable  $x$  :

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad (2.12)$$

Siendo las ecuaciones (2.11) y (2.12) las que definen la transformada continua directa e inversa respectivamente.

Si se hace  $\omega = 2\pi \cdot f$  y considerando además que  $F(2\pi \cdot f) = F(f)$ , las ecuaciones (2.11) y (2.12) se transforman en:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(f)e^{j2\pi \cdot f \cdot t} df \quad (2.13)$$

$$F(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j2\pi \cdot f \cdot t} dt \quad (2.14)$$

Quedando de ésta manera expresada la Transformada continua de Fourier en términos de la frecuencia  $f$ .

Para llegar a la definición de la Transformada discreta de Fourier es necesario considerar una señal  $f(t)$  de ancho de banda limitado y además asumir que la transformada de Fourier de  $f(t)$  es  $F(\omega)$ , y entonces se puede realizar un gráfico hipotético de lo que representarían tanto la función  $f(t)$  como su transformada  $F(\omega)$ .

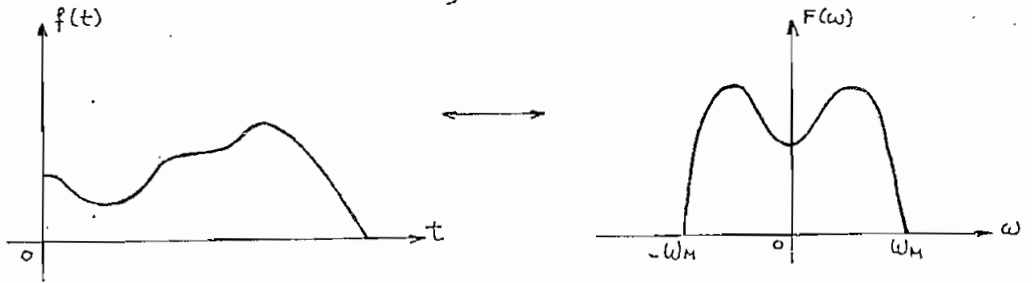
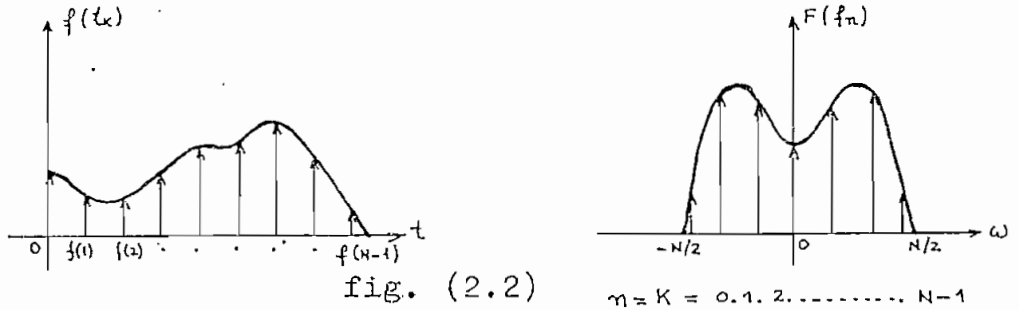


fig. (2.1)

En virtud del teorema de muestreo, el cual expresa que si una señal  $f(t)$  no tiene ninguna componente de frecuencia por encima de  $\omega_M$  en rad/seg, siendo  $\omega_M = 2\pi f_M$ , es posible demostrar que la información contenida en  $f(t)$  se conserva íntegra en sus muestras tomadas a una frecuencia igual o mayor que dos veces la frecuencia máxima contenida en  $f(t)$ .

Como se puede notar, todas las fórmulas escritas anteriormente, tanto en los sumatorios como en los integrales, tienen límites de  $-\infty$  a  $\infty$ , lo que hace imposible la manipulación de dichas fórmulas con ayuda de las computadoras digitales, ya que las computadoras digitales no pueden trabajar con un número infinito de cantidades. La necesidad de reducir éstos problemas a lo que prácticamente se puede realizar, ha conducido a lo que se denomina: La Transformada discreta de Fourier; en la cual un determinado número de muestras se transforma en un número igual de coeficientes en el dominio de la transformada. Para una visualización gráfica de lo ex-

puesto anteriormente, a continuación se representa el par de transformadas por los siguientes gráficos:



Para llegar a la definición de la transformada discreta de Fourier, se debe partir de las ecuaciones (2.13) y (2.14), en las cuales por tomar solo valores discretos, las diferenciales  $dt$  y  $df$  se transforman en  $\Delta t$  y  $\Delta f$  respectivamente; al igual  $t_k$  y  $f_n$  representan ahora valores discretos.

$N$  representa el número de muestras.

$$f(t_k) = \sum_{n=-N/2}^{N/2} F(f_n) e^{j2\pi f_n \cdot t_k} \Delta f \quad (2.15)$$

$$F(f_n) = \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k) e^{-j2\pi f_n \cdot t_k} \Delta t \quad (2.16)$$

Si se hace que:  $t_k = K\Delta t$

$$f_n = n\Delta f$$

$$f(t_k) = f(k) \quad y$$

$$F(f_n) = F(n)$$

y se reemplaza en (2.15) y (2.16) se tiene:

$$f(k) = \sum_{n=-N/2}^{N/2} F(n) e^{j2\pi n\Delta f \cdot K\Delta t} \Delta f \quad (2.17)$$

$$F(n) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) e^{-j2\pi n\Delta f \cdot K\Delta t} \Delta t \quad (2.18)$$

Si el intervalo muestreado es  $T$ , entonces  $\Delta t = T/N$  y



como el período es el inverso de la frecuencia, se tiene que:  $\Delta f \cdot \Delta t = 1/N$ ; reemplazando ésta relación en

(2.17) y (2.18) se tiene:

$$f(k) = \Delta f \cdot \sum_{n=0}^{N-1} F(n) e^{j2\pi nK/N} \tag{2.19}$$

$$F(n) = \Delta t \cdot \sum_{k=0}^{N-1} f(k) e^{-j2\pi nK/N} \tag{2.20}$$

El cambio adoptado para el rango de  $n$  de 0 a  $N-1$  en vez de  $-N/2$  a  $N/2$ , si bien no afecta a la expresión, sin embargo es más cómodo para el proceso de computación.

Si se hace que  $W = e^{-j2\pi/N}$ , las ecuaciones (2.19) y (2.20) se transforman en:

$$f(k) = \Delta f \cdot \sum_{n=0}^{N-1} F(n) \cdot W^{-nK} \tag{2.21}$$

$$F(n) = \Delta t \cdot \sum_{k=0}^{N-1} f(k) \cdot W^{nK} \tag{2.22}$$

$$K = 0.1.2.3.....N-1$$

expresiones que escritas en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} f(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^{-nK} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F(n) \end{bmatrix} \tag{2.23} \quad \times$$

$$\begin{bmatrix} F(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^{nK} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(k) \end{bmatrix} \tag{2.24} \quad \times$$

Los coeficientes  $\Delta t$  y  $\Delta f$  se han suprimido por razones de claridad y además por representar valores constantes.

La matriz  $\begin{bmatrix} F(n) \end{bmatrix}$ , representa una matriz columna de  $N \times 1$ , del mismo modo  $\begin{bmatrix} f(k) \end{bmatrix}$ ;  $\begin{bmatrix} W^{-nK} \end{bmatrix}$  y  $\begin{bmatrix} W^{nK} \end{bmatrix}$  son matrices cuadradas de  $N \times N$  elementos ya que las variaciones para  $n$  y para  $K$  son idénticas, de 0 a  $N-1$ . Las ecuaciones (2.23) y (2.24) definen a la Transformada discreta de Fourier.

Las matrices  $[W^{nK}]$  se denominan matrices de Fourier o matrices de transformación, las cuales por ser cuadradas representan una gran ayuda desde el punto de vista de la computación; además de que la factorización de éstas matrices es la base del algoritmo para la transformada rápida de Fourier.

## 2.2 MATRICES DE FOURIER.

Existe un procedimiento general, el cual contempla la posibilidad de obtener las matrices de Fourier, así como su factorización, para cualquier número de muestras, el cual fué realizado por Sande [1].

A continuación se hace un estudio detallado para el caso el que el número de muestras sea una potencia de dos, el cual por ser de mayor simplicidad que el caso general, es el que se utiliza en muchas aplicaciones.

### 2.2.1 CARACTERISTICAS DE LAS MATRICES DE FOURIER.

a) Todos los elementos constitutivos de las matrices son las raíces N-esimas de la unidad.

$$\sqrt[N]{1} = \cos 2\pi K/N - j \sin 2\pi K/N, \quad K=0.1.2.\dots\dots\dots N-1$$

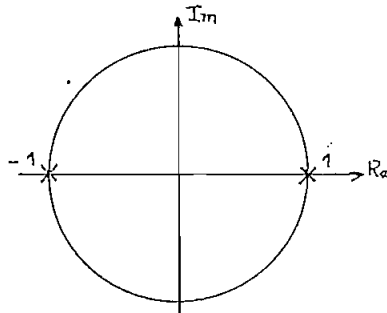
como  $W = e^{-j2\pi/N}$  entonces  $\sqrt[N]{1} = W^K$

b) Las raíces N-esimas de la unidad se distribuyen simétricamente en una circunferencia de radio uno en el plano complejo.

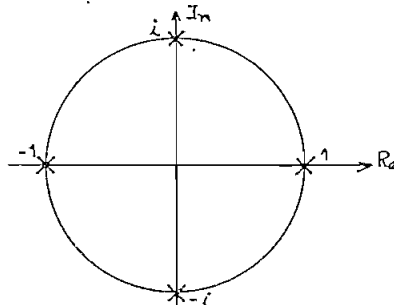
A manera de ilustración, a continuación se realiza al

gunos ejemplos sobre la distribución de las raíces en la circunferencia de radio=1, en el plano complejo.

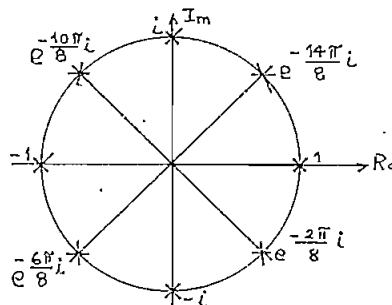
Para  $N=2$



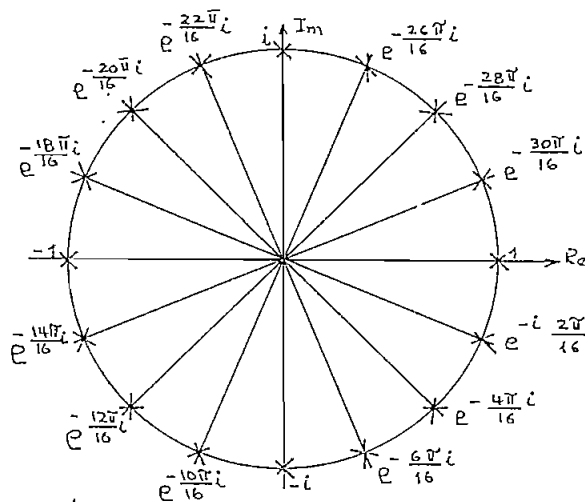
Para  $N=4$



Para  $N=8$



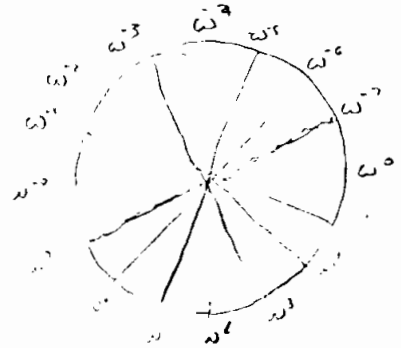
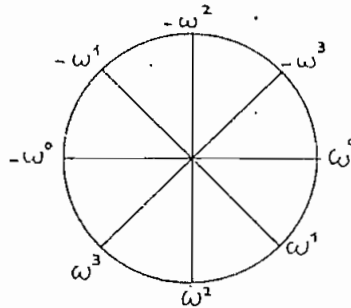
Para  $N=16$



Es conveniente enumerar las raíces a partir del eje real y girando en sentido de las agujas del reloj.

Es interesante notar que a partir de  $N/2$ , las raíces se repiten con signo cambiado y si se hace el reemplazo de  $w = e^{-j2\pi/N}$ , la distribución de las raíces queda de la siguiente forma:

Para  $N=8$



c) El orden de las matrices de Fourier es siempre igual a una potencia de dos.

d) Todos los elementos se ordenan en la matriz, de tal manera que cada columna o fila resultante sea ortogonal respecto de las demás.

e) La matriz de Fourier o matriz de transformación  $[TF]$  es una matriz  $N$  unitaria, o sea que el producto de la matriz  $[TF]$  conjugada y transpuesta, por la matriz  $[TF]$  es igual a  $N [I_N]$ , razón ésta para que en las fórmulas de transformación aparezca siempre el factor  $1/N$ .

Por ejemplo si se tiene un vector  $[X]$  de 8 muestras, la transformada discreta de Fourier de ese vector es:

$$[XT] = 1/8 [TF][X] \quad (2.26)$$

donde:  $[XT]$ , representa el vector transformado

$[TF]$ , matriz de Fourier

$[X]$ , vector muestra.

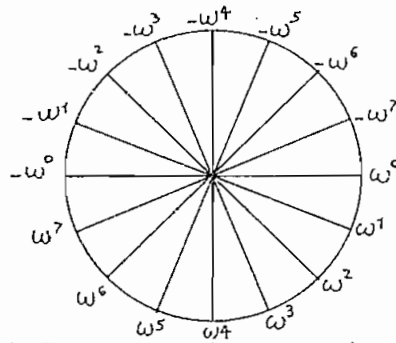
$[TF]$  , matriz de Fourier

$[X]$  , representa el vector muestra.

### 2.2.2 OBTENCION DE LAS MATRICES DE FOURIER.

Como ilustración de la manera de obtener las matrices de Fourier, se realiza un ejemplo, en el cual se escoge el número de muestras  $N=16$ .

De acuerdo a la distribución de las raíces en la circunferencia de radio=1 y para  $N=16$  se tiene:



Estas raíces deben ser dispuestas en forma de matriz de tal manera que formen vectores mutuamente ortogonales, lo cual se consigue mediante la utilización de la fórmula:  $[TF] = [W^{<K>l}]$  (2.27)

en donde:

$l$  = número de orden de la columna.

$<K>$  = es el número decimal que se obtiene a partir del número de fila respectiva, de la siguiente forma: Se escribe el número de orden de la fila en sistema binario, con un número de bits igual al logaritmo en base 2 del número de muestras, luego se invierte el orden de los bits y se obtiene el número decimal

equivalente al número binario invertido, y este es el valor de  $\langle K \rangle$ .

En la tabla # 1, se indica el proceso seguido para obtener los valores de  $\langle K \rangle$ , para  $N=16$ , siendo el número de bits  $n=\log_2 16 = 4$ .

NUMERO DE FILA	NUMERO BINARIO CON 4 BITS	NUMERO BINARIO INVERTIDO	VALOR DE $\langle K \rangle$
0	0000	0000	0
1	0001	1000	8
2	0010	0100	4
3	0011	1100	12
4	0100	0010	2
5	0101	1010	10
6	0110	0110	6
7	0111	1110	14
8	1000	0001	1
9	1001	1001	9
10	1010	0101	5
11	1011	1101	13
12	1100	0011	3
13	1101	1011	11
14	1110	0111	7
15	1111	1111	15

Tabla # 1

Una vez obtenidos los valores de  $\langle K \rangle$ , se procede a obtener la matriz de Fourier  $[TF]$  aplicando la fórmula (2.27).

A continuación se presenta el programa que primeramente obtiene los valores de  $\langle K \rangle$ ; luego obtiene los exponentes de  $W$ , los cuales se escriben en forma de la matriz de Fourier  $[TF]$ . Como los exponentes de  $W$  se repiten cada  $N$  veces, es posible hacer una reducción de estos valores, resultados que también se presentan.

En el programa, la variable  $NM$  representa el número de muestras; los valores de  $\langle K \rangle$  se encuentran en el arreglo  $NDECOR(I)$ ; los valores de los exponentes de  $W$  escritos en forma de matriz se encuentran en el arreglo  $MTF(I,J)$ .

```

C PROGRAMA PARA LA OBTENCION DE LOS VALORES DE <K>
DIMENSION NDFC(200),NDECOR(200)
DIMENSION NIF(100,100)
INTEGER A(20)
WRITE(3,30)
30 FORMAT(1HC,//////.10X,'VALORES DE <K> PARA LA CBT
FUNCION DE LAS MATRICES DE FOURIER',/1H+,9X,50(' '),//)
NMAX=20
101 READ(1,5,FNC=100) NM
WRITE(3,10) NM
10 FORMAT(/.10X,'PARA UN NUMERO DE MUESTRAS IGUAL A
DO 43 KA=1,NMAX
43 A(KA)=0
5 FCRYAT(13)
NMAXN=2*NMAX
IF(NM.GT.NMAXN)GO TO 99
NM=NM-1
IND=NMAX
ICTL=0
NC=0
L=0
DO 50 K=1,NM
NMC=NM+1-K
IDIV = NMC
60 IDIV=IDIV/2
A(IND)=NMC-IDIV*2
NVC=IDIV
IND=IND-1
ND=ND+1
IF(IDIV.LT.2)GO TO 40
GO TO 60
40 CONTINUE
A(IND)=IDIV
IF(ICTL.EQ.1)GO TO 41
ICTL=1
NINF=NMAX-ND
IFXFA = ND
41 CONTINUE
IEXP = IEXPA
L=L+1
NDFC(L) = 0
DO 80 JJ=NINF,NMAX
J=NMAX+NINF-JJ
NDEC(L)=NDEC(L)+A(J)*2*IEXP
IEXP=IEXP-1
80 CONTINUE
DO 42 KB=NINF,NMAX
42 A(KB)=0
IND=NMAX
50 CONTINUE
NV=NM+1
NDFC(L+1) = 0
DO 90 KC=1,NM
KC=NM-KC+1
NDECOR(KC)=NDFC(KD)
90 CONTINUE
WRITE(3,8)(NDECOR(I),I=1,NM)
C INSTRUCCIONES PARA LA OBTENCION DE LOS EXPONENTES DE N.
WRITE(3,7)
7 FORMAT(/.10X,'VALORES DE LOS EXPONENTES DE N ORDENADOS EN FORMA
8 DE LA MATRIZ DE FOURIER',/1H+,9X,75(' '),//)
DO 48 ICCL=1,NM
DO 36 IFIL=1,NM

```

**ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL**  
**QUITO**



```

36 MTF(1COL,1FIL)=NDECOR(1FIL)*(1COL-1)
48 CONTINUE
   DO 140 J=1,NM
   WRITE(7,9)(MTF(I,J))TT=TT+NM
9   FORMAT(10X,2F(1X,13))
140 CONTINUE
C INSTRUCCIONES PARA REDUCIR LOS EXPONENTES DE W.
   WRITE(3,21)
21  FORMAT(//,10X,'VALORES DE LOS EXPONENTES REDUCIDOS DE "W" ORDENADO
   EN FORMA DE LA MATRIZ DE FOURIER',21H,EX,ES
   DO 901 I=1,NM
   DO 902 J=1,NM
   IF(MTF(I,J).GT.(NM-1))GO TO 900
   GO TO 902
900  IAYUD=MTF(I,J)/NM
     MTF(I,J)=MTF(I,J)-IAYUD*NM
902  CONTINUE
901  CONTINUE
     DO 903 J=1,NM
     WRITE(3,9)(MTF(I,J)),I=1
903  CONTINUE
     GO TO 101
8   FORMAT(10X,32(13))
99  WRITE(3,99)
95  FORMAT(10X,'CAPACIDAD EXCEDIDA EN EL NUMERO DE MUESTRAS, MAXIMAS
S2**20',/,20X,'TRABAJO TRP(NACO)')
     GO TO 101
100 STOP
     END

```

POLI-TÉCNICA

ESTADÍSTICA NACIONAL

QUITO

VALORES DE <K> PARA LA OBTENCIÓN DE LAS MATRICES DE FOURIER

PARA UN NUMERO DE MUESTRAS IGUAL A 16

0 8 4 12 2 10 6 14 1 9 5 13 3 11 7 15

VALORES DE LOS EXPONENTES DE "W" ORDENADOS EN FORMA DE LA MATRIZ DE FOURIER

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	112	120	128	136
0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64	68
0	12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144	156	168	180	192	204
0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34
0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170
0	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90	96	102
0	14	28	42	56	70	84	98	112	126	140	154	168	182	196	210	224	238
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
0	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108	117	126	135	144	153
0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85
0	13	26	39	52	65	78	91	104	117	130	143	156	169	182	195	208	221
0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51
0	11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132	143	154	165	176	187
0	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	105	112	119
0	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	180	195	210	225	240	255

REPUBLICA NACIONAL  
 INSTITUTO NACIONAL DE ESTADÍSTICA Y CENSOS

VALORES DE LOS EXPONENTES REDUCIDOS DE "W" ORDENADOS EN FORMA DE LA MATRIZ DE FOURIER

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	8	0	8	0	8	0	8	0	8	0	8	0	8	0	8	0	8
0	4	8	12	0	4	8	12	0	4	8	12	0	4	8	12	0	4
0	12	8	4	0	12	8	4	0	12	8	4	0	12	8	4	0	12
0	2	4	6	8	10	12	14	0	2	4	6	8	10	12	14	0	2
0	10	4	14	8	2	12	6	0	10	4	14	8	2	12	6	0	10
0	6	12	2	8	14	4	10	0	6	12	2	8	14	4	10	0	6
0	14	12	10	8	6	4	2	0	14	12	10	8	6	4	2	0	14
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
0	9	2	11	4	13	6	15	8	1	10	3	12	5	14	7	11	1
0	5	10	15	4	9	14	3	8	13	2	7	12	1	6	11	10	5
0	13	10	7	4	1	14	11	8	5	2	15	12	9	6	3	13	10
0	3	6	9	12	15	2	5	8	11	14	1	4	7	10	13	16	19
0	11	6	1	12	7	3	13	8	3	14	9	4	15	10	5	11	16
0	7	14	5	12	3	10	1	8	15	6	13	4	11	2	9	17	7
0	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	15	14

CAPITULO III

TRANSFORMADA RAPIDA DE FOURIER

3.1 FACTORIZACION DE LAS MATRICES DE FOURIER.

La factorización de las matrices de Fourier, es el procedimiento por medio del cual la matriz  $[TF]$  se transforma en un producto de submatrices o matrices-factor, el número de éstas matrices-factor es  $n = \log_2 N$ ; para la explicación de la factorización, se realiza un ejemplo analizando el caso en que  $N=8$ , para el cual  $n=3$ .

$$[TF(8)] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & | & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i & | & 1 & -i & -1 & i \\ 1 & i & -1 & -i & | & 1 & i & -1 & -i \\ \hline 1 & W & W^2 & W^3 & | & -1 & -W & -W^2 & -W^3 \\ 1 & -W & W^2 & -W^3 & | & -1 & W & -W^2 & W^3 \\ 1 & W^3 & -W^2 & W & | & -1 & -W^3 & W^2 & -W \\ 1 & -W^3 & -W^2 & -W & | & -1 & W^3 & W^2 & W \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Si se aplica la propiedad de partición de matrices [2], se tiene que:

$$[TF(8)] = \begin{bmatrix} A_1 & A_1 \\ A_2 & -A_2 \end{bmatrix}$$

en donde:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & W & W^2 & W^3 \\ 1 & -W & W^2 & -W^3 \\ 1 & W^3 & -W^2 & W \\ 1 & -W^3 & -W^2 & -W \end{bmatrix}$$

entonces la ecuación (3.1) se transforma en:

$$[TF(s)] = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_4 & I_4 \\ I_4 & -I_4 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$I_4$  = matriz unitaria de orden 4.

Después de la primera partición se obtiene la ecuación (3.2), la que escrita con todos sus elementos toma la forma de:

$$[TF(s)] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -i & -1 & i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & i & -1 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & W & W^2 & W^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -W & W^2 & -W^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & W^3 & -W^2 & W \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -W^3 & -W^2 & -W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Si se realiza una nueva partición se tiene que:

$$\begin{bmatrix} A_3 & A_3 \\ A_4 & -A_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_3 & 0 \\ 0 & A_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_2 & I_2 \\ -I_2 & -I_2 \end{bmatrix} \quad y$$



### 3.2 ALGORITMO RAPIDO PARA EL CALCULO DE LA TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER.

La Transformada Rápida de Fourier, es un algoritmo que hace posible la computación de la Transformada discreta de Fourier de una secuencia de muestras, en un tiempo menor que cualquier otro algoritmo disponible. Este método fué descubierto por Cooley y Tukey en 1965, y se basa en la obtención de las matrices-factor directamente, es decir sin necesidad de la factorización; ya que a base de éstas se realiza un diagrama de flujo que nos lleva directamente a la computación. El procedimiento para obtener las matrices-factor es el siguiente:

La primera matriz-factor está constituida por  $N/2$  submatrices de la forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & W^{<K>} \\ 1 & -W^{<K>} \end{bmatrix}$$

las que forman la diagonal principal de la primera matriz-factor, siendo el resto de elementos iguales a 0. El valor de  $<K>$  es el de los bits invertidos obtenidos para  $N = N/2$ .

