

TESIS DE GRADO PREVIA A LA OBTENCION
DEL TITULO DE INGENIERO EN LA ESPE
CIALIZACION DE INGENIERIA ELECTRICA

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL

ANALISIS DEL SISTEMA MECANICO
Y ELECTRICO DE UN FUNICULAR

MAURICIO TROYA MENA

Quito, noviembre de 1970

Certifico que el Sr. Mauricio Troya Mena,
ha realizado personalmente esta Tesis,
bajo mi control como Director de Tesis.

Quito, noviembre de 1970

Ing. Jaime Velázquez.

INDICE GENERAL

	Página
Introducción	1
CAPITULO I	
ASPECTOS GENERALES	
1.0 Objeto del funicular	2
1.1 Situación geográfica	3
1.2 Condiciones atmosféricas	3
1.2.1 La presión atmosférica	4
1.2.2 Fórmula para el cálculo de las presiones atmosféricas	4
1.2.3 Presiones atmosféricas mínimas en las estaciones ..	6
1.2.4 Temperatura en las estaciones	7
1.3 Características de la vía	9
1.4 Tipos de coches a usarse	12
1.5 Funcionamiento del funicular	12
1.6 Utilización de la energía	15
CAPITULO II	
CALCULO DE LA POTENCIA	
2.0 Datos previos al cálculo	18
2.0.1 Datos impuestos	18
2.0.2 Ecuación de la tensión del cable ascendente	18
2.0.3 La longitud del cable	24

	Página
2.0.4 Ecuación de la tensión del cable descendente	28
2.0.5 Cálculo de la posición del extremo del cable ascen- dente con respecto al extremo del cable descendente	29
2.0.6 Tensiones en el cable ascendente debidas al peso del coche	32
2.0.7 Tensiones en el cable descendente debidas al peso del coche	33
2.0.8 Tensión total en el cable ascendente	35
2.0.9 Tensión dinámica al momento de arranque para el co- che ascendente	39
2.0.10 Tensión al momento de llegada (frenado) para el co- che ascendente	40
2.0.11 Cálculo de la tensión en el ramal descendente	43
2.0.12 Tensión dinámica al arranque para el coche descenden- te	48
2.0.13 Tensión dinámica al momento de llegada (frenado) pa- ra el coche descendente	49
2.0.14 Ecuación de la potencia	51
2.1 Potencia del motor	54
2.2 Condiciones de arranque y frenado	55
2.2.1 Ecuación del módulo de inercia	64
2.3 Cálculo de la transmisión y engranajes	67
2.3.1 Dibujo esquemático del mecanismo a operar	68
2.3.2 Dibujo esquemático de los engranajes	69
2.3.3 Deducción de las fórmulas de velocidad y fórmula de los radios	71

CAPITULO III

SELECCION DEL TIPO DEL MOTOR

3.0	Condiciones generales de trabajo impuestas	208
3.1	La máquina de corriente continua	209
3.1.1	Ecuación de la f.c.e.m.	210
3.1.2	Potencia desarrollada	212
3.2	Máquina serie, derivación y compound	213
3.2.1	Características del motor serie	214
3.2.2	Factibilidad del motor serie	217
3.2.3	Características del motor shunt	226
3.2.4	Factibilidad del motor shunt	229
3.2.5	Características del motor compound	235
3.2.6	Factibilidad del motor compound	243
3.3	Ventajas y desventajas	248
3.4	Sistemas de rectificación de corriente	249
3.4.1	Sistemas mecánicos de rectificación	249
3.4.2	Rectificadores electrónicos	250
3.5	Máquinas de corriente alterna	254
3.5.1	Motores monofásicos con colector en conexión serie	255
3.5.2	Motores monofásicos de repulsión	259
3.5.3	Motores monofásicos	261
3.6	Máquinas trifásicas de corriente alterna	265
3.6.1	Motores trifásicos con colector en conexión shunt .	265

	Página
3.6.2 Motores trifásicos con colector en conexión serie .	269
3.6.3 Motores trifásicos asincrónicos	271
3.6.4 Motores trifásicos síncronos	278
3.7 Sistema Ward - Leonard	279
3.8 Equipo más ventajoso. Análisis del sistema Ward - Leonard .	285
3.8.1 Algebra de bloques	287
3.8.2 Sistema Ward - Leonard. Análisis del generador	292
3.8.3 Sistema Ward - Leonard. Análisis del motor	295
3.8.4 Sistema Ward - Leonard. Análisis completo del sistema	302

CAPITULO IV

ACCIONAMIENTO

4.0 Tipos más usuales de freno	306
4.0.1 El frenado mecánico	306
4.0.2 El frenado eléctrico	314
4.0.3 Frenado por recuperación de energía	316
4.0.4 Frenado por inversión de corriente	318
4.0.5 Frenado por corrientes parásitas	319
4.1 Sistemas de freno para el funicular	319
4.1.1 Frenado por recuperación de energía para el funi cular	322
4.1.2 Frenado reostático y por inversión de corriente pa ra el funicular	323
4.2 Dispositivos de puesta en marcha y arranque	326

4.2.1	Caso más desfavorable, ascendente lleno, descendente vacío	328
4.2.2	Determinación de las constantes	330
4.2.3	Sistema automático de arranque con carga variable .	334
4.3	Control de velocidad	336
4.3.1	Sistemas de segundo orden	344
4.3.2	Análisis de la ecuación diferencial de segundo orden del control de velocidad	358
4.3.3	Sistema Ward - Leonard. Constantes de funcionamiento	361
4.3.4	Conclusión	364

INTRODUCCION

El presente trabajo tiene por objeto analizar con cierta profundidad el sistema mecánico y eléctrico del Funicular a Cruz Loma. La tesis consta de cuatro capítulos; en el primer capítulo se determinan los as pectos generales y características del sistema, en el segundo capítulo, bajo el título de cálculo de la potencia, se hace un estudio sistemáti co de los esfuerzos de tensión mecánica en el cable para distintas con diciones y el análisis de la cadena cinemática que comprende los engra najes, poleas, embrague y freno mecánico, así como se estudia el calen tamiento y enfriamiento de las máquinas eléctricas. En el capítulo ter cero se hace la selección y el estudio de factibilidad del tipo de mo tor a emplearse. Finalmente, en el capítulo cuarto se estudia, propia mente, el accionamiento, sistemas de frenado, dispositivos de marcha y arranque y el análisis exhaustivo del sistema Ward - Leonard.

Debo agradecer, por la ayuda prestada en el desarrollo de esta tesis al Ing. Jaime Velázquez, director de la misma, y al Ing. Oscar Puig quien me facilitó los datos iniciales para el cálculo.

CAPITULO I

ASPECTOS GENERALES

1.0 OBJETO DEL FUNICULAR

Funicular es la palabra con la que se suele designar a los vehículos de tracción movidos por cable.

"Los ferrocarriles funiculares constituyen el medio de transporte más ventajoso para ganar las cumbres o puntos altos de las montañas con poco recorrido". (1)

El sistema en estudio consta de dos vagones que se mueven sobre rieles accionados por medio de un cable de acero desde una cabina situada en la cima de Cruz Loma. En la misma se encuentran todos los dispositivos de comando y maniobra.

El objeto del funicular será trasladar personas desde la estación inferior, situada al extremo occidental de la calle La Gasca, en la ciudad de Quito, hasta la estación superior. Este sistema de transporte permitirá el acceso rápido y seguro al lugar indicado, desde el cual se puede admirar el pintoresco paisaje y participar en los juegos, pasatiem

(1) Hütte, Manual del Ingeniero. Editorial Gustavo Gili S.A., 1950, Tomo III pág. 1374.

pos y distracciones de que se dotará a la estación superior.

1.1 SITUACION GEOGRAFICA

Estación inferior: 78° 31' 4,8" Longitud occidental
0° 11' 18,9" Latitud sur.

Estación superior: 78° 31' 59,61" Longitud occidental
0° 11' 4,66" Latitud sur.

Alturas sobre el nivel del mar (2)

Estación inferior: Cota del proyecto y del terreno: 3.134,00 mts.

Estación superior: Cota del proyecto y del terreno: 3.944,00 mts.

Cruz Loma es observable desde casi todos los lugares de la ciudad de Quito y es frecuentemente visitada por excursionistas y paseantes. Hay un sinnúmero de senderos que llegan hasta la cima desde distintos puntos como los Tanques del Placer, Universidad Central, La Gasca, Cotocollao, etc.

1.2 CONDICIONES ATMOSFERICAS

Actualmente no existe una estación meteorológica en la zona del Ruku Pichincha. Los datos de Quito (2.818 mts.) han sido proporcionados por el Observatorio Astronómico.

(2) Ing. Oscar Puig, Funicular a Cruz Loma, 1966, Tomo I, pág. 30

1.2.1 LA PRESION ATMOSFERICA

Los valores de presión obtenidos son los siguientes:

<u>Año 1965</u>	Quito (2.818 mts.)	<u>1966</u>	<u>1967</u>
Presión atmosférica media:	547,7 mm Hg.	548 mm Hg.	547,8 mm Hg.
máxima:	550,6 mm Hg.	550,8 mm Hg.	551,1 mm Hg.
mínima:	540,0 mm Hg.	544 mm Hg.	544 mm Hg.

Como el caso más desfavorable es de 540 mm Hg este valor nos servirá para calcular las presiones mínimas de las estaciones superior e inferior.

1.2.2 FORMULA PARA EL CALCULO DE LAS PRESIONES ATMOSFERICAS

La presión atmosférica depende de la densidad del aire, de la altura, de su temperatura y de la humedad. Consideraremos la altura como único factor determinante de las variaciones de densidad del aire tomando como datos conocidos los registrados por el Observatorio Astronómico de Quito.

Por el principio de equilibrio de fuerzas, las presiones de la columna de aire se igualan con las del barómetro de mercurio, estableciéndose por la altura barométrica la medida de la presión atmosférica.

Esto sirve para establecer una proporción entre los pesos específicos y las alturas, esto está dado por la ecuación:

$$(1.2.1) \quad \frac{\rho}{\rho'} = - \frac{dh}{dz}$$

Siendo:

ρ peso específico del aire.

ρ' peso específico del mercurio.

dh diferencia de alturas. (barométricas).

dz diferencia de alturas entre dos localidades.

El signo - se debe a que conforme aumenta h disminuye z .

A temperatura constante se puede obtener una proporción similar a la ecuación (1.2.1) estableciendo un peso específico ρ_0 donde la altura barométrica es h_0 y ρ donde sea h .

Así tendremos:

$$(1.2.2) \quad \frac{\rho_0}{h_0} = \frac{\rho}{h}$$

De las proporciones (1.2.1) y (1.2.2) se deduce lo siguiente:

De (1.2.1) tendremos (1.2.3) $dz = - \frac{dh}{\rho} \rho'$; despejando ρ de (1.2.2)

y reemplazando en (1.2.3) da $\rho = \frac{h}{h_0} \rho_0$ (1.2.4) y luego, se obtiene

la ecuación $dz = - \frac{\rho' h_0}{\rho_0 h} dh$ (1.2.5). Integrando (1.2.5) entre h y

$$h_0 \quad z - z_0 = \int_h^{h_0} - \frac{\rho' h_0 dh}{\rho_0 h} = - \frac{\rho' h_0}{\rho_0} \left[L_n h - L_n h_0 \right]$$

$$\text{Y finalmente} \quad z - z_0 = \frac{\rho' h_0}{\rho_0} \left[L_n h_0 - L_n h \right] \quad (1.2.6)$$

El peso específico del aire ρ_0 varía según la altura. Para ello al ni

vel del mar $\rho = 0,001293 \text{ gms/cm}^3$.

Como conocemos la presión mínima en Quito $\rho = 540 \text{ mm Hg}$, podemos calcular ρ_0 para Quito según (1.2.2)

$$\frac{760 \text{ mm Hg}}{0,001293} = \frac{540 \text{ mm Hg}}{\rho_0}$$

Así,

$$\rho_0 = \frac{540 \times 0,001293}{760} \text{ gms/cm}^3$$

$$\rho_0 = 0,000918 \text{ gms/cm}^3$$

Reemplazamos los datos en la fórmula (1.2.6) con lo siguiente:

$$z_0 = 2.818 \text{ mts.}$$

$$\rho' = 13,6 \text{ gms/cm}^3$$

$$h_0 = 540 \text{ mm Hg } \text{ ó } 0,54 \text{ m Hg}$$

$$\rho_0 = 0,000918 \text{ gms/cm}^3$$

$$z - 2.818 = \frac{13,6 \times 0,54}{0,000918} \left[\text{Ln } 0,54 - \text{Ln } h \right]$$

$$z = 2.818 - 4.929,52 - 8.000 \text{ Ln } h$$

$$z = - 2.111,5 - 8.000 \text{ Ln } h$$

$$(1.2.7) \quad \text{Ln } h = - \frac{z + 2.111,5}{8.000}$$

1.2.3 PRESIONES ATMOSFERICAS MINIMAS EN LAS ESTACIONES

Estación inferior, Altura $z = 3.134 \text{ mts.}$

$$\text{Según (1.2.7)} \quad \text{Ln } h = - \frac{3.134 + 2.111,5}{8.000}$$

$$\text{Ln } h = - 0,655$$

$$h = 0,510 \text{ m Hg} = 519 \text{ mm Hg}$$

El Peso específico

$$\rho = \frac{519 \times 0,00129}{760} = 0,00088 \text{ gms/cm}^3$$

Estación superior, Altura $z = 3.944$ mts.

Según (1.2.7) $\text{Ln } h = - \frac{3.944 + 2.111,5}{8.000}$

$$\text{Ln } h = = 0,757$$

$$h = 0,469 \text{ m Hg} = 469 \text{ mm Hg}$$

El Peso específico

$$\rho = \frac{469 \times 0,00129}{760} = 0,0008 \text{ gms/cm}^3$$

En idéntica forma se calculó la presión específica atmosférica media, la misma que es la siguiente:

Estación inferior $h_m = 527 \text{ mm Hg}$

Estación superior $h_m = 474 \text{ mm Hg}$

Evidentemente la presión atmosférica influye en los rendimientos de las máquinas puesto que la evacuación de calor está íntimamente relacionada con la misma.

1.2.4 TEMPERATURA EN LAS ESTACIONES

Se acepta la norma de variación de temperatura ambiente con la altura que dice: "cada 200 mts. de altura la temperatura baja 1°C. La temperatura mínima al césped puede llegar hasta - 10°C en la cima en los días

especialmente fríos.

$$(1.2.8) \quad \Delta t = \frac{\Delta h}{200}$$

Estación inferior $\Delta h = 3.134 - 2.818 = 316$ mts.

$$h = 3.134 \text{ mts.} \quad \Delta t = \frac{316}{200} = 1,58^\circ\text{C}$$

Estación superior: $\Delta h = 3.944 - 2.818 = 1.126$ mts.

$$h = 3.944 \text{ mts.} \quad \Delta t = \frac{1.126}{200} = 5,63^\circ\text{C}$$

Los valores de temperatura obtenidos para Quito son los siguientes:

1965 Temperatura ambiente media: 13,5 °C

máxima: 24,9 °C

mínima: 3,2 °C

al césped mínima: - 2,2 °C

1966 Temperatura ambiente media: 13,6 °C

máxima: 25,9 °C

mínima: 2,5 °C

al césped mínima: - 3,4 °C

1967 Temperatura ambiente media: 13,5 °C

máxima: 25,0 °C

mínima: 2,8 °C

al césped mínima: - 3,0 °C

Promedios generales de temperatura:

Temperatura ambiente media: 13,5 °C

máxima: 25,0 °C

mínima: 2,8 °C

al césped mínima: - 3,0 °C

De acuerdo con estos datos las temperaturas de las estaciones serán:

Estación inferior:

Temperatura ambiente media: $13,5 - 1,58 = 12$ °C

máxima: $25,0 - 1,58 = 23,5$ °C

mínima: $2,8 - 1,58 = 1,2$ °C

al césped mínima: $- 3,0 - 1,58 = - 4,5$ °C

Estación superior:

Temperatura ambiente media: $13,5 - 5,63 = 7,9$ °C

máxima: $25,0 - 5,63 = 19,4$ °C

mínima: $2,8 - 5,63 = - 2,8$ °C

al césped mínima: $- 3 - 5,63 = - 8,63$ °C

Como datos interesantes van a continuación los valores de humedad relativa y lluvia para Quito.

<u>1965</u>	Humedad promedio: 76,1%	mínima: 31 %	lluvia 1.279 mm
<u>1966</u>	" " : 79 %	" : 28 %	" 988 mm
<u>1967</u>	" " : 77,3%	" : 27 %	" 907 mm

1.3 CARACTERISTICAS DE LA VIA

Las características del perfil seleccionado permiten acomodar, a base de pocos rellenos y cortes, la línea real a la línea exigida por la ca

tenaria del cable para que no se produzcan levantamientos o sobrepre-
siones en las poleas de apoyo por las cuales circula el cable a lo lar-
go de todo el trayecto. Se ha establecido, con aceptable aproximación,
una curva parabólica en lugar de una cicloide o de una catenaria que
resultan complicadas para los cálculos. De acuerdo con las normas esta-
blecidas, la siguiente ecuación es fácil de manejar y se ajusta al per-
fil del terreno con gran aproximación. (3)

$$y = 1,008718 \cdot 10^{-4} x^2 + 0,29 x \quad (1.3.1)$$

De la misma ecuación y por integración se desprende que la línea del
perfil tiene una longitud $s = 1.925,944$ mts. (4)

En el punto medio de la vía existirá un tramo de desvío con el fin de
permitir el cruce de los coches ascendente y descendente que circulan
por la misma vía. Este tramo añade a la longitud s pocos cms., la
misma que llega a ser $1.926,04$ mts. Diagrama (1.3.1)

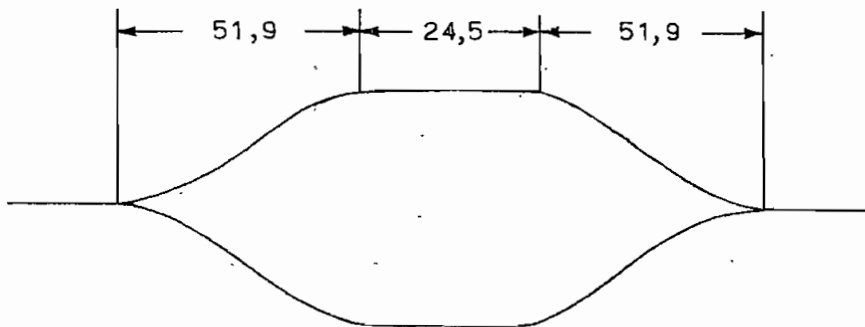
(3) Ing. Oscar Puig, Funicular a Cruz Loma, 1966, Tomo I, pág. 29.

(4) Id. Pág. 34.

TABLA DE VALORES PARA EL GRAFICO DEL PERFIL DE LA LINEA DEL FUNICULAR (5)

X	Y	COTAS	PENDIENTES	%
0	0	3.134,00	0,29	29
200	62,03	3.196,03	0,3304	33,04
400	132,14	3.266,14	0,3707	37,07
600	210,31	3.344,31	0,4010	40,10
800	296,56	3.430,56	0,4514	45,14
1.000	390,87	3.524,87	0,4917	49,17
1.200	493,26	3.627,26	0,5321	53,21
1.400	603,71	3.737,71	0,5724	57,24
1.600	722,23	3.856,23	0,6128	61,28
1.740	810,0	3.944,0	0,6410	64,10

DIAGRAMA (1.3.1) TRAMO DE DESVIO



(5) Ing. Oscar Puig, Funicular a Cruz Loma, 1966 Tomo I, pág. 35 y 210

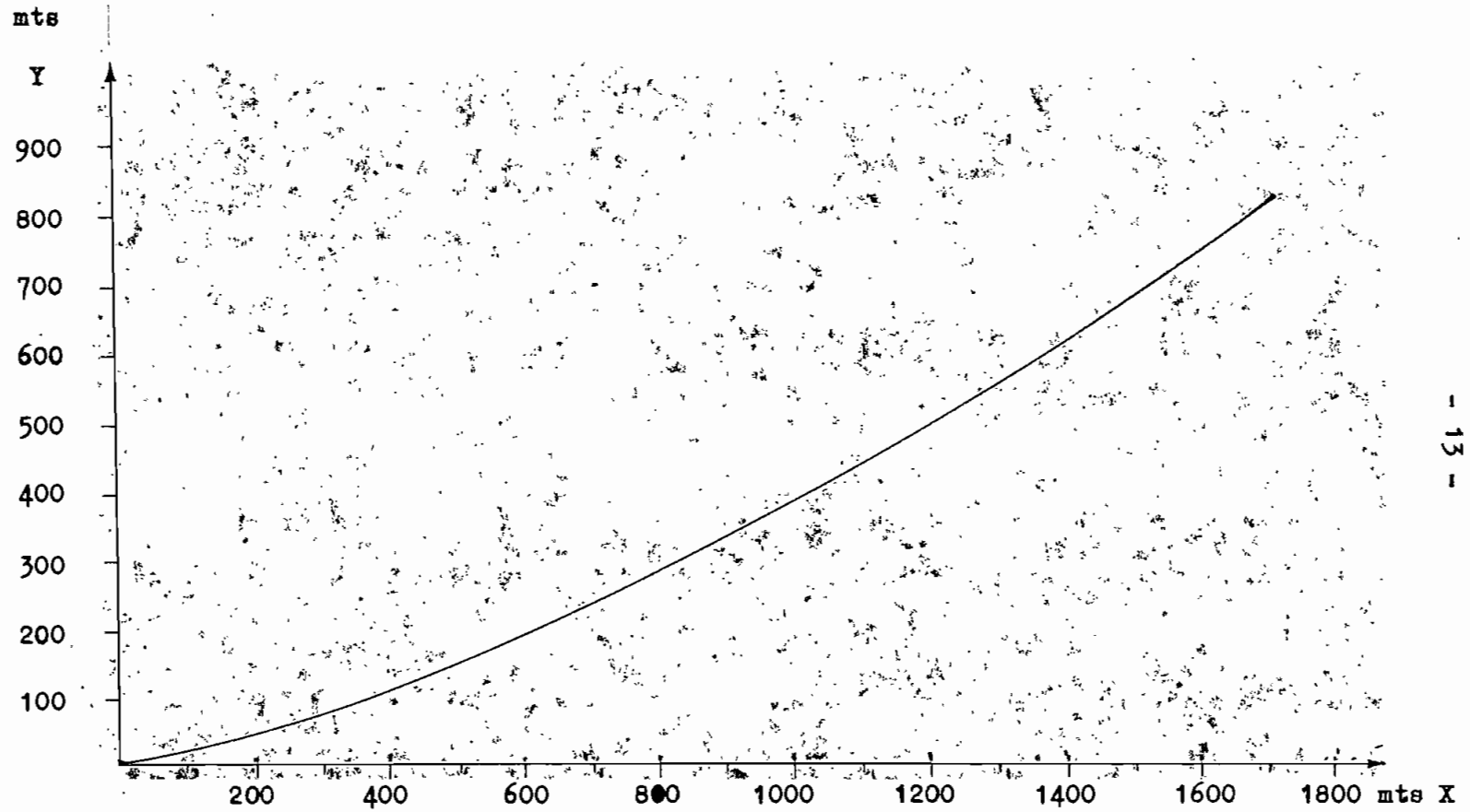


DIAGRAMA (1.3.2) PERFIL DE LA LINEA FUNICULAR

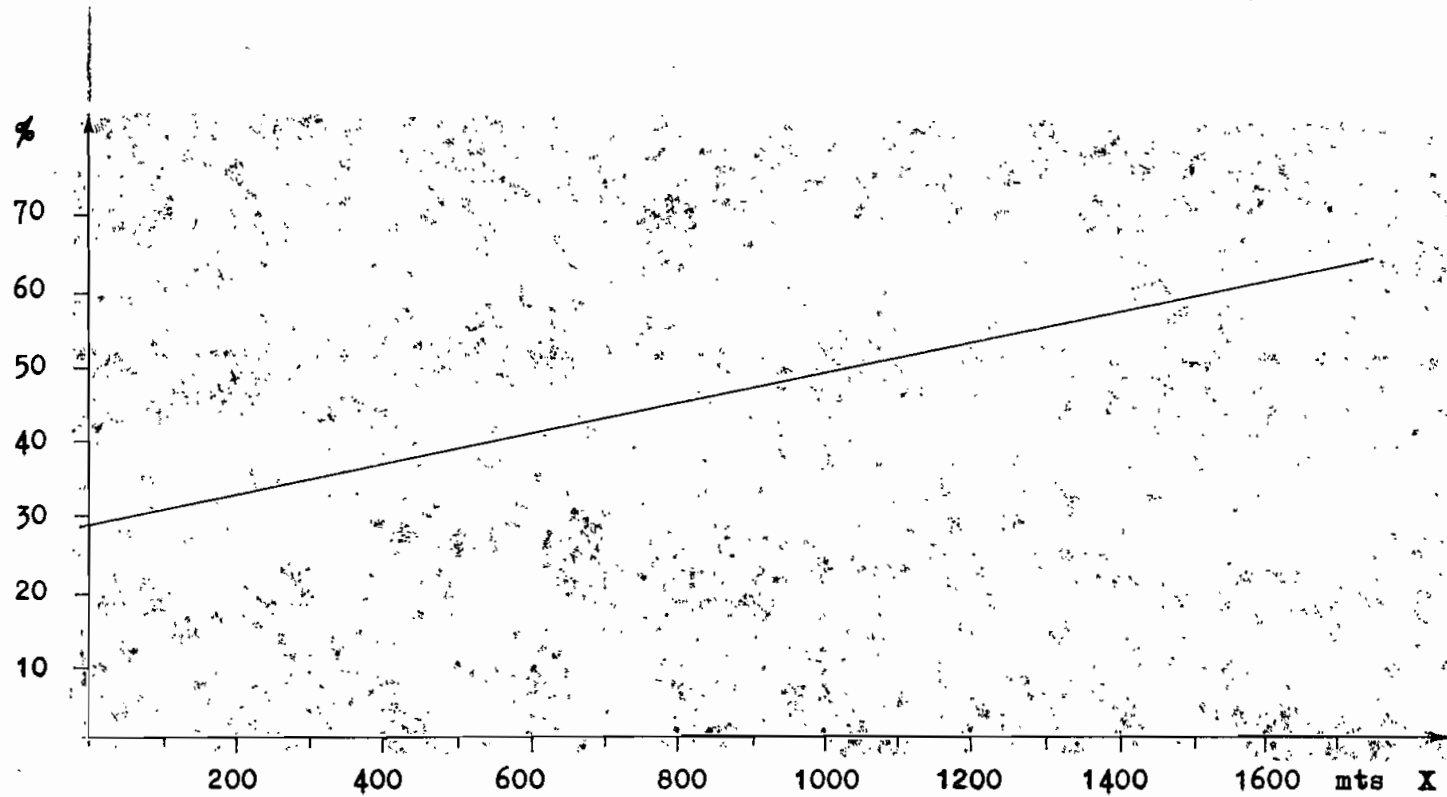


DIAGRAMA (1.3.3) DE PENDIENTES

cerca del Estadio Universitario y la subestación N° 11 en la Calle Selva Alegre.

De la subestación N° 9 se tomará un circuito primario hasta la estación superior del funicular a 6,3 KV, en este sitio se instalará una cámara de transformación para la distribución de la energía. El cálculo del tendido de la línea plantea interesantes problemas mecánicos por la fuerte pendiente de la zona de instalación.

Los coches tomarán energía de una línea de captación continua instalada junto a los rieles y convenientemente resguardada de cualquier contacto fortuito. Para mejorar la regulación de tensión, en esta línea, se podrán realizar varias tomas desde transformadores colocados en puntos diferentes del tendido eléctrico. La corriente proporcionada a los coches servirá para darles luz eléctrica en el interior y los faros de guía, calefacción y aparatos de acondicionamiento de aire, sistemas de comunicaciones y el accionamiento del sistema de frenado contra riel.

De la misma manera la corriente de la estación superior alimentará la cámara de transformación con todos los dispositivos, para el accionamiento del sistema motriz de la casa de máquinas. La corriente suministrada proporcionará luz, calefacción, acondicionamiento de aire y todos los servicios que demanden energía.

Es indispensable conocer con exactitud la potencia que demanda el sistema y la energía consumida para los cálculos económicos. La parte co

rrespondiente al estudio del frenado tiene, por muchas causas, importancia grande: proteger vidas humanas, lo que implica esmerarse en poner las máximas precauciones. Un solo sistema de frenado traería consigo muchos riesgos que no se deben correr. Hay que disponer de varias posibilidades de detención y frenado de los coches para así dar una mayor garantía de seguridad.

BIBLIOGRAFIA

1. Hütte, Manual del Ingeniero, Editorial Gustavo Gili, Barcelona 1950, 2a Edición, Tomo III.
2. Ing. Oscar Puig, Funicular a Cruz Loma, 1966, Tomos I y II.
3. Observatorio Astronómico de Quito, Boletines, 1965, 1966, 1967.
4. Observatorio Astronómico de Quito, Observaciones Meteorológicas, años 1965, 1966, 1967.
5. J. de la Puente Larios, Compendio de Física Elemental, Casa Editorial Bosh, Barcelona 1949, 5a Edición.
6. Organizzazione Internazionale dei Transporti a Fune, 1965, 1a. Parte, artículo 2.1.6.
7. Habegger Thun, Maschinenfabrik, Switzerland. Catálogos 1966.

CAPITULO II

CALCULO DE LA POTENCIA

2.0 DATOS PREVIOS AL CALCULO

2.0.1 DATOS IMPUESTOS

Aceleración de arranque	$a = 0,345 \text{ m/seg}^2$
Velocidad de régimen	$v = 3 \text{ m/seg}$
Ecuación del perfil	$y = 1,008718 \cdot 10^{-4} x^2 \quad 0,29 x$
Peso del coche lleno	$W_1 = 12 \text{ ton.}$
Peso del coche vacío	$W_v = 5,6 \text{ ton.}$
Peso unitario del cable	
Improved Plow Steel	$p = 5,75 \text{ Kg/m}$
(7) Coeficiente de rozamien to del cable	$r = 0,25 \text{ Kg/m}$

2.0.2 ECUACION DE LA TENSION DEL CABLE ASCENDENTE

El cable debe ascender por la rampa de pendiente variable dada por la

(7) Hütte, Manual del Ingeniero, Tomo III, pág. 1383. En el coefi
ciente r de rozamiento del cable por metro lineal, está conside
rada la resistencia debida a la rigidez del cable, poleas de la
vía, etc.

ecuación del perfil. En el diagrama (2.0.1) se puede apreciar el elemento del cable dl sobre el que actúa el propio peso dp , la fuerza de rozamiento dr y la normal dn . El diagrama (2.0.2) muestra la descomposición de fuerzas del elemento dp y del mismo se desprenden las siguientes ecuaciones dinámicas:

$$\sum F_x = 0$$

$$(2.0.1) \quad dT - dp_x - dr = a_x dm$$

$$\sum F_y = 0$$

$$(2.0.2) \quad dp_y - dn = 0 \quad dp_y = dn$$

El rozamiento μ será igual a la relación:

$$\mu = \frac{\text{Coeficiente unitario de rozamiento (r)}}{\text{Peso unitario del cable (p)}}$$

$$(2.0.3) \quad \mu = \frac{r}{p}$$

Reemplazando r y p tendremos:

$$(2.0.4) \quad \mu = \frac{0,25 \text{ Kg/m}}{5,75 \text{ Kg/m}} = 0,0434 \text{ Kg/Kg}$$

$$(2.0.5) \quad \mu = 43 \text{ Kg/ton}$$

Del mismo diagrama se deduce que:

$$(2.0.6) \quad \mu = \frac{dr}{dn}$$

La tangente en el punto A del diagrama (2.0.2) forma un ángulo con el eje horizontal. Dicha tangente es variable con la variación de la parábola y se obtienen las siguientes funciones:

DIAGRAMAS DE TENSION EN EL CABLE

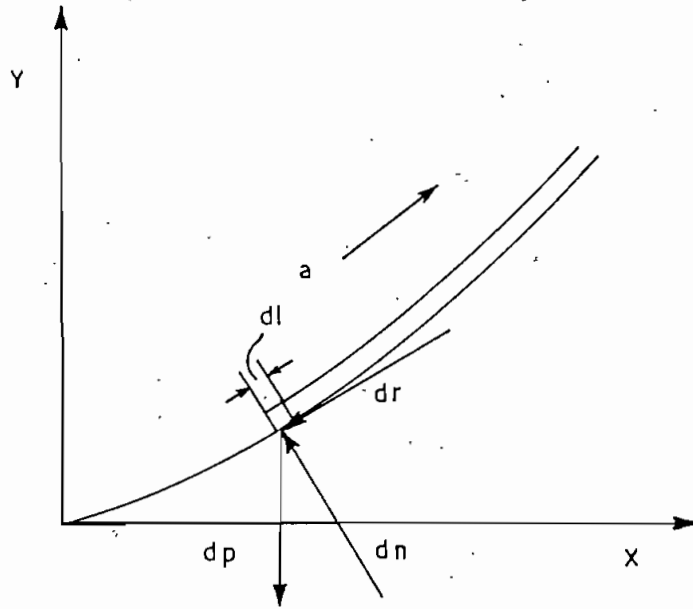
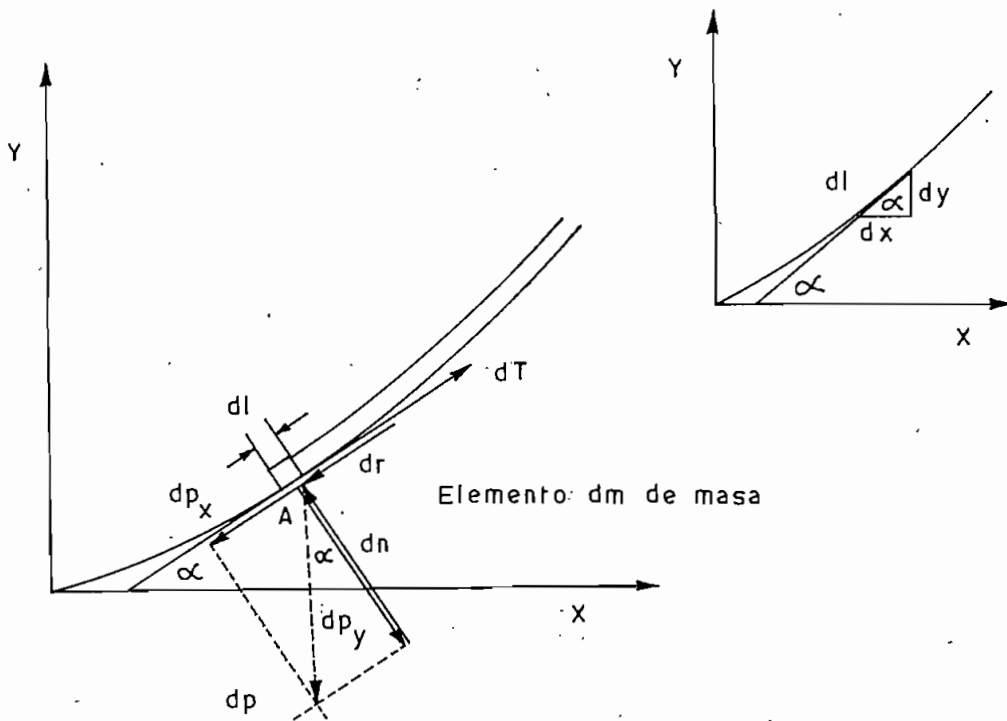


DIAGRAMA (2.0.1)



Elemento: dm de masa

DIAGRAMA (2.0.2)

$$(2.0.7) \quad \text{sen } \alpha = \frac{dy}{dl}$$

$$(2.0.8) \quad \text{cos } \alpha = \frac{dx}{dl}$$

Del diagrama (2.0.2) se obtiene:

$$(2.0.9) \quad \text{sen } \alpha = \frac{dp_x}{dp}$$

$$(2.0.10) \quad \text{cos } \alpha = \frac{dp_y}{dp}$$

El peso tiene la ecuación:

$$(2.0.11) \quad P = p.l$$

Siendo p el peso del cable por unidad de longitud, P el peso total y l la longitud.

La derivada de P corresponde a:

$$(2.0.12) \quad dP = p.dl$$

La ecuación (2.0.1) $dT - dp_x - dr = a_x dm$ se transformará en:

$$(2.0.13) \quad dT - dP \cdot \text{sen } \alpha - \mu dn = a_x dm$$

reemplazando dp_x por $dp \cdot \text{sen } \alpha$ según (2.0.9) y dr por μdn según (2.0.6) tendremos:

$$(2.0.14) \quad dT - p.dl \frac{dy}{dl} - \mu dn = a_x dm$$

pues $dP = p dl$ según (2.0.12) y $\text{sen } \alpha = \frac{dy}{dl}$ según (2.0.7)

La ecuación (2.0.14) puede ser de nuevo modificada así:

$$(2.0.15) \quad dT - p dy - \mu dp_y = a_x dm$$

pues según (2.0.2) $dn = dp_y$, y también

$$(2.0.16) \quad dT - p dy - \mu dp \cos \alpha = a_x dm$$

dado que $dp_y = dp \cos \alpha$ conforme (2.0.10)

Para conseguir una ecuación fácil de calcular hacemos los siguientes cambios en la ecuación (2.0.16); reemplazamos $\mu dp \cos \alpha$ por $\mu dP \cdot \frac{dx}{dl}$ según (2.0.8) quedando

$$(2.0.17) \quad dT - p dy - \mu dP \frac{dx}{dl} = a_x dm$$

de acuerdo con (2.0.12).

Pero $m = \frac{P}{g}$ y $dm = \frac{dP}{g} = \frac{p dl}{g}$ y también

$$(2.0.18) \quad dT - p dy - \mu p dl \frac{dx}{dl} = a_x dm$$

Por lo tanto

$$(2.0.19) \quad dT - p dy - \mu p dx = \frac{a_x P}{g} dl$$

Integrando

$$(2.0.20) \quad T = \int_{y_1}^{y_2} p dy + \int_{x_1}^{x_2} \mu p dx + \int_{l_1}^{l_2} a_x \frac{P}{g} dl$$

$$(2.0.21) \quad T = p(y_2 - y_1) + \mu p(x_2 - x_1) + a_x \frac{P}{g} (l_2 - l_1)$$

Siendo:

T : tensión del cable ascendente

p : peso unitario del cable

μ : coeficiente de rozamiento del cable

- a_x : aceleración de arranque
 g : aceleración de la gravedad (9,8 m/seg²)
 y_2 : ordenada de la estación superior
 y_1 : ordenada de la estación inferior
 x_1 : abscisa de la estación superior
 x_2 : abscisa de la estación inferior
 l_2 : longitud total del cable hasta la estación superior.

La ecuación (2.0.21) se puede desarrollar aún más así:

$$T = p y_2 - p y_1 + \mu p x_2 - \mu p x_1 + \frac{a_x p}{g} l_2 - \frac{a_x p}{g} l_1$$

y agrupar los términos que tienen subíndice 2.

$$(2.0.22) \quad T = (p y_2 + \mu p x_2 + \frac{a_x p}{g} l_2) - p y_1 - \mu p x_1 - \frac{a_x p}{g} l_1$$

Al primer término de la ecuación podemos llamar tensión máxima T_m pues son los valores máximos que corresponden a la estación superior.

$$(2.0.23) \quad T_m = p y_2 + \mu p x_2 + \frac{a_x p}{g} l_2$$

y la ecuación (2.0.22) quedará finalmente:

$$(2.0.23) \quad T = T_m - p(y_1 + \mu x_1 + \frac{a_x}{g} l_1)$$

Para cualquier valor de coordenadas:

$$(2.0.24) \quad T = T_m - p(y + \mu x + \frac{a_x}{g} l)$$

Las condiciones iniciales $x = 0$, $y = 0$, $l = 0$ determinan la tensión

al momento de arranque, la misma que corresponde a T_m .

2.0.3 LA LONGITUD DEL CABLE

La ecuación de la longitud del cable es la siguiente:

$$(2.0.25) \quad L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

Para una ecuación $y = mx^2 + nx$, en la que $m = 1,008718 \cdot 10^{-4}$ y $n = 0,29$, tendremos:

$$(2.0.26) \quad \frac{dy}{dx} = 2mx + n; \text{ y la longitud}$$

$$(2.0.27) \quad L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (2mx + n)^2} dx$$

Hacemos los siguientes reemplazos

$$(2.0.28) \quad z = 2mx + n \text{ y derivando}$$

$$(2.0.29) \quad dz = 2m dx \text{ de donde } dx = \frac{dz}{2m}, \text{ según esto}$$

$$L = \int_{z_1}^{z_2} \sqrt{1 + z^2} \frac{dz}{2m} \quad \text{o, lo que es lo mismo}$$

$$(2.0.30) \quad L = \frac{1}{2m} \int_{z_1}^{z_2} \sqrt{1 + z^2} dz$$

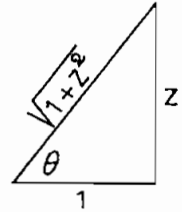
Esta integral es de la forma

$$\int \sqrt{1 + z^2} dz$$

y cuyo desarrollo es como sigue:

$$(2.0.31) \quad \operatorname{tg} \theta = z; \quad dz = \sec^2 \theta \, d\theta; \quad \sec \theta = \sqrt{1 + z^2}$$

$$(2.0.32) \quad \int \sqrt{1 + z^2} \, dz = \int \sec^3 \theta \, d\theta$$



Reemplazando los siguientes valores

$$(2.0.33) \quad du = \sec^2 \theta \, d\theta; \quad u = \operatorname{tg} \theta; \quad v = \sec \theta; \quad dv = \operatorname{tg} \theta \sec \theta \, d\theta$$

$$(2.0.34) \quad \int v \, du = uv - \int u \, dv$$

Poniendo en (2.0.34) los valores correspondientes

$$(2.0.35) \quad \int \sec^3 \theta \, d\theta = \operatorname{tg} \theta \sec \theta - \int \operatorname{tg}^2 \theta \sec \theta \, d\theta$$

Pero

$$(2.0.36) \quad \begin{aligned} \int \operatorname{tg}^2 \theta \sec \theta \, d\theta &= \int (1 - \cos^2 \theta) \sec \theta \, d\theta \\ &= \int \sec^3 \theta \, d\theta - \int \sec \theta \, d\theta \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$(2.0.37) \quad \int \sec^3 \theta \, d\theta = \operatorname{tg} \theta \sec \theta - \int \sec^3 \theta \, d\theta + \int \sec \theta \, d\theta$$

$$2 \int \sec^3 \theta \, d\theta = \operatorname{tg} \theta \sec \theta + \operatorname{Ln}(\sec \theta + \operatorname{tg} \theta)$$

$$(2.0.38) \quad \int \sec^3 \theta \, d\theta = 1/2 \operatorname{tg} \theta \sec \theta + 1/2 \operatorname{Ln}(\sec \theta + \operatorname{tg} \theta)$$

Reemplazando los valores de (2.0.31) en (2.0.38)

$$(2.0.39) \quad \int \sqrt{1 + z^2} \, dz = 1/2 z \sqrt{1 + z^2} + 1/2 \operatorname{Ln}(z + \sqrt{1 + z^2})$$

001580

$$(2.0.40) \quad L = \frac{1}{2m} \int_{z_1}^{z_2} \sqrt{1+z^2} \, dz = \left| \frac{z \sqrt{1+z^2}}{2} + \frac{\text{Ln}(z + \sqrt{1+z^2})}{2} \right|_{z_2}^{z_1}$$

$$(2.0.41)$$

$$L = \frac{1}{4 \cdot m} \left\{ \left[z_2 \sqrt{1+z_2^2} + \text{Ln}(z_2 + \sqrt{1+z_2^2}) \right] - \left[z_1 \sqrt{1+z_1^2} + \text{Ln}(z_1 + \sqrt{1+z_1^2}) \right] \right\}$$

Para simplificar los cálculos:

$$(2.0.42) \quad A = \frac{z_2 \sqrt{1+z_2^2}}{4 \, m}$$

$$(2.0.43) \quad B = \frac{\text{Ln}(z_2 + \sqrt{1+z_2^2})}{4 \, m}$$

$$(2.0.44) \quad K = \frac{z_1 \sqrt{1+z_1^2} + \text{Ln}(z_1 + \sqrt{1+z_1^2})}{4 \, m}$$

La ecuación (2.0.41) se reduce a:

$$(2.0.45) \quad L = A + B - K$$

X	Y	z_2	$\frac{z_2^2}{2}$	$\sqrt{1+z_2^2}$	A'	A	B''	B'	B	A + B	L = A + B = K
0	0	0,290	0,084	1,041	0,302	748,35	1,331	0,286	709,03	1.457,39	0
200	62,03	0,330	0,109	1,053	0,348	862,25	1,383	0,325	804,50	1.666,75	209,36
400	132,14	0,371	0,137	1,067	0,395	979,82	1,437	0,363	898,86	1.878,68	421,30
600	210,31	0,411	0,169	1,081	0,444	1.101,43	1,492	0,400	992,02	2.093,46	636,07
800	296,56	0,451	0,204	1,097	0,495	1.227,41	1,549	0,437	1.083,84	2.311,24	853,86
1.000	390,87	0,492	0,242	1,114	0,548	1.358,11	1,606	0,474	1.174,27	2.532,38	1.074,99
1.200	493,26	0,532	0,283	1,133	0,603	1.493,79	1,665	0,510	1.263,30	2.757,09	1.299,71
1.400	603,71	0,572	0,328	1,152	0,660	1.634,73	1,725	0,545	1.350,82	2.985,56	1.528,17
1.600	722,23	0,613	0,376	1,173	0,719	1.781,20	1,786	0,580	1.436,86	3.218,06	1.760,68
1.740	810,00	0,641	0,411	1,188	0,761	1.887,13	1,829	0,604	1.496,18	3.383,31	1.925,93

TABLA (2.0.1) DE LAS LONGITUDES DEL CABLE

Ecuación de la parábola $y = 1,008718 \cdot 10^{-4} x^2 + 0,29 x$

Constante $K = \frac{z_1 \sqrt{1+z_1^2} + \ln(z_1 + \sqrt{1+z_1^2})}{4m}$; $m = 1,008718 \cdot 10^{-4}$; $\frac{1}{4m} = 2.478,39$; $n = 0,29$

Para $x_1 = 0$ y $z_1 = 0,29$; por tanto $K = 1.457,385 = 1.457,39$

$$A' = z_2 \sqrt{1+z_2^2}; \quad A = 2.478,39 A'; \quad B'' = z_2 + \sqrt{1+z_2^2}; \quad B' = \ln(z_2 + \sqrt{1+z_2^2})$$

$$B = 2.478,39 B'$$

2.0.4 ECUACION DE LA TENSION DEL CABLE DESCENDENTE

De la misma manera como se procedió al cálculo de la ecuación de tensión debido a su peso, cuando sube, se procede al cálculo de la tensión cuando baja.

De acuerdo con el diagrama (2.0.3)

$$\sum F_x = m \cdot a_x$$

$$(2.0.46) \quad dT + dr - dp_x = - a_x dm$$

$$\sum F_y = 0$$

$$(2.0.47) \quad dn - dp_y = 0$$

$$\mu = \frac{dr}{dn}$$

Según las relaciones ya estudiadas anteriormente la ecuación (2.0.46) puede ser transformada en la siguiente:

$$(2.0.48) \quad dT = p dy - \mu p dx - \frac{pa_x}{g} dl$$

Integrando

$$(2.0.49) \quad T = p(y_2 - y_1) - \mu p(x_2 - x_1) - \frac{pa_x}{g} (l_2 - l_1)$$

$$(2.0.50) \quad T_m = py_2 - \mu px_2 - \frac{pa_x}{g} l_2$$

$$(2.0.51) \quad T = T_m - py_1 + \mu px_1 + \frac{pa_x}{g} l_1$$

$$(2.0.52) \quad T = T_m - p(y - \mu x - \frac{a_x l}{g})$$

2.0.5 CALCULO DE LA POSICION DEL EXTREMO DEL CABLE ASCENDENTE CON RESPECTO AL EXTREMO DEL CABLE DESCENDENTE

La longitud total del cable permaneció constante en 1926 mts. Por consiguiente es necesario calcular las coordenadas del extremo del cable descendente en relación al ascendente.

Como el cálculo es sumamente engorroso y no presta mayor utilidad al desarrollo de la tesis se puede trabajar con valores aproximados y obtener los datos requeridos de la curva correspondiente al diagrama (2.0.4)

De esta manera se ha establecido la tabla (2.0.2) con las relaciones de longitud, abscisas y ordenadas de los extremos del cable.

En la ecuación (2.0.52) $T = T_m - p(y - x - \frac{a_x l}{g})$

Tenemos que:

T : Tensión del cable descendente.

T_m : Tensión máxima cuando el coche está en la estación inferior.

p : Peso unitario del cable.

y : Ordenada del extremo del cable.

μ : Coeficiente de rozamiento.

x : Abscisa del extremo del cable.

a_x : Aceleración de arranque.

TABLA (2.0.2) DE LAS LONGITUDES DEL CABLE ASCENDENTE Y DESCENDENTE

Cable ascendente			Cable descendente		
x_1	y_1	l_1	x_2	y_2	l_2
0	0	0	1.740	810	1.926
200	62	209	1.562	700	1.717
400	132	421	1.380	594	1.505
600	210	636	1.196	488	1.290
800	296	854	999	390	1.072
1.000	391	1.075	794	292	851
1.200	493	1.300	590	209	626
1.400	604	1.528	378	122	398
1.600	722	1.760	166	52	166
1.740	810	1.926	0	0	0

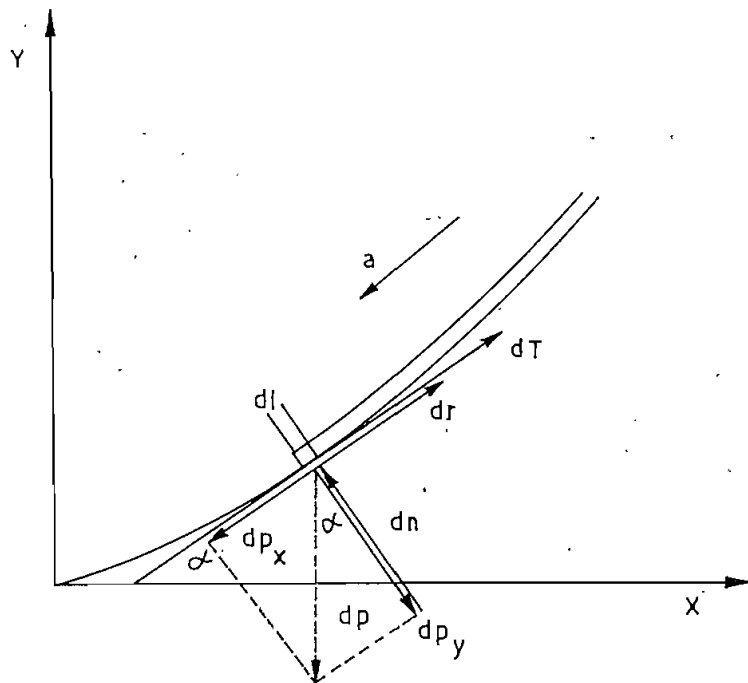


DIAGRAMA (2.0.3) DE LA TENSION DEL CABLE DESCENDENTE

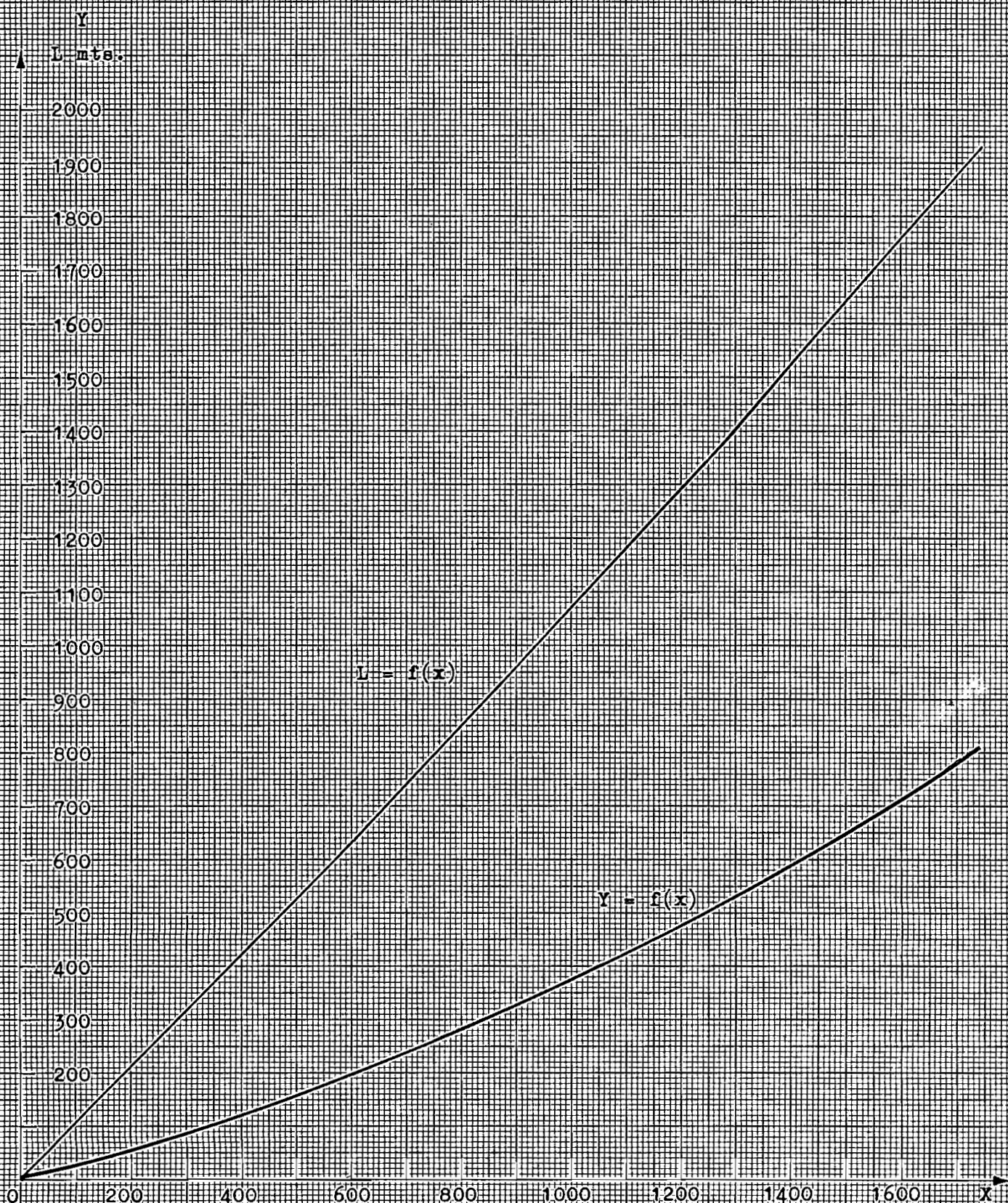


DIAGRAMA (2.0.4) DE LONGITUDES DEL CABLE

g : Aceleración de la gravedad (9,8 m/seg²)

l : Longitud del cable al extremo.

Se puede considerar la tensión dinámica en la que se tiene en cuenta la aceleración impuesta para el arranque o frenado de los coches y la tensión estática prescindiendo del término $\frac{a_x l}{g}$.

2.0.6 TENSIONES EN EL CABLE ASCENDENTE DEBIDAS AL PESO DEL COCHE

Ecuaciones de equilibrio: de acuerdo al diagrama (2.0.5)

Coche ascendente:

$$\sum F_x = ma_x$$

$$(2.0.53) \quad T - R - W \sin \alpha = ma_x$$

$$\sum F_y = 0$$

$$(2.0.54) \quad N - W \cos \alpha = 0$$

Ecuación de rozamiento:

$$(2.0.55) \quad \mu = \frac{R}{N} \text{ de donde } R = \mu N \text{ reemplazando (2.0.54) y}$$

$$R = \mu W \cos \alpha \text{ sustituyendo en (2.0.53)}$$

$$(2.0.56) \quad T - \mu W \cos \alpha - W \sin \alpha = ma_x$$

$$(2.0.57) \quad T = \mu W \cos \alpha + W \sin \alpha + \frac{W}{g} a_x$$

2.0.7 TENSIONES EN EL CABLE DESCENDENTE DEBIDAS AL PESO DEL COCHE

De acuerdo con el diagrama (2.0.6) y haciendo las mismas consideraciones que en el caso anterior, se estudia el diagrama de fuerzas cuando la aceleración es hacia abajo.

Ecuaciones de equilibrio:

$$\sum F_x = ma_x$$

$$(2.0.58) \quad T + R - W \sin \alpha = - ma_x$$

$$\sum F_y = 0$$

$$(2.0.59) \quad N - W \cos \alpha = 0$$

Ecuación de rozamiento:

$$(2.0.55) \quad \mu = \frac{R}{N}$$

Reemplazando (2.0.57) y (2.0.55) en (2.0.58) tendremos:

$$(2.0.60) \quad T + \mu W \cos \alpha - W \sin \alpha = - m \cdot a_x$$

$$(2.0.61) \quad T = W \sin \alpha - \mu W \cos \alpha - m \cdot a_x$$

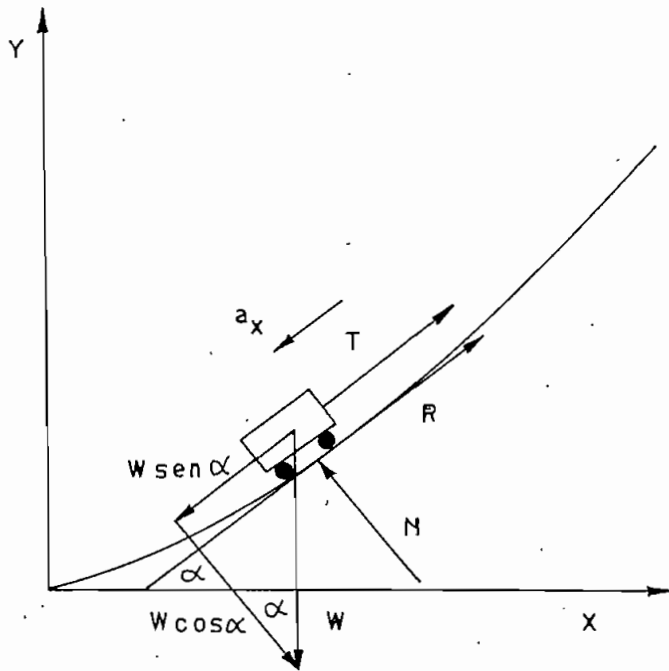


DIAGRAMA (2.0.5)

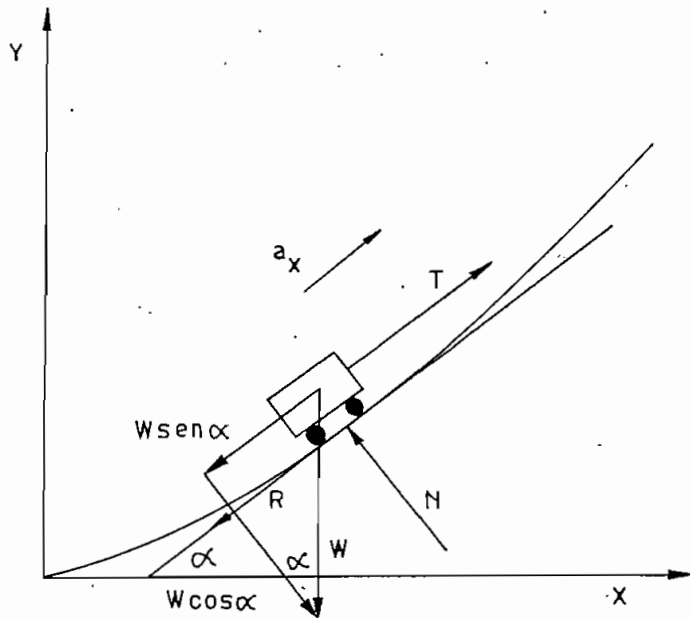


DIAGRAMA (2.0.6)

2.0.8 TENSION TOTAL EN EL CABLE ASCENDENTE

La tensión en el cable ascendente está causada por dos factores: el uno, el peso propio del cable con el rozamiento en las poleas; el otro, el peso del coche y su respectivo rozamiento.

