

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL  
FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA

TESIS DE GRADO


"ESTUDIO DE LAS ARMONICAS EN MAQUINAS  
DE INDUCCION Y DE CORRIENTE CONTINUA"

TESIS PREVIA A LA OBTENCION DEL  
TITULO DE INGENIERO ELECTRICO EN  
LA ESPECIALIZACION DE POTENCIA.

EDUARDO MANZANO SALAZAR

QUITO, JULIO DE 1981

Certifico que el presente tra  
bajo ha sido elaborado en su  
totalidad por el señor Eduardo  
Manzano Salazar.



ING. MILTON TOAPANTA O.

Director de Tesis

# I N D I C E

## PAGINA

### CAPITULO I

1.1	Justificación del estudio	1
1.2	Objetivos y alcances	2

### CAPITULO II

#### "MAQUINAS DE INDUCCION"

2.1	Resumen teórico	4
2.1.1	Principio de funcionamiento de una máquina asíncrona.	4
2.1.2	Regímenes de funcionamiento de la máquina asíncrona.	5
2.1.3	Relaciones principales. Momento electromagnético de una máquina asíncrona.	9
2.1.4	Ecuaciones de Kirchhoff de la máquina de inducción.	12
2.1.5	Principales tipos de rotores. Sus características.	13
2.2	Estudio de las armónicas en la curva de f.m.m. del estator.	15
2.2.1	Máquina monofásica bipolar.	16
2.2.2	Máquina monofásica multipolar.	21

	<u>PAGINA</u>
2.2.3	Máquina polifásica multipolar. 22
2.2.4	Velocidad de propagación de la onda viajera 26
2.3	Inducción de armónicas en el rotor 28
2.3.1	Inducción de armónicas en el rotor devanado. 32
2.3.2	Inducción de armónicas en el rotor jaula de ardilla. 37
2.4	Armónicas de ranura 38
2.4.1	Longitud de onda de las armónicas de ranura. 40
2.5	Problemas ocasionales por las armónicas en la máquina de inducción. Modos de solución. 43
2.5.1	Pares motores parásitos asíncronos. 43
2.5.2	Mecanismos de eliminación de armónicas. 67
2.5.3	Pares motores síncronos parásitos. 82
2.5.4	Mecanismos de eliminación de pares motores síncronos. 94
2.6	Conclusiones y recomendaciones 98

### CAPITULO III

#### "MAQUINAS DE CORRIENTE CONTINUA"

3.1	Introducción teórica. 104
3.1.1	Principio de funcionamiento. 104
3.1.2	Elementos fundamentales de la construcción de una máquina de corriente continua. 111
3.2	Estudio de la curva de magnetización. 112

3.2.1	Descomposición en Serie de Fourier de la curva de inducción.	117
3.3	Voltaje inducido debido a la primera y tercera armónica de la inducción polar.	122
3.3.1	Conclusiones acerca del voltaje inducido entre escobillas y el momento electromagnético	136
3.4	Distorsión de la curva de inducción debido a la reacción de armadura.	136
3.4.1	Consecuencias de la distorsión de la curva de inducción.	142
3.4.2	Cálculo de la inducción magnética debida a la reacción del inducido.	149
3.5	Mecanismos para mejorar la forma de la curva de inducción magnética.	160
3.5.1	Polos Auxiliares.	160
3.5.2	Arrollamiento de compensación.	162
3.6	Conclusiones y recomendaciones.	164

APENDICES

APENDICE 1.	Factores de Distribución, paso e inclinación.	169
APENDICE 2.	Conmutación.	182
BIBLIOGRAFIA.		

C A P I T U L O I

1.1 JUSTIFICACION DEL ESTUDIO.

Nuestro país pertenece al conglomerado latinoamericano, que junto con muchos países del orbe sufre las consecuencias de la dependencia económica de las grandes metrópolis y sus multinacionales. Tal dependencia nos impone graves consecuencias en el ámbito cultural, científico y tecnológico. Prueba de ello es el bajo nivel académico imperante en nuestras instituciones educativas, la escasa investigación científica y una transferencia tecnológica injusta, puesto que, como ha sido analizado en muchos tratados alusivos al tema, la transferencia tecnológica reinante en Occidente solo tiende a asegurar la reproducción del capital invertido, mediante condiciones desfavorables para los países subdesarrollados, y en beneficio de las poderosas transnacionales, ávidas de cada vez mayores ganancias. Esta transferencia, por tanto, no persigue la capacitación de grandes sectores en la elaboración de tecnología apropiada para la solución de sus problemas, sino que por el contrario, se limita a vender paquetes tecnológicos, (muchos de ellos "llave en mano"), que sean dirigidos hacia las áreas más rentables y que por consiguiente lesionan la independencia del país comprador. Es por esto, que en los países subdesarrollados como Ecuador, no se construyen en forma cabal y completa artículos de mediana y alta

tecnología como máquinas para la industria, computadores, etc. El técnico, bajo este esquema, se dedica únicamente a ser interpretador de la tecnología importada, que en algunos casos se encarga de su mantenimiento, montaje y coordinación, pero jamás de su construcción y diseño.

La labor del técnico, si desea luchar desde su campo contra el actual panorama tecnológico, debe impulsar la investigación técnica-científica y la formación de una infraestructura que permita el diseño y construcción de la maquinaria que es necesaria para nuestro país.

Es en este contexto que debe enmarcarse la justificación del presente tema de tesis, puesto que al realizar el estudio de las armónicas en algunas máquinas eléctricas, exterioriza el complejo de fenómenos electromagnéticos que se dan en el mundo interno de la máquina y delinea parámetros importantes que deben ser tomados en cuenta en el diseño y construcción de la máquina eléctrica.

## 1.2 ALCANCES Y OBJETIVOS.

En vista que este tema es bastante amplio en su cuerpo teórico y puede anlazarse con otras particularidades del estudio de la máquina eléctrica, se tratará de sistematizar y desarrollar el comportamiento de las armónicas en las máquinas de inducción y de corriente continua, encontrando ecuaciones

matemáticas que describan el valor de los parámetros de la máquina al reaccionar ante las armónicas, comparando con el valor de estos parámetros frente a la armónica fundamental. Además, se calcularán las pérdidas de potencia que ocasionan esas armónicas, los motivos de su aparición en el esquema electromagnético de la máquina y sus efectos en la curva general de par-motor. Finalmente se propondrá el desarrollo de varios tópicos que pueden aprovecharse del contenido de esta tesis.



C A P I T U L O      I I

MAQUINAS DE INDUCCION

2.1 RESUMEN TEORICO.

2.1.1 PRINCIPIO DE FUNCIONAMIENTO DE UNA MAQUINA ASINCRONA.

El funcionamiento de una máquina asíncrona se basa en el principio de la interacción electromagnética entre el campo magnético giratorio, creado por un sistema de corriente trifásica suministrada desde la red al devanado del estator, y las corrientes que se inducen en el devanado del rotor cuando el campo giratorio cruza sus hilos conductores. Así pues, el trabajo de la máquina asíncrona por su esencia física es semejante al funcionamiento de un transformador considerando el estator como devanado primario y el rotor como secundario que, en el caso general, puede girar a una velocidad  $n$ .

Cuando el campo giratorio tiene carácter sinusoidal su velocidad de rotación en r.p.m. es:

ec. 2-1      
$$n_1 = \frac{f}{p/2} \times 60$$

$f$  es la frecuencia de la red en  $\frac{c}{s}$   
 $p$  es el número de polos de la máquina.

La interacción electromagnética entre ambas partes de la máquina asíncrona sólo es posible cuando las velocidades del campo giratorio ( $n_1$ ) y del rotor ( $n$ ) son distintas, es decir a condición de que  $n \neq n_1$ , puesto que si  $n = n_1$  el campo sería inmóvil con respecto al rotor y en el devanado del rotor no se induciría corriente alguna.

Una relación importante que debemos definir es la del deslizamiento  $S$ .

ec. 2-2

$$S = \frac{n_1 - n}{n_1}$$

### 2.1.2 REGIMENES DE FUNCIONAMIENTO DE LA MAQUINA ASINCRONA.

Según cual sea la relación entre las velocidades  $n_1$  y  $n$  la máquina asíncrona puede funcionar en: a) régimen de motor, b) régimen de generador, y c) régimen de freno electromagnético. A continuación se analiza brevemente las particularidades de cada uno de estos regímenes.

#### A. Funcionamiento de la Máquina Asíncrona en régimen de Motor.

Al conectar el estator a una red de corriente trifásica y dejando al rotor bobinado en circuito abierto, la velocidad del rotor es lógicamente  $n = 0$  y representa en estas condiciones a un transformador en régimen de marcha en vacío. El campo

magnético del estator gira con respecto al rotor a una velocidad  $n_1$ , e induce en el devanado del rotor una f.e.m.  $E_2$  que tiene la misma frecuencia  $f$  que la red y de dirección determinada por la regla de la mano derecha.

Si ahora se cierra el circuito del rotor, por el devanado del rotor circulará una corriente  $I_2$  cuya componente activa coincide en sentido con el de la f.e.m.  $E_2$ . Como resultado de la interacción del flujo creado por esta corriente (líneas de trazos en la Fig. 2-1, a) con el flujo del estator se formará el flujo resultante representado en la Fig. 2-1, b. Se ve que en estas condiciones, la fuerza  $F_0$ , aplicada al hilo conductor a, crea en el árbol de la máquina un momento que tiende a girar el rotor en el sentido de giro del flujo. El conjunto de los momentos creados por cada hilo conductor forma el momento de rotación resultante  $M$  de la máquina; si este momento es mayor que el par de frenado en el árbol, el rotor comenzará a girar y adquirirá una cierta velocidad  $n$ . En este caso la energía eléctrica aplicada al estator desde la red se convierte en energía mecánica en el árbol, es decir, la máquina funcionará como motor.

La velocidad  $n$  del motor depende de la carga del último. Durante la marcha en vacío la velocidad  $n$  es casi igual a  $n_1$ , pero no la alcanzará nunca, puesto que si  $n = n_1$ , entonces la máquina no podrá funcionar como motor.

Así pues, la máquina asíncrona funciona como motor cuando la velocidad se halla entre los límites de  $n = 0$  hasta  $n = n_1$ , es decir, cuando el deslizamiento está comprendido en:

$$0 < s \leq 1$$

B. Funcionamiento de la máquina asíncrona en régimen de generador.

Supóngase que con un motor primario se acelera al rotor de la máquina asíncrona de tal modo que  $n$  resulte mayor que  $n_1$ . En este caso el deslizamiento se hace negativo y el sentido de rotación del flujo con respecto al rotor cambia al inverso que tenía la máquina cuando funcionaba como motor. En correspondencia con esto cambia el sentido de la f.e.m. y de la corriente en el hilo conductor  $a$ , y también el signo del momento en el árbol (Fig. 2-1,c). Por consiguiente, el momento desarrollado por la máquina asíncrona se convierte en par de frenado con respecto al momento de rotación del motor primario. En estas condiciones la máquina asíncrona funciona co

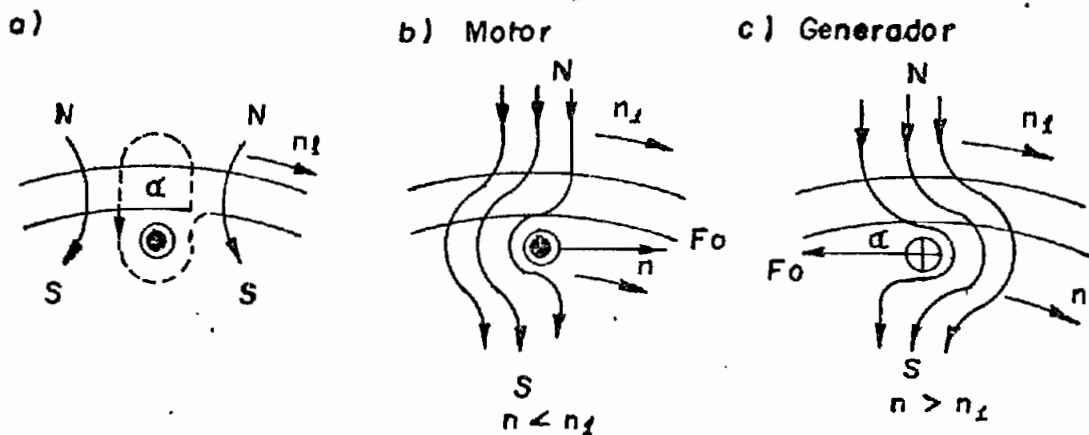


Fig. 2-1 Principio de funcionamiento de una máquina asíncrona en regímenes de motor y generador.

mo generador convirtiendo la energía mecánica, aplicada a ella desde el árbol del motor primario, en energía eléctrica que ésta entrega a la red.

Teóricamente el rotor puede ser acelerado con respecto al flujo giratorio en cualesquiera límites. Por consiguiente, cuando la máquina asíncrona funciona como generador el deslizamiento está dado por:

$$0 \leq -s < \infty$$

En la práctica el paso del régimen de funcionamiento como motor al de funcionamiento como generador es posible, por ejemplo, al bajar la carga de una grúa, durante la marcha de un tren cuesta abajo, etc.