Por ejemplo si  $N=8$ , los valores de  $<K>$  para  $N/2$  son: 0, 2, 1 y 3 ; de tal manera que la primera matriz-factor queda conformada de la siguiente forma:



$$\begin{bmatrix} 1 & W^2 \\ 1 & -W^2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^2 \\ 1 & 0 & -W^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -W^2 \end{bmatrix}$$

Quedando la segunda matriz-factor de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ & & 1 & 0 & W^2 & 0 \\ & & 0 & 1 & 0 & W^2 \\ & & 1 & 0 & -W^2 & 0 \\ & & 0 & 1 & 0 & -W^2 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

2ª matriz-factor

La tercera matriz-factor, se obtiene realizando el producto Kronecker ( $\oplus$ ) de las N/8 primeras submatrices de la segunda matriz-factor por  $I_2$ ; la cuarta sería: el producto Kronecker de las N/16 primeras submatrices de la tercera matriz-factor por  $I_2$ , y así sucesivamente de acuerdo al número de matrices-factor que se tenga que encontrar.

Para el caso en que  $N=8$ , la tercera matriz-factor se obtiene realizando el producto Kronecker





Este procedimiento es válido solamente para la obtención de la tercera matriz-factor en adelante.

Para obtener la 3ª matriz-factor, se realiza el producto Kronecker de las N/8 submatrices de la primera matriz-factor por  $I_4$ , la cuarta matriz-factor: obteniendo el producto kronecker de las N/16 submatrices de la primera matriz-factor por  $I_8$  y así sucesivamente.

Para el caso en que  $N=8$ , la tercera matriz-factor se obtiene realizando el producto Kronecker de la 1ª submatriz de la 1ª matriz-factor por  $I_4$ , y se tiene que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

3ª matriz-factor

Como se puede observar los resultados obtenidos en (3.7) y (3.9) son idénticos.

Se observa también que los resultados obtenidos en (3.4) y (3.8) son los mismos, con la diferencia que los re-

sultados obtenidos en (3.8), se realizan sin utilizar el procedimiento de la factorización.

La Transformada discreta de Fourier de un vector  $[X]$  de 8 muestras, definida en (2.26) como:

$$[X_T] = 1/8 [TF(8)][X] \quad (3.10)$$

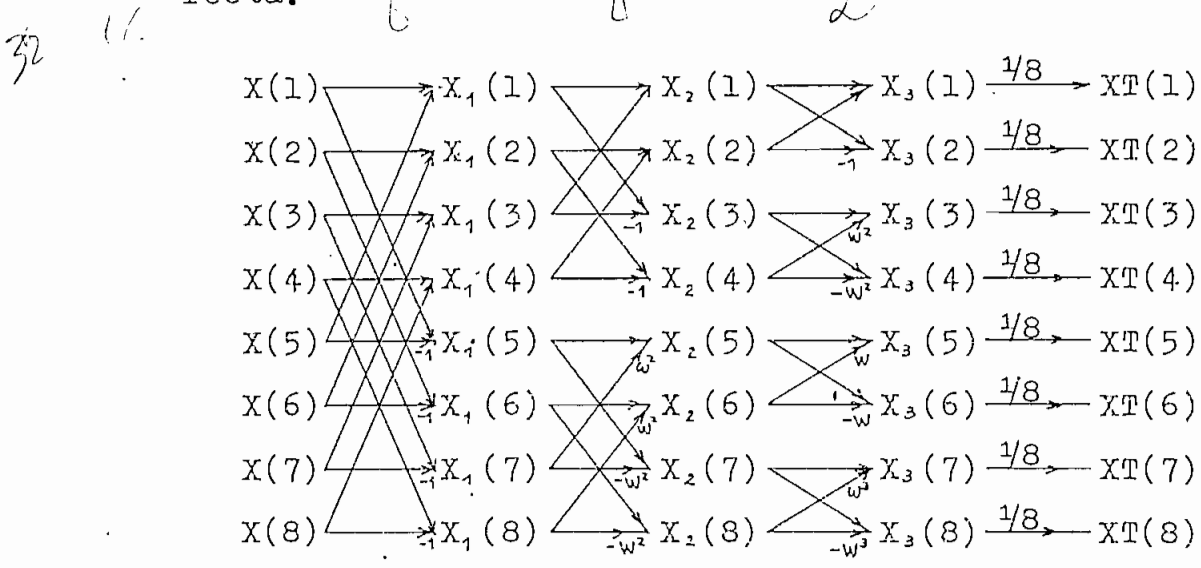
Si en (3.10) se reemplaza en valor de  $[TF(8)]$  obtenido en (3.8), se obtiene que:

$$[X_T] = 1/8 \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & & & & \\ & 1 & -1 & & & & & \\ & & & 1 & W^2 & & & \\ & & & 1 & -W^2 & & & \\ & & & & & 1 & W & \\ & & & & & & 1 & -W \\ & & & & & & & 1 & W^3 \\ & & & & & & & & 1 & -W^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & & & & \\ & 0 & 1 & 0 & 1 & & & \\ & & 1 & 0 & -1 & 0 & & \\ & & & 0 & 1 & 0 & -1 & \\ & & & & & 1 & 0 & W^2 & 0 \\ & & & & & & 0 & 1 & 0 & W^2 \\ & & & & & & & 1 & 0 & -W^2 & 0 \\ & & & & & & & & 0 & 1 & 0 & -W^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & & & & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ & & & & & & & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} [X] \quad (3.11)$$

Si en (3.11) se multiplican columnas por filas en vez de filas por columnas, el orden de los factores puede invertirse y se tiene que:

$$\begin{bmatrix} X(1) \\ X(2) \\ X(3) \\ X(4) \\ X(5) \\ X(6) \\ X(7) \\ X(8) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & & & & \\ & 0 & 1 & 0 & 1 & & & \\ & & 1 & 0 & -1 & 0 & & \\ & & & 0 & 1 & 0 & -1 & \\ & & & & & 1 & 0 & W^2 & 0 \\ & & & & & & 0 & 1 & 0 & W^2 \\ & & & & & & & 1 & 0 & -W^2 & 0 \\ & & & & & & & & 0 & 1 & 0 & -W^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & & & & \\ & 1 & -1 & & & & & \\ & & & 1 & W^2 & & & \\ & & & 1 & -W^2 & & & \\ & & & & & 1 & W & \\ & & & & & & 1 & -W \\ & & & & & & & 1 & W^3 \\ & & & & & & & & 1 & -W^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_T(1) \\ X_T(2) \\ X_T(3) \\ X_T(4) \\ X_T(5) \\ X_T(6) \\ X_T(7) \\ X_T(8) \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

A partir de la ecuación (3.12), se puede obtener un diagrama de flujo, a base del cual se realiza una subrutina para calcular la Transformada Rápida de Fourier Directa.



(3.13)

Las flechas indican suma o resta.

Para recuperar las muestras, es necesario aplicar la Transformada de Fourier Inversa, la que fué definida en (1.4) como:  $[X] = [TF(8)]^{-1} [XT]$ , donde  $[TF(8)]^{-1}$  es la matriz inversa de  $[TF(8)]$ , la cual por ser una matriz N-unitaria, se la obtiene sacando la transpuesta-conjugada de la matriz  $[TF(8)]$ .

$$\left[ \text{TF}(8) \right]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & i & -i & -W^3 & W^3 & -W & W \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -W^2 & -W^2 & W^2 & W^2 \\ 1 & -1 & -i & i & -W & W & -W^3 & W^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & i & -i & W^3 & -W^3 & W & -W \\ 1 & 1 & -1 & -1 & W^2 & W^2 & -W^2 & -W^2 \\ 1 & -1 & -i & i & W & -W & W^3 & -W^3 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Una vez obtenida la matriz  $\left[ \text{TF}(8) \right]^{-1}$ , se procede ahora a su factorización, aplicando las propiedades de partición de matrices y se llega al siguiente resultado:

$$\left[ \text{TF}(8) \right]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ & & & & 1 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 1 & 0 & 1 \\ & & & & W^2 & 0 & -W^2 & 0 \\ & & & & 0 & W^2 & 0 & -W^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ & & 1 & 1 \\ & & & & W^2 & -W^2 \\ & & & & & & 1 & 1 \\ & & & & & & & & W & -W \\ & & & & & & & & & & 1 & 1 \\ & & & & & & & & & & & & W^3 & -W^3 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Si en  $\left[ X \right] = \left[ \text{TF}(8) \right]^{-1} \left[ XT \right]$ , se reemplaza el valor de  $\left[ \text{TF}(8) \right]^{-1}$  y en vez de multiplicar filas por columnas, se multiplican columnas por filas, se tiene que:

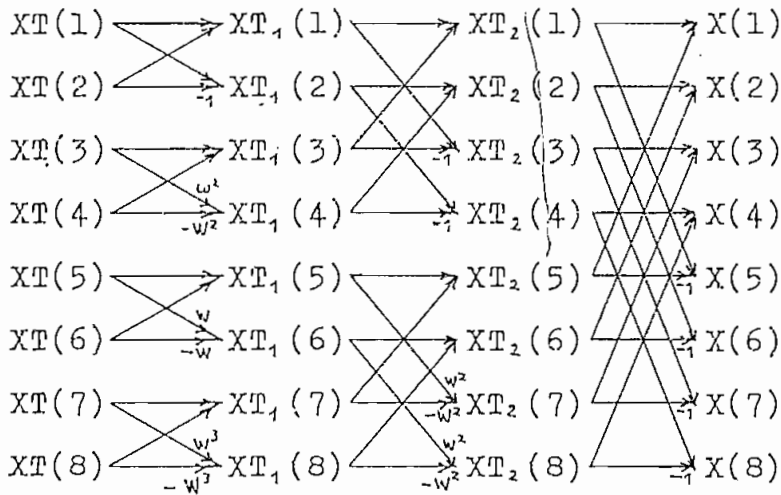
$$\left[ XT \right] \left[ \text{TF}(8) \right]^{-1} = \left[ X \right] \quad (3.16)$$

expresión que escrita con todos sus elementos toma la forma de:

$$\begin{bmatrix} XT(1) \\ XT(2) \\ XT(3) \\ XT(4) \\ XT(5) \\ XT(6) \\ XT(7) \\ XT(8) \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ & 1 & 1 \\ & W^4 & -W^2 \\ & & 1 & 1 \\ & & & W & -W \\ & & & & 1 & 1 \\ & & & & & W^3 & -W^3 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ & & 1 & 0 & 1 & 0 \\ & & 0 & 1 & 0 & 1 \\ & & W^2 & 0 & -W^2 & 0 \\ & & 0 & W^2 & 0 & -W^2 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix} X(1) \\ X(2) \\ X(3) \\ X(4) \\ X(5) \\ X(6) \\ X(7) \\ X(8) \end{bmatrix}$$

(3.17)

A partir de (3.17), se obtiene un diagrama de flujo, a base del cual se realiza una subrutina para calcular la Transformada Rápida de Fourier Inversa.



(3.18)

Las flechas indican suma o resta.

A continuación se presenta el programa que primero obtiene los valores de  $\langle K \rangle$  ; luego calcula el logaritmo en base 2 del número de muestras; entonces se llama a la subrutina TRF, que obtiene la Transformada Rápida de Fourier Directa; luego se llama a la subrutina TRFI que calcula la Transformada Rápida de Fourier Inversa. El programa es ejecutado para  $N = 64$  , pero como se mencionó antes solo se necesitan los valores de  $\langle K \rangle$  para  $N/2$ , razón por la cual aparecen los valores de  $\langle K \rangle$  de 0 a 31.

C PROGRAMA PARA LA OBTENCION DE LA TRANSFORMADA RAPIDA DE FOURIER

```

COMPLEX XTG(64)
COMPLEX MPEGA,XSUM,XDIF,XT(64),R
COMMON NDECOR(200)
DIMENSION NDEC(200),X(128)
INTEGER A(20)
WRITE(3,30)
30 FORMAT(1HC,//////////,10X,'VALORES DE CKX PARA LA OBTENCIO
2N DE LAS MATRICES DE FOURIER',/1H+,9X,45(' '),///.15X,'MUESTRAS',18X,'T.R.F. DIRECTA',13X,'T.R.F.
3INVERSA',/7/)
NMAY=20
101 READ(1,5,FNO=100) NM
NM2=NM
NV=NM/2
DO 43 KA=L,NMAX
43 A(KA)=0
5 FORMAT(13)
NMAXN=2**NMAX
IF(NM.GT.NMAXN)GO TO 99
NM=NM-1
IND=NMAX
ICTL=0
ND=0
L=0
DO 50 K=1,NM
NVC=NV+1-K
IDIV = NMC
60 IDIV=IDIV/2
A(IND)=NVC-IDIV*2
NMC=IDIV
IND=IND-1
ND=ND+1
IF(IDIV.LT.2)GO TO 40
GO TO 60
40 CONTINUE
A(IND)=IDIV
IF(ICTL.FO.1)GO TO 41
ICTL=1
NINF=NMAX-ND
IFXP = ND
41 CONTINUE
IFXP = IFXP
L=L+1
NDEC(L) = 0
DO 80 JJ=NINF,NMAX
J=NMAX+NINF-JJ
NDEC(L)=NDEC(L)+A(J)*2**IFXP
IFXP=IFXP-1
80 CONTINUE
DO 42 KP=NINF,NMAX
42 A(KP)=0
IND=NMAX
50 CONTINUE
NV=NV+1
NDEC(L+1) = 0
DO 90 KC=L,NM
KD=NV-KC+1
NDECOP(KC)=NDEC(KD)
90 CONTINUE
WRITE(3,8) (NDECOP(I),I=1,NM)
WRITE(3,11)
11 FORMAT(///.10X,'OBTENCION DE LA TRANSFORMADA RAPIDA DE FOURIER',/1
1H+,9X,45(' '),///.15X,'MUESTRAS',18X,'T.R.F. DIRECTA',13X,'T.R.F.
3INVERSA',/7/)

```

ESCUELA POLITÉCNICA  
 NACIONAL  
 QUITO



```

GO TO 100
8  FORMAT(10X, F2(I3))
99 WRITE(3,99)
98  FORMAT(10X, 'CAPACIDAD EXCEDIDA EN EL NUMERO DE MUESTRAS. MAXIMO ES
52**20'. /, 20X, 'TRABAJO TERMINADO')
GO TO 101
100 CONTINUE
READ(1, R1) (X(I), I=1, NMR)
81  FORMAT(9F10.2)
PI=3.1415927
C=COS(2*PI/NMR)
R=SIN(2*PI/NMR)
OMEGA=CMPLX(C,-R)
K=NMR/2
DO 56 I=1,NMR
ARC=X(I)
ARD=0.0
56  XT(I)=CMPLX(ARC,ARD)
C CALCULO DEL LOGARITMO EN BASE DEL NUMERO DE MUESTRAS IGUAL A N
MAR=1
N=0
6  IF(MAR*2-NMR)19,19,33
19  N=N+1
MAR=MAR*2
GO TO 6
33 CONTINUE
KC=K
CALL TRF(N,OMEGA,KC,XT)
DO 200 I=1,NMR
XT(I)=XT(I)/NMR
XTG(I)=XT(I)
200 CONTINUE
OMEGA=CMPLX(C,R)
CALL TRFI(N,OMEGA,K,XT,NMR)
DO 22 I=1,NMR
22  WRITE(3,23)I,X(I),XTG(I),XT(I)
23  FORMAT(9X, I2, 4X, F6.2, 15X, 2F10.4, 10X, 2F10.4)
STOP
END

```



```

SUBROUTINE TRF(N,OMEGA,KC,XT)
COMMON NDFCOR(200)
COMPLEX XT(64)
COMPLEX OMEGA,XSUM,XDIF,R
NGRUPD=1
K=KC
C COMIENZO DE LAS ITERACIONES
33 DO 55 KITER=1,N
I=0
DO 54 KNGRUP=1,NGRUPD
IFX=NDFCOR(KNGRUP)
R=OMEGA**IFX
DO 53 KNSYR=1,K
I=I+1
J=I+K
XSUM=XT(I)+R*XT(J)
XDIF=XT(I)-R*XT(J)
XT(I)=XSUM
XT(J)=XDIF

```

```
53 CONTINUE
   I=J
54 CONTINUE
   NGRUPD=NGRUPD*2
   K=K/2
55 CONTINUE
   RETURN
   END
```

```
      SUBROUTINE TREI(N,OMEGA,K,XT,NVR)
      COMMON ADECOR(200)
      COMPLEX XT(64)
      COMPLEX OMEGA,XSUM,XDIF,R
      NGRUPD=NVR/2
      K=1
C CONTENIDO DE LAS ITERACIONES
33 DO 55 KITER=1,N
      I=0
      DO 54 KNGRUP=1,NGRUPD
         IEX=NOFCOR(KNGRUP)
         R=OMEGA**IFX
         DO 53 KASYR=L,K
            I=I+1
            J=I+K
            XSUM=XT(I)+XT(J)
            XDIF=R*(XT(I)-XT(J))
            XT(I)=XSUM
            XT(J)=XDIF
53 CONTINUE
         I=J
54 CONTINUE
         NGRUPD=NGRUPD/2
         K=K*2
55 CONTINUE
      RETURN
      END
```

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

QUITO

VALORES DE SK PARA LA OBTENCION DE LAS MATRICES DE FOURIER

0 16 8 24 4 20 12 28 2 18 10 26 6 22 14 30 | 1 17 9 25 5 21 13 29 3 19 11 27 7 23 15 31

DEFINICION DE LA TRANSFORMADA RAPIDA DE FOURIER

MUESTRAS T.R.F. DIRECTA T.R.F. INVERSA

1	12.00	-4.9625	0.0	12.0000	-0.0000
2	6.00	0.1937	0.0	6.0000	-0.0000
3	-9.00	0.3175	0.0531	-9.0000	0.0000
4	-19.50	0.3175	-0.0531	-19.5000	0.0000
5	-12.10	-0.2890	-1.3217	-12.0999	-0.0000
6	-39.00	0.0734	0.0748	-38.9999	0.0000
7	-46.20	-0.0734	-0.0748	-46.1999	0.0000
8	-48.00	-0.2490	1.7217	-47.9999	0.0000
9	-45.00	5.8605	1.9594	-45.0000	0.0000
10	-39.00	10.0745	-0.0461	-39.0000	0.0000
11	-30.00	0.0252	-0.1712	-29.9999	0.0000
12	-27.30	10.2658	0.4527	-27.5999	0.0000
13	-27.30	0.0252	-0.4527	-27.2999	0.0000
14	-27.30	0.0252	0.1712	-27.2999	0.0000
15	-27.00	0.0745	0.0461	-26.9999	0.0000
16	-25.20	5.5606	-1.9583	-25.1999	0.0000
17	-21.00	0.9171	4.1213	-21.0000	0.0000
18	-14.10	-0.0260	0.1013	-14.1000	0.0000
19	-9.00	0.1666	0.1702	-9.0000	0.0000
20	-4.50	0.6373	0.1780	-4.5000	0.0000
21	-0.70	0.3574	-0.1134	-0.1000	0.0000
22	0.0	0.0672	0.0886	0.0000	0.0000
23	2.40	0.2100	-0.2711	2.4000	0.0000
24	3.00	0.8068	0.6873	3.0000	0.0000
25	4.50	0.8068	0.5973	4.5000	0.0000
26	6.60	0.2159	0.2711	6.5000	0.0000
27	9.60	0.0672	-0.0886	9.6000	0.0000
28	17.10	0.3574	0.1134	17.0999	0.0000
29	15.00	-0.5373	-0.1780	15.0000	0.0000
30	14.40	0.1666	0.1702	14.4000	0.0000
31	14.70	0.0360	-0.1013	14.7000	0.0000
32	15.10	0.9171	4.1213	15.1000	0.0000
33	14.70	-7.3056	5.8364	14.7000	0.0000
34	10.50	0.1379	0.1121	10.5000	0.0000
35	6.00	0.1020	-0.0740	6.0000	0.0000
36	3.30	0.0666	0.3440	3.3000	0.0000
37	0.0	0.0666	0.4070	0.0	0.0000
38	-3.00	0.0982	-0.0457	-3.0000	0.0000
39	-1.60	-0.0670	-0.0485	-1.6000	0.0000
40	-1.60	1.4684	1.1950	-1.6000	0.0000
41	-7.00	0.1248	2.1697	-7.0000	0.0000
42	-1.50	0.1248	0.2178	-1.5000	0.0000
43	3.30	0.0697	-0.0360	3.3000	0.0000
44	8.10	0.0073	-0.0391	8.1000	0.0000

INSTITUTO TECNOLÓGICO NACIONAL

DITO

37

45 12.00  
 46 19.00  
 47 20.10  
 48 22.50  
 49 23.40  
 50 22.50  
 51 21.00  
 52 9.00  
 53 0.0  
 54 16.50  
 55 -24.00  
 56 -24.30  
 57 -22.20  
 58 -21.00  
 59 -15.90  
 60 -3.00  
 61 3.00  
 62 0.0  
 63 -0.30  
 64 0.60

0.1637  
 0.1067  
 -0.0287  
 3.8233  
 1.8234  
 0.0287  
 0.1067  
 0.1633  
 0.0073  
 0.0697  
 0.1288  
 1.4688  
 0.1765  
 -0.0670  
 0.0982  
 0.0666  
 0.7956  
 0.3020  
 0.3379  
 -22.096

-0.5064  
 -0.0119  
 -2.4997  
 -2.4997  
 0.1195  
 -0.0119  
 0.5064  
 0.0391  
 0.0350  
 0.02178  
 -2.1697  
 -1.1950  
 -0.0485  
 0.0485  
 0.4070  
 -0.3440  
 0.0740  
 -0.1121  
 -5.8365

12.0000  
 19.0000  
 20.0999  
 22.4999  
 23.4000  
 22.5000  
 21.0000  
 9.0000  
 0.0000  
 -16.5000  
 -24.0000  
 -24.3000  
 -22.2000  
 -21.0000  
 -15.9000  
 -6.0000  
 3.0000  
 -0.0000  
 -0.3000  
 0.6000

-0.0000  
 -0.0000  
 -0.0000  
 -0.0000  
 -0.0000  
 -0.0000  
 -0.0000  
 -0.0000  
 -0.0000  
 -0.0000  
 -0.0000  
 -0.0000  
 -0.0000  
 -0.0000  
 -0.0000  
 -0.0000  
 -0.0000  
 -0.0000  
 -0.0000

REPUBLICA NACIONAL

INDESE

QUITO

### 3.3 ESPECTROS DE POTENCIA Y FASE DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER.

#### 3.3.1 ESPECTRO DE POTENCIA.

Dada una secuencia  $N$  periódica representada por  $X(n)$  y representando por  $X_T(n)$  los coeficientes del vector transformado, la Transformada de Fourier viene dada mediante la relación:

$$\left[ X_T(n) \right] = 1/N \left[ TF(n) \right] \left[ X(n) \right] \quad (3.19)$$

Si se define como:  $\left[ X^{(d)}(n) \right]$  a la secuencia obtenida desplazando cíclicamente hacia la izquierda en  $d$  lugares la secuencia  $N$  periódica se tiene que:

$$\left[ X(n) \right] = \begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{bmatrix}$$

$$\left[ X(n) \right]^T = X(0) \cdot X(1) \cdot \dots \cdot X(N-1)$$

$$\left[ X^{(d)}(n) \right]^T = X(d) \cdot X(d-1) \cdot \dots \cdot X(d-N-1)$$

donde  $d$  toma valores de: 0.1.2.3..... N-1

Se puede demostrar que  $\left[ X^{(d)}(n) \right]$  es igual al producto de  $\left[ I^{(d)}(n) \right]$  por  $\left[ X(n) \right]$ , donde  $\left[ I^{(d)}(n) \right]$  es la matriz unitaria cuyas columnas se han desplazado  $d$  lugares hacia la derecha, entonces se tiene que:

$$\left[ X^{(d)}(n) \right] = \left[ I^{(d)}(n) \right] \left[ X(n) \right] \quad (3.20)$$

Si se obtiene la Transformada discreta de Fourier de  $[X^{(d)}(n)]$  se tiene que:

$$[X_T^{(d)}(n)] = 1/N [TF(n)] [X^{(d)}(n)] \quad (3.21)$$

si se reemplaza (3.20) en (3.21), se tiene que:

$$[X_T^{(d)}(n)] = 1/N [TF(n)] [I^{(d)}(n)] [X(n)] \quad (3.22)$$

De acuerdo a una de las propiedades de las matrices de Fourier que dice que:  $[TF]^T [TF] 1/N = [I_N]$ , de manera que si en (3.22) se multiplica al lado derecho por  $[I_N]$ , la expresión no varía y se tiene que:

$$[X_T^{(d)}(n)] = 1/N [TF(n)] [I^{(d)}(n)] [I_N] [X(n)] \quad (3.23)$$

$$[X_T^{(d)}(n)] = 1/N [TF(n)] [I^{(d)}(n)] [TF(n)]^T [TF(n)] 1/N [X(n)] \quad (3.24)$$

$$\text{Si se hace que: } [TF(n)] [I^{(d)}(n)] [TF(n)] = [D^{(d)}(n)] \quad (3.25)$$

donde la matriz  $[D^{(d)}(n)]$  se denomina: matriz de desplazamiento.

$$[X_T^{(d)}(n)] = 1/N [D^{(d)}(n)] [TF(n)] 1/N [X(n)] \quad (3.26)$$

pero como  $[X_T(n)] = 1/N [TF(n)] [X(n)]$ , (3.26) toma la forma de:

$$[X_T^{(d)}(n)] = 1/N [D^{(d)}(n)] [X_T(n)] \quad (3.27)$$

La matriz de desplazamiento  $[D^{(d)}(n)]$ , por ser el producto de matrices unitarias y ortogonales representa una transformación unitaria.

Desarrollando en detalle la ecuación (3.27) y elevando al cuadrado ambos miembros, se llega a la determinación del Espectro de Potencia, el cual es invariante con respecto al desplazamiento de sus muestras.