Por el peso propio del cable:

Reemplazando los valores de x , y , l en la ecuación (2.0.24) en intervalos de 200 en 200 para x , se obtiene la tabla siguiente: (2.0.3)

X	Y	L	A	B	C	M	N	Td	Te
0	0	0	0	0	0	0	0	5.482	5.092
200	62	209	357	50	42	449	407	5.033	4.685
400	132	421	760	100	85	945	860	4.537	4.232
600	210	636	1.209	150	129	1.488	1.359	3.994	3.733
800	296	854	1.705	200	173	2.087	1.905	3.404	3.187
1.000	391	1.075	2.248	250	217	2.715	2.498	2.767	2.595
1.200	493	1.300	2.836	300	263	3.399	3.136	2.083	1.956
1.400	604	1.528	3.471	350	309	4.130	3.821	1.352	1.271
1.600	722	1.761	4.153	400	356	4.909	4.553	573	540
1.740	810	1.926	4.658	434	390	5.482	5.092	0	0

TABLA (2.0.3)

EQUIVALENCIAS DE LA TABLA (2.0.3)

X Abscisa en mts.

Y Ordenada en mts.

L Longitud del cable en mts.

$$A = P.y$$

$$B = P.x$$

$$C = \frac{a}{g} P l$$

$$M = A + B + C = T(x,y)$$

$$N = A + B = T'(x,y)$$

Td Tensión dinámica $Td = T_m - T(x,y)$ en Kgms.

Te Tensión estática $Te = T'_m - T'(x,y)$ en Kgms.

Peso del coche:

Para el desarrollo del cálculo de tensiones debidas al peso del coche hay que considerar dos posibilidades:

a) Coche vacío W_v en Kgms.

b) Coche lleno W_l en Kgms.

Además es indispensable conocer la variación de pendientes que sufre el coche según los distintos lugares en que se encuentra.

La ecuación (2.0.57) permite establecer la tabla (2.0.14)

X	Y	L	T ^{oab} _{din}	T ^{oab} _{est}	Coche lleno		Coche vacío		T total		T total	
					W ^L _D	W ^L _E	W ^V _D	W ^V _E	Coche lleno		Coche vacío	
									T _D	T _E	T _D	T _E
●	0	0	5.482	5.092	4.046	3.624	1.888	1.691	9.528	8.716	7.370	6.783
200	62	209	5.033	4.685	4.472	4.050	2.087	1.890	9.505	8.735	7.120	6.575
400	132	421	4.537	4.232	4.874	4.451	2.274	2.077	9.411	8.683	6.811	6.309
600	210	636	3.994	3.733	5.167	4.745	2.411	2.214	9.161	8.478	6.405	5.947
800	297	854	3.404	3.187	5.633	5.210	2.629	2.431	9.036	8.397	6.632	5.618
1.000	391	1.075	2.767	2.595	5.987	5.565	2.794	2.597	8.754	8.160	5.561	5.192
1.200	493	1.300	2.083	1.956	6.324	5.901	2.951	2.754	8.407	7.851	5.034	4.710
1.400	604	1.528	1.352	1.271	6.643	6.221	3.100	2.903	7.995	7.492	4.452	4.174
1.600	722	1.761	573	540	6.948	6.526	3.243	3.045	7.521	7.065	3.817	3.585
1.740	810	1.926	0	0	7.151	6.729	3.337	3.140	7.151	6.729	3.337	3.140

- 38 -

TABLA (2.0.5)

EQUIVALENCIAS

X	Abscisa en mts.	W ^L _D	Tensión dinámica por el peso del coche lleno en Kgms.	W ^V _E	Tensión estática por el peso del coche vacío en Kgms.
Y	Ordenada en mts.				
L	Longitud en mts.	W ^L _E	Tensión estática por el peso del coche lleno en Kgms.	T _D	Tensión dinámica en Kgms.
T ^{oab} _{din}	Tensión dinámica del cable en Kgms.	W ^V _D	Tensión dinámica por el peso del coche vacío en Kgms.	T _E	Tensión estática en Kgms.
T ^{oab} _{est}	Tensión estática del cable en Kgms.				

2.0.9 TENSION DINAMICA AL MOMENTO DE ARRANQUE PARA EL COCHE
ASCENDENTE

Según las consideraciones hechas acerca de la tensión dinámica y estática, se puede admitir que en el primer momento, la tensión en el cable corresponde a la que hemos denominado tensión dinámica en el punto de abscisa 0; y pasados los 8,7 seg. de aceleración, dado que el tramo es muy pequeño (13 mts.), la tensión estática estará dada por la denominada tensión estática en el punto de abscisa 0, sin mayor error.

Para el coche ascendente lleno, las ecuaciones de la tensión de arranque en función del tiempo serán:

$$\text{Para } t = 0 \quad T = 9.528 \text{ Kgms.}$$

$$\text{Para } t = 8,7 \text{ seg.} \quad T = 8.716 \text{ Kgms.}$$

$$(2.0.62) \quad T = m \cdot t + 9.528$$

$$(2.0.63) \quad 8.716 = 8,7 \cdot m + 9.528$$

Despejando m

$$m = \frac{8.716 - 9.528}{8,7}$$

$$m = - 93,3$$

$$(2.0.64) \quad T = - 93,3 \cdot t + 9.528 \text{ Kgms.}$$

Para el coche ascendente vacío las ecuaciones de tensión al momento de arranque serán:

$$\text{Para } t = 0 \quad T = 7.370 \text{ Kgms.}$$

Para $t = 8,7$ seg. $T = 6.783$ Kgms.

$$(2.0.65) \quad T = m \cdot t + 7.370$$

$$(2.0.66) \quad 6.783 = 8,7 \cdot m + 7.370$$

$$(2.0.67) \quad m = \frac{6.783 - 7.370}{8,7}$$

$$m = - 67,5$$

Y la ecuación será:

$$(2.0.68) \quad T = - 67,5 \cdot t + 7.370$$

2.0.10 TENSION AL MOMENTO DE LLEGADA (FRENADO) PARA EL COCHE ASCENDENTE

En este caso el coche a los 0 seg. se encuentra produciendo una determinada tensión que está dada por la tensión estática a la abscisa 1.740 y, como el movimiento es retardado la aceleración es negativa.

La ecuación (2.0.57) se transformará en:

$$(2.0.69) \quad T = W \cdot \cos \alpha + W \cdot \operatorname{sen} \alpha - \frac{W}{g} a_x$$

y la tensión a la llegada se calculará con los siguientes valores:

$$\mu = 25 \text{ Kg/ton.}$$

$$W_1 = 12 \text{ ton}$$

$$W_V = 5,6 \text{ ton}$$

$$\cos \alpha = 0,8418$$

$$\text{sen } \alpha = 0,5397$$

$$a_x = 0,345 \text{ m/seg}^2$$

$$g = 9,8 \text{ m/seg}^2$$

Por lo tanto, para el coche lleno:

$$\text{Para } t = 0 \text{ seg. } \quad T = 6.729 \text{ Kgm.}$$

$$\text{Para } t = 8,7 \text{ seg. } \quad T = 6.306 \text{ Kgm.}$$

Para $t = 8,7$ seg. se ha calculado según la fórmula (2.0.69) así:

$$T = 253 + 6.476 - 423 = 6.306 \text{ Kgm.}$$

La ecuación de tensión para el coche ascendente lleno, a la llegada será:

$$(2.0.70) \quad T = m \cdot t + 6.729 \text{ Kgm.}$$

$$T = 8,7 \cdot m + 6.729 \text{ Kgm.}$$

$$(2.0.71) \quad 6.306 = 8,7 \cdot m + 6.729$$

$$m = \frac{6.306 - 6.729}{8,7}$$

$$m = - 48,6$$

$$(2.0.72) \quad T = - 48,6 \cdot t + 6.729$$

La ecuación de tensión para el cable ascendente, con el coche vacío a la llegada será:

$$\text{Para } t = 0 \text{ seg. } \quad T = 3.140 \text{ Kg.}$$

$$\text{Para } t = 8,7 \text{ seg. } \quad T = 2.943 \text{ Kg.}$$

Para los 8,7 seg. se ha calculado con la fórmula (2.0.69) así:

$$T = 118 + 3.022 - 197$$

$$(2.0.73) \quad T = m \cdot t + 3.140$$

$$T = 8,7 \cdot m + 3.140$$

$$(2.0.74) \quad 2.943 = 8,7 \cdot m + 3.140$$

$$m = \frac{2.943 - 3.140}{8,7}$$

$$m = - 22,6$$

$$(2.0.75) \quad T = - 22,6 \cdot t + 3.140 \text{ Kg.}$$

Con las ecuaciones obtenidas anteriormente es factible reunir en tablas los valores de variación de la tensión segundo a segundo, durante el período de aceleración y frenado, hasta que los coches adquieran su velocidad uniforme. De esta manera se han obtenido las tablas (2.0.6) y (2.0.7)

t seg	ARRANQUE - Ascendente		LLEGADA - Ascendente	
	Lleno	Vacío	Lleno	Vacío
	T Kg.	T Kg.	T Kg.	T Kg.
0	9.528	7.370	6.729	3.140
1	9.435	7.303	6.680	3.117
2	9.341	7.235	6.632	3.095
3	9.248	7.168	6.583	3.072
4	9.155	7.100	6.535	3.050
5	9.062	7.033	6.486	3.027
6	8.968	6.950	6.437	3.004
7	8.875	6.898	6.389	2.982
8,0	8.782	6.830	6.340	2.959
8,7	8.716	6.783	6.306	2.943

TABLA (2.0.6) y TABLA (2.0.7)

2.0.11 CALCULO DE LA TENSION EN EL RAMAL DESCENDENTE

El cálculo de la tensión en el ramal descendente se debe desarrollar teniendo en cuenta que el cable que une los dos vehículos tiene una longitud constante de 1.926 mts. Eso implica que los intervalos de abscisas y ordenadas no varían en forma uniforme sino en función de la variación de la longitud.

El desarrollar una fórmula resulta muy complicado ya que la longitud es función logarítmica de las abscisas, por ello se han utilizado los datos de la tabla (2.0.2).

La tensión debida al peso propio del cable se consigue reemplazando los valores de abscisas, ordenadas y longitud, de la tabla (2.0.2) en la ecuación (2.0.51).

X	Y	L	A	B	C	-A+B+C	-A+B	T _D	T _E
m.	m.	m _i						Kgm	Kgm
1.740	810	1.926	4.658	434	390	-3.834	-4.224	0	0
1.562	700	1.717	4.025	390	348	-3.287	-3.635	547	589
1.380	594	1.505	3.416	344	305	-2.767	-3.072	1.067	1.152
1.196	488	1.290	2.806	299	261	-2.246	-2.507	1.588	1.717
999	390	1.072	2.243	249	217	-1.777	-1.994	2.057	2.230
794	292	851	1.679	198	172	-1.309	-1.481	2.525	2.743
590	209	626	1.202	147	127	- 928	-1.055	2.906	3.169
378	122	398	702	94	81	- 527	- 608	3.307	3.616
166	52	166	299	41	34	- 224	- 258	3.610	3.966
0	0	0	0	0	0	0	0	3.834	4.224

TABLA (2.0.8)

EQUIVALENCIAS DE LA TABLA (2.0.8)

X Abscisa del extremo del cable (mts).

Y Ordenada en mts.

L Longitud en mts.

A = p.y

B = $\mu p.x$

C = $\frac{pa_x}{g} . L$

La tensión debida al peso del coche para diversos valores de X, Y y L se saca reemplazando estas magnitudes en la ecuación (2.0.61).

La tabla (2.0.2) servirá para ir obteniendo las funciones trigonométricas a partir de la pendiente. De esta manera se ha desarrollado la tabla (2.0.9).

La suma de las tensiones debidas al peso del cable y al peso del coche será la tensión total en el cable correspondiente al ramal descendente. Los valores se registran en la tabla (2.0.10).

X	Y	L	Tg α	α	sen α	cos α	W_1	W_2	W_3	W_D^L	W_E^L	W_D^V	W_E^V
1.740	810	1.926	0,641	32°40'	0,540	0,842	253	6.476	423	5.800	6.223	2.707	2.904
1.562	700	1.717	0,605	31°10'	0,518	0,856	257	6.210	423	5.530	5.953	2.581	2.778
1.380	594	1.505	0,568	29°37'	0,494	0,869	261	5.930	423	5.246	5.669	2.448	2.646
1.196	488	1.290	0,531	27°59'	0,469	0,883	265	5.630	423	4.942	5.365	2.306	2.504
999	390	1.072	0,492	26°10'	0,441	0,898	269	5.292	423	4.600	5.023	2.147	2.344
794	292	851	0,450	24°14'	0,411	0,912	274	4.926	423	4.229	4.652	1.974	2.171
590	209	626	0,409	22°15'	0,379	0,926	278	4.544	423	3.843	4.266	1.793	1.991
378	122	398	0,366	20°07'	0,344	0,939	282	4.130	423	3.425	3.848	1.598	1.796
166	52	166	0,324	17°55'	0,308	0,952	285	3.691	423	2.983	3.406	1.392	1.590
0	0	0	0,290	16°10'	0,278	0,961	288	3.336	423	2.623	3.046	1.224	1.421

TABLA (2.0.9)

EQUIVALENCIAS

X Abscisa del extremo del cable en mts.

Y Ordenada del extremo del cable en mts.

L Longitud del cable, en mts.

Tg α Pendiente

sen α Seno del ángulo de pendiente.

cos α Coseno del ángulo.

$$W_1 = \mu W \cdot \cos \alpha \text{ Kgms.} \quad W_3 = \frac{W}{g} \cdot a_x$$

$$W_2 = W \cdot \sin \alpha \text{ Kgms.}$$

$$W_D^L = W_2 - W_1 = W_3 \quad \text{Tensión dinámica Coche lleno Kgms.}$$

$$W_E^L = W_2 - W_1 \quad \text{Tensión estática Coche lleno Kgms.}$$

$$W_D^V \quad \text{Tensión dinámica Coche vacío Kgms.}$$

$$W_E^V \quad \text{Tensión estática Coche vacío Kgms.}$$

X	Y	L	T_{Cab}		W_D^L	W_E^L	W_D^V	W_E^V	T total		T total	
			T_D^{Cab}	T_E^{Cab}					Coche lleno		Coche vacío	
									T_D	T_E	T_D	T_E
1.740	810	1.926	0	0	5.800	6.223	2.707	2.904	5.800	6.223	2.707	2.904
1.562	700	1.717	547	589	5.530	5.953	2.581	2.778	6.077	6.542	3.128	3.367
1.380	594	1.505	1.067	1.152	5.246	5.669	2.448	2.646	6.313	6.821	3.515	3.798
1.196	488	1.290	1.588	1.717	4.942	5.365	2.306	2.504	6.530	7.082	3.894	4.221
999	390	1.072	2.057	2.230	4.600	5.023	2.147	2.344	6.657	7.253	4.204	4.574
794	292	851	2.525	2.743	4.229	4.652	1.974	2.171	6.754	7.395	4.499	4.914
590	209	626	2.906	3.169	3.843	4.266	1.793	1.991	6.749	7.435	4.699	5.160
378	122	398	3.307	3.616	3.425	3.848	1.598	1.796	6.732	7.464	4.905	5.412
166	52	166	3.610	3.966	2.983	3.406	1.392	1.590	6.593	7.372	5.002	5.556
0	0	0	3.834	4.224	2.623	3.046	1.224	1.421	6.457	7.270	5.058	5.645

47

TABLA (2.0.10)

EQUIVALENCIAS

X	Abscisa en mts.	W_D^L	Tensión dinámica por el peso del coche lleno en Kgms.	W_E^V	Tensión estática por el peso del coche vacío en Kgms.
Y	Ordenada en mts.				
L	Longitud en mts.	W_E^L	Tensión estática por el peso del coche lleno en Kgms.	T_D	Tensión dinámica total en Kgms.
T_D^{Cab}	Tensión dinámica del cable en Kgms.	W_D^V	Tensión dinámica por el peso del coche vacío en Kgms.	T_E	Tensión estática total en Kgms.
T_E^{Cab}	Tensión estática del cable en Kgms.				

2.0.12 TENSION DINAMICA AL ARRANQUE PARA EL COCHE DESCENDENTE

El cálculo de las tensiones al arranque y al frenado tiene importancia en el diseño del sistema de arranque y en el diseño del mecanismo del freno.

Para el análisis de la tensión dinámica al arranque tendremos:

Para el coche descendente lleno:

$$\text{Si } t = 0 \quad T = 5.800 \text{ Kgms.}$$

$$\text{Si } t = 8,7 \text{ seg.} \quad T = 6.223 \text{ Kgms.}$$

$$(2.0.76) \quad T = m \cdot t + 5.800$$

$$(2.0.77) \quad 6.223 = 8,7 \cdot m + 5.800$$

$$m = \frac{6.223 - 5.800}{8,7}$$

$$m = \frac{423}{8,7} = 48,6$$

$$(2.0.78) \quad T = 48,6 \cdot t + 5.800$$

Para el coche descendente vacío:

$$\text{Si } t = 0 \quad T = 2.707 \text{ Kg.}$$

$$\text{Si } t = 8,7 \text{ seg.} \quad T = 2.904 \text{ Kg.}$$

$$(2.0.79) \quad T = m \cdot t + 2.707$$

$$2.904 = 8,7 \cdot m + 2.707$$

$$m = \frac{197}{8,7} = 22,6$$

$$(2.0.80) \quad T = 22,6 \cdot t + 2.707$$

2.0.13 TENSION DINAMICA AL MOMENTO DE LLEGADA (FRENADO) PARA EL COCHE DESCENDENTE

En este caso la polea superior está soportando todo el cable y el peso del coche. Sin mayor error se puede considerar que la aceleración retardada no actúa para el cable y no hay aumento de esfuerzos en el mismo por tener una magnitud muy pequeña.

La tensión para el cable será la misma tensión estática que vale

$T = 4.224$ Kgm. y para el coche a $t = 0$, $T = 3.046$ Kgms. y a $t = 8,7$ seg. $T = 3.471$, pues de acuerdo con la ecuación (2.0.69)
 $T = 3.336 - 288 + 423 = 3.471$ Kgms.

Según esto:

Para el coche descendente lleno:

$$\text{Para } t = 0 \quad T = 7.270 \text{ Kgms.}$$

$$\text{Para } t = 8,7 \text{ seg.} \quad T = 7.695 \text{ Kgms.}$$

$$(2.0.81) \quad T = m \cdot t + 7.270$$

$$7.695 = 8,7 \cdot m + 7.270$$

$$m = \frac{7.695 - 7.270}{8,7}$$

$$m = 48,9$$

$$(2.0.82) \quad T = 48,9 \cdot t + 7.270$$

Para el coche descendente vacío:

Para $t = 0$ seg. $T = 5.645$ Kgms.

Para $t = 8,7$ seg. $T = 5.844$ Kgms.

(2.0.83) $T = m \cdot t + 5.645$

$5.844 = 8,7 \cdot m + 5.645$

$m = \frac{199}{8,7} = 22,9$

(2.0.84) $T = 22,9 \cdot t + 5.645$

Con todas las ecuaciones obtenidas anteriormente reunimos, como se hizo en el caso del coche ascendente, todos los valores de variación en una tabla, segundo a segundo, durante el período de aceleración y frenado. Así se han obtenido las tablas (2.0.11) y (2.0.12)

t seg	ARRANQUE Descendente		LLEGADA Descendente	
	Lleno	Vacío	Lleno	Vacío
	T Kg.	T Kg.	T Kg.	T Kg.
0	5.800	2.707	7.270	5.645
1	5.849	2.730	7.319	5.668
2	5.897	2.752	7.368	5.691
3	5.946	2.775	7.417	5.714
4	5.994	2.797	7.466	5.737
5	6.043	2.820	7.515	5.760
6	6.092	2.843	7.563	5.782
7	6.140	2.865	7.612	5.805
8	6.189	2.888	7.661	5.828
8,7	6.223	2.904	7.695	5.844

TABLA (2.0.11)

TABLA (2.0.12)

2.0.14 ECUACION DE LA POTENCIA

Para el cálculo de la potencia del motor hay que considerar lo que ocurre con los momentos. El momento motriz de la máquina conforme a las leyes de la mecánica será igual a la suma del momento resistente más el momento dinámico. El momento resistente será el que actúa debido al peso de los coches y al rozamiento del cable y de los vehículos. El momento dinámico corresponde a todas las partes con movimientos rotatorios, es decir, las poleas de gufa, la polea motriz y los engranajes de reducción de velocidad.

La potencia, igualmente - por ser el producto del momento por la velocidad angular - vendrá dada por la potencia debida al momento resistente y la potencia debida al momento dinámico.

De acuerdo con esto se desarrollan las siguientes ecuaciones:

$$(2.0.85) \quad M_a = M_d + M_r$$

$$(2.0.86) \quad M_d = I \cdot \alpha$$

Siendo I el momento de inercia y α la aceleración angular.

$$(2.0.87) \quad I = m \cdot r^2 = \frac{G \cdot D^2}{4 \cdot g}; \quad \frac{G \cdot D^2 \cdot w}{4 \cdot g \cdot t} = M_d$$

$$(2.0.88) \quad M_d = \frac{2 \cdot \pi \cdot n \cdot GD^2}{60 \cdot 4 \cdot g \cdot t}$$

$$(2.0.89) \quad M_d = 2,67 \frac{n}{1.000} \sum \frac{GD^2}{t_a} \quad [\text{Kgm}]$$

Y el momento resistente:

$$(2.0.90) \quad M_r = F \cdot r ; \text{ Pero } F = T, \text{ entonces}$$

$$(2.0.91) \quad M_r = (T_2 - T_1) \cdot r ; \text{ Ahora bien } r = \frac{v}{\omega} \text{ y } Q = T_2 - T_1$$

$$(2.0.92) \quad M_r = 9,55 \frac{Q \cdot v}{n \eta} \text{ [Kgm]}$$

La ecuación (2.0.85) se transformará en la siguiente:

$$(2.0.93) \quad M_a = 2,67 \frac{n}{1.000} \sum \frac{GD^2}{t_a} + 9,55 \frac{Q \cdot v}{n \eta} \text{ [Kgm]}$$

Como la potencia es igual, por las leyes de la mecánica, al momento por la velocidad angular, la ecuación (2.0.89) en función de la potencia se transformará en

$$(2.0.94) \quad P_d = 2,74 \frac{n^2}{1000^2} \sum \frac{GD^2}{t_a} \text{ [Kw]}$$

Y la potencia debida al momento resistente,

$$(2.0.95) \quad P_r = \frac{Q \cdot v}{102 \eta} \text{ [Kw]}$$

Por lo tanto la ecuación de la potencia acelerante será:

$$(2.0.96) \quad P_a = 2,74 \frac{n^2}{1.000^2} \sum \frac{GD^2}{t_a} + \frac{Q \cdot v}{102 \eta} \text{ [Kw]}$$

Las ecuaciones desarrolladas sirven para calcular el momento y la potencia acelerantes; durante el período de movimiento uniforme el primer término de las ecuaciones (2.0.93) y (2.0.96) vale cero puesto que las aceleraciones angulares valen cero y estas ecuaciones se convier-

ten en:

Movimiento uniforme:

$$(2.0.97) \quad M_u = 9,55 \frac{Q \cdot v}{n \eta} \text{ [Kgms.]}$$

Y la potencia

$$(2.0.98) \quad P_u = \frac{Q \cdot v}{102 \eta} \text{ [Kw]}$$

Y luego en el período de deceleración o de frenado, la aceleración es negativa y las ecuaciones serán:

$$(2.0.99) \quad M_{des} = 9,55 \frac{Q \cdot v}{n \eta} - 2,67 \frac{n \sum GD^2}{1.000 \cdot t_a} \text{ [Kgm]}$$

Y la potencia

$$(2.0.100) \quad P_{des} = \frac{Q \cdot v}{102 \eta} - 2,74 \left(\frac{n}{1.000} \right)^2 \frac{\sum GD^2}{t_a} \text{ [Kw]}$$

Se va a establecer ahora los valores de potencia para el caso de movimiento uniforme según la ecuación (2.0.98) siendo

$$Q = T_2 - T_1 \text{ en donde } T_2 \text{ es tensión del ramal ascendente}$$

y T_1 es la tensión del ramal descendente.

Las tensiones del cable T_1 y T_2 están dadas en Kgms.

La velocidad de régimen $v = 3$ m/seg. de acuerdo con los datos del acápite (2.0.1). El rendimiento del mecanismo η se fija en 91% teniendo en cuenta las pérdidas por rozamiento del aire, las pérdidas en los cojinetes, las pérdidas por deslizamiento, pérdidas por flexión del ca

ble, pérdidas motrices por efectos calóricos y magnéticos, etc. (8)

2.1 POTENCIA DEL MOTOR

Para el cálculo de la potencia del motor hay que tener en cuenta los tres períodos de funcionamiento del sistema:

- a) Período de aceleración. A este período corresponde un tiempo $t = 8,7$ seg. y el espacio recorrido, de acuerdo con la fórmula del espacio corresponde a 13,05 mts. que aproximamos a 13 mts.
- b) Período de frenado. La aceleración de frenado es la misma que la de arranque con signo negativo. Por tanto el tiempo y el espacio recorrido será el mismo a la salida que a la llegada.
- c) Período de movimiento uniforme. De los 1926 mts. descontamos 13 mts. del arranque y 13 mts. de la deceleración de llegada. Por consiguiente el espacio recorrido con movimiento uniforme será de 1.900 mts.
El tiempo de marcha normal será, por las ecuaciones del movimiento, igual a 10,55 minutos.

Teniendo en cuenta la ecuación (2.0.100) demostrada para el cálculo de la potencia en el período de frenado y la ecuación (2.0.96) para la po

(8) Hütte, Manual del Ingeniero, Editorial Gustavo Gili, 1950, Tomo II, Pág. 304.

tencia en el arranque, en ambos casos es indispensable calcular el factor GD^2 del sistema. Este factor GD^2 llamado también módulo de inercia o factor de inercia influye decididamente en las condiciones de arranque y frenado. A base de este factor se puede deducir el valor de la corriente de arranque y las posibilidades de sobrecarga del motor en el período transitorio.

Es por lo tanto imprescindible calcular y diseñar todo el sistema de engranajes para conocer las masas que hay que acelerar en el arranque, y luego, calcular el módulo de inercia referido al eje del motor, tanto de las masas rotantes como de los coches según las fórmulas de transformación que se desarrollan más adelante. Evidentemente no se calculará una potencia basada en la potencia máxima que demande el sistema sino en una potencia media que permita una sobrecarga en el motor de acuerdo con lo que establecen los manuales, y durante períodos cortos de tiempo.

2.2 CONDICIONES DE ARRANQUE Y FRENADO

De las tablas (2.0.5) y (2.0.9) desarrollamos la siguiente tabla (2.2.1) en la que se dan los valores de las diferencias de tensión para los dos ramales del cable considerando las respectivas coordenadas y longitudes de los extremos. Esta tabla servirá para saber en forma aproximada cómo varía la potencia utilizada solamente para mover a los coches prescindiendo de la inercia de los mismos y de todo el sistema

rotante. La potencia se calcula de acuerdo a la ecuación (2.0.98). Utilizando un factor de rendimiento de 91%.

De acuerdo con los datos obtenidos la potencia para el arranque podrá subir de un valor cero a un valor muy grande que puede ser hasta el doble del nominal en las peores condiciones, y en el tiempo de 8,7 seg. que corresponde al período de arranque. De la misma manera, y debido a la inercia, - el motor está impulsado por la inercia durante el frenado - la potencia puede hacerse muy negativa, es decir, que el sistema motriz se convierte en sistema de recuperación de energía.

En todo caso conviene examinar lo que ocurre en los siguientes cuatro casos:

- a) Coche ascendente lleno y descendente lleno.
- b) Coche ascendente lleno y descendente vacío.
- c) Coche ascendente vacío y descendente lleno.
- d) Coche ascendente vacío y descendente vacío.

Evidentemente las condiciones más desventajosas corresponden al caso b) o sea coche ascendente lleno y descendente vacío. Si el sistema se diseña para este caso con seguridad también será válido para los otros casos. El caso más ventajoso corresponde al caso c), o sea coche ascendente vacío y descendente lleno. Es probable que en este caso se tenga una gran recuperación de energía y que ésta se pueda aprovechar en un banco de acumuladores u otro sistema.

También en este acápite se deduce la ecuación del momento de inercia de las masas rotantes referidas al eje del motor. Todo el sistema de engranajes corresponde al módulo de inercia de un cilindro. Y matemáticamente se puede encontrar una ecuación del factor GD^2 aplicable a cualquier rueda dentada, piñón o polea.

Sin considerar los efectos debidos a todo el sistema dinámico de engranes y poleas sino solamente la tensión debida a los coches y el cable tendremos las siguientes tablas (2.2.2) y (2.2.3) segundo a segundo para el arranque y frenado.

(seg)	(Kg)	(Kg)	(Kg)	(Kg)	(Kg)	(Kg)	(Kg)	(Kg)
t	T_A^{LL}	T_A^V	T_D^{LL}	T_D^V	$T_A^{LL} - T_D^{LL}$	$T_A^{LL} - T_D^V$	$T_A^V - T_D^{LL}$	$T_A^V - T_D^V$
0	9.528	7.370	5.800	2.707	3.728	6.821	1.570	4.663
1	9.435	7.303	5.849	2.730	3.686	6.705	1.454	4.573
2	9.341	7.235	5.897	2.752	3.444	6.589	1.348	4.483
3	9.248	7.168	5.946	2.775	3.302	6.473	1.222	4.393
4	9.155	7.100	5.994	2.797	3.161	6.358	1.106	4.303
5	9.062	7.033	6.043	2.820	2.919	6.242	990	4.213
6	8.968	6.950	6.092	2.843	2.876	6.125	858	4.107
7	8.875	6.898	6.140	2.865	2.735	6.010	758	4.033
8	8.782	6.830	6.189	2.888	2.593	5.894	641	3.942
8,7	8.716	6.783	6.223	2.904	2.493	5.812	560	3.879

TABLA (2.2.2) PARA LA TENSION DE ARRANQUE

uniforme y corresponde a la ecuación (2.0.98).

fijamos $v = 3\text{m/seg}$ y $\eta = 0,91 = 91\%$

Para el arranque se tiene en cuenta que

$$(2.2.2) \quad v = a \cdot t \quad \text{y la ecuación será}$$

$$(2.2.3) \quad P = \frac{T_{as} - T_{des}}{102 \eta} \cdot a \cdot t$$

Y para el frenado

$$(2.2.4) \quad P = \frac{T_{asc} - T_{des}}{102 \eta} a (8,7 - t)$$

Como $a = 0,345 \text{ m/seg}^2$, reemplazando los datos numéricos se tendrá:

$$P = \frac{T_{as} - T_{des}}{102 \cdot 0,91} \cdot 3 \quad [\text{Kw}]$$

$$P = \frac{T_{as} - T_{des}}{92,82} \cdot 3 \quad [\text{Kw}]$$

$$P = 0,03094 (T_{as} - T_{des}) \quad [\text{Kw}]$$

$$(2.2.5) \quad P = \frac{T_{as} - T_{des}}{32,32} \quad [\text{Kw}]$$

Aplicando estas fórmulas se tiene la tabla (2.2.4) de potencia demandada por los coches.

X _{asc}	Coche asc. lleno	Coche asc. lleno	Coche asc. vacío	Coche asc. vacío	X _{desc}
	Coche desc. lleno	Coche desc. vacío	Coche desc. lleno	Coche desc. vacío	
	Potencia Kw	Potencia Kw	Potencia Kw	Potencia Kw	
0	77,1	179,8	17,3	120	1.740
200	67,9	166,1	1,0	99,3	1.562
400	57,6	151,1	-15,8	77,7	1.380
600	43,2	131,7	-32,0	53,4	1.196
800	35,4	118,3	-50,6	32,3	999
1.000	23,7	100,4	-68,2	8,6	794
1.200	13,1	83,4	-84,3	-13,9	590
1.400	8,4	64,3	-101,8	-38,3	378
1.600	-6,4	46,7	-117,2	-61,0	166
1.740	-16,7	33,5	-127,8	-77,5	0

62

TABLA DE POTENCIAS PARA LOS COCHES (2.2.4)

Con relación a la potencia que se debe seleccionar para el motor es necesario tener en cuenta que el motor debe funcionar a una altura de 4.000 mts, lo cual implicará que la potencia de fábrica tendrá que ser mayor en un 15% de la potencia a 4.000 mts. (9). Por otro lado, como las condiciones de arranque pueden, por breves segundos, elevar la potencia hasta en un 100% por la corriente de arranque, el motor debe estar capacitado para este incremento de carga.

Sobre el cálculo de la potencia del motor se establecen los siguientes criterios en el tomo XI de la Escuela del Técnico Electricista.(10).

"Para conseguir buenas condiciones de funcionamiento y un servicio seguro, resulta muy importante que la potencia del motor sea convenientemente determinada. En muchos casos se calculan los motores con fórmulas sencillas para la máxima potencia a desarrollar. Esto da motivo a que en servicio normal resulte la potencia exagerada, ya que el valor máximo se requiere raramente. Claro está que previendo la potencia con gran amplitud se consigue sencillamente la eliminación de averías por calentamiento exagerado, pero también debe tenerse en cuenta que el precio del motor resulta mayor y que por lo tanto la instalación entera puede hallarse en difíciles condiciones para la competición. También puede

(9) Manual AEG, 9a. Edición, tabla 10/12, pág. 602.

(10) Hans Teuchert, La Escuela del Técnico Electricista, Tomo XI, pág. 191.

ocurrir que un motor demasiado potente presente dificultades para su regulación. Depende pues de la pericia del proyectista el determinar la potencia del motor lo más exactamente posible, de forma que la instalación quede en buenas condiciones por lo que se refiere a la competencia, pero, sin embargo, suficientemente holgada para poder cumplir todas las condiciones requeridas por la práctica.

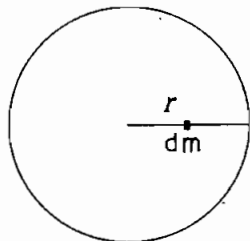
Por lo tanto, resulta conveniente escoger el motor, no por la potencia máxima a desarrollar, sino de acuerdo con el término medio del valor de la carga. El dato de carga máxima sólo debe ser utilizado para comprobar si el motor escogido tiene un par motor suficiente para los casos raros en que la energía alcance su valor máximo".

En el caso que nos ocupa se puede establecer la potencia de 170 Kw para todo el estudio, potencia que luego habrá que comprobar. El motor puede tener una capacidad de sobrecarga de un 100%.

2.2.1 ECUACIONES DEL MODULO DE INERCIA

Desde la ecuación (2.0.85) hasta la (2.0.100) se puede observar la importancia grande que tiene el factor GD^2 llamado módulo de inercia para los sistemas dinámicos.

Para un cilindro el valor GD^2 puede deducirse así:



$$(2.2.6) \quad I = mr^2$$

Siendo I el momento de inercia
 m la masa
 r el radio del cilindro

Derivando la ecuación (2.2.6)

$$(2.2.7) \quad dI = r^2 dm$$

Pero

$$(2.2.8) \quad m = \frac{P}{g} \quad \text{y también}$$

$$(2.2.9) \quad dm = \frac{dP}{g} \quad \text{resulta}$$

$$(2.2.10) \quad dI = r^2 \frac{dP}{g}$$

El peso P será

$$(2.2.11) \quad P = \gamma \cdot V$$

Siendo γ peso específico del material
 V volumen del cuerpo

El volumen del cilindro es

$$(2.2.12) \quad V = \pi r^2 L$$

Donde L es la longitud del cilindro

$$(2.2.13) \quad P = \gamma \pi r^2 L \quad \text{derivando}$$

$$(2.2.14) \quad dP = 2 \gamma \pi r L dr$$

Reemplazando en (2.2.10)

$$(2.2.15) \quad dI = 2 \gamma \pi r^3 L \frac{dr}{g}$$

Integrando

$$(2.2.16) \quad I = \frac{\gamma \pi r^4 L}{2 g}$$

y como

$$(2.2.17) \quad GD^2 = 4 g I \quad \text{tendremos}$$

$$(2.2.18) \quad GD^2 = 2 \gamma \pi r^4 L \quad \text{ó también}$$

$$(2.2.19) \quad GD^2 = \frac{\gamma \pi D^4 L}{8}$$

Reemplazando los valores

$$\gamma = 7,9 \text{ gr/cm}^3 \text{ del hierro.}$$

$$r = \frac{D}{2} \text{ dado en mts.}$$

$$L = \text{longitud en mts.}$$

$$g = \text{gravedad } 9,8 \text{ m/seg}^2$$

$$(2.2.20) \quad GD^2 = 392,69 \gamma D^4 L$$

Para el hierro

$$(2.2.21) \quad GD^2 = 3.102,3 D^4 L \quad \text{aproximando}$$

$$GD^2 = 3.100 D^4 L$$

2.3 CALCULO DE LA TRANSMISION Y ENGRANAJES

El accionamiento correspondiente al funicular está dado por el siguiente diagrama de bloques.

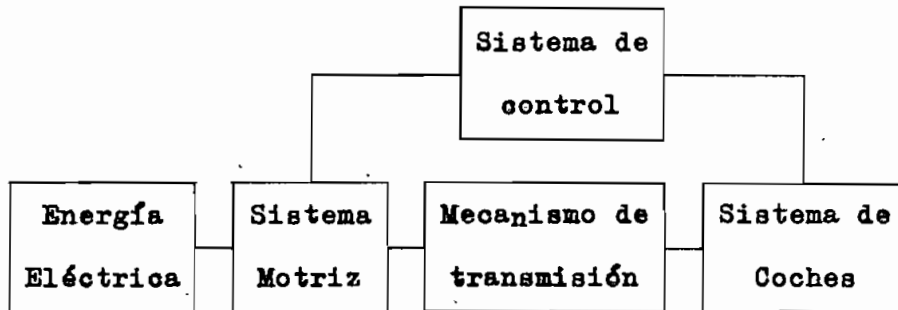


DIAGRAMA (2.3.1)

Es necesario diseñar un sistema de acoplamiento, transmisión y engranajes que permita adoptar una determinada potencia motriz, teniendo en cuenta los rendimientos.

Una vez diseñado el sistema de engranajes, se procederá a calcular el módulo de inercia de cada uno de los elementos del sistema, para poder analizar la cadena cinemática y establecer de un modo más real la potencia.

2.3.1 DIBUJO ESQUEMATICO DEL MECANISMO A OPERAR.

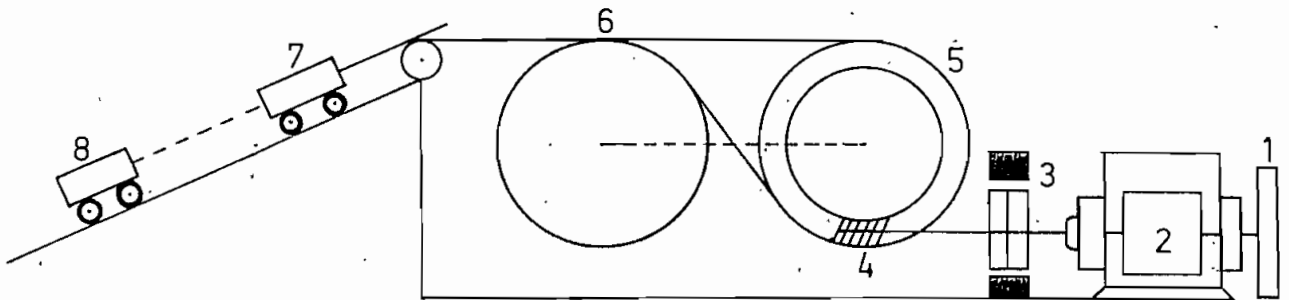


DIAGRAMA (2.3.2)

En el diagrama (2.3.2) se pueden distinguir los siguientes elementos del sistema:

1. Par adicional de inercia, volante
2. Motor, rotor del motor
3. Acoplamiento y freno
4. Engranajes
5. Tambor del cable, polea motriz
6. Polea de desviación
7. Coche que sube
8. Coche que baja.

El dibujo esquemático muestra la forma en que se intercalarán los distintos elementos para la transmisión del movimiento.

2.3.2 DIBUJO ESQUEMATICO DE LOS ENGRANAJES

Para poder diseñar el mecanismo de transmisión hay que tener en cuenta las siguientes consideraciones previas impuestas:

Velocidad del motor $n = 600$ r.p.m.

Velocidad de las poleas de desviación y de la polea motriz $v = 3$ m/s

Los elementos mecánicos de reducción de velocidad serán de acero con $\gamma = 7,9$ gr/cm³

Hay que considerar que el mecanismo debe diseñarse para operar una de terminada potencia motriz, la que se calculará en forma aproximada en otro apartado.

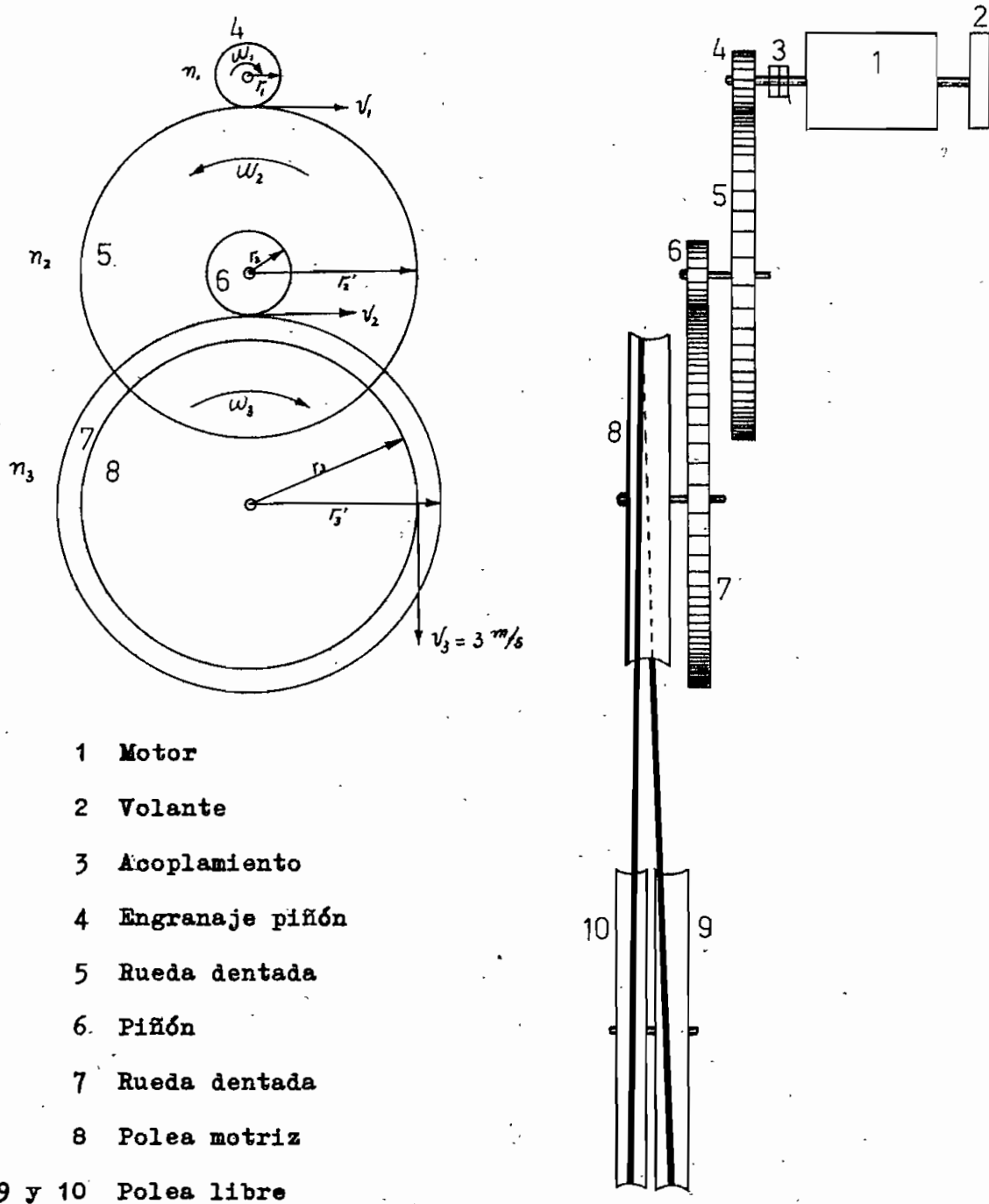


DIAGRAMA (2.3.3)

2.3.3 DEDUCCION DE LAS FORMULAS DE VELOCIDAD Y FORMULA DE LOS RADIOS

Las velocidades serán:

Polea 8 v_3, ω_3

Rueda dentada 7 ω_3

Piñón 6 ω_2

Rueda dentada 5 ω_2

Piñón 4 ω_1

La velocidad en la polea 8 será:

$$(2.3.1) \quad v_3 = \omega_3 r_3; \quad \text{de aquí se deduce}$$

$$(2.3.2) \quad \omega_3 = \frac{v_3}{r_3}$$

En el piñón 6 la velocidad v_2 será igual a:

$$(2.3.3) \quad v_2 = \omega_2 r_2 \quad \text{y}$$

$$(2.3.4) \quad v_2 = \omega_3 r_3' \quad \text{de donde se deduce}$$

$$(2.3.5) \quad \omega_2 r_2 = \omega_3 r_3'$$

Reemplazando el valor de ω_3 de (2.3.2)

$$(2.3.6) \quad \omega_2 r_2 = \frac{v_3}{r_3} r_3'$$

En el piñón 4 tendremos una velocidad:

$$v_1 = \omega_1 r_1 \quad \text{y también}$$

$$(2.3.7) \quad v_1 = \omega_2 r_2' \quad \text{de donde se deduce}$$

$$(2.3.8) \quad \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2' \quad \text{despejando } \omega_2$$

$$(2.3.9) \quad \omega_2 = \frac{\omega_1 r_1}{r_2'} \quad \text{reemplazando } \omega_2 \text{ en (2.3.4)}$$

$$(2.3.10) \quad r_2 \frac{\omega_1 r_1}{r_2'} = \frac{v_3}{r_3} r_3'$$

$$(2.3.11) \quad \frac{v_3}{\omega_1} = \frac{r_1 r_2 r_3}{r_2' r_3'}$$

La fórmula (2.3.9) establece las relaciones entre los radios en función de las velocidades. La velocidad $v_3 = 3$ m/seg y ω_1 corresponde a la velocidad de 600 r.p.m.

La velocidad de 1 r.p.m. corresponde a 2π 1/min. ó $\frac{2\pi}{60}$ 1/seg.

La velocidad de 600 r.p.m. será igual a

$$(2.3.12) \quad \omega_1 = \frac{600 \cdot 2\pi}{60} \quad \text{1/seg}$$

$$\omega_1 = 20 \cdot \pi \quad \text{1/seg}$$

$$(2.3.13) \quad \omega_1 = 62,8 \quad \text{1/seg.}$$

Reemplazando la velocidad $v = 3$ m/seg y $\omega_1 = 62,8$ 1/seg en la ecuación (2.3.11) tendremos

$$(2.3.14) \quad \frac{3 \text{ m/seg}}{62,8 \text{ 1/seg}} = \frac{r_1 r_2 r_3}{r_2' r_3'}$$

$$(2.3.15) \quad \frac{r_1 r_2 r_3}{r_2' r_3'} = 0,048 \text{ m}$$

Los valores r_1 , r_2 , r_3 , r_2' , r_3' deben ser seleccionados de acuerdo a la transmisión de potencia requerida y a la resistencia de los materiales.

2.3.4 RADIOS DE LOS PIÑONES Y RUEDAS

Para dimensionar los piñones y ruedas nos imponemos los valores de los radios respectivos que deben cumplir con los requisitos de velocidad, de acuerdo a la fórmula (2.3.9). Luego estos valores supuestos deben estar en relación con la resistencia de los materiales y los valores que se dan en la práctica. Esta comprobación se ha hecho tomando las referencias dadas en "Wyatt, Machine Design, Mc Graw Hill, 1962, pág. 81" y "ASME Handbook, Engineering Tables, Mc Graw Hill, 1956" pág 4-23

Una vez hecho este análisis hay que ver si las dimensiones adoptadas están de acuerdo a la potencia del motor, conforme al estudio de la cadena cinemática.

Los valores impuestos son:

$$r_1 = 0,26 \text{ m.}$$

$$r_2' = 1,2 \text{ mts.}$$

$$r_2 = 0,26 \text{ mts.}$$

$$r_3^1 = 1,4 \text{ mts.}$$

$$r_3 = X$$

Buscamos, aplicando la ecuación (2.3.15) el valor que conviene a r_3 .

$$(2.3.15) \quad \frac{r_1 r_2 r_3}{r_2^1 r_3^1} = 0,048$$

$$(2.3.16) \quad \frac{0,26 \times 0,26 \times X}{1,2 \times 1,4} = 0,048$$

$$(2.3.17) \quad X = \frac{1,2 \times 1,4 \times 0,048}{0,26 \times 0,26} = \frac{0,081}{0,067} = 1,2 \text{ m.}$$

$$r_3 = 1,2 \text{ m.}$$

El radio de la polea motriz será 1,2 mts.

2.3.5 VELOCIDADES EN LOS DISTINTOS ELEMENTOS DEL SISTEMA MECANICO

De acuerdo a la ecuación (2.3.2) $\omega_3 = \frac{v_3}{r_3}$ tendremos

$$(2.3.18) \quad \omega_3 = \frac{3 \text{ m/seg}}{1,2 \text{ m}} = 2,5 \text{ 1/seg}$$

Luego, por la ecuación (2.3.4) $v_2 = \omega_3 r_3^1$

$$(2.3.19) \quad v_2 = 2,5 \times 1,4 = 3,5 \text{ m/seg}$$

Por la ecuación (2.3.3) $v_2 = \omega_2 r_2$ tendremos

$$(2.3.20) \quad 3,5 = \omega_2 \cdot 0,26$$

$$(2.3.21) \quad \omega_2 = \frac{3,5}{0,26} = 13,5 \text{ 1/seg}$$

Y considerando la relación $v_1 = \omega_2 r_2^1$ (2.3.7)

$$(2.3.22) \quad v_1 = 13,5 \cdot 1,2$$

$$v_1 = 16,3 \text{ m/seg}$$

Y como $v_1 = \omega_1 r_1$ entonces

$$(2.3.23) \quad 16,3 = \omega_1 \cdot 0,26$$

$$(2.3.24) \quad \omega_1 = \frac{16,3}{0,26} = 62,8$$

$$\omega_1 = 62,8 \text{ 1/seg.}$$

Se ve que en cuanto a las velocidades se refiere, está perfectamente diseñado el mecanismo. Ahora tenemos que comprobar que está también de acuerdo a la resistencia de materiales.

El cuadro de velocidades será:

Piñón N° 4	$r_1 = 0,26 \text{ mts.}$
	$n_1 = 600 \text{ r.p.m.}$
	$\omega_1 = 62,8 \text{ 1/seg.}$
	$v_1 = 16,3 \text{ m/seg.}$

Rueda dentada N° 5	$v_1 = 16,3 \text{ m/seg.}$
	$\omega_2 = 13,5 \text{ 1/seg.}$
	$n_2 = 129 \text{ r.p.m.}$
	$r_2^1 = 1,20 \text{ mts.}$

Piñón N° 6	$v_2 = 3,5 \text{ m/seg.}$
	$\omega_2 = 13,5 \text{ 1/seg.}$
	$n_2 = 129 \text{ r.p.m.}$
	$r_2 = 0,26 \text{ mts.}$
Rueda dentada N° 7	$v_2 = 3,5 \text{ m/seg.}$
	$\omega_3 = 2,5 \text{ 1/seg.}$
	$n_3 = 24 \text{ r.p.m.}$
	$r_3^1 = 1,4 \text{ mts.}$
Polea motriz N° 8	$v_3 = 3 \text{ m/seg.}$
	$\omega_3 = 2,5 \text{ 1/seg.}$
	$n_3 = 24 \text{ r.p.m.}$
	$r_3 = 1,2 \text{ mts.}$

2.3.6 NUMERO DE DIENTES DE CADA PIÑON

De la ecuación (2.3.11) se puede deducir la siguiente relación: La longitud L de la rueda dentada es directamente proporcional al número de dientes z de modo que:

$$(2.3.25) \quad L = 2 \pi r = f(z) = z$$

Reemplazando el valor de r en (2.3.11)

$$(2.3.26) \quad \frac{v_3}{\omega_1} = \frac{\frac{z_1}{2\pi} \cdot \frac{z_2}{2\pi} \cdot r_3}{\frac{z_2^1}{2\pi} \cdot \frac{z_3^1}{2\pi}} \quad \text{Así que}$$

$$(2.3.27) \quad \frac{v_3}{\omega_1} = \frac{z_1 z_2 r_3}{z_2' z_3'}$$

Asumimos los siguientes datos, conforme a la tabla 4-12 del ASME HAND BOOK, Engineering Tables, Mc Graw Hill 1956, para lo cual es necesario traducir las dimensiones a pulgadas por medio de la relación:

$$(2.3.28) \quad 1 \text{ m.} = 39,5''$$

De esta manera,

$$\begin{aligned} \text{Piñón N° 4} \quad r_1 &= 0,26 \text{ mts.} = 10,0'' \\ z_1 &= 20 \text{ dientes.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Rueda N° 5} \quad r_2' &= 1,20 \text{ mts.} = 47,5'' \\ z_2' &= 95 \text{ dientes.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Piñón N° 6} \quad r_2 &= 0,26 \text{ mts.} = 10'' \\ z_2 &= 20 \text{ dientes.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Rueda N° 7} \quad r_3' &= 1,4 \text{ mts.} = 55,5'' \\ z_3 &= 111 \text{ dientes.} \end{aligned}$$

2.3.7 CALCULO DE LA RESISTENCIA DE LOS MATERIALES DE LAS RUEDAS Y PIÑONES (11)

La fórmula desarrollada en Raymond J. Roark "Fórmulas for stressand

(11) Machine Design, Wyatt, Mc Graw Hill NY 1962 pág. 50 se ha consultado para todo el desarrollo.

strain", 2Ed., pág. 276 Mc Graw Hill Book C. Inc. NY 1943, para el es
fuerzo que se produce al contacto de dos cilindros con los ejes parale
los es

$$(2.3.29) \quad S_c = 0,708 \left[\frac{\omega(d_1 + d_2)/d_1 d_2}{(1 - \mu_1)/E_1 + (1 - \mu_2)/E_2} \right]^{1/2}$$

Siendo:

S_c = Esfuerzo máximo de contacto en p.s.i.

0,708 = Factor de conversión de unidades.

ω = Carga por pulgada de contacto lbs/pulg.

$d_1 d_2$ = Diámetros de los cilindros en pulgadas.

$\mu_1 \mu_2$ = Relación de Poisson de los materiales de los cilindros.

$E_1 E_2$ = Módulo de elasticidad.

Asumiendo una relación de Poisson de $\mu = 0,3$ y teniendo en cuenta que:

$$(2.3.30) \quad d_1 = 2 r_1 \quad y$$

$$(2.3.31) \quad d_2 = 2 r_2 \quad \text{tendremos la ecuación (2.3.29) trans}$$

formada en:

$$(2.3.32) \quad S_c = 0,708 \left[\frac{\omega \frac{2 r_1 + 2 r_2}{4 r_1 r_2}}{0,7 \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right)} \right]^{1/2}$$

Resolviendo las operaciones:

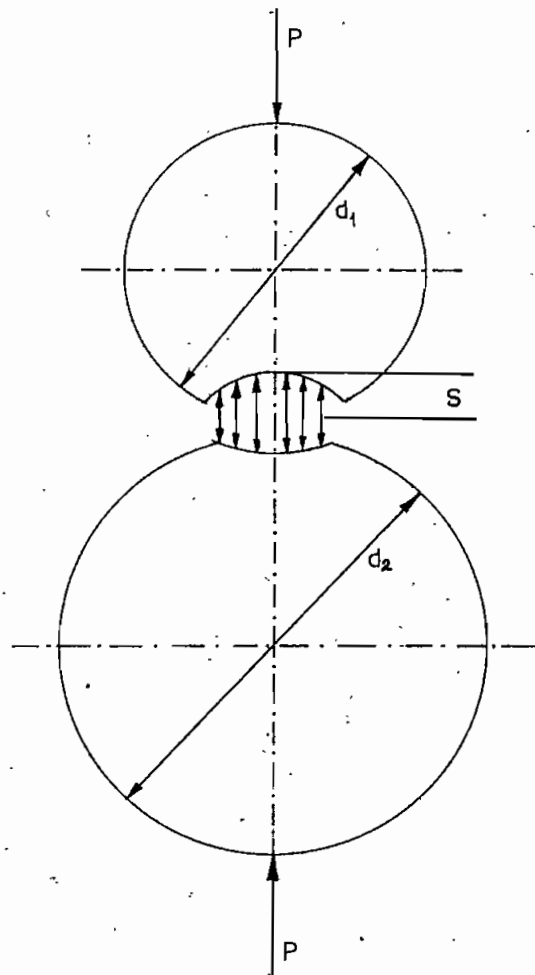


DIAGRAMA (2.3.4)

$$(2.3.33) \quad S_c = 0,708 \left[\frac{\omega \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)}{1,4 \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right)} \right]^{1/2}$$

Elevando al cuadrado:

$$(2.3.34) \quad S_c^2 = 0,5 \frac{\omega \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)}{1,4 \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right)}$$

$$(2.3.35) \quad S_c^2 = 0,35 \frac{\omega \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)}{\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}}$$

Asumiendo que K_c , factor de esfuerzo por contacto de carga, es igual a

$$(2.3.36) \quad K_c = \frac{S_o^2}{0,35} \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right)$$

Entonces

$$(2.3.37) \quad K_c = \omega \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \quad y$$

$$(2.3.38) \quad \omega = \frac{K_c}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}}$$

Con los valores así deducidos, la ecuación (2.3.38) se transforma en:

$$(2.3.39) \quad K_c = \frac{S_c^2}{0,35} \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right)$$

Despejando S_c^2

$$(2.3.40) \quad S_c^2 = \frac{0,35 K_c}{\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}}$$

Reemplazando el valor de K_c de la ecuación (2.3.40)

$$(2.3.41) \quad S_c^2 = \frac{0,35 \omega \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)}{\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}}$$

Al actuar ya no la superficie cilíndrica sino los dientes, se produce el esfuerzo que es igual a la carga sobre el ancho del diente. Por lo tanto:

$$(2.3.42) \quad \omega = \frac{F}{b}$$

donde

ω = carga de contacto.

F = carga en lbs.

b = ancho en pulgadas del diente.

La ecuación (2.3.41) se transforma en

$$(2.3.43) \quad S_c^2 = \frac{0,35 F \left(\frac{1}{r_{c1}} + \frac{1}{r_{c2}} \right)}{b \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right)}$$

S_c = esfuerzo de contacto en psi

r_{c1} y r_{c2} = radios de contacto

E_1 y E_2 = Módulo de elasticidad del material psi

Por experiencia el esfuerzo se produce en el punto de contacto, este punto está dado por:

$$(2.3.44) \quad r_{c1} = \frac{d_1 \operatorname{sen} \phi}{2}$$

$$(2.3.45) \quad r_{c2} = \frac{d_2 \operatorname{sen} \phi}{2}$$

Despejando en la ecuación (2.3.43) el valor de F

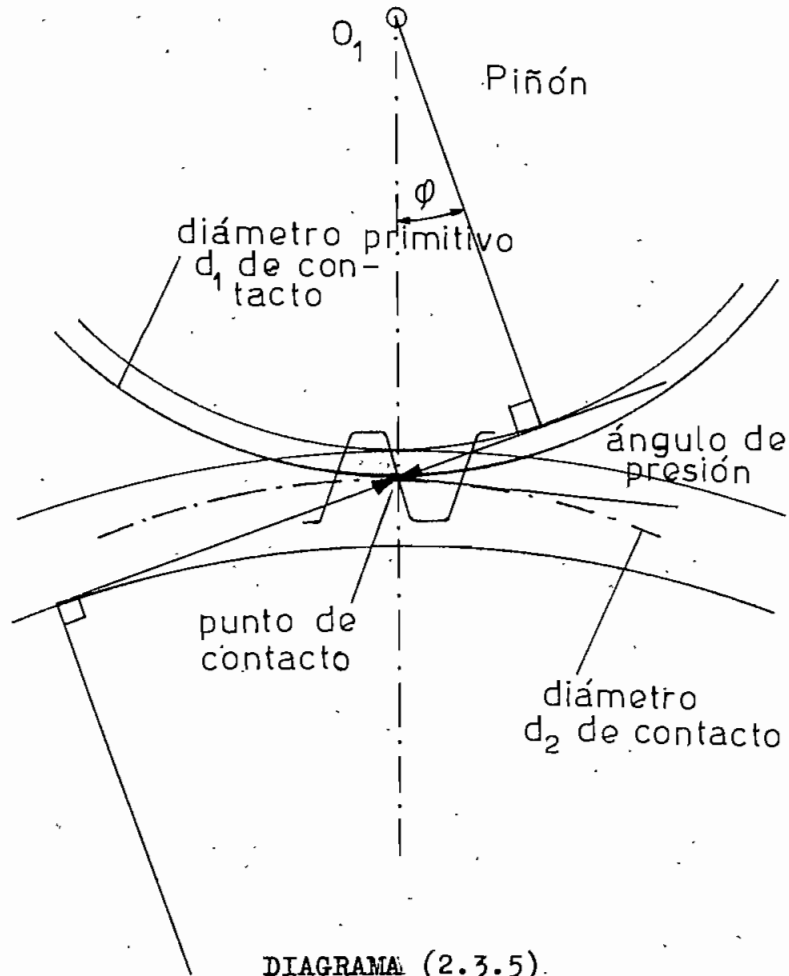


DIAGRAMA (2.3.5).

$$(2.3.46) \quad F = \frac{S_c^2 b \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right)}{0,35 \left(\frac{1}{r_{c_1}} + \frac{1}{r_{c_2}} \right)}$$

Reemplazando los valores r_{c_1} y r_{c_2} en la ecuación (2.3.44-45)

$$(2.3.47) \quad F = \frac{S_c^2 b \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right)}{0,35 \left(\frac{2}{d_1 \text{ sen } \phi} + \frac{2}{d_2 \text{ sen } \phi} \right)}$$

$$(2.3.48) \quad F = \frac{S_c^2 b \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right)}{\frac{0,7}{\text{sen } \phi} \left(\frac{d_1 + d_2}{d_1 d_2} \right)}$$

Desarrollando más la ecuación (2.3.48)

$$(2.3.49) \quad F = \frac{S_c^2 b \text{ sen } \phi \cdot 2 d_1 d_2 \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right)}{1,4 (d_1 + d_2)}$$

Establecemos las siguientes constantes:

$$(2.3.50) \quad K_B = \frac{S_c^2}{1,4} \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right) \text{ sen } \phi \quad \text{y también}$$

$$(2.3.51) \quad Q = \frac{2 d_2}{d_2 + d_1} \quad \text{sustituyendo } K_B \text{ y } Q$$

$$(2.3.52) \quad F = K_B Q b d_1$$

La ecuación (2.3.52) es denominada la "ecuación de desgaste de Buckingham" (12)

Si se considera que el ancho del diente del piñón b , es inversamente proporcional al diámetro, en la práctica se calcula así:

$$(2.3.53) \quad P_d = \frac{Q}{b}$$

(12) Earle Buckingham, Analytical Mechanics of Gears, Mc Graw Hill Book Company, Inc. NY 1949.