### C. Funcionamiento de la máquina asíncrona en régimen de freno electromagnético.

Se supone que bajo la acción de algún factor exterior el rotor de la máquina asíncrona comienza a girar en sentido contrario al del flujo magnético. En este caso a la máquina asíncrona se le aplica energía desde dos fuentes: energía eléctrica desde la red y energía mecánica desde el motor primario. Este régimen de funcionamiento se llama régimen de freno electromagnético. Este comienza cuando  $n = 0$ , y teóricamente puede continuar hasta que  $n = -\infty$ . Por consiguiente, cuando la máquina asíncrona funciona en régimen de freno, el

deslizamiento se encuentra dentro de los límites de  $s = + 1$  hasta  $s = \frac{n_1 - (-\infty)}{n_1} = +\infty$ .

### 2.1.3 RELACIONES PRINCIPALES. MOMENTO ELECTROMAGNETICO DE UNA MAQUINA ASINCRONA.

En la máquina asíncrona el rotor gira con respecto al campo magnético, a una velocidad igual a  $n_1 - n$ . Por eso las f.e.m. inducidas en el rotor tienen una frecuencia de deslizamiento igual a:

$$\text{ec. 2-3} \quad f_2 = \frac{p}{2} \left( \frac{n_1 - n}{60} \right) = \left( \frac{p}{2} \right) \left( \frac{n_1}{60} \right) \left( \frac{n_1 - n}{n_1} \right) = f s \quad (\text{ver ec.2-1})$$

Se considera que en el entrehierro de la máquina el flujo magnético resultante es constante ( $\phi = \text{const}$ ). Sea  $E_2$  la f.e.m. inducida en el devanado del rotor y  $x_2 = 2\pi f L_2$ , la inductancia de dispersión del devanado cuando el rotor está inmóvil, es decir, cuando el deslizamiento  $s = 1$ . Entonces, al girar el rotor, es decir cuando el deslizamiento es igual a  $s$ , se tiene:

$$\text{ec. 2-4} \quad E_{2s} = E_2 \frac{f_2}{f} = s E_2 \quad (\text{ver ec.2-3})$$

además, la reactancia de dispersión del secundario  $x_{2s}$  es:

$$\text{ec. 2-5} \quad x_{2s} = x_2 \frac{f_2}{f} = s x_2$$

donde  $x_2$  es la reactancia de dispersión cuando  $s = 1$ .

Por consiguiente;

$$\text{ec. 2-6} \quad I_2 = \frac{sE_2}{\sqrt{r_2^2 + (s x_2)^2}}$$

y

$$\text{ec. 2-7} \quad \cos \psi_2 = \frac{r_2}{z_2} = \frac{r_2}{\sqrt{r_2^2 + (s x_2)^2}}$$

donde  $r_2$  es la resistencia óhmica del devanado del rotor, y  $\psi_2$ , el ángulo de desplazamiento entre la f.e.m.  $E_{2s}$  y la corriente  $I_2$ .

En el árbol de la máquina asíncrona el momento electromagnético  $M$  se crea como resultado de la interacción del flujo  $\phi$ , que, según los datos, se considera constante, y la componente activa de la corriente  $I_2 \cos \psi_2$  en el devanado del rotor. Así pues,

$$\text{ec. 2-8} \quad M = K \frac{sE_2}{\sqrt{r_2^2 + (s x_2)^2}} \frac{r_2}{\sqrt{r_2^2 + (s x_2)^2}} = K \frac{sE_2 r_2}{r_2^2 + (s x_2)^2}$$

donde  $K$  es el factor de proporcionalidad.

De la ec. 2-8 se deduce que el momento  $M$  de la máquina asíncrona

crona es positivo, o sea, de rotación, cuando  $s > 0$  (motor y freno electromagnético) y negativo, es decir de frenado, cuando  $s < 0$  (generador). Cuando  $s = 0$  y  $s = \pm \infty$  el momento  $M = 0$ . El deslizamiento  $s = s_m$ , correspondiente al valor máximo del momento  $M = M_m$ , se determina resolviendo la ecuación:

$$\frac{dM}{ds} = KE_2 \frac{r_2 |r_2^2 + (sx_2)^2| - sr_2 \cdot 2sx_2^2}{|r_2^2 + (sx_2)^2|^2} = 0$$

De aquí se obtiene:

$$\text{ec. 2-9} \quad s_m = \pm \frac{r_2}{x_2}$$

Sustituyendo este valor de  $s_m$  en la ecuación 2-8, se tiene:

$$\text{ec. 2-10} \quad M_m = \pm K \frac{E}{2x_2}$$

Así pues, la magnitud del momento máximo no depende de la resistencia del rotor  $r_2$ ; de ésta sólo depende el deslizamiento  $s_m$  con el cual el momento alcanza su valor máximo.

En la Fig. 2.2, viene dado el momento  $M$  en función del deslizamiento  $s | M = f(s) |$  para  $x_2 = \text{const.}$  y para diferentes valores de la resistencia  $r_2$  del rotor.



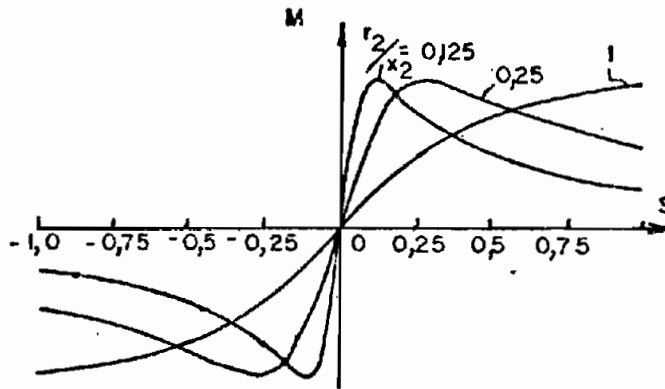


Fig.2.2 Gráfico del momento de rotación de una máquina asíncrona en función del deslizamiento.

#### 2.1.4 ECUACIONES DE KIRCHOFF DE LA MAQUINA DE INDUCCION.-

Como en el transformador, la ley de mallas de Kirchhoff para el arrollamiento del estator es:

$$\text{ec. 2-11} \quad \dot{V}_1 + \dot{E}_1 - j \dot{I}_1 X_1 = \dot{I}_1 r_1$$

6

$$\dot{V}_1 = -\dot{E}_1 + j \dot{I}_1 X_1 + \dot{I}_1 r_1$$

En la ec. 2-11, el subíndice 1 indica correspondencia con el arrollamiento primario (estator), el punto situado sobre algunos símbolos, les da la categoría de fasores. Se supone que todos los valores involucrados en esa ecuación son valores por fase.  $V_1$  es la tensión de la red,  $E_1$  es la f.e.m. inducida por el flujo rotativo, el cual está dado por:

$$\text{ec. 2-12} \quad \dot{E}_1 = - \dot{I}_m \dot{Z}_m$$

En donde  $I_m$  es la corriente magnetizante y  $Z_m$  es la impedan-

cia de magnetización dada por:

$$\text{ec. 2-13} \quad Z_m = r_m + jx_m$$

ecuación en que  $r_m$  toma en cuenta las pérdidas del hierro producidas por el flujo principal y  $x_m = \omega L_m$  es la reactancia del flujo principal.

A su vez la corriente de magnetización puede descomponerse en:

$$\text{ec. 2-14} \quad I_m = \dot{I}_1 + \dot{I}_2'$$

para demostrar la ingerencia que tiene en el flujo principal la circulación de la corriente por los devanados del rotor. Debe notarse que la corriente  $I_2'$  (del rotor) tiene un subíndice que indica que ésta corriente ha sido trasladada a términos del estator.

Como en el transformador, la ecuación de mallas para el rotor, trasladada al estator es:

$$\text{ec. 2-15} \quad \dot{E}_2' - jI_2' x_2' = I_2' r_2'$$

Donde:

$$\text{ec. 2-16} \quad \dot{E}_2' = \dot{E}_1 = - \dot{I}_m \dot{Z}_m$$

#### 2.1.5 PRINCIPALES TIPOS DE ROTORES EN LA MAQUINA DE INDUC-

## ACION POLIFASICA. SUS CARACTERISTICAS.

El rotor de la máquina asíncrona representa un cuerpo cilíndrico compuesto de chapas de acero al silicio con ranuras para instalar el devanado. Se distinguen:

1.- Las máquinas asíncronas con rotor bobinado. Estas tienen en su rotor un devanado hecho del mismo tipo que el devanado polifásico del estator. Si este devanado es trifásico (lo cual es regla general), entonces se conectan generalmente en estrella y sus terminales se sacan a través de anillos de colector y escobillas al exterior al reóstato de arranque (cuando se arranca por este mecanismo). (ver Fig. 2.3).

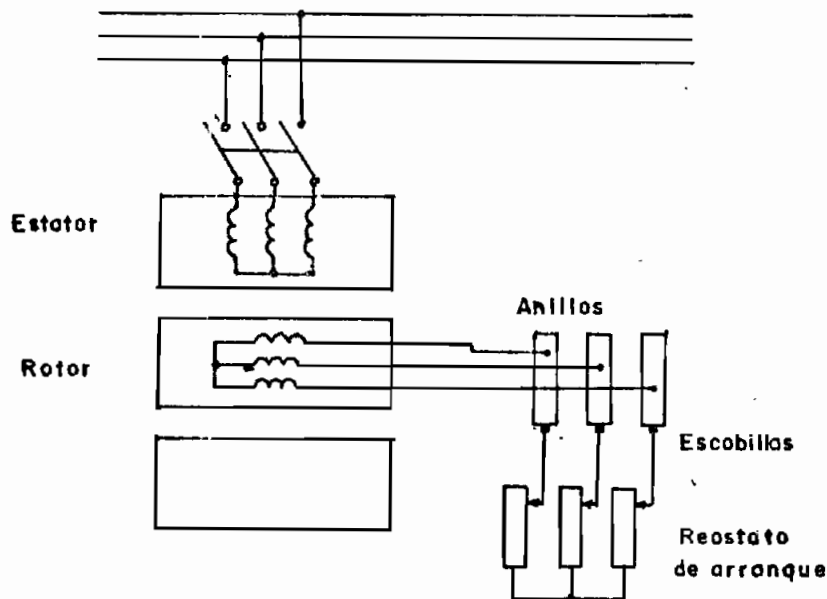


Fig 2.3 Esquema de conexión de un motor asíncrono con rotor de fase

2.- Las máquinas asíncronas con rotor en cortocircuito o de jaula de ardilla. Estas se dividen en tres modificaciones principales: con rotor jaula de ardilla simple; con ro-

tor de barra profunda (también llamado rotor de gran reactancia), y con rotor de doble jaula de ardilla. Estos tipos de máquinas difieren uno de otro por sus particularidades de arranque y sus reactancias de dispersión.

En las máquinas de simple jaula las ranuras del rotor, estampadas en el acero, tienen principalmente forma de óvalo con mayor o menor relación entre la altura de la ranura y su anchura (Fig. 2.4). Las ranuras cerradas por arriba con un puente fino de 0,4 - 0,5 mm de espesor, se rellenan de aluminio o de cobre. Al mismo tiempo se funden por ambos extremos, del rotor, anillos de aluminio (o de cobre) que cierran las barras fundidas en las ranuras.

## 2.2 ESTUDIO DE LAS ARMONICAS EN LA CURVA DE F.M.M. DEL ESTATOR

La f.e.m. de corriente alterna se caracteriza por los tres parámetros principales siguientes: a) la magnitud, b) la frecuencia y c) la forma de la curva.

La obtención de una f.e.m. de la magnitud y frecuencia necesarias es relativamente fácil; es más difícil la creación de una f.e.m. de la forma dada. A continuación se analiza la forma de la curva de la f.m.m. que está íntimamente relacionada con la forma de la curva de la f.e.m. Se comienza por el caso más simple.

### 2.2.1 MAQUINA MONOFASICA BIPOLAR.

Sea  $q$  el número de ranuras de la máquina; para iniciar el análisis se toma un bobinado con  $q = 1$  ranuras y de  $n_c$  espiras por bobina (Fig. 2.4) por las cuales circula una corriente  $i$ .

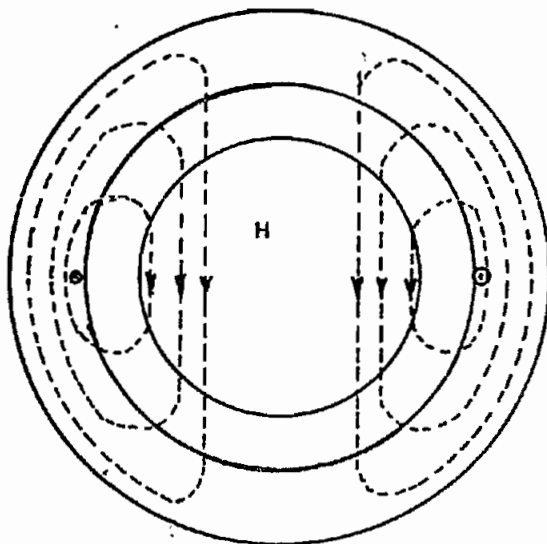


Fig. 2-4

La circulación de la corriente  $i$  produce un campo magnético con intensidad  $H$ , que cumple con la ley de Ampere.

ec. 2-17 
$$\oint H \cdot dl = n_c i = \text{f.m.m.}$$

La integral  $\oint H \cdot dl$  es constante para cualquier línea de campo magnético, debido a que todas ellas entrelazan el mismo valor de corriente  $n_c i$ . La gráfica de la f.m.m. como función de la coordenada espacial tiene una altitud de pico a pico igual a  $n_c i$ , considerándose la mitad superior como positiva y

la inferior como negativa, dependiendo de que las líneas de fuerza, entren o salgan del rotor (Ver Fig. 2.5).