A continuación se realiza un ejemplo de la obtención del Espectro de Potencia para el caso en que  $N = 8$ .

$$[I(8)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para  $d=1$ , se tiene que:

$$[I^{(1)}(8)] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si se evalúa el valor de  $[D^{(1)}(8)]$  se tiene que:

$$[D^{(1)}(8)] = [TF(8)][I^{(1)}(8)][TF(8)]$$





Si se hace que  $D_4^{(1)}(s) = 1/8 D^{(1)}(s)$  se tiene que:

$$\left[ D_4^{(1)}(s) \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -W^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & W^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -W & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & W \end{bmatrix}$$

Ahora si se realiza para  $d=2$ , se tiene que:

$$\left[ X_T^{(2)}(s) \right] = 1/8 \left[ D^{(2)}(s) \right] \left[ X(s) \right]$$

Siguiendo el mismo procedimiento con el que se evaluó

$\left[ D^{(1)}(s) \right]$  se evalúa ahora  $\left[ D^{(2)}(s) \right]$  y se obtiene que:

$$\left[ D_4^{(2)}(s) \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i \end{bmatrix}$$

De los resultados obtenidos se puede notar que:

$$\left[ D_4^{(2)}(s) \right] = \left[ D_4^{(1)}(s) \right]^2$$

o sea que:

$$[X_T^{(2)}(8)] = [D_1^{(1)}(8)]^2 [X(8)]$$

La repetición del mismo proceso da:

$$[X_T^{(d)}(8)] = [D_1^{(1)}(8)]^d [X(8)] \quad (3.28)$$

$$d = 0.1.2.3..... N-1$$

La ecuación (3.28) expresada en forma matricial toma la forma:

$$\begin{bmatrix} X_T^{(d)}(0) \\ X_T^{(d)}(1) \\ X_T^{(d)}(2) \\ X_T^{(d)}(3) \\ X_T^{(d)}(4) \\ X_T^{(d)}(5) \\ X_T^{(d)}(6) \\ X_T^{(d)}(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -W^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & W^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -W & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & W \end{bmatrix}^d \begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \\ X(4) \\ X(5) \\ X(6) \\ X(7) \end{bmatrix}$$

$$(3.29)$$

A partir de (3.29) , se puede escribir el siguiente grupo de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} X_T^{(d)}(0) \\ X_T^{(d)}(1) \\ X_T^{(d)}(2) \\ X_T^{(d)}(3) \\ X_T^{(d)}(4) \\ X_T^{(d)}(5) \\ X_T^{(d)}(6) \\ X_T^{(d)}(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1)^d X(0) \\ (-1)^d X(1) \\ (i)^d X(2) \\ (-i)^d X(3) \\ (-W)^d X(4) \\ (W)^d X(5) \\ (-W)^d X(6) \\ (W)^d X(7) \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

Si se eleva al cuadrado el grupo de ecuaciones (3.30), se tiene que:

$$\begin{aligned} [XT^{(d)}(0)]^2 &= [(1)^d X(0)]^2 = |X(0)|^2 \underline{\phi(0)} \\ [XT^{(d)}(1)]^2 &= [(-1)^d X(1)]^2 = |X(1)|^2 \underline{\phi(1)} \\ [XT^{(d)}(2)]^2 &= [(i)^d X(2)]^2 = |X(2)|^2 \underline{\phi(2)} \\ [XT^{(d)}(3)]^2 &= [(-i)^d X(3)]^2 = |X(3)|^2 \underline{\phi(3)} \\ [XT^{(d)}(4)]^2 &= [(-w)^d X(4)]^2 = |X(4)|^2 \underline{\phi(4)} \\ [XT^{(d)}(5)]^2 &= [(w)^d X(5)]^2 = |X(5)|^2 \underline{\phi(5)} \\ [XT^{(d)}(6)]^2 &= [(-w)^d X(6)]^2 = |X(6)|^2 \underline{\phi(6)} \\ [XT^{(d)}(7)]^2 &= [(w)^d X(7)]^2 = |X(7)|^2 \underline{\phi(7)} \end{aligned}$$

(3.31)

Puesto que la potencia es invariante con respecto a cualquier desplazamiento de sus muestras, las ecuaciones (3.31) definen el Espectro de Potencia, el cual de una manera general puede ser expresado como:

$$P(n) = |X(n)|^2 \quad (3.32)$$

n=0.1.2.3.....N-1

De la ecuación (3.32) se puede observar que el Espectro de Potencia es una función par y además que representa componentes individuales de frecuencia , a diferencia de otros espectros.

### 3.3.2. ESPECTRO DE FASE

El espectro de fase se define como:

$$\phi(k) = \text{arc.tg} \frac{I(k)}{R(k)} \quad (3.33)$$

$$k = 0.1.2.3.....N-1$$

donde  $I(k)$  y  $R(k)$  son respectivamente las partes imagi  
naria y real de los coeficientes de la Transformada Di  
recta de Fourier.

A diferencia de la magnitud, el espec  
tro de fase es una función impar, además varía con el  
desplazamiento de sus muestras.

A continuación se presentan 3 programas:

Primero: Obtiene los espectros de potencia y fase, ade  
más escribe los valores de  $\langle K \rangle$  para las 64 muestras,  
los cuales dan la posición inicial en la que se encuen  
tran los coeficientes de los espectros.

Segundo: Una vez obtenidos los espectros, es necesario  
ordenarlos; de tal manera que el programa obtiene los  
espectros y luego los ordena.

Tercero: Este programa obtiene los espectros, luego los  
ordena y por último grafica las muestras y los dos es  
pectros.

C PROGRAMA PARA OBTENER LOS ESPECTROS DE POTENCIA Y FASE DE LA TRANSFORMADA  
G-DE-FOURIER

```
COMPLEX XTG(64)
COMPLEX GYFGA.XSUM,XGIF,XT(64),R
COMMON NDFCCP(200)
DIMENSION NX(200)
DIMENSION P(64),F(64)
DIMENSION NDEC(200),X(128)
INTEGER A(20)
WRITE(3,30)
30 FORMAT(1HC, '//////////////////////////////////', 10X, 'VALORES DE <K> PARA LA OBT
ENCION DE LAS MATRICES DE FOURIER', 1H+, 9X, 59(' '), //)
NVAX=20
101 READ(1,5,FND=100) NM
NMR=NM
NV=NVR/2
WRITE(3,10) NMR
10 FORMAT(1H, 10X, 'PARA UN NUMERO DE MUESTRAS IGUAL A ', 13, //)
DO 43 KA=1,NMAX
43 A(KA)=0
5 FORMAT(13)
NMAXN=2*NMAX
IF(NM.GT.NMAXN)GO TO 59
NV=NM-1
IND=NMAX
ICTL=0
ND=0
L=0
DO 50 K=1,NM
NMC=NV+1-K
IDIV = NMC
60 IDIV=IDIV/2
A(IND)=NMC-IDIV*2
NVC=IDIV
IND=IND-1
ND=ND+1
IF(IDIV.LT.2)GO TO 40
GO TO 60
40 CONTINUE
A(IND)=IDIV
IF(ICTL.EQ.1)GO TO 41
ICTL=1
NINF=NMAX-ND
IFXPA = ND
41 CONTINUE
IEXP = IEXPA
L=L+1
NDEC(L) = 0
DO 80 JJ=NINF,NMAX
J=NMAX+NINF-JJ
NDEC(L)=NDEC(L)+A(J)*2**IEXP
IEXP=IEXP-1
80 CONTINUE
DO 42 KB=NINF,NMAX
42 A(KB)=0
IND=NMAX
50 CONTINUE
NV=NV+1
NDEC(L+1) = 0
DO 90 KC=1,NM
KC=NV-KC+1
NDECOR(KC)=NDEC(KD)
90 CONTINUE
```

ESUEBA POLITECNICA NACIONAL QUITO 47

```

WRITE(3,9)(NDFCOR(I),I=1,NM)
WRITE(7,11)
11 FORMAT(////,10X,'ORTFACION DE LA TRASFORNADA RAPIDA DE FOURIER',/1
1H+,10X,4S(' '),///13X,'MUESTRAS',10X,'T.R.F. DIRECTA',8X,'ESPECTRO
7 DE POTENCIA',5X,'ESPECTRO DE FASE',///,53X,'<K>',/)
GO TO 100
8 FCVAT(10X,32(13))
99 WRITE(3,58)
98 FORMAT(10X,'CAPACIDAD EXCEDIDA EN EL NUMERO DE MUESTRAS MAXIMO ES
52**70',/,20X,'TRABAJO TERMINADO')
GO TO 101
100 CONTINUE
PFAD(1,81)(X(I),I=1,NMR)
81 FORMAT(PF10,2)
PI=3.141593
C=COS(2*PI/NMR)
R=SIN(2*PI/NMR)
OMEGA=C*PLX(C,-R)
K=NMR/P
DO 64 I=1,NMR
APC=X(I)
AED=0.0
65 XT(I)=CVPLX(ABC,A9D)
C CALCULO DEL LOGARITMO EN BASE 2 DEL NUMERO DE MUESTRAS IGUAL A N
MAR=1
N=0
6 IF(YAR*2-NMR)19,19,33
19 N=N+1
MAR=MAR*2
GO TO 6
33 CONTINUE
KC=K
CALL TRF(N,OMEGA,KC,XT)
DO 200 I=1,NMR
XT(I)=XT(I)/NMR
XTG(I)=XT(I)
200 CONTINUE
C CALCULO DE LOS ESPECTROS DE FASE Y DE POTENCIA
DO 9 I=1,NMR
P(I)=CAES(XT(I))
F(I)=ATAN2(AIMAG(XT(I)),REAL(XT(I)))*180./PI
9 CONTINUE
C ESCRITURA DE LOS VALORES DE <K> EN COLUMNA PARA LAS 64 MUESTRAS
DO 69 I=1,NM
NDFCOR(I)=NDFCOR(I)*2
NX(I)=NDFCOR(I)
69 CONTINUE
DO 67 I=1,NM
NDFCOR(I)=NDFCOR(I)+1
NX(1+3*I)=NDFCOR(I)
67 CONTINUE
DO 22 I=1,NMR
22 WRITE(3,23)I,X(I),XTG(I),NX(I),P(I),F(I)
23 FORMAT(10X,12,2X,F6.2,8X,2F9.4,7X,13,F10.4,15X,F8.2)
STOP
END

```

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

QUITO

VALORES DE <k> PARA LA OBTENCION DE LAS MATRICES DE FOURIER

PARA UN NUMERO DE MUESTRAS IGUAL A 64.

0 16 9 24 4 20 17 23 2 18 10 26 6 22 14 30 17 9 25 5 21 13 29 3 19 11 27 7 23 15 31

OBTENCION DE LA TRANSFORMADA RAPIDA DE FOURIER

MUESTRAS		T.R.F. DIRECTA		ESPECTRO DE POTENCIA		ESPECTRO DE FASE	
				<k>			
1	12.00	-4.9625	0.0000	0	4.9625	180.00	
2	6.00	0.1437	0.0000	32	0.1437	0.00	
3	-9.00	0.3375	0.0531	16	0.3417	8.95	
4	-19.50	-0.3375	0.0531	48	0.3417	-8.95	
5	-32.10	-0.2890	0.3217	8	1.3529	-102.23	
6	-30.00	0.0734	0.0742	40	0.1048	45.56	
7	-46.20	0.0734	0.0742	24	0.1048	-45.56	
8	-48.00	0.2890	0.3217	56	1.3529	102.23	
9	-45.00	5.5695	0.5584	4	5.9038	19.37	
10	-39.00	0.0645	0.0461	36	0.0743	-35.56	
11	-30.00	0.0252	0.1712	20	0.1731	-81.64	
12	-27.60	0.2658	0.4527	52	0.5250	59.58	
13	-27.30	0.2658	0.4527	12	0.5250	-59.58	
14	-27.30	0.0252	0.1712	44	0.1731	81.64	
15	-27.00	0.0645	0.0461	28	0.0792	35.55	
16	-25.20	5.5695	-1.5583	60	5.9038	-19.37	
17	-21.00	0.5171	4.1213	2	4.2221	77.45	
18	-14.10	-0.0360	0.1013	34	0.1075	105.55	
19	-9.00	0.1666	0.1702	18	0.2391	45.61	
20	-4.50	0.5373	0.3780	50	0.6570	35.13	
21	-0.30	0.3579	-0.1134	10	0.3754	-17.58	
22	0.0	0.0678	0.0686	42	0.1115	52.56	
23	2.40	0.2166	-0.2711	26	0.3491	-50.95	
24	3.00	0.8068	-0.6273	58	1.0599	40.43	
25	4.50	0.8068	0.6273	6	1.0599	-40.43	
26	6.60	0.2199	0.2711	38	0.3491	50.95	
27	9.60	0.0678	-0.0686	22	0.1115	-52.56	
28	17.10	0.3579	-0.1134	54	0.3754	17.58	
29	15.00	0.5373	-0.3780	14	0.6569	-35.13	
30	14.40	0.1666	-0.1702	46	0.2381	-45.61	
31	14.70	-0.0360	-0.1013	30	0.1076	-105.55	
32	15.10	0.9171	-4.1213	62	4.2221	-77.45	
33	14.70	-7.3056	5.8364	1	9.3578	141.29	
34	10.50	0.1379	0.1121	33	0.1777	35.12	
35	6.00	0.1920	-0.0740	17	0.2058	-21.06	
36	3.30	0.2956	0.3440	49	0.4535	45.33	
37	0.0	0.0666	-0.4070	9	0.4124	-80.70	
38	-3.00	0.0982	-0.0457	41	0.1083	-24.94	
39	-3.60	-0.0670	-0.0485	25	0.0827	-144.09	
40	-3.60	0.1765	1.1850	57	1.1981	81.53	
41	-1.00	1.4604	2.1697	5	2.6199	55.91	
42	-1.50	0.1242	0.2178	37	0.2510	60.20	
43	3.30	0.0667	-0.0760	21	0.0785	-27.34	
44	9.10	0.0073	-0.0391	53	0.0398	-79.45	

POLITECNICA

NACIONAL

45	12.00	0.1623	-0.5064	13	0.5221	-72.13
46	18.00	0.1067	-0.0119	45	0.1073	6.26
47	20.10	0.0287	-0.1155	29	0.1220	-102.52
48	22.50	3.8223	2.4593	61	4.5678	22.17
49	22.40	3.8224	2.4693	7	4.5678	-33.17
50	22.30	0.0287	-0.1155	35	0.1223	103.53
51	21.00	0.1067	-0.0119	19	0.1073	-6.26
52	9.00	0.1623	0.5064	14	0.5220	72.13
53	0.0	0.0073	0.0391	47	0.0785	75.96
54	15.50	0.0667	0.0590	27	0.0785	-27.34
55	-24.00	0.1248	-0.2179	27	0.2510	-60.20
56	-24.20	1.4634	-2.1697	59	2.6169	-55.91
57	-22.20	0.1765	-1.1850	7	1.1881	-81.53
58	-21.00	0.0670	0.0285	39	0.0827	144.10
59	-15.50	0.0582	0.0357	23	0.1083	24.54
60	-6.00	0.0666	0.0070	55	0.4124	80.70
61	3.00	0.2556	-0.0470	15	0.4535	-49.32
62	0.0	0.1920	0.0040	47	0.2058	21.02
63	-0.30	0.1379	-0.0121	31	0.1777	-55.12
64	0.50	7.3056	0.0121	63	5.3538	-141.39

**ESCALA NACIONAL**  
**QUITO**



```

99 WRITE(3,98)
98 FORMAT(10X,'CAPACIDAD EXCEDIDA EN EL NUMERO DE MUESTRAS. MAXIMO ES
52*20',/,20X,'TRABAJO TERMINADO')
GO TO 101
100 CONTINUE
READ(1,91) (X(I),I=1,NMR)
81 FORMAT(9F10.2)
PI=3.141593
C=COS(2*PI/NMR)
R=SIN(2*PI/NMR)
OMEGA=C*VPLX(C,-B)
K=NMR/2
DO 66 I=1,NMR
APC=X(I)
ARD=0.0
65 XT(I)=C*VPLX(APC,ARD)
C CALCULO DEL LOGARITMO EN BASE 2 DEL NUMERO DE MUESTRAS IGUAL A N
MAP=1
N=0
6 IF(MAP*2-NMR)19,19,33
19 N=N+1
VAR=VAR*2
GO TO 6
37 CONTINUE
KC=K
CALL TPF(N,OMEGA,KC,XT)
DO 200 I=1,NMR
XT(I)=XT(I)/NMR
XTG(I)=XT(I)
200 CONTINUE
C CALCULO DE LOS ESPECTROS DE FASE Y DE POTENCIA
DO 9 I=1,NMR
P(I)=CABS(XT(I))
F(I)=ATAN2(AIMAG(XT(I)),REAL(XT(I)))*180./PI
9 CONTINUE
C ESCRITURA DE LOS VALORES DE <K> EN COLUMNA PARA LAS 64 MUESTRAS
DO 69 I=1,NV
NDECOR(I)=NDECOR(I)*2
NX(I)=NDECOR(I)
59 CONTINUE
DO 67 I=1,NV
NDECOR(I)=NDECOR(I)+1
NX(I+1)=NDECOR(I)
67 CONTINUE
C ORDENAMIENTO DE LOS ESPECTROS
DO 77 I=1,NM
IF(NX(I).GT.NM)GO TO 78
NX(I)=NX(I)+NM
GO TO 77
78 NX(I)=NX(I)-NM
77 CONTINUE
DO 79 I=1,NMR
IX=NX(I)
POTFOR(IX)=P(I)
FASFOR(IX)=F(I)
79 CONTINUE
DO 83 IX=1,NM
IJ=IX-32
83 WRITE(2,82) IJ,POTFOR(IX),FASFOR(IX)
82 FORMAT(10X,IJ,2X,F10.4,17X,F8.2)
STOP
END

```

POLITECNICA

ESCUELA

NACIONAL

QUITO

DEFINICION DE LOS ESPECTROS DE POTENCIA Y FASE ORDENADOS

FESPECTRO DE POTENCIA ESPECTRO DE FASE

31	0.1777	39.12
30	0.1075	109.55
29	0.1229	101.53
28	0.0793	-35.56
27	0.2510	60.20
26	0.3491	50.95
25	0.0927	144.10
24	0.1048	45.56
23	0.1093	-24.94
22	0.1115	52.56
21	0.0795	27.34
20	0.1731	81.64
19	0.1073	6.76
18	0.2381	-45.61
17	0.2058	21.07
16	0.3417	-8.95
15	0.4535	49.73
14	0.6570	35.13
13	0.5320	72.13
12	0.5250	59.58
11	0.3799	-17.45
10	0.3754	80.70
9	0.4124	102.33
8	1.2529	141.53
7	1.0581	-40.43
6	1.0599	-55.91
5	2.6199	-19.37
4	5.9038	33.17
3	4.5678	-77.45
2	4.2221	141.79
1	9.3538	150.00
0	4.9625	141.39
1	0.3538	77.45
2	4.2221	-33.17
3	4.5678	19.37
4	5.9038	55.91
5	2.6199	40.43
6	1.0599	-61.53
7	1.1991	-102.33
8	1.2529	-80.70
9	0.4124	-17.58
10	0.3754	70.46
11	0.3799	-59.58
12	0.5250	72.13
13	0.5320	-35.13
14	0.6569	-49.72
15	0.4535	8.05
16	0.3417	-21.06
17	0.2058	45.61
18	0.2381	-6.36
19	0.1071	-81.64
20	0.1731	-27.74
21	0.0795	52.56
22	0.1115	-45.56
23	0.1093	24.94
24	0.1048	-144.09
25	0.0927	-50.95
26	0.3451	-60.20
27	0.2510	73.55
28	0.0782	-101.52
29	0.1229	-109.55
30	0.1076	-39.12
31	0.1777	