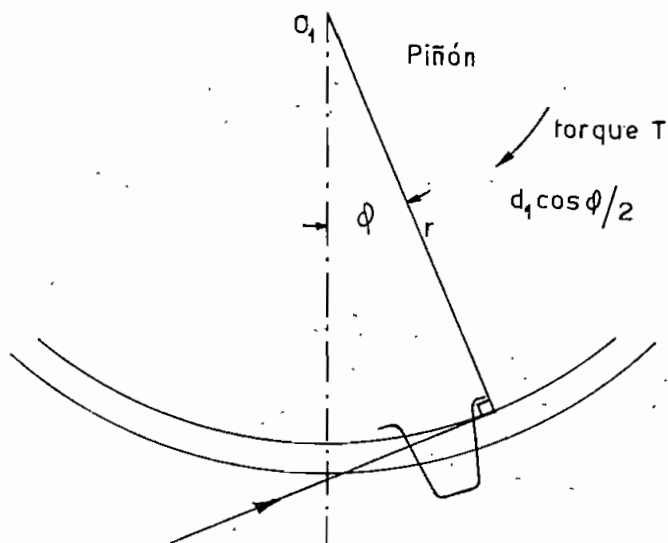
Ver también en Wyatt, Machine Design, pág. 73.

Siendo:

P_d el paso diametral

$$C = 3\pi \text{ ó } 4\pi$$

b = ancho del diente.



$$F = \frac{2T}{d_1 \cos \phi}$$

DIAGRAMA (2.3.6)

La fuerza F correspondiente a los dientes en función del torque es:

$$(2.3.54) \quad T = F r \cos \phi$$

$$(2.3.55) \quad 2T = F \cdot 2r \cos \phi$$

$$(2.3.56) \quad 2T = F d_1 \cos \phi$$

$$(2.3.57) \quad F = \frac{2T}{d_1 \cos \phi}$$

El paso diametral P_d debe ser igual al número de dientes sobre el diámetro primitivo de contacto.

$$(2.3.58) \quad P_d = \frac{N_1}{d_1}$$

De donde, reemplazando d_1

$$(2.3.59) \quad d_1 = \frac{N_1}{P_d} \quad \text{y} \quad F = \frac{2 T P_d}{N_1 \cos \phi} \quad (2.3.60)$$

Siendo

N el número de dientes.

d_1 el diámetro primitivo de contacto

P_d el paso transversal

En la ecuación $F = K_B Q b d_1$ (2.3.52) sustituimos el valor de b de (2.3.53)

$$(2.3.61) \quad b = \frac{C}{P_d} \quad \text{y tendremos}$$

$$(2.3.62) \quad F = K_B Q \frac{C}{P_d} d_1$$

Luego sustituimos Q por el valor que se deducirá de la ecuación

(2.3.51)

$$(2.3.51) \quad Q = \frac{2 d_2}{d_2 + d_1} \quad \text{Pero}$$

$$(2.3.63) \quad m_G = \frac{N_2}{N_1} = \frac{d_2}{d_1} \quad \text{porque hay una relación directa y constante entre el número de dien}$$

tes y los diámetros primitivos de contacto, entonces:

$$(2.3.64) \quad Q = \frac{2 \frac{d_2}{d_1}}{1 + \frac{d_2}{d_1}} \quad y$$

$$(2.3.65) \quad Q = \frac{2 m_G}{1 + m_G}$$

Sustituyendo el valor de Q de la ecuación (2.3.65) en la ecuación (2.3.62) tendremos:

$$(2.3.66) \quad F = K_B \frac{2 m_G}{1 + m_G} \frac{C}{P_d} d_1$$

Reemplazando el valor de F de la ecuación (2.3.60) tendremos:

$$(2.3.67) \quad \frac{2 T P_d}{N_1 \cos \phi} = K_B \frac{2 m_G}{1 + m_G} \frac{C}{P_d} d_1$$

Despejando el valor del paso diametral P_d , tendremos:

$$(2.3.68) \quad P_d^2 = \frac{N_1 \cos \phi K_B \frac{2 m_G}{1 + m_G} C d_1}{2 T}$$

Finalmente de la ecuación (2.3.58) se desprende que $d_1 = \frac{N_1}{P_d}$ (2.3.59)

y reemplazando d_1 en la ecuación (2.3.68) tendremos:

$$(2.3.69) \quad P_d^2 = \frac{N_1 \cos \phi K_B \frac{2 m_G}{1 + m_G} C \frac{N_1}{P_d}}{2 T}$$

Pasando P_d al otro lado

$$(2.3.70) \quad P_d^3 = \frac{C N_1^2 \cos \phi K_B \frac{2 m_G}{1 + m_G}}{2 T}$$

Extrayendo la raíz tendremos:

$$(2.3.71) \quad P_d = \left[\frac{C N_1^2 \cos \phi K_B \frac{2 m_G}{1 + m_G}}{2 T} \right]^{1/3}$$

Esta fórmula deducida a partir del esfuerzo que soportan los dientes de un engranaje según la potencia que deben transmitir, es la fórmula básica para encontrar el paso diametral del diseño de ruedas dentadas.

Considerando el torque en lib-pulg y la potencia en HP tendremos

$$(13) \quad (2.3.72) \quad T' = \frac{63.000 \text{ HP}}{n} \quad \text{donde}$$

T' = Torque en lb-pulg del sistema

HP = Potencia

n = Velocidad del piñón en r.p.m.

Pero hay que considerar varios factores que modifican el valor del par inicial T' estos son los llamados factores de servicio C_s y factor de velocidad. Estos factores se dan en tablas y están afectados por las características de las ruedas dentadas que se producen en el mercado.

(13) Wyatt Machine Design, Mc Graw Hill, 1962 NY, pág. 75.

Así el torque T que nos interesa será:

$$(2.3.73) \quad T = C_s C_v T'$$

Siendo T el torque real

C_s el factor de servicio

C_v el factor de velocidad

T' el torque nominal del sistema

La velocidad lineal viene dada por:

$$(2.3.74) \quad v = \frac{\pi d n}{12} \text{ (pies/minuto)}$$

Donde d = diámetro primitivo

n = revoluciones por minuto.

El siguiente cuadro representa los factores de velocidad expuestos en Machine Design de Wyatt, pág. 76:

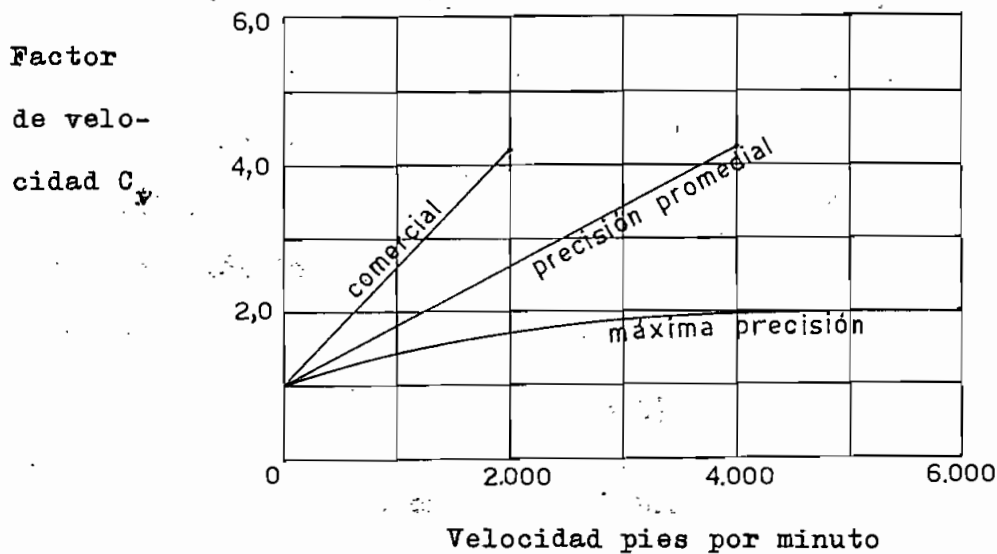


TABLA (2.3.1)

Los valores de la superficie de fatiga y factores de esfuerzo de carga se hallan expuestos en la tabla (2.3.3) sacado del libro, antes mencionado, Machine Design de Wyatt, pág. 78.

En todos los casos se trata de ruedas de acero de distinta dureza Brinell (Bhn, Brinell hardness number).

Material del piñón	Bhn	Material de rueda dentada	Bhn	K_B 14 $\frac{1}{2}$ °	K_B 20°
Acero	150	Acero	150	30	41
Acero	200	Acero	150	43	58
Acero	250	Acero	150	58	79
Acero	200	Acero	200	58	79
Acero	250	Acero	200	76	103
Acero	300	Acero	200	96	131
Acero	250	Acero	250	96	131
Acero	300	Acero	250	119	162
Acero	350	Acero	250	144	196
Acero	300	Acero	300	144	196
Acero	350	Acero	300	171	233
Acero	400	Acero	300	186	254
Acero	350	Acero	350	201	275
Acero	400	Acero	350	233	318
Acero	400	Acero	400	268	366

(14) TABLA (2.3.3)

La relación entre las constantes K_B y K_C está dada por la fórmula

$$(2.3.75) \quad K_B = \frac{K_C \operatorname{sen} \phi}{4}$$

2.3.8 ESPECIFICACIONES DE LAS RUEDAS DENTADAS Y PIÑONES

De acuerdo con las dimensiones establecidas en los acápites 2.3.6 y 2.3.7 se debe comprobar y especificar las ruedas dentadas según la resistencia de los materiales.

Calculamos primero el paso diametral P_d según la ecuación (2.3.71)

$$(2.3.71) \quad P_d = \left[\frac{C N_1^2 \cos \phi K_B \frac{2 m_G}{1 + m_G}}{2 T} \right]^{1/3}$$

Vamos a calcular el piñón N° 4 cuyas dimensiones son

$$\begin{aligned} \text{Piñón N° 4} \quad r_1 &= 0,26 \text{ mts.} = 10'' \\ z_1 &= 20 \text{ dientes} \\ n_1 &= 600 \text{ r.p.m.} \\ v_1 &= 16,3 \text{ m/s} = 50 \text{ pie/seg.} = 3.000 \text{ pies/min} \end{aligned}$$

y rueda N° 5 con los siguientes datos

$$\begin{aligned} r_2' &= 1,20 \text{ mts.} = 47,5'' \\ z_2' &= 95 \text{ dientes} \\ n_2 &= 129 \text{ r.p.m.} \\ v_2 &= 16,3 \text{ m/s} = 50 \text{ pie/seg} = 3.000 \text{ pies/min.} \end{aligned}$$

Aplicamos los valores siguientes a la fórmula (2.3.71)

$$C = 3\pi$$

$$N_1 = z_1 = 20 \text{ dientes}$$

$$N_2 = 400$$

$$\cos \phi = \cos 20^\circ = 0,94$$

K_B = Resistencia del material Acero de la rueda y acero del piñón 150 Bhn y 150 Bhn esto da un K_B para $20^\circ = 41$

$$K_B = 41$$

$$Q = \frac{2 m_G}{H m_G}$$

$$m_G = \frac{n_1}{n_2} = \frac{600}{129} = 4,65$$

$$Q = \frac{2 \times 4,65}{1 + 4,65} = 1,64$$

El torque será $T = C_s \cdot C_v \cdot T'$

$$T' = 63.000 \text{ HP/n}$$

Conforme al acápite (2.3.4) fórmula (2.3.20) la potencia de nuestro sistema es 230 HP, así:

$$T' = 63.000 \cdot \frac{230 \text{ HP}}{600}$$

$$T' = 24.200 \text{ lib-pulgada.}$$

Consideraremos un coeficiente C_s de servicio igual a $C_s = 1,25$ correspondiente al motor eléctrico con 8 h de trabajo diarias y un coeficiente de velocidad correspondiente a 3.000 pies/minuto, de acuerdo a la

tabla (2.3.1) = $C_v = 3$.

Así, el torque T será:

$$T = 1,25 \times 3 \times 24.200 \text{ lb-pulg.}$$

$$T = 91.000 \text{ lb-pulg.}$$

$$2T = 182.000 \text{ lb-pulg.}$$

Reemplazando estos valores en la ecuación (2.3.71) tendremos:

$$P_d = \left[\frac{3\pi \cdot 400 \cdot 0,94 \cdot 41 \times 1,64}{182.000} \right]^{1/3}$$

$$P_d = \left[\frac{237.000}{182.000} \right]^{1/3} = [1,31]^{1/3}$$

$$P_d = 1,1 \sim 1$$

El diámetro d_1 de acuerdo a la fórmula (2.3.58) será:

$$d_1 = \frac{N_1}{P_d} \quad \text{reemplazando } N_1 \text{ por 20 dientes y } P_d \text{ por 1 tendremos:}$$

$$d_1 = \frac{20}{1} = 20'' \quad \text{y la velocidad } V = \pi \cdot d_1 \cdot n_1 // 12 \text{ deberá cumplir}$$

la ecuación (2.3.74)

$$V = \frac{\pi \cdot 20 \cdot 600}{12} = 3140 \sim 3000$$

El diámetro de la rueda d_2 será proporcional a la relación de velocidades

$$\frac{d_2}{20''} = \frac{600}{129}$$

$d_2^1 = 95''$ aproximadamente.

El ancho de las ruedas estará dado por la ecuación (2.3.61) $b = \frac{c}{P_d}$

El valor de c quedó fijado en 3π

$$b = \frac{c}{P_d} = \frac{3\pi}{1}''$$

$$b = 10''$$

Las especificaciones del piñón N° 4 serán finalmente:

Piñón de acero, 150 Bhn - 150 Bhn, 20 dientes a $20^\circ 20''$ de diámetro primitivo y ancho de 10".

Rueda de acero 150 Bhn - 150 Bhn de 95 dientes, 95" de diámetro y ancho de 10".

Especificaciones del piñón N° 6 y de la rueda N° 7.

Dimensiones del piñón N° 6

$$r_2 = 0,26 \text{ m} = 10''$$

$$z_2 = 20 \text{ dientes}$$

$$n_2 = 129 \text{ r.p.m.}$$

$$v_2 = 3,5 \text{ m/s} = 700 \text{ pies/min.}$$

Rueda dentada N° 7

$$r_3^1 = 1,4 \text{ mts} = 55''$$

$$z_3^1 = 111 \text{ dientes}$$

$$n_3 = 24 \text{ r.p.m.}$$

$$v_2 = 3,5 \text{ m/s} = 700 \text{ pies/min.}$$

Aplicamos los valores que se indican a continuación para reemplazarlos en la ecuación (2.3.71)

$$P_d = \left[\frac{C N_1^2 \cos \phi K_B \frac{2 m_G}{1 + m_G}}{2 T} \right]^{1/3}$$

$$C = 3 \pi$$

$$N_1 = z_2 = 20 \text{ dientes}$$

$$N_1^2 = 400$$

$$\cos \phi = \cos 20^\circ = 0,94$$

K_B , resistencia del material, acero de la rueda y acero del piñón 300 Bhn - 250 Bhn

$$K_B = 162 \text{ para } 20^\circ$$

$$Q = \frac{2 m_G}{1 + m_G}$$

$$m_G = \frac{129}{24} = 5,4$$

$$Q = \frac{2 \times 5,4}{1 + 5,4} = 1,68$$

$$T' = 63.000 \frac{\text{HP}}{n}$$

$$T' = 63.000 \cdot \frac{230}{129}$$

$$T' = 112.000 \text{ lib-pulg}$$

$$T = C_v C_s T'$$

$$C_v = 3$$

$$C_s = 1,25$$

$$T = 3 \times 1,25 \times 112.000$$

$$T = 421.000 \text{ lb.-pulg}$$

Reemplazando en la ecuación (2.3.71)

$$P_d = \left[\frac{3 \pi \cdot 400 \cdot 0,94 \cdot 162 \cdot 1,68}{842.000} \right]^{1/3}$$

$$P_d = \left[\frac{960.000}{842.000} \right]^{1/3}$$

$$P_d = [1,14]^{1/3}$$

$$P_d = 1,07 \sim 1$$

El diámetro, conforme (2.3.58) es $d_1 = \frac{N_1}{P_d}$

$$d_1 = \frac{20}{1} = 20''$$

La velocidad

$$V = \frac{\pi \cdot 20 \cdot 129}{12} \sim 700 \text{ pie/seg}$$

El diámetro de la rueda N° 7 será

$$\frac{d_3}{20''} = \frac{129}{24}$$

$$d_3 = 111 \text{ pulg.} \quad \text{Ancho } b = \frac{C}{P_d} = \frac{3\pi}{1} = 10''$$

Las especificaciones serán

Piñón de acero de 300 - 250 Bhn, 20 dientes a 20° 20" de diámetro primitivo y ancho de 10". Rueda de acero. 300 - 250 Bhn, 111 dientes a 20° 111" de diámetro primitivo y ancho de 10"

2.3.9 CARACTERISTICAS DE LAS RUEDAS DENTADAS Y PIÑONES

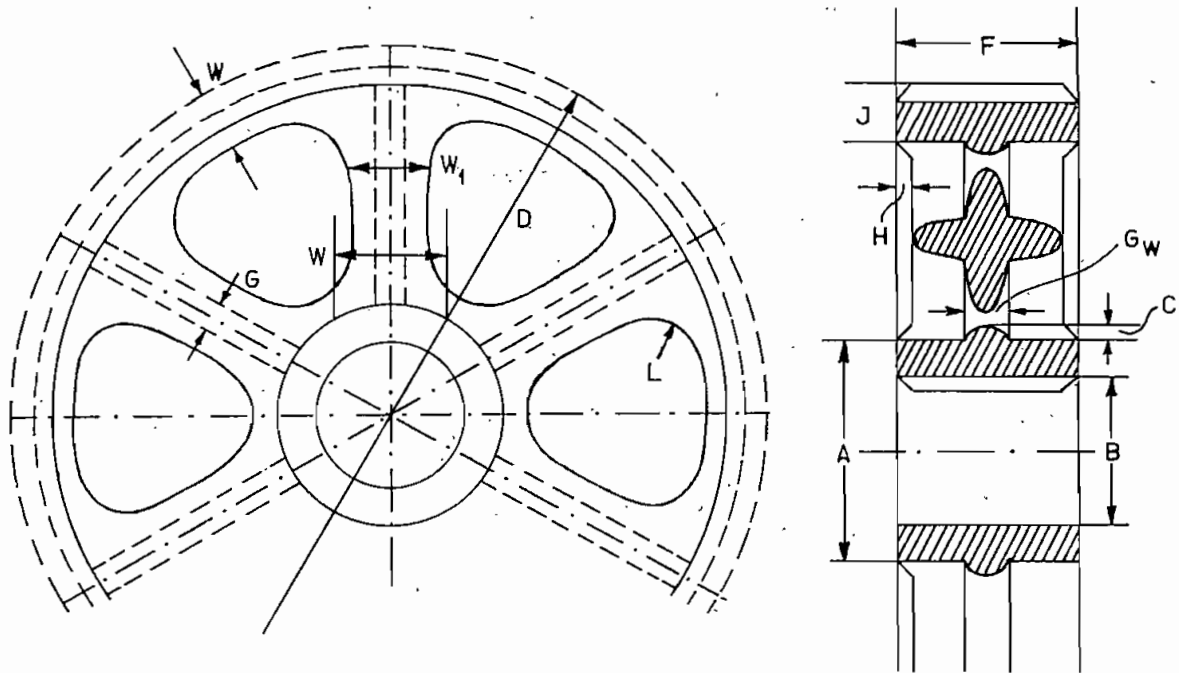


DIAGRAMA (2.3.7)

Conforme a la tabla 4-18, pág. 4-22 de Engineering Tables, Asme, hand book, Mc Graw Hill, 1956.

Los valores para dimensionar las ruedas y piñones se calculan así todas en pulgadas.

$$(2.3.76) \quad A = 1,6 B \quad \text{para acero}$$

$$(2.3.77) \quad A = 1,8 B \quad \text{para hierro dulce}$$

$$(2.3.78) \quad B = 6 \sqrt[3]{\frac{HP}{r.p.m.}} \quad (\text{promedio})$$

$$(2.3.79) \quad B = 5 \sqrt[3]{\frac{HP}{r.p.m.}} \quad (\text{mínimo})$$

$$(2.3.80) \quad B = 7 \sqrt[3]{\frac{HP}{r.p.m.}} \quad (\text{máximo})$$

$$(2.3.81) \quad G_w = \text{Tabla (2.3.4)}$$

$$(2.3.82) \quad J = \text{Tabla (2.3.4)}$$

$$(2.3.83) \quad H = \frac{F}{12}$$

$$(2.3.84) \quad L = 0,33 W$$

$$(2.3.85) \quad W = 0,33 \sqrt{DF} \quad \text{ó tabla (2.3.5)}$$

$$W_1 = W - 0,8 \text{ pulgadas por pie.}$$

Tabla para calcular G y J

Paso Diametral	G	J
3/4		4 3/4
1	1 1/4	3 5/8
1 1/4	1	2 15/16
1 1/2	7/8	2 7/16
1 3/4	7/8	2 1/8
2	3/4	1 7/8
2 1/4	3/4	1 11/16
2 1/2	3/4	1 9/16
3	5/8	1 5/16
3 1/2	5/8	1 1/8
4	9/16	1
4 1/2	9/16	15/16
5	9/16	7/8

TABLA (2.3.4)

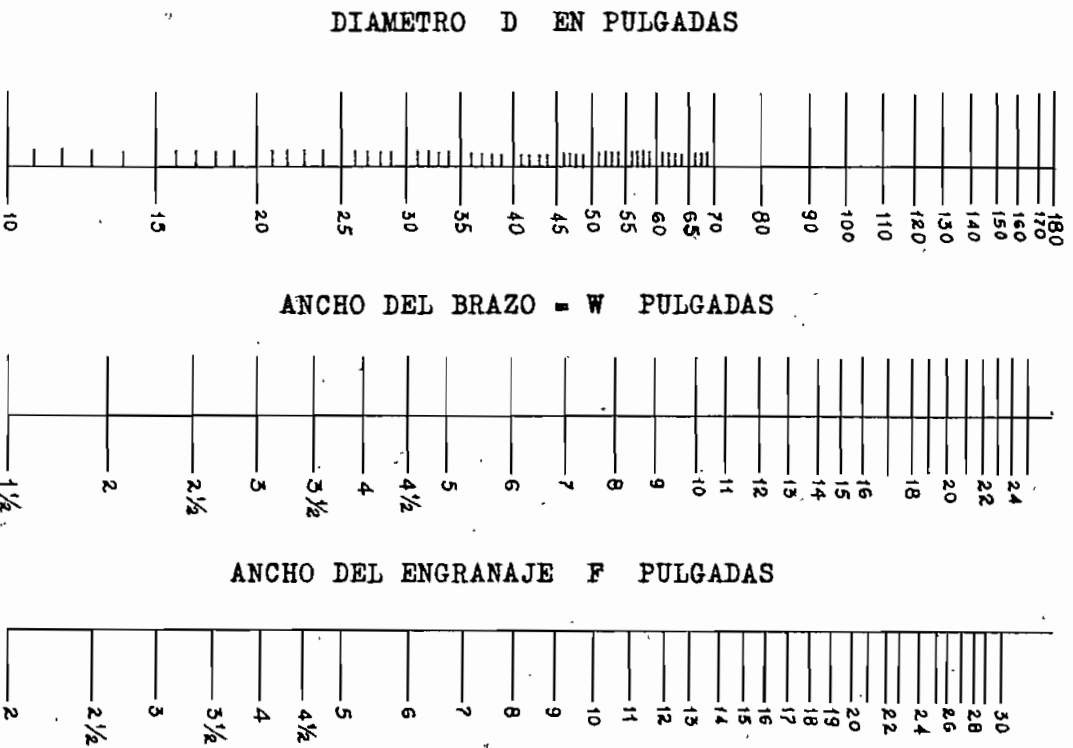


TABLA (2.3.5)

2.3.10 DISEÑO Y CARACTERÍSTICAS DEL PIÑÓN N° 4 Y RUEDA DENTADA N° 5

Conforme al diagrama (2.3.7), las características del piñón N° 4 serán

Radio $r = 10'' = 0,26 \text{ m.}$

Diámetro $D = 20'' = 0,52 \text{ m.}$

Número de dientes $z = 20$ dientes

Ancho $F = 10'' = 0,26 \text{ m.}$

Velocidad $n = 600 \text{ r.p.m.}$

Velocidad angular $\omega = 62,8$ 1/seg.

Velocidad lineal $v = 16,3$ m/seg.

$v = 3000$ pies/minuto.

Ancho del eje del piñón

Eje $B = 6 \sqrt[3]{\frac{HP}{r.p.m.}}$ según la ecuación (2.3.78)

$$B = 6 \sqrt[3]{\frac{230}{600}}$$

$$B = 6 \sqrt[3]{0,383}$$

$$B = 6 \cdot 0,725$$

$$B = 4,4 \text{ pulg.}$$

Ancho $A = 1,6 B$ según la ecuación (2.3.76)

$$A = 4,4 \times 1,6 = 7 \text{ pulg.}$$

Ancho del brazo interior G_w según la tabla (2.3.4) para un $P_d = 1$

$$G_w = 1 \frac{1}{4} \text{ "}$$

Valor de J , según la tabla (2.3.4)

$$J = 3 \text{ "}$$

Valor H según la relación (2.3.83)

$$H = \frac{F}{12}$$

$$H = \frac{10}{12} = 5/6 \text{ "}$$

Ancho del brazo $W = 0,33 \sqrt{DF}$ ó tabla (2.3.5). Según la tabla:

$$W = 4 \frac{1}{2} \text{ "}$$

Valor de W_1 del brazo

$$W_1 = 4,5 - 0,8 = 3,7''$$

Las dimensiones y características de la rueda dentada N° 5 serán las siguientes:

Radio $r = 47,5'' = 1,20$ mts.

Diámetro $D = 95'' = 2,40$ mts.

Número de dientes $z = 95$ dientes.

Ancho $F = 10'' = 0,26$ mts.

Velocidad $n = 129$ r.p.m.

Velocidad angular $\omega = 13,5$ 1/seg.

Velocidad lineal $v = 16,3$ m/s = 3000 pies/min.

Ancho del eje de la rueda

$$B = 6 \sqrt[3]{\frac{HP}{r.p.m.}}$$

$$B = 6 \sqrt[3]{\frac{230}{129}}$$

$$B = 6 \sqrt[3]{1,78}$$

$$B = 6 \cdot 1,2$$

$$B = 7,2''$$

Ancho A de la rueda

$$A = 1,6 \times 7,2 = 11,5''$$

Valor de G_w para $P_d = 1$ tabla (2.3.4)

$$G_w = 1 \frac{1}{4}''$$

Valor de J según la tabla (2.3.4)

$$J = 3''$$

Valor de H conforme la relación (2.3.83)

$$H = \frac{10}{12} = 5/6''$$

Ancho del brazo W según la tabla (2.3.5)

$$W = 10,5''$$

Valor de W_1

$$W_1 = 10,5 - 0,8 = 9,7''$$

2.3.11 DISEÑO Y CARACTERISTICAS DEL PIÑÓN N° 6 Y RUEDA DENTADA N° 7

Piñón N° 6

Radio $r = 10'' = 0,26$ m.

Diámetro $D = 20'' = 0,52$ m.

Número de dientes $z = 20$ dientes.

Ancho $F = 10'' = 0,26$ m.

Velocidad $n = 129$ r.p.m.

Velocidad angular $\omega = 13,5$ 1/seg

Velocidad lineal $v = 3,5$ m/s.

$v = 700$ pies/min.

Ancho del eje del piñón B

$$B = 6 \sqrt[3]{\frac{230}{129}}$$

$$B = 7,2 \text{ pulg.}$$

Ancho $A = 1,6 \times 7,2 = 11,5''$

Valor G_w para $P_d = 1$

$$G_w = 1 \frac{1}{4}''$$

Valor de J según tabla (2.3.4)

$$J = 3''$$

Valor de H por la relación (2.3.83)

$$H = \frac{10}{12} = 5/6''$$

Ancho del brazo $W = 0,33 \sqrt{DF}$ ó tabla (2.3.5)

$$W = 4 \frac{1}{2}''$$

Valor W_1 del brazo

$$W_1 = 4,5 - 0,8 = 3,7''$$

Rueda dentada N° 7

Radio $r = 55'' = 1,4 \text{ mts.}$

Diámetro $D = 111'' = 2,8 \text{ mts.}$

Número de dientes $z = 111 \text{ dientes}$

Ancho $F = 10'' = 0,26 \text{ mts.}$

Velocidad $n = 24 \text{ r.p.m.}$

Velocidad angular $\omega = 2,5 \text{ 1/seg.}$

Velocidad lineal $v = 3,5 \text{ m/s.}$

$$v = 700 \text{ pies/min.}$$

Ancho B del eje del piñón

$$B = 6 \sqrt[3]{\frac{230}{24}}$$

$$B = 6 \times 2,14$$

$$B = 12,8''$$

$$\text{Ancho A} = 1,6 \times 12,8 = 20,5''$$

Valor G_w para $P_d = 1$

$$G_w = 1 \frac{1}{4}''$$

Valor de J según tabla (2.3.4)

$$J = 3''$$

Valor de H por la relación (2.3.83)

$$H = \frac{10}{12} = 5/6''$$

$$\text{Ancho del brazo } W = 11,5''$$

$$\text{Valor de } W_1 = 11,5 - 0,8 = 10,7''$$

2.3.12 DISEÑO Y CARACTERÍSTICAS DE LA POLEA N° 8

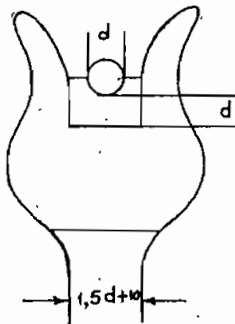


Diagrama (2.3.8)

Para el diseño de la polea N° 8 es necesario considerar las características del cable.

(15) La longitud del cable $L = 2.000$ mts.

Cable $6 \times 19 + 1$ Seale de igual paso, arrollamiento tang y preformado.

Peso por unidad de longitud $5,75$ Kg/m.

Diámetro $D = 40$ mm.

Diámetro de los alambres externos de los cordones $\delta = 3,18$ mm.

Calidad improved plow steel con alambres de $F_s = 180$ Kg/mm².

Según el Manual Hütte pág. 1073 (Manual del Ingeniero, Edit. Gustavo Gili S.A., Barcelona, 2a edición, 1950) "El diámetro mínimo D de flexión del cable no debe ser en poleas de carga, poleas de conducción y poleas de fricción inferior a 40 veces el diámetro d del cable, en los tambores de las máquinas de extracción no bajará de 35 veces dicho diámetro y debe ser, por lo menos, de 500 veces el diámetro δ del alambre más grueso que entre la fabricación del cable (se exceptúan los alambres del alma de los cordones, siempre que su diámetro no rebasa en más de un tercio el diámetro del más grueso de los hilos restantes).

Según estas consideraciones el diámetro escogido para la polea motriz $D = 2,40$ mts. Cumple con estas especificaciones como se demuestra a continuación.

Diámetro mínimo de las poleas

$$D = 40 \times 40 \text{ mm} = 1.600 \text{ mm.}$$

$D_{\text{mín}} = 1,6$ mts. el diámetro de 2,40 m. cumple con lo especificado.

Según lo indicado para el alambre más grueso

$$\delta = 3,18 \text{ mm; } D_{\text{mín}} = 500 \times 3,18 = 1.590 \text{ mm}$$

$D_{\text{polea}} = 2,40 \text{ m.}; \text{ cumple.}$

Cálculo del ángulo del cable para que no resbale en la polea.

Aplicamos la fórmula de Euler:

$$T_1 = T_2 e^{\mu\alpha} \quad (16)$$

$$(2.3.76) \quad T_1 = T_2 e^{\mu\alpha}$$

T_1 = Tensión de un ramal

T_2 = Tensión de otro ramal

α = Ángulo central en ra
dianes

μ = Coeficiente de roza
miento.

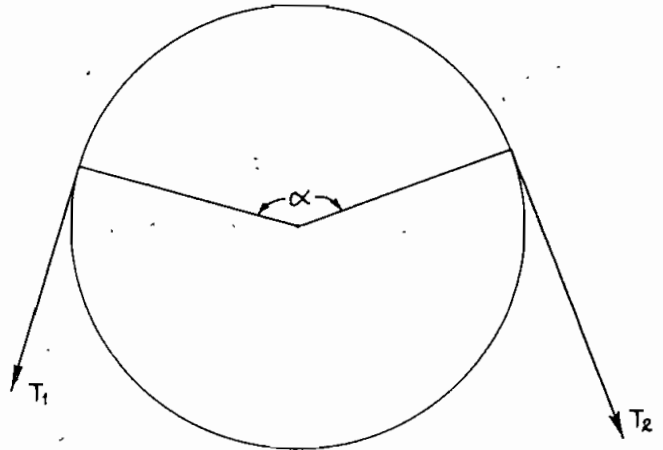


DIAGRAMA (2.3.9)

Según la tabla 17, pág. 1096 del Manual Hütte, tomo II, el coeficiente de rozamiento μ entre el cable de acero y la llanta de fundición es $\mu = 0,128$.

Las tensiones externas son:

$$T_1 = 9.528 \text{ Kg}$$

$$T_2 = 2.707 \text{ Kg}$$

$$\frac{9.528}{2.707} = e^{0,128\alpha}$$

(16) Seely y Ensign "Mecánica Analítica para Ingenieros".

$$(2.3.77) \quad 3,52 = e^{0,128 \alpha}$$
$$\ln 3,52 = 0,128 \alpha$$
$$1,258 = 0,128 \alpha$$

$$(2.3.78) \quad \alpha = 10 \text{ rad.} = 3\pi \text{ rad.}$$

Si el ángulo $\alpha = 3\pi \text{ rad.}$ ó sea 540° quiere decir que el cable debe dar dos vueltas y media alrededor de la polea.

La distancia entre los ejes de la polea motriz y de las poleas de degviación es de 5 mts, valor impuesto en este estudio.

Ahora vamos a calcular el ángulo que abraza el cable en la polea.

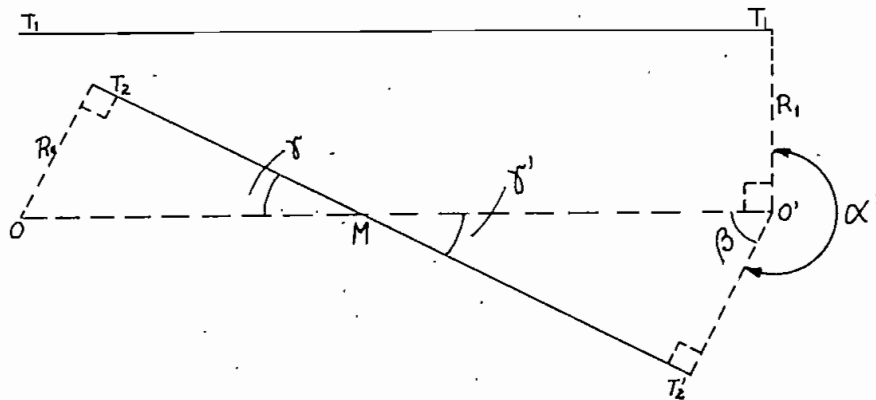


DIAGRAMA (2.3.10)

La distancia $O O' = 5 \text{ mts.}$

$$R_1 = R_2 = 1,2 \text{ mts.}$$

$\gamma = \gamma'$ por ser opuestos por el vértice

$$\sphericalangle OT_2M = \sphericalangle O'T_2M \text{ por ser de } 90^\circ$$

Con estos antecedentes podemos concluir:

$$(R_2 = R_1 = 1,2 \text{ mts}) \wedge (\sphericalangle \gamma = \sphericalangle \gamma') \wedge (\sphericalangle OT_2 M = \sphericalangle O' T_2' M)$$

$$\triangle OT_2 M \cong \triangle O' T_2' M$$

Con lo que se quiere decir que si dos ángulos de un triángulo y el lado comprendido son correspondientemente iguales a dos ángulos de otro y el lado comprendido, respectivamente, entonces los triángulos son congruentes. Al ser congruentes se deduce que la distancia $\overline{OM} = \overline{O'M}$

Si $\overline{OM} = \overline{O'M}$ entonces $\overline{OM} = 2,5 \text{ mts.}$

El ángulo que nos interesa es el $\sphericalangle T_2' O' T_1$.

$$(2.3.79) \quad \sphericalangle T_2' O' T_1 = \sphericalangle \beta + 90^\circ$$

Conocemos $\overline{O'M} = 2,5 \text{ mts.}$

Conocemos $\overline{O'T_2'} = 1,2 \text{ mts.}$

Entonces como

$$(2.3.80) \quad \cos \beta = \frac{\overline{O'T_2'}}{\overline{O'M}} \quad \text{entonces}$$

$$\cos \beta = \frac{1,2}{2,5}$$

$$(2.3.80) \quad \cos \beta = 0,48 \quad \text{y}$$

$$\beta = 61^\circ 20'$$

Y el ángulo $\sphericalangle T_2' O' T_1 = 90 + 61^\circ 20' = 151^\circ 20'$

El ángulo que se ha considerado en el cálculo para las tensiones de la polea es el ángulo opuesto al $\sphericalangle T_2' O' T_1$ que hemos deducido arriba, este ángulo es el ángulo α y

$$(2.3.81) \quad \alpha' = 360 - 151^\circ 20'$$

$$\alpha' = 208^{\circ} 40'$$

Si a este ángulo se suma una vuelta que da la cuerda alrededor de la polea tendremos

$$(2.3.82) \quad \alpha = \alpha' + 360$$

$$\alpha = 208^{\circ} 40' + 360$$

$$\alpha = 568^{\circ} 40'$$

Este ángulo real es mayor que los 540° deducidos de la ec. (2.3.78) por lo tanto el cable no resbala en la polea.

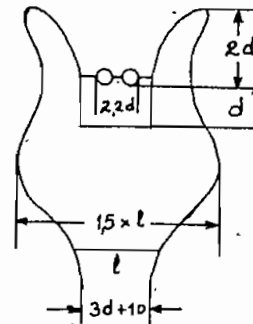
Siguiendo la misma pauta realizada para el diseño de las ruedas dentadas podemos especificar las poleas, teniendo en cuenta que la polea 8 tiene los siguientes datos.

Radio $r = 1,20$ mts. = 47,5 pulg.

Diámetro $D = 2,40$ m. = 95 pulg.

Ancho de la polea

La polea 8 debe tener dos canales para que el cable pueda dar las dos vueltas a la rueda.



El perfil del diseño será como se establece en el diagrama (2.3.11).

El diseño del diagrama (2.3.11) está conforme al sistema de guarnición establecido

DIAGRAMA (2.3.11)

en Hütte, pág. 324, tomo II, figura 506.

Conforme este diseño d , es el diámetro del cable $d = 40$ mm

el ancho $l = 3d + 10$ (2.3.83)

y el ancho del perfil es $1,5 \times l$ (2.3.84)

$$l = 3 \times 40 + 10$$

$$l = 120 + 10 = 130 \text{ mm}$$

$$1,5 l = 195 \text{ mm}$$

Escogemos el ancho de 20 omts. $F = 8$ pulg.

Se ajustará el diseño de la polea a la misma forma de cálculo que se ha efectuado para los piñones y ruedas dentadas, conforme al diagrama (2.3.7).

El valor del cilindro hueco del eje B será, de acuerdo a (2.3.78)

$$B = 6 \sqrt[3]{\frac{HP}{r.p.m.}}$$

Para aplicar esta fórmula se ha de considerar que la potencia es 230 HP, la polea 8 tiene una velocidad angular de 24 r.p.m. y una velocidad lineal de 3 m/s \sim 600 pies/min.

$$B = 6 \sqrt[3]{\frac{230}{24}}$$

$$B = 6 \times 2,14$$

$$B = 12,8''$$

Ancho

$$A = 1,6 \times 12,8 = 20,5''$$

La polea será de 6 brazos con un ancho W

$$(2.3.85) \quad W = 0,33 \sqrt{DF}$$

D es el diámetro en pulgadas

F es el ancho en pulgadas

$$D = 95''$$

$$F = 8''$$

$$W = 0,33 \sqrt{DF} = 0,33 \sqrt{95 \times 8}$$

$$W = 0,33 \times 27,5$$

$$W = 9 \text{ pulgadas}$$

$$W_1 = 9 - 0,8 = 8,2''$$

El valor G del brazo será 2'', valor impuesto según la experiencia con las ruedas dentadas.

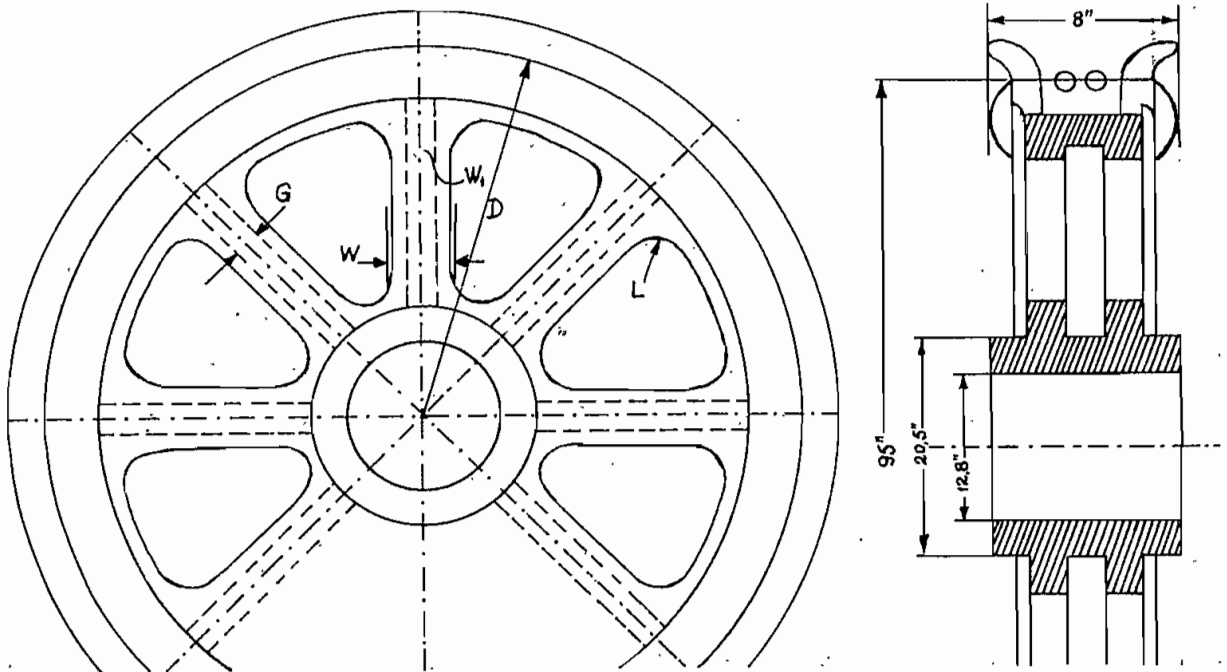


DIAGRAMA (2.3.12)

2.3.13 DISEÑO Y CARACTERISTICAS DE LAS POLEAS 9 y 10

Las poleas 9 y 10 son poleas de guía y tendrán las mismas características de diámetro y velocidad que la polea motriz 8. Lo único que varía es el ancho de la garganta pues solamente arrolla un solo cable de acuerdo con el diagrama (2.3.8). Las ruedas deberán tener estas características:

Radio $r = 1,20$ mts. = 47,5 pulg.

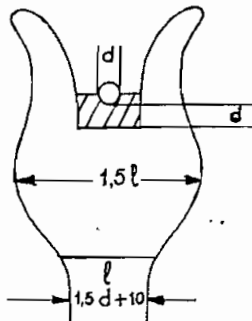
Diámetro $D = 2,40$ mts. = 95 pulg.

Velocidad 3 m/s

$\omega = 24$ r.p.m.

Ancho de la polea.

De acuerdo al diagrama (2.3.8)



Si el diámetro $d = 40$ mm.

$$l = 1,5d + 10$$

$$l = 1,5 \times 40 + 10 = 70 \text{ mm.}$$

Escogemos un diámetro

$$L = 1,5 l = 10 \text{ cm.}$$

$$L = 1,5 \times 70 \sim 10 \text{ cm} \sim 4 \text{ pulg.}$$

DIAGRAMA (2.3.13).

De acuerdo con las fórmulas de diseños de ruedas y piñones el valor del eje del cilindro hueco será:

cual hay que hacer las siguientes consideraciones.

La condición de fricción debe impedir el resbalamiento de un elemento con otro y la fuerza axial debe ser igual a la fuerza normal. La normal actúa en la superficie de contacto produciendo la fricción R.

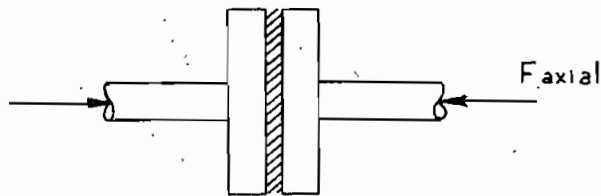


DIAGRAMA (2.3.14)

$$(2.3.83) \quad F_{\text{Normal}} = F_{\text{axial}}$$

La fricción R será igual

$$(2.3.84) \quad R = \mu F_N$$

Al actuar la fuerza sobre la superficie se produce la fuerza P o fatiga de compresión. La fuerza R será la resultante de todas las fuerzas elementales. Actúa en un punto determinado en forma concentrada produciendo un momento de giro M.

La potencia estará dada por

$$(2.3.85) \quad N = M \cdot \omega$$

El dibujo siguiente muestra el embrague cuya superficie rozante corresponde a la corona circular limitada por los radios r_e y r_i .

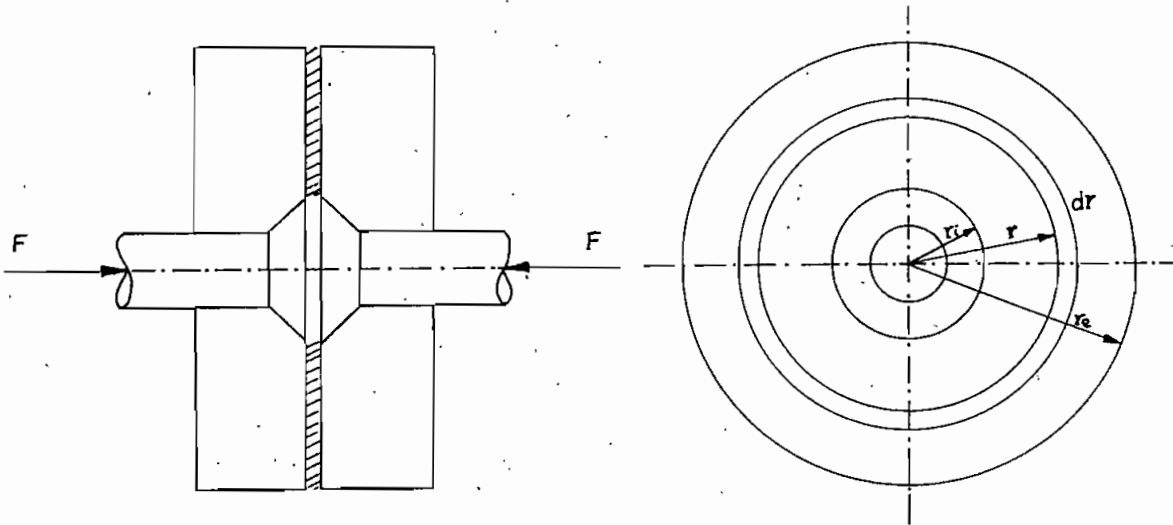


DIAGRAMA (2.3.15)

El área elemental:

$$(2.3.86) \quad ds = 2\pi r dr$$

Al actuar la presión tendremos:

$$(2.3.87) \quad pds = dF_N$$

$$(2.3.88) \quad pds = p \cdot 2\pi r dr$$

El esfuerzo dF es normal a la superficie

$$(2.3.89) \quad dR = \mu \cdot dF_N$$

Reemplazando dF_N por pds

$$(2.3.90) \quad dR = 2\pi r dr p \mu$$

Multiplicando la fuerza dR por el radio, se produce el momento $r dR$

$$(2.3.91) \quad r dR = dM = 2\pi r^2 p \mu dr$$

Integrando

$$(2.3.92) \quad M = \int_{r_i}^{r_e} 2\pi r^2 p \mu dr$$

$$(2.3.93) \quad M = 2\pi p \mu \left[\frac{r^3}{3} \right]_{r_i}^{r_e}$$

$$(2.3.94) \quad M = \frac{2}{3} \pi p \mu (r_e^3 - r_i^3)$$

El momento de fricción es igual al producto del radio de fricción por la fuerza de fricción.

$$(2.3.95) \quad M_f = F_f \cdot r_f$$

M_f = Momento de fricción

F_f = Fuerza de fricción

r_f = Radio de fricción

Como hemos dicho que la fuerza de fricción es R . Entonces

$$(2.3.96) \quad R = \mu F_N$$

Pero como

$$(2.3.97) \quad F_N = P \cdot s = p \cdot \pi (r_e^2 - r_i^2)$$

En donde

F_N = Fuerza normal

p = presión

s = superficie

De la ecuación (2.3.95) despejamos r_f .

$$(2.3.98) \quad r_f = \frac{M_f}{F_f}$$

Como $R = F_f$

$$(2.3.99) \quad r_f = \frac{M_f}{R}$$

$$(2.3.100) \quad R = \mu p \pi (r_e^2 - r_i^2)$$

Según la ecuación (2.3.94) $M_f = \frac{2}{3} \pi p \mu (r_e^3 - r_i^3)$ y según la ecuación (2.3.100) $R = \mu p \pi (r_e^2 - r_i^2)$

Reemplazando en (2.3.99) tendremos

$$(2.3.101) \quad r_f = \frac{2/3 \pi p \mu (r_e^3 - r_i^3)}{\mu p \pi (r_e^2 - r_i^2)}$$
$$(2.3.101) \quad r_f = \frac{2}{3} \frac{r_e^3 - r_i^3}{r_e^2 - r_i^2}$$

Este valor se suele aproximar, sin mayor error a

$$(2.3.102) \quad r_f = \frac{r_e + r_i}{2}$$

Con estas fórmulas podemos calcular el embrague para el caso que nos interesa, con los datos siguientes:

Potencia $N = 230$ HP

Velocidad $n = 600$ r.p.m.

Valores impuestos de los radios:

Radio exterior $r_e = 10'' = 25,4 \text{ cm.}$

Radio interior $r_i = 6'' = 15,3 \text{ cm.}$

El radio de fricción r_f será

$$r_f = \frac{10 + 6}{2} = 8'' = 20,3 \text{ cm.}$$

La velocidad expresada en pies/segundo será

$$v_f = \frac{600 \times 2\pi}{60} \times 8'' = 160 \text{ pulg/seg.}$$

$$v_f = 500 \text{ pulg/seg.} \quad \text{reduciendo a pies por se-}$$

gundo sabiendo que 1 pie = 12 pulg.

$$v_f = 42 \text{ pies/seg.}$$

La superficie de fricción

$$S = \pi (10^2 - 6^2)$$

$$S = \pi \cdot 64$$

$$S = 200 \text{ pulg}^2$$

La fuerza máxima por superficie para un coeficiente de fricción 0,3, conforme la tabla (2.3.6) es de 35 p.s.i. formada por asbesto en hie rro dulce o acero y trabajo promedio.

Coeficiente de fricción y presiones estimadas para embragues

Material y condición	Coef. de fricción	Presión p.s.i.	Máx. tempe- ratura °F
- Asbestos en acero o hierro dulce, carga promedio	0,3 seco 0,01 mojado	35 35	400 400
- Asbestos en acero o hierro dulce, trabajo pesado	0,3 seco	15	400
- Metal en acero o hierro dulce	0,3 seco 0,06 mojado	150 250	1000 1000
- Acero duro en acero duro	0,05 mojado 0,3 seco	100 20	500

(17) TABLA (2.3.6)

Si la presión máxima admisible es 35 p.s.i. entonces la fuerza máxima de contacto será

$$F_m = 35 \times 200 = 7.000 \text{ lbs.}$$

y la fuerza de fricción R

$$R = F_m \mu = 7.000 \times 0,3 = 2.100 \text{ lbs.}$$

La potencia que puede transmitir un par de discos estará dada por la

(17) Ver Wyatt, Machine Design, Mc Graw Hill B. C. 1962, pág. 229.

fuerza R y la velocidad

$$(2.3.103) \quad N = R \cdot v$$

La fuerza R = 2.100 lbs. y la velocidad 42 pies/seg.

$$N = 2.100 \times 42 \text{ lb-pie/seg.}$$

$$N = 88.200 \text{ lb-pie/seg.}$$

Pasando esta potencia a HP, tendríamos

$$N = \frac{88.200}{550} = 160 \text{ HP}$$

El número de discos estará de acuerdo a la relación entre la potencia que pueden transmitir y la potencia del sistema.

$$\text{Número de discos} = \frac{230}{160} = 1,4$$

Con 2 pares de discos se tiene una transferencia de potencia suficiente para los 230 HP.

2.3.15 DISEÑO Y CARACTERÍSTICAS DEL SISTEMA MECANICO DE FRENADO

El sistema de frenado mecánico se debe diseñar de tal manera que se pueda detener la marcha de los carros en el momento oportuno y también dejar a los vehículos estacionados en las respectivas cabinas de control.

El freno debe ir acoplado al eje del motor, después del embrague.

En el funicular no existirá sólo este mecanismo de frenado sino tam-

bién el frenado eléctrico por recuperación de energía y el freno contra riel. Los sistemas de frenado se estudian más detenidamente en el capítulo IV.

Naturalmente, es necesario calcular el funcionamiento del freno para los dos sentidos de rotación del motor. Y en este caso, es conveniente encontrar las características del freno para la determinación de la potencia.

La forma de cálculo del sistema de frenado será el siguiente.

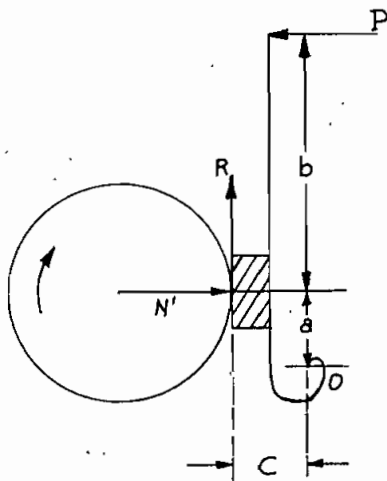


DIAGRAMA (2.3.16)

Sentido de giro igual al de las agujas del reloj.

$$(2.3.104) \quad \sum M_o = 0$$

$$(2.3.105) \quad P(a + b) - N'_a - R_c = 0$$

Despejando P

$$(2.3.106) \quad P = \frac{N'_a + R_c}{a + b}$$

Pero

$$R = \mu N' \quad \text{y despejando } N'$$

$$N' = \frac{R}{\mu} \quad \text{Reemplazando en (2.3.106)}$$

$$(2.3.107) \quad P = \frac{\frac{R}{\mu} a + R c}{a + b}$$

$$(2.3.108) \quad P = R \frac{a + \mu c}{\mu(a + b)}$$

La fuerza R corresponderá al esfuerzo que hay que vencer en las peores condiciones para parar el coche o sea cuando el carro ascendente está vacío y el descendente está lleno. Según la Tabla (2.0.15), la potencia de frenado será igual a 124 Kw, esta cifra se puede aproximar a 130 Kw. Considerando que $1 \text{ Kw} = 102 \text{ Kgm/s}$.

$$130 \text{ Kw} = 13.260 \text{ Kgm/s}$$

Como la Potencia es el producto de la fuerza por la velocidad tendríamos

$$(2.3.109) \quad P = R \omega r = N$$

Siendo ω la velocidad angular y r el radio.

Despejando R

$$(2.3.110) \quad R = \frac{N}{\omega r} \quad \text{reemplazando } R \text{ en (2.3.108)}$$

$$(2.3.111) \quad P = \frac{N}{\omega r} \cdot \frac{a + \mu c}{\mu(a + b)}$$

Asumimos los siguientes datos:

Potencia $N = 13.260 \text{ Kgm/s.}$

Velocidad angular $\omega = 62,8 \text{ 1/seg}$

Distancia $a = 0,3 \text{ m.}$

Distancia $c = 0,2 \text{ m.}$

Radio $r = 0,25 \text{ m.}$

Brazo $b = 1,5 \text{ m.}$

El coeficiente de fricción, tomado de la tabla 6-1 pág. 154 de Machine Design, de Wyatt, nos da, para asbesto y resina con metal, da un valor de 0,3

Fricción $\mu = 0,3$

La misma tabla establece una presión soportable de 75 a 100 p.s.i. = 5,3 Kg/cm² a 7,1 Kg/cm². La máxima temperatura a la que puede llegar la zapata será de 400-500°F o sea 200°C a 260°C.

La fuerza P que es necesario aplicar viene dada por la ec. (2.3.111)
Reemplazando los datos anteriores tendríamos

$$P = \frac{13.260}{62,8 \cdot 0,25} \cdot \frac{0,3 + 0,3 \cdot 0,2}{0,3(0,3 + 1,5)}$$
$$P = \frac{13.260}{62,8 \cdot 0,25} \cdot \frac{0,36}{0,54} = 600 \text{ Kgr.}$$

En el caso de que el movimiento giratorio sea en sentido contrario, la ecuación de la fuerza P será estudiada en el diagrama (2.3.17).

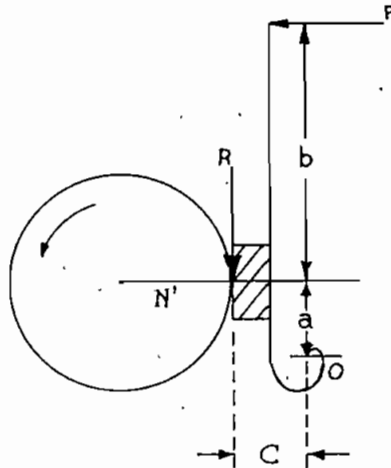


DIAGRAMA (2.3.17)

Sentido contra reloj

$$\sum M_o = 0$$

$$(2.3.112) \quad P(a + b) - N'a + Rc = 0$$

$$(2.3.113) \quad P = \frac{N'a - Rc}{a + b}$$

Como $R = \mu N'$ y $N' = \frac{R}{\mu}$, entonces

$$(2.3.114) \quad P = \frac{\frac{R}{\mu} a - Rc}{a + b}$$

Según las mismas consideraciones que en el caso anterior, factorando R tendremos.

$$(2.3.115) \quad P = R \frac{a - \mu c}{\mu(a + b)}$$

Como, de acuerdo con la ecuación (2.3.110) $R = \frac{N}{\omega r}$ Siendo:

N la potencia

ω la velocidad angular y

r el radio, entonces

$$(2.3.116) \quad P = \frac{N}{\omega r} \cdot \frac{a - \mu c}{\mu(a + b)}$$

Reemplazando los datos anteriores, entonces

$$P = \frac{13.260}{62,8 \cdot 0,25} \cdot \frac{0,3 - 0,3 \cdot 0,2}{0,3(0,3 + 1,5)}$$

$$P = \frac{13.260 - 0,24}{62,8 \cdot 0,25 \cdot 0,3 \cdot 1,8}$$

$$P = 376 \text{ Kgr}$$

El caso más desfavorable corresponde al movimiento en sentido de las a gujas del reloj.