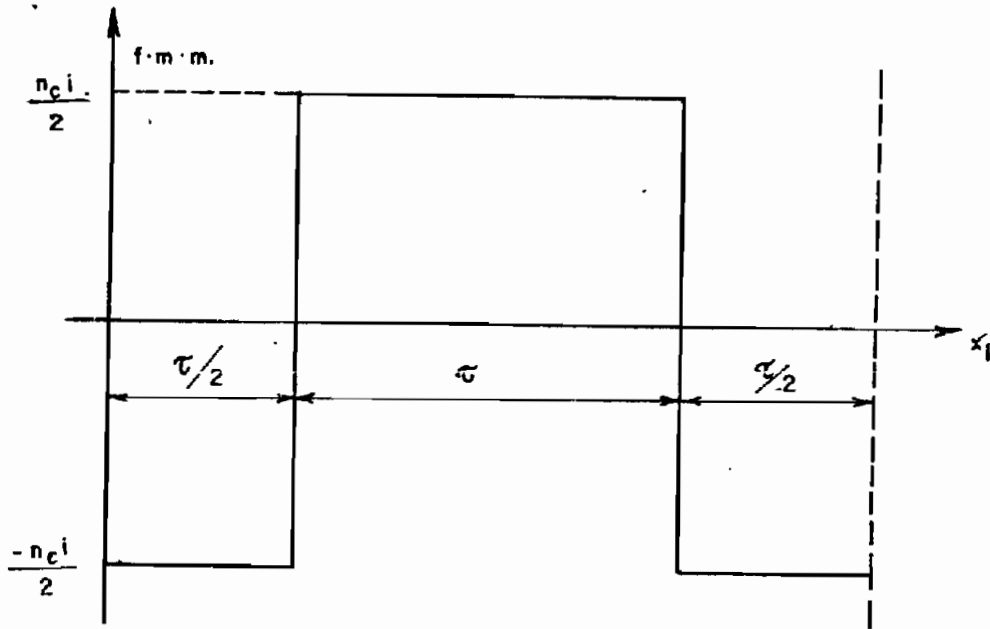


FIG. 2.5

$x_1$  es una coordenada espacial fija al estator.

$T$  es el paso polar e igual a la longitud entre bobinas.

Debido a que la permeabilidad del hierro es mucho más elevada que la del aire (entre hierro)

$$\text{ec. 2-18} \quad \oint H \cdot d\ell = H_g \times 2g \quad ;$$

siendo  $g$  la longitud del entrehierro.

Teniendo presente que el término de la izquierda de la ec. 2-18 está igualado a la f.m.m. en la ec. 2-17, que la permea

bilidad del aire es:

$$\text{ec. 2-19} \quad \mu_0 = 0,4\pi \frac{\text{gaus-cm}}{\text{ampere}} \quad \left| \text{Sistema cegesimal} \right|$$

y que la densidad de flujo B está dada por  $B = \mu \cdot H$ , se llega a demostrar que:

$$\text{ec. 2-20} \quad b = \frac{0,4\pi}{2g} \text{ f.m.m.} \quad \text{ó} \quad B = \frac{0,4\pi}{2g} \text{ F.m.m.}$$

(mayúsculas son amplitudes)

De esta ecuación última se desprende que la densidad de flujo  $\bar{B}$  está representada por la Fig. 2.5, pero con previa multiplicación del factor de escala por  $\frac{0,4\pi}{2g}$ .

Al descomponer en una serie de Fourier la curva de la Fig. 2.5 (ver Apéndice A-1), se obtiene una onda fundamental de longitud  $2\tau$  (idéntica longitud que la de su curva matriz), mientras que sus armónicas tienen longitudes que son submúltiplos de  $2\tau$  y están en relación inversa al orden de la armónica. La amplitud de la onda fundamental es  $\frac{4}{\pi}$  veces la altura de la onda rectangular; o sea  $\frac{4}{\pi} \left(\frac{nci}{2}\right)$ . En los casos de interés la corriente  $i$  es la onda sinusoidal dada por:

$$i = I_1 \sqrt{2} \text{ sen } \omega t$$

siendo  $I_1$  el valor eficaz de la corriente del estator.

De este modo, y representando por f.m.m. ( $x_1$ ) a la fuerza magnetomotriz como función de la coordenada  $x_1$  del estator, obtenemos:

$$\begin{aligned} \text{f.m.m.}(x_1) = & \frac{4}{\pi} \times \frac{n_C}{2} \sqrt{2} I_1 \text{ sen } \omega t) \\ & \times \left| \cos \frac{\pi}{\tau} x_1 - \frac{1}{3} \cos 3 \frac{\pi}{\tau} x_1 + \frac{1}{5} \cos 5 \frac{\pi}{\tau} x_1 - \right. \\ & \left. - \frac{1}{7} \cos 7 \frac{\pi}{\tau} + \dots \right| \end{aligned}$$

ec. 2-21      f.m.m. ( $x_1$ ) = (0.9  $n_C$   $I_1$  sen  $\omega t$ )

$$\begin{aligned} & \times \left| \cos \frac{\pi}{\tau} x_1 - \frac{1}{3} \cos 3 \frac{\pi}{\tau} x_1 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{5} \cos 5 \frac{\pi}{\tau} x_1 - \frac{1}{7} \cos 7 \frac{\pi}{\tau} x_1 + \dots \right| \end{aligned}$$

En el caso de mayor generalidad de la máquina monofásica, el número de bobinas de que está formado el estator es  $q > 1$ , y cada bobina se encuentra defasada de la contigua por un ángulo  $\alpha_s$ , denominado ángulo de ranura. Con un devanado de  $q > 1$ , mejora ostensiblemente la curva de f.m.m. (y por supuesto, también la curva de B), ya que su forma se acerca a la sinusoidal, a medida que crece  $q$ . En la Fig. 2.6, se da la forma aproximada de la f.m.m. creada por un bobinado de  $q = 3$ .



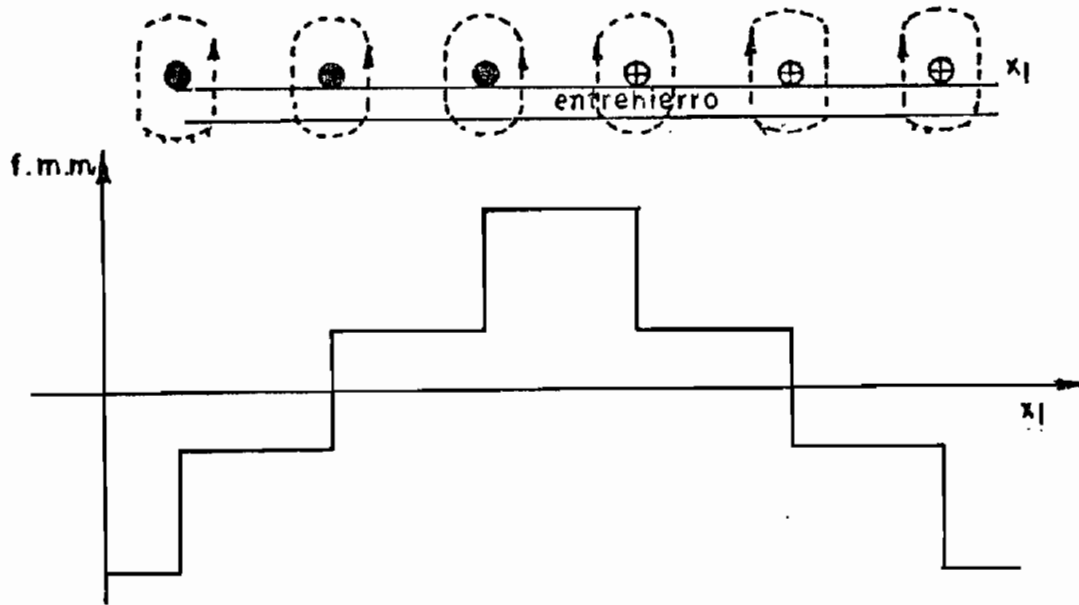


FIG. 2.6

La ec. 2-21 que formula el valor de cada una de las armónicas para que represente a la curva de un bobinado con  $q > 1$ , debe ser multiplicada por el factor de distribución de cada armónica y por el número  $q$  de bobinas. Así la ec. 2-21 se transforma en:

$$\text{ec. 2-22} \quad \text{f.m.m. } (x_1) = 0.9 n_c I_1 \text{ sen } \omega t$$

$$\begin{aligned} & \times \left| (q K d_{1,1}) \cos \frac{\pi}{\tau} x_1 - \frac{1}{3} (q K d_{1,3}) \cos 3 \frac{\pi}{\tau} x_1 \right. \\ & \quad + \frac{1}{5} (q K d_{1,5}) \cos 5 \frac{\pi}{\tau} x_1 - \\ & \quad \left. - \frac{1}{7} (q K d_{1,7}) \cos \frac{\pi}{\tau} x_1 + \dots \right| \end{aligned}$$

ecuación en la que:

$K_{d_{1,1}}$  significa el factor de distribución del primario para su primera armónica (fundamental).

$K_{d_{1,3}}$  es el factor de distribución del primario para su tercera armónica, y así sucesivamente.

Los valores de los factores de distribución son encontrados en el Apéndice A.1, y son iguales a:

$$\text{ec. 2-23} \quad K_{d_{1,1}} = \frac{\text{sen } q \left( \frac{\alpha_s}{2} \right)}{q \text{ sen } \left( \frac{\alpha_s}{2} \right)}$$

$$\text{ec. 2-24} \quad K_{d_{1,v}} = \frac{\text{sen } q \left( \frac{v\alpha_s}{2} \right)}{q \text{ sen } \left( v \frac{\alpha_s}{2} \right)}$$

### 2.2.2 MAQUINA MONOFASICA MULTIPOLAR

La ecuación 2-22 considera una máquina de 2 polos. En la tarea de generalizar la ecuación de la curva de f.m.m. se considera una máquina de p polos, con  $q > 1$  bobinas por par de polos, siendo  $n_c$  el número de espiras por bobina. Es decir, el número de espiras por cada par de polos es  $q \cdot n_c$ ;

Sea  $N_1$  el número total de espiras de la máquina multipolar

$$\text{ec. 2-25} \quad N_1 = \left( \frac{P}{2} \right) q \cdot n_c$$

Al reemplazar la ec. 2-25 en la ec. 2-22, se tiene que:

$$\text{ec. 2-26} \quad f.m.m(x_1) = 1.8 \frac{N_1}{p} I_1 \text{ sen } \omega t$$

$$\left| Kd_{1,3} \cos \frac{\pi}{\tau} x_1 - Kd_{1,3} \frac{1}{3} \cos \frac{3\pi}{\tau} x_1 + \right. \\ \left. + \frac{1}{5} Kd_{1,5} \cos \frac{5\pi}{\tau} x_1 \dots \right|$$

### 2.2.3 MAQUINA POLIFASICA MULTIPOLAR

La ecuación 2-26, también puede ser escrita como:

$$\text{ec. 2-27} \quad f.m.m(x_1) = F_{S1} \text{ sen } \omega t \cos \left(\frac{x_1}{\tau}\right)\pi - \\ - F_{S3} \text{ sen } \omega t \cos 3 \left(\frac{x_1}{\tau}\right)\pi + \\ + F_{S5} \text{ sen } \omega t \cos 5 \left(\frac{x_1}{\tau}\right)\pi - \dots + \text{etc.}$$

donde:

$$\text{ec. 2-28} \quad F_{sv} = 1.8 \frac{N_1 Kd_{1,v}}{p \times v} I_1$$

s indica una sola fase

v es el orden de la armónica.