POLITECNA NACIONAL

QUIT

GRAFICO DE LA CURVA ORIGINAL

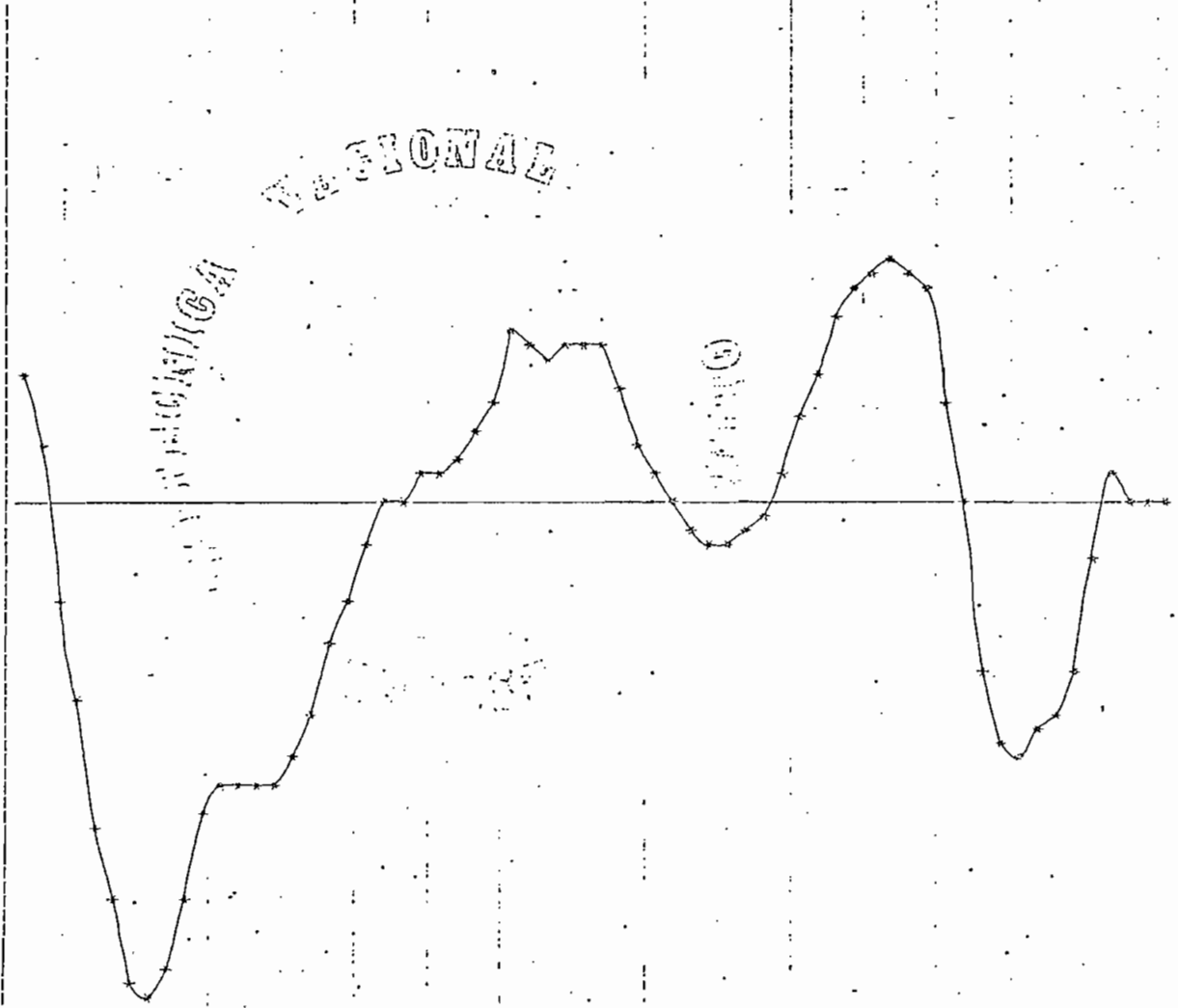


GRAFICO DEL ESPECTRO DE POTENCIA

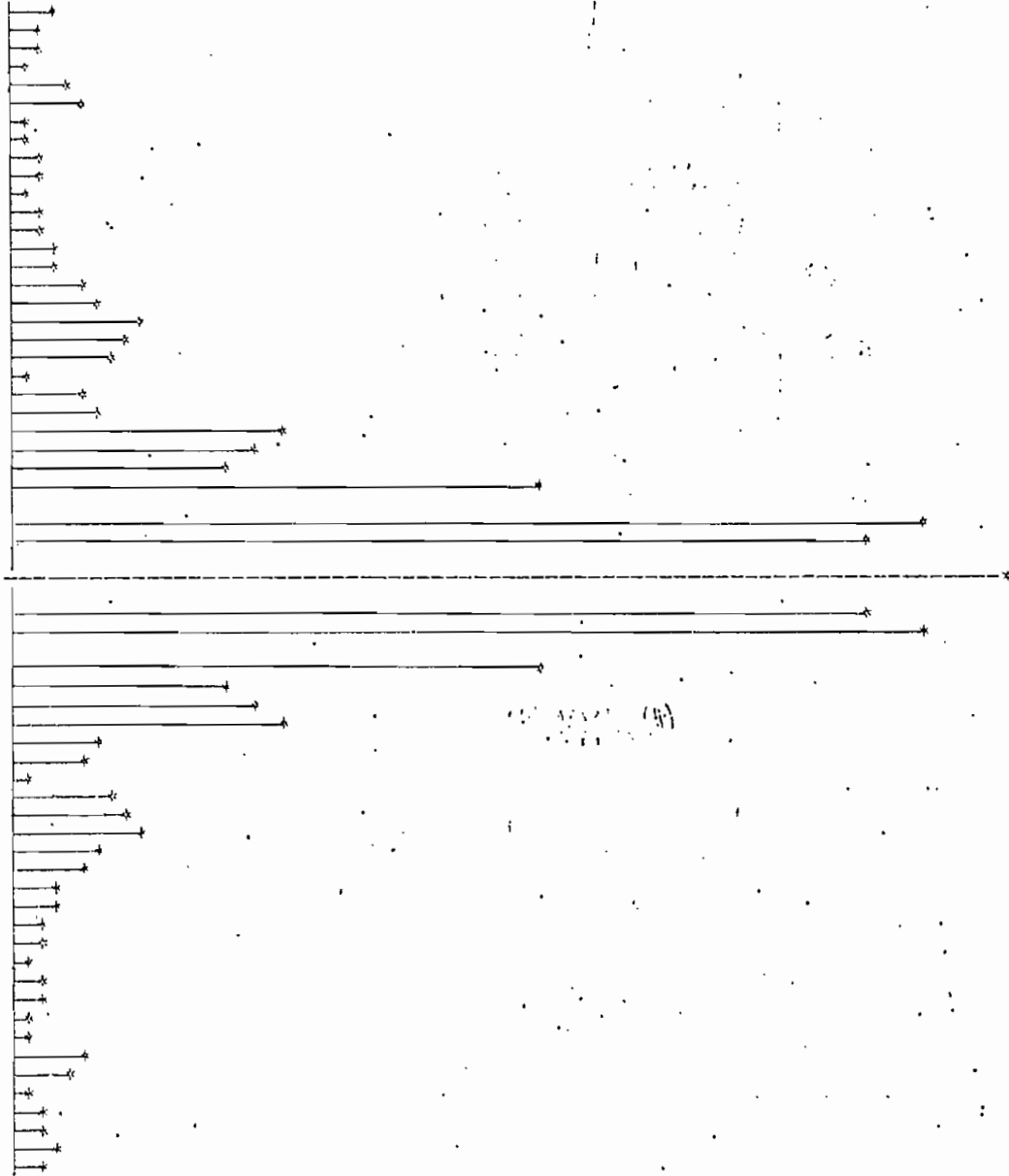
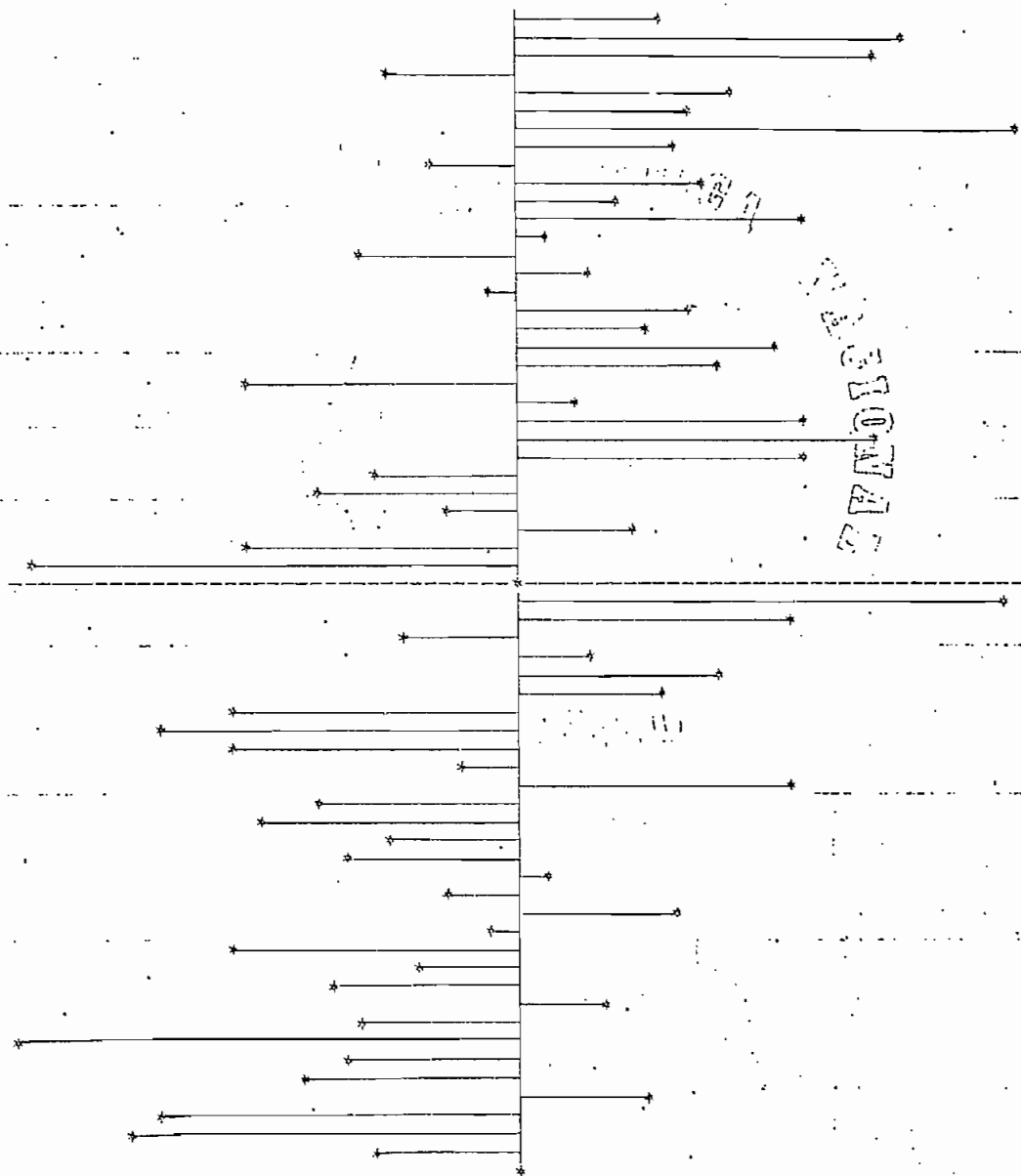


GRAFICO DEL ESPECTRO DE FASE



PROYECTO

### 3.4 LA TRANSFORMADA DE FOURIER MULTIDIMENSIONAL.

La Transformada discreta de Fourier puede extenderse a cualquier número de dimensiones, siendo la de mayor importancia la de 2 dimensiones, la cual es de especial importancia para la computación del proceso digital de señales de dos dimensiones tales como: fotografías y arreglos de información sísmica.

A continuación se presentan las definiciones de la Transformada de Fourier bidimensional, a base de las cuales se obtienen las relaciones que definen la Transformada de Fourier multidimensional.

Una secuencia periódica de dos dimensiones se define como:

$$x(m,n) = x(m + qM, n + rN)$$

en la cual se puede decir que la secuencia es periódica en orden de filas, con período M y en un orden de columnas, con período N; q y r pueden tomar valores enteros positivos o negativos.

De acuerdo a la definición de Transformada de Fourier, para una secuencia periódica  $x(n)$  se tiene que:

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W^{-nk} \quad (3.34)$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W^{nk} \quad (3.35)$$

$$k = 0.1.2.3.....N-1$$

Si se generaliza las expresiones (3.34)y(3.35) para una

secuencia periódica de dos dimensiones, se tiene que:

$$x(m,n) = \frac{1}{MN} \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} X(k,l) W^{-mk} W^{-nl} \quad (3.36)$$

$$X(k,l) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} x(m,n) W^{mk} W^{nl} \quad (3.37)$$

A partir de las ecuaciones (3.36) y (3.37) se llega a la definición de la Transformada de Fourier multidimensional.

$$x(m,n,\dots,z) = \frac{1}{MN\dots Z} \sum_{\alpha=0}^{M-1} \sum_{\beta=0}^{N-1} \dots \dots \dots \sum_{\phi=0}^{Z-1} X(\alpha,\beta,\dots,\phi) W_m^{-m\alpha} W_n^{-n\beta} \dots W_z^{-z\phi} \quad (3.38)$$

$$X(\alpha,\beta,\dots,\phi) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \dots \dots \dots \sum_{z=0}^{Z-1} x(m,n,\dots,z) W_m^{m\alpha} \dots W_z^{z\phi} \quad (3.39)$$

CAPITULO IV

APLICACION PRACTICA

En principio se pensó en aplicar la Transformada Rápida de Fourier a una señal de audio, pero la falta del equipo necesario para este objeto, nos obligó a realizar otro tipo de aplicación.

Como aplicación. se realiza la comprobación de las propiedades de los Espectros de Potencia y Fase; para este objeto se utiliza el programa presentado en la pg.54, el cual como resultado final grafica la curva a procesarse así como también los Espectros de Potencia y Fase. Se procesan 4 curvas, de las cuales las curvas #1 y #2 son de alta frecuencia y las curvas #3 y #4, son de baja frecuencia.

Si se analiza los gráficos de los Espectros de Potencia obtenidos para las 4 curvas, se puede comprobar que son funciones par; se observa también que los Espectros de Potencia para las curvas #1 y #2 presentan componentes de alta frecuencia y para las curvas #3 y #4, componentes de baja frecuencia.

En cuanto a los Espectros de Fase de las 4 curvas procesadas, se observa que son funciones impares.

A continuación se procesarán las mismas 4 curvas, pero cambiando el orden de los datos, o sea produciendo un



desplazamiento de las mismas; analizando los gráficos de los Espectros de Potencia, se observa que son idénticos a los obtenidos con las muestras sin desplazamiento, con lo cual se comprueba que el Espectro de Potencia permanece invariante respecto al desplazamiento de sus muestras; cosa que no ocurre con el Espectro de Fase, el cual si tiene variaciones con el desplazamiento de las muestras.

En la pag.89, se presentan los resultados de procesar la curva # 3 introduciendo un cambio: a partir de la muestra #41 se suma un valor constante, con lo cual se introducen componentes de alta frecuencia; a consecuencia de lo cual, en el Espectro de Potencia también aparecen componentes de alta frecuencia. En el Espectro de Fase también se producen variaciones.

CURVA #1

GRAFICO DE LA CURVA ORIGINAL

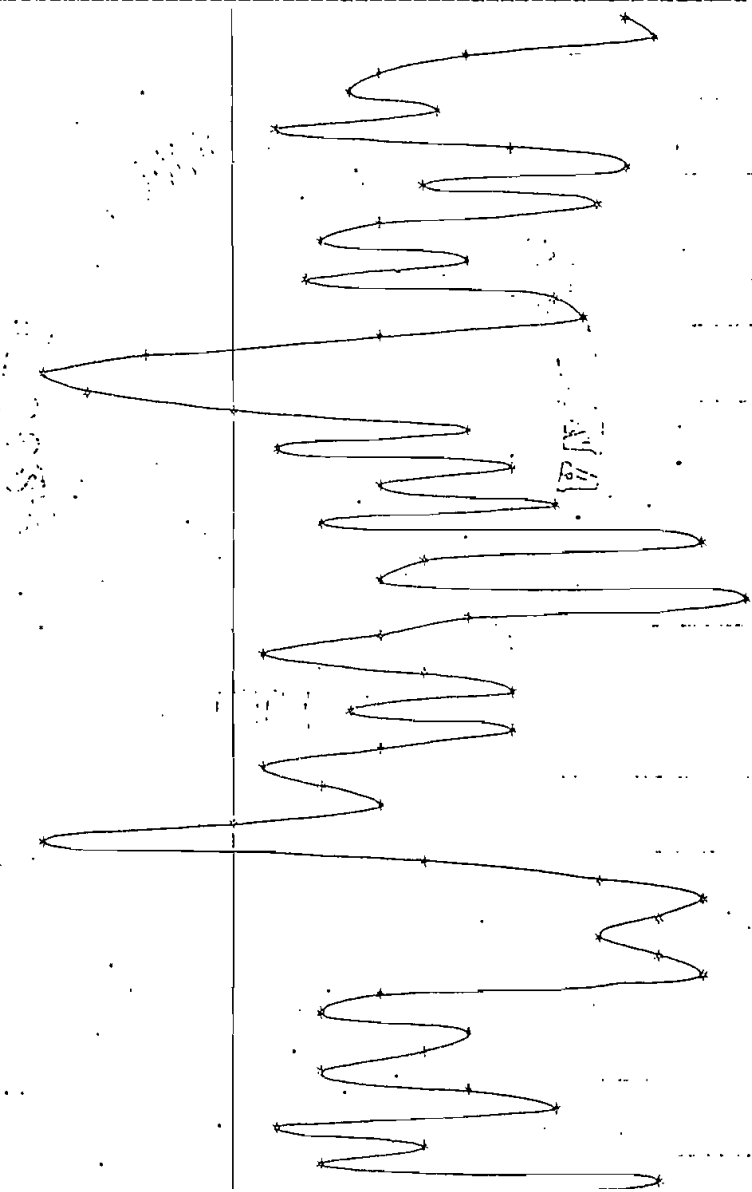


GRAFICO DEL ESPECTRO DE POTENCIA

COMUNICACION NACIONAL

(0)

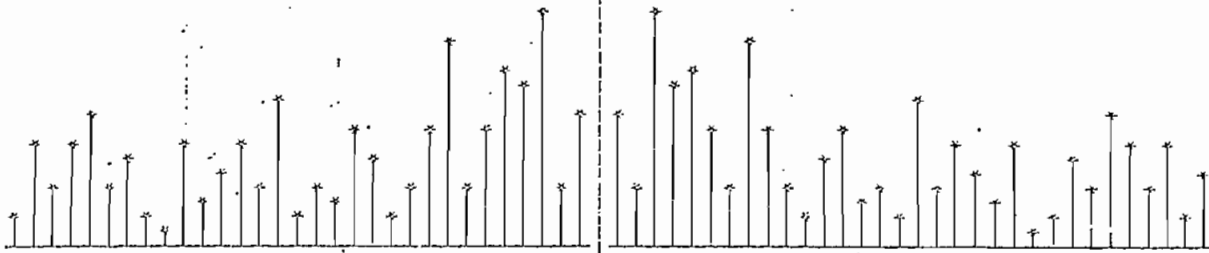
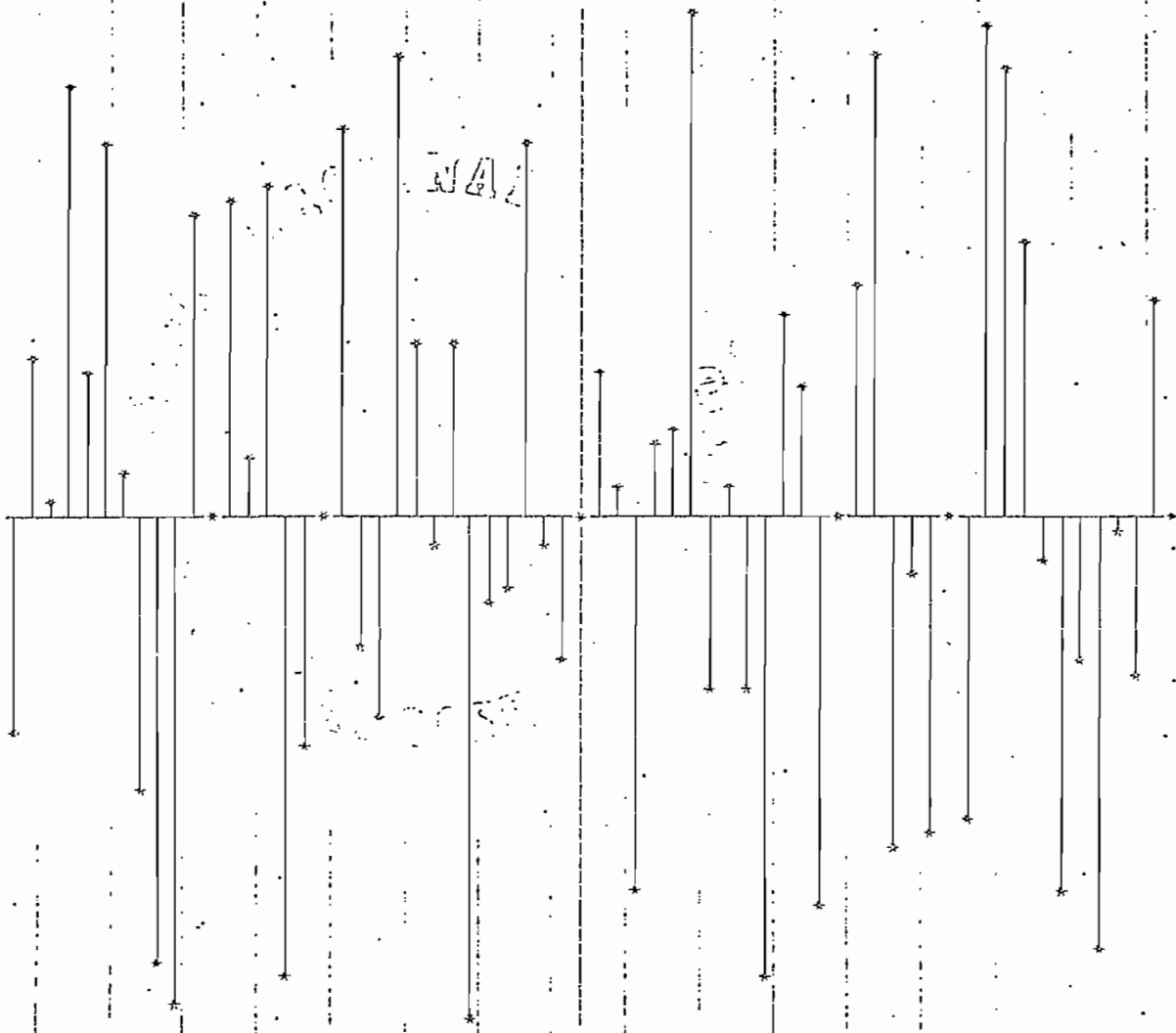


GRAFICO DEL ESPECIRG. DE FASE



CURVA #1, CAMBIANDO EL ORDEN DE LOS DATOS GRAFICO DE LA CURVA ORIGINAL

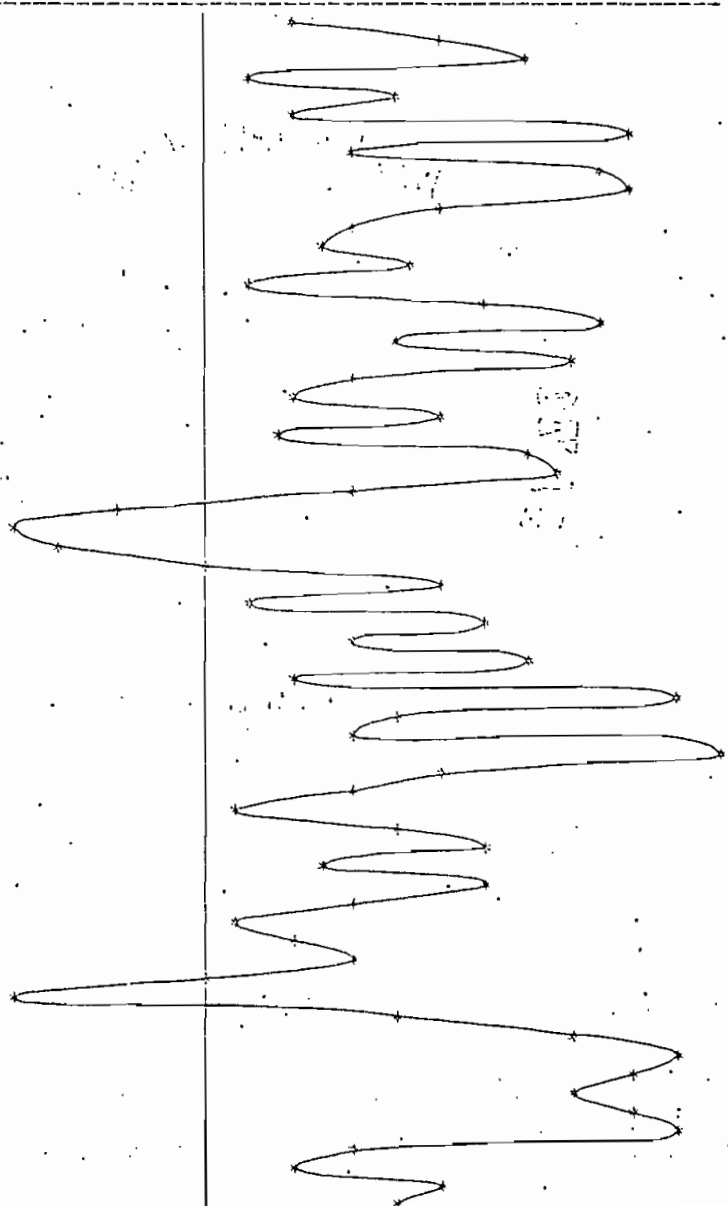


GRAFICO DEL ESPECTRO DE POTENCIA

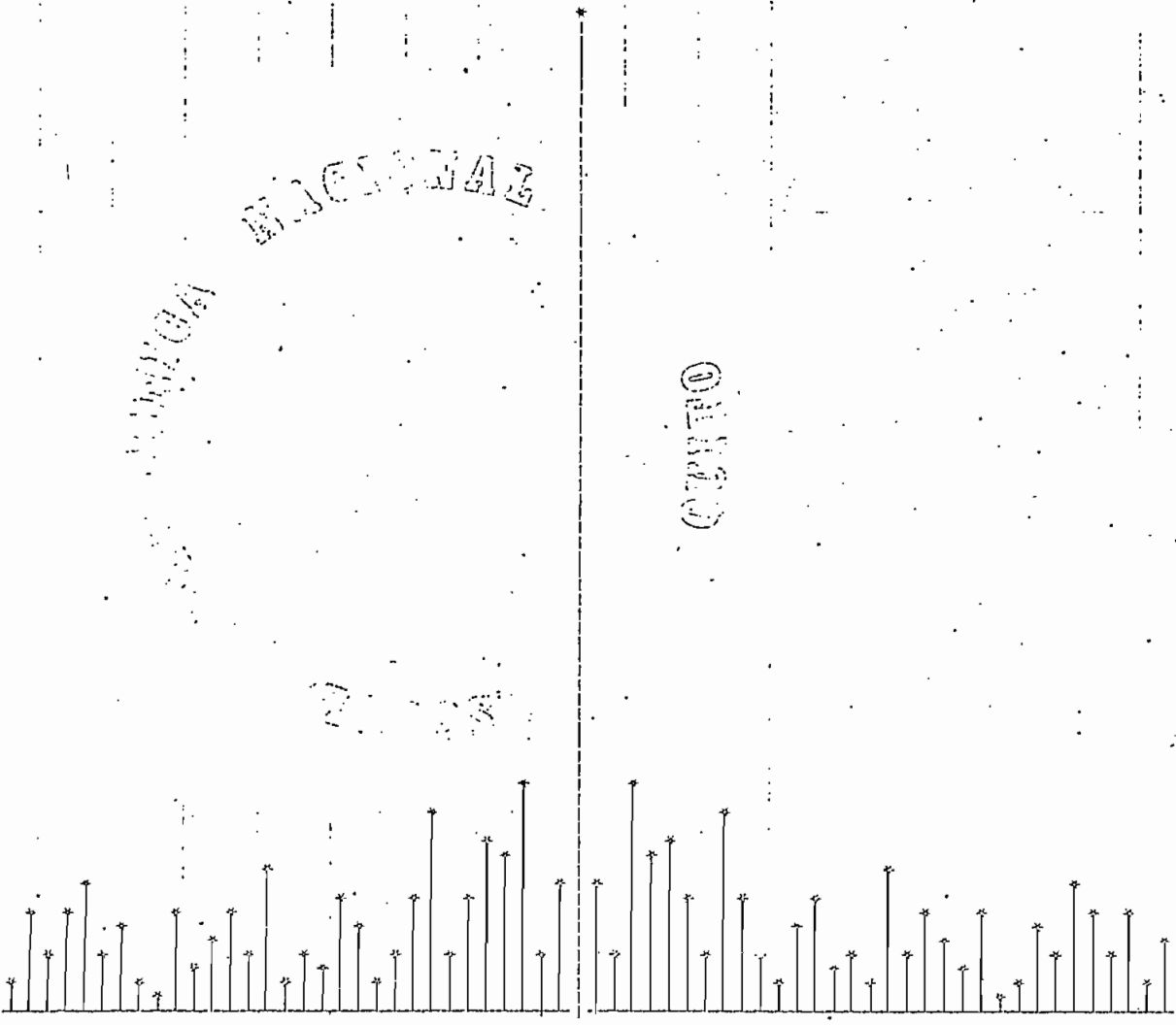
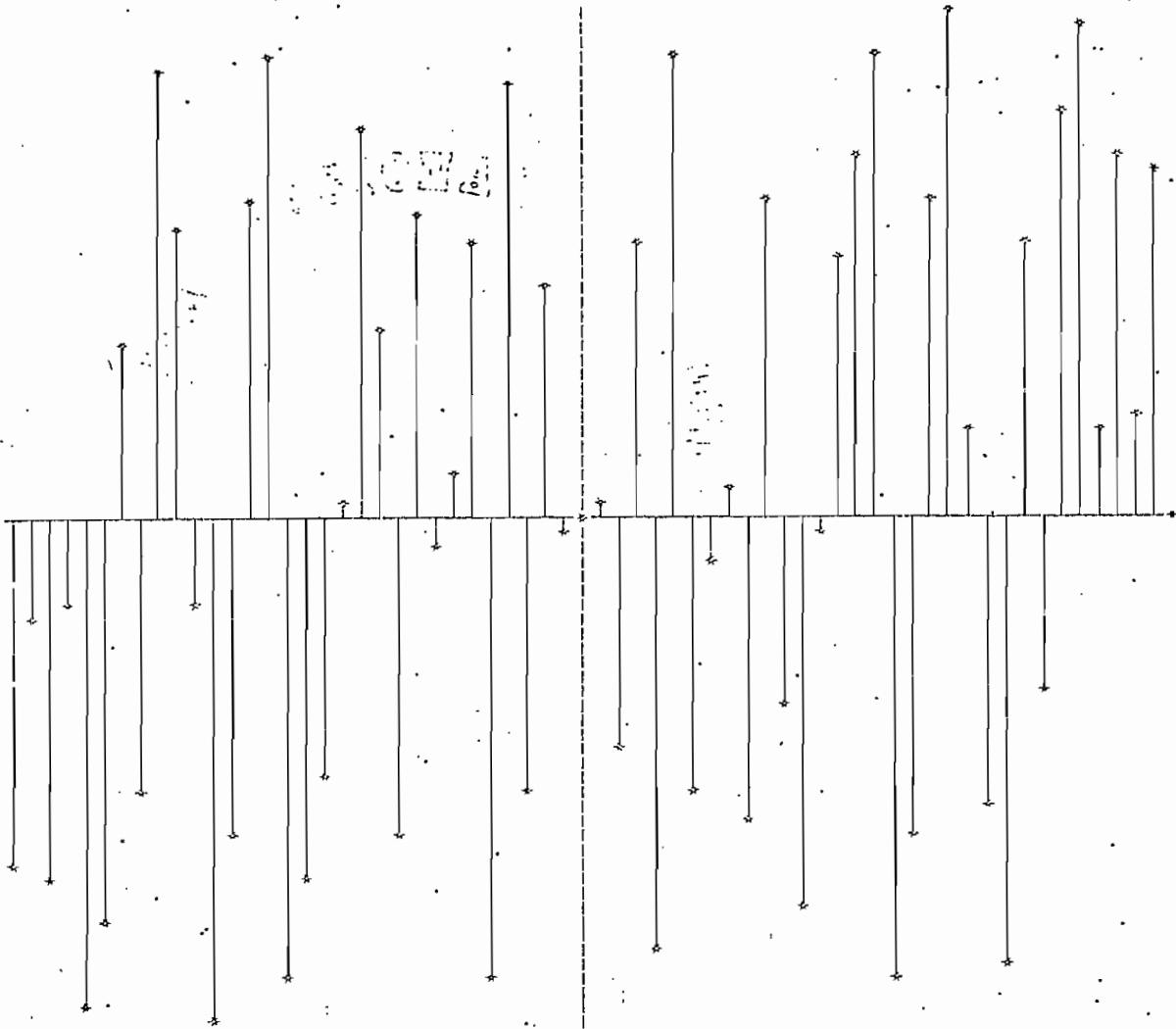
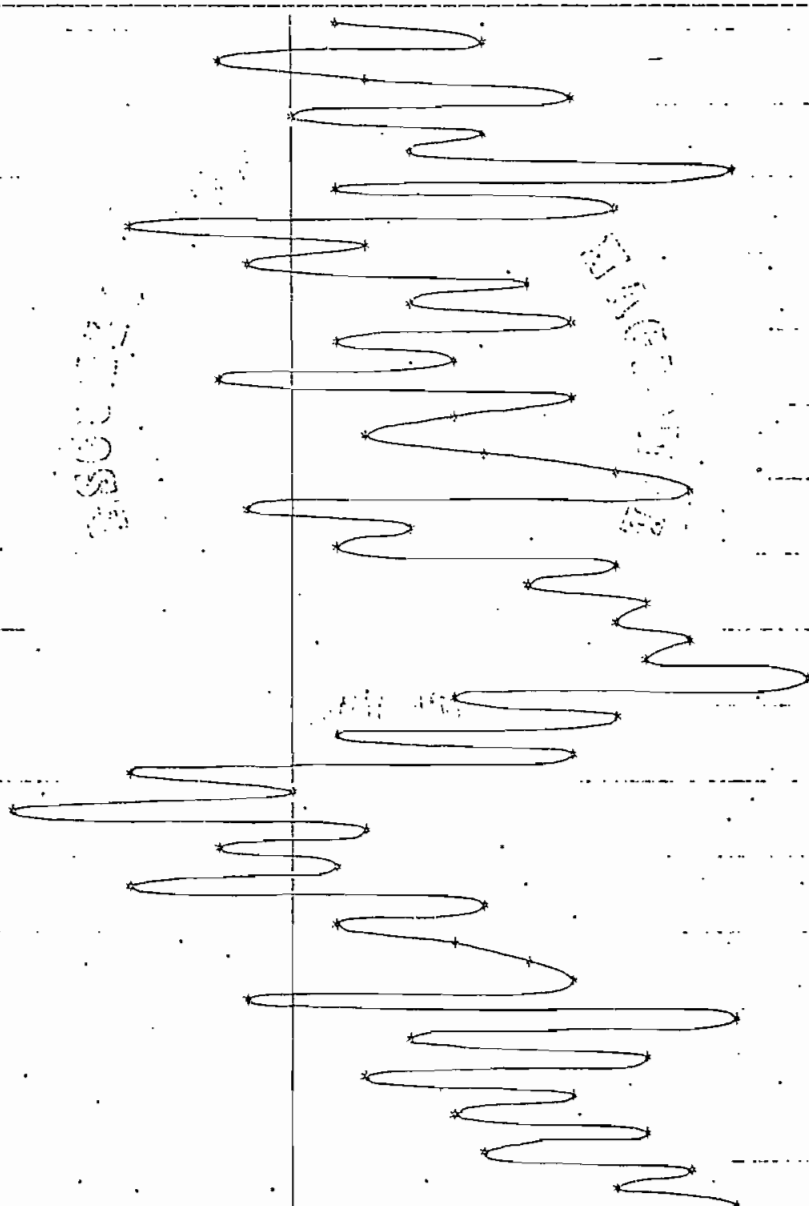