Como la zapata del freno admite una presión de 5,3 a 7,1 Kg/cm², hay que calcular la superficie mínima que debe tener. Para esto se calcula la fuerza normal a la superficie de fricción N' según la relación

$N' = \frac{R}{\mu}$. El rozamiento, por otro lado, está dado por $R = \frac{N}{\omega r}$, según (2.3.110) donde N en este caso es la potencia, ω la velocidad angular y r el radio.

La fuerza de rozamiento, para $N = 13.260$ Kgr/seg. $\omega = 62,2$ 1/seg, $r = 0,25$ m. y $\mu = 0,3$ será

$$R = \frac{13.260}{62,8 \times 0,25} = 850 \text{ Kg.}$$

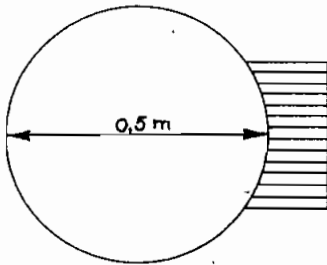
La normal será

$$N' = \frac{850}{0,3} = 2.840 \text{ Kg.}$$

La zapata del freno admite una presión máxima de $7,1 \text{ Kg/cm}^2$, la superficie de rozamiento se obtendrá de la relación entre la fuerza normal y la presión. Escogiendo 6 Kg/cm^2 tendremos

$$S = \frac{2.849}{6} = 470 \text{ cm}^2$$

Esta es el área mínima que debe tener el freno. Si el radio $r = 0,25 \text{ m}$, la longitud del cilindro será $L = 2\pi r = 2\pi \cdot 0,25 = 1,57 \text{ m}$.



Si la zapata aprisiona los $\frac{2}{5}$ de la longitud, entonces ésta tendrá una longitud de 63 cm.

DIAGRAMA (2.3.18)

El ancho, para la presión mínima será

$$\alpha = \frac{470 \text{ cm}^2}{63 \text{ cm}} = 7,5 \text{ cm.}$$

Hacemos un ancho 4 veces mayor, con el fin de que la seguridad del sistema cubra todos los riesgos. Por lo tanto el ancho será de 30 cm. En este caso la superficie de fricción de la zapata será de

$$S_z = 30 \times 63 \text{ cm}^2 = 1.900 \text{ cm}^2$$

La presión en Kg/cm^2 será entonces:

$$(2.3.117) \quad p = \frac{N^1}{S_z}$$

$$p = \frac{2840}{1900} = 1,5 \text{ Kg/cm}^2$$

Esta presión, expresada en psi será

$$p = \frac{1,5}{0,071} \text{ p.s.i.}$$

$$p = 21 \text{ p.s.i.}$$

La velocidad angular de deslizamiento del cilindro del freno es $\omega = 62,8 \text{ 1/s}$. y el radio $r = 0,25 \text{ m}$. La velocidad lineal será

$$v = \omega r$$

$$v = 62,8 \times 0,25$$

$$v = 15,7 \text{ m/s.}$$

Esta velocidad, para transformar a pies por minuto, habrá que multiplicar por la relación

$$1 \text{ pie/min} = \frac{30,48}{60} \text{ cm/seg.} = 0,5 \text{ cm/s.}$$

Por lo tanto los $15,7 \text{ m/s}$ ó 1570 cm/s corresponderán a

$$v = 3.140 \text{ pies/min.}$$

Es necesario hacer el producto de la presión por la velocidad para comprobar que el freno no se calienta y no pone en peligro el funcionamiento del sistema.

Para esto nos basamos en la tabla 6-2 de Wyatt, Machine Design, página 155. Ver tabla (2.3.7)

Límites de operación para frenos

Condiciones de operación	Límite máximo pV
Continua aplicación de carga y pobre disipación de energía	30.000
Aplicación intermitente de carga, con períodos de descanso y pobre disipación de energía	60.000
Continua aplicación de carga y buena disipación de energía como en baño de aceite	84.000

TABLA (2.3.7)

El valor pV será

$$pV = 3.140 \times 21 = 66.000$$

Esto significa que hay que conseguir una buena disipación de energía pero que el freno no se encuentra sobre los límites más altos.

La energía absorbida por el freno y la cantidad de calor será el producto de la potencia de 130 Kw por el tiempo de frenado 8,7 seg.

$$E = 130 \times 8,7 \text{ Kw. seg}$$

$$E = 1.140 \text{ Kwseg.}$$

Como 1 watt-seg = 0,24 calorías

La cantidad de calor que hay que disipar, conforme lo desarrollado en

la ecuación (2.2.6) será

$$Q = 274 \text{ Kcal.}$$

El freno debe ser accionado por dispositivos neumáticos e hidráulicos.

2.4 POTENCIA REQUERIDA DE LA EMPRESA ELECTRICA

En el acápite anterior se han calculado todos los elementos de la cadena cinemática, ruedas, piñones y engranajes del funicular. Como se ha bía dicho anteriormente, es importante establecer las características de estos elementos para el cálculo de la potencia.

Conforme la ecuación (2.1.6) el momento motriz es igual al momento resistente más el momento dinámico. Todos los elementos de rotación pertenecen al momento dinámico.

El acápite 2.1.3 establece una serie de principios básicos para determinar el módulo de inercia a partir de las masas que se debe acelerar. El módulo de inercia es necesario conocer para calcular la potencia.

2.4.1 MASAS A ACELERAR REFERIDAS AL ROTOR

El mecanismo a operar dibujado esquemáticamente en el Diagrama (2.3.2), acápite 2.3.1, consta de los siguientes elementos:

1. Volante, si es necesario.
2. Motor eléctrico.
3. Acoplamiento y freno.

4. Sistema de engranajes.
5. Rueda motriz.
6. Rueda de desviación.
7. Coche ascendente.
8. Coche descendente.

La tabla (2.4.1) establece los procesos de cálculo para la determinación del GD^2 del sistema.

Masas rotativas	Momento de Inercia	Transmisión r.p.m.	Relación del N° r.p.m.	Momento de inercia referido al rotor Kgrfm ²
1. Rotor del motor	GD_1^2	n_1	$\frac{n_1}{n_1} = 1$	GD_1^2
2. Volante	GD_2^2	n_1	$\frac{n_1}{n_1} = 1$	GD_2^2
3. Embrague y acoplamiento	GD_3^2	n_1	$\frac{n_1}{n_1} = 1$	GD_3^2
3'. Freno	$GD_{3'}^2$	n_1	$\frac{n_1}{n_1} = 1$	$GD_{3'}^2$
4. Piñón del motor	GD_4^2	n_1	$\frac{n_1}{n_1} = 1$	GD_4^2
5. Rueda dentada 5	GD_5^2	n_2	$\frac{n_2}{n_1}$	$GD_5^2 \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2$
6. Piñón 6	GD_6^2	n_2	$\frac{n_2}{n_1}$	$GD_6^2 \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2$
7. Rueda dentada 7	GD_7^2	n_3	$\frac{n_3}{n_1}$	$GD_7^2 \left(\frac{n_3}{n_1}\right)^2$
8. Polea motriz	GD_8^2	n_3	$\frac{n_3}{n_1}$	$GD_8^2 \left(\frac{n_3}{n_1}\right)^2$

Masas rotativas	Momento de Inercia	Transmisión r.p.m.	Relación del N° r.p.m.	Momento de inercia referido al rotor Kgr f m ²
9. Polea de desviación	GD_9^2	n_3	$\frac{n_3}{n_1}$	$GD_9^2 \left(\frac{n_3}{n_1}\right)^2$
10. Polea de desviación	GD_{10}^2	n_3	$\frac{n_3}{n_1}$	$GD_{10}^2 \left(\frac{n_3}{n_1}\right)^2$
Masas con mov. rectilíneo	Carga Kg	Velocidad m/s	Diámetro Dm, supuesto de inercia	Momento de inercia referido al rotor Kgr f m ²
11. Coche ascendente	G_{11}	v	$\frac{v \cdot 60}{\pi n_3}$	$G_{11} D^2 \left(\frac{n_3}{n_1}\right)^2$
12. Coche descendente	G_{12}	v	$\frac{v \cdot 60}{\pi n_3}$	$G_{12} D^2 \left(\frac{n_3}{n_1}\right)^2$

TABLA (2.4.1), conforme al diagrama (2.3.3)

2.4.2 ENERGIA EN FUNCION DEL GD²

La energía cinética está dada por la fórmula

$$(2.4.1) \quad E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

La masa es la relación entre el peso y la gravedad

$$(2.4.2) \quad m = \frac{G}{g}$$

Reemplazando (2.4.2) en (2.4.1)

$$(2.4.3) \quad E_c = \frac{1}{2} \frac{G}{g} v^2 \quad \left[\text{Kgr. m}^2/\text{s}^2 \right]$$

transformando la energía a Watt-seg. tendríamos

$$(2.4.4) \quad E_c = \frac{Gv^2}{2g} \cdot 9,81 \text{ Watt-seg.}$$

Simplificando 9,81 con g

$$(2.4.5) \quad E_c = \frac{Gv^2}{2} \text{ Watt-seg}$$

y expresando en Kwatt-seg

$$(2.4.6) \quad E_c = \frac{G v^2}{2000} \text{ Kwatt-seg.}$$

La ecuación (2.4.6) se aplica a masas con movimiento rectilíneo.

Para los elementos de masas giratorias tendremos que, la velocidad v es igual a la velocidad angular por el radio.

$$(2.4.7) \quad v = \omega r$$

Y la ecuación de la energía será

$$(2.4.8) \quad dE_c = \frac{v^2}{2} dm \quad \text{reemplazando (2.4.7)}$$

$$(2.4.9) \quad dE_c = \frac{\omega^2 r^2}{2} dm \quad \text{integrando}$$

$$(2.4.10) \quad E_c = \frac{\omega^2}{2} \int r^2 dm$$

Pero $\int r^2 dm = I$, momento de inercia y la ecuación quedará

$$(2.4.11) \quad E_c = \frac{\omega^2}{2} I$$

Según lo estudiado en el acápite (2.2.1), ecuación (2.2.17) se deduce que

$$(2.4.12) \quad I = \frac{GD^2}{4g}$$

Para los cilindros de acero $GD^2 = 3.100 D^4 L$ según (2.2.21)

Siendo D el diámetro y L el ancho del cilindro. Cuando hay diámetro exterior D_e y diámetro interior D_i tendremos

$$(2.4.13) \quad GD^2 = 3.100 (D_e^4 - D_i^4) L$$

Como $\omega = \frac{2\pi n}{60}$ (2.4.14) siendo n r.p.m.

Reemplazando en (2.4.11) tendremos

$$(2.4.15) \quad E_c = \frac{4\pi^2 n^2}{3600 \times 2} \cdot \frac{GD^2}{4g}$$

$$(2.4.16) \quad E_c = \frac{n^2 G D^2}{7200}$$

$$(2.4.17) \quad E_c = 140 \left(\frac{n}{1000}\right)^2 GD^2$$

Para expresar (2.4.17) en Kw-seg. tendremos

$$(2.4.18) \quad E_0 = 1,37 \left(\frac{n}{1000} \right)^2 GD^2 \quad [\text{Kw-seg}]$$

2.4.3 POTENCIA Y PAR MOTOR

Cuando un conductor de longitud l se desplaza por un campo magnético de intensidad B y le atraviesa una corriente i , la fuerza magnética que se produce será

$$(19) \quad (2.4.19) \quad F = B l i \quad [\text{New}]$$

Esta fuerza está expresada en Newtons cuando B está dado en Weber/m² l en mts, e i en amperios.

Cuando se quiere expresar en dinas, si B está dado en gauss, l en centímetros, e i en amperios la fórmula correspondiente será.

$$(2.4.20) \quad F = \frac{1}{10} B l i \quad [\text{dinas}]$$

Para expresar la ecuación (2.4.19) en Kgr tenemos en cuenta que 1 dina = $1,02 \cdot 10^{-6}$ Kgr que es el factor de conversión, así la ecuación se transforma en

$$(2.4.21) \quad F = 1,02 \cdot 10^{-7} B l i \quad \text{Kgr}$$

Pero cuando tenemos un inducido formado por varios conductores hay que

(19) Chesler Dawes, pág. 518, Tomo I.

hacer algunas consideraciones adicionales.

Si el diámetro del inducido es D , la circunferencia del mismo será

$$(2.4.22) \quad L = \pi D$$

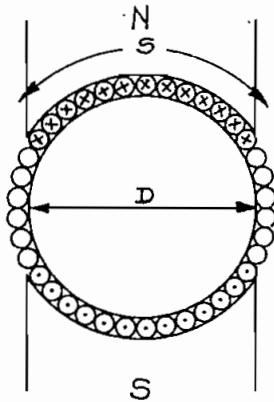


DIAGRAMA (2.4.1)

Llamaremos S a la longitud del arco polar y Z el número de conductores. En la periferie habrán K conductores dado por

$$(2.4.23) \quad K = \frac{Z b}{D} \text{ conductores}$$

Llamamos $2p$ al número de pares de polos. $2a$ es el número de derivaciones del inducido.

La corriente total será I_t . Por lo tanto la corriente en un conductor será

$$(2.4.24) \quad i = \frac{I_t}{2a}$$

La fuerza total en el inducido será

$$(20) (2.4.25) \quad F = B \frac{I_t}{2a} 1 Z \frac{b}{\pi D} 2p 1,02 \cdot 10^{-7} \text{ Kg.}$$

Pero como el radio $r = \frac{D}{2}$ tendremos el par motor

$$(2.4.26) \quad M = Fr$$

$$(2.4.27) \quad M = F \frac{D}{2}$$

Reemplazando F

$$(2.4.28) \quad M = \frac{B l b I_t p Z}{2 a \pi} \cdot 1,02 \cdot 10^{-7} \text{ Kgm.}$$

El flujo de inducción es $B \cdot S = \phi$

$$(2.4.29) \quad \phi = B \cdot S$$

Siendo

B la densidad de flujo y

S la superficie

Como

$$(2.4.30) \quad S = l b, \quad \text{reemplazando tendremos}$$

$$(2.4.31) \quad M = \phi I_t \frac{pZ}{2 a \pi} \cdot 1,02 \cdot 10^{-7} \text{ Kgr m.}$$

Llamaremos constante C al valor

$$(2.4.32) \quad C = \frac{pZ}{2 a \pi} \cdot 1,02 \cdot 10^{-7}$$

ya que esta constante depende del tipo de construcción del motor. Y, finalmente, el momento motriz será.

$$(2.4.33) \quad M = C \phi I_t \text{ Kgm.}$$

Pero la potencia mecánica de inducido será

$$(2.4.34) \quad P = F \cdot v$$

La velocidad

$$(2.4.35) \quad v = \frac{2 \pi r}{60} n \quad \text{reemplazando}$$

$$(2.4.36) \quad P = F \frac{2\pi r}{60} n \text{ Kgm/s}$$

Como el momento $M = F \cdot r$ (2.4.26)

$$(2.4.37) \quad P = M \frac{2\pi r}{60} = 0,105 M n \text{ Kgrm/s.}$$

Expresando en wattios tendremos

$$(2.4.38) \quad P = 1,03 M n \text{ watts}$$

Despejando el valor del momento

$$(2.4.39) \quad M = 0,973 \frac{P}{n} \text{ Kg-m}$$

2.4.4 PAR DE ACELERACION, TIEMPO DE ARRANQUE Y POTENCIA EN FUNCION DE GD^2

El par de aceleración es igual al par motor menos el par resistente

$$(2.4.40) \quad M = M_m - M_r$$

La masa que hay que acelerar está dada por

$$(2.4.41) \quad m = \frac{G}{g}$$

La fuerza F que se ejerce sobre la masa m es

$$(2.4.42) \quad F = m \cdot a$$

Pero el momento de aceleración será

$$(2.4.43) \quad M = F \cdot r$$

Siendo F la fuerza y r el radio del rotor. Como $r = \frac{D}{2}$ tendremos

$$(2.4.44) \quad M = F \frac{D}{2} \quad y$$

$$(2.4.45) \quad F = \frac{2M}{D}$$

La aceleración

$$(2.4.46) \quad a = \frac{F}{m} \quad \text{se convertirá en}$$

$$(2.4.47) \quad a = \frac{2M/D}{m} \quad \text{reemplazando m de (2.4.41)}$$

$$(2.4.48) \quad a = \frac{2Mg}{GD}$$

y multiplicando numerador y denominador por D tendremos

$$(2.4.49) \quad a = \frac{2MgD}{GD^2}$$

La aceleración angular α será

$$(2.4.50) \quad \alpha = \frac{a}{r}$$

$$(2.4.51) \quad \alpha = \frac{2MgD}{GD^2 r}$$

$$(2.4.52) \quad \alpha = \frac{4Mg}{GD^2}$$

La velocidad angular ω es

$$(2.4.53) \quad \omega = \alpha \cdot t$$

Pero además

$$(2.4.54) \quad \omega = \frac{2\pi n}{60}$$

Por lo tanto

$$(2.4.55) \quad \frac{2\pi n}{60} = \alpha t, \quad \text{despejando } t \text{ de esta ecuación}$$

$$(2.4.56) \quad t = \frac{2\pi n}{60\alpha}$$

Reemplazando el valor de α de la ecuación (2.4.52)

$$(2.4.57) \quad t = \frac{2\pi n GD^2}{60 4Mg}$$

El tiempo de aceleración será por tanto

$$(2.4.58) \quad t = \frac{nGD^2}{375 M} \text{ segundos}$$

y el momento acelerante

$$(2.4.59) \quad M = \frac{n GD^2}{375 t}$$

La potencia en función del GD^2 se puede obtener a partir de la ecuación (2.4.38)

$$P = 1,03 M n \text{ watt}$$

Reemplazando M de la ecuación (2.4.59) tendremos

$$(2.4.60) \quad P = 1,03 \frac{n^2 GD^2}{375 t} \text{ watt}$$

Que expresa la potencia máxima para obtener la aceleración del sistema. Esta ecuación se transforma en

$$(2.4.61) \quad P = \frac{n^2 GD^2}{365 t} \text{ watts}$$

Siendo t el tiempo de aceleración en segs. n el número de revolu-

ciones del motor a pleno funcionamiento, y GD^2 el módulo de inercia del sistema expresado en $Kg.m^2$.

Para nuestro caso, como $n = 600$ r.p.m. y $t = 8,7$ seg, la potencia para el caso que nos ocupa será

$$P = \frac{(600)^2 GD^2}{365 \times 8,7} \text{ watt}$$

$$(2.4.62) \quad P = 114 GD^2 \text{ watt}$$

y expresado en Kw

$$(2.4.63) \quad P = 0,114 GD^2 \text{ Kw}$$

El problema de encontrar la potencia adecuada del sistema motriz se reduce por lo tanto a hallar el GD^2 del sistema.

Esto es lo que desarrollaremos en los siguientes acápites.

2.4.5 GD^2 DEL SISTEMA, GD^2 DEL MOTOR

El GD^2 del motor se encuentra en las tablas que proporcionan los fabricantes.

El motor eléctrico del funicular debe tener las siguientes características aproximadas:

Velocidad $n = 600$ r.p.m.

Potencia $N = 170$ Kw

La tabla 21, pág. 1310 del manual de Hütte, establece las siguientes

características para máquinas de 100 y 200 Kw:

Máquina de 100 Kw

$n = 600$ r.p.m.

Peso sin excitatriz = 1930 Kg

Peso con excitatriz = 2180 Kg

$GD^2 = 134 \text{ Kg.m}^2$

Rendimiento $\eta = 91\%$

Máquina de 200 Kw

$n = 600$ r.p.m.

Peso sin excitatriz = 3200 Kg

Peso con excitatriz = 3500 Kg

$GD^2 = 190 \text{ Kg.m}^2$

Rendimiento $\eta = 91\%$

Para la máquina de 170 Kw se debe hacer una interpolación.

Considerando, en forma aproximada el incremento lineal de las dimensiones con el incremento de potencia podemos hallar los respectivos valores que nos interesan.

De acuerdo al Diagrama (2.4.2) que sigue a continuación, el peso de la máquina de 170 Kw será 3.100 Kg y el factor de inercia:

$$(2.4.64) \quad GD^2 = 170 \text{ Kg.m}^2$$

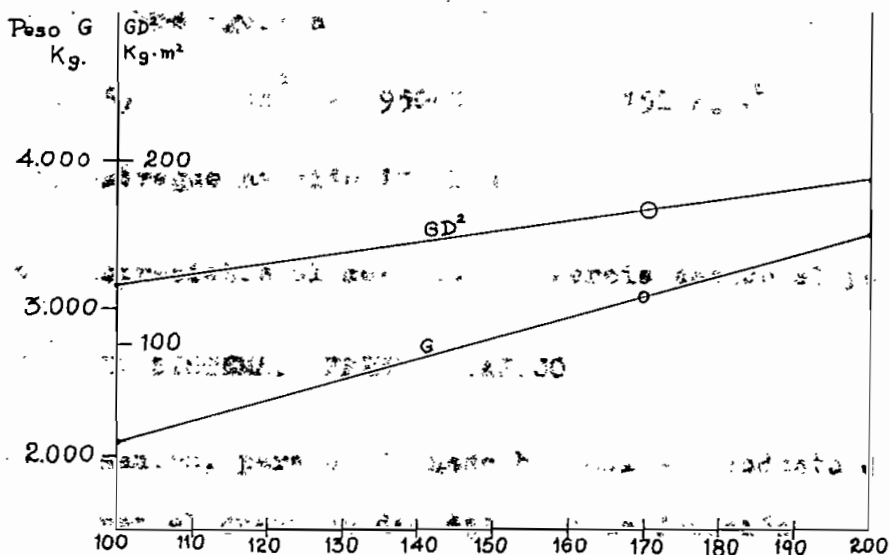


DIAGRAMA (2.4.2)

2.4.6 GD^2 DEL SISTEMA. EMBRAGUE Y ACOPLAMIENTO

El factor GD^2 del embrague será igual al producto del diámetro de fricción al cuadrado por la fuerza de acoplamiento.

El radio de fricción se ha fijado en el acápite 2.3.15 en $r = 8'' = 20,3$ cm. y la fuerza de fricción $R = 2.100$ lbs. para un elemento. Como son dos discos habrá que multiplicar por 2. Las 2.100 lbs. corresponden a 950 Kg.

Por consiguiente

$G = 950$ Kg. y el diámetro

$D = 40,6$ cm. = 0,4 mts.

$$GD^2 = 58 \text{ Kgm}^2$$

El GD^2 total del freno será

$$GD_T^2 = 212 + 58 = 270 \text{ Kgm}^2$$

$$GD_T^2 = 270 \text{ Kgm}^2$$

2.4.8 GD^2 DEL SISTEMA. PIÑÓN N° 4, RUEDA N° 5

Piñón N° 4

Radio $r = 0,26$ mts. Diámetro $D = 0,52$ mts. Ancho = $0,26$ mts. Velocidad $n = 600$ r.p.m. Velocidad $v = 16,3$ m/s.

El valor W corresponde al ancho de la rueda, de modo que, según lo indicado en 2.3.11,

$$W = 4^{1/2} = 9,4 \text{ cm.}$$

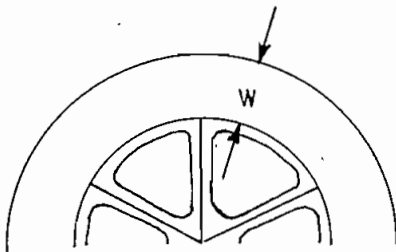


DIAGRAMA (2.4.3)

Por lo tanto

$$\text{radio exterior } r_e = 0,26 \text{ mts.}$$

$$\text{radio interior } r_i = 0,26 - 0,094$$

$$r_i = 0,166 \text{ mts.}$$

$$\text{El diámetro interior } D_i = 0,33 \text{ mts.}$$

Aplicando la ecuación (2.1.38) $GD^2 = 3.100 D^4 L$

$$GD^2 = 3.100 (D_e^4 - D_i^4) L$$

$$GD^2 = 3.100 (0,52^4 - 0,33^4) \cdot 0,26$$

$$GD^2 = 3.100 \cdot 0,0610 \cdot 0,26$$

$$GD^2 = 49 \text{ Kgm}^2$$

Rueda. N° 5

Radio $r = 1,20$ mts.

Diámetro $D = 2,40$ mts.

Velocidad $n = 129$ r.p.m.

Velocidad $v = 16,3$ m/s.

Ancho $L = 0,26$ mts.

Ancho de la llanta $W = 9,7'' = 0,24$ cm.

Radio exterior $1,20$ mts. $D_e = 2,4$ mts.

Radio interior $1,20 - 0,94 = 0,96$ mts. $D_i = 1,92$ mts.

$$GD^2 = 3.100 (2,4^4 - 1,92^4) \cdot 0,26$$

$$GD^2 = 3.100 \times 19,7 \times 0,26$$

$$GD^2 = 15.900 \text{ Kgm}^2$$

Reducción del GD^2 al eje del rotor por las relaciones de velocidad

$$GD_M^2 = GD^2 \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2$$

$$GD_M^2 = 15.900 \left(\frac{129}{600}\right)^2$$

$$GD_M^2 = 15.900 \times 0,046$$

$$GD_M^2 = 730 \text{ Kgm}^2$$

2.4.9. GD^2 DEL SISTEMA. PIÑÓN N° 6, RUEDA DENTADA N° 7

Piñón N° 6

Radio $r = 0,26$ m.

Diámetro $D = 0,52$ m.

Ancho $F = 0,26$ m.

Velocidad $n = 129$ r.p.m.

Ancho de la llanta $3,7'' = 0,094$ m. = 9,4 cm.

$$r_i = 0,26 - 0,094 = 0,166$$

Diámetro exterior $D_e = 0,52$ m. Diámetro interior $D_i = 0,33$ m.

$$GD^2 = 3.100 (0,52^4 - 0,33^4) \cdot 0,26$$

$$GD^2 = 49 \text{ Kgm}^2$$

Reducción del GD^2 al eje del rotor por relaciones de velocidad

$$GD_M^2 = 49 \left(\frac{129}{600}\right)^2$$

$$GD_M^2 = 49 \times 0,046$$

$$GD_M^2 = 2,25 \text{ Kgm}^2$$

Rueda dentada N° 7

Radio $r = 1,4$ mts.

Diámetro $D = 2,8$ mts.

Ancho $F = 0,26$ mts.

Velocidad 24 r.p.m.

Ancho de la llanta $W = 0,27$ mts.

Diámetro exterior = 2,8 mts.

Diámetro interior = 2,26 mts.

$$GD^2 = 3.100 (2,8^4 - 2,26^4) \cdot 0,26$$

$$GD^2 = 3.100 (62 - 26) \cdot 0,26$$

$$GD^2 = 3.100 \times 36 \times 0,26$$

$$GD^2 = 28.000 \text{ Kgm}^2$$

Reducción del GD^2 al eje del rotor

$$GD_M^2 = 28.000 \left(\frac{24}{600}\right)^2$$

$$GD_M^2 = 28.000 \times 0,0016$$

$$GD_M^2 = 44,8 \text{ Kgm}^2$$

2.4.10 GD^2 DEL SISTEMA. POLEAS

Polea motriz

Las características de la polea motriz son

Diámetro $D_e = 2,40$ mts.

Ancho $L = 8'' = 0,2$ mts.

Velocidad $n = 24$ r.p.m.

Diámetro interior $D_i = 2(1,20 - 0,2)$

$D_i = 2$ mts.

$$GD^2 = 3.100 (D_e^4 - D_i^4) L$$

$$GD^2 = 3.100 (2,4^4 - 2^4) \cdot 0,2$$

$$GD^2 = 3.100 (33 - 16) \cdot 0,2$$

$$GD^2 = 3.100 \cdot 17 \cdot 0,2$$

$$GD^2 = 10.500$$

Reducción del GD^2 al eje del motor

$$GD_M^2 = GD^2 \left(\frac{24}{600}\right)^2$$

$$GD_M^2 = 10.500 \times 0,0016$$

$$GD_M^2 = 16,8 \text{ Kgm}^2$$

Poleas de desviación. Polea de desviación N° 9

Diámetro

$$D_e = 2,40 \text{ mts.}$$

$$D_i = 2 \text{ mts.}$$

$$\text{Ancho } L = 10 \text{ cm.}$$

$$\text{Velocidad } n = 24 \text{ r.p.m.}$$

$$GD^2 = 3.100 (D_e^4 - D_i^4) L$$

$$GD^2 = 3.100 \times 17 \times 0,1$$

$$GD^2 = 5.250 \text{ Kgm}^2$$

Reducción al eje del motor

$$GD_M^2 = 5.250 \times 0,0016$$

$$GD_M^2 = 8,4 \text{ Kgm}^2$$

La polea de desviación 10 tendrá el mismo coeficiente $GD_M^2 = 8,4 \text{ Kgm}^2$.

2.4.11 MODULO DE INERCIA DE LAS MASAS CON MOVIMIENTO RECTILINEO

El caso más desfavorable corresponde al coche ascendente lleno y al descendente vacío. Los datos correspondientes son:

$$\text{Coche 1} \quad G_1 = 8.716 \text{ Kg.}$$

$$\text{Coche 2} \quad G_2 = 2.904 \text{ Kg.}$$

La velocidad de los coches es $v = 3 \text{ m/s.}$

El diámetro supuesto para ambos coches será

$$D_s = \frac{v \cdot 60}{\pi \cdot n_3} = \frac{3 \cdot 60}{\pi \cdot 28,8} = 1,75 \text{ mts.}$$

El módulo de inercia GD^2 será el producto de la tensión G de los coches por el cuadrado del diámetro supuesto de inercia, por el coeficiente de reducción al eje que en este caso será

$$\frac{n_3^2}{n_1^2} = \left(\frac{28,8}{600}\right)^2 = 0,0023$$

Coche 1

$$GD^2 = 8.716 \times 1,75^2 \times 0,0023 \text{ Kgm}^2$$

$$GD^2 = 35 \text{ Kgm}^2$$

Coche 2

$$GD^2 = 2.904 \times 1,75^2 \times 0,0023 \text{ Kgm}^2$$

$$GD^2 = 11,7 \text{ Kgm}^2$$

2.4.12 GD^2 DEL SISTEMA. TOTAL AL EJE DEL ROTOR

El GD^2 del sistema será la suma de los GD^2 de todos los elementos reducidos al eje del motor.

GD^2 del motor	=	170	$Kg-m^2$
GD^2 del sistema de embrague y acoplamiento	=	152	$Kg-m^2$
GD^2 freno	=	270	$Kg-m^2$
GD^2 piñón N° 4	=	49	$Kg-m^2$
rueda N° 5	=	730	$Kg-m^2$
piñón N° 6	=	2,25	$Kg-m^2$
rueda N° 7	=	44,8	$Kg-m^2$
polea motriz	+	16,8	$Kg-m^2$
polea de desviación 9	=	8,4	$Kg-m^2$
Coche 1	=	35,00	$Kg-m^2$
Coche 2	=	11,7	$Kg-m^2$

$$GD_T^2 = 1.488 \text{ Kg-m}^2$$

2.4.13 MOMENTO Y POTENCIA DE ARRANQUE

El motor en estudio deberá tener las siguientes características:

Potencia 170 Kw con capacidad de sobrecarga de 2,1 veces sobre la potencia nominal en un lapso de tiempo aproximado de 5 seg. para las con

diciones más desfavorables y capacidad de sobrecarga de 1,6 en las condiciones intermedias de trabajo, para un período más largo de tiempo, hasta 3 horas según el estudio de elevación de temperatura del acápitate 2.5.9

Velocidad nominal del motor	$n = 600$ r.p.m.
angular	$\omega = 62,8$ 1/s.
tiempo de arranque	$t = 8,7$ seg.
velocidad lineal del sistema	$v = 3$ m/s en la polea <u>directriz</u>
aceleración angular	$\alpha = 7,2$ 1/s.
aceleración lineal del sistema	$a = 0,345$ m/s ²
tiempo de frenado	$t = 8,7$ seg.
aceleración de frenado	$\alpha' = -7,2$ 1/seg ² .
rendimiento	$\eta = 91\%$
peso aproximado	$G = 3.100$ Kg.
GD ² del motor	GD ² = 170 Kgm ²
GD ² del sistema	GD _s ² = 1.488 Kgm ²
aislamiento tipo B	
temperatura máxima	$\theta_f = 90^\circ\text{C}$
constante de calentamiento	$T = 120$ min.
Servicio intermitente, 10,5 min. de funcionamiento, 10 min. de parada.	
irradiación	$A = 0,0535 \frac{\text{Kcal}}{^\circ\text{Cseg.}}$

Constante de almacenamiento $C = 385,2 \frac{\text{Kcal}}{^{\circ}\text{C}}$

Altura sobre el nivel del mar $h = 4.000 \text{ mts.}$

A continuación se desarrollan las curvas de potencia para arranque y frenado teniendo en cuenta el sistema de coches y engranajes. Aplicando las ecuaciones del acápite 2.0.14.

Coche: Ascendente lleno

Descendente vacío

Arranque

$$\sum GD^2 = 1.488$$

t	v	n	$T_2^Q - T_1$	$9,55 \frac{Q v}{n \eta}$	$\frac{2,67n \sum GD^2}{1000 t}$	Ma	$\frac{Q v}{102 \eta}$	$2,74 \left(\frac{n}{1000}\right)^2 \frac{\sum GD^2}{t}$	Pa
0	0	0	6.821	360	274	634	0	0	0
1	0,345	69	6.705	354	274	628	25	18,8	43,8
2	0,69	138	6.589	345	274	619	48,9	38,7	87,6
3	1,04	207	6.473	340	274	614	72,5	58,2	130,7
4	1,38	276	6.358	334	274	608	94,4	77,6	172,0
5	1,72	345	6.242	326	274	600	116	97	213
6	2,06	414	6.125	321	274	595	131	116	247
7	2,42	483	6.010	316	274	590	157	135	292
8	2,76	552	5.894	309	274	583	175	155	330
8,7	3,0	600	5.812	305	274	579	188	168	356

- 154 -

Momento con m.r.u. a: t = 8,7 seg., M = 305 Kgm; t = 642,0 s., M = 57 Kgm.

Potencia con m.r.u. a: t = 8,7 seg., P = 188 Kw.; t = 642,0 s., P = 35 Kw.

TABLA (2.4.2)

Coche: Ascendente lleno

Descendente vacío

Frenado

t	v	n	$\frac{Q}{T_2 - T_1}$	$9,55 \frac{Q v}{n \eta}$	$\frac{2,67n \sum GD^2}{1000 t}$	M_{desc}	$\frac{Q v}{102 \eta}$	$2,74 \left(\frac{n}{1000}\right)^2 \frac{\sum GD^2}{t}$	P_{desc}
8,7	3	600	1.084	57	-274	-217	35	-168	-133
8	2,76	552	1.012	53,1	-274	-220,9	30,1	-155	-124,9
7	2,42	483	941	49,6	-274	-224,4	24,6	-135	-110,4
6	2,06	414	869	45,5	-274	-228,5	19,3	-116	- 99,7
5	1,72	345	798	41,6	-274	-232,4	14,8	- 97	- 82,2
4	1,38	276	726	38	-274	-236	10,8	- 77,6	- 66,8
3	1,04	207	655	34,6	-274	-239,4	7,35	- 58,2	- 50,85
2	0,69	138	584	30,7	-274	-243,7	4,34	- 38,7	- 33,36
1	0,345	69	512	26,7	-274	-248,3	1,92	- 18,8	- 16,88
0	0	0	462	24,7	-274	-249,3	0	0	0

TABLA (2.4.2a)

Coche: Ascendente vacío

Descendente lleno

Arranque

$$\sum GD^2 = 1.488$$

t	v	n	$\frac{Q}{T_2 - T_1}$	$9,55 \frac{Q v}{n \eta}$	$\frac{2,67n \sum GD^2}{1000 t}$	Ma	$\frac{Q v}{102 \eta}$	$2,74 \left(\frac{n}{1000}\right)^2 \frac{\sum GD^2}{t}$	Pa
0	0	0	1.570	82	274	356	---	----	----
1	0,345	69	1.454	76	274	350	5,4	18,8	24,2
2	0,69	138	1.338	70	274	344	9,9	38,7	48,6
3	1,04	207	1.222	64	274	338	13,7	58,2	71,9
4	1,38	276	1.106	58	274	332	16,5	77,6	94,1
5	1,72	345	990	52	274	326	18,3	97	115,3
6	2,06	414	874	46	274	320	19,4	116	135,4
7	2,42	483	758	40	274	314	19,7	135	154,7
8	2,76	552	641	34	274	308	19,1	155	174,1
8,7	3,0	600	560	29,4	274	303,4	18,1	168	186,1

Momento con m.r.u. a: t = 8,7 seg., M = 29,4 Kgm; t = 642 s., M = - 216 Kgm.

Potencia con m.r.u. a: t = 8,7 seg., P = 18,1 Kw.; t = 642 s., P = - 133 Kw.

TABLA (2.4.3)

Coche: Ascendente vacío

Descendente lleno

Frenado

t	v	n	$T_2 - T_1$	$9,55 \frac{Q v}{n \eta}$	$\frac{2,67n \sum GD^2}{1000 t}$	M_{desc}	$\frac{Q v}{102 \eta}$	$2,74 \left(\frac{n}{1000}\right)^2 \frac{\sum GD^2}{t}$	P_{desc}
8,7	3	600	-4.130	-216	-274	-490	-133	-168	-301
8	2,76	552	-4.202	-221	-274	-495	-125	-155	-280
7	2,42	483	-4.273	-225	-274	-499	-111	-135	-246
6	2,06	414	-4.345	-227	-274	-501	- 96,5	-116	-212,5
5	1,72	345	-4.416	-230	-274	-504	- 81,5	- 97	-178,5
4	1,38	276	-4.488	-235	-274	-509	- 66,5	- 77,6	-144,1
3	1,04	207	-4.559	-240	-274	-514	- 51	- 58,2	-109,2
2	0,69	138	-4.630	-243	-274	-517	-34,4	- 38,7	- 72,1
1	0,345	69	-4.709	-247	-274	-521	- 17,5	- 18,8	- 36,3
0	0	0	-4.752	-251	-274	-525	0	0	0

TABLA (2.4.3a)

Coches: Ascendente lleno

Descendente lleno

Arranque

$$\sum GD^2 = 1.488$$

t	v	n	$T_2 - T_1$	$9,55 \frac{Q \cdot v}{n \cdot \eta}$	$\frac{2,67n \sum GD^2}{1000 \cdot t}$	Ma	$\frac{Q \cdot v}{102 \cdot \eta}$	$2,74 \left(\frac{n}{1000}\right)^2 \frac{\sum GD^2}{t}$	Pa
0	0	0	3.728	196	274	470	0	0	0
1	0,345	69	3.586	188	274	462	13,3	18,8	32,1
2	0,69	138	3.444	181	274	455	25,5	38,7	64,2
3	1,04	207	3.302	174	274	448	37,2	58,2	95,4
4	1,38	276	3.161	166	274	440	47	77,6	124,6
5	1,72	345	3.019	158	274	432	56	97	153
6	2,06	414	2.876	151	274	425	64	116	180
7	2,42	483	2.735	144	274	418	71,5	135	206,5
8	2,76	552	2.593	137	274	411	77	155	232
8,7	3,0	600	2.493	131	274	405	80,6	168	248,6

Momento con m.r.u. a: t = 8,7 seg., M = 131 Kgm; t = 642,0 s., M = - 28,4 Kgm.

Potencia con m.r.u. a: t = 8,7 seg., P = 80,6 Kw; t = 642,0 s., P = - 17,5 Kw.

TABLA (2.4.4)

Coche: Ascendente lleno

Descendente lleno

Frenado

t	v	n	$T_2 \stackrel{Q}{=} T_1$	$9,55 \frac{Q v}{n \eta}$	$\frac{2,67n \sum GD^2}{1000 t}$	M_{desc}	$\frac{Q v}{102 \eta}$	$2,74 \left(\frac{n}{1000}\right)^2 \frac{\sum GD^2}{t}$	P_{desc}
8,7	3	600	- 541	-28,4	-274	-302,4	-17,5	-168	-185,5
8	2,76	552	- 639	-33,4	-274	-307,4	-19	-155	-174
7	2,42	483	- 736	-38,6	-274	-312,6	-19,2	-135	-154,2
6	2,06	414	- 834	-43,7	-274	-317,7	-18,5	-116	-134,5
5	1,72	345	- 931	-48,6	-274	-322,6	-17,2	- 97	-114,2
4	1,38	276	-1.029	-53,5	-274	-327,5	-15,2	- 77,6	- 92,8
3	1,04	207	-1.126	-58,4	-274	-332,4	-12,6	- 58,2	- 70,8
2	0,69	138	-1.223	-64,6	-274	-348,6	- 9,1	- 38,7	- 47,7
1	0,345	69	-1.321	-69,5	-274	-343,5	- 4,4	- 18,8	- 23,7
0	0	0	-1.389	-74,5	-274	-348,5	0	0	0

159

TABLA (2.4.4a)

Coche: Ascendente vacío

Descendente vacío

Arranque

$$\sum GD^2 = 1.488$$

t	v	n	$T_2 - T_1$	$9,55 \frac{Q v}{n \eta}$	$\frac{2,67n \sum GD^2}{1000 t}$	Ma	$\frac{Q v}{102 \eta}$	$2,74 \left(\frac{n}{1000}\right)^2 \frac{\sum GD^2}{t}$	Pa
0	0	0	4.663	244	274	518	0	0	0
1	0,345	69	4.573	240	274	514	17,0	18,8	35,8
2	0,69	138	4.483	235	274	509	33,2	38,7	71,9
3	1,04	207	4.393	231	274	505	49,0	58,2	107,2
4	1,38	276	4.303	225	274	499	64	77,6	141,6
5	1,72	345	4.213	220	274	494	78	97	175
6	2,06	414	4.107	216	274	490	91	116	207
7	2,42	483	4.033	212	274	486	105	135	240
8	2,76	552	3.942	207	274	481	117	155	272
8,7	3,0	600	3.879	204	274	478	125	168	293

Momento con m.r.u. a: t = 8,7 seg., M = 204 Kgm; t = 642 s., M = - 132 Kgr.

Potencia con m.r.u. a: t = 8,7 seg., P = 125 Kw., t = 642 s., P = - 81 Kw.

TABLA (2.4.5)

: 160 :

Coche: Ascendente vacío

Descendente vacío

Frenado

t	v	n	$T_2 - T_1$	$9,55 \frac{Q v}{n \eta}$	$\frac{2,67n \sum GD^2}{1000 t}$	M_{desc}	$\frac{Q v}{102 \eta}$	$2,74 \left(\frac{n}{1000}\right)^2 \frac{\sum GD^2}{t}$	P_{desc}
8,7	3	600	-2.505	-132	-274	-406	-81	-168	-249
8	2,76	552	-2.551	-134	-274	-408	-76	-155	-231
7	2,42	483	-2.596	-136	-274	-410	-67,5	-135	-202,5
6	2,06	414	-2.642	-138	-274	-412	-58,4	-116	-174,4
5	1,72	345	-2.687	-141	-274	-415	-49,5	-97	-146,5
4	1,38	276	-2.733	-143	-274	-417	-40,5	- 77,6	-118,1
3	1,04	207	-2.778	-145	-274	-419	-31	- 58,2	- 89,2
2	0,69	138	-2.923	-148	-274	-422	-21,6	- 38,7	- 60,3
1	0,345	69	-2.869	-150	-274	-424	-10,6	- 18,8	- 29,4
0	0	0	-2.901	-152	-274	-426	0	0	0

TABLA (2.4.5a)

2.5. CALENTAMIENTO Y ENFRIAMIENTO

Todas las máquinas eléctricas, están afectadas, en su funcionamiento por las pérdidas. Estas se suelen presentar bajo la forma de calor. El calor producido se acumula en las distintas partes del mecanismo, devanados, cojinetes, colectores, escobillas, etc.

Una parte del calor es evacuado por medios refrigerantes, aire, aceite, circulación del agua, etc. En muchos casos gran parte del calor puede ser evacuado, en otros casos debe interrumpirse el funcionamiento de la máquina para que se enfríe. De todas maneras no se puede pasar la temperatura admisible de los aislantes pues, evidentemente se pone en peligro la vida útil de la máquina.

2.5.1 FORMULA DE CALENTAMIENTO Y ENFRIAMIENTO

El calentamiento del motor eléctrico tiene que ver con la ley de Joule. En todo circuito, por el que circula una corriente, se producen pérdidas en calor dadas por la relación

$$\begin{aligned} 1 \text{ Joule} &= 0,24 \text{ calorías} && \text{ó} \\ 1 \text{ Kw h} &= 860 \text{ Kcal} && \text{o también.} \\ 1 \text{ HP h} &= 632 \text{ Kcal.} \end{aligned}$$

La ecuación fundamental del calentamiento es la siguiente

$$(2.5.1) \quad Q_{dt} = C_{de} + A_{ed}t$$

$$\text{Calor producido} = \text{Calor almacenado} + \text{calor evacuado}$$

En donde Q es el calor producido por la máquina en Kcal., t es el tiempo en segundos, $Cd\theta$ es el calor almacenado en la máquina, en el que C es el coeficiente de temperatura dado por $[Kcal/^{\circ}C]$, $A\theta dt$ es el calor irradiado o evacuado, en el que A es el coeficiente de irradiación del calor, dado por $[Kcal/^{\circ}C \text{ seg}]$. θ es la temperatura en $^{\circ}C$ y t el tiempo en seg.

Las normas alemanas establecen la temperatura ambiente de $35^{\circ}C$ es decir que si una máquina ha llegado, por ejemplo a 45° el valor de θ es $10^{\circ}C$.

De la ecuación (2.5.1) se desprende que

$$(2.5.2) \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{Q - A\theta}{C}$$

$$(2.5.3) \quad C d\theta = dt(\theta - A\theta)$$

Si la máquina no irradia calor, entonces el coeficiente de irradiación A vale cero, entonces significa que la máquina acumula todo el calor y evidentemente, no pudiendo los aislantes soportar esa temperatura, se quemará.

$A = 0$, no irradia calor.

$$(2.5.4) \quad Q dt = C d\theta ;$$

$$(2.5.5) \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{Q}{C} = K$$

La temperatura subirá de acuerdo al Diagrama (2.5.1).

En cambio, si el coeficiente C vale cero, la máquina no tiene capacidad de almacenar calor y

$$(2.5.6) \quad Q dt = A \theta dt$$

$$(2.5.7) \quad Q = A \theta$$

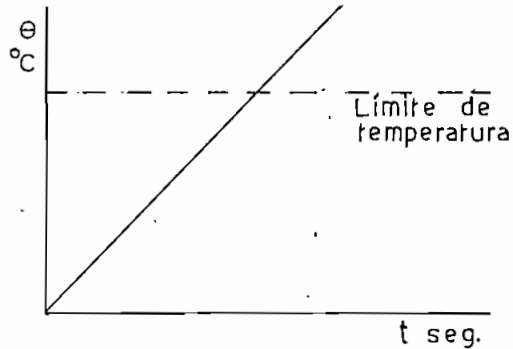


DIAGRAMA (2.5.1)

La máquina irradia todo el calor y no se calienta.

$$(2.5.8) \quad \theta = \frac{Q}{A} \quad \text{será la temperatura final o límite de trabajo, } Q/A \text{ es la temperatura de aislamiento.}$$

Para el enfriamiento Q vale cero y nos queda la expresión

$$(2.5.9) \quad C d\theta = -A \theta dt, \quad \text{despejando } dt$$

$$(2.5.10) \quad dt = -\frac{C}{A \theta} d\theta, \quad \text{integrando}$$

$$(2.5.11) \quad t = -\frac{C}{A} \ln \frac{\theta_1}{\theta_2}$$

θ_2 es la temperatura en cualquier instante t

θ_1 es la temperatura ambiente.

Despejando θ_2 en forma exponencial, da

$$(2.5.12) \quad \theta_2 = \theta_1 e^{-At/C}$$

El valor

$$(2.5.13) \quad \frac{C}{A} = T \quad \text{se denomina, constante de tiempo.}$$

Por lo tanto la expresión (2.5.12) quedará

$$(2.5.14) \quad \theta_2 = \theta_1 e^{-\frac{t}{T}}$$

La representación gráfica de esta curva exponencial será como nos muestra el diagrama (2.5.2)

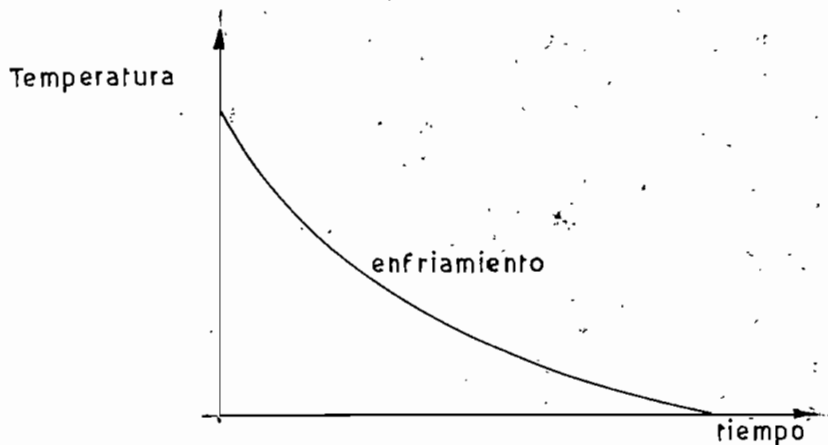


DIAGRAMA (2.5.2)

El proceso de calentamiento estará dado por la integración de la ecuación (2.5.1)

$$Qdt = Cd\theta + A\theta dt$$

$$(2.5.15) \quad Qdt - A\theta dt = Cd\theta$$

$$(2.5.16) \quad dt(Q - A\theta) = Cd\theta$$

$$(2.5.17) \quad \frac{Q - A\theta}{C} dt = d\theta$$

$$(2.5.18) \quad dt = \frac{Cd\theta}{Q - A\theta} \quad \text{Integrando}$$

$$(2.5.19) \quad t = \frac{C}{A} \ln \frac{Q - A\theta_1}{Q - A\theta_2} \quad \text{transformando}$$

$$(2.5.20) \quad t = \frac{C}{A} \ln \frac{Q/A - \theta_1}{Q/A - \theta_2}$$

teniendo en cuenta que

$$\frac{Q}{A} = \theta \quad (\text{temperatura final l\u00edmite}) \text{ Por (2.5.8)}$$

$$(2.5.21) \quad t = \frac{C}{A} \ln \frac{\theta_f - \theta_1}{\theta_f - \theta_2}$$

y como $\frac{C}{A} = T$ por (2.5.13)

$$(2.5.22) \quad t = T \ln \frac{\theta_f - \theta_1}{\theta_f - \theta_2}$$

En esta ecuaci\u00f3n se desprende que

θ_2 = temperatura instant\u00e1nea

θ_1 = temperatura ambiente.

Despejando, en forma exponencial, la temperatura instant\u00e1nea, tendremos

$$(2.5.23) \quad \theta_2 = \theta_f (1 - e^{-\frac{t}{T}}) + e^{-\frac{t}{T}} \theta_1$$

En esta expresi\u00f3n θ_f es la temperatura final que depende de la clase de aislamiento.

La constante de tiempo es $T = \frac{C}{A}$

Considerando que la temperatura ambiente es nivel cero -aunque conocemos que las normas establecen 35°C como temperatura ambiente- entonces la ecuación (2.5.23) se transforma en

$$(2.5.24) \quad \theta = \theta_f \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right)$$

La representación gráfica de esta función corresponde al diagrama (2.5.3) en el que se observa que la curva corresponde a una curva logarítmica.

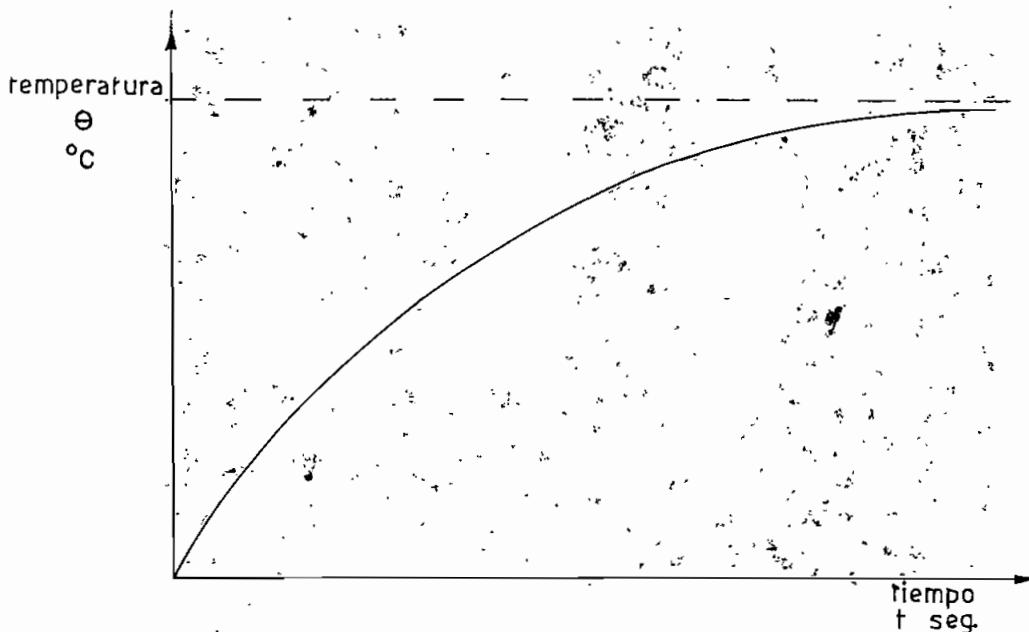


DIAGRAMA (2.5.3)

El valor de T depende de las características del sistema motriz.

2.5.2 ANALISIS DE LA CONSTANTE DE TIEMPO T

La constante de tiempo T , que depende de las características del motor, está también relacionada con el proceso de ventilación, la veloci

dad, el tipo de servicio que presta, la potencia, el calor específico del hierro y del cobre, etc.

El valor de T expresa el tiempo que requiere un motor para que su temperatura aumente el 63% como se puede demostrar; o disminuya el 37% en el proceso de enfriamiento.

Conforme la ecuación (2.5.24)

$$\theta = \theta_f \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right)$$

Si el tiempo de calentamiento se hace coincidir con T entonces $t = T$ y

$$(2.5.25) \quad \theta = \theta_f \left(1 - e^{-\frac{T}{T}} \right) = \theta_f (1 - e^{-1})$$

y la temperatura

$$(2.5.26) \quad \theta = \theta_f (1 - 0,366)$$

$$(2.5.27) \quad \theta = \theta_f (0,634) = 63,4\% \theta_f$$

De modo que T servirá para determinar el tiempo en que la temperatura instantánea es el 63,4% de la temperatura límite.

Para el enfriamiento aplicamos la ecuación (2.5.14)

$$\theta = \theta_f e^{-\frac{t}{T}}$$

Si el tiempo $t = T$

$$\theta = \theta_f e^{-1}$$

$$\theta = \theta_f (0,366)$$

$$\theta = 36,6\% \theta_f$$

O sea que T representa el tiempo en el que la temperatura disminuye en un 36,6%.

Supongamos que la constante de tiempo de una máquina es $T = 90$ minutos, y que la misma tiene devanados de clase B que toleran un incremento, sobre la temperatura ambiente, hasta de 90°C o sea que la temperatura límite será de 125°C . Esto significa que al cabo de 90 minutos la temperatura de la máquina será de

$$90^\circ \times 0,63 = 57^\circ$$

$$\theta = 57^\circ + 35^\circ = 92^\circ$$

Para representar en un diagrama las distintas posibilidades de temperatura tendremos los siguientes datos:

Constante de tiempo $T = 90$ min.

Temperatura final $\theta_f = 90^\circ\text{C}$

La ecuación

$$\theta = 90 \left(1 - e^{-\frac{t}{90}} \right)$$

Para $t = \frac{T}{4} = 22$ min. 30 seg.

$$\theta = 90 \left(1 - e^{-\frac{22,5}{90}} \right)$$

$$\theta = 90(1 - 0,78)$$

$$\theta = 90(0,22)$$

$$\theta = 20^\circ$$

Para $t = \frac{T}{2} = 45 \text{ min.}$

$$\theta = 90 (1 - e^{-0,5})$$

$$\theta = 90 (1 - 0,605)$$

$$\theta = 90 (0,395)$$

$$\theta = 35,5^{\circ}\text{C}$$

Para $t = \frac{3}{4} T = 67,5 \text{ min.}$

$$\theta = 90 (1 - e^{-0,75})$$

$$\theta = 90 (1 - 0,522)$$

$$\theta = 90 (0,478)$$

$$\theta = 43^{\circ}\text{C}$$

Para $t = T = 90 \text{ min.}$

$$\theta = 90 (1 - e^{-1})$$

$$\theta = 57^{\circ}\text{C}$$

Para $t = 2T = 180 \text{ min.}$

$$\theta = 90 (1 - e^{-2})$$

$$\theta = 90 (1 - 0,135)$$

$$\theta = 90 (0,865)$$

$$\theta = 78^{\circ}\text{C}$$

Para $t = 3T = 270 \text{ min.}$

$$\theta = 90 (1 - e^{-3})$$

$$\theta = 90 (1 - 0,05)$$

$$\theta = 90 (0,95)$$

$$\theta = 85,5^{\circ}\text{C}$$

Para $t = 4T = 360$ min.

$$\theta = 90 (1 - e^{-4})$$

$$\theta = 90 (1 - 0,018)$$

$$\theta = 90 \times 0,982$$

$$\theta = 88,5^{\circ}\text{C}$$

Representando gráficamente todos estos valores, se puede ver la varia
ción de la temperatura con el tiempo.

La constante de tiempo T se puede encontrar también por la derivada de la ecuación (2.5.24) e igualando a 0 el tiempo t .

$$\theta = \theta_f - \theta_f e^{-\frac{t}{T}}$$

Derivando

$$(2.5.28) \quad \frac{d\theta}{dt} = + \frac{\theta_f}{T} e^{-\frac{t}{T}}$$

Reemplazando $t = 0$ para tener la pendiente en el punto de origen ten
dremos

$$(2.5.29) \quad \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{t=0} = \frac{\theta_f}{T}$$

Como $\frac{d\theta}{dt} = \text{tg } \alpha$ en el origen, también T estará dada por

$$(2.5.30) \quad (\text{tg } \alpha)_{t=0} = \frac{\theta_f}{T} \quad \text{y también}$$

$$(2.5.31) \quad T = \frac{\theta_f}{\text{tg}\alpha}$$

Esto permitirá dibujar el diagrama de calentamiento.

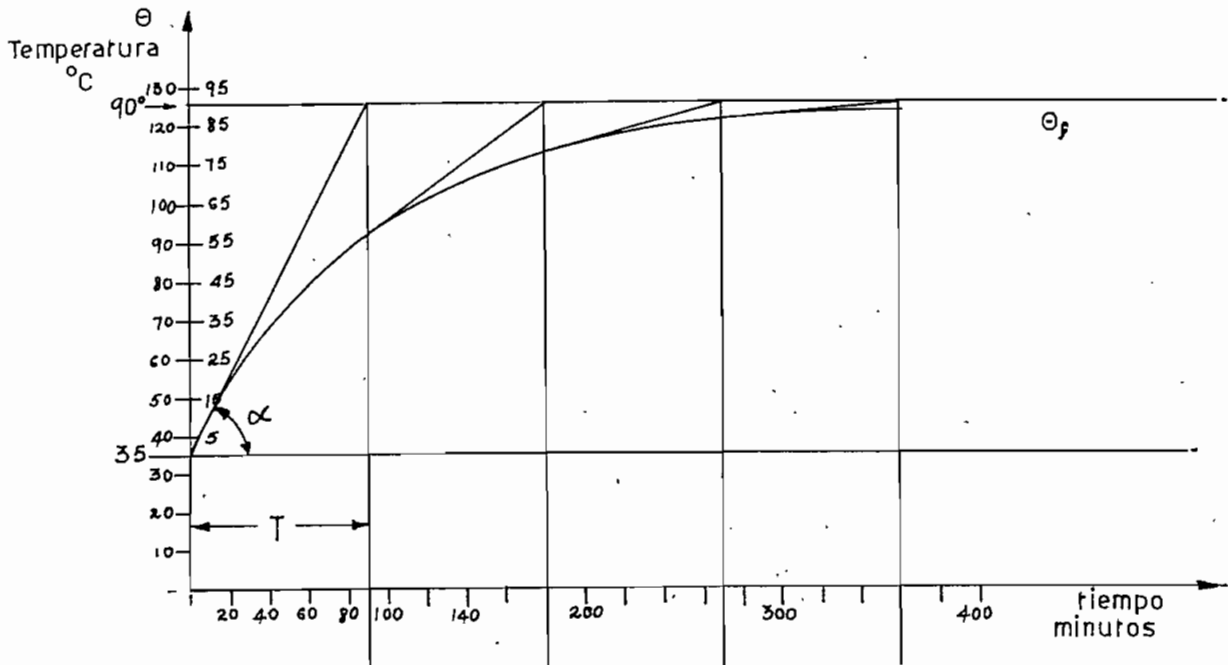


DIAGRAMA (2.5.4)

Siguiendo este mismo proceso se puede establecer el diagrama de enfriamiento.