De la ec. 2-27 y de la ec. 2-28 se desprende que la f.m.m. armónica de orden  $v$  de una fase del estator es igual a:

$$\text{ec. 2-29} \quad \text{f.m.m.}_{1v} = F_{sv} \text{ sen } \omega t \text{ cos } v \left( \frac{x_1}{\tau} \right) \pi$$

En una máquina polifásica de  $m$  fases interviene la f.m.m. de todas ellas. Considerando la fase 2 que se encuentra a  $\frac{2\pi}{m}$  radianes eléctricos espaciales de la primera fase, tomando en cuenta la primera armónica, y cuya corriente tiene un defasamiento en el tiempo de  $\frac{2\pi}{m}$ , obtenemos:

$$\text{f.m.m.}_{2v} = F_{sv} \text{ sen } \left| \omega t - \left( \frac{2\pi}{m_1} \right) \right| \text{ cos } \left| v \left( \frac{x_1}{\tau} \right) \pi - v \left( \frac{2\pi}{m_1} \right) \right|$$

De la misma manera, y en forma general la fase  $c$ -ésima genera:

$$\text{ec. 2-30} \quad \text{f.m.m.}_{cv} = F_{sv} \text{ sen } \left| \omega t - c \left( \frac{2\pi}{m_1} \right) \right| \text{ cos } \left| v \left( \frac{x_1}{\tau} \right) \pi - cv \left( \frac{2\pi}{m_1} \right) \right|$$

Tomamos en cuenta la identidad trigonométrica:

$$\text{sen } \alpha \text{ cos } \beta = \frac{1}{2} \left| \text{sen } (\alpha - \beta) + \text{sen } (\alpha + \beta) \right|,$$

que actuando sobre la ecuación 2-30 la transforma en:

$$\text{ec. 2-31} \quad \text{f.m.m.}_{c.v} = \frac{1}{2} F_{sv} \left( \text{sen} \left\{ \left| \omega t - v \left( \frac{x_1}{\tau} \right) \pi \right| + (v-1)c \left( \frac{2\pi}{m_1} \right) \right\} \right. \\ \left. + \text{sen} \left\{ \left| \omega t + v \left( \frac{x_1}{\tau} \right) \pi \right| - (v+1)c \left( \frac{2\pi}{m_1} \right) \right\} \right)$$

El valor de  $v$ , que representa el orden de cualquier armónica, puede tener valores positivos o negativos, como ya se vio anteriormente; pero para una armónica en particular no puede tener valores positivos y negativos a la vez. Por ejemplo, la tercera armónica es sólo negativa, es decir, su sentido de rotación siempre es contrario al de la armónica fundamental.

Teniendo en cuenta la ec. 2-31 se aprecia que con valores negativos de  $v$  en el primer término del miembro de la derecha se obtiene el segundo término. Entonces basta darle a cada valor de  $v$  tanto signo negativo como positivo para que la ec. 2-31 se simplifique a la siguiente:

$$\text{f.m.m.}_{c.v} = \frac{1}{2} F_{sv} \text{sen} \left\{ \left| \omega t - v \left( \frac{x_1}{\tau} \right) \pi \right| + (v-1)c \left( \frac{2\pi}{m_1} \right) \right\}$$

para  $v$  positivo y negativo.

Sea  $\text{f.m.m.}_v$  la resultante de las f.m.m para las  $m_1$  fases del estator.

$$\text{f.m.m.}_v = \sum_{c=1}^{c=m_1} \text{f.m.m.}_{c.v}$$

$$f.m.m_v = \frac{1}{2} F_{sv} \left| \left\{ \text{sen } \omega t - v \left( \frac{x_1}{\tau} \right) \pi \right\} \sum_{c=1}^{c=m_1} \cos (v-1)c \left( \frac{2\pi}{m_1} \right) \right.$$

$$\text{ec. 2-32} \quad + \cos \left\{ \omega t - v \left( \frac{x_1}{\tau} \right) \pi \right\} \sum_{c=1}^{c=m_1} \text{sen } (v-1)c \left( \frac{2\pi}{m_1} \right)$$

Ya que  $v$  es entero, las sumas de la ec. 2-32 son cero, excepto cuando  $(v-1) \left( \frac{2\pi}{m_1} \right) = K_1 \times 2\pi$ ; es decir cuando:

$$\text{ec. 2-33} \quad v = K_1 m_1 + 1$$

$K_1$  es entero (positivo o negativo)

La ec. 2-33 se convierte en el criterio de referencia para considerar la existencia de una armónica en particular.

El sumatorio  $\sum_{c=1}^{c=m_1} \cos (v-1)c \left( \frac{2\pi}{m_1} \right)$  existente en la ec. 2-32, para los valores  $v = K_1 m_1 + 1$  se convierte en:

$$\text{ec. 2-34} \quad \sum_{c=1}^{c=m_1} \cos (c K_1 2\pi) = m_1$$

Reemplazando la ec. 2-34 en la ec. 2-32 resulta:

$$\text{ec. 2-35} \quad f.m.m_v = \frac{m_1}{2} F_{sv} \text{sen} \left| \omega t - v \left( \frac{x_1}{\tau} \right) \pi \right|$$

Esta última ecuación representa una onda viajera de f.m.m.

con la amplitud de  $\frac{m_1}{2}$  veces la de la fundamental, y se produce para cualquier armónica y cualquier número de fases.

#### 2.2.4 VELOCIDAD DE PROPAGACION DE LA ONDA VIAJERA.

Se desea encontrar la velocidad de propagación de la onda de f.m.m de la ec. 2-35, para cualquier armónica y respecto al estator.

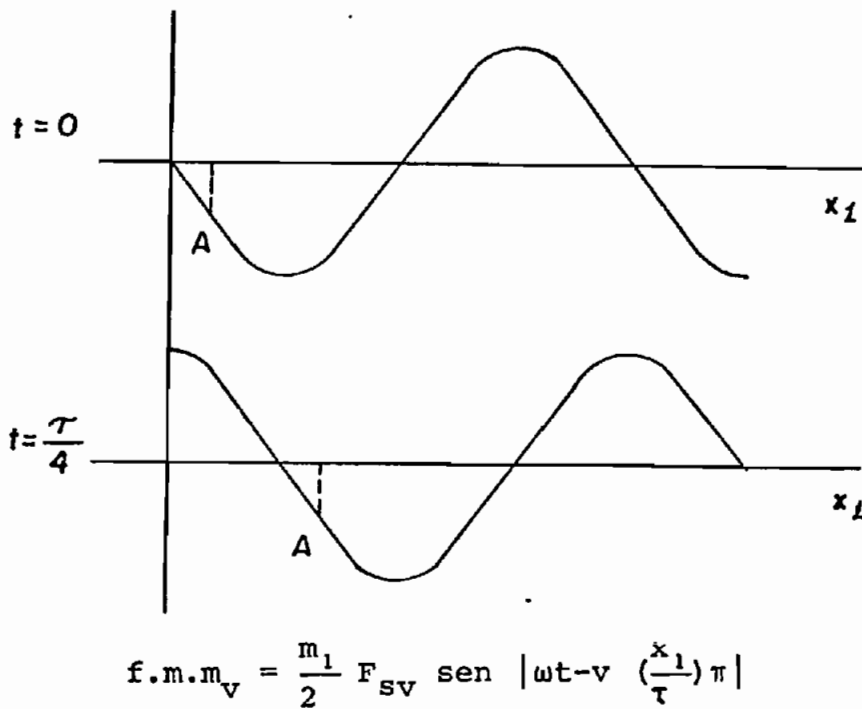


FIG. 2.7.

Consideramos la Fig. 2.7 y desde un punto de vista gráfico se puede notar que el espacio ( $x_1$ ) necesario para que la onda se deslice una magnitud determinada, depende del orden de la armónica  $v$ .

Tomando en cuenta el punto A de amplitud constante, que se

mueve en dirección del eje positivo de las x, podemos deducir que para que esto suceda,  $\text{sen} \left| \omega t - v \left( \frac{x_1}{\tau} \right) \pi \right|$  debe ser de valor constante y de amplitud igual a la del punto A.

$$\therefore \text{ si } \text{sen} \left| \omega t - v \left( \frac{x_1}{\tau} \right) \pi \right| = \text{constante}$$

$$\omega t - v \left( \frac{x_1}{\tau} \right) \pi = \text{constante}$$

$$\frac{d}{dt} \left| \omega t - v \left( \frac{x_1}{\tau} \right) \pi \right| = 0$$

$$\omega - \frac{v\pi}{\tau} \frac{dx_1}{dt} = 0$$

$$\text{ec. 2-36} \quad v = \frac{dx_1}{dt} = \frac{\tau\omega}{v\pi} = \text{velocidad de propagación.}$$

Para la armónica fundamental ( $v = 1$ ):

$$\text{ec. 2-37} \quad V_1 = \frac{dx_1}{dt} = \frac{\tau\omega}{\pi} = 2 f \tau$$

Para la armónica de orden v.

$$\text{ec. 2-38} \quad V_v = \frac{\tau\omega}{v\pi} = \frac{V_1}{v}$$

De las ecuaciones 2-36, 2-37 y 2-38 se concluye que en 1 ci



clo de la corriente, cada armónica recorre respecto al estator, su propia longitud de onda.

### 2.3 INDUCCION DE ARMONICAS EN EL ROTOR.

La Ley de la inducción de Faraday establece que:

$$\text{ec. 2-39} \quad e_v = - \frac{d \phi_v}{dt} 10^{-8} \text{ Volt.}$$

es decir, la f.e.m inducida en un circuito cerrado es igual a la razón de decremento del flujo  $\phi$  entrelazado con el circuito. El flujo  $\phi$  varía con el tiempo en forma sinusoidal (considerando cualquier armónica).

$$\text{ec. 2-39.1} \quad \phi_v = 2 b_v \frac{\tau \ell}{\pi}$$

|b = densidad de flujo|

$$\text{pero } b_v = \frac{0.4 \pi \text{ f.m.m}(v)}{2 g}$$

por lo cual,

$$\text{ec. 2-39.2} \quad \phi_v = \frac{0.4 \pi}{2g} \times \left( \frac{2\tau \ell}{\pi} \right) \text{ f.m.m}(v)$$

teniendo presente la ec. 2-35,

$$f.m.m(v) = \frac{m_1}{2} F_{sv} \operatorname{sen} \left| \omega t - v \left( \frac{x_1}{\tau} \right) \pi \right|$$

reemplazando en la ec. 2-39.2,

$$\phi_v = \frac{0.4}{g} \tau l \times \frac{m_1}{2} F_{sv} \operatorname{sen} \left| \omega t - v \left( \frac{x_1}{\tau} \right) \pi \right|$$

$$\text{ec. 2-40} \quad \phi_v = 0.2 \left( \frac{\tau l}{g} \right) m_1 F_{sv} \operatorname{sen} \left| \omega t - v \left( \frac{x_1}{\tau} \right) \pi \right|$$

debe notarse que la ec. 2-40 es válida para el estator o para el rotor cuando éste no gira (bloqueado).

$$\text{haciendo:} \quad 0.2 \left( \frac{\tau l}{g} \right) F_{sv} = \phi_{sv}$$

$$\phi_v = \phi_{sv} m_1 \operatorname{sen} \left| \omega t - v \left( \frac{x_1}{\tau} \right) \pi \right|$$

Si se desea que esta ecuación sea válida para el rotor en estado giratorio, se debe considerar la coordenada  $x_2$  colocada sobre el rotor.

Si se representa por  $n$  el número de revoluciones por minuto con el que gira el rotor, y  $n_v$  las revoluciones por minuto con el que rota la armónica de orden  $v$  del flujo giratorio, se define como deslizamiento  $S_v$ , lo siguiente:

$$\text{ec. 2-41} \quad S_v = \frac{n_v - n}{n_v} = 1 - v (1-s)$$

Entonces, si para un punto estático del estator la armónica  $v$  giraba a  $n_v$  r.p.m. para un punto estático del rotor esa armónica gira a  $S_v n_v$  r.p.m.

Con esta consideración se puede demostrar que el flujo  $\phi_v$  para el rotor está dado por:

$$\text{ec. 2-42} \quad \phi_v = \phi_{sv} m_1 \text{ sen } |S_v \omega t - v \left(\frac{x_2}{\tau}\right) \pi|$$

Para un punto fijo del rotor, siempre se puede ajustar la variable tiempo, para que, el flujo  $\phi_v$  esté dado por:

$$\text{ec. 2-43} \quad \phi_v = \phi_{sv} m_1 \text{ sen } |S_v \omega t - v \left(\frac{x_2}{\tau}\right) \pi|$$

por la Ley de la inducción de Faraday:

$$\text{ec. 2-44} \quad e_v = - \frac{d \phi_v}{dt}$$

y tomando en cuenta la ec. 2-43,

$$e_v = - \frac{d}{dt} \{ \phi_{sv} m_1 \text{ sen } |S_v \omega t| \}$$

$$e_v = - S_v \omega \phi_{sv} m_1 \cos (S_v \omega t)$$

ec. 2-45  $e_v = E_v m_1 \cos S_v \omega t$

ec. 2-46 donde  $E_v = - S_v \omega \phi_{sv}$

Del mismo modo se van a inducir corrientes  $i_{2v}$  en los conductores del rotor de la forma:

ec. 2-47  $i_{2v} = \sqrt{2} I_{2v} \text{sen } S_v \omega t ,$

$I_{2v}$  = valor eficaz pues se desprecia la reactancia cuando  $S \approx 0$ .

Utilizando la Fig. 2.5, pero ahora aplicada al rotor, se demuestra que la corriente  $i_{2v}$  va a su vez a formar una curva de f.m.m. del rotor (f.m.m( $x_2$ )) que puede descomponerse en una serie de armónicas de orden  $\mu$ , tales que:

ec. 2-48 (f.m.m)<sub>su</sub> =  $F_{su} \text{sen } S_v \omega t \cos u \left(\frac{x_2}{\tau}\right) \pi$

$x_2$  es una coordenada fija al rotor y el subíndice s en la ecuación 2-48 indica una sólo fase.

$F_{su}$  puede ser determinada de igual forma que  $F_{sv}$  .

Debe notarse, que cada armónica del estator de orden v, induce corrientes en el rotor, que a su vez originan curvas de f.m.m que se descomponen en armónicas de orden u.