GRAFICO DEL ESPECIFIC DE BASE



CURVA #2

GRAFICO DE LA CURVA ORIGINAL





ESPACIO DEL ESPESOR DE LA PIEL

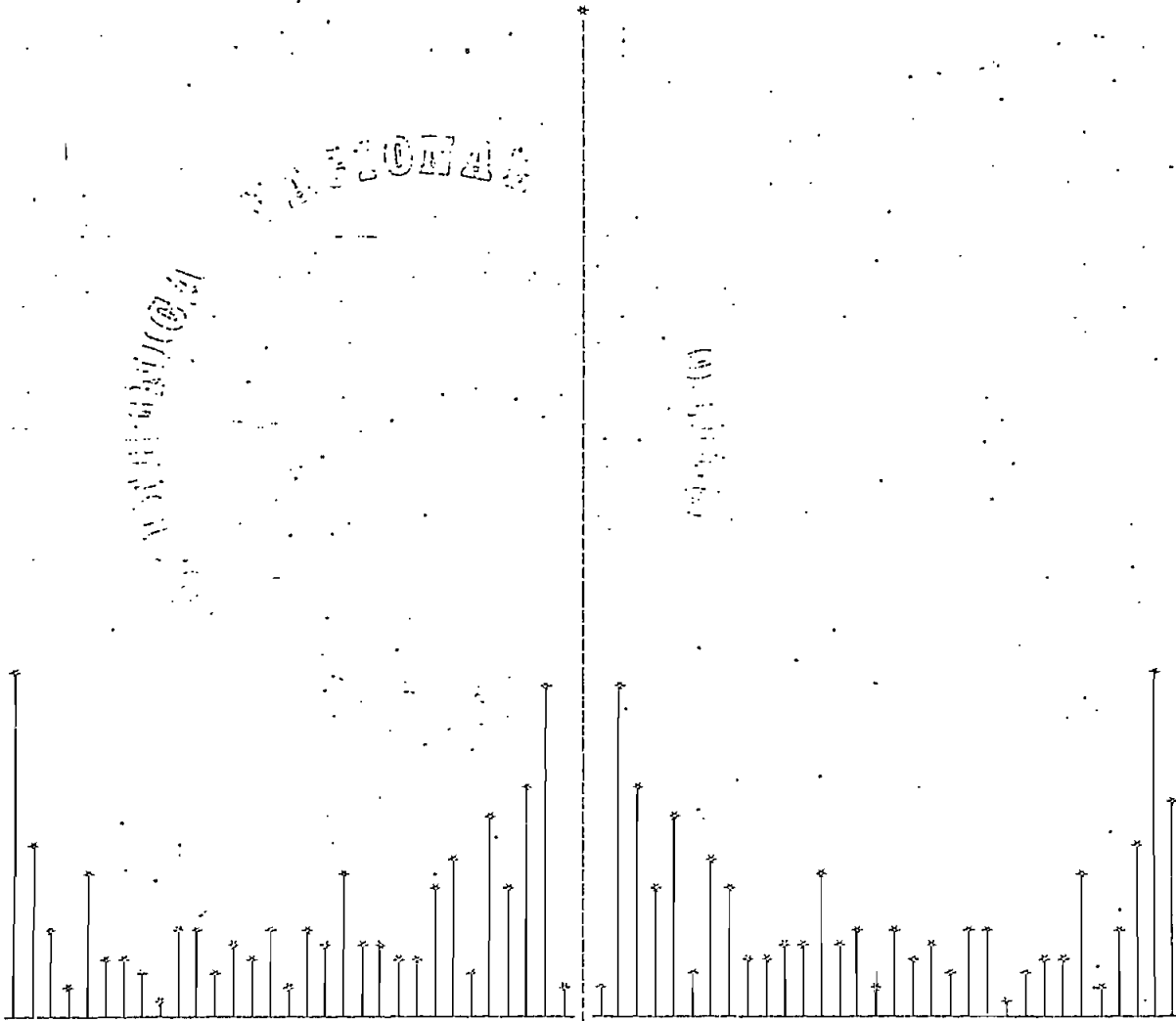
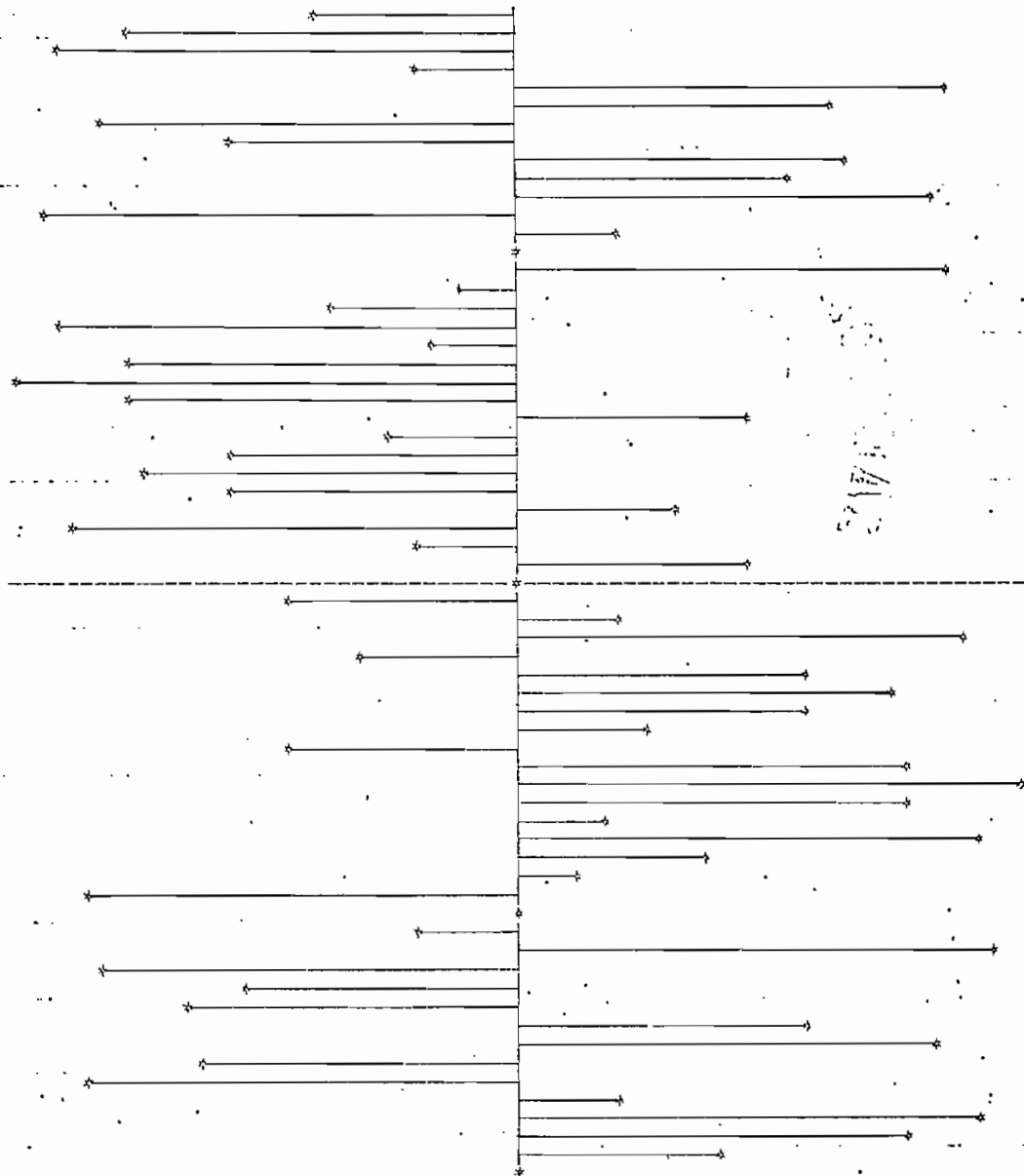