De la ecuación

$$(2.5.14) \quad \theta = \theta_f e^{-\frac{t}{T}}$$

y la forma cómo interviene la constante T de tiempo.

Asumamos igualmente que la constante de tiempo $T = 90$ min, la tempe

la temperatura final $\theta_f = 90^\circ\text{C}$, entonces la ecuación (2.5.14) será

$$\theta = 90 e^{-\frac{t}{90}}$$

Para $t = \frac{T}{4} = 22 \text{ min. } 30 \text{ seg.}$

$$\theta = 90 \times 0,78$$

$$\theta = 70^\circ\text{C}$$

Para $t = \frac{T}{2} = 45 \text{ min.}$

$$\theta = 90(0,605)$$

$$\theta = 54,5^\circ\text{C}$$

Para $t = \frac{3T}{4} = 67,5 \text{ min.}$

$$\theta = 90(0,522)$$

$$\theta = 47^\circ\text{C}$$

Para $t = T = 90 \text{ min.}$

$$\theta = 90(0,366)$$

$$\theta = 32^\circ\text{C}$$

Para $t = 2T = 180 \text{ min.}$

$$\theta = 90(0,135)$$

$$\theta = 12,2^\circ\text{C}$$

Para $t = 3T = 270 \text{ min.}$

$$\theta = 90(0,05)$$

$$\theta = 4,5^\circ\text{C}$$

Para $t = 4T = 360$ min.

$$\theta = 90(0,018)$$

$$\theta = 1,62^{\circ}\text{C}$$

Hallando la derivada de la ecuación (2.5.14) $\theta = \theta_f e^{-\frac{t}{T}}$

$$(2.5.32) \quad \frac{d\theta}{dt} = \theta_f e^{-\frac{t}{T}} \left(-\frac{1}{T}\right)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{\theta_f}{T} e^{-\frac{t}{T}}$$

Para $t = 0$

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{t=0} = -\frac{\theta_f}{T}$$

La derivada, representa la tangente en algún punto de la curva, por tanto para el origen

$$(2.5.33) \quad \text{tg } \alpha = -\frac{\theta_f}{T} \quad \text{despejando } T$$

$$(2.5.34) \quad T = -\frac{\theta_f}{\text{tg } \alpha}$$

Dibujando el diagrama de enfriamiento.

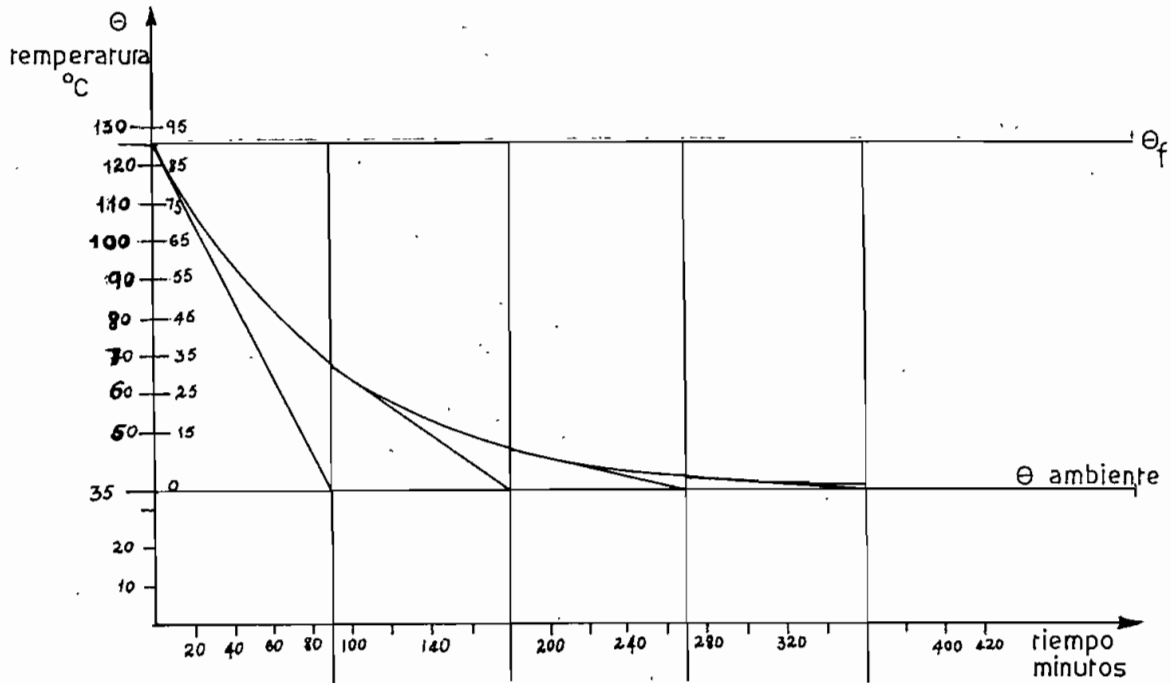


DIAGRAMA (2.5.5)

2.5.3 CALOR DESARROLLADO POR EL SISTEMA MOTRIZ DEL FUNICULAR

Conforme lo desarrollado en el acápite 2.4.5, las características físicas de la máquina son:

Potencia $P = 170 \text{ Kw}$

Peso $W = 3.100 \text{ Kg}$

Factor de inercia $GD^2 = 170 \text{ Kgm}^2$

Rendimiento $\eta = 90\%$

Con el factor de rendimiento conocido se puede calcular las pérdidas que sufre el mecanismo motor, sabiendo que estas pérdidas se manifies-

tan en forma de calor.

Si la potencia nominal del motor es 170 Kw, la potencia demandada será

$$P = \frac{170}{0,90} = 190 \text{ Kw.}$$

Las pérdidas en calor serán

$$\text{Pérdidas} = 190 - 170 = 20 \text{ Kw.}$$

Estos 20 Kw de pérdidas se transforman en calor, conforme el equivalente mecánico del calor.

$$1 \text{ Joule} = 1 \text{ watt-seg} = 0,24 \text{ calorías}$$

$$1 \text{ Kwatt-seg} = 0,24 \text{ Kcal.}$$

$$20 \text{ Kw} = 20 \times 0,24 \text{ Kcal/seg.}$$

La cantidad de calor Q será

$$(2.5.35) \quad Q = 4,8 \text{ Kcal/seg.}$$

2.5.4 CLASES DE AISLANTES

De acuerdo con el manual AEG, Novena Edición, pág. 597, la tabla 10/5 expone la clasificación de los materiales aislantes según (VDE 0530).

Clase	Material aislante	Tratamiento	Temperatura máxima admisible en servicio permanente
A	Algodón, viscosilla, seda, papel, prespán, laca para hilos de cobre.	Impregnación en una masa aislante o bien de un dieléctrico líquido.	105°C
E	Lacas para hilos (también con papel de celulosa) con laca a base de acetato de polivinilo, poliámidada, láminas a base de triacetato de celulosa y otros.	Impregnados o sumergidos en masa aislante.	120°C
B	Productos de mica, amianto y derivados del vidrio, por ejemplo, mica folio, mica neta.	Con líquido de impregnar clase B.	130°C
F	Productos de mica, amianto y derivados con sustancias inorgánicas, mica neta.	Con líquido de impregnar clase F.	155°C
H	Productos de mica, amianto y derivados del vidrio con sustancias inorgánicas, mica neta, silicio puro.	Con líquido de impregnar clase H.	180°C
C	Mica, porcelana, vidrio, cuarzo y otras sustancias refractarias al calor.	Sin líquido aglutinante.	180°C

"Para la vida de los motores la calidad del aislante empleado en sus devanados es de suma importancia. Para los aislantes de la clase B, la temperatura permanente admisible es de 130°C.

La duración media de la vida de un motor equipado con este tipo de aislante alcanza en trabajo continuo hasta 20 años. Sin embargo, hacemos notar que la vida de este devanado con aislantes de la clase B, se a corta apreciablemente si durante el servicio se trabaja a una temperatura ligeramente superior al valor admisible. Para casos especialmente difíciles, se utilizará el aislante de silicón clase H, que contiene sustancias orgánicas e inorgánicas y posee además una resistencia gran de y permanente al calor, una inalterabilidad química, una conductividad calorífica favorable y unas propiedades dieléctricas buenas.....

"Hoy día se utiliza mayormente para los motores un aislamiento de la clase E o B, aunque no se llegue a alcanzar la temperatura máxima admisible para esta clase de aislantes. Esto representa una reserva para cargas imprevistas.

La potencia nominal del motor depende del límite admisible de sobretemperatura. Si se consigue mejorar la refrigeración, o bien mejorar la resistencia térmica del devanado, puede aumentarse la potencia del motor.

Según VDE 0530/3.59, art. 17 se distinguen los siguientes conceptos relativos a la temperatura de los motores:

Concepto de temperatura

Concepto	Explicación
Temperatura admisible máxima permanente de un material aislante.	Temperatura que puede soportar, durante un período largo de tiempo un material aislante sin llegar a que se perjudiquen sus propiedades mecánicas y eléctricas.
Temperatura límite de una parte del motor.	La temperatura máxima admisible que puede medirse prácticamente en aquella parte.
Sobretemperatura.	La diferencia existente entre la temperatura de una máquina o de una parte de ésta y la temperatura del medio refrigerante.
Sobretemperatura final.	Sobretemperatura al final de un proceso de calentamiento.
Sobretemperatura límite.	Sobretemperatura máxima admisible (diferencia existente entre la temperatura límite y la temperatura máxima fijada para el medio refrigerante).

Según la tabla 10/6 del Manual AEG conforme VDE 0530/3.59, art 33, Tabla 4

2.5.5 LIMITES DE SOBRETENPERATURA Y PROCEDIMIENTOS DE MEDICION

	Arrollamientos con aislamiento según clase					
	A	E	B	F	H	C
Todos los devanados (a excepción de los devanados de campo por capas).	60°C	75°C	80°C	100°C	125°C	Solamente limitados por la influencia de partes aislantes próximas.
Arrollamientos de campo de una sola capa en general.	65°C	80°C	90°C	100°C	125°C	Solamente limitados por la influencia de partes aislantes próximas.
Núcleos y otras piezas que no estén en contacto directo con el devanado.	La temperatura de estas piezas no deberá poner en peligro los arrollamientos próximos y otras partes.					
Núcleos de hierro con arrollamientos embutidos.	Como los arrollamientos.					
Colectores de delgas	Mediciones efectuadas con termómetro de dilatación.	60°C				
	Mediciones efectuadas con termómetro eléctrico.	70°C				
Cojinetes	Rodamientos y cojinetes de deslizamiento con grasas usuales.	45°C				
	Rodamientos con grasas especiales, punto de goteo no inferior a 160°C	55°C				
Todas las partes restantes	Solamente limitadas por la influencia de piezas aislantes próximas.					

Procedimiento de medición

<p>Todos los arrollamientos a excepción de los que permanentemente están en <u>circuito</u> corto.</p>	<p>Aumento de la resistencia y termómetro.</p>
<p>Arrollamientos en circuito corto <u>perma</u> nentes y todas las partes restantes.</p>	<p>Termómetro.</p>
<p>Devanados de estator de máquinas de <u>co</u> rriente alterna con potencias nominales superiores a 5MVA o con longitudes de núcleo de hierro mayores de 1 m.</p>	<p>Termómetros eléctricos <u>in</u> corporados.</p>

Temperatura máxima del aire de refrigeración dependiente de la altura del lugar.

<p>Altura sobre el nivel del mar en m.</p>	<p>0-1000</p>	<p>1000-2000</p>	<p>2000-3000</p>	<p>3000-4000</p>
<p>Temperatura máxima del aire de refrigeración °C</p>	<p>40</p>	<p>35</p>	<p>30</p>	<p>25</p>

2.5.6 ELECCION DEL SISTEMA AISLANTE DEL MOTOR Y DE LA CONSTANTE DE TIEMPO

Según la tabla 8-1 de Alexander S. Langsdorf, (Mc Graw-Hill Book Company) NY 1964, Principios de las máquinas de corriente continua, se establece la siguiente tabla sobre las elevaciones normalizadas de temperatura para máquinas con características nominales continuas y reducidas. Estas mediciones se basan en una temperatura ambiente máxima de 40°C.

Tipo del aislamiento	Característica nominal	Tiempo de la característica	Elevación de temperatura °C		
			Clase A	Clase B	Clase H
1. Uso general (máquina abierta)		Continuo	40		
2. Protegido contra el goteo.		Continuo	50		
3. Protegido contra salpicaduras, guardado, semiguardado y protegido contra el goteo completamente guardado.		Continuo	50	70	110
4. Totalmente encerrado, sin ventilación, totalmente encerrado con refrigeración por ventilador, protegido contra explosiones, impermeabilizado, hermético, sumergible.		Continuo	55	75	115
5. Todos los demás.		Continuo	50	70	110
Abierta, protegida contra el goteo, protegida contra salpicaduras, guardada, semiguardada y protegida contra el goteo completamente guardada.	todas	5, 15, 30, 60 min.	50	70	110
Totalmente encerrada, sin ventilación.	Hasta 30 HP	5 min.	55	75	115
Totalmente encerrada, con refrigeración por ventilador.	Hasta 50 HP	15 min.	55	75	115
Protegida contra explosiones y contra agua.	Hasta 60 HP	30 min.	55	75	115
Protegida contra polvo, sumergible.	Todas	60 min.	55	75	115

La tabla 8-2 del libro citado de Langsdorf nos da el límite de temperaturas observables en los motores.

	Clase de aislamiento	Método de medida de la temperatura	Valor punta	Valor normal
Inducido y campo	A	Resistencia	125	110
		Termómetro	100	90
Inducido	B	Resistencia	160	145
		Termómetro	125	115
Campo	B	Resistencia	170	155
		Termómetro	130	120

El catálogo de motores de la General Electric, número 491 página 24 de Abril 12 de 1965, establece la siguiente tabla de aumento de la carga para motores, en función de las características de la misma y del tiempo de aplicación.

Clasificación	Tiempo en minutos					
	120	60	30	15	5	1
	Porcentaje de carga continua					
<p><u>Sobrecarga, 75°C aumento temperatura</u></p> <p>Se aplica la sobrecarga sólo después de que el motor ha vuelto a la temperatura de carga normal.</p>	125	130	135	140	160	Cálculos a base de los principios de los momentos de freno
<p><u>Tiempo corto, 75°C de aumento, temp.</u></p> <p>A cada período de carga, sigue uno de descanso en el que la máquina disminuye su temperatura hasta 5°C sobre el ambiente.</p>	130	135	150	175	200	
<p><u>Trabajo periódico, 75°C de aumento</u></p> <p>A cada período de carga, sigue uno de no carga de alguna duración. Puede descansar el motor entre períodos de carga, pero con ventilación forzada.</p>	125	130	140	150	160	

Elegiremos el tipo de aislante clase B que permite un aumento de temperatura ambiente, que según lo normalizado es de 35°C. Es decir, que la temperatura límite máxima será de 125°C.

De acuerdo con las normas alemanas la constante de tiempo se ha determinado según la tabla que se indica a continuación.

Potencia motriz	Constante de tiempo
De 6 - 30 Kw	30 min.
30 - 100 Kw	60 min.
100 - 150 Kw	90 min.
150 Kw en adelante	120 min.

Para nuestro sistema de estudio elegimos la constante de tiempo de 120 min. o sea 7.200 seg.

2.5.7 ECUACION DE CALENTAMIENTO Y ENFRIAMIENTO

Los datos para escribir las ecuaciones son:

Temperatura final $\Theta_f = 90^\circ\text{C}$

Constante de tiempo $T = 120 \text{ min.}$

Calor producido por la máquina $Q = 4,8 \text{ Kcal/seg.}$

La constante A, puede determinarse a partir de la ecuación (2.5.7)

$$A = \frac{Q}{\Theta_f}$$

$$A = \frac{4,8 \text{ Kcal/seg}}{90^\circ\text{C}}$$

$$A = 0,0535 \frac{\text{Kcal}}{^\circ\text{C seg}}$$

La constante C puede determinarse por la ecuación (2.5.13)

$$C = A \cdot T$$

$$C = 0,0535 \frac{\text{Kcal}}{^\circ\text{C seg}} \times 7.200 \text{ seg.}$$

$$C = 385,2 \text{ Kcal}$$

$$A = \frac{4,8 \text{ Kcal/seg}}{90^{\circ}\text{C}}$$

$$A = 0,0535 \frac{\text{Kcal}}{^{\circ}\text{C seg}}$$

La constante C puede determinarse por la ecuación (2.5.13)

$$C = A \cdot T$$

$$C = 0,0535 \frac{\text{Kcal}}{^{\circ}\text{C seg}} \times 7.200 \text{ seg.}$$

$$C = 385,2 \frac{\text{Kcal}}{^{\circ}\text{C}}$$

La ecuación de calentamiento será

$$\theta = \theta_f \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right)$$

$$\theta = 90 \left(1 - e^{-\frac{t}{120}} \right) ^{\circ}\text{C}$$

siendo t el tiempo en minutos.

La ecuación de enfriamiento:

$$\theta = \theta_f e^{-\frac{t}{T}} ^{\circ}\text{C}$$

$$\theta = 90 e^{-\frac{t}{120}}$$

La representación gráfica de estas funciones se indica en los diagramas (2.5.6). En estos gráficos se puede apreciar el aumento de temperatura de acuerdo con el aumento de tiempo.

Curva de calentamiento

$$\theta = 90 \left(1 - e^{-\frac{t}{120}} \right)$$

Para $t = 0$ $\theta = 0^\circ\text{C}$

Para $t = 60$ min. $\theta = 35,5^\circ\text{C}$

Para $t = 120$ min. $\theta = 56,9^\circ\text{C}$

Para $t = 240$ min. $\theta = 78^\circ\text{C}$

Para $t = 360$ min. $\theta = 85,5^\circ\text{C}$

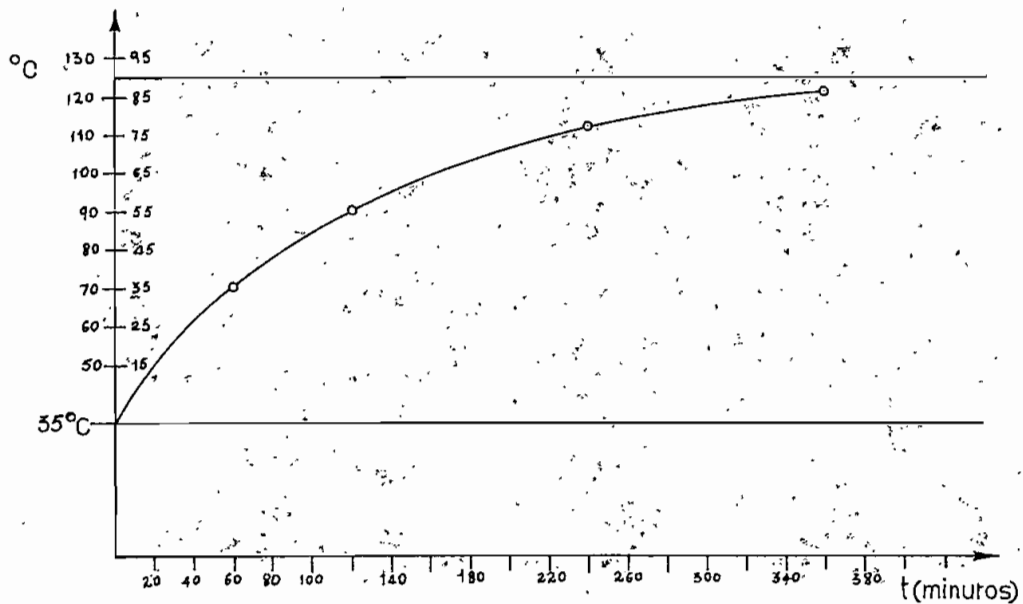


DIAGRAMA (2.5.6)

Curva de enfriamiento

$$\theta = 90 e^{-\frac{t}{120}}$$

Para $t = 0$ $\theta = 90^\circ\text{C}$

Para $t = 60$ min. $\theta = 54,5^\circ\text{C}$

Para $t = 120$ min. = 32°C

Para $t = 240$ min. = $12,2^{\circ}\text{C}$

Para $t = 360$ min. = $4,5^{\circ}\text{C}$

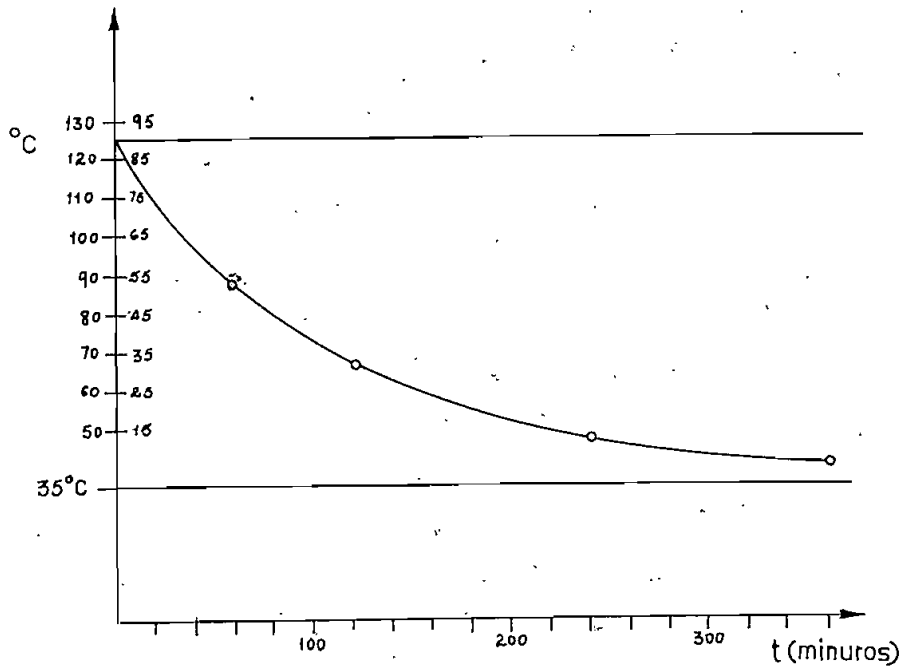


DIAGRAMA (2.5.7)

2.5.8 TRABAJO DEL SISTEMA, EN CONDICIONES MAS DESVENTAJOSAS. COMPROBACION DE QUE EL MOTOR NO SE RECALIENTA

Las condiciones más desventajosas para el funcionamiento del funicular serán: coche ascendente lleno, descendente vacío. Durante ocho horas de trabajo:

El ciclo será:

Arranque	8,7 seg.	8,7 seg.
Movimiento uniforme	10,21 min.	612,6 seg.
Frenado	8,7 seg.	8,7 seg.
		<hr/>
	Tiempo de funcionamiento	630,0 segundos
Período de descanso	10,0 min.	600 seg.
Período de trabajo	10,5 min.	
Período de descanso	10,0 min.	

El diagrama de calentamiento y enfriamiento tendrá en cuenta un tiempo de 8 horas de trabajo sin considerar que el motor está sobrecargado.

Supongamos que el sistema empieza a funcionar en condiciones desventajosas a partir de las 7:00 de la mañana, hasta las 3:00 de la tarde en forma intermitente, es decir, con un período de trabajo de 10,5 min. y un período de descanso de 10 min.

Asumimos la temperatura ambiente establecida por las normas alemanas, o sea 35°C. Se aplicará para el calentamiento la ec. (2.5.24) y para el enfriamiento la ecuación (2.5.14). Sobre el ambiente.

$$(2.5.24) \quad \theta = \theta_f \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) \quad \text{calentamiento}$$

$$(2.5.14) \quad \theta = \theta_f e^{-\frac{t}{T}} \quad \text{enfriamiento.}$$

A las 7:00 a.m. $\theta_f = 90^\circ\text{C}$, $T = 120$ min.

y la temperatura ambiente $\theta_0 = 35^\circ\text{C}$

Funcionamiento hasta las 7:10,5

$$\text{A las } 7:10,5 \quad \theta_{7:10,5} = 90 \left(1 - e^{-\frac{10,5}{120}} \right)$$

$$\theta_{7:10,5} = 90 (1 - e^{-0,0875})$$

$$\theta_{7:10,5} = 90 (1 - 0,916)$$

$$\theta_{7:10,5} = 7,56^{\circ}\text{C}$$

Temperatura tomando en cuenta el ambiente

$$\theta'_{7:10,5} = 7,56 + 35 = 42,56^{\circ}\text{C}$$

Reposo, enfriamiento por 10 min. hasta 7:20,5 a.m.

En este caso la temperatura máxima es $7,56^{\circ}\text{C}$ y

$$\theta_{7:20,5} = 7,56 e^{-\frac{10}{120}}$$

$$\theta_{7:20,5} = 7,56 \times 0,92$$

$$\theta_{7:20,5} = 6,95^{\circ}\text{C}$$

Sobre la temperatura ambiente será

$$\theta'_{7:20,5} = 41,95^{\circ}\text{C}$$

Funcionamiento 10,5 min.

$$\theta_{7:31} = 7,56 + 41,95 = 49,51^{\circ}\text{C}$$

Enfriamiento 10 min.

$$\theta_f = 49,51 - 35 = 14,51^{\circ}\text{C}$$

$$\theta_{7:41} = 14,51 \times 0,92 = 13,4^{\circ}\text{C}$$

Sobre el ambiente

$$\theta_{7:41}' = 48,4^{\circ}\text{C}$$

Funcionamiento 10,5 min.

$$\theta_{7:51,5} = 7,56 + 48,4 = 55,96^{\circ}\text{C}$$

$$\theta_f = 55,4 - 35 = 20,4^{\circ}\text{C}$$

Enfriamiento 10 min.

$$\theta_{8:1,5} = 20,4 \times 0,92 = 18,7^{\circ}\text{C}$$

Sobre el ambiente

$$\theta_{8:1,5}' = 53,7^{\circ}\text{C}$$

Funcionamiento 10,5 min.

$$\theta_{8:12} = 7,56 + 53,9 = 61,26^{\circ}\text{C}$$

Enfriamiento 10 min.

$$\theta_f = 61,26 - 35 = 26,26^{\circ}\text{C}$$

$$\theta_{8:22} = 26,26 \times 0,92 = 24,1^{\circ}\text{C}$$

Sobre el ambiente

$$\theta_{8:22}' = 59,1^{\circ}\text{C}$$

Siguiendo este procedimiento, se puede llegar a establecer la siguiente tabla de valores, en la que se registran las temperaturas sin considerar la temperatura ambiente.

Nivel térnico	Estado cinético	Tiempo minutos	Semiciclo	Calculo de temperatura °C	Temperatura °C	Final
	Reposo	0	0	0	0	35
Calent.	Movimiento	10,5	1	$90 \left(1 - e^{-\frac{10,5}{120}} \right)$	7,56	42,56
Enfriam.	Reposo	20,5	2	$7,56 e^{-\frac{10}{120}} = 7,56 \times 0,92$	6,95	41,95
Calent.	Movimiento	31,0	3	$7,56 + 6,95$	14,51	49,51
Enfriam.	Reposo	41,0	4	$14,51 \times 0,92$	13,4	48,4
Calent.	Movimiento	51,5	5	$13,4 + 7,56$	20,96	55,96
Enfriam.	Reposo	61,5	6	$20,96 \times 0,92$	19,22	54,22
Calent.	Movimiento	72,0	7	$19,22 + 7,56$	26,78	61,78
Enfriam.	Reposo	82,0	8	$26,78 \times 0,92$	24,7	59,7
Calent.	Movimiento	92,5	9	$24,7 + 7,56$	32,26	67,26

Así, sucesivamente se podría establecer una tabla que permita encontrar el tiempo en el que la temperatura ha crecido tanto que está poniendo en peligro la máquina.

Se puede deducir una ecuación matemática que permita hallar este tiempo.

Con a indicamos la constante $a = 7,56$
y con b la constante $b = 0,92$.

Se puede fácilmente encontrar la ley de variación según el cuadro siguiente:

Semioiclo	Temperatura
0	0
1	a
2	$a b$
3	$a(b + 1)$
4	$a(b^2 + b)$
5	$a(b^2 + b + 1)$
6	$a(b^3 + b^2 + b)$
7	$a(b^3 + b^2 + b + 1)$
8	$a(b^4 + b^3 + b^2 + b)$

n par	$a(b^{\frac{n}{2}} + b^{\frac{n}{2}-1} + b^{\frac{n}{2}-2} + \dots + b)$
$(n+1)$ impar	$a(b^{\frac{n}{2}} + b^{\frac{n}{2}-1} + b^{\frac{n}{2}-2} + \dots + b + 1).$

Hay que encontrar el número de semiciclos para el que la temperatura llega al límite perjudicial. Este límite lo podemos llamar K y así tendremos la siguiente ecuación

$$(2.5.36) \quad a\left(b^{\frac{n}{2}} + b^{\frac{n}{2}-1} + b^{\frac{n}{2}-2} + \dots + b + 1\right) = K$$

Para despejar el valor de n , podemos tener en cuenta que la expresión encerrada entre paréntesis es la suma de los términos de una progresión geométrica. Esta suma S es:

$$(2.5.37) \quad S = \frac{uq - a}{q - 1}$$

u = último término

a = primer término

q = razón.

Aplicando (2.5.37) tendríamos que

$$b^{\frac{n}{2}} + b^{\frac{n}{2}-1} + b^{\frac{n}{2}-2} + \dots + b + 1 = \frac{b^{\frac{n}{2}} \cdot b - 1}{b - 1} = \frac{b^{\frac{n}{2}+1} - 1}{b - 1}$$

Reemplazando en (2.5.36)

$$(2.5.38) \quad a \left(\frac{b^{\frac{n}{2}+1} - 1}{b - 1} \right) = K$$

Despejando el paréntesis

$$(2.5.39) \quad \frac{b^{\frac{n}{2}+1} - 1}{b - 1} = \frac{K}{a}$$

Pasando $b - 1$ al otro lado

$$(2.5.40) \quad b^{\frac{n}{2}+1} - 1 = (b - 1) \frac{K}{a}$$

Despejando $b^{\frac{n}{2}+1}$

$$(2.5.41) \quad b^{\frac{n}{2}+1} = (b - 1) \frac{K}{a} + 1$$

Despejando por logaritmos $\frac{n}{2} + 1$

$$(2.5.42) \quad \left(\frac{n}{2} + 1\right) \log b = \log \left[(b - 1) \frac{K}{a} + 1 \right]$$

$$(2.5.43) \quad \frac{n}{2} + 1 = \frac{\log \left[(b - 1) \frac{K}{a} + 1 \right]}{\log b}$$

Despejando n

$$(2.5.44) \quad n = 2 \left[\frac{\log \left[(b - 1) \frac{K}{a} + 1 \right]}{\log b} - 1 \right]$$

Reemplazando el valor de las constantes

$$b = 0,92$$

$$K = 90^{\circ}\text{C}$$

$$a = 7,56$$

$$n = 2 \left[\frac{\log \left[(0,92 - 1) \frac{90}{7,56} + 1 \right]}{\log 0,92} - 1 \right]$$

$$n = 2 \left[\frac{\log \left[- 0,08 \frac{90}{7,56} + 1 \right]}{\log 0,92} - 1 \right]$$

$$n = 2 \left[\frac{\log(- 0,954 + 1)}{\log 0,92} - 1 \right]$$

$$n = 2 \left[\frac{\log 0,046}{\log 0,92} - 1 \right]$$

$$n = 2 \left[\frac{2,663}{1,964} - 1 \right]$$

$$n = 2 \left[\frac{1,337}{0,036} - 1 \right]$$

$$n = 2 [37 - 1]$$

$$n = 2 [36]$$

$$n = 72 \text{ semiciclos.}$$

Si son 72 semiciclos que puede durar la máquina sin calentarse. Calculemos cuánto tiempo de funcionamiento permite.

Sabemos que un ciclo está formado por 10,5 minutos de funcionamiento y 10 minutos de parada; o sea 20,5 minutos/ciclo. Si $n = 72$ semiciclos, el número de ciclos de trabajo será de 36.

Como cada ciclo funciona durante 20,5 minutos, el tiempo máximo de trabajo será

$$36 \times 20,5 = 738 \text{ minutos.}$$

Esto, dividido para 60 dará el total de horas.

tiempo en horas de funcionamiento t_H

$$t_H = \frac{738}{60} = 12,3 \text{ horas}$$

El sistema fue proyectado para trabajar 8 horas en servicio intermitente de 10,5 minutos de funcionamiento por 10 minutos de parada. Se ha comprobado matemáticamente que puede hacerlo hasta por 12 h. por lo tanto puede trabajar al ritmo proyectado.

2.5.9 TRABAJO DEL MOTOR SOBRECARGADO. COMPROBACION DE QUE NO SE RECALIENTA

Como el trabajo del sistema en las peores condiciones no se da en forma continuada sino que habrá lapsos de tiempo en que los carros funcionen equilibrando sus cargas o ayudando al funcionamiento del sistema motriz, se puede, como ya se analizó antes dar al motor una sobrecarga de 1,6 veces sobre su valor nominal de la potencia.

En este caso hay que analizar cuánto tiempo se puede someter al motor a dicha sobrecarga. El motor sobrecargado no debe sobrepasar la temperatura de los aislantes.

El diagrama de crecimiento de la temperatura para un motor sobrecargado será como se indica a continuación.

El crecimiento de la temperatura es mayor que en el caso normal y el tiempo de trabajo debe disminuirse.

Para funcionamiento normal se tendrán todos los factores del sistema normales.

Para sobrecarga todos los factores del sistema estarán afectados por la misma.

Llamaremos p al factor de sobrecarga de modo que

$$(2.5.45) \quad p = \frac{\text{Potencia de sobrecarga}}{\text{Potencia normal}}$$

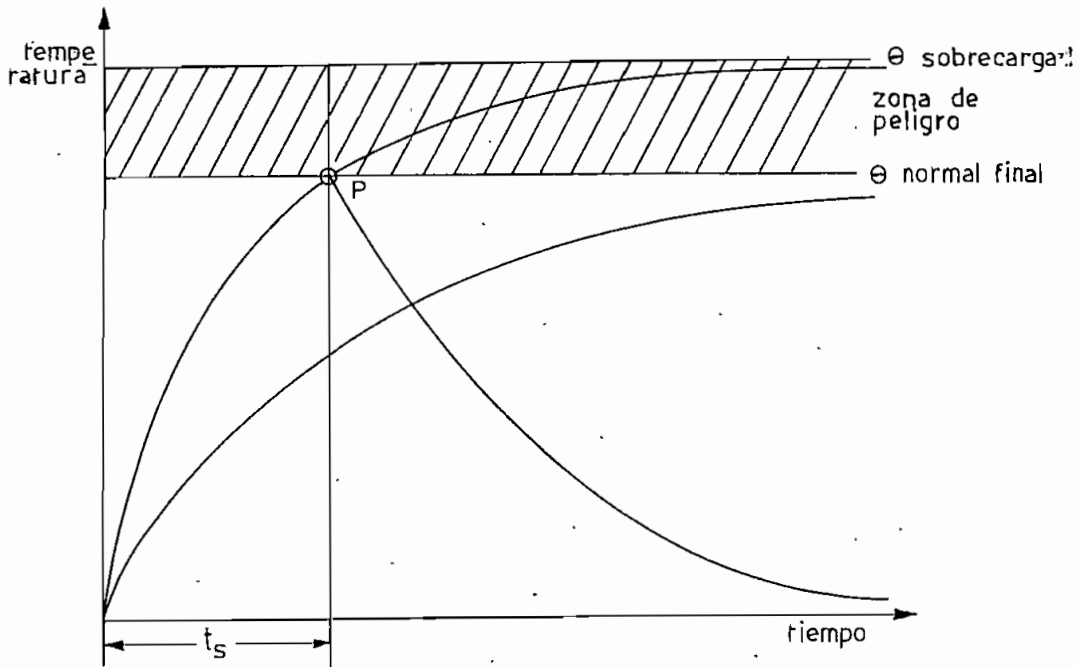


DIAGRAMA (2.5.8)

La potencia es proporcional a la cantidad de calor en forma lineal y a su vez la cantidad de calor lo es a la temperatura en igual forma de modo que

$$(2.5.46) \quad p = \frac{Q_{\text{sobrecarga}}}{Q_{\text{normal}}} \quad \text{y también}$$

$$(2.5.47) \quad p = \frac{\Theta_{\text{sobrecarga}}}{\Theta_{\text{normal}}} \quad \text{Despejando } \Theta_{\text{sobrecarga}}$$

$$(2.5.48) \quad \Theta_{\text{sobrecarga}} = p \Theta_{\text{normal}}$$

El punto de intersección de la curva de sobrecarga está dado por las coordenadas t_s de sobrecarga y temperatura Θ_f . De acuerdo con la

ecuación (2.5.24)

$$(2.5.49) \quad \theta = p \theta_{f_{\text{normal}}} \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)$$

Reemplazando por $\theta_{f_{\text{normal}}}$ para $t = t_s$

$$(2.5.50) \quad \theta_{f_{\text{normal}}} = p \theta_{f_{\text{normal}}} \left(1 - e^{-\frac{t_s}{T}}\right)$$

$$(2.5.51) \quad 1 = p \left(1 - e^{-\frac{t_s}{T}}\right)$$

De esta ecuación se puede despejar t_s o sea el tiempo de sobrecarga

$$(2.5.52) \quad t_s = T \ln \frac{p}{p-1}$$

El tiempo de sobrecarga para servicio continuo dado

$$T = 120 \text{ min.}$$

El factor de sobrecarga

$$p = 1,6$$

$$t_s = 120 \ln \frac{1,6}{1,6-1}$$

$$t_s = 120 \ln \frac{1,6}{0,6}$$

$$t_s = 120 \ln 2,66$$

$$t_s = 120 \times 0,9783$$

$$t_s = 117 \text{ minutos.}$$

A los 117 minutos de funcionamiento continuo, el motor llega a la tem-

peratura máxima.

Ahora bien el sistema funciona en forma intermitente, con 10,5 minutos de trabajo y 10 minutos de reposo, se debe calcular el tiempo que podría mantenerse funcionando sin que se ponga en peligro la máquina, sobrecargada 1,6 veces.

La ecuación de calentamiento que se debe aplicar es la (2.5.49)

$$\theta = p \theta_f \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right)$$

Siendo $p = 1,6$

$$\theta_f = 90^\circ$$

$$T = 120 \text{ min.}$$

y la ecuación de enfriamiento la (2.5.14)

$$\theta = \theta_f e^{-\frac{t}{T}}$$

Siendo θ_f la temperatura alcanzada durante los intervalos de funcionamiento de 10,5 min.

Desarrollamos una tabla de valores, al igual como se hizo para el funcionamiento normal.

Para $t = 0$ $\theta = 0^\circ\text{C}$

Para $t = 10,5$ min. de funcionamiento

$$\theta = 1,6 \times 90 \left(1 - e^{-\frac{10,5}{120}} \right)$$

$$\theta = 1,6 \times 7,56 = 12,1^\circ\text{C}$$

Este valor viene a ser la nueva constante a

$$a = 12,1$$

y la constante de enfriamiento será el mismo valor $b = 0,92$

Aplicamos, para este caso, la ecuación (2.5.38)

$$K = a \left(\frac{b^{\frac{n}{2} + 1} - 1}{b - 1} \right)$$

Sabiendo que $K = 90^\circ\text{C}$

$$b = 0,92$$

$$a = 12,1$$

Para encontrar el número de semiciclos que puede funcionar el motor a
plicamos (2.5.44)

$$n = 2 \left[\frac{\log \left[(b - 1) \frac{K}{a} + 1 \right]}{\log b} - 1 \right]$$

$$n = 2 \left[\frac{\log \left[(0,92 - 1) \frac{90}{12,1} + 1 \right]}{\log 0,92} - 1 \right]$$

$$n = 2 \left[\frac{\log \left[- 0,08 \frac{90}{12,1} + 1 \right]}{\log 0,92} - 1 \right]$$

$$n = 2 \left[\frac{\log \left[- 0,595 + 1 \right]}{\log 0,92} - 1 \right]$$

$$n = 2 \left[\frac{\log 0,405}{\log 0,92} - 1 \right]$$

$$n = 2 \left[\frac{1,607}{1,964} - 1 \right]$$

$$n = 2 \left[\frac{0,393}{0,036} - 1 \right]$$

$$n = 2 \cdot 10,9 - 1$$

$$n = 2 \times 9,9 = 19,8$$

Con una sobrecarga de 1,6 sólo podrá funcionar durante 19,8 semiciclos, ó 9,9 ciclos. Cada ciclo tiene 20,5 minutos por lo tanto el tiempo de funcionamiento será

$$t = 9,9 \times 20,5 = 203 \text{ minutos.}$$

Dividiendo para 60 para tener en horas

$$t_H = \frac{203}{60} = 3,4 \text{ horas}$$

o sea que puede funcionar sobrecargado hasta por 3 horas y 24 minutos sin peligro.

2.5.10 DIAGRAMAS DE TEMPERATURA

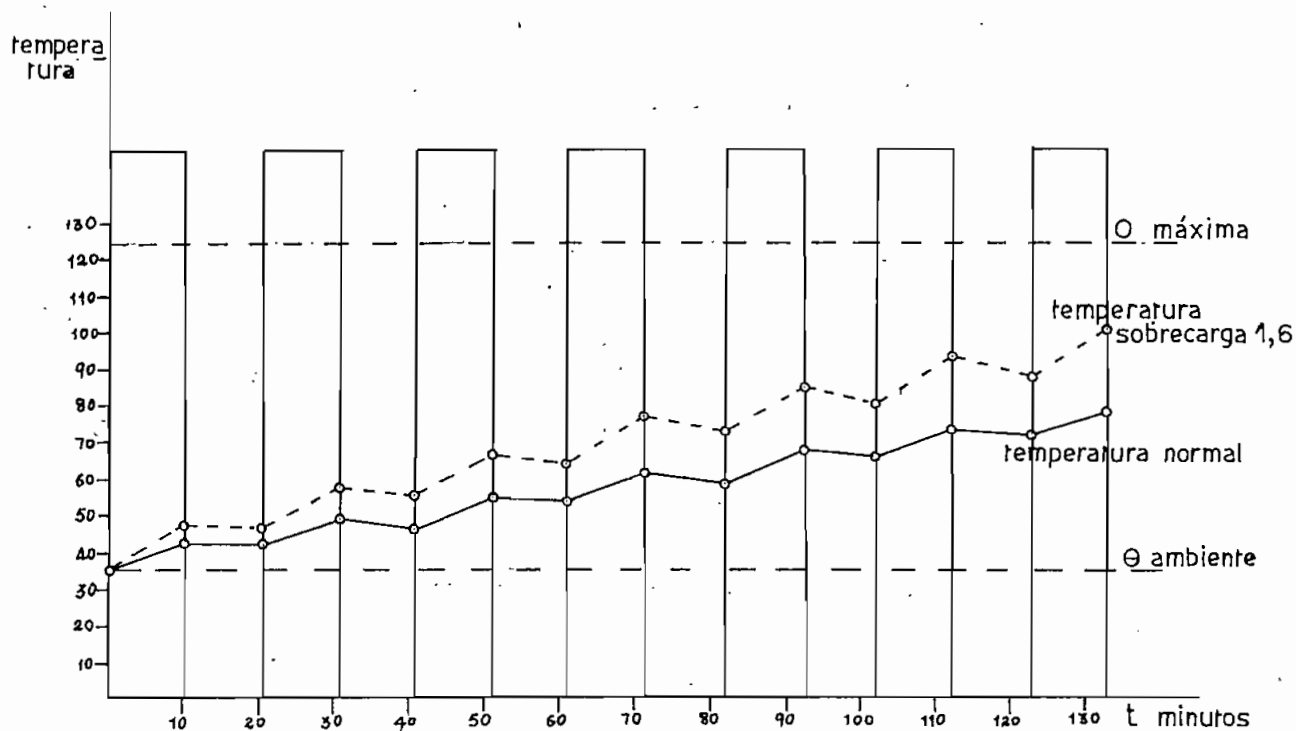


DIAGRAMA (2.5.9)

La tabla de variación de valores del motor sobrecargado será la que se indica a continuación:

Motor sobrecargado 1,6 veces la potencia nominal

Nivel térmico	Estado cinético	Tiempo minutos	Semiciclo	Estado de temperatura	Temperatura final
	Reposo	0	0	0	35
Calent.	Movimt.	10,5	1	12,1	47,1
Enfriam.	Reposo	20,5	2	11,1	46,1
Calent.	Movimt.	31	3	23,2	58,2
Enfriam.	Reposo	41	4	21,4	56,4
Calent.	Movimt.	51,5	5	33,5	68,5
Enfriam.	Reposo	61,5	6	30,7	65,7
Calent.	Movimt.	72	7	42,8	77,8
Enfriam.	Reposo	82	8	38,4	73,4
Calent.	Movimt.	92,5	9	50,5	85,5
Enfriam.	Reposo	102,5	10	46,5	81,5
Calent.	Movimt.	113,0	11	56,6	93,6
Enfriam.	Reposo	123	12	54	89,0
Calent.	Movimt.	133,5	13	68,1	103,1

Para una sobrecarga del 100% que es lo que se requiere en cortos períodos de tiempo tendremos

De la ecuación (2.5.52)
$$t_s = T \ln \frac{p}{p-1}$$

Tiempo de sobrecarga para servicio continuo. $T = 120$ min.

Factor de sobrecarga $p = 2$.

$$t_s = 120 \ln \frac{2}{2-1}$$

$$t_s = 120 \ln 2$$

$$t_s = 120 \times 0,693$$

$$t_s = 83 \text{ minutos.}$$

A los 83 minutos llegaría al máximo de temperatura. Teniendo en cuenta el trabajo intermitente, la ecuación de calentamiento será

$$(2.5.49) \quad \theta = p \theta_f \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right)$$

$$p = 2$$

$$\theta_f = 90^\circ$$

$$T = 120 \text{ min.}$$

Y la ecuación de enfriamiento

$$(2.5.14) \quad \theta = \theta_f e^{-\frac{t}{T}}$$

Para $t = 0$; $\theta = 0^\circ\text{C}$

Para $t = 10,5$ min.

$$\theta = 2 \times 90 \left(1 - 10^{-\frac{10,5}{120}} \right)$$
$$\theta = 15,12^\circ\text{C}$$

Este valor es la constante $a = 15,12$

La constante de enfriamiento $b = 0,92$

$$K = a \left(\frac{b^{\frac{n}{2} + 1} - 1}{b - 1} \right)$$

Sabiendo que $K = 90^\circ\text{C}$

$$b = 0,92$$

$$a = 15,12$$

El número de semiciclos es (2.5.44)

$$n = 2 \left[\frac{\log \left[(b - 1) \frac{K}{a} + 1 \right]}{\log b} - 1 \right]$$

$$n = 2 \left[\frac{\log \left[(0,92 - 1) \frac{90}{15,2} + 1 \right]}{\log 0,92} - 1 \right]$$

$$n = 2 \left[\frac{\log \left[0,08 \times \frac{90}{15,2} + 1 \right]}{\log 0,92} - 1 \right]$$

$$n = 2 \left[\frac{\log 0,527}{\log 0,92} - 1 \right]$$

$$n = 2 \left[\frac{1,723}{1,964} - 1 \right]$$

$$n = 2 \left[\frac{0,277}{0,036} - 1 \right]$$

$$n = 2[7,24 - 1] = 2 \times 6,24$$

$$n = 12,48$$

Con sobrecarga del 100% sólo podrá funcionar durante 12,48 semiciclos ó 6.2 ciclos. Como casa ciclo tiene 20,5 minutos, el tiempo de funcionamiento será

$$t = 127 \text{ min. algo más de 1 hora.}$$

BIBLIOGRAFIA

1. Ing. Oscar Puig, "Funicular a Cruz Loma", 1965.
2. Donald J. Wyatt, Machine Design, Mc Graw Hill Book Company Inc, NY, 1962.
3. Manual AEG, novena edición, 1967.
4. C. W. Ham, E. J. Crane, W. L. Rogers, "Mechanics of Machinery", Mc Graw Hill Book Company, Inc NY, 1958, 4a Edición.
5. Joseph Edward Shigley, "Mechanical Engineering Design", Mc Graw Hill Book Company, Inc. NY, 1963.
6. ASME Handbook, "Engineering Tables", Edited by Jesse Huckert, Mc Graw Hill Book Company, Inc. NY, 1956, 1a Edición.
7. Hütte, Manual del Ingeniero, Editorial Gustavo Gili, Barcelona, 1950, 2a Edición, Tomos II y III.
8. Hans Teuchert, "Fuerza Motriz y Tracción Eléctrica", La Escuela del Técnico Electricista, Tomo XI, Editorial Labor S.A., Barcelona, 1952.
9. Seely y Ensign, "Mecánica Análítica para Ingenieros", UTEHA, México, 1960, 3a Edición.
10. Jorge German, "Generalidades sobre Accionamientos Eléctricos", Escuela Politécnica Nacional, tesis de grado, Quito, 1966.
11. Raymond J. Roark, "Fórmulas for stress and strain", Mc Graw Hill Book, Inc, NY, 1943, 2a Edición.
12. Earle Buckingham, "analytical Mechanics of Gears", Mc Graw Hill

13. Ing. Aníbal Enríquez, Apuntes de Elementos de Máquinas, 1964.
14. Dr. F. Weymayr, Apuntes de Accionamientos, 1964.
15. Dawes Chester, "Corriente Continua", Tratado de Electricidad, Editorial Gustavo Gili, Barcelona, 1959 2a Edición.
16. SPIN, revista de la Asociación Escuela Politécnica, Año IV, Número IV, artículo "Mecanismos Eléctricos y Selladoras de Plástico", M. Troya, pág. 43.
17. General Electric, Catálogo de motores, 12 Abril de 1965, N° 491, pág. 24.
18. Langsdorf A. "Principios de las máquinas de corriente continua", Mc Graw Hill Book C., Inc, NY, 1964.

CAPITULO III

SELECCION DEL TIPO DEL MOTOR

3.0 CONDICIONES GENERALES DE TRABAJO IMPUESTAS

Del estudio anterior se desprende que el sistema motriz deberá cumplir con las siguientes condiciones:

Potencia al eje $N = 170 \text{ Kw.}$

Potencia de arranque $N = 365 \text{ Kw.}$

Capacidad de sobrecarga 1,6 veces la potencia nominal.

Velocidad del motor $n = 600 \text{ r.p.m.}$

Tiempo de arranque $t = 8,7 \text{ seg.}$

Tiempo de frenado $t = 8,7 \text{ seg.}$

Peso aproximado $G = 3.100 \text{ Kg.}$

$GD^2 \text{ motriz} = 170 \text{ Kgm}^2$

Rendimiento $\eta = 91\%$

Aislante clase B. Máxima temperatura $\theta_f = 90^\circ\text{C}$ sobre ambiente.

Constante de tiempo $T = 120 \text{ min.}$

Constante de irradiación del calor $A = 0,0535 \frac{\text{Kcal}}{^\circ\text{C seg}}$

Servicio intermitente de lapso de 10 min.

Constante de almacenamiento de calor $C = 385,2 \frac{\text{Kcal}}{^\circ\text{C}}$

Altura sobre el nivel del mar $h = 4.000 \text{ mts. aproximadamente.}$

Ventilación forzada.

Con estos datos conviene precisar más el tipo más aconsejado de motor.

3.1 LA MAQUINA DE CORRIENTE CONTINUA

De acuerdo con la ecuación (2.4.32) la fórmula del momento motriz M es

$$(3.1.1) \quad M = C \phi I_t \text{ [Kgm]}$$

Esta relación permite calcular la variación del momento con la carga en los distintos tipos de motores.

La f.e.m. inducida en un conductor cualquiera del inducido de un motor actúa siempre en sentido opuesto al de la corriente. O sea que se opone a que entre la corriente en el inducido. Por esto dicha f.e.m. recibe el nombre de f.c.e.m. (fuerza contra electro motriz). Al oponerse a la corriente se opone a la tensión de la línea, por lo que la tensión que actúa en el inducido V_i será

$$(3.1.2) \quad V_a = V - E \quad \text{donde}$$

V es la tensión de la línea

E es la fuerza contra electro motriz.

Aplicando la ley de Ohm

$$(3.1.3) \quad V_a = I_a R_a$$

Siendo I_a la intensidad del inducido y R_a su resistencia.

Reemplazando en (3.1.2)

$$(3.1.4) \quad I_a R_a = V - E \quad \text{y despejando } E$$

$$(3.1.5) \quad E = V - I_a R_a \quad \text{que es la f.c.e.m.}$$

3.1.1 ECUACION DE LA FCEM

La fuerza electromotriz inducida en N conductores que se mueven en un campo magnético viene dada por la ley de Faraday

$$(3.1.6) \quad e = -N \frac{d\phi}{dt} 10^{-8} \text{ Voltios}$$

Siendo N el número de conductores y

$\frac{d\phi}{dt}$ la variación de flujo magnético.

La f.e.m. media inducida será

$$(3.1.7) \quad E = N \frac{\phi}{t} 10^{-8} \text{ Voltios}$$

En la ecuación (3.1.7) se pueden hacer las consideraciones siguientes:

El tiempo será inversamente proporcional al número de polos y a la velocidad del inducido.

$$(3.1.8) \quad t = \frac{1}{s P} [\text{seg}]$$

siendo s la velocidad del inducido en revoluciones por segundo y P el número de polos.

Reemplazando

$$(3.1.9) \quad E = N s P \phi 10^{-8} \text{ Voltios}$$

$$(3.1.18) \quad s = K \frac{V - I_a R_a}{\phi}$$

3.1.2 POTENCIA DESARROLLADA

La potencia desarrollada por el inducido será

$$(3.1.19) \quad P_a = V I_a \quad \text{y la que se invierte en calentarlo}$$

$$(3.1.20) \quad P_a = I_a^2 R_a \quad \text{Watts.}$$

Siendo R_a la resistencia del inducido.

La potencia mecánica P_m será

$$(3.1.21) \quad P_m = V I_a - I_a^2 R_a$$

$$(3.1.22) \quad P_m = I_a (V - I_a R_a)$$

Pero $V - I_a R_a = E$, la f.c.e.m. por (3.1.5) luego

$$(3.1.23) \quad P_m = I_a E$$

La potencia mecánica es el producto de la f.c.e.m. generada por la corriente que circula por el inducido.

Como la potencia en función del torque es

$$(3.1.24) \quad P_m = 2 \pi s M \quad \text{Watts.}$$

Reemplazando

$$(3.1.25) \quad 2 \pi s M = E_a I_a \quad \text{y también}$$

$$(3.1.26) \quad 2 \pi s M = K_1 \phi s I_a \quad \text{y el torque será}$$

$$(3.1.27) \quad M = \frac{K_1 \phi I_a}{2 \pi} \quad \text{New-m.} \quad \text{y finalmente}$$

$$(3.1.28) \quad M = C \phi I_a \quad \text{que es la misma ecuación (3.1.1).}$$

3.2 MAQUINA SERIE, DERIVACION Y COMPOUND (1)

Las máquinas de corriente continua empleadas en la industria son las máquinas serie, derivación o shunt y compound. Cada una de ellas se utiliza para diferentes aplicaciones.

$$(3.1.27) \quad M = \frac{K_1 \phi I_a}{2 \pi} \text{ New - m.} \quad \text{y finalmente}$$

$$(3.1.28) \quad M = C \phi I_a \quad \text{que es la misma ecuación (3.1.1).}$$

3.2 MAQUINA SERIE, DERIVACION Y COMPOUND (1)

Las máquinas de corriente continua empleadas en la industria son las máquinas serie, derivación o shunt y compound. Cada una de ellas se utiliza para diferentes aplicaciones.

La máquina serie se caracteriza por tener velocidad variable, necesita una gran regulación de la velocidad y el par de arranque es muy elevado. Se aplica en tracción, locomotoras, trolebuses, grúas, montacargas y transportadores.

La máquina shunt o derivación tiene velocidad casi constante y regulable. Requiere arranque con corriente hasta 150% sobre la normal. Se aplica en árboles de transmisión a velocidad constante, máquinas herramientas, bombas centrífugas y de émbolo, ventiladores, máquinas de impresión.

La máquina compound se divide en compound diferencial que se caracteriza por el bajo par de arranque y su constante velocidad y el compound acumulativo, el cual tiene velocidad variable, regulable y gran par de

(1) Chester Dawes, pág. 539, Tomo I.

arranque, se aplica este último en las demandas de gran par motor como cizallas, punzadoras, aparatos de elevación, transportadores, laminadores, etc.

3.2.1 CARACTERISTICAS DEL MOTOR SERIE (2)

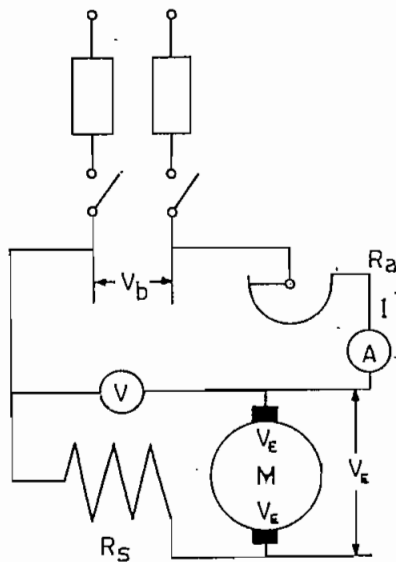


DIAGRAMA (3.2.1)

El arrollamiento inductor está en serie con el inducido y está recorrido por la corriente I . Al variar la carga varía la excitación del campo.

Si la carga es pequeña, la corriente del inducido y del inductor son pequeñas y la velocidad crece muchísimo tanto que en vacío puede embalsarse.

Al aumentar la carga sube la intensidad y el número de revoluciones disminuye.

El inductor tiene un número relativamen

te pequeño de espiras y debe ser de una sección suficiente para que pa se la corriente de régimen.

En los motores serie el flujo es función de la corriente. Si se mantiene el hierro del motor a saturación moderada, el flujo casi será proporcional a la intensidad y el par motor estará dado por

(2) La Escuela del Técnico Electricista, Tomo XI, pág. 130.

$$(3.2.1) \quad M = C' I^2$$

Es proporcional el par al cuadrado de la corriente.

La relación entre el par y la intensidad está dada por la curva siguiente (3)

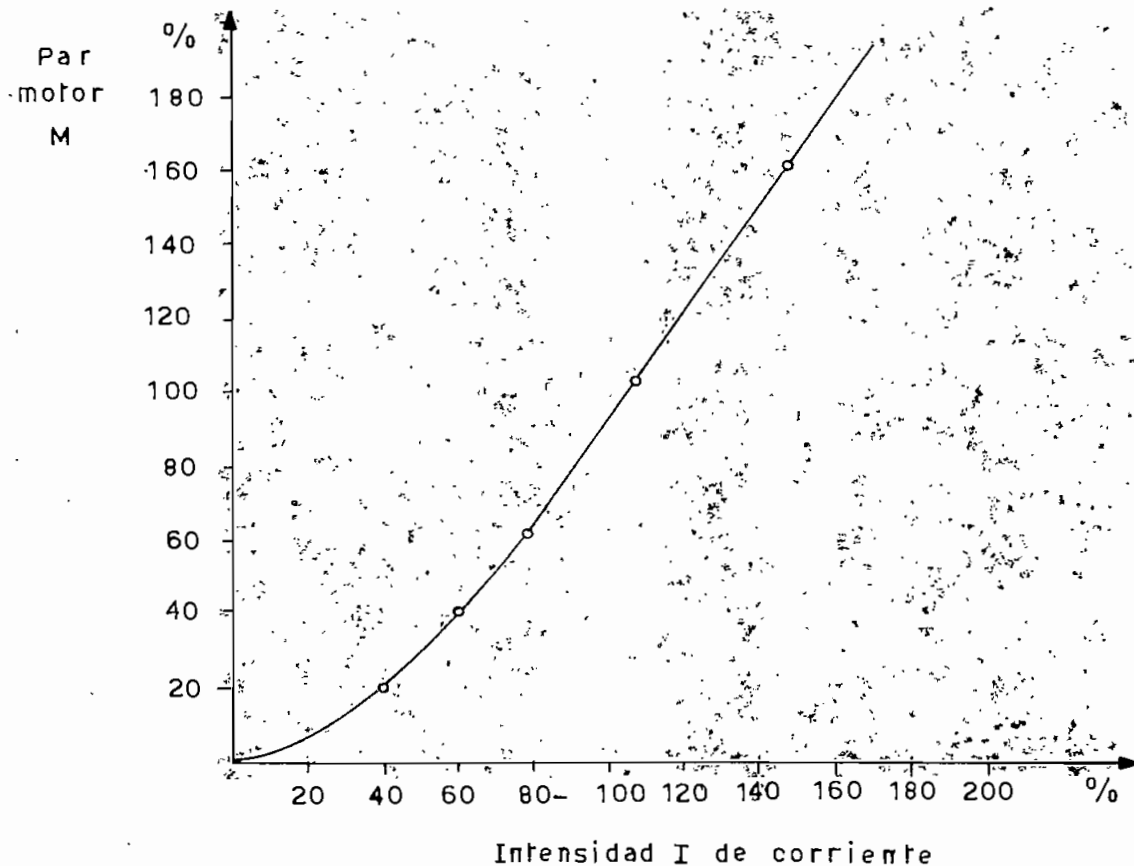


DIAGRAMA (3.2.2)

El par, proporcional al cuadrado de la corriente, hace el empleo de este motor conveniente cuando se requiere un aumento grande del par para

(3) La Escuela del Técnico Electricista, Tomo XI, pág. 131

un aumento moderado de la corriente.