### 2.3.1 INDUCCION DE ARMONICAS EN EL ROTOR DEVANADO

La máquina de inducción tiene igual número de polos en el estator y en el rotor, sin fijarse que el rotor sea "jaula de ardilla", ó devanado, la diferencia fundamental que se va a encontrar entre los 2, es el número de fases y el de espiras por fase.

La amplitud  $F_{su}$  de una fase de un rotor devanado con  $N_2$  espiras por fase es:

$$\text{ec. 2-49} \quad F_{su} = 1.8 \frac{N_2 Kd_{2u} I_{2v}}{u.p}$$

$Kd_{2u}$  = factor de distribución del rotor para la armónica u.

Sea  $m_2$  el número de fases del rotor, donde  $m_2$  puede ser igual o diferente de  $m_1$ , la f.m.m. de la fase 1 está dada por la ec. 2-48.

$$\text{ec. 2-50} \quad (\text{f.m.m})_{su1} = F_{su} \text{ sen } S_v \omega t \text{ cos } u \left( \frac{x_2}{\tau} \right) \pi$$

mientras que la f.m.m. de una fase vecina se obtiene al insertar en la ec. 2-50 su ángulo de tiempo y fase. El ángulo de tiempo está determinado por la armónica de orden  $v$  del estator que produce la armónica en consideracion y es  $v \left( \frac{2\pi}{m_2} \right)$ . El ángulo de espacio es  $u \left( \frac{2\pi}{m_2} \right)$  similar al del estator. Por tan

to, la f.m.m. de la armónica de orden  $u$  de la fase de orden  $c$  es:

$$(f.m.m)_{suc} = F_{su} \operatorname{sen} \left| S_v \omega t - v \left( \frac{2\pi}{m_2} \right) c \right| \cos \left| u \left( \frac{x_2}{\tau} \right) \pi - u \left( \frac{2\pi}{m_2} \right) c \right|$$

o con un desarrollo idéntico que para las armónicas del esta tor,

$$(f.m.m)_{suc} = \frac{1}{2} F_{su} \left| \operatorname{sen} \left\{ \left( S_v \omega t - u \frac{x_2}{\tau} \pi \right) + (u-v) \frac{2\pi}{m_2} c \right\} \right. \\ \left. + \operatorname{sen} \left\{ \left( S_v \omega t + u \frac{x_2}{\tau} \pi \right) - (u+v) \frac{2\pi}{m_2} c \right\} \right|$$

así mismo el segundo término del miembro de la derecha se lo gra con la introducción para  $u$  de valores negativos.

ec. 2-51 
$$(f.m.m)_{suc} = \frac{1}{2} F_{su} \left| \operatorname{sen} \left\{ \left( S_v \omega t - u \frac{x_2}{\tau} \pi \right) + (u-v) \frac{2\pi}{m_2} c \right\} \right|$$

para  $u$  con valores positivos y negativos en cada caso.

Tomando las mismas consideraciones que llevaron a determinar la ec. 2-33 se determina que la condición fundamental para la existencia de la armónica de orden  $u$  es:

$$(u - v) \frac{2\pi}{m_2} = K_2 \times 2\pi$$

ec. 2-52  $u = K_2 m_2 + v$

$K_2$  es cualquier entero.

Así como para la ec. 2-35 la armónica de orden  $u$  resultante de las  $m_2$  fases es:

ec. 2-53  $(f.m.m)_u = \frac{m_2}{2} F_{su} \text{ sen } |S_v \omega t - u (\frac{x_2}{\tau}) \pi|$  ;  $\frac{m_2}{2} F_{su} = F_u$

la distribución de la inducción magnética correspondiente es:

ec. 2-54  $b_u = B_u \text{ sen } |S_v \omega t - u (\frac{x_2}{\tau}) \pi|$

$B_u$  viene dado por:

ec. 2-55  $B_u = \frac{0,4 \pi}{g K_C K_S} F_u$

donde  $K_S$  es el factor de saturación en el entrehierro y  $K_C$  es el factor de Carter, y toma en cuenta el incremento del entrehierro debido a las ranuras.

Para las armónicas puede suponerse que  $K_S = 1$  ( $u \neq 1$ )

Cálculo de la velocidad de propagación de las armónicas del rotor devanado.

Sea  $x_1$  una coordenada fija al estator.

Sea  $x_2$  una coordenada fija al rotor.

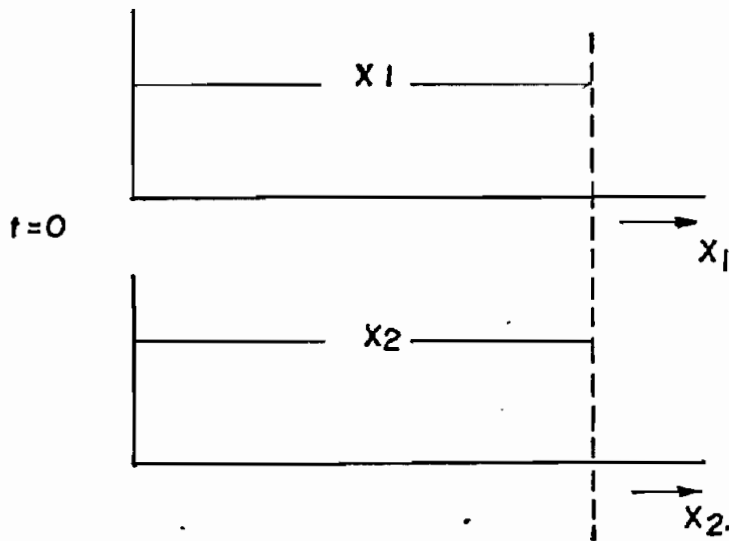


FIG. 2.8.

Se supone que  $t = 0$ , los orígenes de las coordenadas  $x_1$  y  $x_2$  coinciden, es decir  $x_2 = x_1$ . Por definición de deslizamiento.

$$s = \frac{n_1 - n}{n_1} \Rightarrow n = n_1 - sn_1$$

entonces la velocidad del rotor es:  $n = n_1 (1-s)$  en r.p.m.,  
la velocidad periférica  $V_r$  es:

$$V_r = (1-s)n_1 \times \left(\frac{1}{60}\right) p \tau \text{ (en cm/seg.)}$$

ec. 2-56  $V_r = (1-s) \left(\frac{\tau}{\pi}\right) \omega$



de esta manera, para cualquier instante de tiempo:

$$\text{ec. 2-57} \quad x_2 = x_1 - V_T t = x_1 - (1-s) \left( \frac{\tau}{\pi} \right) \omega t$$

tomando en cuenta esta ecuación y la ecuación 2-54, así como la ec. 2-57, se concluye que:

$$b_u = B_u \sin \left| \left\{ 1 - v(1-s) \right\} \omega t - u \left\{ x_1 - (1-s) \left( \frac{\tau}{\pi} \right) \omega t \right\} \right|$$

$$\text{ec. 2-58} \quad b_u = B_u \sin \left| \left\{ 1 + (u-v)(1-s) \right\} \omega t - u \left( \frac{x_1}{\tau} \right) \pi \right|$$

con lo cual se ha logrado expresar  $b_u$  como función de  $t$  y de la coordenada  $x_1$  del estator. Para encontrar la velocidad de propagación de la armónica de orden  $u$  respecto al estator, realizando la diferenciación de la cantidad entre paréntesis recto de la ec. 2-58 e igualando a cero, de igual manera que cuando se calcula la velocidad de propagación de la armónica de orden  $v$  del estator.

$$-\left(\frac{u}{\tau}\right) \pi \frac{dx_1}{dt} + \left| 1 + (u-v)(1-s) \right| \omega = 0$$

$$\frac{dx_1}{dt} = \left| 1 + (u-v)(1-s) \right| \frac{\tau}{u\pi} \omega = V_{1u}$$

pero de acuerdo con la ec. 2-37  $\frac{\tau\omega}{\pi}$  es la velocidad  $V_1$  de pro

pagación de la onda principal del estator ( $v = 1$ ) con respecto al estator. Así:

$$\text{ec. 2-59} \quad V_{1u} = |1 + (u-v)(1-s)| \left(\frac{1}{u}\right) V_1$$

### 2.3.2 INDUCCION DE ARMONICAS EN EL ROTOR JAULA DE ARDILLA.

Se recuerda que en un rotor Jaula de ardilla el número de fases entre  $2\pi$  radianes, es igual al número de barras entre un par de polos. Sea  $Q_2$  el número de barras y  $p$  el número de polos, entonces  $\frac{p}{2}$  es el número de pares de polos.

$$\text{ec. 2-60} \quad m_2 = \frac{Q_2}{\frac{p}{2}} \quad (\text{fases en } 2\pi \text{ radianes})$$

y por tanto la ec. 2-52 que sirve como criterio para encontrar las armónicas que existen, se convierte en:

$$\text{ec. 2-61} \quad u = K_2 \left( \frac{Q_2}{\frac{p}{2}} \right) + v$$

Además, por la independencia que tiene cada barra, dentro del rotor,  $Q = m_2$  y  $N = \frac{1}{2}$ ; siendo éstos los valores que deben incluirse en las ecuaciones 2-49 y 2-52.

La velocidad de propagación de la onda resultante de las  $Q_2$

fases para la armónica  $u$ , está dada por la ec. 2-59.

$$V_{1u} = |1 + (u-v)(1-s)| \left(\frac{1}{u}\right) V_1$$

#### 2.4 ARMONICAS DE RANURA.

Son aquellas que poseen el factor de distribución  $K_d$  y el factor de paso  $K_{red}$  (Véase Apéndice A.1), de valores idénticos al de la armónica fundamental. Como se demuestra a continuación, estas armónicas sólo se presentan para devanados congruentes, es decir aquellos que tienen un número de ranuras por polo de valor entero ( $q = \text{entero}$ ). Se demuestra en el Apéndice A.1, que los factores de distribución para la armónica principal y para la de orden  $v$ , están dadas por:

$$K_{d1} = \frac{\text{sen } q \left(\frac{\alpha_s}{2}\right)}{q \text{ sen } \left(\frac{\alpha_s}{2}\right)}$$

y

$$K_{dv} = \frac{\text{sen } q v \left(\frac{\alpha_s}{2}\right)}{q \text{ sen } \left(\frac{\alpha_s}{2}\right)}$$

siendo  $\alpha_s = \frac{\pi}{qm}$ ; que reemplazado en las dos ecuaciones anteriores resulta:

$$\text{ec. 2-62} \quad K_{d1} = \frac{\text{sen } \frac{\pi}{2m}}{q \text{ sen } \frac{\pi}{2mq}} \quad K_{dv} = \frac{\text{sen } v \frac{\pi}{2m}}{q \text{ sen } \frac{v\pi}{2mq}}$$

De acuerdo con la definición de armónicas de ranura, éstas deben participar de las ecuaciones 2-62. Es decir, siendo armónicas de orden  $v$  deben satisfacer el factor de distribución  $K_{dv}$ , pero al cumplir la definición deben satisfacer también la ecuación del factor  $K_{d1}$ . Por consiguiente, si:

ec. 2-63       $v = 2mq K \pm 1$       donde  $K$  es entero

$$K_{dv} = \frac{\text{sen} \left| \frac{\pi}{2m} (2mq K \pm 1) \right|}{q \text{ sen} \left| \frac{\pi}{2mq} (2mq K \pm 1) \right|} = \frac{\text{sen} \left| q K \pi \pm \frac{\pi}{2m} \right|}{q \text{ sen} \left| K \pi + \frac{\pi}{2mq} \right|}$$

Ya que para devanados congruentes (ver Apéndice A.2),  $q$  es entero, entonces  $\text{sen } q K \pi = 0$  y  $\text{cos } q K \pi = 1$  para todo valor de  $q$  y de  $K$ . Por tanto:

$$K_{dv} = \pm \frac{\text{sen} \frac{\pi}{2m}}{q \text{ sen} \frac{\pi}{2mq}} = \pm K_{d1}$$

Debido a esto se puede decir que todas las armónicas dadas por la ec. 2-63 tienen un factor de distribución del mismo valor absoluto que la fundamental.

A continuación se concluye la demostración, al verificar que las armónicas dadas por la ec. 2-63, tienen también el mismo

factor de reducción del paso (K red) que la fundamental.

En el Apéndice A.1 se demuestra que el factor K red está dado por:

$$K \text{ red}_1 = \text{sen} \left( \frac{y}{\tau} \right) \frac{\pi}{2} = \text{sen} \frac{\pi}{2} \left( \frac{2mq-R}{2mq} \right)$$

y = longitud del paso reducido.

(2mq-R) = es el número de ranuras existente en y.

$$K \text{ red}_v = \text{sen } v \left( \frac{y}{\tau} \right) \frac{\pi}{2} = \text{sen} \frac{\pi}{2} \left| (2mq \pm 1) \left( \frac{2mq-R}{2mq} \right) \right|$$

$$K \text{ red}_v = \pm \cos \frac{\pi}{2} \left( \frac{R}{2mq} \right) = \pm K \text{ red}_1$$

#### 2.4.1 LONGITUD DE ONDA DE LAS ARMONICAS DE RANURA.

Si  $\tau$  es el paso polar, la longitud de onda de la armónica principal es:  $\lambda_1 = 2\tau$ , mientras que para la armónica de orden v es:  $\lambda_v = \frac{2\tau}{v}$ , que en el caso de las armónicas de ranura se convierte en:

$$\lambda_v = \frac{2\tau}{2mq \pm 1} \approx \frac{\tau}{mq} \quad \text{cuando } 2mq \gg 1$$

pero  $\frac{\tau}{mq}$  es la longitud existente entre ranuras contiguas del devanado. (Fig. 2.9).