GRAFICO DEL ESPECTRO DE FASE



CURVA #2, CAMBIANDO EL ORDEN DE LOS DATOS

GRAFICO DE LA CURVA ORIGINAL

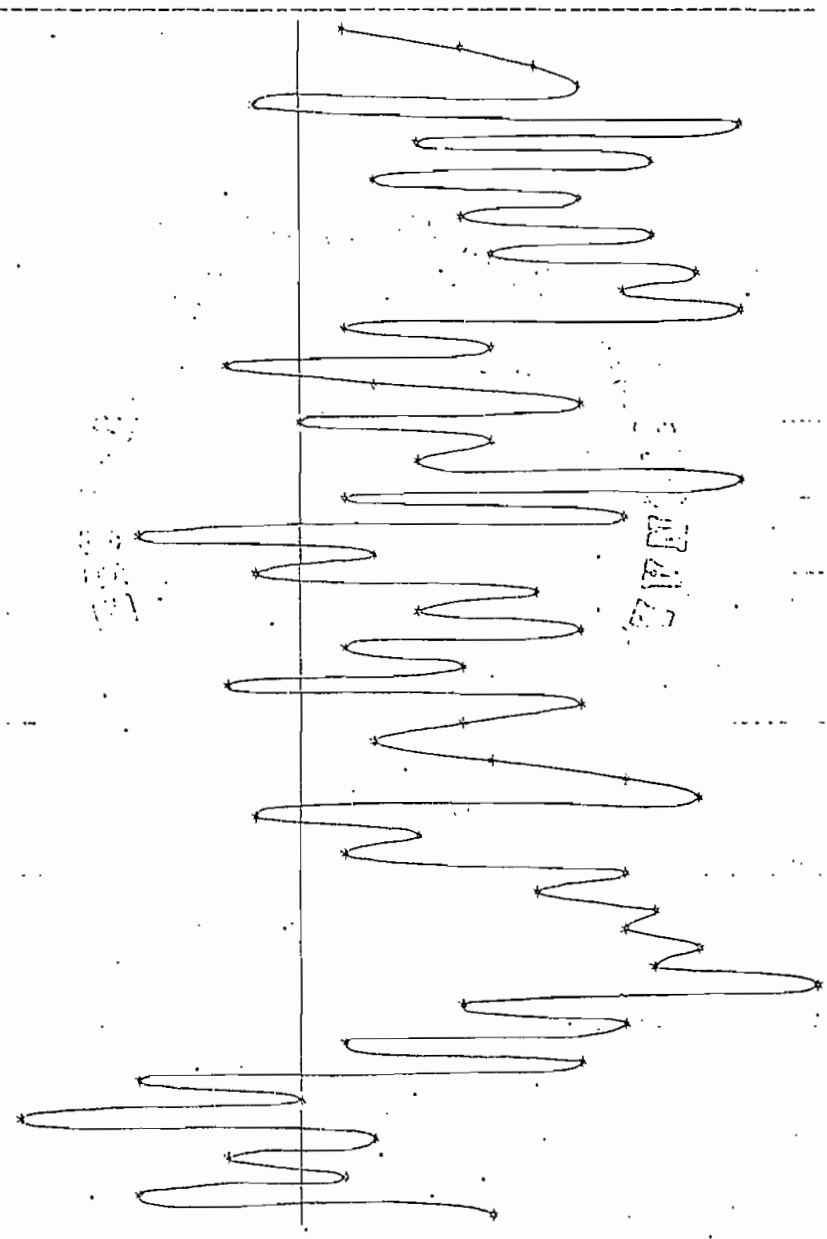


GRAFICO DEL ESPECTRO DE POTENCIA

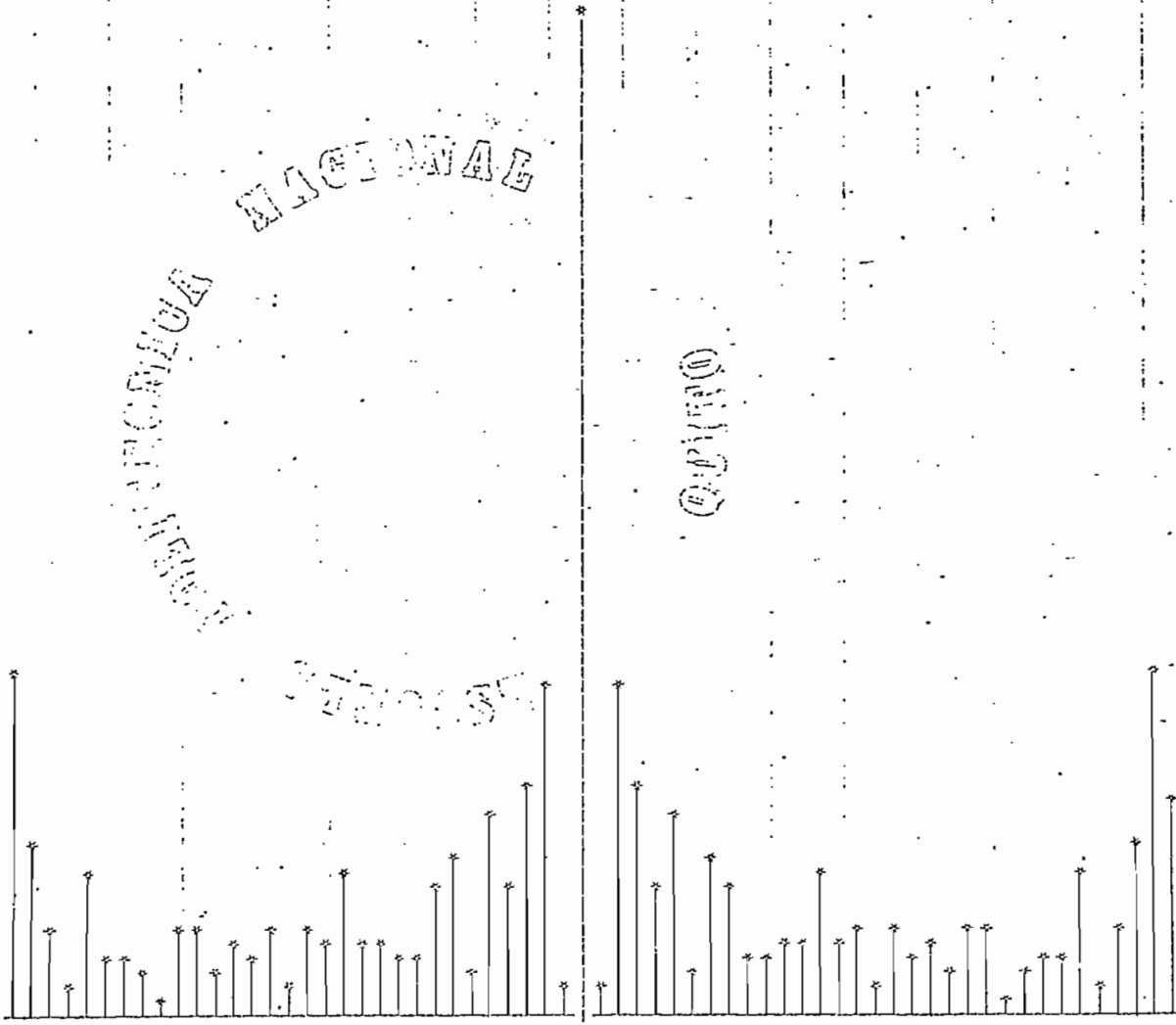


GRAFICO DEL ESPECTRO DE FASE

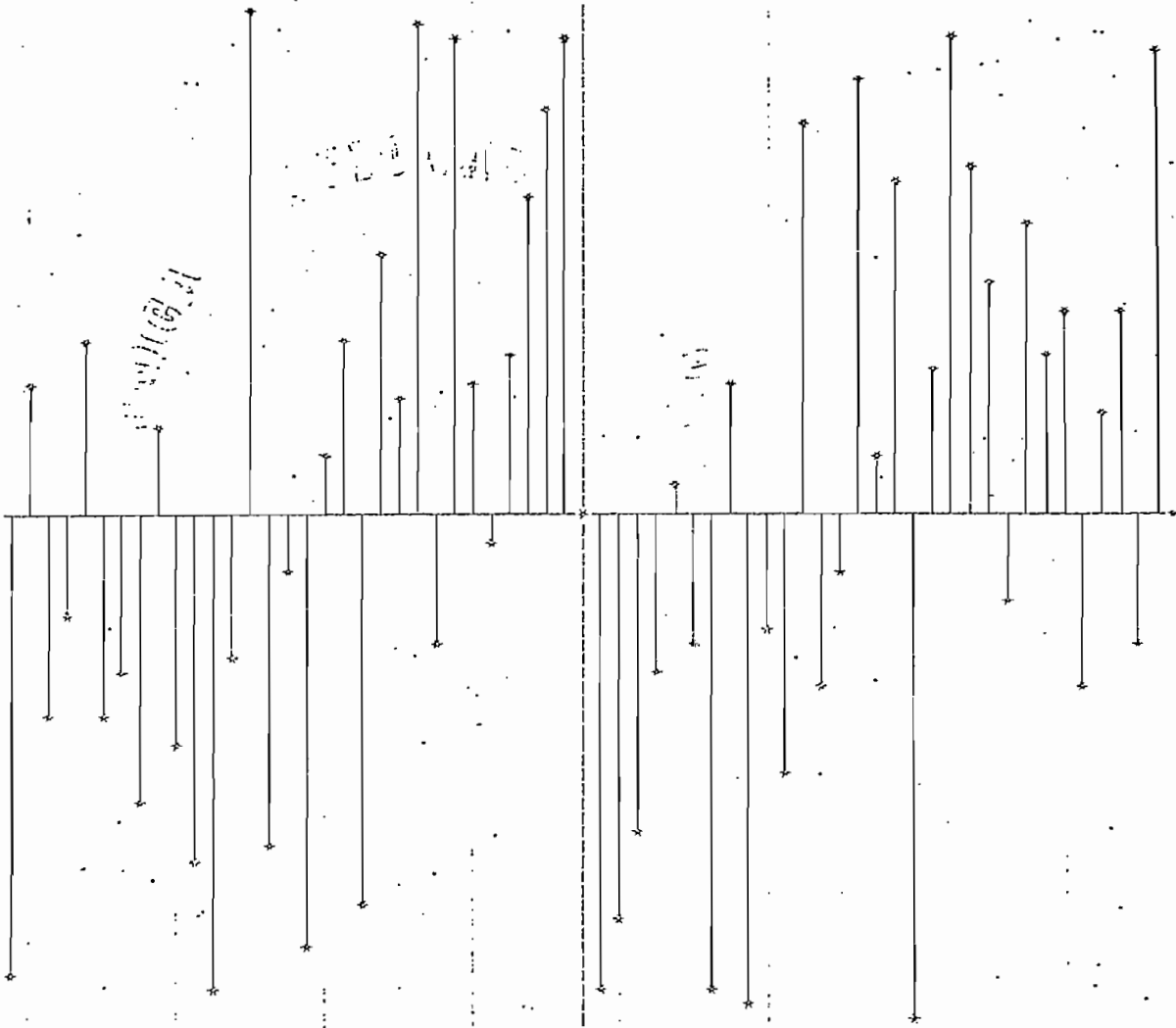




GRAFICO DEL ESPECIFIC DE POIENCIA

REGIONAL  
MUNICIPAL

QUINTO

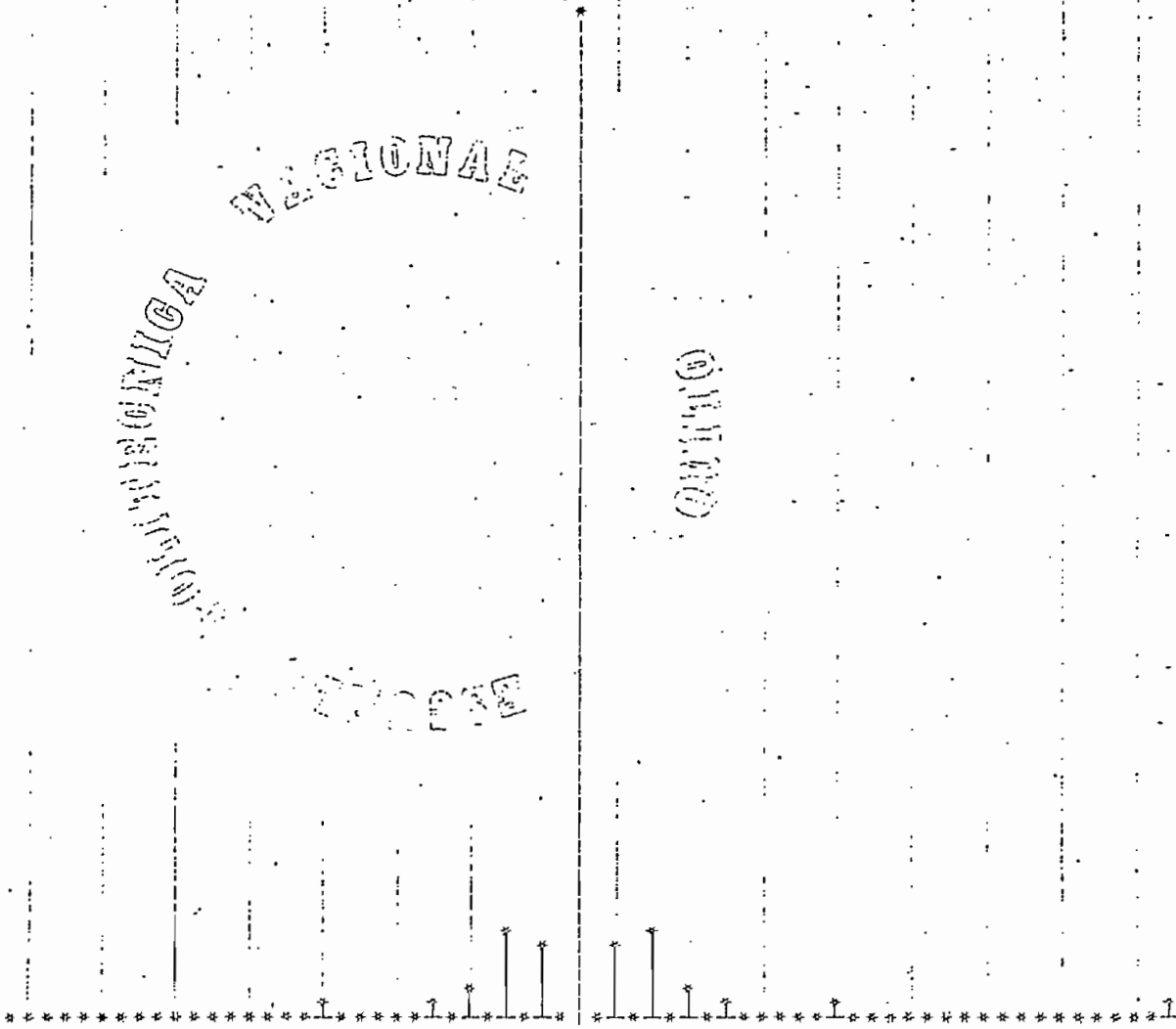


GRAFICO DEL ESPESOR DE FASE

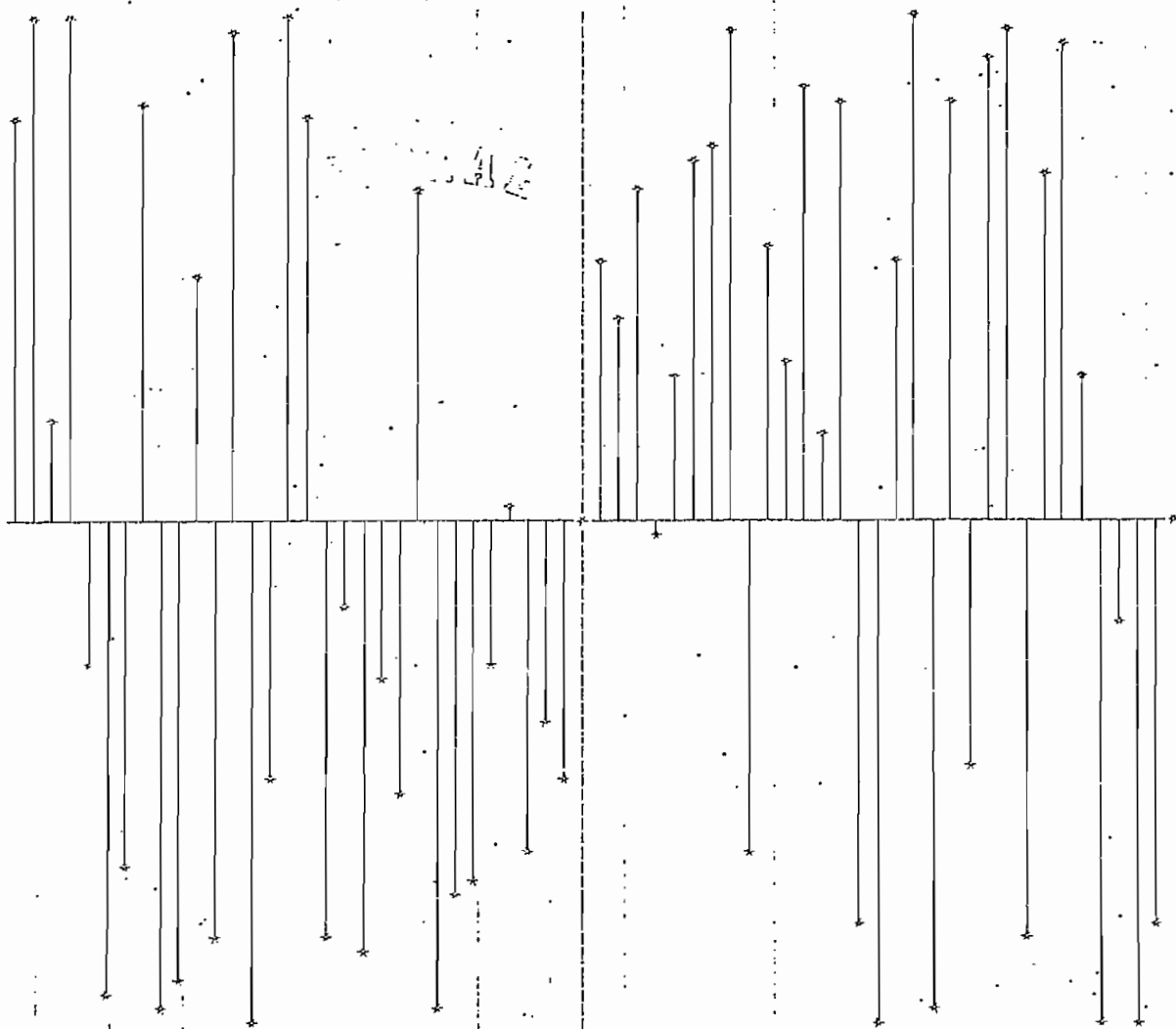




GRAFICO DE LA CURVA ORIGINAL

CURVA #3. CAMBIANDO EL ORDEN DE LOS DATOS

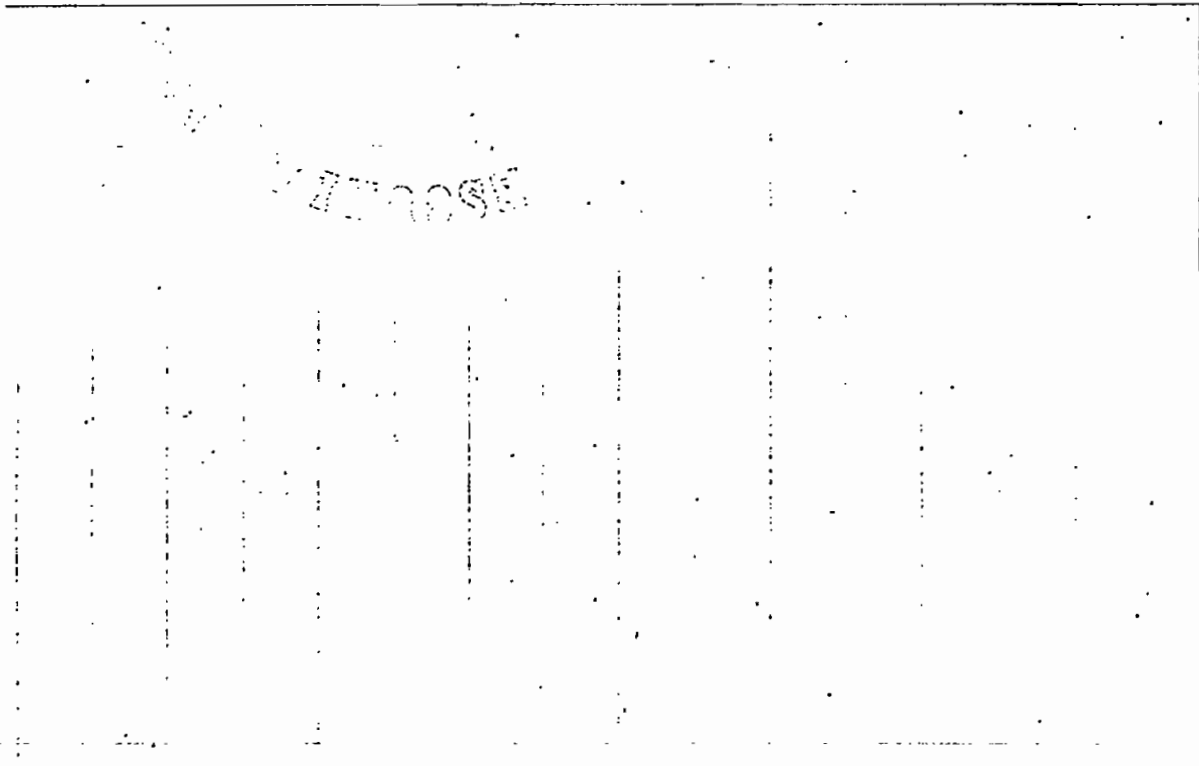
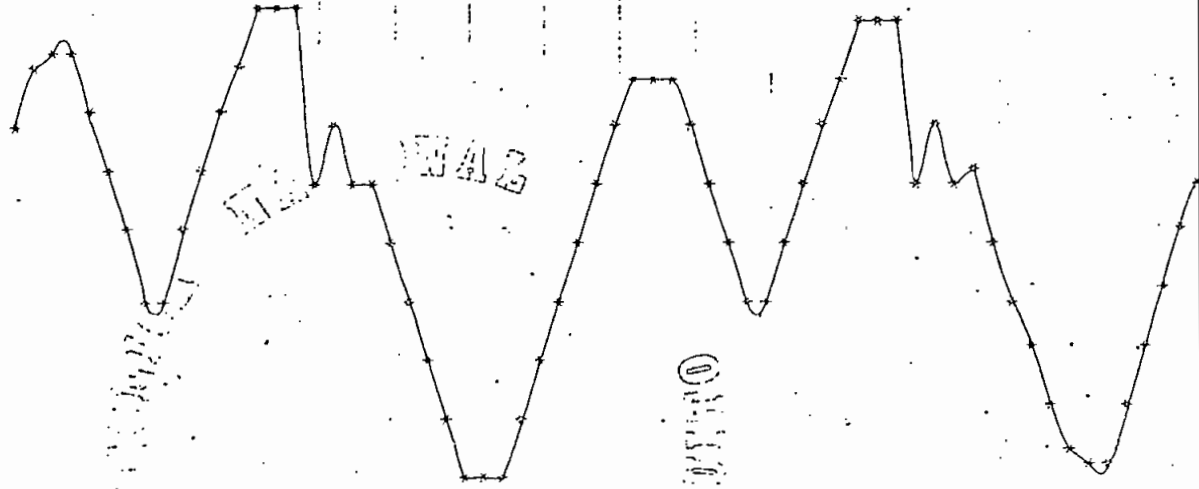


GRAFICO DEL ESPECIEM DE FASE

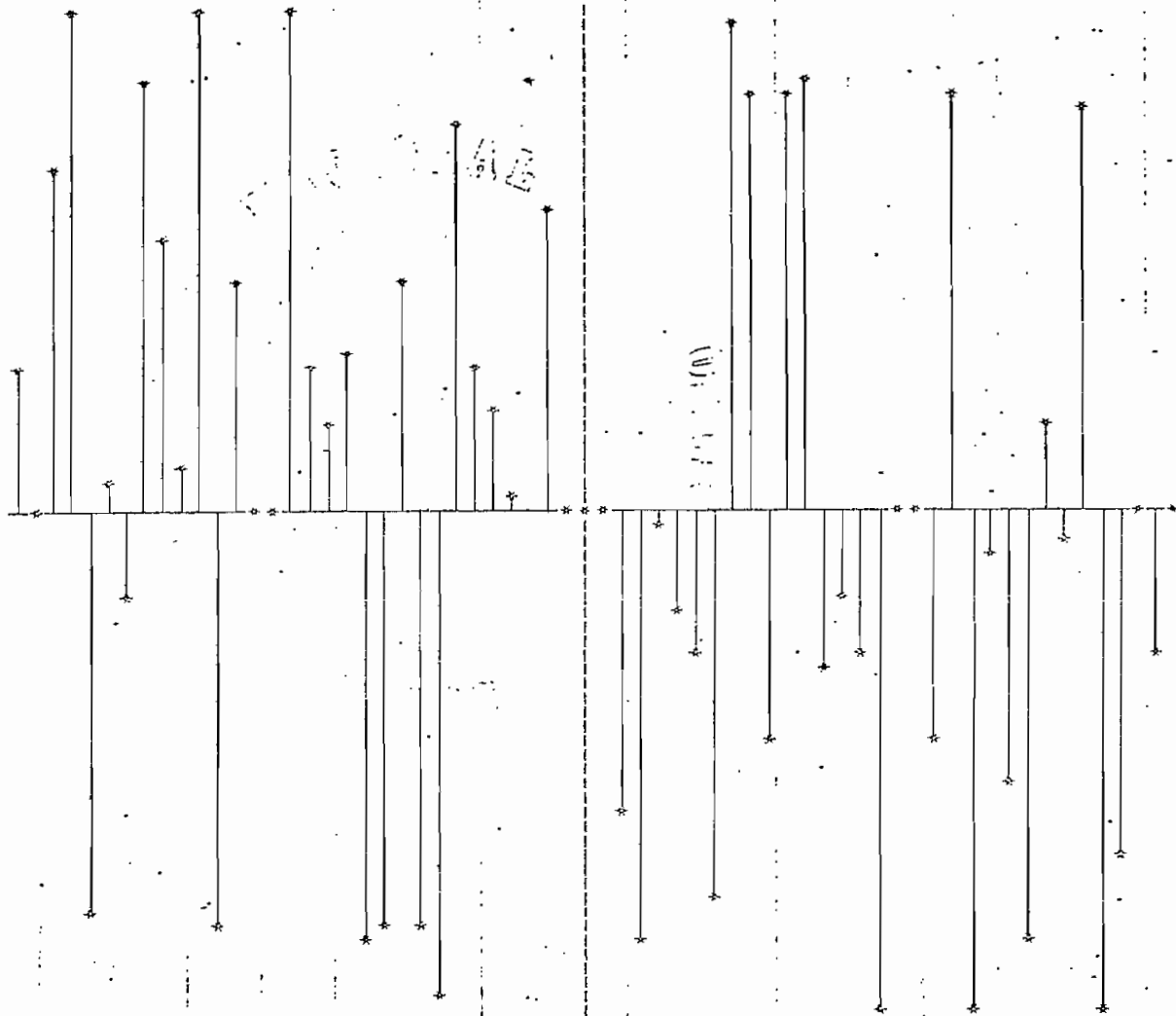


GRAFICO DE LA CURVA ORIGINAL

CURVA #4

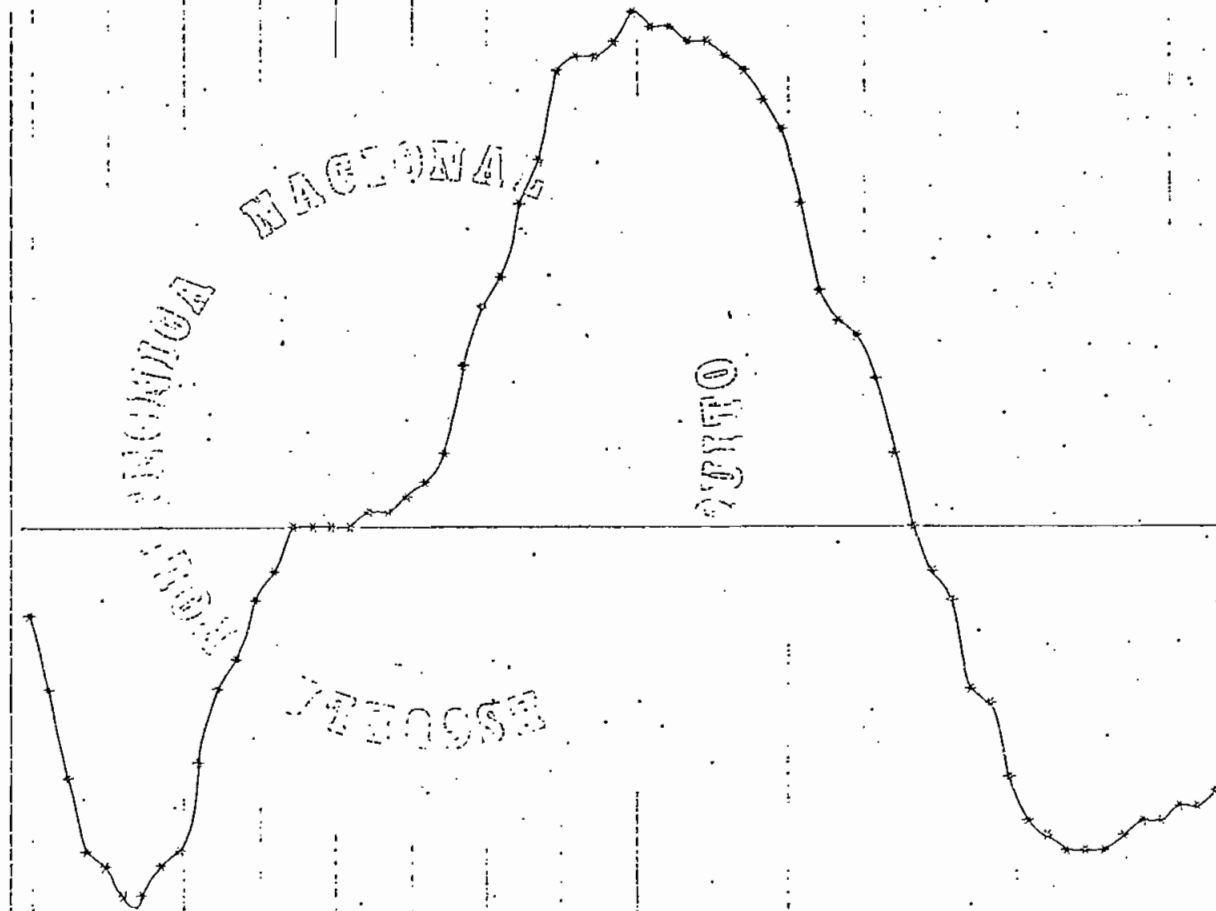


GRAFICO DEL ESPECTRO DE POTENCIA

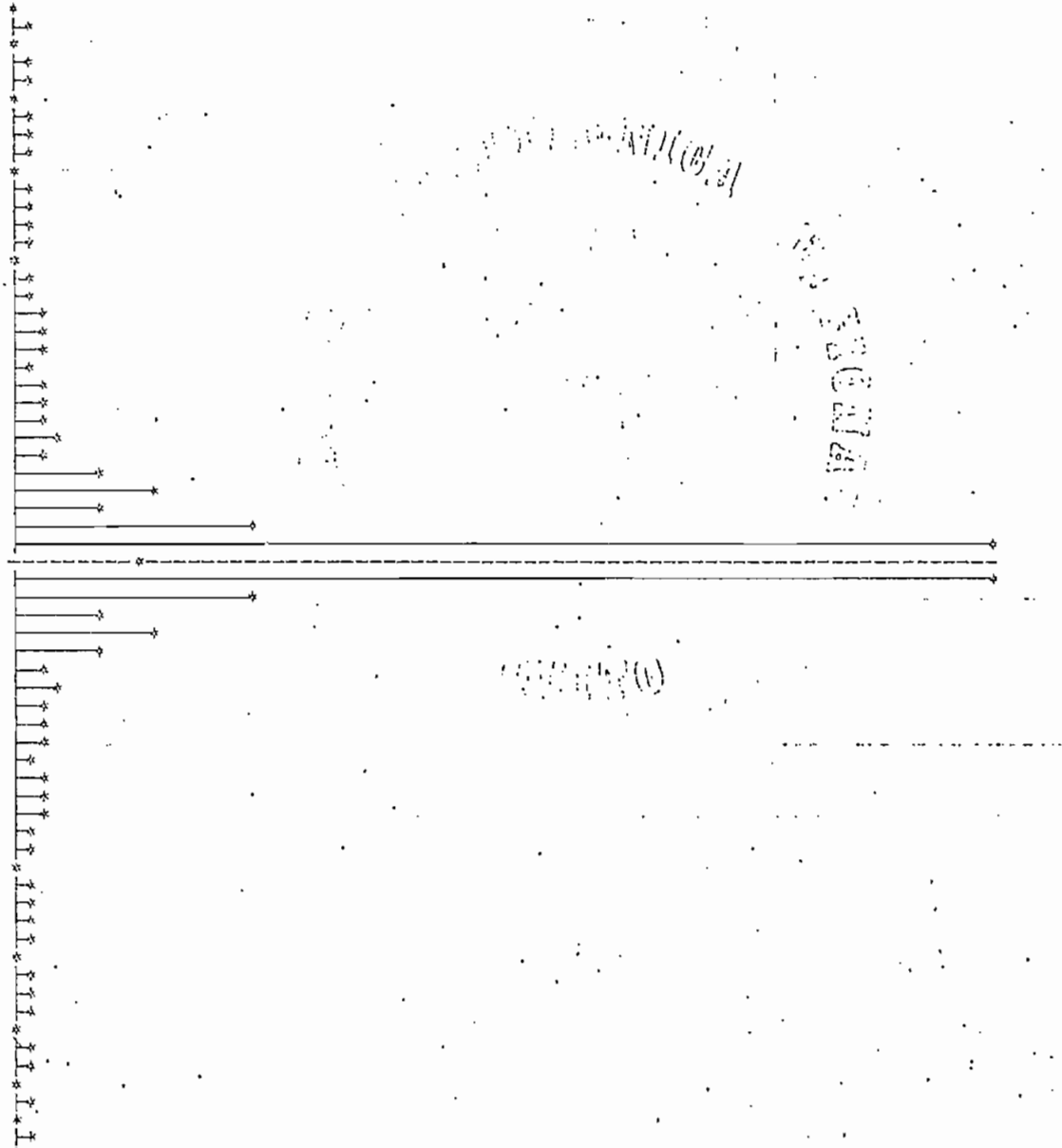
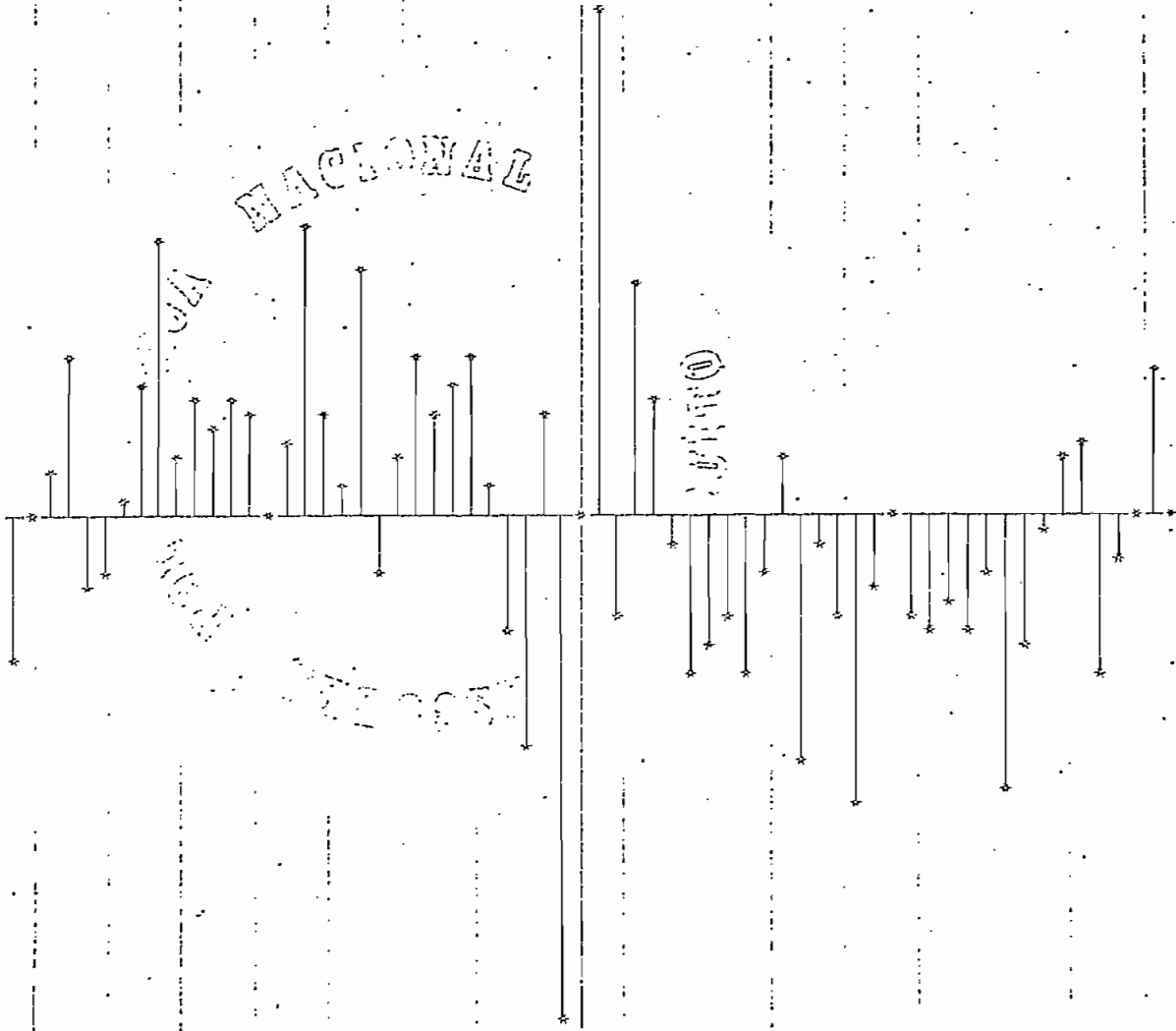