La velocidad del motor serie resulta

$$(3.2.2) \quad s = K \frac{V - I_a(R_a + R_s)}{\phi} \quad (4)$$

donde K es una constante, V es la tensión entre terminales, I_a la intensidad de la corriente en el motor, R_a la resistencia del inducido, R_s la del inductor serie, ϕ el flujo desde el polo N.

Creciendo la carga aumentan la caída de tensión en el inductor e inducido con lo que el numerador de la ecuación (3.2.2) disminuye y con ello la velocidad.

La caída de tensión es de 3 á 8% entre terminales.

La curva que representa la velocidad en función del par es la de la siguiente página.

Es necesario estudiar las características del motor serie desde el punto de vista de su adaptabilidad al sistema en estudio. De la posibilidad de que se pueda aceptar este motor a las necesidades del funicular, se elegirá este sistema o se buscará uno más conveniente.

La curva de variación del flujo inductor con la corriente de excita-

(4) Chester Dawes, pág. 535, Tomo I.

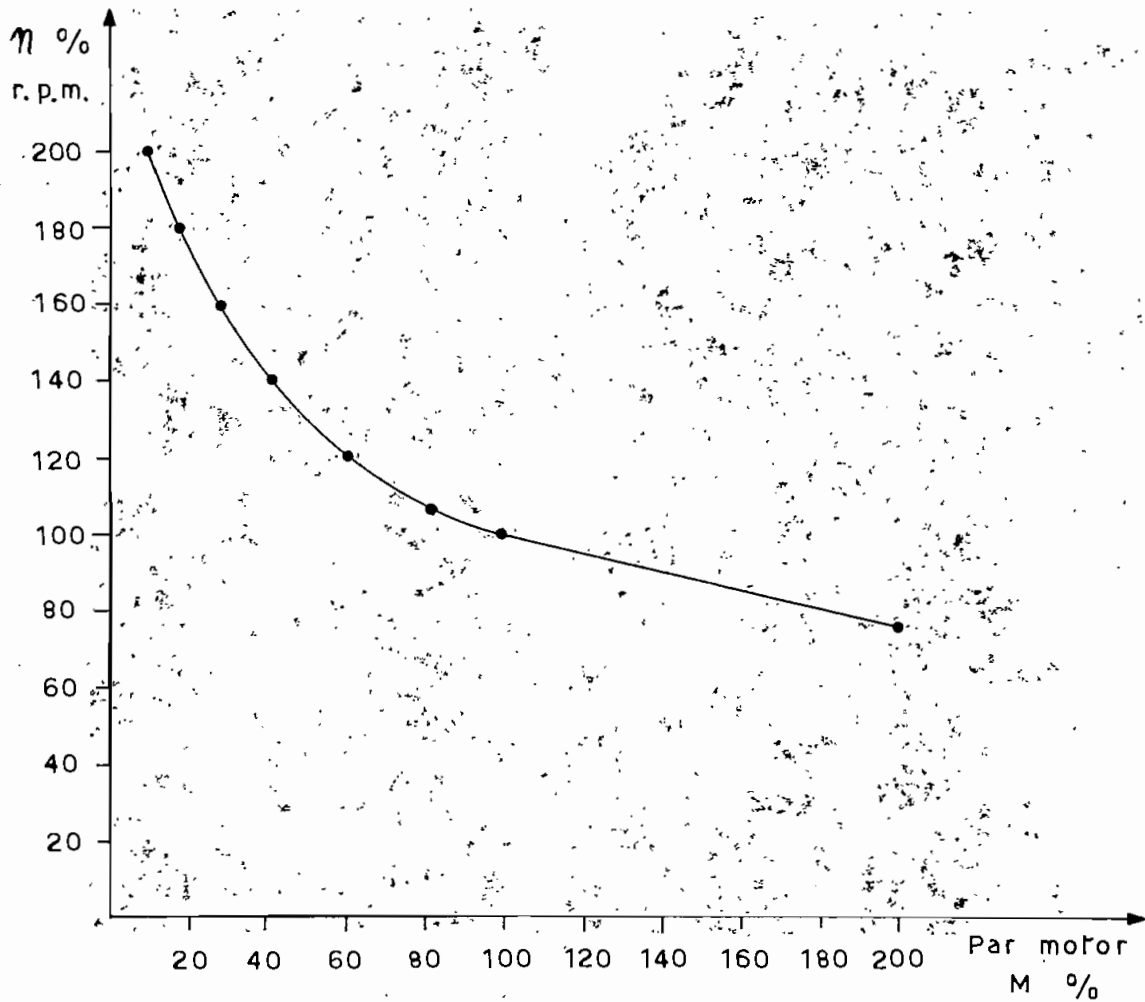


DIAGRAMA (3.2.3)

ción se da en la siguiente página.

3.2.2 FACTIBILIDAD DEL MOTOR SERIE

En este tipo de motor, de acuerdo con la ecuación (3.2.1) el momento es proporcional al cuadrado de la corriente, pues

$$(3.2.1) \quad M = c_1 I^2$$

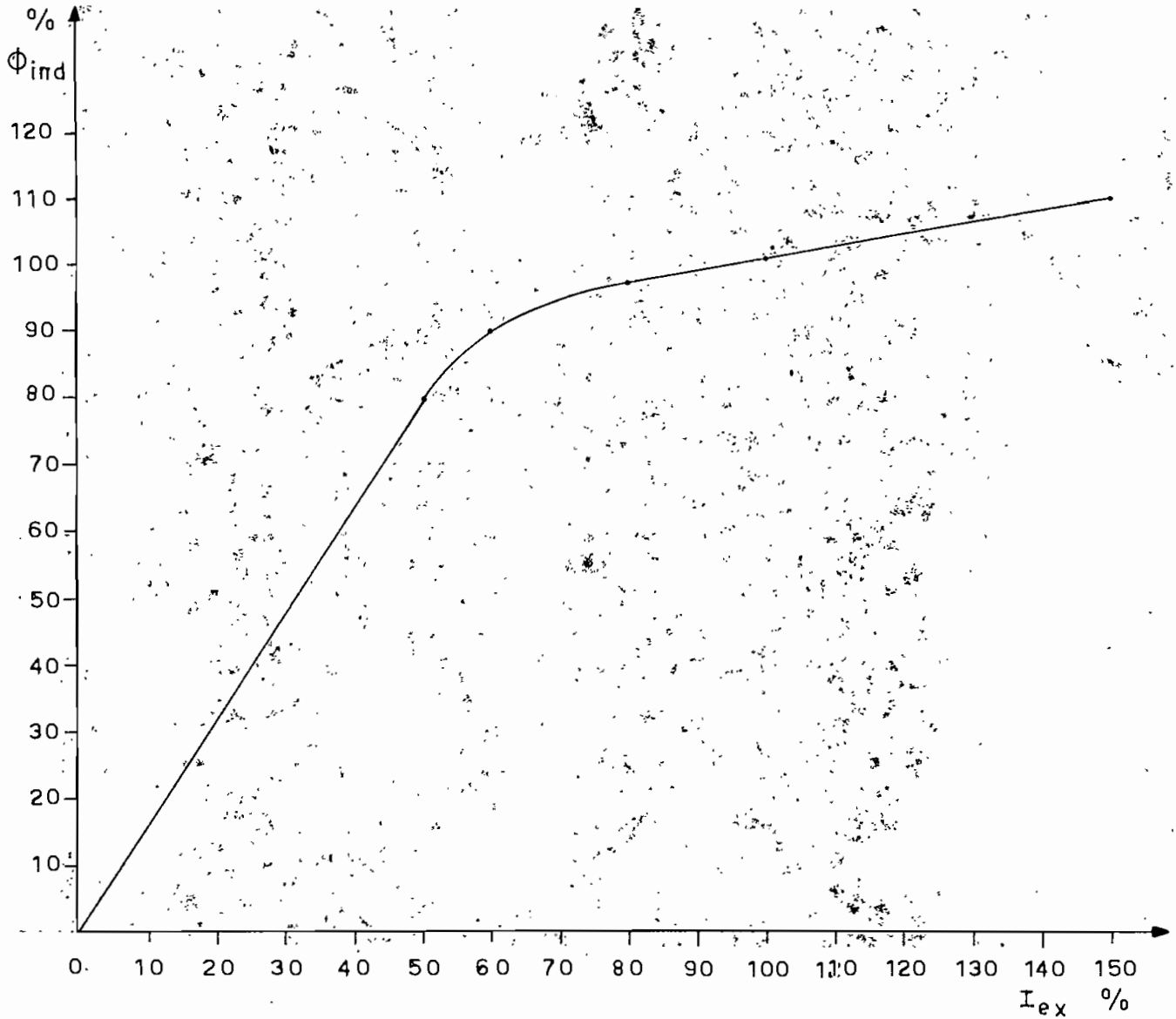


DIAGRAMA (3.2.4)

La f.c.e.m. E , que determina al multiplicarse por I la potencia mecánica, es también proporcional al flujo y a la velocidad según

$$(3.2.3) \quad E = K_1 \varphi \omega$$

Esta ecuación nos dice también, según la ecuación (3.2.2) que

$$(3.2.2) \quad s = K \frac{V - I_a(R_a + R_s)}{\Phi}$$

De modo que como el flujo es prácticamente proporcional a la corriente, cuando aumenta la carga, aumenta la corriente y el numerador se hace pequeño con lo que la velocidad disminuye. Cuando la carga disminuye el numerador se hace grande y el denominador, al ser proporcional a la corriente se hace muy pequeño, con lo que la velocidad crece descontroladamente y el motor puede embalsarse saltando en pedazos por la fuerza centrífuga.

Para poder discernir si el motor serie nos conviene, habrá que estudiar si éste se acopla fácilmente a las características del sistema, en caso contrario, no podríamos estudiarlo.

Para estudiar la factibilidad primero habrá que ver qué es lo que ocurre en el arranque.

Las características que se fijan son:

Tensión de la línea $V = 440$ Voltios.

Flujo máximo $\Phi = 5 \times 10^6$ Max.

Velocidad nominal $n = 600$ r.p.m.

Potencia al eje del motor $P = 170$ Kw.

Rendimiento $\eta = 91\%$

Potencia de entrada $P_e = \frac{P}{\eta} = 187$ Kw. máxima

Corriente nominal $I = 400$ Amp.

Se estudiarán las características de funcionamiento para las peores condiciones o sea cuando el coche, ascendente está lleno y el descendente vacío y se comprobarán para las demás.

Arranqué en las condiciones más desventajosas.

En el instante $t = 0$

la potencia $P = 0$

la f.c.e.m. $E = 0$

la velocidad $s = 0$

El momento de arranque $M = 634$ Kgm.

En el instante $t = 8,7$ seg., la potencia pasa de 356 Kw á 188 Kw. y el momento de 579 Kgm. á 305 Kgm.

El análisis de factibilidad del motor serie se estudiará para los tres períodos de funcionamiento: Arranque, marcha normal y frenado.

Analizaremos, primero, el funcionamiento o marcha normal para las peores condiciones.

Al tiempo $t = 8,7$ seg la potencia llega a 188 Kw. y el momento llega a 305 Kgm.

Al tiempo $t = 642$ seg. la potencia es 35 Kw. y el momento, 57 Kgm.

La potencia nominal es 170 Kw.

El rendimiento $\eta = 91\%$.

La potencia de entrada será

$$P_e = \frac{170}{0,91} = 187 \text{ Kw.}$$

Si la tensión de entrada es $V = 440$ voltios, la corriente será

$$I = \frac{187.000}{440} = 425 \text{ A.}$$

De acuerdo con el análisis de pérdidas de Fitzgerald Electric Machine ry pág. 393, las pérdidas por I^2R en el circuito serie, armadura y es cobillas corresponden a un 3 á 6% y pérdidas mecánicas de rozamiento de un 3 á 15%. Fijamos 4% de pérdidas en el cobre y 5% de otras pérdidas.

Como para establecer la f.c.e.m. debemos averiguar el valor de la resistencia de campo, ésta se podrá calcular a partir de las pérdidas.

Así, los Kw de pérdida son $187 - 170 = 17$ Kw. De estos 17 Kw el 4% son pérdidas en el cobre.

$$\begin{array}{ll} 17 \text{ Kw} & 9\% \\ X & 4\% \\ X = \frac{4 \cdot 17}{9} & = 7,55 \text{ Kw.} \end{array}$$

Por consiguiente

$$\begin{array}{l} I^2R = 7550, \quad \text{si } I = 425 \text{ A} \\ R = \frac{7550}{(425)^2} = 0,0418 \Omega \end{array}$$

Y la fuerza contra electromotriz

$$\begin{array}{l} E = 440 - 425 \times 0,0418 \\ E = 440 - 17,6 \\ E = 422,4 \text{ Voltios} \end{array}$$

en el momento serie

$$\begin{array}{l} M = C_1 I^2 \quad \text{según (3.2.1) y} \\ E = K_1 \Phi \omega \quad \text{según (3.2.3)} \end{array}$$

Y la fuerza contra electromotriz

$$E = 440 - 425 \times 0,0418$$

$$E = 440 - 17,6$$

$$E = 422,4 \text{ Voltios}$$

en el momento serie

$$M = C_1 I^2 \quad \text{según (3.2.1) y}$$

$$E = K_1 \Phi s \quad \text{según (3.2.3)}$$

Para los 188 Kw correspondientes a 8,7 seg. la potencia será

$$P = \frac{188}{0,91} = 206 \text{ Kw} \quad \text{y la corriente}$$

$$I = \frac{206.000}{440} = 470 \text{ Amp.}$$

La caída de tensión

$$IR = 470 \times 0,0418 = 19,7 \text{ V.}$$

y la f.c.e.m.

$$E = 440 - 19,7 = 420,3 \text{ V.}$$

El momento $M = 305 \text{ Kgm}$, la constante C_1 será

$$C_1 = \frac{M}{I^2}$$

$$C_1 = \frac{305}{(470)^2} = 1,38 \times 10^{-3}$$

Conociendo la constante, determinamos la corriente para un $t = 642 \text{ s.}$
o sea a los 57 Kgm.

$$57 = 1,38 \times 10^{-3} I^2$$

$$I^2 = \frac{57}{1,38 \times 10^{-3}}$$

$$I^2 = 41.300$$

$$I^2 = 4,13 \times 10^4$$

$$I = 203 \text{ A}$$

Para las condiciones normales, establecemos un flujo $\Phi = 5 \times 10^6 \text{ Max.}$
Como la corriente es directamente proporcional al flujo, establecemos
el flujo para la condición $t = 8,7 \text{ seg}$ y $t = 642 \text{ seg.}$

Para $t = 8,7 \text{ seg.}$ 425 A $5 \cdot 10^6 \text{ Max.}$
 470 A X

$$X = \frac{470 \cdot 5 \cdot 10^6}{425} = 5,53 \cdot 10^6 \text{ Max.}$$

Para $t = 642 \text{ seg.}$ 425 $5 \cdot 10^6 \text{ Max.}$
 203 X

$$X = \frac{203 \cdot 5 \cdot 10^6}{425} = 2,4 \cdot 10^6 \text{ Maxwell}$$

Sabemos que en el motor serie $M = C'I^2$ y que esto proviene de
 $M = C\Phi I$, como el flujo es proporcional a la corriente

$$(3.2.4) \quad \Phi = mI$$

$$(3.2.5) \quad C' = Cm$$

y también el momento $M = 0,102 \cdot 10^{-7} \Phi I_t \frac{p z}{2 p' \pi}$ según (2.4.30) y la

f.c.e.m.

$$(3.2.6) \quad E = \frac{z s p \Phi}{60 p'} 10^{-8}$$

La una constante

$$(3.2.7) \quad C = 0,102 \cdot 10^{-7} \frac{p z}{2 \pi p'} \quad \text{y la otra}$$

$$(3.2.8) \quad K = \frac{p z}{60 p'} 10^{-8}$$

Dividiendo la una para la otra

$$(3.2.9) \quad \frac{C}{K} = \frac{1,02 \cdot 10^{-8} p z 60 p'}{2 \pi p' p z 10^{-8}}$$

$$(3.2.10) \quad \frac{C}{K} = 0,973$$

De acuerdo con (3.2.4) $m = \frac{\Phi}{I}$

Para $I = 425 \text{ A}$, $\Phi = 5 \times 10^6 \text{ Max.}$

$$m = \frac{5 \times 10^6}{4,24 \times 10^2} = 1,18 \times 10^4$$

La constante $C = \frac{1,38 \times 10^{-3}}{1,18 \times 10^4} = 1,63 \times 10^{-7}$

Como $\frac{C}{K} = 0,973$

$$K = 1,03 \times 1,63 \times 10^{-7}$$

$$K = 1,68 \times 10^{-7}$$

La velocidad según (3.2.3) será

$$E = K \Phi s$$

Para $t = 8,7$ seg.

$$E = 420,3 \text{ V.}$$

$$\Phi = 5,53 \times 10^6 \text{ Max.}$$

$$K = 1,68 \times 10^{-7}$$

$$s = \frac{420,3}{1,68 \times 10^{-7} \times 5,53 \times 10^6} = \frac{4,203 \times 10^2}{0,168 \times 5,53}$$

$$s = 433 \text{ r.p.m.}$$

Para el instante $t = 642$ s., $I = 203$ A., $\Phi = 2,4 \times 10^6$ Max.

$$C = 1,63 \times 10^{-7}$$

$$K = 1,68 \times 10^{-7}$$

La f.c.e.m. será

$$E = 440 - 203 \times 0,0418$$

$$E = 440 - 8,5$$

$$E = 431,5 \text{ Voltios}$$

La velocidad

$$s = \frac{431,5}{1,68 \times 10^{-7} \times 2,4 \times 10^6}$$

$$s = 1.070 \text{ r.p.m.}$$

Como se ve el motor serie no proporciona una regulación adecuada de velocidad y por lo tanto no nos puede convenir.

3.2.3 CARACTERISTICAS DEL MOTOR SHUNT (6)

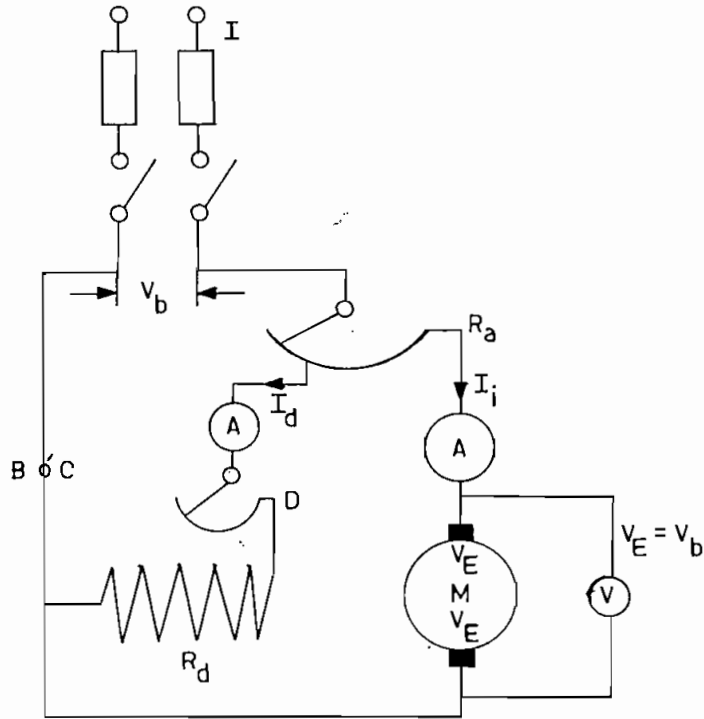


DIAGRAMA (3.2.5)

Tanto el inducido como el arrollamiento inductor se hallan bajo la tensión entre bornes, si es constante V_b . La variación de las revoluciones por variación de la tensión se consigue haciendo que sólo la tensión entre escobillas V_E varíe por efecto del reóstato de arranque R_a quedando a plena tensión el arrollamiento inductor, por ello el reóstato se conecta en el circuito del inducido el borne D debe unirse

(6) La Escuela del Técnico Electricista, pág. 129, Tomo XI.

a la red antes del reóstato o según el diagrama (3.2.4).

En este caso el momento motriz se expresa según la fórmula conocida $M_m = C_n i \Phi$. El flujo es constante y la fórmula será

$$(3.2.13) \quad M = C' i$$

Consecuentemente también la f.c.e.m. será

$$(3.2.14) \quad E = K \Phi s \quad \text{como el flujo es constante}$$

$$(3.2.15) \quad E = K' s.$$

La curva que representa el par motor en función de la velocidad es (7)

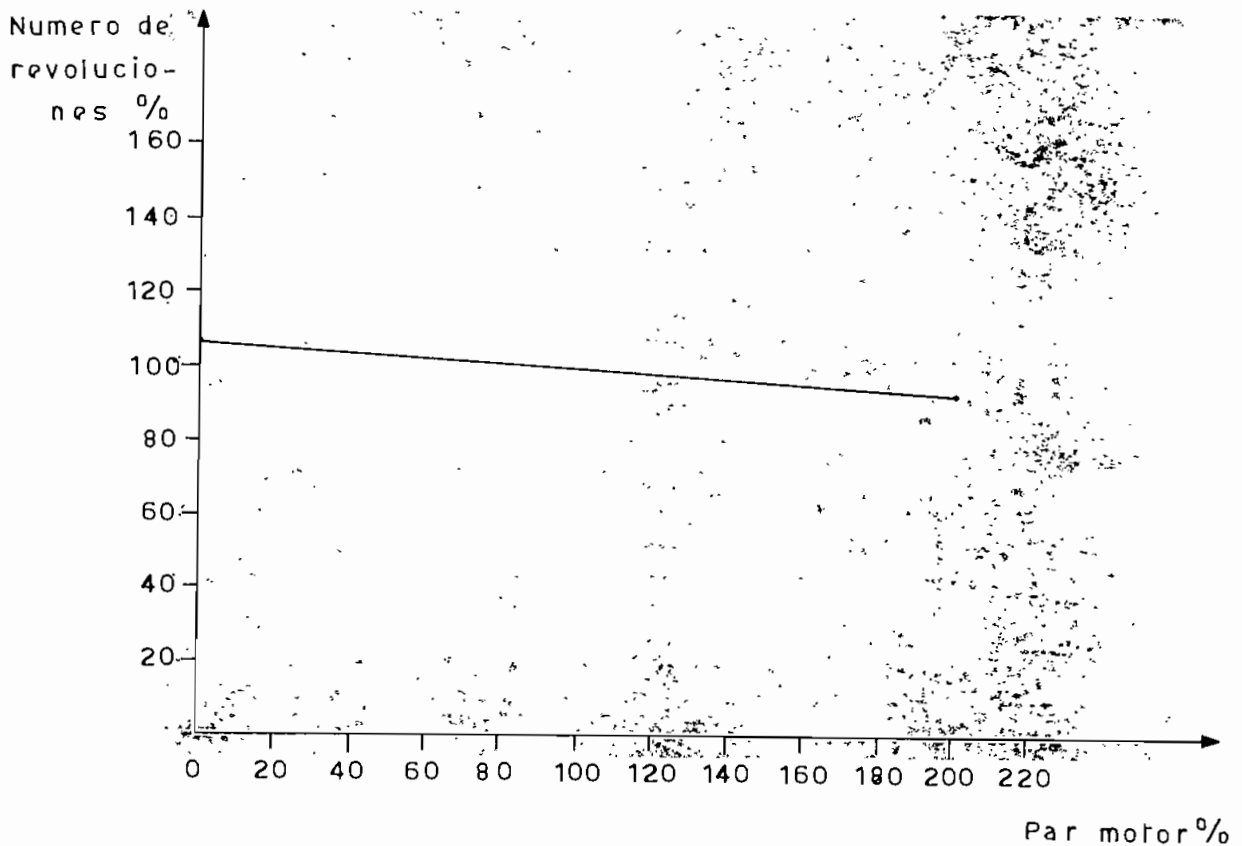


DIAGRAMA (3.2.6)

(7) La Escuela del Técnico Electricista, pág. 131, Tomo XI.

El diagrama de la intensidad en función del par es

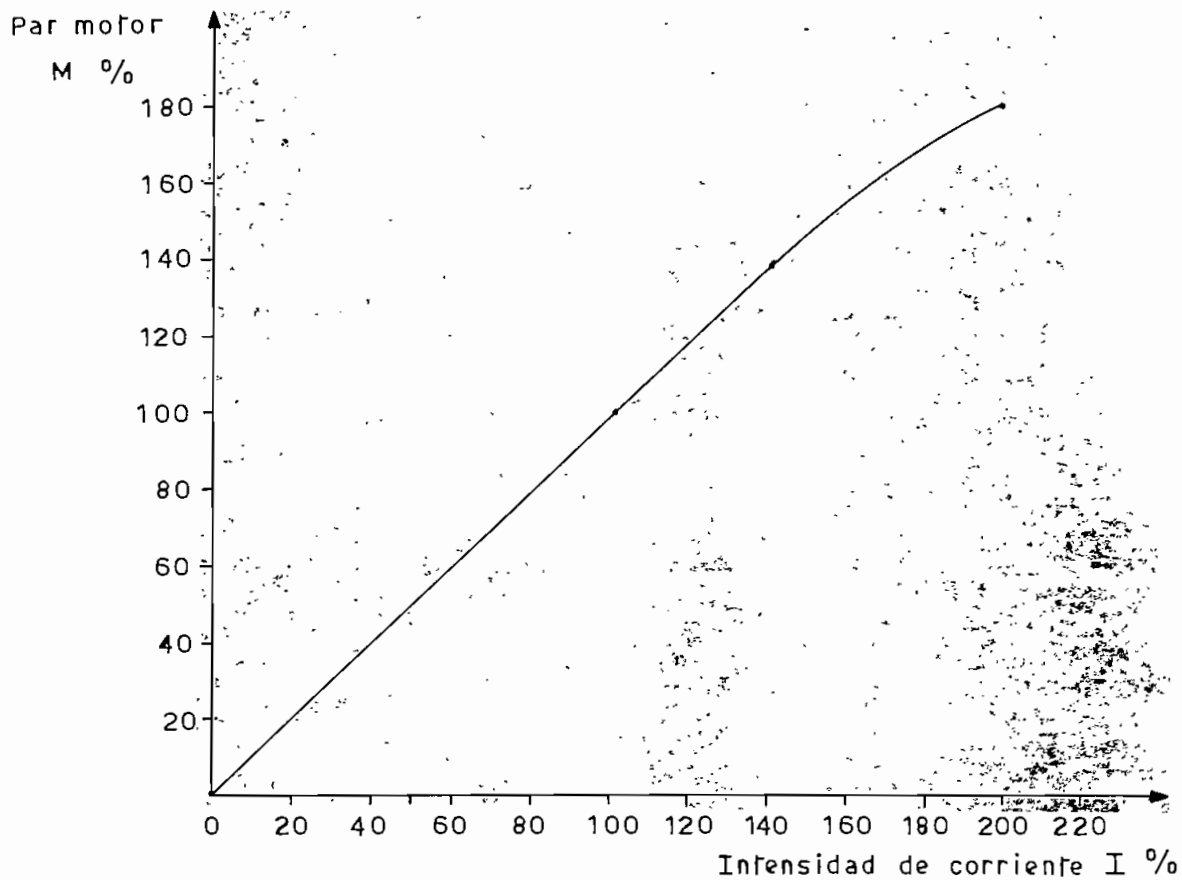


DIAGRAMA (3.2.7)

La velocidad del motor varía de acuerdo con la fórmula

$$(3.2.16) \quad s = K \frac{V - I_a R_a}{\phi} \quad (8)$$

En los motores shunt, K, V, R_a y ϕ son sensiblemente constantes por lo

(8) Chester Dawes, pág. 531.

que la única variable es I.

Si I_a crece, el numerador decrece. El denominador varía muy poco. La velocidad disminuirá al aumentar la carga.

3.2.4 FACTIBILIDAD DEL MOTOR SHUNT

En igual forma a lo que se hizo con el motor serie, comprobaremos su funcionamiento para las condiciones más desventajosas y luego se repetirán los cálculos en las condiciones mejores para estudiar su conveniencia.

La ecuación del momento es $M = C_m i \phi$; como $\phi = f(i)$ tendremos:
 $M = C^f i$ según (3.2.13) y la ecuación de la velocidad

$$s = K \frac{V - I_a R_a}{\phi}$$

Siendo $V - I_a R_a = E$ ó f.c.e.m.

Igualmente fijamos las siguientes características:

Tensión de línea $V = 440$ V.

Flujo máximo $\phi = 5 \times 10^6$ Max.

Velocidad nominal $n = 600$ r.p.m.

Potencia al eje $P = 170$ Kw.

Rendimiento $\eta = 91\%$

Potencia de entrada $P_e = 187$ Kw.

Corriente nominal $I = 400$ Amp.

El funcionamiento para las peores condiciones o sea, coche ascendente lleno y descendente vacío será estudiado a continuación y luego las conclusiones se comprobarán en los demás casos.

En el instante $t = 0$; $P = 0$; $E = 0$; $s = 0$; $M = 634$ Kgm.

En el instante $t = 8,7$ seg., la potencia va de 356 Kw á 188 Kw. y el momento de 579 Kgm á 305 Kgm.

Para el funcionamiento a marcha normal y en las condiciones más desventajosas tendremos:

Para $t = 8,7$ seg. $P = 188$ Kw y $M = 305$ Kgm, y

Para $t = 642$ seg. $P = 35$ Kw y $M = 57$ Kgm.

La potencia nominal es 170 Kw, el rendimiento $\eta = 91\%$.

La potencia de entrada $P = \frac{170}{0,91} = 187$ Kw.

La tensión de entrada $V = 440$ V, y la corriente

$$I = 425 \text{ A.}$$

Conforme Fitzgerald, las pérdidas por $I^2 R$ y escobillas representan el 4% y 5% por pérdidas mecánicas. Los Kw perdidos son 17 Kw, de los cuales, de acuerdo al estudio anterior, 7,55 Kw corresponden a pérdidas en el cobre.

La resistencia equivalente del sistema motriz será, como en el caso anterior

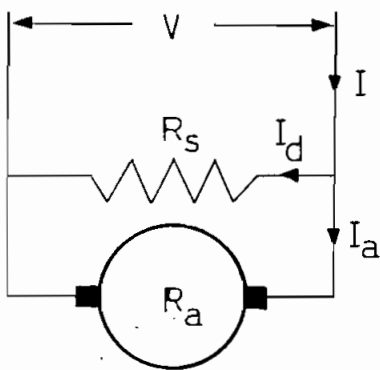
$$R = 0,0418 \Omega$$

Dado que $I^2 R = 7550$ e $I = 425$ A.

De acuerdo con la tabla 12 de La Escuela del Técnico Electricista Tomo IV, pág. 357, la corriente en % que circula por el campo shunt para máquinas de distinta potencia se da en la indicada tabla que se reproduce a continuación.

Potencia nominal Kw.	1	10	50	100	500	1000	2000
Corriente I_d en % de I aproximadamente.	6	45	2,5	2	1,3	1,2	1,2

Como la máquina en estudio es de 170 Kw, aproximamos la corriente al 2% del valor nominal.



Así la corriente de campo shunt nominal será

$$I_d = 425 \times 0,02 = 8,5 \text{ A.}$$

Y la resistencia de campo shunt

$$R_s = \frac{440}{8,5} = 51,9 \Omega$$

Por lo tanto la resistencia de armadura

será

$$R_{eq} = \frac{R_s \cdot R_a}{R_s + R_a}$$

$$R_s = 51,9 \Omega$$

$$R_a = 0,0416 \Omega$$

Para las condiciones en estudio tendremos que determinar la constante mecánica, sabiendo que

$$M = C_n \phi I_a$$

En condiciones iniciales

$$P = 188 \text{ Kw, } M = 305 \text{ Kgm.}$$

= 234 -

$$C_M = 1,33 \times 10^{-7}$$

$$K = 1,03 \times C_M$$

$$K = 1,03 \times 1,33 \times 10^{-7}$$

$$K = 1,37 \times 10^{-7}$$

Como $E = K \phi s$

$$420,8 = 1,37 \times 10^{-7} \times 5 \times 10^6 \times s$$

$$s = \frac{420,8}{1,37 \times 0,5}$$

$$s = 614 \text{ r.p.m.}$$

Comprobamos ahora si esta velocidad se mantiene al disminuir la carga. De acuerdo con las características del motor shunt, el flujo es constante según la constancia de la tensión. Conforme lo anotado al transcurrir los 642 seg. tenemos una potencia $P = 35 \text{ Kw}$ y el torque $M = 57 \text{ Kgm}$. En estas condiciones, la potencia entrante será

$$P_e = \frac{35}{0,91} = 38,5 \text{ Kw.}$$

La corriente I será

$$I = \frac{38.500}{440} = 87 \text{ A.}$$

De estos 87 A pasan por armadura el 98%

$$I_a = 85 \text{ A.}$$

La caída de tensión en armadura será

$$I_a R_a = 85 \times 0,0416 = 3,55 \text{ V.}$$

La f.c.e.m. $E = 440 - 3,55 = 436,45$

En este caso, según la ecuación de momentos

$$M = C_M \Phi I_a$$

$$57 = C_M \Phi 85$$

$$C_M \Phi = 0,66$$

Si el flujo se mantiene constante y $C_M \Phi$ resulta casi constante, luego los valores C y K son los mismos lo cual está de acuerdo a la realidad. Comprobamos la velocidad

$$s = \frac{E}{K \Phi}$$

$$E = 436,45$$

$$K \Phi = 1,37 \times 10^{-7} \times 5 \times 10^6 = 0,685$$

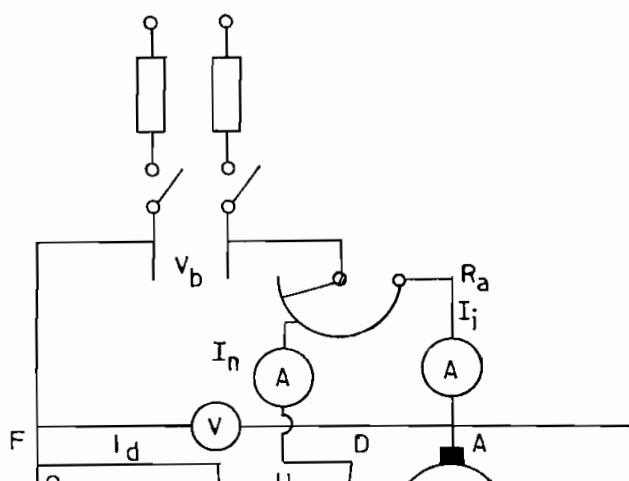
$$s = \frac{436,45}{0,685}$$

$$s = 635 \text{ r.p.m.}$$

Luego la velocidad se mantiene considerablemente constante. Por tal razón no se podrá descartar este tipo de motor, en lo que al m.r.u. se refiere.

3.2.5 CARACTERISTICAS DEL MOTOR COMPOUND

El motor compound es una combinación del motor serie y del motor shunt.



Se pueden conectar los arrollamientos de tal modo que el efecto magnético se suma, en cuyo caso tendremos un motor compound acumulativo.

O también, el caso contrario, que los efectos de los arrollamientos se opongan, en tal ca

dad y gran par de arranque. Se aplica en demandas intermitentes de gran par motor como cizallas, punzonadoras, prensas, aparatos de elevación, laminadores y transportadores.

La curva del par en función de la velocidad se da a continuación.

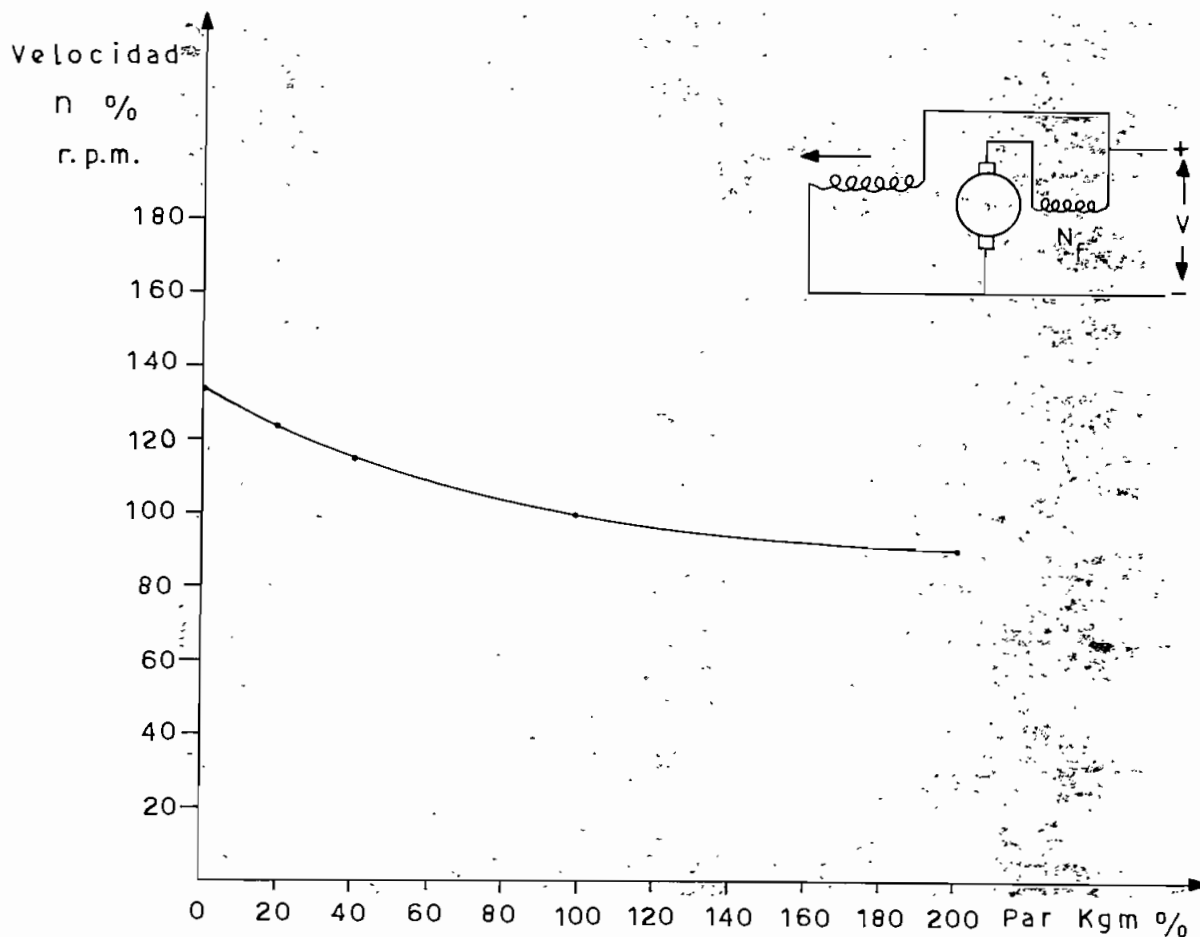


DIAGRAMA (3.2.9)

Curva Par-velocidad del compound acumulativo y la curva de la corriente en función del par se da en el diagrama (3.2.10) de la siguiente página.

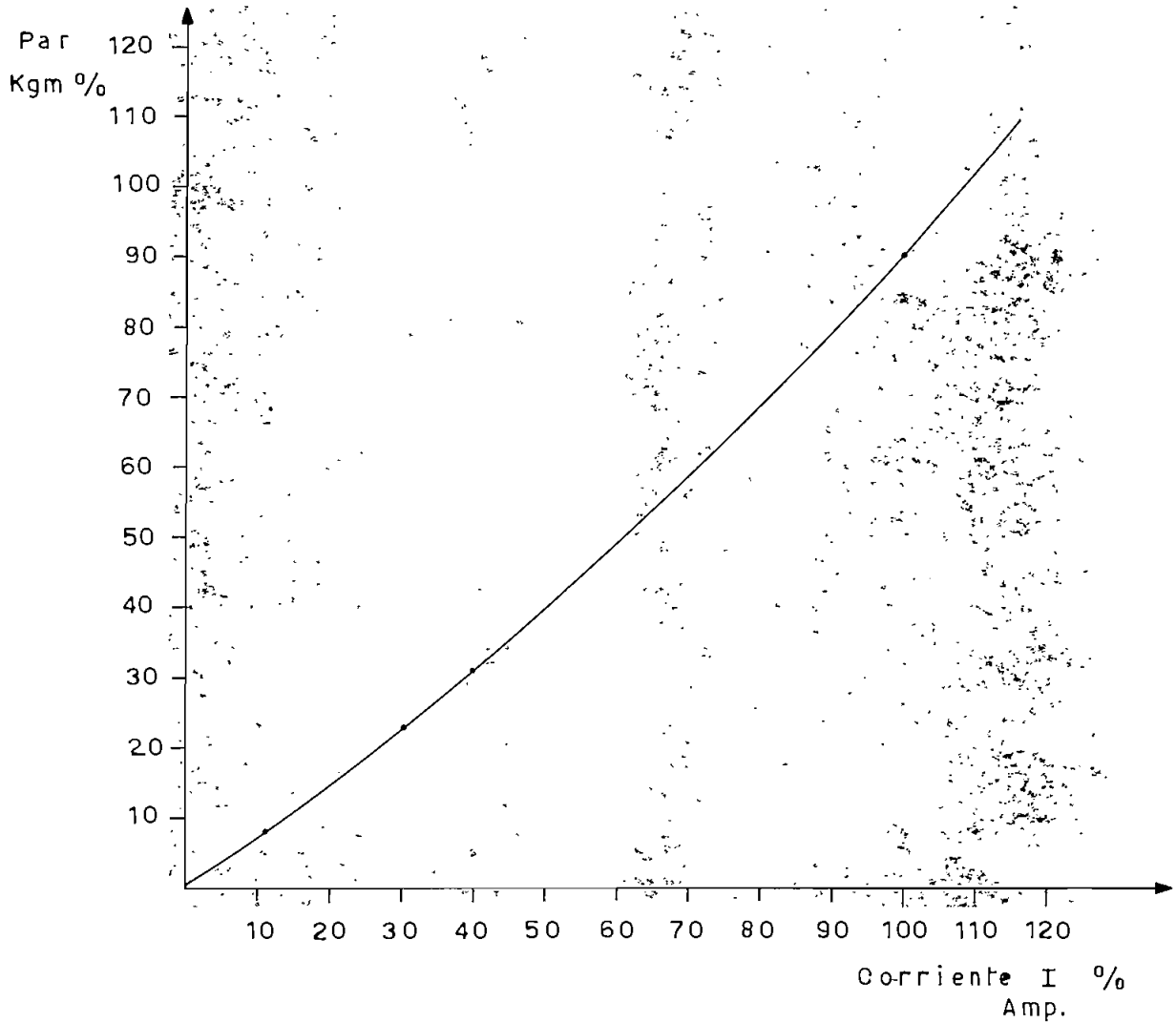


DIAGRAMA (3.2.10)

Una ventaja del motor compound acumulativo es que al presentarse cargas bruscas ocurre una baja de la velocidad, por ello gran parte de la energía cinética almacenada se puede disponer para cubrir parte del aumento de la carga reduciéndose la sobrecarga eléctrica. La energía cinética disponible, frecuentemente se aumenta con volantes.

El motor compound diferencial difiere del compound acumulativo en que

el flujo del campo serie se resta del flujo shunt; en la ecuación

$$s = \frac{V - I_a R_a}{\Phi} \quad \text{se puede ver}$$

que el aumento de carga reduce el numerador y el denominador, con una buena selección de las espiras en serie la velocidad a trabajo normal puede mantenerse casi constante o aumentarse con el aumento de carga. Pero este motor no se utiliza ya que basta el devanado shunt para tener una buena regulación de velocidad.

El problema más grave, sin embargo, es que si viene una gran sobrecarga, la excitación puede reducirse demasiado, bajando el valor del flujo hasta la región de inestabilidad, con lo que la velocidad puede aumentar sin control.

Otra desventaja es que tiene una tendencia a arrancar en sentido contrario durante el primer impulso de corriente por la elevada inductancia del circuito shunt que retardará la elevación de la corriente de excitación shunt, y las corrientes del circuito serie, que son mayores por ser un circuito de menor resistencia, pueden invertir el flujo resultante, invirtiendo el sentido de rotación.

Las curvas características de este motor se dan a continuación.

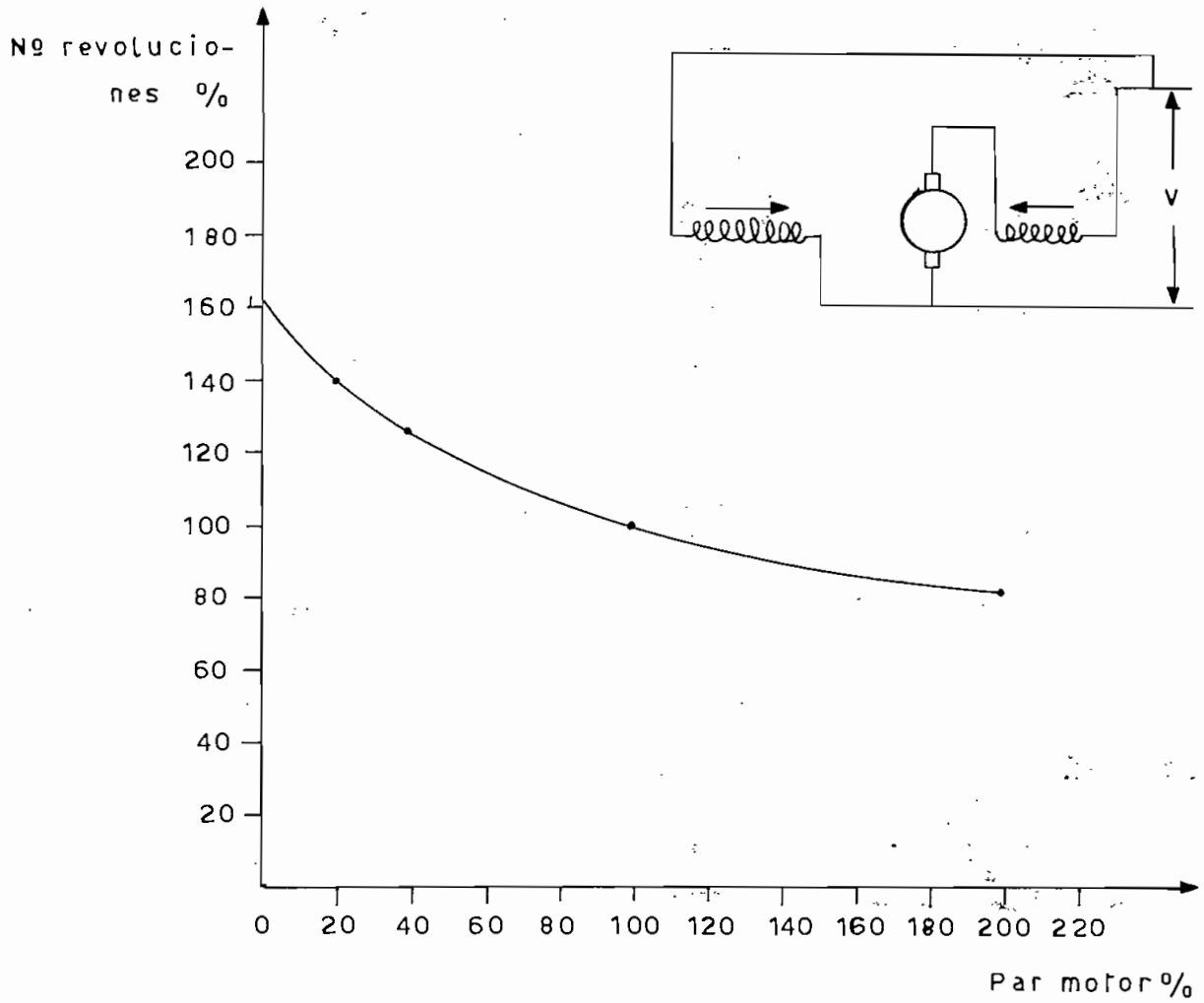


DIAGRAMA (3.2.11)

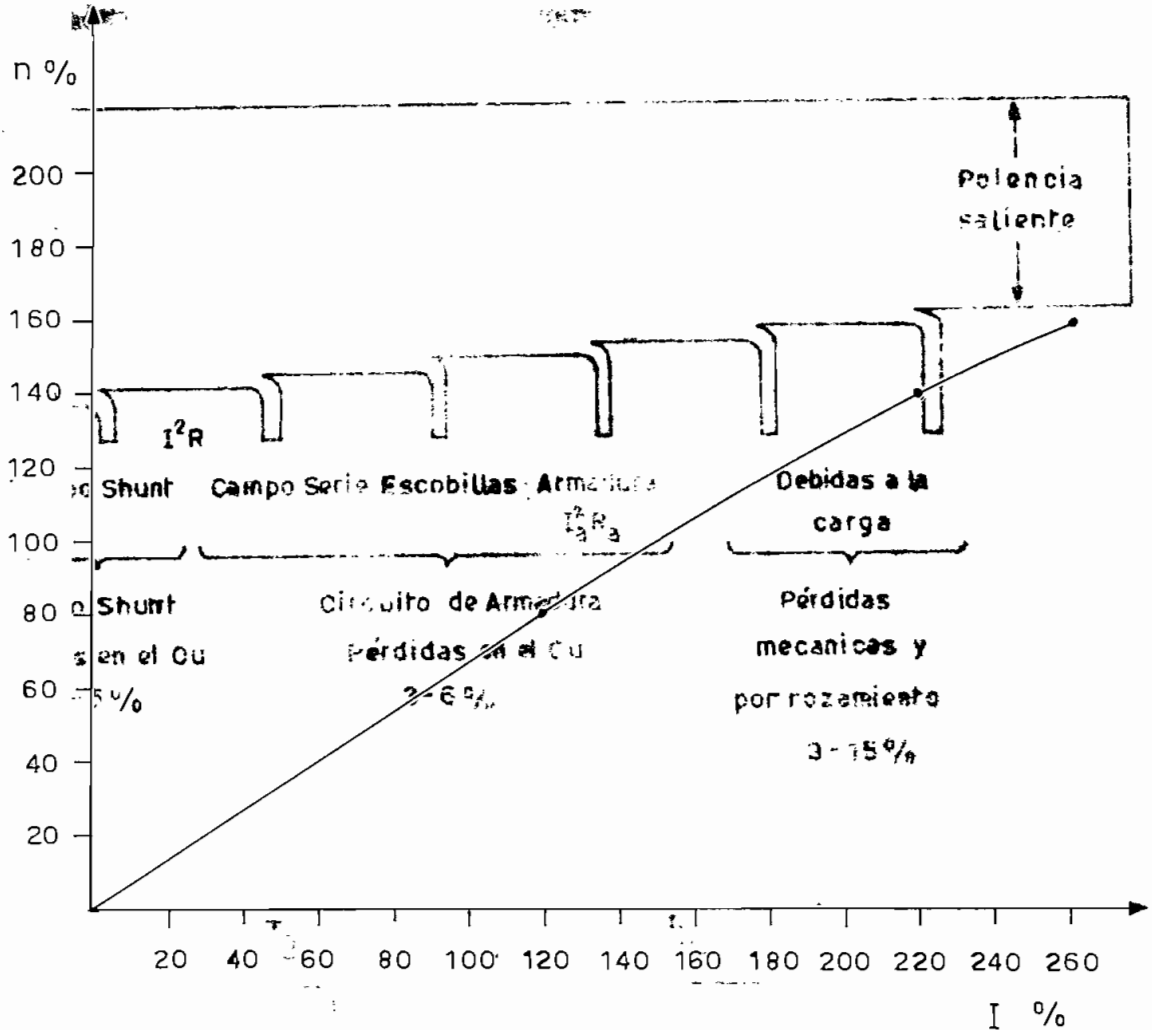


DIAGRAMA (3.2.12)

En este análisis de factibilidad no vamos a considerar el compound diferencial por las desventajas ya señaladas. Solamente consideraremos el motor compound acumulativo.

De acuerdo con Fitzgerald, pág. 393, las pérdidas en un motor de c.c. se pueden distribuir según el siguiente esquema:

$$R_f = \frac{3900}{81} = 49 \Omega$$

comprobamos por la caída de tensión

$$R_f = \frac{440}{9} = 49 \Omega$$

y la resistencia R_a será

$$R_a = \frac{5100}{416^2} = 0,034 \Omega$$

R_a incluye la resistencia de campo serie, la resistencia de armadura y las escobillas.

La f.c.e.m. en estas condiciones normales será

$$E = V - I_a R_a$$

$$E = 440 - 416 \times 0,034 = 425,8 \text{ V.}$$

La constante mecánica podrá ser calculada en las condiciones extremas

$$M = C_M \Phi I_a$$

Como la potencia es $P_e = \frac{188}{0,91} = 206 \text{ Kw}$, la corriente $I = 470 \text{ Amp.}$,

por armadura pasa el 98%, es decir

$$I_a = 460 \text{ Amp.}$$

La caída de tensión en armadura será

$$I_a R_a = 460 \times 0,034 = 15,6 \text{ V.}$$

La f.c.e.m.

$$E = 440 - 15,6 = 424,4 \text{ V.}$$

Es importante analizar profundamente lo que ocurre con el flujo magnético en el motor compound acumulativo: (9)

La variación de velocidad en este tipo de sistema motriz se puede analizar a partir de la fórmula fundamental de un motor

$$s = \frac{V - I_a R_a}{K \Phi Z_a}$$

La f.c.e.m.

$$E = 440 - 15,6 = 424,4 \text{ V.}$$

Es importante analizar profundamente lo que ocurre con el flujo magnético en el motor compound acumulativo: (9)

La variación de velocidad en este tipo de sistema motriz se puede analizar a partir de la fórmula fundamental de un motor

$$s = \frac{V - I_a R_a}{K \Phi Z_a}$$

El campo shunt produce una componente de flujo constante, como lo es la tensión aplicada.

El campo serie produce una componente adicional de flujo que se incrementa con la carga, es decir, con la corriente de campo. El flujo final aumentará con la carga y como es inversamente proporcional a la velocidad, ésta disminuirá también en pequeña proporción. Otro factor de disminución de velocidad es el aumento del valor de resistencia de armadura que se añade a la resistencia de campo serie. El resultado final es la variación de velocidad bajo carga.

La ecuación de los momentos, teniendo en cuenta la acción del campo shunt y del campo serie será:

(9) Royce Kloeffler, pág. 171.

$$M_{\text{serie}} = C I_a \Phi_1 \quad M = C I_a \Phi_1 + C I_a \Phi_2 \quad \text{o sea}$$

$$M_{\text{shunt}} = C I_a \Phi_2 \quad M = C I_a (\Phi_1 + \Phi_2)$$

Teniendo en cuenta que Φ_1 es el flujo debido al campo serie y Φ_2 el flujo proveniente del campo shunt, Φ_1 será proporcional a la corriente de campo y Φ_2 sensiblemente constante.

La ecuación de la f.c.e.m. será

$$E_{\text{serie}} = K \Phi_1 s \quad E = K \Phi_1 s + K \Phi_2 s$$

$$E_{\text{shunt}} = K \Phi_2 s \quad E = K s (\Phi_1 + \Phi_2)$$

Los flujos tendrán las características señaladas, Φ_1 del campo serie y Φ_2 del campo shunt.

En ambos casos Φ_2 mantenemos constante en 5×10^6 Max.

El problema consiste en equilibrar los flujos de modo que nos permita tener una buena regulación de velocidad y las ventajas de un elevado par de arranque.

Si para el circuito serie mantenemos un flujo máximo de 10^6 Maxwell proporcional a la corriente y para el circuito shunt un flujo de $5,5 \times 10^6$ Max. constante, entonces, en las condiciones extremas de trabajo tendremos las siguientes ecuaciones:

$$\text{Para } M = 305 \text{ Kgm, } I_a = 460 \text{ A, } \Phi_1 = 10^6 \text{ Max., } \Phi_2 = 5,5 \times 10^6 \text{ Max.}$$

- 247 -

$$M = c I_a (\Phi_1 + \Phi_2)$$

$$305 = c \cdot 460 (10^6 + 5,5 \times 10^6)$$

$$c = \frac{305}{460 (6,5 \times 10^6)} = 1,02 \times 10^{-7}$$

$$K = 1,05 \times 10^{-7}$$

Y teniendo en cuenta que $E = 424,4$

La velocidad será

$$s = \frac{424,4}{1,02 \times 10^{-7} (6,5 \times 10^6) \times 1,03}$$

$$s = 620 \text{ r.p.m.}$$

Al disminuir el momento

$M = 57 \text{ Kgm}$, $P = 35 \text{ Kw}$ la potencia entrante será $\frac{P_e}{\eta}$, el rendimiento disminuye con la disminución de la carga. Asumamos un $\eta = 85\%$

La potencia entrante será

$$P_e = \frac{35}{0,85} = 41 \text{ Kw.}$$

$$\text{La corriente } I_L = \frac{41000}{440} = 93 \text{ A.}$$

Los 98% son de armadura

$$I_a = 91 \text{ A}$$

$$I_a R_a = 91 \times 0,0416 = 3,8 \text{ Voltios.}$$

La f.c.e.m.

$$E = 440 - 3,8 = 436,2 \text{ Voltios}$$

El flujo del campo serie queda disminuído en proporci3n a la corriente. Así, si a

460 A. corresponde 10^6

91 A. Φ_1

$$\Phi_1 = \frac{91 \times 10^6}{460} = 1,98 \times 10^5 \text{ Max.}$$

La velocidad ser3

$$s = \frac{436,2}{1,05 \times 10^{-7} (5,5 \times 10^6 + 1,98 \times 10^5)}$$

$$s = \frac{436,2}{1,05 \times 10^{-7} \times 5,7 \times 10^6}$$

$$s = \frac{436,2}{0,105 \times 5,7} = 730 \text{ r.p.m.}$$

Se ve c3mo la velocidad que deb3a mantenerse en los l3mites de 600 r.p.m. es ligeramente m3s alta. Con una buena regulaci3n de velocidad podr3a utilizarse este motor en los accionamientos del funicular.

3.3 VENTAJAS Y DESVENTAJAS

Los tres sistemas motrices estudiados ofrecen ventajas y desventajas. El motor serie proporciona un alto par de arranque pero no permite una buena regulaci3n de velocidad. El motor shunt se caracteriza por su buena regulaci3n, de velocidad pero no da un par de arranque muy elevado. El motor compound, en cambio, si es shunt predominante, podr3 te-

ner un buen par de arranque con una relativa regulación de velocidad y si es serie predominante, gran par de arranque con mala regulación de velocidad.

El funicular requiere, para su funcionamiento, una gran regulación de velocidad. Un arranque suave para cualquier demanda de carga y lo mismo un frenado no violento en cualquier situación de carga.

3.4 SISTEMAS DE RECTIFICACION DE CORRIENTE

La corriente eléctrica de servicio público es corriente alterna. Como los sistemas de accionamiento de corriente continua tienen grandes ventajas con respecto a los de corriente alterna, es necesario transformar la corriente alterna en continua. Hay varios sistemas de transformación que se los va a estudiar con aplicación al funicular.

La rectificación puede ser detenida mediante procedimientos mecánicos o electrónicos.

3.4.1 SISTEMAS MECANICOS DE RECTIFICACION (10)

Los sistemas mecánicos o de conmutación suelen ser del tipo vibrador y conmutador rectificador relativo. El rectificador vibrador se basa en un electroimán que produce vibraciones en una lámina de contactos móviles. Los períodos de vibración se controlan o sintonizan por impulsos

(10) Electrónica Industrial y Control, Kloeffler, pág. 253.

o alteraciones de corriente. Pueden invertir su sentido para que la sa lida sea continua.