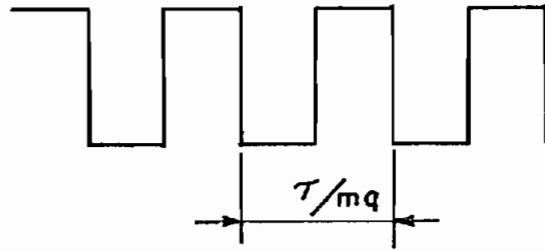


FIG. 2.9

De la Fig. 2.9 y de la ec. 2-64 se desprende que se pueden producir armónicas de ranura, ya sea cuando  $v = 2mq K \pm 1$  es una armónica producida por la ec. 2-33  $v = Km + 1$ , ó también aquellas producidas por la diferencia de entrehierro en las ranuras como es el caso de la Fig. 2.10, que representa el efecto de las ranuras sobre la curva de densidad de flujo  $B$ . Esta curva puede ser analizada como el resultado de 2 componentes: Una de ellas la senoidal pura y la otra una sinusoi

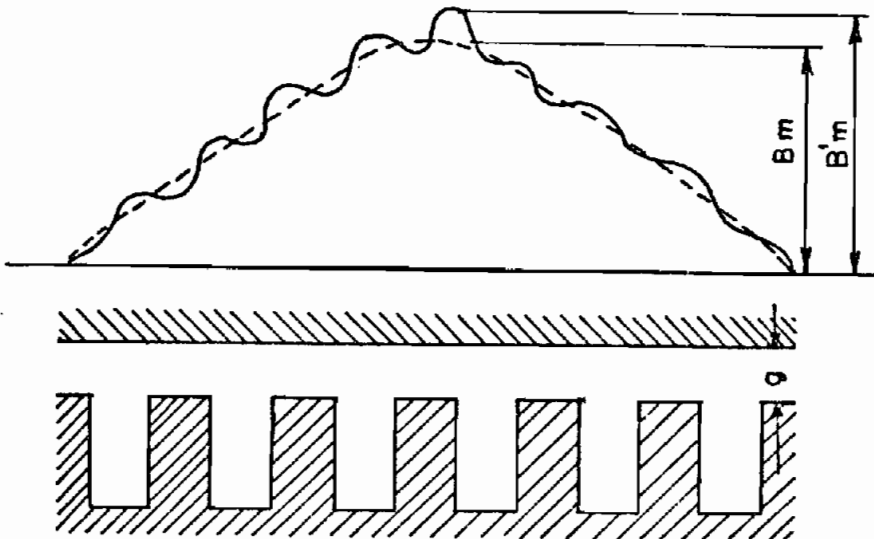


FIG. 2.10

dal de longitud de onda  $\lambda_v = \frac{\tau}{mq}$  ; es decir de longitud de onda igual a la distancia entre ranuras. Esta segunda componente también tiene el mismo factor de distribución y de paso que la fundamental.

A continuación, a manera de ejemplo se presenta una tabla con valores tabulados de los factores de distribución para varias armónicas y diferente número de ranuras por polo, de un devanado trifásico.

Factor de distribución del devanado	Número completo de ranuras por polo Q						
	9	12	15	18	21	24	27
	Número de ranuras por polo y fase q						
	3	4	5	6	7	8	9
$k_{dis1}$ 0,968	0,960	0,958	0,957	0,957	0,957	0,956	0,955
$k_{dis2}$ 0,707	0,667	0,654	0,646	0,644	0,642	0,641	0,640
$k_{dis3}$ 0,259	0,217	0,205	0,200	0,197	0,195	0,194	0,194
$k_{dis7}$ -0,259	-0,177	-0,158	-0,149	-0,145	-0,145	-0,141	-0,140
$k_{dis9}$ -0,707	-0,333	-0,270	-0,247	-0,236	-0,229	-0,225	-0,222
$k_{dis11}$ -0,968	-0,177	-0,126	-0,110	-0,102	-0,097	-0,095	-0,095
$k_{dis13}$ -0,968	0,217	0,126	0,102	0,092	0,086	0,085	0,081
$k_{dis15}$ -0,707	0,667	0,270	0,200	0,172	0,158	0,150	0,145
$k_{dis17}$ -0,259	0,960	0,158	0,102	0,084	0,075	0,070	0,066
$k_{dis19}$ 0,259	0,960	-0,205	-0,110	-0,084	-0,072	-0,066	-0,062
$k_{dis21}$ 0,707	0,667	-0,654	-0,247	-0,172	-0,145	-0,127	-0,118
$k_{dis23}$ 0,968	0,217	-0,958	-0,149	-0,092	-0,072	-0,065	-0,057
$k_{dis25}$ 0,968	-0,177	-0,958	0,200	0,102	0,075	0,065	0,056
$k_{dis27}$ 0,707	-0,333	-0,654	0,646	0,236	0,158	0,127	0,111
$k_{dis29}$ 0,259	-0,177	-0,205	0,957	0,145	0,086	0,056	0,056
$k_{dis31}$ -0,259	0,217	0,158	0,957	-0,197	-0,097	-0,070	-0,057
$k_{dis33}$ -0,707	0,667	0,270	0,646	-0,644	-0,229	-0,150	-0,118
$k_{dis35}$ -0,968	0,960	0,126	0,200	-0,957	-0,143	-0,085	-0,062
$k_{dis37}$ -0,968	0,960	-0,126	-0,149	-0,957	0,105	0,035	0,066
$k_{dis39}$ -0,707	0,667	-0,270	-0,247	-0,644	0,642	0,225	0,145
$k_{dis41}$ -0,250	0,217	-0,158	-0,110	-0,197	0,957	0,141	0,081
$k_{dis43}$ 0,259	-0,177	0,205	0,102	0,145	0,957	-0,194	-0,095
$k_{dis45}$ 0,707	-0,333	0,654	0,200	0,256	0,642	-0,641	-0,022
$k_{dis47}$ 0,968	-0,177	0,958	0,102	0,102	0,195	-0,956	-0,140

TABLA 2.1.

$$m = 3$$

$$\frac{Q}{p} = \text{número de ranuras por polo}$$

q = número de ranuras por polo y por fase.

En la Tabla 2.1, se ha subrayado los factores de distribución de la armónica fundamental y de las armónicas de ranura.

## 2.5 PROBLEMAS OCASIONADOS POR LAS ARMONICAS EN LA MAQUINA DE INDUCCION.- MODOS DE SOLUCION.

PARES MOTORES PARASITOS.- Pueden ser Síncronos o Asíncronos.

### 2.5.1 PARES MOTORES PARASITOS ASINCRONOS.

Son aquellos que existen independientemente de la velocidad del rotor; es decir cuando las armónicas de la f.m.m del estator producen en el rotor armónicas de la misma clase con las cuales son estacionarias a cualquier valor del deslizamiento.

Tomando en consideración la ec. 2-52, las armónicas  $u$  del rotor están dadas por:

$$u = K_2 m_2 + v \qquad K_2 \text{ es entero}$$

y cuando el rotor es jaula de ardilla por la ec. 2-61.



$$u = K_2 \left( \frac{\Omega}{\frac{p}{2}} \right) + v$$

Cuando  $K_2 = 0$ , las armónicas  $u$  del rotor adquieren idéntico valor que las armónicas  $v$  del estator. En lo que sigue a continuación se demuestra que para  $K_2 = 0$ , las armónicas  $u$  y  $v$  son estacionarias entre sí.

Cuando el rotor está en reposo, la velocidad relativa entre la armónica fundamental del campo giratorio y el rotor, es igual a la velocidad síncrona  $n_1$  y la f.e.m. inducida en el rotor es  $E_2' = E_1$ . Cuando el rotor gira a velocidad  $n$ , la velocidad relativa entre el flujo giratorio y el rotor es  $(n_s - n)$ . Debido a que de la velocidad relativa entre el flujo giratorio y el bobinado depende la magnitud y la frecuencia de la f.e.m. inducida en el rotor, la magnitud de la f.e.m. inducida en el bobinado del rotor es:

$$E_{2s}' = \frac{n_s - n}{n_s} E_2' \quad (\text{ver ec. 2-4}),$$

mientras que la frecuencia de esta f.e.m. es:

$$\text{ec. 2-64} \quad f_2 = \frac{n_s - n}{n} f_1 = s f_1$$

la corriente en los conductores del rotor está a la misma freque

cuencia, que la f.e.m. inducida en ellos. Se demostró ya, que estas corrientes inducidas en el rotor, crean un campo que gira respecto al rotor a la frecuencia  $f_2$ , es decir, a una velocidad en r.p.m.  $= n_2 = \frac{120 f_2}{p}$ , y tomando en cuenta, la ec. 2-64:

$$n_2 = \frac{120}{p} \left( \frac{n_1 - n}{n_1} \right) f_1$$

pero  $\frac{120 f_1}{p} = n_1$

ec. 2-65  $n_2 = n_1 - n$

De esta manera se concluye que el campo del rotor gira a una velocidad  $(n_2 + n)$  respecto al estator.

$$n_2 + n = n_1 - n + n$$

$$n_2 + n = n_1$$

es decir a la misma velocidad que la f.m.m. del estator. Esta demostración se ha realizado sólo para la armónica fundamental. Para generalizar esta demostración basta hacer los siguientes reemplazos:

ec. 2-66  $f_{2v} = S_v f_{1v}$

$f_{1v}$  es la frecuencia de la armónica de orden  $v$

de la f.m.m del estator.

$f_v$  es la frecuencia de las corrientes inducidas en el rotor.

$$\text{ec. 2-67} \quad S_v = \frac{n_{1v} - n}{n_{sv}}$$

$$\text{ec. 2-68} \quad n_{1v} = \frac{120 f_{1v}}{p}$$

En este caso la velocidad en r.p.m. de la f.m.m. del rotor, es:  $n_{2v} = \frac{120 f_{2v}}{p}$ , respecto al rotor. Esta velocidad, respecto al estator es  $n_{2v} + n$ , y la denominamos  $n_r$ .

$$\text{ec. 2-69} \quad n_r = n_{2v} + n$$

$n$  es la velocidad del rotor.

pero  $n_{2v} = n_{1v} - n$ , por lo que reemplazando en la ec.2-69

$$n_r = (n_{1v} - n) + n$$

$$(n_r = n_{1v})$$

#### CALCULO DEL PAR MOTOR PARASITO ASINCRONO.-

Debido a que las armónicas del mismo orden del estator y el rotor son estacionarias, existe entre cada una de ellas un torque o par motor. En el apartado introductorio de la máquina de inducción, se demostraron las 3 ecuaciones básicas

de la máquina de inducción:

$$\text{ec. 2-70} \quad \dot{V}_1 + \dot{E}_1 - j\dot{I}_1 x_1 = \dot{I}_1 r_1$$

$$\text{ec. 2-71} \quad s\dot{E}_2' - j\dot{I}_2' s x_2 = \dot{I}_2' r_2'$$

$$\text{ec. 2-72} \quad \dot{E}_1 = \dot{E}_2' = -\dot{I}_m \dot{Z}_m = -(\dot{I}_1 + \dot{I}_2') \dot{Z}_m$$

En donde los subíndices 1 indican pertenencia al estator, y los subíndices 2 al rotor. Las comillas en las variables del rotor señalan el traslado al estator y los puntos sobre las variables indican fasores. Al multiplicar la segunda ecuación por la corriente  $\dot{I}_2'$ , y dividir todos sus términos para el deslizamiento  $s$ , se tiene:

$$\text{ec. 2-73} \quad m_1 \dot{E}_2' \dot{I}_2' - j m_1 (\dot{I}_2')^2 x_2' = m_1 (\dot{I}_2')^2 \frac{r_2'}{s}$$

El primer término, visto desde el estator, representa la potencia compleja activa y reactiva total. El segundo término abarca la potencia reactiva de los flujos de dispersión, mientras que el tercero es la potencia activa del rotor. Esta potencia activa a su vez está dividida en dos rubros a saber: el primero  $m_1 (\dot{I}_2')^2 r_2'$  es el calentamiento de los conductores del rotor, y el segundo  $m_1 (\dot{I}_2')^2 \frac{r_2'}{s} - m_1 (\dot{I}_2')^2 r_2' = m_1 (\dot{I}_2')^2 \frac{1-s}{s} r_2'$  representa la potencia mecánica desarrollada.

Sea  $T$  el par motor desarrollado por la armónica fundamental:

$$\text{ec. 2-74} \quad T = \frac{7.04}{n} P \text{ |lb-pie|}$$

P es la potencia activa dada en Watts.

n es la velocidad en r.p.m. del rotor.