GRAFICO DEL ESPECTRO DE FASE



CURVA #4. CAMBIANDO EL ORDEN DE LOS DATOS GRAFICO DE LA CURVA ORIGINAL

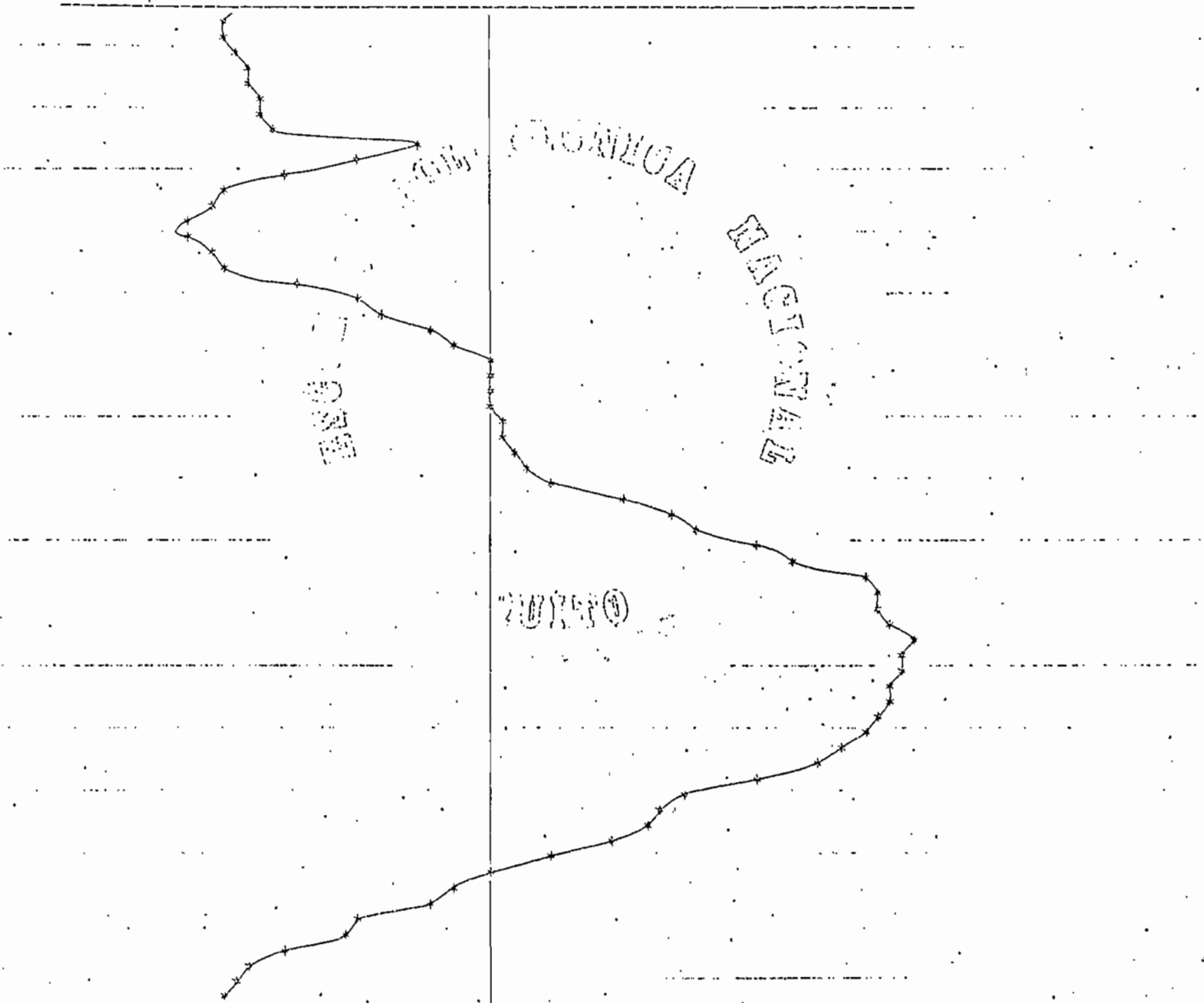


GRAFICO DEL ESPECTRO DE POTENCIA

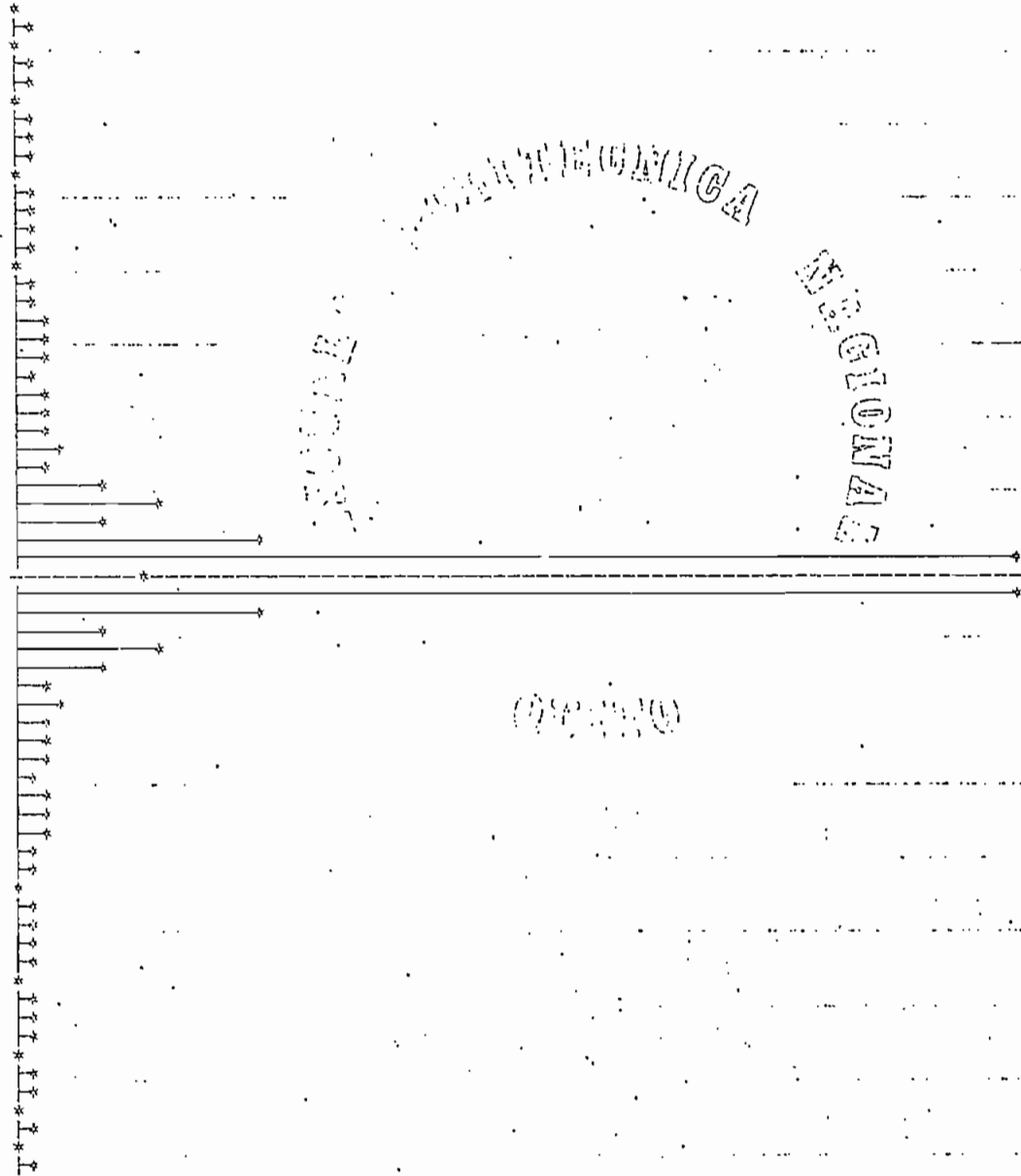


GRAFICO DEL ESPECIJO DE FASE

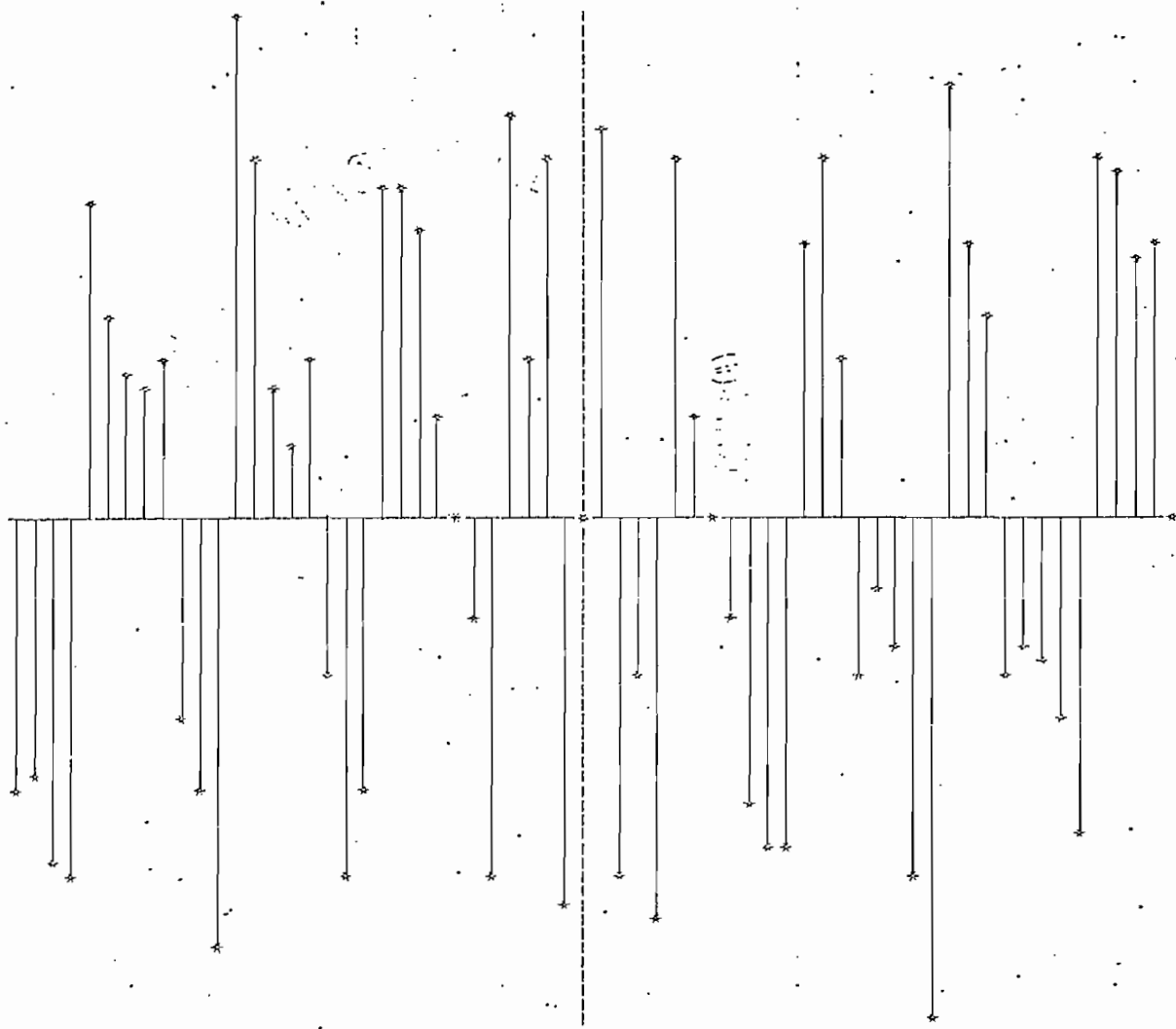






GRAFICO DEL ESPECTRO DE POTENCIA

COMUNICACION NACIONAL  
SECRETARIA DE COMERCIO

GRUPO

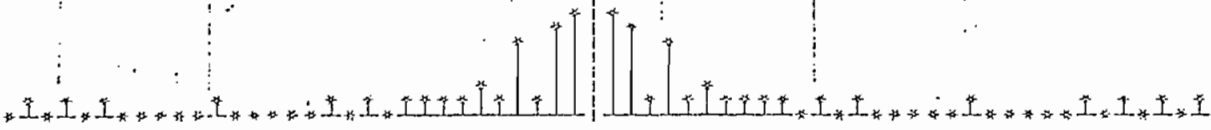
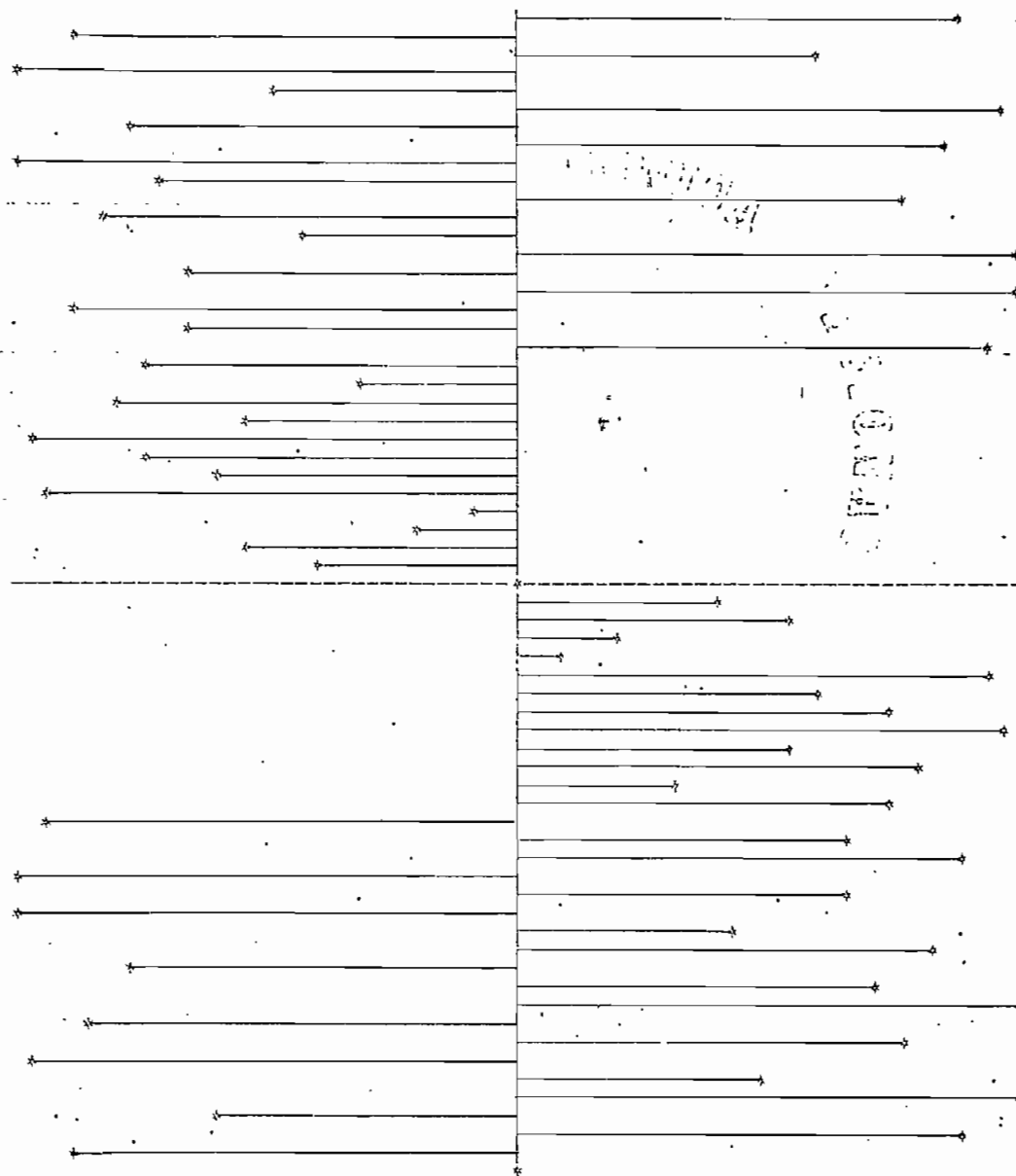


GRAFICO DEL ESPECIBO DE FASE



A continuación y como última parte de la aplicación, se trató de recuperar la curva original a partir de los 48, 32, 24 y 16 coeficientes más altos de la Transformada Rápida de Fourier Directa; para lo cual se utiliza la subrutina SELECT. Como se puede apreciar en los resultados, los valores obtenidos al aplicar la Transformada Rápida de Fourier Inversa, son siempre complejos, de tal manera que con la Transformada Rápida de Fourier es posible recuperar la curva original a partir de las partes reales de la Transformada Inversa. Luego se hizo dibujar la curva original, con cada una de las curvas reconstituidas con las partes reales de la Transformada Inversa y con los 48, 32, 24 y 16 coeficientes, a partir de los cuales se puede observar que mientras menos sean los coeficientes con los cuales se trate de recuperar la curva original, la curva reconstituida menos se parece a la curva original. A partir de la pag. 102, se presentan los resultados obtenidos por el Ing. Gualberto Hidalgo en su Tesis de Grado, en la cual se procesó la misma curva, pero con la ayuda de la Transformada de Hadamard; se trató de recuperar la curva original a partir de los 48, 32, 24 y 16 coeficientes más altos de la Transformada de Hadamard Directa. De las curvas obtenidas, se puede observar que prácticamente se obtiene el mismo resultado con las dos transformadas, con la ventaja de que

con la Transformada de Hadamard se realizan menos operaciones y además que se trabaja solo con números reales.

```

90 CONTINUE
WRITE(3,11)
11 FORMAT(1HC,20(/),1X,'MUESTRAS',9X,'T.R.F.D.',7X,'T.R.F.D.' CON LOS
74A1', 3X,'T.R.F.I. DE LOS 4E',4X,'T.R.F.D. CON LO: 24',4X,'T.R.F.I.
8 DE LOS 24',/,33X,'VALORES MAS ALTOS',5X,'VALORES MAS ALTOS',5X,'V
9 VALORES MAS ALTOS',6X,'VALORES MAS ALTOS',//)
GO TO 100
99 WRITE(3,98)
98 FORMAT(10X,'CAPACIDAD EXCEDIDA EN EL NUMERO DE MUESTRAS, MAXIMO ES
52**20',/,20X,'TRABAJO TERMINADO')
GO TO 101
100 CONTINUE
READ(1,21) (X(I),I=1,NMR)
R1 *C=VAL(REFIR,P)
PI=3.141593
C=COS(2*PI/NMR)
B=SIN(2*PI/NMR)
OMEGA=CMPLX(C,-B)
K=NMR/2
DO 66 I=1,NMR
ARC=X(I)
ARD=0.0
66 XT(I)=CMPLX(AEC,ARD)
C CALCULO DEL LOGARITMO EN BASE 2 DEL NUMERO DE MUESTRAS IGUAL A N
MAR=1
N=0
6 IF(MAR*2-NMR)19,19,33
19 N=N+1
MAR=MAR*2
GO TO 6
33 CONTINUE
KC=K
CALL TRF(N,OMEGA,KC,XT)
DO 200 I=1,NMR
XT(I)=XT(I)/NMR
XTG(I)=XT(I)
200 CONTINUE
CALL SELFC(XT,XT1,M)
DO 800 I=1,NMR
XT1G(I)=XT1(I)
OMEGA=CMPLX(C,B)
CALL TRF1(N,OMEGA,KC,XT1,NMR)
CALL SFLFC1(X1,XT2,M/2)
DO 801 I=1,NMR
XT2G(I)=XT2(I)
CALL TRF1(N,OMEGA,KC,XT2,NMR)
DO 22 I=1,NMR
22 WRITE(3,23) X(I),XTG(I),XT1G(I),XT1(I),XT2G(I),XT2(I)
23 FORMAT(1X,F6-2,2X,2F10.4,2X,2F10.4,2X,2F10.4,2X,2F10.4,2X,2F10.4)
C INSTRUCCIONES PARA GRAFICAR LA CURVA ORIGINAL Y LA CURVA RECGNSTITUIDA
WRITE(3,990)
990 FORMAT(1HC,20(/),15X,'GRAFICO DE LA CURVA ORIGINAL (*),GRAFICO DE
2 LA CURVA RECGNSTITUIDA CON 16 COEFICIENTES (X)',/)
DO 991 LL=1,71
LINFA(LL)=RAYA
991 CONTINUE
WRITE(3,992)LINEA
992 FORMAT(20X,71A1)
DO 993 LL=1,71
993 LINFA(LL)=BLANCO
LINFA(36)=VFRTI
DO 994 I=1,NMR
MAXIMO=ABS(X(8))
LLL=35.0*(RFAL(XT2(I))/MAXIMO+1.0)+1.5

```

**ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL**  
**QUITO**

# POLITECNICA NACIONAL

## ESQUEMA

QUITO

```

LINEA(LLL)=REFCON
LL=35.0*(X(I)/MAXIMO+1.0)+1.5
LINEA(LLL)=XX
WRITE(3,592)LINEA
LINEA(LLL)=PLANCO
LINEA(LLL)=BLANCO
LINEA(36)=VERTI
994 CONTINUE
STOP
END

```

```

SUBROUTINE SFELECT(XI,XTI,M,
C=VELEX XI(64),XTI(64),AUX
COMMON NOECOR(200)
C=VON NMR
DIMENSION NSUBIN(64)
NA=NVE-1
DO 10 I=1,NMR
NSUBIN(I)=1
10 XTI(I)=XT(I)
DO 20 K=1,NA
L=K+1
DO 20 J=L,NMR
IF(CABS(XI(K))-CABS(XTI(J)))15,20,20
15 AUX=XTI(K)
XTI(K)=XTI(J)
XTI(J)=AUX
LUX=NSUBIN(K)
NSUBIN(K)=NSUBIN(J)
NSUBIN(J)=LUX
20 CONTINUE
KA=M+1
DO 25 I=1,NMR
25 XTI(I)=XT(I)
IF(N=NMR)26,35,35
26 DO 30 I=VA,NMR
K=NSUBIN(I)
30 XTI(K)=CPLX(0.0,0.0)
35 RETURN
END

```

GRAFICO DE LA CURVA ORIGINAL (\*).GRAFICO DE LA CURVA RECONSTITUIDA CON 48 COEFICIENTES (X)

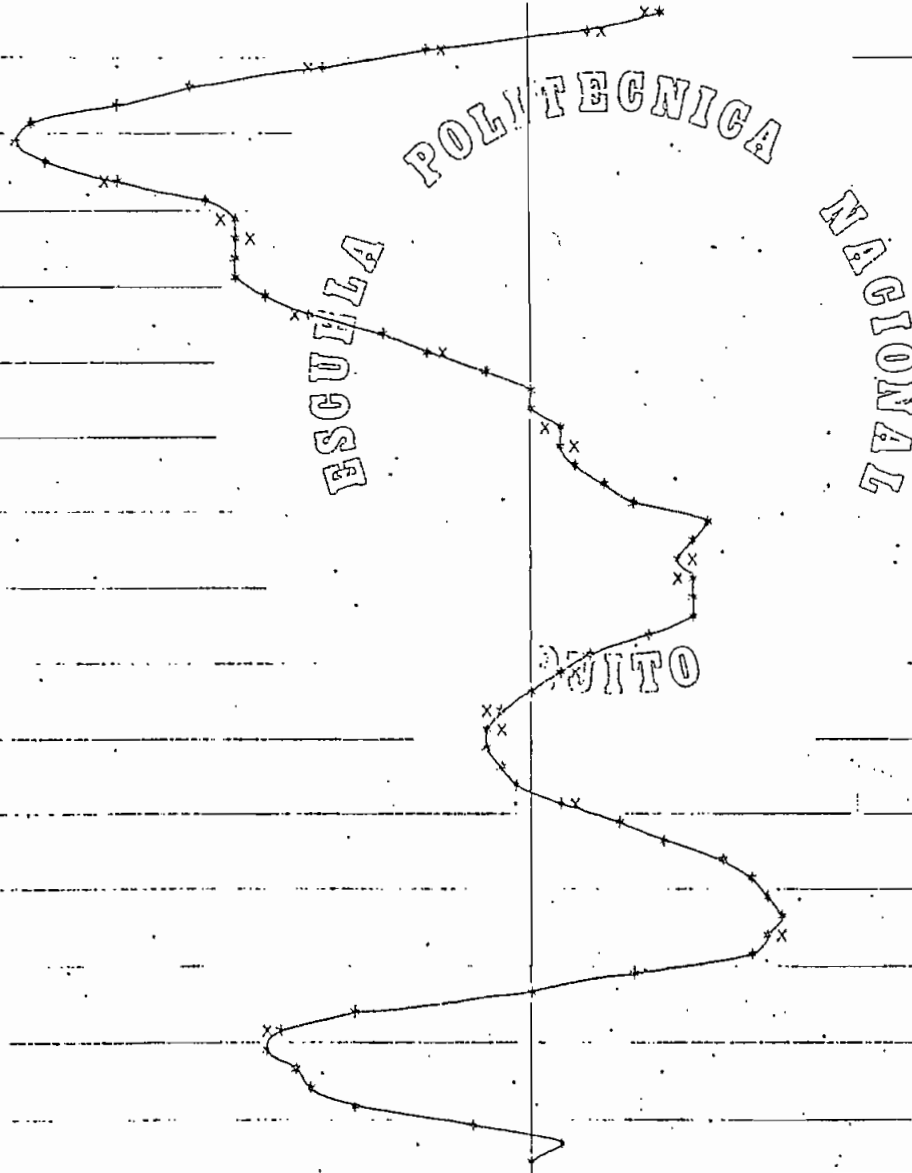
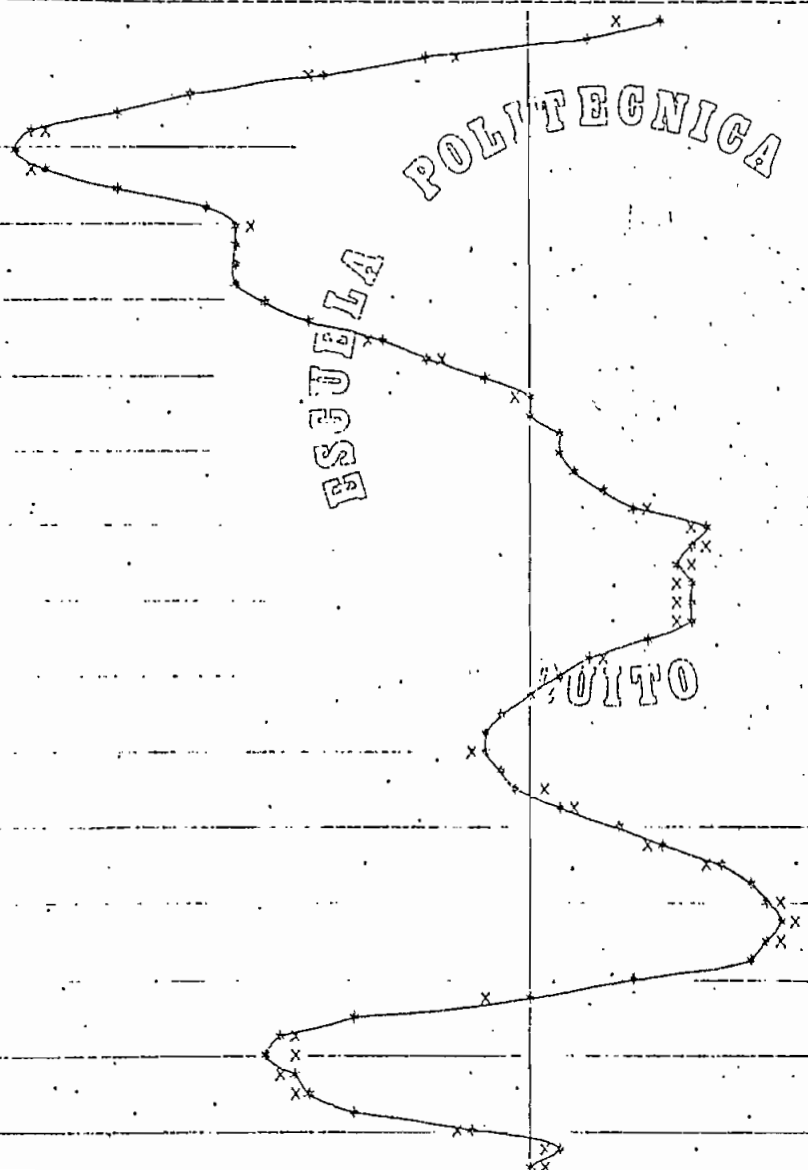