Los rectificadores rotativos se dividen en tres grupos: conmutadores simples, motor-generador y convertidores rotativos.

Los conmutadores simples son motores sincrónicos que mueven un conmutado r a una velocidad tal que se invierte la polaridad a un ritmo adecua do para tener una salida unidireccional.

El tipo motor generador es un motor de ca que mueve un generador de cc. Puede regular muy bien la tensión continua de salida pero al alto costo se añade el bajo rendimiento.

El convertidor rotativo es una sola unidad rotativa que con el consumo de corriente alterna como motor produce corriente continua de salida. Es de menor costo que el grupo motor-generador; tiene el inconveniente de no permitir una fina regulación de tensión a la salida.

Todos estos procedimientos arriba indicados se están sustituyendo por rectificadores electrónicos.

3.4.2 RECTIFICADORES ELECTRONICOS

Se suelen dividir en diodos de vacío, diodos de gas y vapor, rectifica dores de arco de mercurio, triodos de gas y de vapor, diodos de cristal, rectificadores metálicos, reotificadores de germanio y silicio.

A continuación se reproduce la siguiente tabla de rectificadores con todas sus características. (11)

(11) Royce Kloeffler, *Electrónica Industrial y Control*, pág. 278, tabla 2

Tabla 2. RESUMEN DE DATOS DE TRANSFORMADORES

Rectificador	Descripción	Margen de tensión de la carga	Margen de corriente de la carga Amperes	Tensión inversa de pico	Aplicaciones
Diodos de cristal	Semiconductor	40-250	0-0.5	50-1000	Detección, rectificación de pequeñas corrientes.
Oxido de cobre	Metálico	3-12 por elemento	$46.5 \frac{mA}{cm^2}$	3-30	Bajas tensiones-relevadores, galvanoplastia.
Selenio	Metálico	18-26-33 por elemento	$46.5 \frac{mA}{cm^2}$	18-45 por elemento	Fuentes de alimentación - radio y TV - aplicaciones diversas de baja tensión.
Magnesio-sulfuro de cobre	Metálico	5 por elemento	$3.88-7.76 \frac{A}{cm^2}$	15-125 por elemento	Baja tensión, rectificación de corrientes elevadas.
Germanio de potencia	Unión p-n	65-125	$93 \frac{A}{cm^2}$	5 por elemento	65-250 volt. corrientes elevadas de la industria química.
Silicio de potencia	Unión p-n	50-400	35-150 por elemento	400 por elemento	50-400 volt. corriente moderada, temperatura hasta 190°C.

Rectificador	Descripción	Margen de tensión de la carga	Margen de corriente de la carga Amperes	Tensión inversa de pico	Aplicaciones
Kenotrón	Diodo alto vacío	0-150 kv	0-1 usualmente	150 kv	Alimentación de tubos de rayos X, de válvulas de radiodifusoras, etc.
Gaseoso	Diodo termoiónico de gas	0-220	0-15	300	Fuentes de alimentación.
Fanotrón	Diodo de vapor o <u>g</u> todo termoiónico	0-2200	0-30	5000	Fuentes de alimentación de vol <u>t</u> aje moderado.
Tiratrón	Cátodo termoiónico, gas o vapor	1-10 kv	0-18	25 kv	Funciones de control - soldadu <u>r</u> a de resistencia - rectifi <u>c</u> ación controlada.
Ignitrón	Arco de mercurio	250-20000	30-1000 por válvula	1-20 kv	Rectificación de potencia - con <u>m</u> utación electrónica de po <u>t</u> encia-inversión.
Excitrón	Arco de mercurio	0-3000	750 por válvula	3000	Rectificación de potencia.

3.5 MAQUINAS DE CORRIENTE ALTERNA

Los motores de corriente alterna se pueden dividir en:

1. Motores monofásicos
2. Motores trifásicos.

Los motores monofásicos pueden dividirse en

1. Monofásicos con colector
 - a) En conexión serie
 - b) De repulsión
2. Monofásicos de condensador
3. Monofásicos con reactancia inductiva
4. Monofásicos a resistencia óhmica.

Los motores trifásicos pueden ser:

1. Trifásicos con colector
 - a) En conexión shunt
 - b) En conexión serie
2. Motores asincrónicos
 - a) De anillos rozantes
 - b) De rotores en cortocircuito
3. Motores sincrónicos.

3.5.1 MOTORES MONOFASICOS CON COLECTOR EN CONEXION SERIE

Los motores monofásicos con excitación serie se hallan aplicados en tracción eléctrica y en motores universales domésticos, estos últimos pueden funcionar tanto para corriente alterna como para corriente continua.

De acuerdo con el diagrama (3.3.1) el devanado rotórico y estatórico

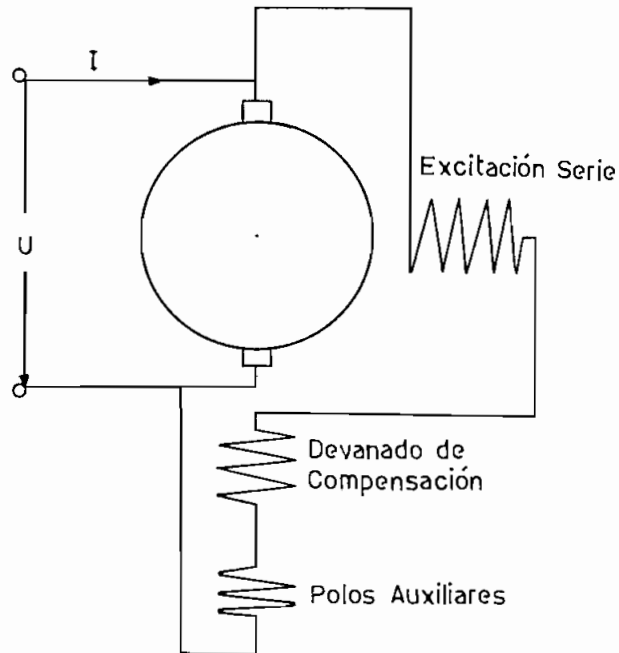


DIAGRAMA (3.3.1)

van conectados en serie. Además se intercala en serie también el devanado auxiliar de compensación.

El motor serie de corriente alterna difiere del de corriente continua

en que el estator no es macizo sino laminado para reducir las corrientes parásitas que se producen por el cambio de sentido que sufre el flujo.

El par motor es variable de acuerdo a la variación de la corriente y, por las razones anotadas para el motor serie de corriente continua el flujo, que es proporcional a la corriente, determina que el par lo sea al cuadrado de la misma.

El valor instantáneo del par será

$$(12) (3.5.1) \quad M = C \theta_i \Phi_M \quad \text{o sea}$$

$$(3.5.2) \quad M = C' \sqrt{2} \theta_{ief} \text{ sen } \omega t \sqrt{2} \Phi_{Mef} \text{ sen}^2 \omega t$$

El momento medio será

$$(3.5.3) \quad M_i = \frac{1}{2} M_{M \text{ max}} = C \theta_{ief} \Phi_{Mef}$$

Donde C es la constante de la máquina, M es el par, Φ_i , la f.m.m. del inducido y Φ_M el flujo inductor.

Evidentemente para igual Φ en corriente continua y corriente alterna, el motor de corriente alterna tendrá un par medio 50% menor que el de corriente continua. Por esta razón este motor es de baja potencia para un mismo flujo de corriente continua, y si se quiere tener una potencia igual hay que aumentar las dimensiones y con esto el precio encarece.

(12) Moeller-Werr, Electrotecnia General y Aplicada, Tomo II, pág 565.

Los diagramas (3.3.2) y (3.3.3) muestran las variaciones de las distintas magnitudes eléctricas que intervienen en este tipo de motores.

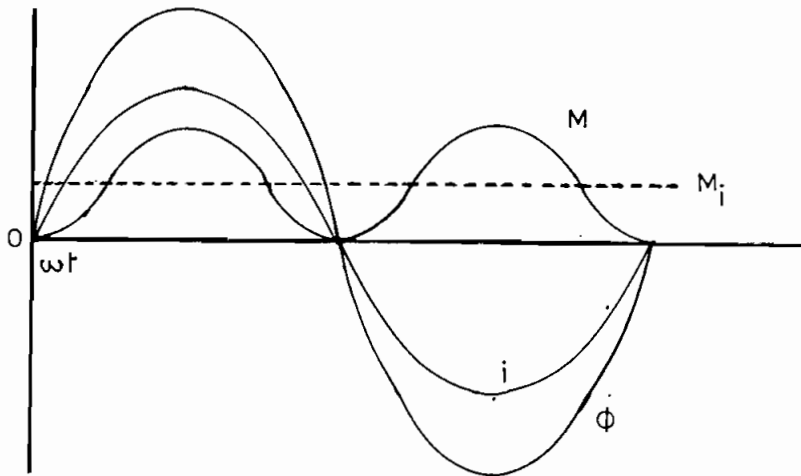


DIAGRAMA (3.3.2) de flujo, f.m.m. y corriente de motores de corriente alterna monofásicas serie en función de ωt

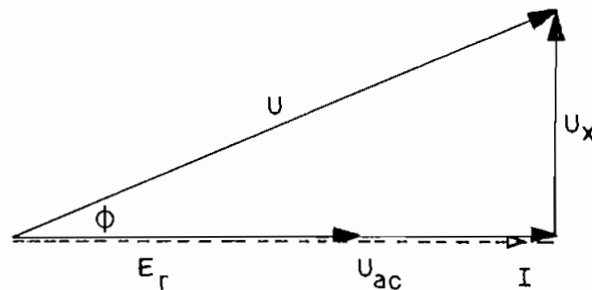


DIAGRAMA (3.3.3) de un motor serie de corriente alterna cargado.

El diagrama (3.3.3) muestra que la tensión U aplicada es la suma vectorial de la f.c.e.m. dinámica E_r con la caída de tensión U_{ac} de las pérdidas óhmicas y la caída de tensión inductiva U_x . Evidentemente

la f.c.e.m. E_r está en fase con la corriente de acuerdo con la ecuación (3.1.13) $E = \frac{z P s \Phi}{60 p'}$ para motores de corriente continua y que se transforma en la ecuación

$$(3.5.4) \quad E = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{z P s \Phi}{60 p'}$$
 dado que el valor eficaz de

E es

$$(3.5.5) \quad E = \frac{E_m}{\sqrt{2}}$$

La relación entre el par y la velocidad resulta en los motores serie de corriente alterna, análoga a la dependencia entre el par y la velocidad de los motores series de corriente continua ya que el par es directamente proporcional al cuadrado de la corriente de carga como se ha indicado antes.

El peligro, por tanto, de embalamiento subsiste en los motores series de corriente alterna y esta es la razón por la que no se puede emplear este sistema para el funicular que requiere una velocidad constante a régimen normal.

El fuerte par de arranque o esfuerzo de tracción es casi proporcional al cuadrado de la corriente y la velocidad inversamente proporcional a la misma. (13) Este motor se emplea casi exclusivamente en los servicios de tracción ferroviaria.

(13) Chester Dawes, Tomo II, pág. 373; Moeller, Tomo II, pág. 569.

3.5.2 MOTORES MONOFASICOS DE REPULSION (14)

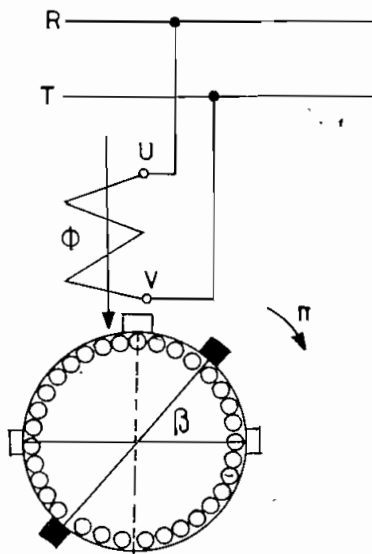


DIAGRAMA (3.3.4)

El estator UV recibe de la línea la corriente alterna e induce en el rotor corrientes de transformación. Si las escobillas están en cortocircuito circulará corriente sobre aquellas que estén a distinta tensión. Esto ocurrirá siempre y cuando $\beta \neq 0$, ó $\beta \neq 90^\circ$. Para cualquier ángulo β habrá un par resultante.

El flujo se descompone en uno, de acuerdo al eje de las escobillas y el otro,

normal. El primero produce un flujo transformador que induce la corriente en el rotor. El otro determina el par. La velocidad que debe tomar el inducido será tal que equilibre a la f.e.m. debida a la rotación con la f.e.m. debida a la corriente de transformación.

Estas f.e.m. vienen así:

$$(3.5.6) \quad E_r = \frac{n}{60} z \frac{\Phi_{rm}}{\sqrt{2}} = \frac{n}{60} 4 N \frac{\Phi_{rm}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} f_r N \Phi_{rm}$$

$$(3.5.7) \quad E_t = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} f N \xi \Phi_{tm}$$

(14) Moeller, Tomo II, pág. 571.

Además tiene buen par de arranque. Si se quiere puede tenerse un arranque suave, con sólo decalar las escobillas, pero la variación del ángulo de escobillas no permite disponer de polos de conmutación lo que influye en la potencia y no se puede tener sino motores de pocos Kw.

Se emplea para potencias medianas en hilaturas. O para máquinas de pequeña potencia donde se requiere buen par de arranque. Hay distintas variedades según diferentes aplicaciones en las que se usa este tipo de motor.

En vista de que este sistema no se emplea sino para potencias muy pequeñas y, además, tiene característica serie, no podrá aplicarse al funcionamiento donde se requiere 170 Kw.

3.5.3 MOTORES MONOFASICOS (15)

Un motor trifásico en el que se interrumpe un hilo de los tres, continúa funcionando aunque con potencia disminuida. En este caso el motor funciona monofásicamente.

Un motor monofásico está dotado de un solo devanado de trabajo UV colocado en ranuras con 120° eléctricos, de esta manera se produce un flujo alterno con la onda de excitación Θ_u , de tal manera que puede descomponerse en otros dos de amplitud constante e igual a la mitad del valor máximo del campo alterno, girando el uno Θ_m en el mismo

(15) Moeller, Tomo II, pág. 466.

sentido que el rotor, y el otro, Θ_e en sentido contrario.

Cuando Θ_u está en su valor máximo, los dos campos rotatorios deben coincidir sobre el eje. Si el valor Θ_u del campo estacionario se ha reducido en la proporción 1 a 0,5, ha pasado $1/6$ de período ó 60° eléctricos; para que la resultante Θ_m y Θ_e valga $1/2 \Theta_{um}$, deben haberse desplazado 60° , cada uno en su propio sentido, la rotación por consiguiente se realizará en forma sincrónica.

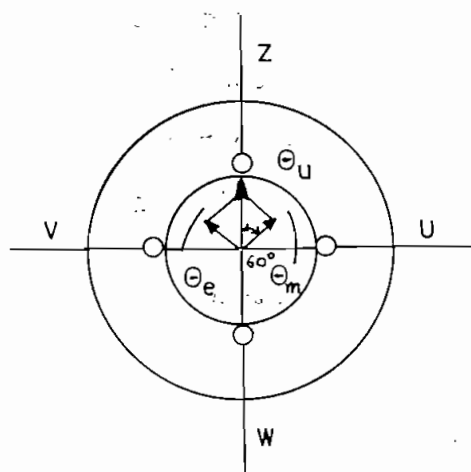


DIAGRAMA (3.3.5)

El funcionamiento del motor monofásico es en definitiva efecto de la acción giratoria de dos campos girando en sentido contrario; cada uno desarrolla cierto par en el rotor.

El momento de giro será igual a la diferencia de ambos pares, en oposioión.

En reposo el par es nulo por cuanto los dos campos son iguales. Por esta razón estos motores no pueden ponerse en marcha por sí solos. Carecen de par de arranque. Se si le da impulso, comienza el giro cada vez más grande y puede ser indistintamente a un lado u otro según el impulso inicial.

En lo que se refiere a las características del motor monofásico en comparación con el trifásico, la caída de potencia del monofásico es mayor y más bajo su rendimiento.

Según la 9a. edición del Manual AEG (16). "Los motores monofásicos

(16) Manual AEG, 9a. Edición, 1967, pág. 614.

aproximadamente un 150% más elevado que el momento nominal, además de conseguir un campo giratorio casi circular en el devanado del estator!"

En todo caso se trata de motores de pequeña potencia que no interesan para el caso del funicular.

3.6 MAQUINAS TRIFASICAS DE CORRIENTE ALTERNA

Según la división dada en el acápite 3.5, los motores trifásicos pueden ser:

1. Trifásicos con colector
 - a) En conexión shunt
 - b) En conexión serie
2. Motores asincrónicos
 - a) De anillos rozantes
 - b) De rotores en cortocircuito
3. Motores sincrónicos.

3.6.1 MOTORES TRIFASICOS CON COLECTOR EN CONEXION SHUNT (17)

Para la regulación manual o automática de la velocidad de un motor es de uso frecuente los motores de colector trifásicos. El par de los motores trifásicos es un par continuo.

En el motor shunt, la alimentación puede ser por el estator o por el

(17) Moeller, pág. 574.

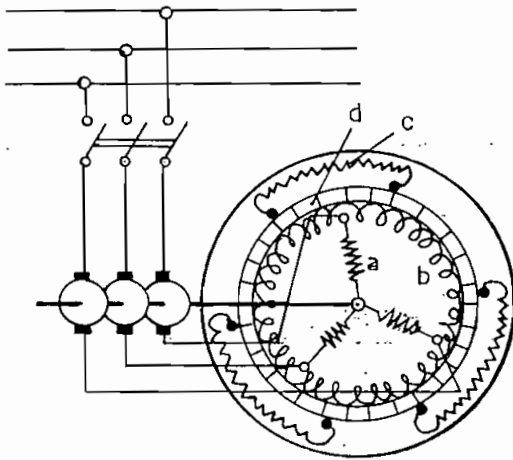


DIAGRAMA (3.3.6)

$$(3.5.12) \quad E_g = C_b \sqrt{2} \frac{N_i}{a} s f_1 \phi_{gm} 10^{-8} \text{ Voltios}$$

Siendo $\phi_{gm} = \phi_{rm} = \phi_{tm}$, valor máximo del flujo por polo, f_1 la frecuencia estatórica, C_b = factor de escobillas y vale $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

A la velocidad sincrónica la f.e.m. debida al campo rotatorio tiene valor cero pues $s = 0$, ó sea no hay tensión entre escobillas. De lo contrario E_g varía con el valor positivo o negativo del deslizamiento s

Al desconectar de la línea el primario del transformador, como las escobillas se conectan entre sí a través del secundario, circulará corriente por el inducido y el motor actuará como un motor asincrónico con deslizamiento pequeño, y la f.e.m. del secundario. Al conectar en esta situación el primario la corriente estatórica se hará más pequeña y lo mismo el par. En esta situación se tendrá un deslizamiento s que será proporcional a la elevación de la tensión secundaria.

rotor.

Alimentado por el estator, el devanado produce un campo rotatorio ϕ_g casi constante, la velocidad angular estará dada por la frecuencia de la red. El campo induce una f.e.m. en el rotor que depende del deslizamiento. Esta ecuación será

mismas delgas. Separando o acercando se obtiene, respectivamente menor y mayor velocidad. Se regula entre 50 y 150% la velocidad, generalmente, del sincronismo. En definitiva, el motor shunt de colector funciona como motor asincrónico de características rígidas de velocidad. El sistema de motores con colector incluye el sistema de regulación pero es sumamente costoso y se utiliza especialmente en máquinas, herramientas, hiladuras, textiles y fábricas de papel.

(18)

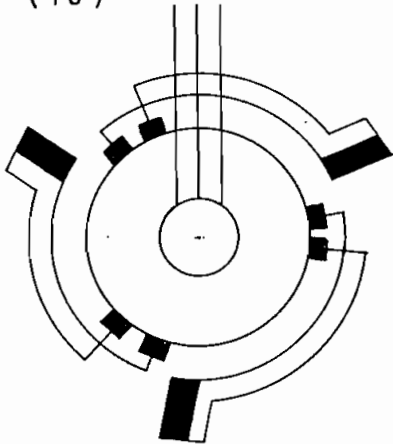


DIAGRAMA (3.3.9)

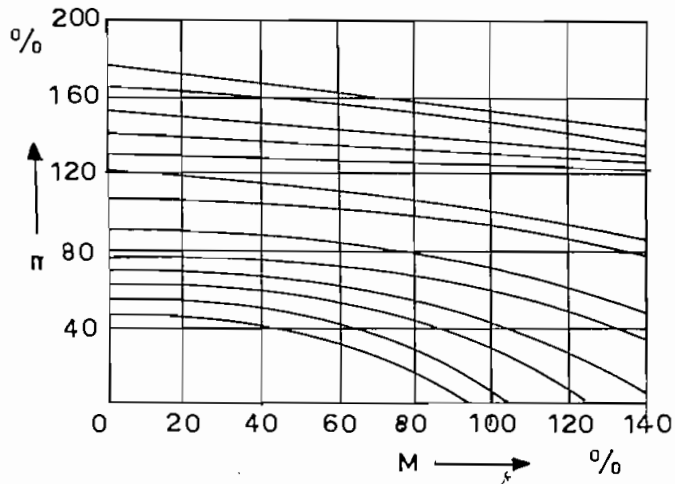


DIAGRAMA (3.3.10)

Debido a que el sistema shunt de corriente continua ofrece más ventajas sobre el de corriente trifásica, - sobre todo en lo que se refiere al costo - no se utilizará este sistema en el funicular.

(18) Manual AEG, pág. 617.

3.6.2 MOTORES TRIFASICOS CON COLECTOR EN CONEXION SERIE (19)

Hay un triple sistema de escobillas con decalamiento por cada par de polos.

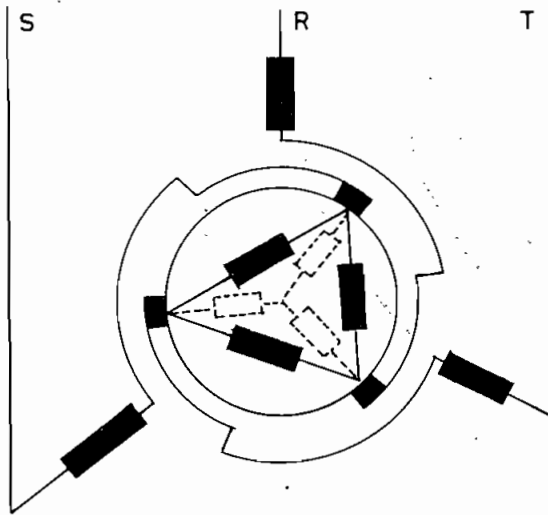


DIAGRAMA (3.3.11)

Se produce un campo rotatorio producido por el estator. El rotor se alimenta por el colector y debido a la frecuencia de deslizamiento se produce un campo sincrónico con el estator. La f.m.m. de ambos campos producen una resultante que está en relación a la posición de escobillas. El bobinado rotórico puede

de estar en triángulo o en estrella.

Alimentado el motor ambos arrollamientos, rotórico y estatórico, producirán dos f.m.m. Θ_1 y Θ_2 desfasadas el ángulo eléctrico α según el decalaje de escobillas. Si el flujo es el mismo, la suma vectorial produce una f.m.m. Θ resultante que origina el flujo rotatorio ϕ_g . Si los ejes de los arrollamientos se superponen, el par producido M será cero (para posición cero de escobillas). Si se desvían las mismas aparece el momento de giro M que será igual a

$$(3.5.13) \quad M_i = K \phi_g \Theta_2 \text{ sen } \alpha/2 = K' I^2$$

3.6.3 MOTORES TRIFASICOS ASINCRONICOS (21)

Ordinariamente el rotor de los motores asincrónicos se suele construir de dos formas diferentes:

- a) La de jaula en cortocircuito cuyas barras van enlazadas por anillos en los extremos ó
- b) Rotor de hierro macizo sin devanado.

El segundo caso no se construye sino excepcionalmente por desventajas que suelen venir por la alteración de la velocidad a distintas condiciones de carga.

Para poder intercalar resistencias de arranque en el rotor, se disponen de anillos rozantes y el devanado rotórico se parecerá al estatórico.

Es indispensable reducir el entrehierro a valores muy pequeños que proporcionan mas eficiencia y menos pérdidas. No sería por demás recalcar la gran semejanza que existe entre el motor asincrónico y los transformadores trifásicos. La única diferencia consiste en que la corriente de vacío es mucho mayor en el motor, por haber más pérdidas.

Sin carga el motor producirá el par debido a pérdidas. Basta la corriente I del rotor que produce una f.e.m. inducida E_1 muy pequeña que

(21) Moeller, pág. 382.

con la f.e.m. de reposo E_2 que están en la misma relación entre la velocidad deslizante n_s y la de campo giratorio n_g .

El deslizamiento s será según la ecuación

$$(3.5.14) \quad s = \frac{n_s}{n_g}$$

y la f.e.m. rotórica en marcha:

$$(3.5.15) \quad E_r = s E_2$$

Como en vacío s es pequeña, la velocidad rotórica será casi síncrona n_g .

(22) El diagrama vectorial del motor funcionando al vacío será similar al del transformador.

En este caso U_1 es tensión a bornes, $I_0 X_{1d}$ es caída de tensión inductiva, $I_0 R_1$ caída óhmica en el estator. E_1 es la f.e.m. inducida en el estator por el campo rotatorio para vencer la cual se emplea parte de la tensión de línea $-E_1$.

El diagrama, naturalmente, está referido a una fase del motor. En el rotor actúa sólo la pequeña f.e.m. $s E_2$. $s E_2$; cubre las caídas de tensión $I_{20} R_2$ y $I_{20} (s X_{2d})$, X_{2d} es la reactividad de dispersión de cada fase, en reposo con frecuencia igual a la de la línea. La intensi

(22) Moeller, pág. 386.

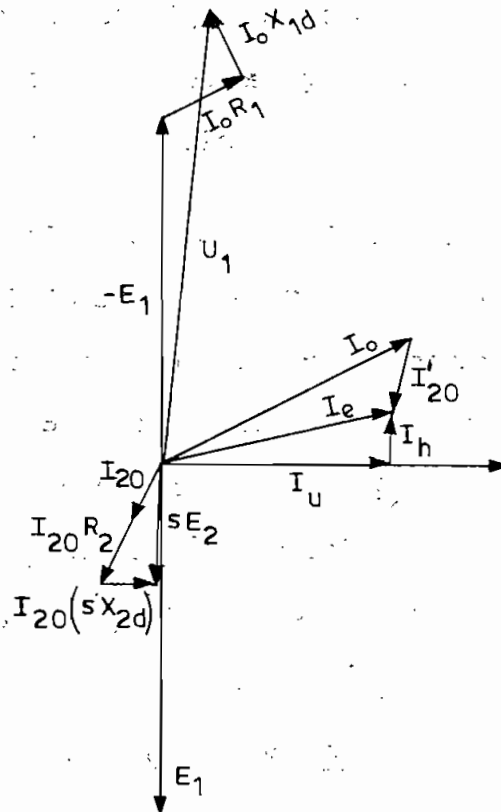


DIAGRAMA (3.3.13)

dad I_{20} y la resistencia R_2 y la reactancia $s X_{2d}$.

La corriente I_u es la corriente magnetizante, I_h cubre las pérdidas del hierro, la corriente I_e , no es exactamente la corriente de vacío, pues hay que contrarrestar los amper-vuelta del secundario. La verdadera corriente de vacío I_0 se compondrá de I_u , I_h y $-I'_{20}$ de las pérdidas por rozamiento.

Al recibir carga el motor disminuye la velocidad por aumento de s . La

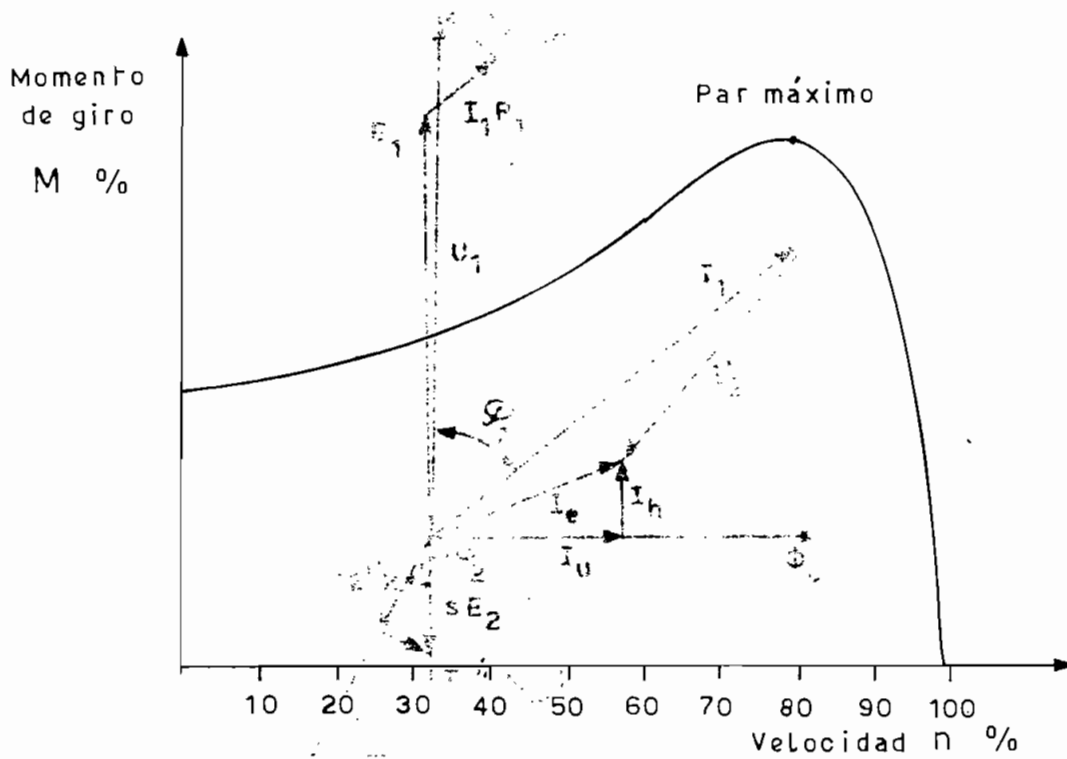


DIAGRAMA (3.3.14)

El diagrama vectorial del motor cargado va en la siguiente página (23)

En este diagrama:

- ϕ_c = Flujo común del estator y el rotor.
- $s E_2$ = f.e.m. inducida en el rotor con deslizamiento s .
- I_2 = Corriente de $s E_2$ con retraso por $I_2 R_2$ y $I_2 (s X_{2d})$.
- E_2 = f.e.m. del secundario en reposo.
- I_e = Corriente de excitación.

(23) Moeller, pág. 393.

proporcional al cuadrado de la tensión de alimentación, según la ecuación: (24)

$$(3.5.17) \quad M_{\max} = \frac{K V^2}{r_1 + \sqrt{r_1^2 + (X_1 + X_2)^2}}$$

Siendo:

K = Constante

V = Tensión en terminales

r_1 = Resistencia del estator

X_1 = Reactancia del estator

X_2 = Reactancia del rotor en reposo.

Esta ecuación está desarrollada en Lawrence R. R., "Principles of Alternating - current Machinery, 3ra. Ed., pág. 487", obra citada de Chester Dawes, "Corriente Alterna".

El motor asincrónico puede funcionar como motor, generador asincrónico y freno contracorriente.

La caída de velocidad para pequeñas cargas es casi rectilínea en los motores asíncronos. Por esto tienen característica shunt.

En los motores de rotor en cortocircuito no se puede llegar a establecer una modificación sobre la velocidad. En los de anillos rozantes con rotor devanado sí se puede regular mejor la velocidad puesto que

$$(3.5.18) \quad n = \frac{120 f}{p} \text{ r.p.m.}$$

Siendo f la frecuencia y p el número de pares de polos.

Se puede cambiar el número de revoluciones sincrónicas conectando de distintas formas los polos.

La potencia del motor se expresa

$$(3.5.19) \quad P = \sqrt{3} V I \cos\varphi \text{ (Watts)}$$

Donde V es la tensión eficaz a terminales, I la corriente eficaz y $\cos\varphi$ el factor de potencia.

Los motores sincrónicos no se emplean en sistemas de tracción eléctrica y por lo tanto queda descartado para el funicular.

De lo expuesto anteriormente se deduce que los sistemas más aptos para el funicular son el motor shunt de corriente continua, o compound acumulativo y el motor asincrónico de corriente trifásica en el acápite 3.8 se hace la selección del sistema motriz más conveniente.

3.7 SISTEMA WARD - LEONARD (26)

Es el sistema de regulación de velocidad que permite un cómodo accionamiento de arranque, inversión, cambio de velocidad y frenado, sin peligro de interrupción de la corriente principal.

(26) La Escuela del Técnico Electricista, Tomo XI, pág. 116.

El funcionamiento del sistema Leonard es como sigue:

Los rectificadores V_1 y V_2 se conectan al inducido del motor de excitación separada M. El punto neutro coincide con el cátodo. Al colocar el mando a la izquierda, el motor gira por acción de la válvula V_1 a la izquierda y en la otra posición girará a la derecha.

El sistema de regulación Ward-Leonard dinámico (27) emplea una unidad motor-generator. Se utiliza un motor shunt M_2 , alimentado por un generador G_2 de arranque o maniobra.

La figura de la página siguiente muestra dos reguladores, el R_1 gradúa la tensión y por tanto la velocidad debajo de la nominal. Con el regulador R_2 se ajusta la debilitación del campo para regular la velocidad encima de la nominal.

Las máquinas de corriente continua pueden ser de excitación independiente.

Si las máquinas M y G son de gran potencia, se conectan varias excitatrices y se regula la corriente de excitación a las mismas. El generador de maniobra es movido por un motor trifásico, y muchas veces se añade un gran volante para fijar la velocidad y evitar oscilaciones.

(27) Moeller, pág. 109.

las barras colectoras S, de las cuales se toma corriente de excitación para el generador principal G_1 a través del regulador R_1 , el motor M_2 recibe excitación por el arrollamiento I_{ex_2} con posibilidad de regular la corriente mediante el regulador R_2 , este motor puede también tener las conexiones en shunt si hace falta. El regulador R_1 está basado en el sistema de puente de Wheatstone, pasando la corriente constante I_t , para la posición 0 de la palanca; la corriente de excitación I_{ex_1} del generador G_1 es nula, así como la tensión y la velocidad del motor M_2 . Si se mueve la palanca hacia la posición "atrás o adelante", pasará la corriente en un sentido con intensidad creciente en la excitación del generador produciendo tensión en un sentido o en otro, el motor M_2 , consecuentemente, se pondrá en marcha en el sentido correspondiente con velocidad ajustable desde 0 a cualquier valor. Fijada la excitación en un valor determinado, lo estará también la tensión y el motor M_2 tiene una velocidad definida que variará muy poco con la carga.

Si el motor M_2 gira a una velocidad algo mayor, la f.c.e.m. es algo mayor que la del generador G_1 y hace trabajar a éste como motor y al motor M_1 como generador, enviando corriente de vuelta a la red, en este caso tendremos un frenado por recuperación de energía.

Asumiendo un rendimiento de un 90% en cada máquina el rendimiento total será

$$\eta = 0,9 \times 0,9 \times 0,9 = 0,729$$

o sea aproximadamente

$$\eta = 73\%$$

Si se quiere tener un ajuste finísimo de la velocidad con carga se puede conectar un regulador de velocidad tacométrico, con realimentación al sistema, de modo que cuando la velocidad decae el regulador tacométrico manda impulsos que permiten un aumento adecuado de la excitación, con lo que el sistema básicamente se regirá bajo los mismos principios de un servomecanismo.

o sea aproximadamente .

$$\eta = 73\%$$

Si se quiere tener un ajuste finísimo de la velocidad con carga se puede conectar un regulador de velocidad tacométrico, con realimentación al sistema, de modo que cuando la velocidad decae el regulador tacométrico manda impulsos que permiten un aumento adecuado de la excitación, con lo que el sistema básicamente se regirá bajo los mismos principios de un servomecanismo.

3.8 EQUIPO MAS VENTAJOSO. ANALISIS DEL SISTEMA WARD - LEONARD

De acuerdo con el estudio realizado anteriormente se puede concluir que el sistema motriz más adecuado es el motor de corriente continua en conexión shunt o de campo independiente.

Como es necesario efectuar una fina regulación de velocidad, por el torque altamente variable, es conveniente desde todo punto de vista que el sistema motriz esté accionado en conexión Ward - Leonard tal como se ha explicado en el acápite 3.7.

Por consiguiente se establece un accionamiento tipo Ward - Leonard con las siguientes características (29)

(29) Fitzgerald, pág. 174.

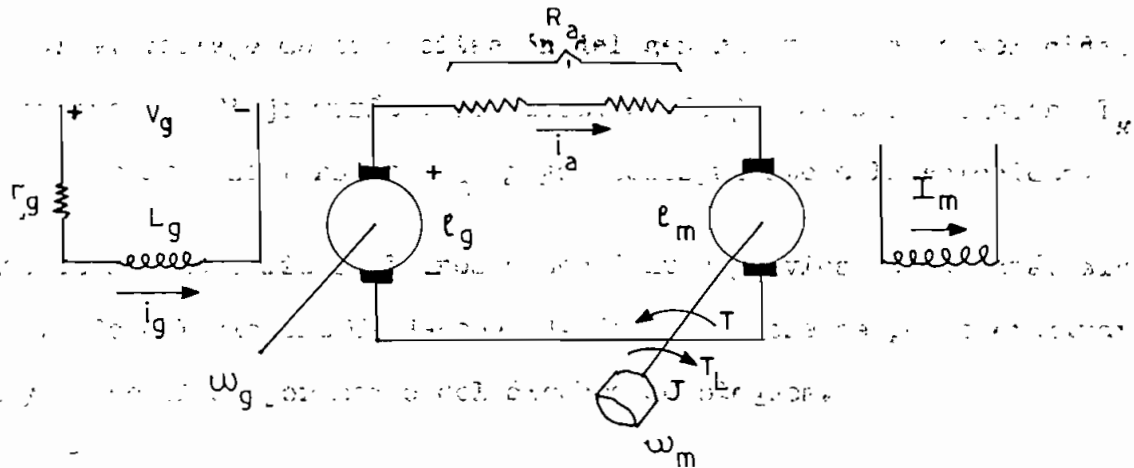
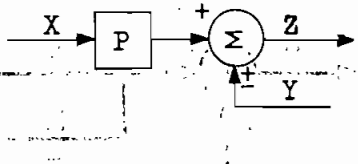
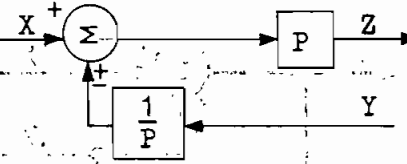
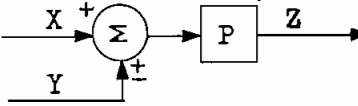
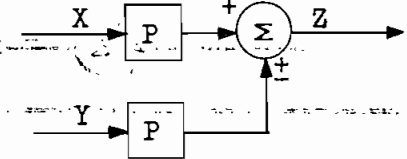
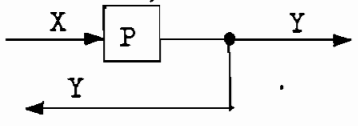
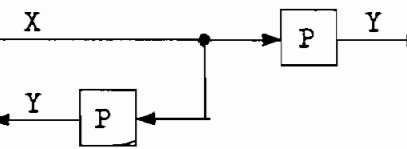
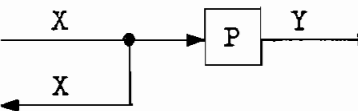
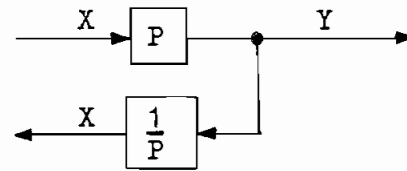
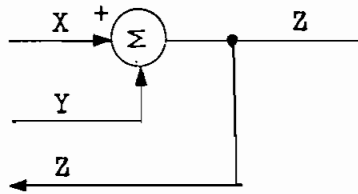
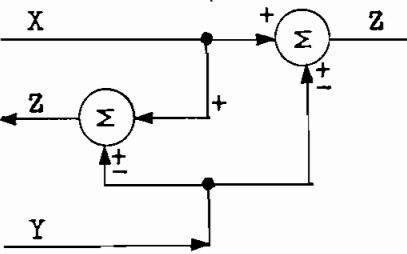


DIAGRAMA (3.8.1)

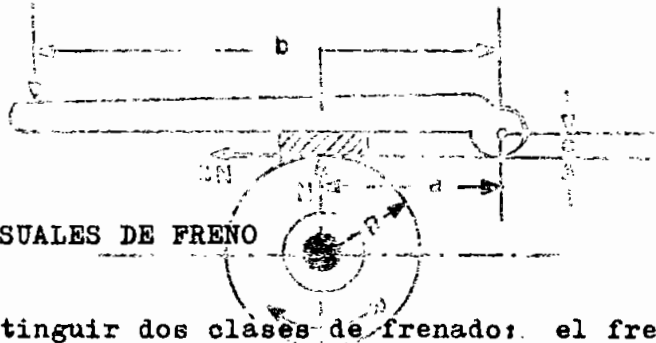
Velocidad del generador ω_g , constante
 Campo del generador con excitación separada conectada a fuente de tensión V_g . Motor excitado separadamente con una corriente de campo I_m .
 Resistencias de armadura del motor y generador en serie representadas por R_a .
 Se puede despreciar la inductancia de armadura.
 El diagrama (3.8.1) nos indica el sistema típico de conexión para control de velocidad utilizando corriente de campo constante y voltaje controlado de armadura. Este sistema es usado con mucha frecuencia cuando se requiere un control manual o automático de velocidad así como un gran rango de potencia en rotación en ambas direcciones. El voltaje controlado de armadura puede obtenerse de una fuente de rectificadores cuya entrada está servida por corriente alterna. También se puede usar un generador de corriente continua y excitación separada.

Transformación	Ecuación	Diagrama de bloques	Diagrama equivalente
7. Moviendo un punto de suma delante de un bloque.	$Z = PX + Y$		
8. Moviendo un punto de suma tras de un bloque.	$Z = P(X + Y)$		
9. Moviendo un punto de salida delante de un bloque.	$Y = PX$		
10. Moviendo un punto de salida tras de un bloque.	$Y = PX$		
11. Moviendo un punto de salida delante de uno de suma.	$Z = X + Y$		

CAPITULO IV

ACCIONAMIENTO

4.0 TIPOS MAS USUALES DE FRENO



Es necesario distinguir dos clases de frenado: el frenado mecánico y el frenado eléctrico.

Los frenos mecánicos se accionan mediante palancas o dispositivos hidráulicos o neumáticos, los mismos que comunican a las zapatas la fuerza necesaria para detener el vehículo. El sistema de frenado mecánico es indispensable para la detención de los coches del funicular aplicando las zapatas a las llantas, y para la detención del sistema, aplicando las zapatas al árbol del sistema motriz. En este último caso conviene un embraguetal como se ha estudiado en el Capítulo II.

4.0.1 EL FRENADO MECANICO

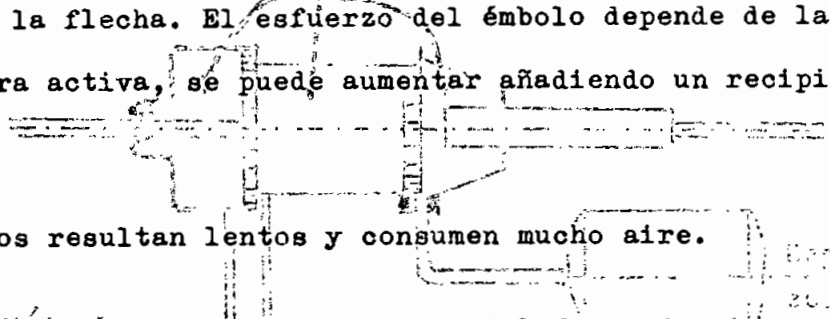
(1) Se pueden establecer las siguientes modalidades de freno mecánico.

La figura de la página siguiente muestra el freno ordinario de zapata y palanca.

En el mismo sistema se puede escribir la ley de momentos a aplicarse

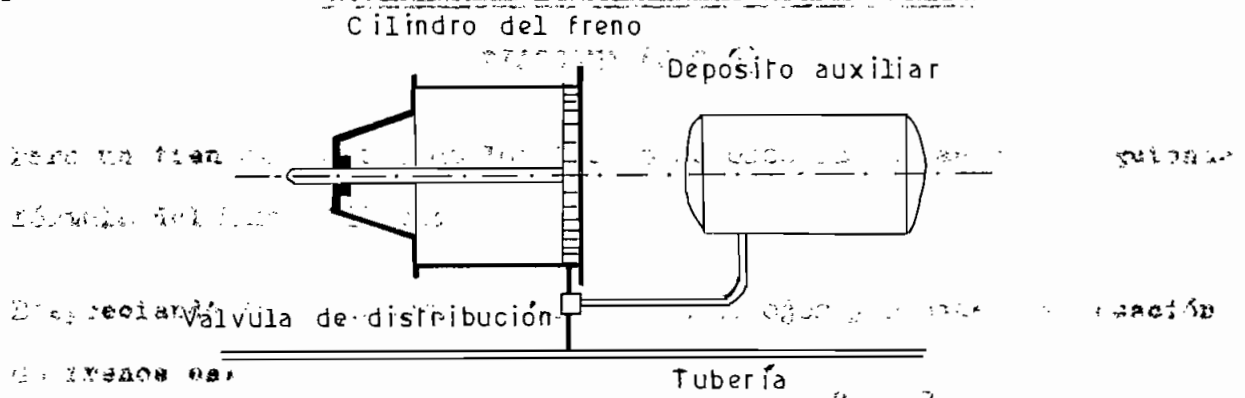
(1) Manual Hütte, Tomo II, pág. 213.

presión. Al reducir la presión en la tubería, por tanto en la cámara pasiva, el exceso de presión de la cámara activa empuja el émbolo en sentido de la flecha. El esfuerzo del émbolo depende de la capacidad de la cámara activa, se puede aumentar añadiendo un recipiente auxiliar.



Estos frenos resultan lentos y consumen mucho aire.

El siguiente diagrama muestra el caso del freno de aire, cámara simple.



(4.0.8) DIAGRAMA (4.0.5)

La presión en la tubería es de 5 atmósferas. Se llena de aire comprimido de la tubería general y pasa al recipiente auxiliar cargado a igual presión de la tubería. Para frenar se reduce la presión en la tubería, esto hace funcionar una válvula triple que deja pasar aire del recipiente auxiliar al cilindro, el émbolo sufre desplazamiento para ajustar las zapatas.

- Presión total de la tubería general = 5 atmósferas.
- Peso total de aire comprimido en el depósito auxiliar = 5 atmósferas.
- Coeficiente de elasticidad del aire = 1/14.

El freno Kunze-Knorr es combinación del sistema de cámara simple y do

riel. Con funcionamiento automático para los dos coches en forma simul
tánea. En la estación se instalará el sistema de frenado mecánico al
eje del motor, al cable o a la polea de arrastre y al sistema de frenad
o eléctrico reostático.

(10) Cada coche debe estar dotado de un freno de seguridad (automático)
y otro manual; el primero funciona en el momento en que la tensión del
cable disminuye (rotura del cable) o si la velocidad aumenta en forma
indebida. La ecuación de la potencia de frenado se da en la fórmula
(4.0.12).

$$(4.1.1) \quad P = \frac{G}{s} \left[\frac{v^2}{2g} + (s + s_0) \operatorname{sen} \beta \right]$$

Siendo

P La fuerza de frenado paralelamente al eje de la vía en Kg.

G Peso del coche cargado. Kg.

β Angulo de máxima inclinación de la línea.

v Velocidad de régimen, m/s.

s Camino recorrido en el frenado, m.

s_0 Trayecto pasivo recorrido hasta que empieza a actuar el fren
o, m.

$s + s_0$ Trayecto total desde que se frena hasta parar, mts.

g 9,81 m/s², aceleración de la gravedad.

De acuerdo con esto, para las peores condiciones la fuerza de frenado

(10) Manual Hütte, Tomo III, pág. 1381.

será:

$$P = \frac{12.000}{13} \left[\frac{3^2}{2 \times 9,81} + (13) \text{ sen arc tg } 0,641 \right]$$

$$P = \frac{12.000}{13} \left(\frac{9}{2 \times 9,81} + 13 \cdot 0,54 \right)$$

$$P = 924(0,456 + 7,1)$$

$$P = 924(7,556)$$

$$P = 7.000 \text{ Kg.}$$

Que, comparando con la tabla (2.0.12) da un valor aproximado.

(11) En el caso que nos ocupa se puede proporcionar a los coches un sistema de frenado de cremallera, cada eje de los coches podrá tener una rueda dentada unida a una polea-freno de gargantas. Este sistema conecta las zapatas por medio de un mecanismo con el mando por palanca. Se suele también emplear el frenado sobre riel que utiliza la presión de unas mordazas sobre los flancos del carril pero sirve sólo como freno detentor y no como freno regulador.

El freno de mano no puede usarse como freno de seguridad al romperse el cable porque es muy lento. Sólo se usará para dejar estacionado el coche, en este caso el coche inferior no debe frenarse para que el cable pueda libremente seguir las variaciones de temperatura.

En lo que se refiere al frenado eléctrico se va a considerar el cálculo de las resistencias de frenado para el motor shunt que es el que in

(11) Freno Rápido tipo Roll, Manual Hütte, Tomo IV, pág. 1381.

teresa para el funicular. Los métodos a emplearse, ya señalados, son el frenado por recuperación de energía, el frenado reostático y el frenado en cortocircuito o por inversión de corriente.

4.1.1 FRENADO POR RECUPERACION DE ENERGIA PARA EL FUNICULAR

Como sólo es posible este frenado si la velocidad es superior a n_0 , el motor trabajará como generador y la corriente y el momento cambiarán de dirección.

La característica mecánica se deduce aplicando la ley de Ohm. En el caso del funicular interesa calcular el sistema para un motor en derivación. La fuerza contraelectromotriz es:

$$(4.1.2) \quad E = n C_e \phi$$

Siendo n la velocidad angular, C_e , la característica eléctrica y ϕ el flujo de inducción.

La corriente de frenado será:

$$(4.1.3) \quad I = \frac{M_{\text{frenado}}}{C_m \phi}$$

Siendo M_{frenado} el momento de frenado, C_m , la característica mecánica y ϕ el flujo.

Aplicando la ley de Ohm:

$$(4.1.4) \quad E - U = I (R_i + R_e)$$

Siendo R_i y R_e las resistencias interna y externa respectivamente.

Reemplazando los valores indicados en las ec. (4.1.2) y (4.1.3):

$$(4.1.5) \quad n C_e \phi - U = \frac{M_{fr.}}{C_m \phi} (R_i + R_e)$$

Despejando n:

$$(4.1.6) \quad n = \frac{U}{C_e \phi} + \frac{R_i + R_e}{C_e C_m \phi^2} M_{fr.}$$

La velocidad inicial corresponde al primer término de la ecuación:

$$(4.1.7) \quad n_0 = \frac{U}{C_e \phi}$$

Si se consideran constantes C_e , C_m , ϕ^2 , R_i y variables R_e y M_{fr} para cada resistencia R_e que se intercale se obtendrá un momento M_{fr} y este momento será tanto más grande cuanto más pequeña sea la resistencia. Y para un momento frenante dado la velocidad será tanto más grande cuanto mayor sea la resistencia.

Para este caso, la característica mecánica a partir de la velocidad en vacío para distintos valores de R_e será como se ha dibujado en el diagrama (4.1.1) de la página siguiente, es decir, un haz de rectas que permiten obtener un valor final de momento frenante.

4.1.2 FRENADO REOSTATICO Y POR INVERSION DE CORRIENTE PARA EL FUNICULAR

Como se vió en el acápite 4.0.2 se desconecta de la fuente al inducido y se conecta a las resistencias variables las mismas que se pueden em

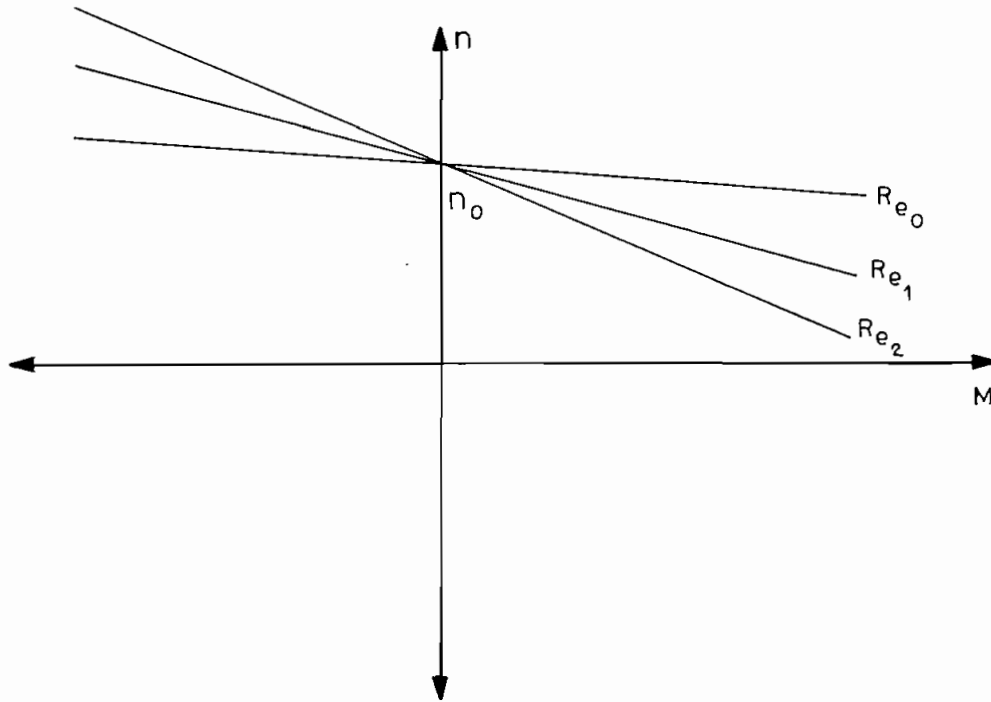


DIAGRAMA (4.1.1)

plear para el arranque. La excitación no se desconecta de la línea alimentadora. Como se mantiene el sentido de rotación, el sentido de la corriente y del momento varían. El valor del término $\frac{U}{C_e \Phi} n_0$ es cero puesto que al no haber alimentación $U = 0$ y, para este caso, la ecuación (4.1.6) se transforma en:

$$(4.1.8) \quad n = \frac{R_i + R_e}{C_e C_m \Phi^2} M_{fr.}$$

Esta ecuación puede representarse en coordenadas cartesianas como un haz de rectas cuya representación gráfica se tiene en el diagrama

(4.1.2).

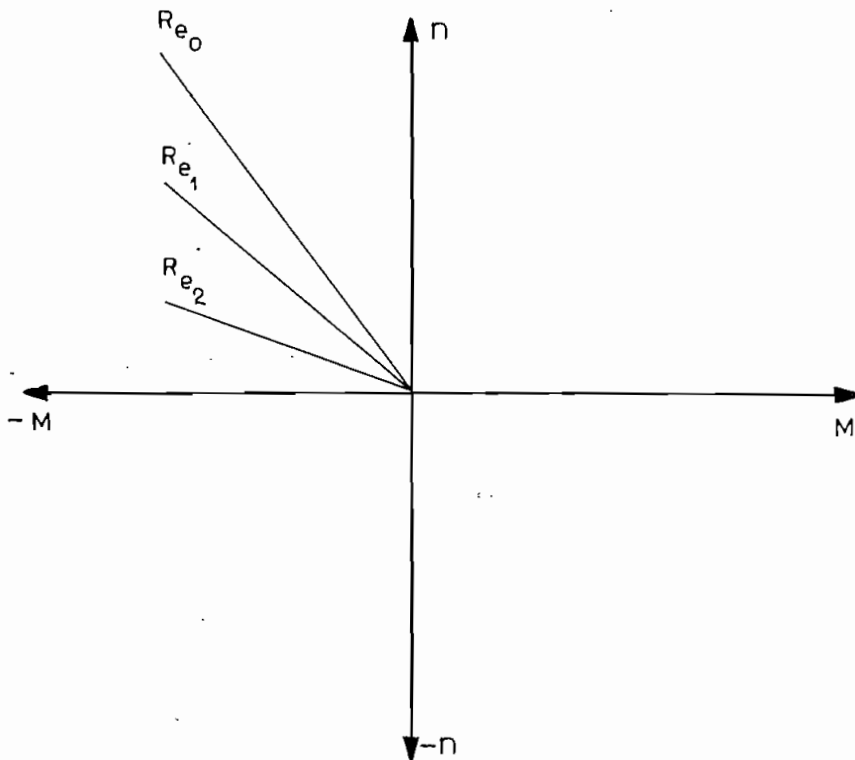


DIAGRAMA (4.1.2)

Como las mismas resistencias se emplean para arrancar se ha de calcular posteriormente las características del sistema reostático tanto para el arranque como para el frenado.

En lo que se refiere al frenado por inversión de corriente el rotor sigue girando en virtud del momento resistente. Se cambia la polaridad de armadura y la f.c.e.m. y la tensión de la red tienen el mismo sentido, la corriente cambia de sentido y el momento se opone a la rotación por tal razón el primer término de la ecuación (4.1.6) será negativo y

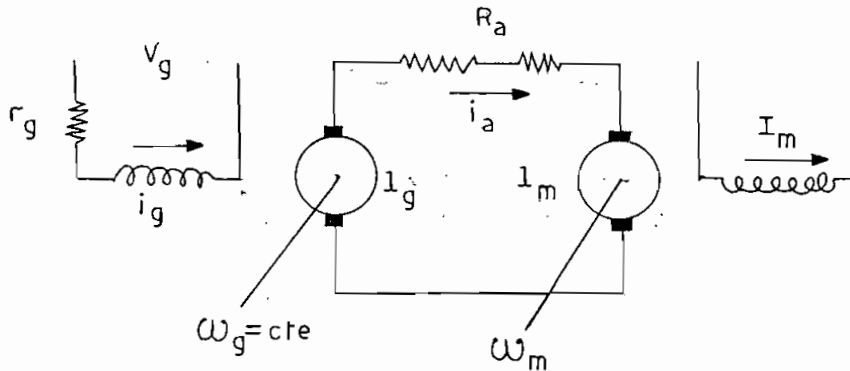


DIAGRAMA (4.2.1)

Este sistema, como se ha demostrado en el capítulo III, acápite 3.8, funciona de acuerdo con la ecuación (2.8.28) que se reproduce a continuación:

$$(4.2.1) \quad \omega_m = v_g \left(\frac{K_g}{K_m r_g} - \frac{T_L \tau_m}{J} \right) \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_m}} \right)$$

Esta es la función de transferencia de la velocidad del motor con el voltaje V_g de entrada.

El sistema de arranque consistirá en variar el voltaje V_g , desde 0, al $t = 0$ a su valor nominal, 440 Volt, a $t = 8,7$ seg, permitiendo, a partir de ese instante, mantener constante la velocidad ω_m . La ecuación (4.2.1) es exponencial y por lo tanto la velocidad para una determinada carga será creciente en el tiempo hasta el valor asintótico al que tiende la función y para $t = \infty$.