Como la potencia mecánica desarrollada está dada por:

$$\text{ec. 2-75} \quad P_{m.\text{des}} \left( \frac{1-s}{s} r_2' \right) m_1 (I_2')^2$$

Si la velocidad real del rotor está dada por  $n = (1-s)n_s$ , la ecuación del torque desarrollado quedaría:

$$\begin{aligned} \text{ec. 2-76} \quad T_{\text{des}} &= \frac{7.04}{(1-s)n_s} m_1 I_2'^2 \frac{1-s}{s} r_2' = \\ &= \frac{7.04}{n_s} m_1 I_2'^2 \frac{r_2'}{s} \text{ lb - pie} \end{aligned}$$

El par motor dado por la ec. 2-76 esta calculado para la armónica fundamental, en términos del estator. En términos del rotor sería:

$$\text{ec. 2-77} \quad T_{\text{des}} = \frac{7.04}{n_s} m_2 I_2^2 \frac{r_2}{s} \text{ lb - pie}$$

PARA EL ROTOR JAULA DE ARDILLA.-

El rotor jaula de ardilla tiene un número de fases igual al número de barras.  $m_2 = Q_2$

$$\text{ec. 2-78} \quad T_{\text{des}} = \frac{7.04}{n_s} Q_2 I_2^2 \frac{r_2}{s} \text{ lb - pie}$$

En general, el torque para la armónica de orden  $v$  se encuentra, si se sustituye  $s$  por  $S_v$ ,  $n_s$  por  $n_{sv}$ ;  $I_2$  por  $I_{2v}$  y  $r_2$  por  $r_{2v}$ .

$$\text{ec. 2-79} \quad T_v = \frac{7.04}{n_{sv}} Q_2 I_{2v}^2 \frac{r_{2v}}{S_v}$$

El significado de cada uno de los elementos integrantes de esta última ecuación es:

a)  $n_{sv}$ , es la velocidad de la armónica de orden  $v$  en r.p.m.

$$n_{sv} = \frac{n_s}{v} \text{ (ver ecuaciones 2-38 y 2-1)}$$

$$\text{ec. 2-80} \quad n_{sv} = \frac{120 f_1}{v p}$$

b)  $S_v$  es el deslizamiento de la armónica  $v$  respecto al rotor:

$$S_v = \frac{n_{sv} - n}{n_{sv}} = 1 - \frac{n}{n_{sv}} = 1 - \left( \frac{n}{n_s} \right) v$$

$$\text{ec. 2-81} \quad S_v = 1 - v (1-s)$$

en donde  $v$  es el orden de la armónica, y  $s$  es el deslizamiento

to de la onda principal.

c)  $r_{2v}$  es la resistencia total de un circuito del rotor, com puesto por la barra y los anillos terminales, como se ve rá a continuación, el valor  $r_{2v}$  aumenta con el orden de la armónica, bajo una relación compleja.

La Fig. 2.11 representa las mallas de circulación de la corriente dentro del rotor.

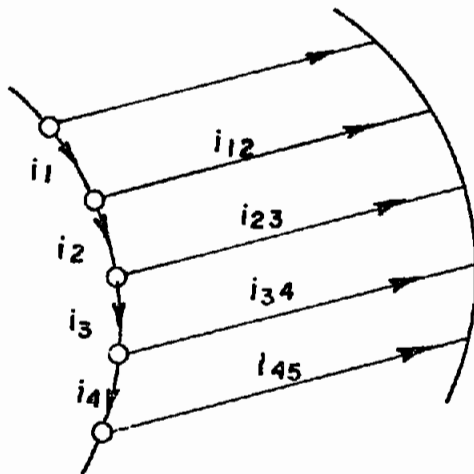


FIG. 2.11

Los vectores representativos de dos barras adyacentes están defasados por el ángulo de ranura:

ec. 2-82 
$$\alpha_{s2} = \frac{\pi p}{Q_2}$$

con respecto a la onda principal. Con respecto a la armónica de orden  $v$  están defasados por el ángulo:

$$\text{ec. 2-83} \quad \alpha_{s2v} = \frac{\pi p}{Q_2} \cdot v$$

Debido a la simetría de la jaula de la Fig. 2.11, las corrientes en los anillos también son sinusoidales. Geométricamente es sencillo demostrar que estos vectores tienen igual defasamiento que los de las barras, es decir,  $\alpha_{s2v}$ . Si se designa en general la corriente de la barra por  $I_b$  y la corriente del anillo por  $I_a$ , se deduce de la Fig. 2.12 que:

$$\text{ec. 2-84} \quad I_b = I_a 2 \operatorname{sen} \left( \frac{\alpha_{s2v}}{2} \right)$$

Para la onda principal, el ángulo  $\alpha_{s2v}$  adquiere usualmente un valor pequeño, y por lo tanto se puede asumir que:

$$\text{ec. 2-85} \quad I_b \approx I_a 2 \left( \frac{\alpha_{s2v}}{2} \right) = I_a \alpha_{s2v}$$

pues para los ángulos pequeños  $\operatorname{sen} \frac{\alpha_s}{2} = \frac{\alpha_s}{2}$

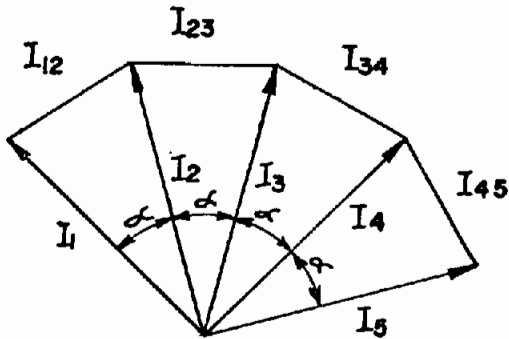
Despejando  $I_a$  de la ec. 2-85:

$$\text{ec. 2-86} \quad I_a \approx \frac{I_b}{\alpha_{s2}} = \frac{I_b Q_2}{\pi p}$$

y en forma general:



ec. 2-87 
$$I_a = \frac{I_b}{2 \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha_{s2v}}{2}\right)}$$



$I_b = I_1 = I_2 = \dots$

$I_a = I_{12} = I_{23} = \dots$

FIG. 2.12.

Las pérdidas en el cobre de la jaula son:

ec. 2-88 
$$P_{cu} = Q_2 (I_b^2 r_b + 2I_a^2 r_a)$$

en donde  $r_b$  y  $r_a$  son las resistencias de una barra y de un anillo respectivamente, mientras que el 2 representa el número de anillos involucrados. Tomando en cuenta el valor de  $I_r$  dado por la ec. 2-87 obtenemos:

ec. 2-88.a 
$$P_{cu} = Q_2 \left( I_b^2 r_b + 2 \left( \frac{I_b}{2 \operatorname{sen} \frac{\alpha_{s2v}}{2}} \right)^2 r_a \right)$$

ec. 2-89 
$$P_{cu} = Q_2 I_b^2 \left| r_b + \frac{r_a}{2 \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\alpha_{s2v}}{2} \right)} \right|$$

por lo que se puede concluir que la resistencia  $r_{2v}$  está da-

da por:

$$\text{ec. 2-90} \quad r_{2v} = r_b + \frac{r_a}{2 \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\alpha_{S2V}}{2} \right)}$$

Cuando las condiciones de diseño de la barra - ranura del rotor no son las óptimas, puede presentarse el efecto pelicular sobre todo para las armónicas de orden elevado. La Fig. 2.13 toma en cuenta el incremento de la resistencia en función de un valor experimental  $\epsilon$  dado por:

$$\text{ec. 2-91} \quad \epsilon = 0.316 \text{ hb} \left( \frac{l_b}{l_r} \right) \left( \frac{f_2}{p} \right)$$

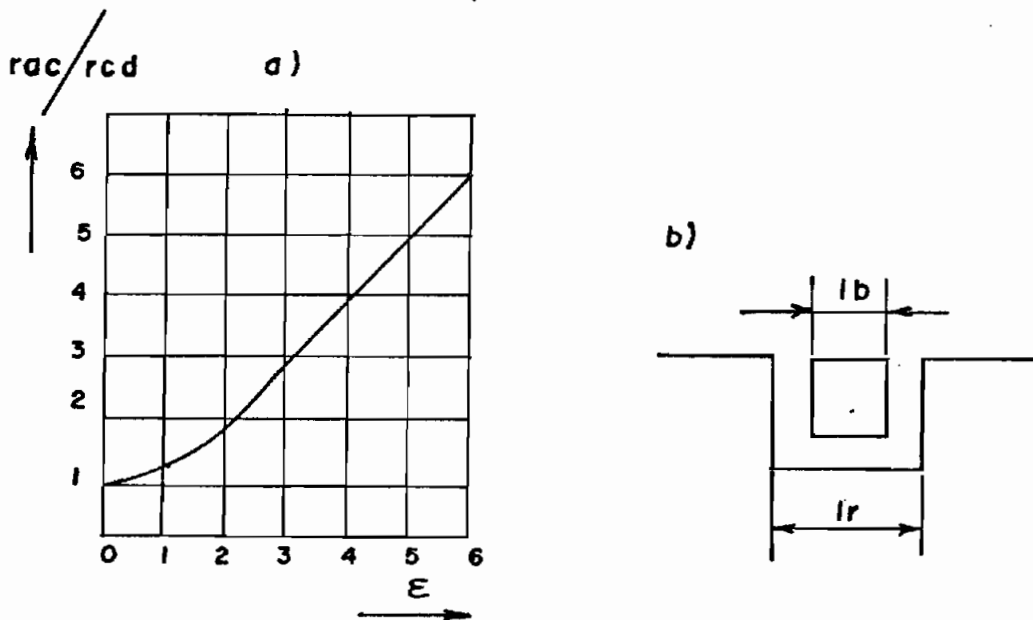


FIG. 2.13.

hb es la altura de la barra,  $\ell_b$  y  $\ell_r$  son los anchos de barra y ranura, respectivamente,  $f_2 = S_v f_1$  es la frecuencia de la corriente secundaria.  $\rho$  es la resistividad de la barra en microohms/plg<sup>2</sup> (Ver Fig. 2.13, b). De todos los términos que aparecen en la ec. 2-91,  $f_2$  y  $\rho$  son constantes para una determinada armónica y para el material de la barra (cu generalmente). Para minimizar  $\epsilon$  queda la necesidad de diseñar una barra con poca profundidad, y si esto no es posible se debe lograr que exista aire a los lados de la barra, incrementando el ancho de ranura  $\ell_r$ .

d)  $I_{2v}$  es la corriente real del rotor, debida a la armónica v que puede calcularse, recordando las siguientes ecuaciones de Kirchoff para la armónica de orden v. [Ver ec. 2-71 y 2-72].

$$\text{ec. 2-92} \quad \dot{E}'_{2v} = \dot{E}'_{1v} = \dot{I}'_{2v} \left( \frac{r'_{2v}}{S_v} + j x'_{2v} \right)$$

$$\text{ec. 2-93} \quad \dot{E}'_{2v} = \dot{E}'_{1v} = - \dot{I}_{mv} Z'_{mv} = - (\dot{I}'_{1v} + \dot{I}'_{2v}) Z'_{mv}$$

igualando las dos ecuaciones,

$$- (\dot{I}'_{1v} + \dot{I}'_{2v}) \dot{Z}'_{mv} = \dot{I}'_{2v} \left( \frac{r'_{2v}}{S_v} + j x'_{2v} \right)$$

$$Z'_{mv} = r'_{mv} + j x'_{mv}$$

pero generalmente  $r_{mV}$  es despreciable frente a  $x_{mV}$ , por lo que, sin gran error se puede asumir que:

$$Z'_{mV} = j x'_{mV}$$

de este modo,

$$- \dot{I}'_{1V} j x'_{mV} = \dot{I}'_{2V} \left( \frac{r'_{2V}}{S_V} + j x'_{2V} + j x'_{mV} \right)$$

de donde:

$$\text{ec. 2-94} \quad \dot{I}'_{2V} = - \frac{\dot{I}'_{1V}}{\left(1 + \frac{x'_{2V}}{x'_{mV}}\right) - j \left(\frac{r'_{2V}}{S_V x'_{m2V}}\right)}$$

o lo que da igual a:

$$\text{ec. 2-95} \quad \dot{I}'_{2V} = - \frac{\dot{I}'_{1V}}{\frac{x'_{2V}}{x'_{m2V}} - j \left(\frac{r'_{2V}}{S_V x'_{m2V}}\right)}$$

A su vez,  $\dot{I}'_{1V}$  puede ser calculada, recordando que la f.m.m. armónica de orden  $v$ , está dada por:

$$\text{ec. 2-96} \quad \text{f.m.m.}_{(v)} = 0.9 m_1 \frac{N_1 K_{d1V} K_{red1V}}{p v} I_1$$

que puede considerarse como:

$$\text{ec. 2-97} \quad \text{f.m.m}_{(v)} = 0.9 m_1 \frac{N_1 Kd_{1v} K_{red_{1v}}}{p} I_{1v}$$

$Kd_{1v}$  = factor de distribución del estator, para la armónica v.

en donde se ha hecho el reemplazo de:

$$\text{ec. 2-98} \quad I_{1v} = \frac{I_1}{v}$$

La ec. 2-97 expresada en términos del secundario sería:

$$\text{ec. 2-99} \quad \text{f.m.m}_{(v)} = 0.9 m_2 \frac{N_2 Kd_{2v} K_{R_{2v}}}{p} I'_{1v}$$

para que las ecuaciones 2-97 y 2-99 sean iguales,

$$\text{ec. 2-100} \quad I'_{1v} = \frac{m_1 N_1 Kd_{R_{1v}}}{m_2 N_2 Kd_{R_{2v}}} I_{1v}$$

$$Kd_{R_{1v}} = (Kd_{1v}) (K_{R_{1v}})$$

$$Kd_{R_{2v}} = (Kd_{2v}) (K_{R_{2v}})$$

PARA EL ROTOR JAULA DE ARDILLA.