GRAFICO DE LA CURVA ORIGINAL (\*),GRAFICO DE LA CURVA RECONSTITUIDA CON 24 COEFICIENTES (x)

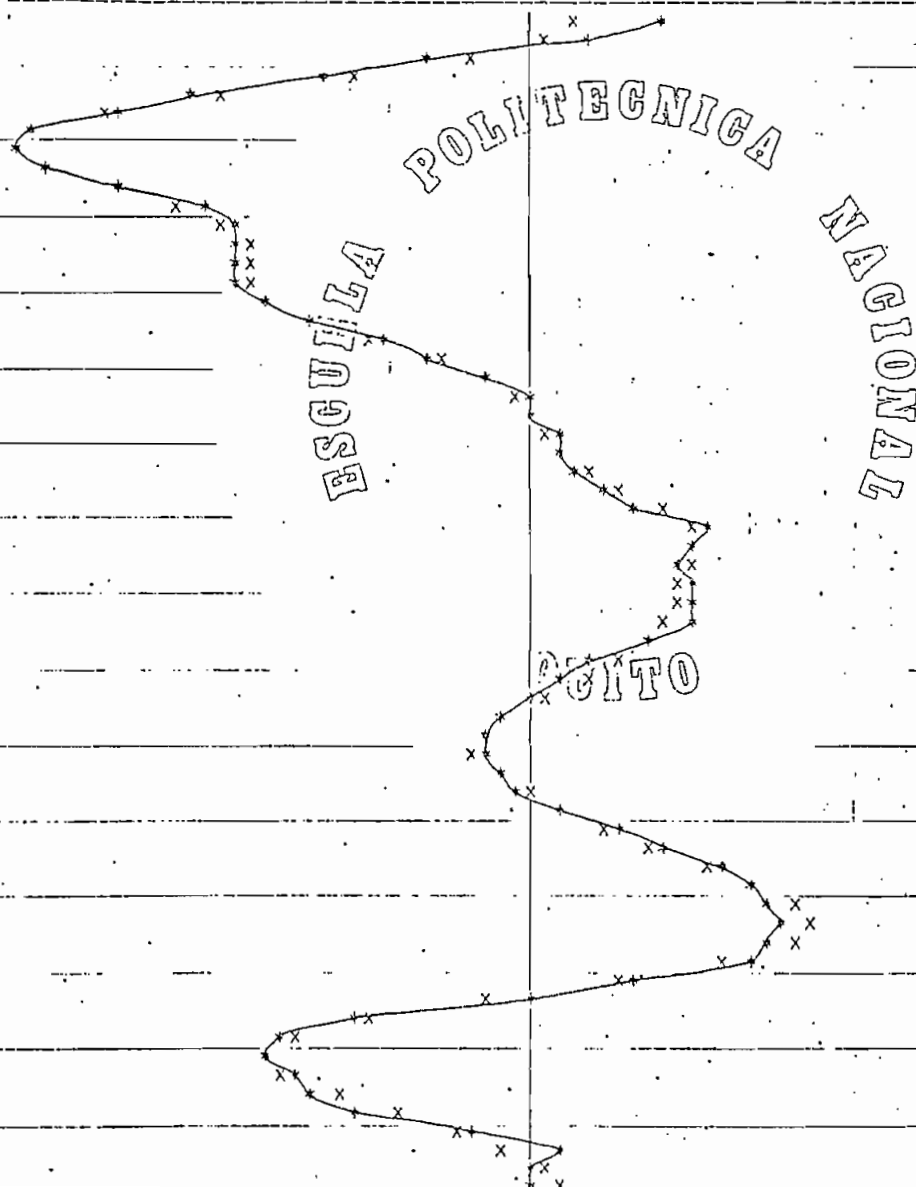


ESCUELA POLITECNICA NACIONAL

OITO



GRAFICO DE LA CURVA ORIGINAL (\*), GRAFICO DE LA CURVA RECONSTITUIDA CON 16 COEFICIENTES (x)



TRANSFORMADA DE HADAMARD Y GRAFICOS

ESPECTRO DE POTENCIA

24.626373 0.020664 0.233457 3.682827 70.193771 39.449356 235.012000 0.0

ESPECTRO DE FASE

-1.000000 1.000000 0.987297 -0.112360 0.499563 0.241805 -0.015567 0.0

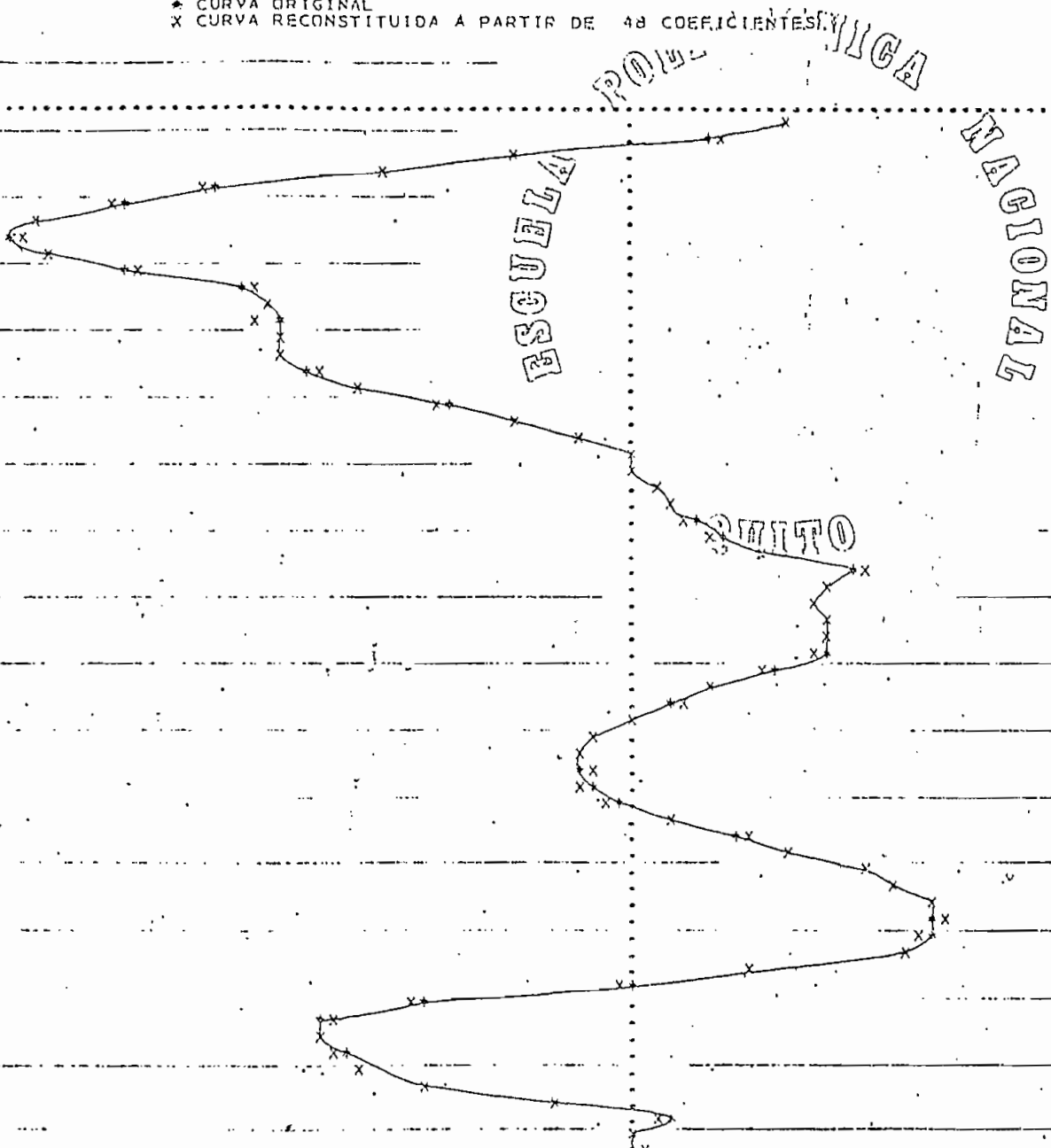
MUESTRAS	TRANS. DIRECTA	COEF. RETENIDOS	TRANS. INVERSA	COEF. RETENIDOS	TRANS. INVERSA
12.0000	-4.9625	-4.9625	11.6210	-4.9625	11.6210
6.0000	0.1434	0.0	6.5719	0.0	6.44
-0.0300	0.2844	0.0	-9.0781	0.0	-5.95
-19.5000	0.3906	0.3906	-19.2156	0.0	-14.88
-17.1000	1.5031	1.5031	-42.7531	1.5031	-31.86
-19.0000	-0.4719	-0.4719	-39.6781	0.0	-36.81
-46.2000	-0.9875	-0.9875	-46.3655	-0.9875	-44.44
-48.0000	-0.4750	-0.4750	-46.9031	0.0	-45.73
-45.0000	-0.7844	-0.7844	-45.4843	0.0	-42.99
-39.0000	1.4969	1.4969	-38.3218	1.4969	-41.99
-10.0000	3.1562	3.1562	-29.3343	3.1562	-30.27
-27.6000	-0.1375	0.0	-28.0593	0.0	-25.16
-27.3000	7.4500	7.4500	-28.6968	7.4500	-31.09
-27.3000	0.3875	0.3875	-27.2343	0.0	-31.09
-27.0000	1.0906	1.0906	-27.0593	1.0906	-25.17
-25.2000	-0.8094	-0.8094	-24.2097	-0.8094	-24.01
-21.0000	-5.0500	-5.0500	-20.0406	-5.0500	-14.90
-14.1000	0.1750	0.0	-15.1781	0.0	-15.95
-9.0000	0.7281	0.7281	-8.5406	0.0	-6.58
-4.5000	0.2969	-0.2969	-7.6406	0.0	-7.62
-0.3000	1.5906	1.5906	-0.3781	1.5906	2.30
0.0	0.6669	0.6669	-0.1406	0.0	1.25
2.4000	1.2312	1.2312	1.9044	1.2312	2.66
3.9000	0.1750	0.0	3.2344	0.0	1.61
4.5000	1.3281	1.3281	4.1856	1.3281	2.12
6.6000	0.3781	0.3781	6.0156	0.0	7.15
9.6000	1.4375	1.4375	10.2406	1.4375	10.37
17.1000	0.3625	0.3625	17.7781	0.0	15.31
15.0000	1.9250	1.9250	14.7406	1.9250	12.20
14.4000	0.1188	0.0	14.4406	0.0	17.20
14.7000	0.8594	0.8594	14.7781	0.8594	10.62
15.1000	0.4156	0.4156	14.8406	0.0	15.56
14.7000	-6.6219	-6.6219	13.5594	-6.6219	12.73
10.5000	-0.3531	-0.3531	10.1094	0.0	11.68
6.0000	-0.3625	-0.3625	5.8469	0.0	6.63
3.3000	-0.2937	-0.2937	4.3444	0.0	5.88
0.0	-0.1000	0.0	0.3094	0.0	-2.63
-3.0000	-0.1250	0.0	-3.1156	0.0	-3.66
-3.4000	-0.1221	0.0	-3.0906	0.0	-0.39
-3.6000	0.0994	0.0	-3.1031	0.0	-0.76
-3.0000	-1.3375	-1.3375	-4.1094	-1.3375	-7.03
-1.5000	-0.4812	-0.4812	-1.7219	0.0	-2.90
3.7000	-0.4344	-0.4344	3.4281	0.0	4.28
8.1000	-0.0571	0.0	0.9031	0.0	5.51
17.0000	-2.5344	-2.5344	12.0221	-2.5344	12.20
18.0000	0.0406	0.0	18.1656	0.0	17.13
20.1000	0.3688	0.3688	19.7781	0.0	17.79
22.5000	0.4562	0.4562	23.0281	0.0	22.71
21.4000	-9.8781	-9.8781	23.5760	-9.8781	26.75
22.5000	0.9719	0.9719	22.0947	0.9719	20.81
21.0000	-1.9000	-1.9000	20.7843	-1.9000	18.50
9.0000	0.1250	0.0	9.0744	0.0	13.50
0.0	4.5062	4.5062	-0.7406	4.5062	-5.26
-16.5000	-0.0250	0.0	-16.6781	0.0	-10.18
-24.0000	-0.2781	0.0	-23.1156	0.0	-20.44
-24.3000	-0.6969	-0.6969	-23.8656	0.0	-25.38
-22.2000	5.3312	5.3312	-22.5343	5.3312	-21.54
-21.0000	0.8187	0.8187	-20.0943	0.0	-20.89
-15.2000	1.9906	1.9906	-16.2218	1.9906	-13.42
-6.0000	-0.0219	0.0	-5.8594	0.0	-12.37
1.0000	5.0094	5.0094	2.3656	5.0094	0.25
0.0	0.3531	0.3531	-0.2844	0.0	1.30
-0.3000	0.6437	0.6437	1.1156	0.0	1.63
0.6000	-0.3250	-0.3250	0.5031	0.0	0.07

BOHNER ENGINE

WAG

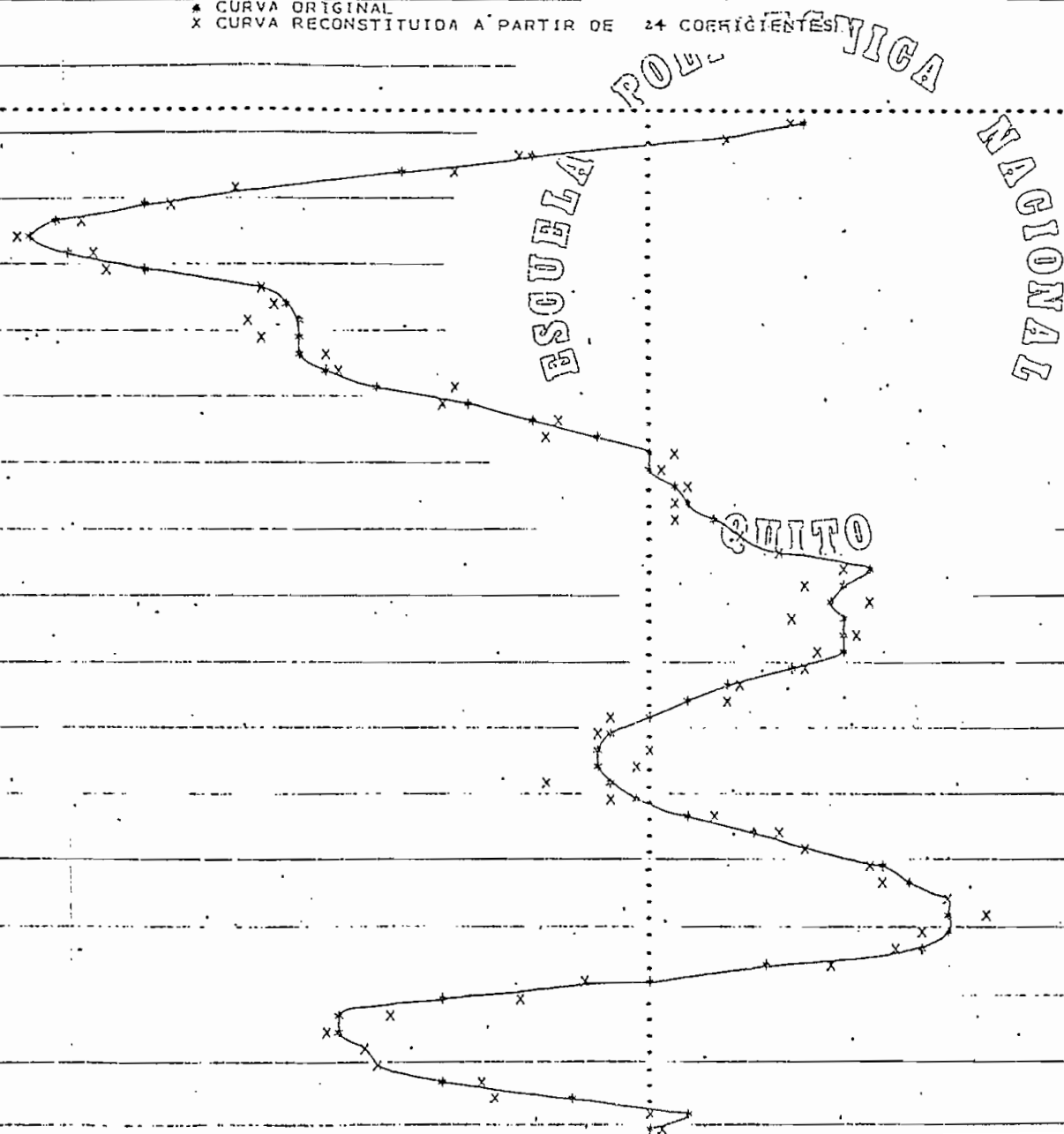
GRAFICOS

\* CURVA ORIGINAL  
x CURVA RECONSTITUIDA A PARTIR DE 48 COEFICIENTES



GRAFICOS

\* CURVA ORIGINAL  
x CURVA RECONSTITUIDA A PARTIR DE 24 CORRIENTES



TRANSFORMADA DE HADAMARD Y GRAFICOS

ESPECTRO DE POTENCIA

24.626773 0.020664 0.233457 3.682827 70.333771 29.449356 239.013000 0.0

ESPECTRO DE FASE

-1.000000 1.000000 0.987837 -0.112360 0.499563 0.241805 -0.015567 0.0

MUESTRAS	TRANS. DIRECTA	32 COEF. RETENIDOS	TRANS. INVERSA	16 COEF. RETENIDOS	TRANS. INVERSA
12.0000	-4.9625	-4.9625	11.5219	-4.9625	6.8125
6.0000	0.1438	0.0	7.5281	0.0	3.8188
-9.0000	0.2844	0.0	-9.5656	0.0	-7.2812
-10.5000	C.3906	0.0	-19.5443	0.0	-10.2750
-32.1000	1.5031	1.5031	-31.4343	1.5031	-32.0874
-30.0000	-0.4719	0.0	-28.6656	0.0	-35.0812
-46.2000	-0.9875	-0.9875	-47.1968	0.0	-46.1812
-48.0000	-0.4750	0.0	-48.4030	0.0	-49.1749
-35.0000	-0.7844	-0.7844	-41.6593	0.0	-40.8374
-30.0000	1.4969	1.4969	-41.5531	1.4969	-37.8437
-30.0300	3.1562	3.1562	-29.2718	3.1562	-34.3437
-27.6000	-0.1375	0.0	-28.7156	0.0	-31.3459
-27.1700	7.4500	7.4500	-30.0781	7.4500	-32.3374
-27.1000	0.3475	0.0	-26.7343	0.0	-29.3437
-27.0000	1.0406	1.0406	-26.6406	0.0	-25.8437
-25.2000	-0.8094	-0.8094	-23.7468	0.0	-22.8499
-21.0000	-5.0500	-5.0500	-19.1656	-5.0500	-7.8275
-14.1000	0.1750	0.0	-15.9769	0.0	-10.2312
-0.0000	0.7281	0.7281	-7.8781	0.0	-6.3688
-4.5000	-0.2069	0.0	-5.1594	0.0	-6.3625
-0.3000	1.5906	1.5906	0.9406	1.5906	5.3475
0.0	0.6969	0.6969	0.9719	0.0	2.3937
2.4000	1.2312	1.2312	1.2531	0.0	6.2562
3.0000	0.1750	0.0	1.6344	0.0	2.8425
4.5000	1.3281	1.3281	5.0291	0.0	1.5375
6.6000	0.3781	0.0	5.7469	0.0	4.5312
9.6000	1.4375	1.4375	10.3406	0.0	7.6687
17.1000	0.3625	0.0	17.0744	0.0	10.6625
15.0000	1.9250	1.9250	12.0719	1.9250	6.6875
14.4000	0.1188	0.0	16.1281	0.0	9.6212
14.7000	0.8594	0.8594	16.2843	0.0	12.8187
19.1000	0.4156	0.0	14.2156	0.0	15.8125
14.7000	-6.6219	-6.6219	12.2781	-6.6219	7.4062
10.5000	-0.3531	0.0	10.7344	0.0	4.4125
6.0000	-0.7625	0.0	6.5406	0.0	8.8750
3.3000	-0.2937	0.0	4.5469	0.0	5.8812
0.0	-0.1000	0.0	-2.9656	0.0	-3.5687
-3.0000	-0.1250	0.0	-2.1719	0.0	-6.5625
-3.4000	-0.0021	0.0	-2.9571	0.0	-2.1000
-4.6000	0.0594	0.0	-1.7094	0.0	-5.0538
-3.0000	-1.3375	-1.3375	-3.1406	0.0	-1.0583
-1.5060	-0.4812	-0.4812	-3.2944	0.0	1.9375
3.1000	-0.4344	0.0	3.5219	0.0	5.0750
8.1300	-0.0531	0.0	9.4021	0.0	6.0687
12.0000	-2.5344	-2.5344	11.2031	-2.5344	15.5687
19.0000	0.0406	0.0	19.8718	0.0	18.5625
20.1000	0.3608	0.0	19.6406	0.0	21.7600
22.5000	0.4562	0.0	22.2943	0.0	24.6537
21.4000	-9.8781	-9.8781	21.9781	-9.8781	28.1937
22.5000	0.9719	0.9719	20.8468	0.0	25.2000
21.0000	1.9000	1.9000	19.0156	1.9000	14.1000
0.0000	0.1250	0.0	10.7594	0.0	11.1062
0.0	4.5062	4.5062	-3.9031	4.5062	-6.7812
-16.5000	-0.0250	0.0	-15.8468	0.0	-9.7750
-24.0000	-0.2781	0.0	-19.3456	0.0	-20.8749
-24.3000	0.6969	0.6969	-25.2843	0.0	-23.8687
-22.2000	5.3312	5.3312	-24.4156	5.3312	-21.8537
-21.0000	0.8187	0.8187	-10.5968	0.0	-18.8599
-15.9000	1.9906	1.9906	-13.1781	1.9906	-15.4000
-6.0000	-0.0219	0.0	-8.1094	0.0	-12.4662
3.0000	-5.0094	5.0094	0.2406	-5.0094	-4.5937
0.0	0.3931	0.0	2.7219	0.0	-1.6000
-0.7000	0.6437	0.6437	-0.6469	0.0	1.9800
0.6000	-0.3250	0.0	1.3844	0.0	4.8538

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA







BIBLIOGRAFIA

- 1 Fast Fourier transforms for fun and profit, W.M. Gentleman and G. Sande, Spartan, 1966.
- 2 Circuit Matrices and linear Space Vectors, Lawrence P. Huelsman, McGraw-Hill, 1963.
- 3 Digital Signal Processing, Alan V. Oppenheim and Ronald W. Schafer, Prentice-Hall, INC, 1975.
- 4 Digital Signal Processing, Lawrence R. Rabiner and Charles M. Rader, IEEE PRESS, 1972.
- 5 Outline of Fourier Analysis, Hwei P. Hsu, Simon & Schuster, INC, 1967.
- 6 Signal Systems and Comuncations, B.P. Lathi, John Wiley & Sons, INC, 1965.
- 7 La Transformada de Hadamard, Tesis del Ing. Gualberto Hidalgo, Escuela Politécnica Nacional , Quito, 1974.
- 8 Transactions of Computers, IEEE, January 1974, Vol. c-23, number 1.