Para $t = \tau_m$ que es la constante de tiempo la velocidad es 63,3% del

$$\lambda = 0,142$$

Reemplazando valores en la ecuación (4.2.4)

$$(4.2.5) \quad 7,2 t = 0,142 v_g (1 - e^{-t})$$

y despejando v_g

$$v_g = \frac{7,2 t}{0,142 (1 - e^{-t})}$$

o sea

$$(4.2.6) \quad v_g = 50,5 \frac{t}{1 - e^{-t}}$$

Dando valores a la ecuación (4.2.6)

t	ω_m	$1 - e^{-t}$	$\frac{t}{1 - e^{-t}}$	v_g
0	0	0	-	0
1	7,2	0,632	1,58	80
2	14,4	0,764	2,62	132
3	21,6	0,886	3,38	171
4	28,8	0,944	4,22	214
5	36	0,983	5,08	256
6	43,2	0,989	6,06	306
7	50,4	0,99	7,05	356
8	57,6	0,999	8,02	405
8,7	62,8	1	8,7	440

TABLA (4.2.1)

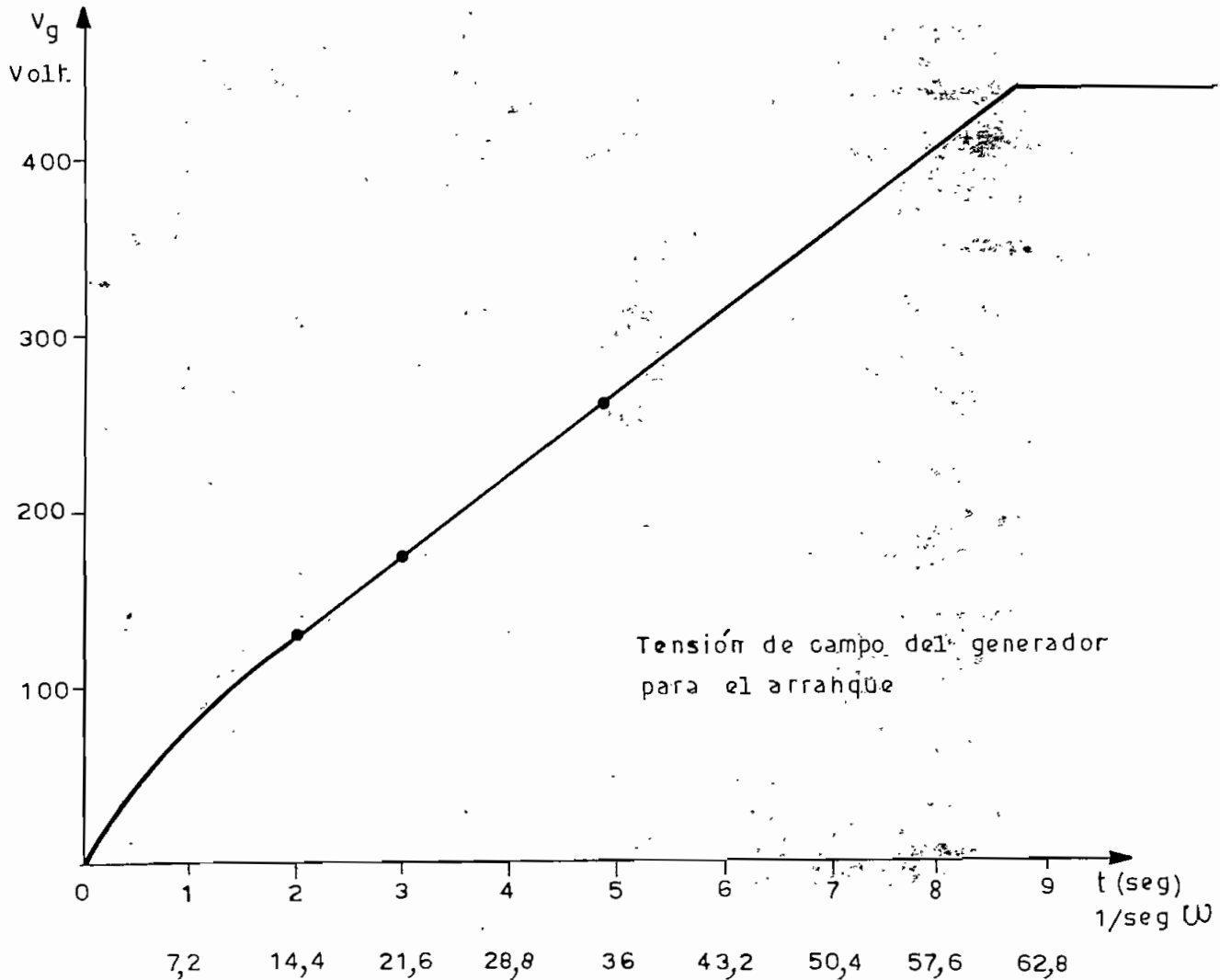


DIAGRAMA (4.2.1)

4.2.2 DETERMINACION DE LAS CONSTANTES

El valor de λ se determinó en 0,142, valor que debe permanecer constante para todo el sistema en cualquier condición de carga. Se plantea el problema de mantener constante λ cuando varía la carga. Es neces

rio buscar un elemento variable que permita ser ajustado convenientemente para los distintos tipos de carga que se pueden tener en el arranque. La fórmula ya conocida (4.2.3) establece que

$$\lambda = \frac{K_g}{K_m r_g} - \frac{T_L \tau_m}{J}$$

En esta ecuación son valores rigurosamente constantes λ , K_g , K_m , τ_m y J . El valor de T_L no es constante ya que varía según las varias condiciones de carga y r_g , también es una magnitud que puede variar. Evidentemente se puede hacer ajustes a r_g con la variación de la carga y en este caso:

$$(4.2.7) \quad \lambda + \frac{T_L \tau_m}{J} = \frac{K_g}{K_m r_g}$$

y finalmente

$$(4.2.8) \quad r_g = \frac{K_g / K_m}{\lambda + \frac{T_L \tau_m}{J}}$$

Esta relación es a simple vista, hipotética.

Y la representación gráfica será como se indica en la página siguiente en el diagrama (4.2.2).

Para nuestro caso sólo interesa el tramo en el primer cuadrante.

En el caso más desfavorable (ascendente lleno, descendente vacío) r_{g_d} valdrá, aplicando (4.2.8):

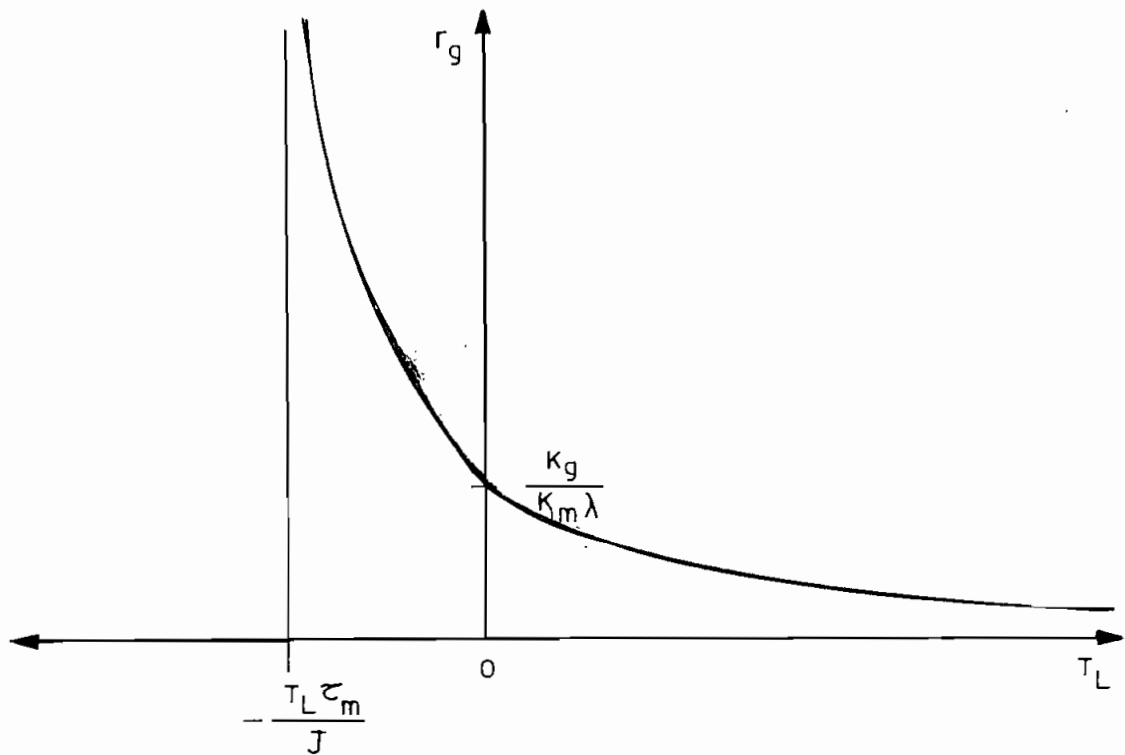


DIAGRAMA (4.2.2)

$$(4.2.9) \quad r_{g_d} = \frac{K_g / K_m}{0,142 + \frac{3240 \cdot 1}{38}}$$

$$(4.2.10) \quad r_{g_d} = \frac{K_g / K_m}{85,405}$$

Y en el caso más ventajoso (ascendente vacío, descendente lleno), se considerarán los siguientes datos:

$$\lambda = 0,142$$

$$T_L = 60 \text{ Kg-m (promedio cfr. tabla 2.4.3) equivalente a } 588 \text{ New-m}$$

$$J = 38 \text{ Kg-m}^2, \quad \tau_m = 1 \text{ seg.}$$

La resistencia r_{g_v} valdrá:

$$(4.2.11) \quad r_{g_v} = \frac{K_g/K_m}{0,142 + \frac{588 \cdot 1}{38}}$$

$$(4.2.12) \quad r_{g_v} = \frac{K_g/K_m}{15,615}$$

La relación entre r_{g_d} y r_{g_v} , igualando K_g/K_m de (4.2.10) y (4.2.12)

$$(4.2.13) \quad \frac{r_{g_v}}{r_{g_d}} = \frac{85,405}{15,615}$$

$$(4.2.14) \quad \frac{r_{g_v}}{r_{g_d}} = 5,46$$

$$(4.2.15) \quad r_{g_v} = 5,46 r_{g_d}$$

Nos podemos imponer el valor de $r_{g_d} = 100 \Omega$ y, consiguientemente, el valor de $r_{g_v} = 546 \Omega$. La resistencia r_g variará de 100Ω para las condiciones más desventajosas hasta 546Ω en las condiciones mejores.

La relación $\frac{K_g}{K_m}$ será

$$(4.2.16) \quad \frac{K_g}{K_m} = 15,615 \times 546$$

$$(4.2.17) \quad \frac{K_g}{K_m} = 8.540,5$$

La constante K_g se especifica por:

$$(4.2.18) \quad K_g = \frac{1}{i_g}$$

O sea por la relación de voltaje generado sobre corriente de campo.

Fijamos el valor de $K_g = 100$ Volts/amperio de excit.

(12) Conforme a la curva de magnetización a condiciones nominales:

$$(4.2.19) \quad K_m = \frac{100}{8540,5}$$

$$K_m = 0,012 \text{ New-m/amp.}$$

De esta manera quedan determinadas todas las constantes del sistema.

4.2.3 SISTEMA AUTOMATICO DE ARRANQUE CON CARGA VARIABLE

La relación entre la resistencia r_g y el momento de carga T_L se da en la ecuación (4.2.8), reemplazando los valores constantes ya determinados, esa ecuación se transformará en:

$$r_g = \frac{8.540,5}{0,142 + \frac{T_L \cdot 1}{38}}$$

(12) Fitzgerald, pág. 396.

$$r_g = \frac{332.539}{5,4 + T_L}$$

El valor T_L mínimo de arranque a $t = 0$ es, de acuerdo a la tabla (2.4.3): $T_L = 82$ Kg-m, y el valor máximo: $T_L = 360$ Kg-m. Transformando a New-m. $T_L = 803,6$ New-m y $T_L = 3.528$ New-m. respectivamente.

$$\text{Para } T_L = 803,6 \text{ New-m} \quad r_g = \frac{322.539}{5,4 + 803,6} = \frac{322.539}{809}$$

$$r_g = 400 \Omega$$

$$\text{Para } T_L = 3.528 \text{ New-m} \quad r_g = \frac{322.539}{5,4 + 3.528} = \frac{322.539}{3.533,4}$$

$$r_g = 91,2 \Omega$$

Por consiguiente r_g varía de $91,2 \Omega$ á 400Ω

El sistema automático consta de sensores de peso que registran la tensión de los cables en las estaciones. Los sensores están colocados en los rieles de los extremos. El valor de tensión registrado es transformado en una señal electrónica cuya intensidad es proporcional al peso. Esta señal es captada por un receptor y, por medio de un servo sistema, se regula el reóstato r_g de campo del generador, automáticamente.

Los sensores pueden ser como pequeños dinamómetros que modifican la señal de salida de un transmisor de frecuencia modulada. La señal recogida en el receptor de la Estación superior es transformada, por medio de circuitos electrónicos (para el control automático por servosistemas) en movimiento giratorio del reóstato de campo r_g , de tal manera

que cuando se tiene la situación más ventajosa el reóstato se mueve automáticamente en la posición $r_g = 400 \Omega$ y para la menos ventajosa en $r_g = 91,2 \Omega$.

Así, al introducir el botón de arranque se da paso a la señal proveniente de los sensores de los coches, las mismas que, detectadas, modifican el paso de corriente i_g , por medio del reóstato r_g , y los coches empiezan a moverse sin trepidación. Al mismo tiempo, una vez fijada la resistencia r_g ésta no se modifica a lo largo de todo el recorrido y el sistema de relojería para el potenciómetro de alimentación de voltaje V_g se mueve de acuerdo con los valores de la tabla (4.241) proporcionando el voltaje requerido al sistema.

Pero este voltaje V_g debe ser modificado constantemente para mantener fija la velocidad de los coches en 3 m/s. O sea que al llegar a la posición de 8,7 seg. y 440 Volt. empieza a modificarse automáticamente conforme el análisis que se realizará en el acápite siguiente.

4.3 CONTROL DE VELOCIDAD (13)

El control de velocidad por realimentación implica la conexión al eje del motor de un tacómetro, medidor de velocidad, este tacómetro es un generador de corriente continua y su voltaje e_t es comparado con un voltaje de referencia.

(13) Fitzgerald, pág. 185.

Se requiere un amplificador A que supla unos pocos watts a la excitación E.

El siguiente diagrama muestra la disposición esquemática de los elementos del sistema.

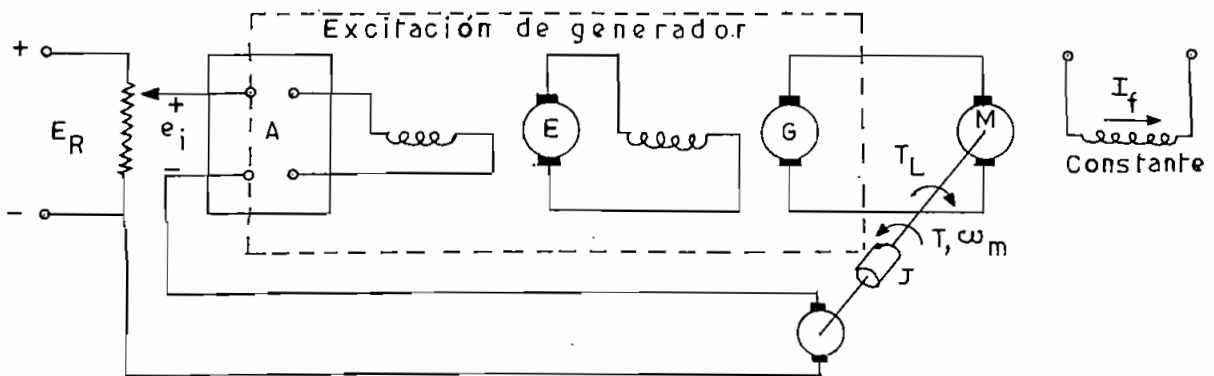


DIAGRAMA (4.3.1)

El diagrama (4.3.1) es esencialmente igual al diagrama del sistema Ward - Leonard. Unicamente hay que considerar el sistema de amplificación y excitación separada y la realimentación tacométrica que se ha intercalado.

Pará K_1 a la ganancia de amplificador, excitación y generador, K_2 constante tacométrica de la relación voltaje-velocidad en el eje en voltios/radián, e_t es el voltaje tacométrico y e_i el voltaje de excitación en el amplificador.

En la ecuación (3).

...ente al generador y teniendo en cuenta la ecuación

$$(4.3.1) \quad E_R = e_t + e_i$$

$$(4.3.2) \quad K_1 e_i = \frac{L_g}{r_g} p e_g + e_g = e_g \left(\frac{L_g}{r_g} p + 1 \right)$$

La ecuación (4.3.2) considera todo lo que ocurre en la parte encerrada en línea de puntos.

El diagrama de bloques del generador será:

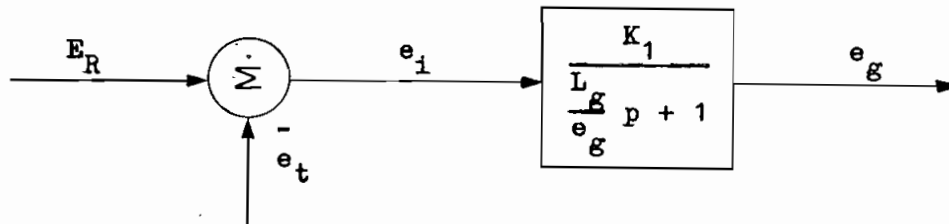


DIAGRAMA (4.3.2)

Teniendo en cuenta que $\tau_g = \frac{L_g}{r_g}$

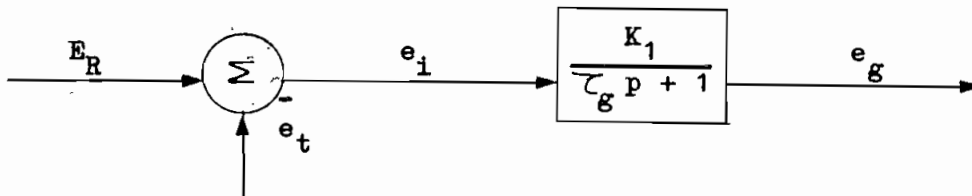


DIAGRAMA (4.3.3)

Y el diagrama del motor será desarrollado en idéntica forma al efectuado en el acápite 3.8.3.

Por consiguiente el diagrama-motor será igual al (3.8.10) que se repro

duce a continuación:

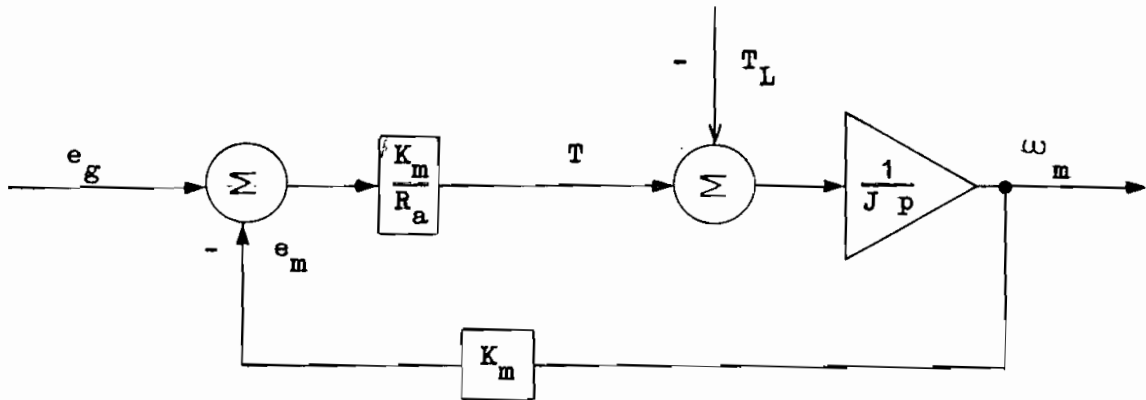


DIAGRAMA (4.3.4)

Y el diagrama simplificado, de acuerdo al diagrama (3.8.19)

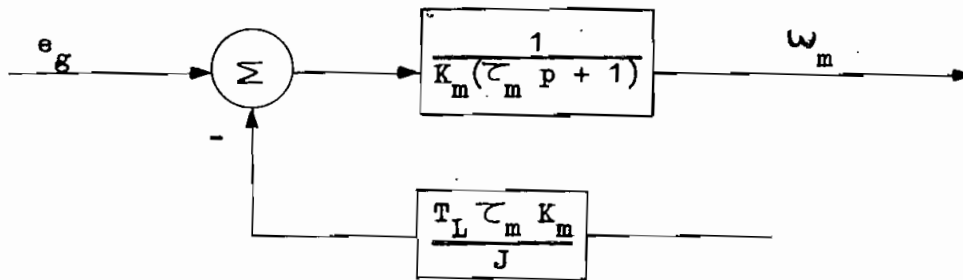


DIAGRAMA (4.3.5)

Y, reduciendo ambos diagrama a uno sólo y tomando en cuenta la constante de ganancia de la realimentación se tendrá el diagrama siguiente:

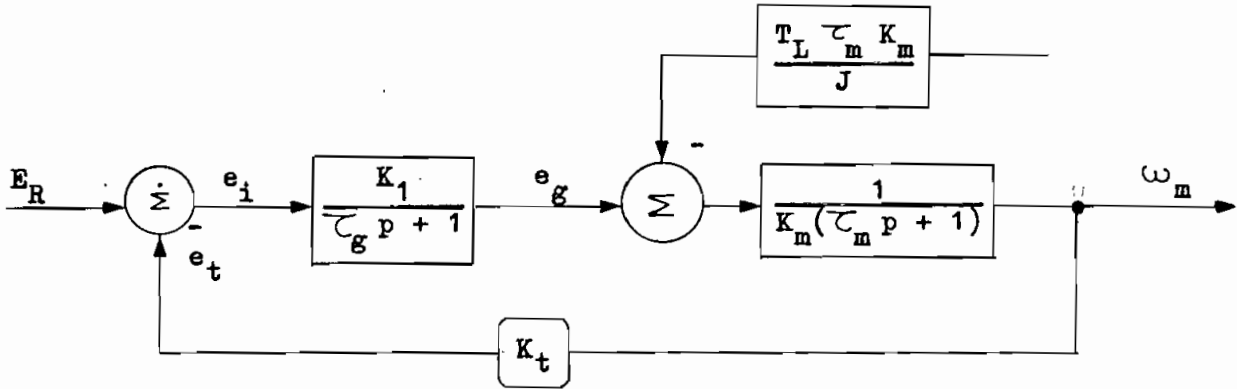


DIAGRAMA (4.3.6)

Aplicando el teorema 5 se tendrá:

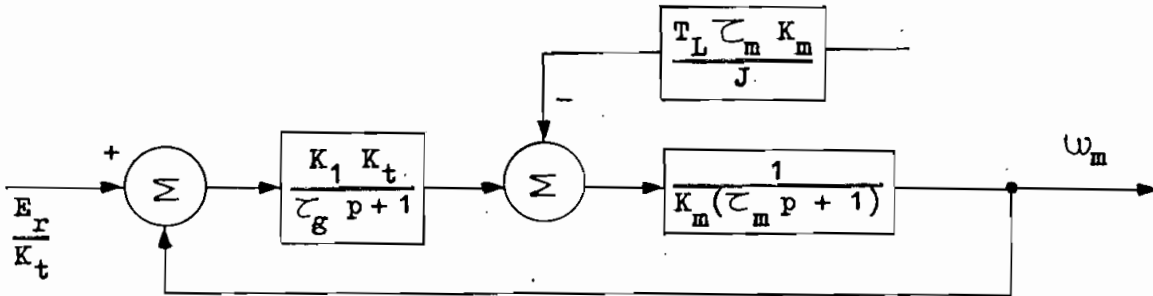


DIAGRAMA (4.3.7)

Haciendo $T_L = 0$ se tendrá:

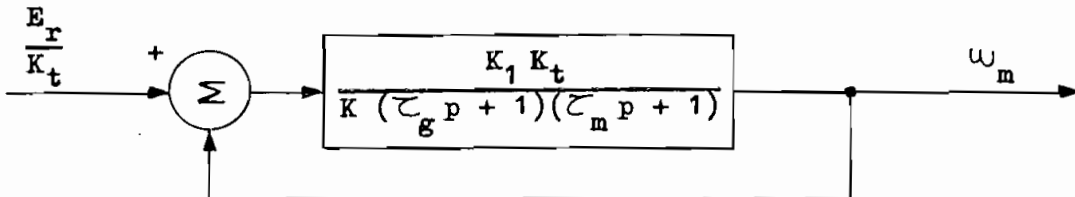


DIAGRAMA (4.3.8)

Desarrollando:

$$(4.3.3) \quad \omega_m = \frac{K_1 K_t}{K_m (\tau_g p + 1)(\tau_m p + 1)} \left(\frac{E_r}{K_t} - \omega_m \right)$$

Multiplicando por paréntesis

$$(4.3.4) \quad \omega_m = \frac{K_1 K_t}{K_m (\tau_g p + 1)(\tau_m p + 1)} \cdot \frac{E_r}{K_t} - \frac{\omega_m K_1 K_t}{K_m (\tau_g p + 1)(\tau_m p + 1)}$$

Pasando el segundo término

$$(4.3.5) \quad \omega_m + \frac{\omega_m K_1 K_t}{K_m (\tau_g p + 1)(\tau_m p + 1)} = \frac{K_1 K_t}{K_m (\tau_g p + 1)(\tau_m p + 1)} \frac{E_r}{K_t}$$

Despejando ω_m

$$(4.3.6) \quad \omega_m \left[1 + \frac{K_1 K_t}{K_m (\tau_g p + 1)(\tau_m p + 1)} \right] = \frac{E_r K_1 K_t}{K_t K_m (\tau_g p + 1)(\tau_m p + 1)}$$

$$(4.3.7) \quad \omega_m = \frac{E_r K_1 K_t}{K_t K_m (\tau_g p + 1)(\tau_m p + 1)} \left[1 + \frac{K_1 K_t}{K_m (\tau_g p + 1)(\tau_m p + 1)} \right]$$

Y finalmente

$$(4.3.8) \quad \omega_m = \frac{E_r K_1 K_t}{K_t [K_m (\tau_g p + 1)(\tau_m p + 1) + K_t K_1]}$$

Reemplazando

$$(4.3.9) \quad K = \frac{K_1 K_t}{K_m} \quad \text{se tendrá}$$

$$(4.3.10) \quad \omega_m = \frac{E_R K_1 K_t}{K_t K_m \left[(\tau_g p + 1)(\tau_m p + 1) + \frac{K_1 K_t}{K_m} \right]}$$

$$(4.3.11) \quad \omega_m = \frac{E_R K}{K_t \left[(\tau_g p + 1)(\tau_m p + 1) + K \right]}$$

$$(4.3.12) \quad \frac{\omega_m}{E_R} = \frac{K}{K_t \left[\tau_g \tau_m p^2 + (\tau_g + \tau_m)p + 1 + K \right]}$$

De la misma manera haciendo $E_R = 0$

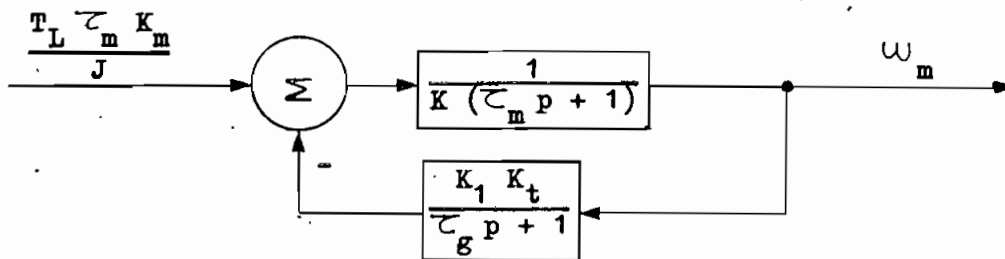


DIAGRAMA (4.3.9)

Aplicando el teorema 4:

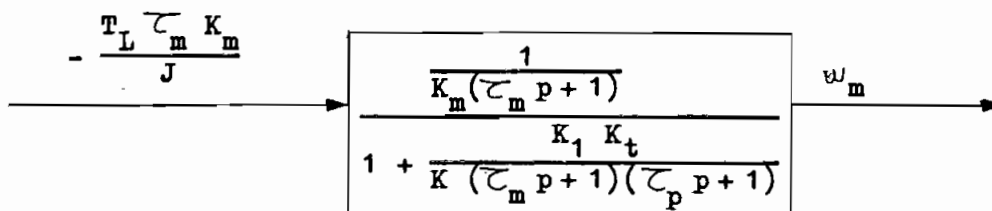


DIAGRAMA (4.3.10)

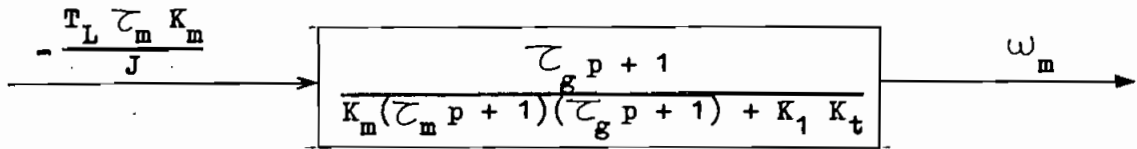


DIAGRAMA (4.3.11)

$$(4.3.13) \quad \omega_m = - \frac{\frac{T_L \tau_m K_m}{J} (\tau_g p + 1)}{K_m (\tau_m p + 1) (\tau_g p + 1) + K_1 K_t}$$

Reemplazando en el numerador $\tau_m = \frac{J R_a}{K_m^2}$

$$(4.3.14) \quad \omega_m = - \frac{\frac{T_L J R_a K_m}{J K_m^2} (\tau_g p + 1)}{K_m (\tau_m p + 1) (\tau_g p + 1) + K_1 K_t}$$

$$(4.3.15) \quad \omega_m = - \frac{\frac{T_L R_a}{K_m} (\tau_g p + 1)}{K_m (\tau_m p + 1) (\tau_g p + 1) + K_1 K_t}$$

$$(4.3.16) \quad \omega_m = - \frac{T_L R_a (\tau_g p + 1)}{K_m^2 [(\tau_m p + 1) (\tau_g p + 1) + K]}$$

$$(4.3.17) \quad \frac{\omega_m}{T_L} = - \frac{R_a (\tau_g p + 1)}{K_m^2 [\tau_g \tau_m p^2 + (\tau_g + \tau_m) p + 1 + K]}$$

Las ecuaciones (4.3.12) y (4.3.17) son ecuaciones diferenciales de se gundo orden y se pueden escribir:

La (4.3.12), así

$$(4.3.18) \quad \frac{K}{K_t} E_R = \omega_m \left[\tau_g \tau_m p^2 + (\tau_g + \tau_m)p + 1 + K \right]$$

Y la (4.3.17), así

$$(4.3.19) \quad - \frac{R_a (\tau_g p + 1) T_L}{K_m^2} = \omega_m \left[\tau_g \tau_m p^2 + (\tau_g + \tau_m)p + 1 + K \right]$$

4.3.1 SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN (14) (15)

En los sistemas de control es frecuente encontrarse con una ecuación del tipo

$$(4.3.20) \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} + n \frac{dy}{dt} + qy = f(t)$$

donde m , n , q son constantes, y es la variable dependiente, t es la variable independiente.

El sistema en reposo implica que $y = 0$, $\frac{dy}{dt} = 0$, $t = 0$; consecuentemente $f(t) = 0$ y de allí en adelante $f(t)$ es un valor constante r .

La ecuación será:

(14) Distefano, Stubberud, Williams, "Feedback and control systems",
pág. 39.

(15) Fitzgerald, pág. 547.

$$(4.3.21) \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} + n \frac{dy}{dt} + qy = r$$

Dividiendo para m :

$$(4.3.22) \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{n}{m} \frac{dy}{dt} + \frac{q}{m} y = \frac{r}{m}$$

Llamaremos

$$(4.3.23) \quad \omega_n^2 = \frac{q}{m}$$

y también

$$(4.3.24) \quad \zeta = \frac{n}{2\sqrt{mq}}$$

Por consiguiente, de la ecuación (4.3.24)

$$(4.3.25) \quad n = 2\zeta\sqrt{mq}$$

y también

$$(4.3.26) \quad q = \omega_n^2 m$$

Reemplazando en (4.3.25)

$$(4.3.27) \quad n = 2\zeta\sqrt{m^2\omega_n^2}$$

$$(4.3.28) \quad n = 2\zeta m \omega_n$$

y la relación n/m será:

$$(4.3.29) \quad n/m = 2\zeta\omega_n$$

La ecuación (4.3.22) quedará

$$(4.3.30) \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \zeta \omega_n \frac{dy}{dt} + \omega_n^2 y = \frac{r}{m}$$

Llamaremos a ω_n coeficiente angular de frecuencia no amortiguada (un damped natural frequency) y al coeficiente ζ , razón de amortiguamiento (damping ratio).

La solución para el estado permanente de la ecuación (4.3.30) será

$$(4.3.31) \quad y_{t=\infty} = \frac{r}{m \omega_n^2}$$

y la ecuación complementaria del régimen transitorio será dada por

$$(4.3.32) \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \zeta \omega_n \frac{dy}{dt} + \omega_n^2 y = 0$$

La solución es de la forma

$$(4.3.33) \quad y = A e^{s t}$$

s se encuentra por sustitución de (4.3.33) en la ec. (4.3.32). Cuando se descarta la posibilidad $A e^{s t} = 0$ la ecuación (4.3.32) se transforma en

$$(4.3.34) \quad s^2 + 2 \zeta \omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

Las raíces de esta ecuación son

$$(4.3.35) \quad s_1 = -\zeta \omega_n + \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}; \quad \text{también}$$

$$(4.3.36) \quad s_2 = -\zeta \omega_n - \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$$

La solución completa de la ecuación (4.3.30) será:

$$(4.3.37) \quad y = y_0 + A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

Las constantes A_1 y A_2 se pueden encontrar de las condiciones iniciales a $t = 0$, $y = 0$, $\frac{dy}{dt} = 0$

La forma final de la ecuación (4.3.37) con la determinación de A_1 y A_2 dependen de que ζ sea menor, igual o mayor que 1.

Cuando $\zeta > 1$ la ecuación (4.3.34) será:

$$(4.3.38) \quad s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

o sea

$$(4.3.39) \quad (s + \zeta\omega_n - j\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2})(s + \zeta\omega_n + j\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}) = 0$$

Las raíces serán:

$$(4.3.40) \quad s_1 = -\zeta\omega_n + j\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

$$(4.3.41) \quad s_1 = -\alpha + j\omega_d ; \text{ y también}$$

$$(4.3.42) \quad s_2 = -\zeta\omega_n - j\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

$$(4.3.43) \quad s_2 = -\alpha - j\omega_d$$

teniendo en cuenta que:

$$(4.3.44) \quad \alpha = \zeta \omega_n \quad \text{coeficiente de amortiguamiento}$$

y también

$$(4.3.45) \quad \omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad \text{o frecuencia natural de amortiguamiento}$$

$$(4.3.46) \quad \tau = \frac{1}{\alpha} \quad \text{constante de tiempo.}$$

Desarrollando la ecuación para este caso: $\zeta < 1$

$$(4.3.37) \quad y = y_{\infty} + A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

Para $t = 0$, $y = 0$, $\frac{dy}{dt} = 0$

$$(4.3.47) \quad 0 = y_{\infty} + A_1 + A_2$$

$$(4.3.48) \quad A_2 = -y_{\infty} - A_1$$

Dividiendo e igualando a cero

$$(4.3.49) \quad \frac{dy}{dt} = 0 + A_1 s_1 e^{s_1 t} + A_2 s_2 e^{s_2 t}$$

$$(4.3.50) \quad A_1 s_1 + A_2 s_2 = 0$$

Reemplazando la ecuación (4.3.48)

$$(4.3.51) \quad A_1 s_1 + (-y_{\infty} - A_1) s_2 = 0$$

$$(4.3.52) \quad A_1 s_1 - y_{\infty} s_2 - A_1 s_2 = 0$$

Despejando A_1 :

$$(4.3.53) \quad A_1 = \frac{y_\infty s_2}{s_1 - s_2}$$

Reemplazando A_1 en (4.3.48) para encontrar A_2 :

$$(4.3.54) \quad A_2 = -y_\infty - \frac{y_\infty s_2}{s_1 - s_2}$$

$$(4.3.55) \quad A_2 = -y_\infty \left(1 + \frac{s_2}{s_1 - s_2} \right)$$

$$(4.3.56) \quad A_2 = -y_\infty \left(\frac{s_1}{s_1 - s_2} \right)$$

Reemplazando las constantes en la ecuación (4.3.37):

$$(4.3.57) \quad y = y_\infty + y_\infty \frac{s_2}{s_1 - s_2} e^{s_1 t} - y_\infty \frac{s_1}{s_1 - s_2} e^{s_2 t}$$

Desarrollando, y dividiendo todo para y_∞ .

$$(4.3.58) \quad \frac{y}{y_\infty} = 1 + \frac{s_2}{s_1 - s_2} e^{s_1 t} - \frac{s_1}{s_1 - s_2} e^{s_2 t}$$

$$(4.3.59) \quad \frac{y}{y_\infty} = 1 + \frac{s_2 e^{s_1 t} - s_1 e^{s_2 t}}{s_1 - s_2}$$

Reemplazando los valores de s_1, s_2 indicados en las ecuaciones

(4.3.41) y (4.3.43), tendremos:

$$(4.3.60) \quad \frac{Y}{Y_{\infty}} = 1 + \frac{(-\alpha - j\omega_d) e^{(-\alpha + j\omega_d)t} - (-\alpha + j\omega_d) e^{(-\alpha - j\omega_d)t}}{-\alpha + j\omega_d + \alpha + j\omega_d}$$

$$(4.3.61) \quad \frac{Y}{Y_{\infty}} = 1 + \frac{-\alpha e^{(-\alpha + j\omega_d)t} - j\omega_d e^{(-\alpha + j\omega_d)t}}{2 j \omega_d} + \frac{\alpha e^{(-\alpha - j\omega_d)t} - j\omega_d e^{(-\alpha - j\omega_d)t}}{2 j \omega_d}$$

$$(4.3.62) \quad \frac{Y}{Y_{\infty}} = 1 + \frac{-\alpha e^{-\alpha t} e^{j\omega_d \cdot t} - j\omega_d e^{-\alpha t} e^{j\omega_d \cdot t}}{2 j \omega_d} + \frac{\alpha e^{-\alpha t} e^{-j\omega_d \cdot t} - j\omega_d e^{-\alpha t} e^{-j\omega_d \cdot t}}{2 j \omega_d}$$

$$(4.3.63) \quad \frac{Y}{Y_{\infty}} = 1 + \frac{\alpha e^{-\alpha t} (e^{-j\omega_d t} - e^{j\omega_d t}) - j\omega_d e^{-\alpha t} (e^{j\omega_d t} + e^{-j\omega_d t})}{2 j \omega_d}$$

$$(4.3.64) \quad \frac{Y}{Y_{\infty}} = 1 + e^{-\alpha t} \left[\frac{\alpha (e^{-j\omega_d t} - e^{j\omega_d t}) - j\omega_d (e^{j\omega_d t} + e^{-j\omega_d t})}{2 j \omega_d} \right]$$

$$(4.3.65) \quad \frac{Y}{Y_{\infty}} = 1 + e^{-\alpha t} \left[\frac{\alpha (e^{-j\omega_d \cdot t} - e^{j\omega_d \cdot t}) - e^{-j\omega_d \cdot t} + e^{-j\omega_d \cdot t}}{2 j \omega_d} \right]$$

$$(4.3.66)$$

$$\frac{Y}{Y_{\infty}} = 1 - e^{-\alpha t} \left(\frac{\alpha}{\omega_d} \operatorname{sen} \omega_d \cdot t + \cos \omega_d \right)$$

$$(4.3.67) \quad \frac{y}{y_{\infty}} = 1 - \frac{e^{-\alpha t}}{\omega_d} (\alpha \operatorname{sen} \omega_d \cdot t + \omega_d \cos \omega_d \cdot t)$$

Reemplazando el valor de α y ω_d por su equivalente de las ecuaciones (4.3.44) y (4.3.45)

$$(4.3.68) \quad \frac{y}{y_{\infty}} = 1 - \frac{e^{-\alpha t}}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} (\omega_n \zeta \operatorname{sen} \omega_d \cdot t + \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \cos \omega_d \cdot t)$$

Simplificando ω_n

$$(4.3.69) \quad \frac{y}{y_{\infty}} = 1 - \frac{e^{-\alpha t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} (\zeta \operatorname{sen} \omega_d \cdot t + \sqrt{1 - \zeta^2} \cos \omega_d \cdot t)$$

Haciendo una reducción trigonométrica de acuerdo al dibujo adjunto:

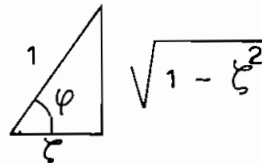


DIAGRAMA (4.3.12)

Del diagrama se puede deducir que:

$$(4.3.70) \quad \zeta = \cos \varphi$$

$$(4.3.71) \quad \sqrt{1 - \zeta^2} = \operatorname{sen} \varphi$$

Reemplazando estos valores

$$(4.3.72) \quad \frac{y}{y_{\infty}} = 1 - \frac{e^{-\zeta \omega_n \cdot t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} (\cos \varphi \operatorname{sen} \omega_d \cdot t + \operatorname{sen} \varphi \cos \omega_d \cdot t)$$

El paréntesis es el seno de la suma de dos ángulos.

$$(4.3.73) \quad \frac{y}{y_0} = 1 - \frac{e^{-\zeta \omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \operatorname{sen}(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t + \varphi)$$

Donde

$$(4.3.74) \quad \varphi = \operatorname{arc} \cos \zeta$$

Ahora desarrollamos para $\zeta = 1$.

La solución será de la forma:

$$(4.3.75) \quad y = A_1 + A_2 e^{-\omega_n t} + A_3 t e^{-\omega_n t}$$

Reemplazando el valor de $\zeta = 1$ en las raíces s_1 y s_2 de las ecuaciones (4.3.40) y (4.3.42), tendremos que

$$(4.3.76) \quad s = -\omega_n$$

Para $y = 0$, $t = 0$; $\frac{dy}{dt} = 0$

Derivando la ecuación (4.3.75):

$$(4.3.77) \quad \frac{dy}{dt} = 0 - A_2 \omega_n e^{-\omega_n t} - A_3 t \omega_n e^{-\omega_n t} + A_3 e^{-\omega_n t}$$

Igualando a cero (4.3.75) y reemplazando $t = 0$

$$(4.3.78) \quad 0 = A_1 + A_2$$

Igualando a cero (4.3.77) y reemplazando $t = 0$

$$(4.3.79) \quad 0 = A_2 \omega_n - A_3$$

Asumimos que $A_1 = y_0$, y tendremos

$$(4.3.80) \quad A_2 = -y_0$$

$$(4.3.81) \quad A_3 = -y_\infty \omega_n$$

La ecuación (4.3.75) para $\zeta = 1$ quedará:

$$(4.3.82) \quad y = y_\infty - y_\infty e^{-\omega_n \cdot t} - y_\infty \omega_n \cdot t e^{-\omega_n \cdot t}$$

y finalmente

$$(4.3.83) \quad \frac{y}{y_\infty} = 1 - e^{-\omega_n \cdot t} (1 + \omega_n \cdot t)$$

y cuando $\zeta > 1$ tendremos:

La ecuación (4.3.75)

$$y = y_\infty + A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

Las raíces s_1 y s_2 salen de la ecuación (4.3.38)

$$(4.3.38) \quad s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

y éstas serán:

$$(4.3.84) \quad s_1 = -\zeta \omega_n + \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$$

$$(4.3.85) \quad s_2 = -\zeta \omega_n - \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$$

Reemplazando por los valores de la ecuación (4.3.44)

$$(4.3.44) \quad \alpha = \zeta \omega_n$$

$$(4.3.86) \quad \omega'_d = \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$$

$$(4.3.87) \quad s_1 = -\alpha + \omega'_d$$

$$(4.3.88) \quad s_2 = -\alpha - \omega'_d$$

Igualmente hacemos a $t = 0$, $y = 0$, $\frac{dy}{dt} = 0$.

$$(4.3.89) \quad y = y_\infty + A_1 e^{(-\alpha + \omega'_d)t} + A_2 e^{-(\alpha + \omega'_d)t}$$

Igualando a cero y , también t :

$$(4.3.90) \quad 0 = y_\infty + A_1 + A_2$$

$$(4.3.91) \quad A_1 = -y_\infty - A_2$$

Derivando (4.3.89)

$$(4.3.92) \quad \frac{dy}{dt} = 0 + A_1(-\alpha + \omega'_d) e^{(-\alpha + \omega'_d)t} - A_2(\alpha + \omega'_d) e^{-(\alpha + \omega'_d)t}$$

Igualando a cero t , $\frac{dy}{dt}$:

$$(4.3.93) \quad 0 = A_1(-\alpha + \omega'_d) - A_2(\alpha + \omega'_d)$$

Reemplazando A_1 de la ecuación (4.3.91)

$$(4.3.94) \quad 0 = -(y_\infty + A_2)(-\alpha + \omega'_d) - A_2(\alpha + \omega'_d)$$

Desarrollando:

$$(4.3.95) \quad 0 = -(-\alpha y_\infty - \alpha A_2 + y_\infty \omega'_d + A_2 \omega'_d) - A_2 \alpha - A_2 \omega'_d$$

$$(4.3.96) \quad 0 = \alpha y_\infty - y_\infty \omega'_d - 2 A_2 \omega'_d$$

$$(4.3.97) \quad 2 A_2 \omega'_d = y_\infty (\alpha - \omega'_d)$$

$$(4.3.98) \quad A_2 = y_\infty \frac{\alpha' - \omega_d'}{2 \omega_d'}$$

Reemplazando A_2 en la ecuación (4.3.91)

$$(4.3.99) \quad A_1 = - \left(y_\infty + y_\infty \frac{\alpha' - \omega_d'}{2 \omega_d'} \right)$$

y, finalmente:

$$(4.3.100) \quad A_1 = - y_\infty \left(\frac{\omega_d' + \alpha}{2 \omega_d'} \right)$$

Reemplazando en la ecuación (4.3.75) los valores A_1 y A_2 tendremos:

$$(4.3.101) \quad y = y_\infty - y_\infty \left(\frac{\omega_d' + \alpha}{2 \omega_d'} \right) \epsilon^{s_1 t} + y_\infty \left(\frac{\alpha - \omega_d'}{2 \omega_d'} \right) \epsilon^{s_2 t}$$

$$(4.3.102) \quad \frac{y}{y_\infty} = 1 - \frac{1}{2 \omega_d'} \left[(\omega_d' + \alpha) \epsilon^{s_1 t} + (\alpha - \omega_d') \epsilon^{s_2 t} \right]$$

Reemplazando α y ω_d

(4.3.103)

$$\frac{y}{y_\infty} = 1 - \frac{1}{2 \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}} \left[(\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} + \zeta \omega_n) \epsilon^{(-\zeta \omega_n + \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}) t} + (\zeta \omega_n - \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}) \epsilon^{-(\zeta \omega_n + \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}) t} \right]$$

Simplificando ω_n

(4.3.104)

$$\frac{y}{y_{\infty}} = 1 - \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left[(\sqrt{\zeta^2 - 1} + \zeta) e^{(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n \cdot t} + (\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}) e^{-(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n \cdot t} \right]$$

Reduciendo a la conjugada de los radicales tendremos finalmente:

(4.3.105)

$$\frac{y}{y_{\infty}} = 1 - \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left(\frac{e^{(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n \cdot t}}{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}} - \frac{e^{(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n \cdot t}}{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}} \right)$$

Los resultados obtenidos permiten establecer las curvas de las soluciones normalizadas de la ecuación diferencial de segundo orden, para condiciones iniciales de reposo.

La familia de curvas representadas en el diagrama (4.3.13) ha sido obtenida para distintos valores del coeficiente de amortiguamiento ζ .

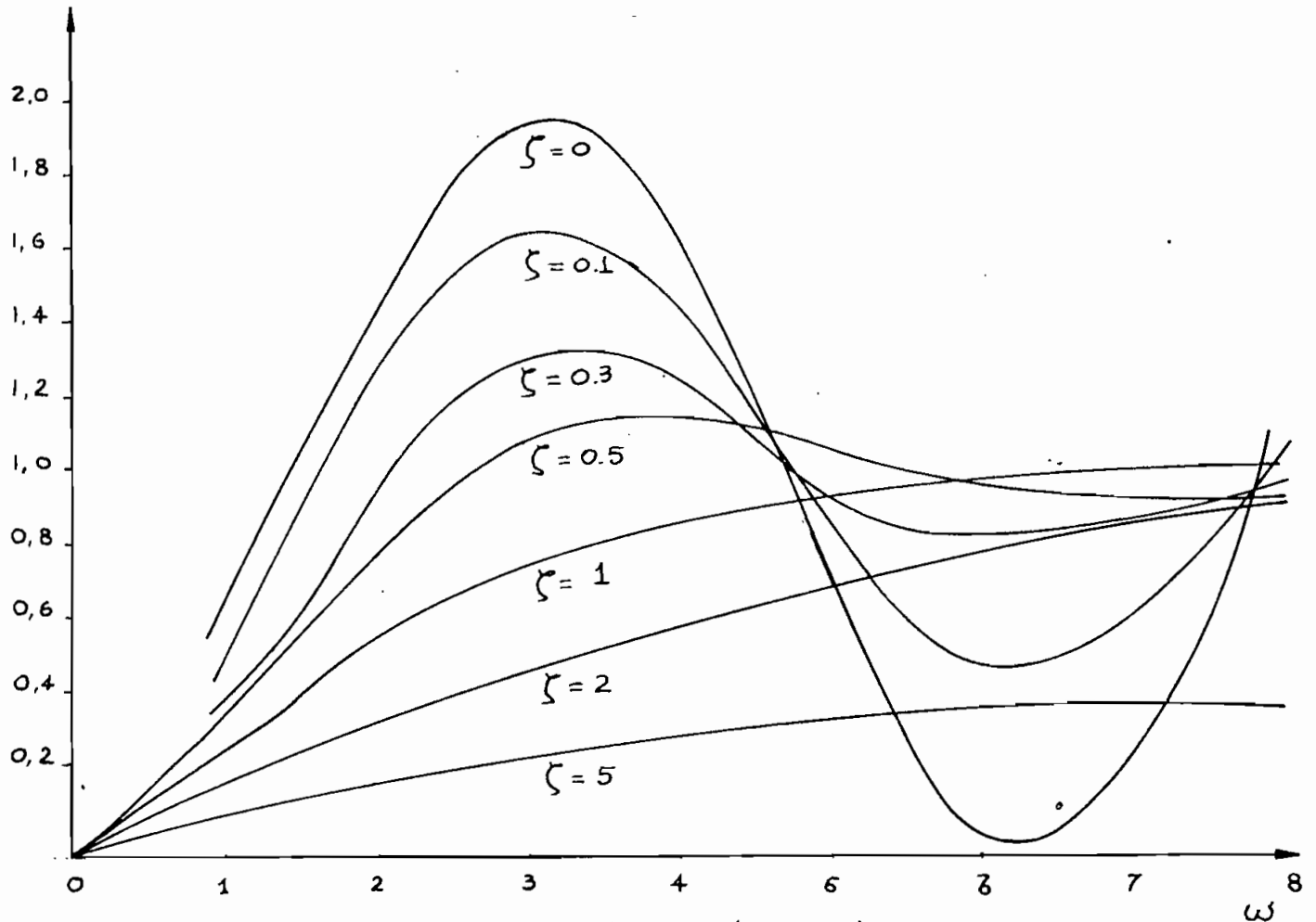


DIAGRAMA (4.3.13)

Soluciones normalizadas para distinto factor ζ de la ecuación diferencial de segundo orden, para condiciones iniciales.

4.3.2 ANALISIS DE LA ECUACION DIFERENCIAL DE SEGUNDO ORDEN DEL CONTROL DE VELOCIDAD

Vamos a examinar las ecuaciones (4.3.18) y (4.3.19) con los datos de cálculo estudiados en el acápite 4.3.1.

En las ecuaciones indicadas el operador p puede reemplazarse por el factor de frecuencia compleja s . Los valores ω_m , E_R y T_L serán las amplitudes complejas y las ecuaciones en s pueden tomar una solución algebraica.

Tomando la ecuación (4.3.18), igualando a cero y reemplazando p por s , se tendrá:

$$(4.3.106) \quad \tau_g \tau_m s^2 + (\tau_g + \tau_m) s + 1 + K = 0$$

y también

$$(4.3.107) \quad s^2 + \frac{\tau_g + \tau_m}{\tau_g \tau_m} s + \frac{1 + K}{\tau_g \tau_m} = 0$$

De acuerdo con la relación (4.3.23)

$$(4.3.108) \quad \omega_n^2 = \frac{1 + K}{\tau_g \tau_m}$$

que es la frecuencia natural sin amortiguación y el factor α de amortiguación será: De acuerdo con la ecuación (4.3.44)

$$(4.3.109) \quad \alpha = \zeta \omega_n = \frac{\tau_g + \tau_m}{2 \tau_g \tau_m}$$

La relación de amortiguación será:

$$(4.3.110) \quad \zeta = \frac{\alpha}{\omega_n}$$

Cuando $\zeta < 1$, conforme las ecuaciones (4.3.41) y (4.3.42) se tiene las soluciones:

$$(4.3.111) \quad s_1 = -\alpha + j\omega_d$$

$$(4.3.112) \quad s_2 = -\alpha - j\omega_d$$

y conforme la ecuación (4.3.45):

$$(4.3.113) \quad \omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

De la ecuación (4.3.18) que se reproduce con el numeral (4.3.114)

$$(4.3.114) \quad \frac{K}{K_t} E_R = \omega_m \left[\tau_g \tau_m p^2 + (\tau_g + \tau_m) p + 1 + K \right]$$

se puede deducir el estado final permanente para $p = 0$, así, con una entrada de tensión E_R

$$(4.3.115) \quad \frac{K}{K_t} E_R = \omega_m (1 + K)$$

Así, la relación $\Delta \omega_m / \Delta E_R$ será para $t = \infty$

$$(4.3.116) \quad \frac{\Delta \omega_m}{\Delta E_R} = \frac{K}{K_t (1 + K)}$$

y las condiciones iniciales de reposo dependerán del factor ζ según las curvas normalizadas del diagrama (4.3.13). A un torque T_L determinado, la ecuación (4.3.17) que se reproduce con el numeral (4.3.117)

$$(4.3.117) \quad \frac{\omega_m}{T_L} = - \frac{R_a (\tau_g p + 1)}{K_m^2 \left[\tau_g \tau_m p^2 + (\tau_g + \tau_m) p + 1 + K \right]}$$

Igualando $p = 0$

$$(4.3.118) \quad \frac{\Delta \omega_m}{\Delta T_L} = \frac{R_a}{K_m^2 (1 + K)}$$

(16) "Para el mejor funcionamiento, el sistema deberá ser insensible a cambios del torque de carga T_L . Esto significa que R_a será tan pequeña como sea posible y K_m tan grande como sea posible. El motor debe operar al máximo de flujo permisible. También K_1 y K_t serán lo más grande que se pueda. K_1 es proporcional a la ganancia del amplificador, aumentando la ganancia, por tanto resiste el sistema contra los disturbios de la carga. Aumentando la ganancia del amplificador se tienen, sin embargo, efectos indeseables en el funcionamiento dinámico. Se puede observar que en las ecuaciones (4.3.108) y (4.3.110) aumentando la ganancia aumenta la frecuencia natural ω_n y decae el factor de amortiguamiento ζ ; o sea que el sistema oscila rápidamente y por amplitudes extremas. La estabilidad relativa es pobre. Las componentes pueden agotarse rápidamente. En sistemas más complicados con tres o más retardos de tiempo mucha ganancia puede traer absoluta inestabilidad aumentando las oscilaciones exponencialmente. En la práctica se ha encontrado que la ganancia resulta conveniente para relaciones de amor-

(16) Fitzgerald, pág. 188.

tiguación ζ entre 0,4 y 0,7. Si la amplificación recta no da satisfactorios resultados, se añaden sistemas de compensación, por medio de elementos de realimentación.

Otras propiedades básicas del sistema se pueden anotar. La ecuación (4.3.109) muestra que el factor de amortiguación α que da el descenso de la envolvente de las oscilaciones se fija enteramente por el generador, motor y carga. Así el tiempo en segundos para el sistema que se utiliza, es proporcional a $\frac{1}{\alpha}$ y es independiente de la ganancia, depende enteramente de las máquinas y de la carga".

4.3.3 SISTEMA WARD - LEONARD. CONSTANTES DE FUNCIONAMIENTO

En el acápite 4.2.2, están deducidos los valores de las constantes. Utilizaremos estos mismos valores para aplicar al sistema con realimentación por control de velocidad tacométrico.

Tomamos un valor promedio de $r_g = 250 \Omega$

El voltaje E_R de la fuente es $E_R = 440 \text{ V}$.

La potencia del motor nominal es $P = 170 \text{ Kw}$.

Se fija la resistencia de armadura $R_a = 1,3 \Omega$

La velocidad a funcionamiento constante es

para el funicular 3 m/s y

para el motor $n = 600 \text{ r.p.m.}$

Constante de tiempo: generador

Constante de tiempo: motor

$$\omega_a = 62,8 \text{ 1/s.}$$

$$\tau_g = 0,5 \text{ seg.}$$

$$\tau_m = 1 \text{ seg.}$$

Torque máximo a plena carga

$$T_L = 3.528 \text{ New-m.}$$

Constante del generador

$$K_g = 100 \text{ Volt/amp exc.}$$

Constante del motor K_m

determinamos a partir de la ecuación (3.8.9)

$$(4.3.119) \quad K_m = \frac{e_m}{\omega_m}$$

$$\text{Por consiguiente } K_m = \frac{440}{62,8} = 7 \text{ volt-seg/rad.}$$

De acuerdo con el valor de la constante de tiempo $\tau_m = \frac{J R_a}{K_m^2}$ y el

momento de inercia $J = 38 \text{ Kg-m}^2$, se comprueba que

$$\tau_m = \frac{38 \cdot 1,3}{49} = 1 \text{ seg.}$$

Fijamos la relación de amortiguamiento $\zeta = 0,5$.

El valor de α , de acuerdo a la ecuación (4.3.109)

$$\alpha = \frac{\tau_g + \tau_m}{2 \tau_g \tau_m}$$

$$\alpha = \frac{0,5 + 1}{2 \times 0,5}$$

$$\alpha = 1,5 \text{ 1/seg.}$$

De la ecuación (4.3.110) se puede deducir el valor de ω_n

$$\omega_n = \frac{1,5}{\zeta} = \frac{1,5}{0,5} = 3 \text{ rad/seg}$$

Y de la ecuación (4.3.108) tendremos:

$$\omega_n^2 = \frac{1 + K}{\tau_g \tau_m}$$

$$1 + K = \omega_n^2 \tau_g \tau_m$$

$$1 + K = 3^2 \times 0,5 \times 1 = 4,5$$

$$1 + K = 4,5$$

$$K = 3,5$$

De la ecuación (4.3.118) el cambio de velocidad para el cambio de torque $\Delta L = 3.528$ New-m. será

$$\Delta \omega_m = - \frac{R_a \Delta T_L}{K_m^2 (1 + K)}$$

$$\Delta \omega_m = - \frac{1,3 \times 3.528}{49(1 + 3,5)}$$

$$\Delta \omega_m = - \frac{4.580}{49 \times 4,5}$$

$$\Delta \omega_m = - \frac{4.580}{220}$$

$$\Delta \omega_m = - 20,8 \text{ rad/seg.}$$

4.3.4 CONCLUSION

A lo largo de esta tesis se ha efectuado un análisis del funcionamiento mecánico y eléctrico del funicular a Cruz Loma. Todavía han quedado al margen otros aspectos del sistema eléctrico como son los sistemas de protección, el rendimiento general y el factor de potencia, la potencia devuelta a la red, instalaciones, eléctricas, sistemas de comunicación, equipo de emergencia, tablero de señales, cámara de transformación, etc.; que bien podrían servir para otro tema de tesis.

Evidentemente pueden quedar aún otros puntos a desarrollarse o puntos inconclusos dentro de este mismo estudio pero el profundizar más en ellos puede ocasionar el peligro de que la tesis se convierta en un tratado y esto no es el objeto de una tesis.

Se puede pues concluir, que el sistema más apto para el funicular a Cruz Loma es un equipo Ward - Leonard que permite todo tipo de maniobra con regulación rápida y fina. Las especificaciones del sistema se deberán hacer de acuerdo a los requerimientos de potencia y energía del funicular que se han estudiado ya con sobrada amplitud en los capítulos de esta tesis.

BIBLIOGRAFIA. Capítulo IV

1. Hütte, Manual del Ingeniero, Editorial Gustavo Gili, Barcelona,

- 1950, 2a. Edición, Tomos II y III.
2. Ing. Oscar Puig, Funicular a Cruz Loma, 1966, Tomo I
 3. Hans Teuchert, La Escuela del Técnico Electricista, Editorial Labor, 1952, Tomo XI.
 4. Fitzgerald, Kingsley Jr. "Electric Machinery" Mc Graw Hill Book Company Inc., Koga Kusha Company, Tokyo, 2a. Edition, 1961.
 5. Murray R. Spiegel, Laplace Transforms, Schaum's Outline Series, Schaum Publishing Co. N Y, 1965.
 6. Frank Ayres Jr., Differential Equations, Schaum's Outline Series, Schaum Publishing Co. NY, 1952.
 7. F. M. Raven, Automatic Control Engineering, F. H. Raven, Mc Graw Hill Book, Company Inc. Koga Kusha, Tokyo, 1961.
 8. Moeller - Werr, "Electrotecnia General Aplicada", Editorial Labor, Barcelona, 1961, Tomo II, 2a. Edición.
 9. Shigley Edward, "Theory of machines", Mc Graw Hill Book, Editorial Novarro México, S.A., México, 1961.
 10. Distefano, Stubberud, Williams, "Feedback and control systems", Schaum's Outline Series, Schaum publishing Co. N Y, 1967.