CALCULO DEL DESLIZAMIENTO DE TORQUE MAXIMO.-

Si en la ec. 2-79 se reemplaza  $n_{sv} = \frac{120 f_1}{p v}$ ;  $I_{2v}$  por su

igualdad de la ec. 2-95 y  $\omega = 2 \pi f_1$ , resulta:

$$\text{ec. 2-101} \quad T_V = 0.369 \frac{vp}{\omega} Q_2 r_{2v} \frac{S_V x_{m_{2v}}^2}{r_{2v}^2 + S_V^2 (1 + T_{2v})^2 x_{m_{2v}}^2} I_{1v}'^2$$

$$\text{siendo } T_{2v} = \frac{x_{2v}}{x_{m_{2v}}}$$

Para encontrar el par motor de desenganche producido por la armónica de orden v, debe diferenciarse la ec. 2-101 con respecto a  $S_V$ . Como se puede observar de la Fig. 2.14, a deslizamientos no pequeños, la corriente varía muy poco con el deslizamiento, y produciéndose los valores más altos del torque a deslizamientos más o menos elevados, se puede asumir sin cometer gran error que la corriente es constante respecto a la diferenciación que se realiza a continuación.

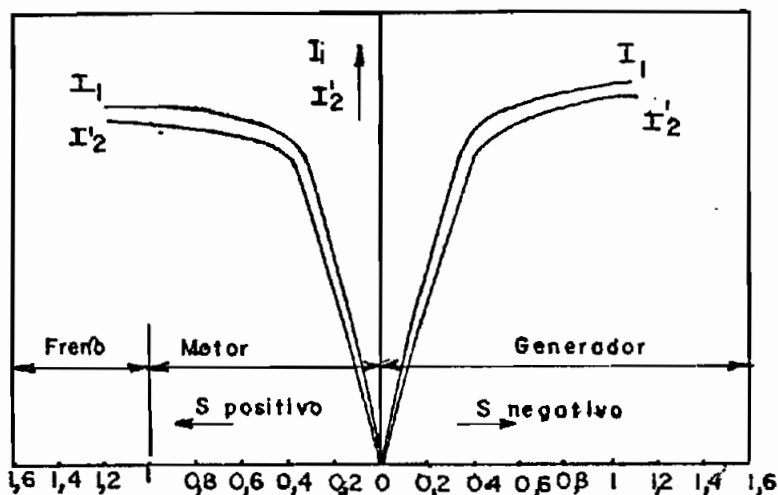


FIG. 2.14

Corrientes del estator y el rotor como función del deslizamiento.

Realizando la diferenciación e igualándola a cero, se obtiene que:

$$\text{ec. 2-102} \quad S_v \text{ máx} = \frac{r_{2v}}{(1 + T_{2v}) x_{m_{2v}}}$$

Nota.- Se sabe que se trata de un par motor máximo, porque su segunda derivada es un valor positivo.

mientras,

$$\text{ec. 2-103} \quad T_v \text{ máx} = 0.184 \frac{vp}{\omega} Q_2 \frac{x_{m_{2v}}}{1 + T_{2v}} (I'_{1v})^2$$

debe notarse que  $S_v \text{ máx}$  es el deslizamiento de la armónica  $v$  a la cual ocurre el par motor máximo. Ya en la práctica se va a necesitar el deslizamiento  $S$  de la onda principal al que ocurre el par-motor máximo de la armónica de orden  $v$ . Para esto, recordando la fórmula 2-41 que indica que:

$$\text{ec. 2-104} \quad S_v = 1 - v (1 - s)$$

e igualando los segundos miembros de las ecuaciones 2-104 y 2-102, se obtiene:

$$1-v (1 - S_{\text{max}}) = \frac{r_{2v}}{(1 + T_{2v}) x_{m_{2v}}}$$

de donde:

$$\text{ec. 2-105} \quad S_{\text{máx}} = \frac{(v-1)(1 + \tau_{2v}) x_{m_{2v}} + r_{2v}}{v(1 + \tau_{2v}) x_{m_{2v}}}$$

En la generalidad de casos  $r_{2v} \ll (v-1)(1 + \tau_{2v}) x_{m_{2v}}$ , por lo que se puede prescindir de ese valor, quedando simplemente:

$$\text{ec. 2-106} \quad S_{\text{máx}} = \frac{v-1}{v} = 1 - \frac{1}{v}$$

Ejemplos importantes:

Recordando que sólo se tiene armónicas impares, y de éstas sólo existen las que satisfacen la fórmula de la ec. 2-33.

$$\text{ec. 2-107} \quad v = K_1 m_1 + 1$$

Se va a analizar las siguientes armónicas, para un bobinado trifásico:

$K_1 = 0$	$K_1 = -1$	$K_1 = +1$	$K_1 = -2$	$K_1 = +2$	$K_1 = -3$	$K_1 = +3$
$v = +1$	$-2$	$+4$	$-5$	$+7$	$-8$	$+10$

de éstas se elimina los pares y queda:

Para  $v = -5$ .



$$S_{\text{máx}} = 1 - \frac{1}{-5} = 1 + 0.2$$

ec. 2-108  $S_{\text{máx}} = 1.2$

deslizamiento que corresponde en la zona de funcionamiento como freno. (Ver Fig. 2.14).

Para  $v = +7$ .

ec. 2-109  $S_{\text{máx}} = 1 - \frac{1}{7} = 0.86$

EN EL MOTOR DE INDUCCION CON ROTOR BOBINADO.-

En el rotor bobinado, al contrario del rotor Jaula de ardi-  
lla, existe un número de polos que no depende de la armónica,  
y que generalmente es el mismo número que el del estator. De  
este modo al considerar las corrientes inducidas en el rotor  
por un campo giratorio armónico de orden  $v$ , debe considerarse  
primeramente el valor del paso polar, y después el valor  
del período de la armónica en consideraci $\bar{c}$ n.

Es sabido y demostrado ya, que la longitud de onda de la ar  
mónica de orden  $v$  es igual a la longitud de onda de la prime  
ra armónica dividida para  $v$ . Siendo el paso polar igual a  
la mitad de la longitud de onda se puede concluir la siguien  
te relación:

$$\text{ec. 2-110} \quad \lambda_v = \frac{2\tau}{v}$$

$\tau$  es el paso polar.

$\lambda_v$  es la longitud de onda de la armónica de orden  $v$ .

$$\text{ec. 2-111} \quad \tau = v \left( \frac{\lambda_v}{2} \right)$$

Esto significa que en un paso polar, bobinado en serie, se encuentran  $v$  semilongitudes de onda. En vista que  $v$  es siempre impar en las máquinas que interesa ( $v-1$ ) es un número par dado por:

$$v-1 = K.m_1 \quad (\text{Ver ec. 2-107})$$

Estas ( $v-1$ ) semilongitudes de onda se eliminan mutuamente, quedando sólo una semilongitud de onda efectiva de flujo giratorio. Debido a esto el factor de distribución de la armónica  $v$ , cuando no existen arreglos especiales de eliminación de armónicas, es:

$$Kd_v = \frac{Kd}{v}$$

Debido a esta propiedad del rotor bobinado, los flujos armónicos no producen efectos de consideración en el rotor ni en el funcionamiento de la máquina de inducción.

CALCULO DE LAS REACTANCIAS DE DISPERSION ARMONICA Y DE FLUJO PRINCIPAL.-

Las ecuaciones 2-95; 2-101; 2-102; 2-103, etc. dan la corriente, el torque máximo y el deslizamiento máximo, en función de varios parámetros, quedando por determinarse dos de ellos:

- a) La reactancia de flujo principal debida al armónico  $v$  que envuelve al rotor y al estator.  $x_{m_{2v}}$ ;
- b) La reactancia de dispersión en los bobinados del rotor  $x_{2v}$  ; y
- c) La reactancia de dispersión en el rotor.

a) Reactancia de flujo principal.- Por definición, la reactancia viene dada por:

ec. 2-112  $x_{m_{2v}} = 2\pi f_1 L_{mv}$

en donde  $L_{mv}$  es la inductancia de flujo principal.

ec. 2-113  $L_{mv} = \frac{\psi_{mv}}{\sqrt{2} I_m}$

siendo  $\psi_{mv}$  la amplitud máxima de entrelazamientos de flujo mutuo entre el estator y rotor.  $I_m$  es la corriente eficaz de magnetización.

Recordando las ecuaciones 2-20, 2-28 y 2-39.a se puede con-

cluir que:

$$\text{ec. 2-114} \quad x_{m_2 (v=1)} = 3.2 m_2 f_1 (N_2 K_{dred_2})^2 \frac{\tau l_e}{pg Kc Ks}$$

y

$$\text{ec. 2-115} \quad x_{m_{2v}} = 3.2 m_2 f_1 \left( \frac{N_2 K_{dred_{2v}}}{v} \right)^2 \frac{\tau l_e}{pg Kc}$$

$Ks \cong 1$  para armónicas

De estas dos últimas ecuaciones se concluye que:

$$\text{ec. 2-115.a} \quad x_{m_{2v}} = x_{m_2 (v=1)} \left( \frac{1}{v} \right)^2 \left( \frac{K_{dred_{1v}}}{K_{d_{r_1}}} \right)^2 Ks$$

Debe recordarse que la reactancia de flujo principal para la primera armónica  $x_{m_2}$  puede ser calculada experimentalmente con suficiente precisión y a partir de esos resultados y utilizando la ec. 2-115.a se calcula  $x_{m_{2v}}$ .

b) Reactancia de dispersión armónica en el estator ( $x_{1v}$ ).-

Consideramos que:

$$x_{1v} = 2 \pi f_1 L_{1v}$$

( $L_{1v}$  es la inductancia de dispersión del estator)

De igual manera que en a),

$$L_{1v} = \frac{\psi_{1v}}{\sqrt{2} I_1}$$

Recordando las ecuaciones 2-20; 2-28 y 2-39.1

$$\psi_{1v} = \phi_{1v} N_1 Kdr_{1v}$$

$$\phi_v = \frac{2\tau}{v} \times \frac{1}{v} \ell_e B_v$$

$$B_v = 0.9 m_1 \frac{N_1 Kdr_{1v}}{v} \times \frac{3.19}{pg Kc Ks} I_1$$

lo que da como resultado:

$$\text{ec. 2-116} \quad x_{1v} = 3.2 m_1 f_1 N_1^2 \frac{\tau \ell_e}{pg Kc} \times 2.54 \times 10^{-8} \left( \frac{Kd_{red} v}{v} \right)^2$$

$$\text{ec. 2-117} \quad x_{1v} = x_{1(v=1)} \times \left( \frac{1}{v} \right)^2 \times \left( \frac{Kd_{red_{1v}}}{Kd_{red_1}} \right)^2 \times Ks$$

c) Reactancia de dispersión armónica en el rotor  $x_{2v}$ ,-

Si el rotor y el estator tienen la misma configuración (rotor bobinado) se encuentra que se producen en el rotor armónicas dadas por la ec. 1-52 que son del mismo orden que

las del estator. Por esto, la ec. 2-116 debe aplicarse también al arrollamiento del rotor devanado. Esto es:

$$\text{ec. 2-118} \quad x_{2(v=1)} = 3.2 m_2 f_1 N_2^2 \frac{\tau l_e}{p g K_c K_s} \times 2.54 \times 10^{-8} \sum_{u \neq 1} \left( \frac{K_{d_{red_{2v}}}}{u} \right)^2$$

Así mismo como en la ec. 2.105.a.

$$\text{ec. 2-119} \quad x_{2v} \cong x_2 \times \left( \frac{1}{v} \right)^2 \times \left( \frac{K_{d_{red_{2v}}}}{K_{d_{red_2}}} \right)^2 \times K_s$$

Debe notarse que  $K_{d_{red_{2v}}} \ll K_{d_{red_2}}$ , ya que la corriente inducida en el rotor por la armónica  $v$  tiende a eliminarse en cada polo, como ya se explicó en el artículo anterior sobre rotores devanados. Por esto:

$$x_{2v} \ll x_2$$

y

$$\text{ec. 2-120} \quad \frac{x_{2v}}{x_2} \approx 0$$

Cuando el rotor es jaula de ardilla, se utiliza la ec. 2-118, previo reemplazo de:

$$m_2 = Q_2$$

$$N_2 = 1/2$$

$$K_{d_{p2 u}} = 1$$

y

$$u = \frac{K_2 Q_2}{p/2} + 1 \quad (v = 1)$$

Así mismo debe introducirse el factor de inclinación, que es usado sobre todo en los rotores de jaula (Véase Apéndice A<sub>1</sub>).

De este modo:

$$\begin{aligned} \text{ec. 2-121} \quad x_2 = & 0.8 Q_2 f_1 \frac{\tau l_e}{pgK_c K_s} K_{SK(v=1)}^2 \times 2.54 \times 10^{-8} \sum_{K_2 \neq 0} \times \\ & \times \left( \frac{1}{(K_2 Q_2 + 1) \frac{1}{2p}} \right)^2 \end{aligned}$$

Nótese que en las ecuaciones 2-121 y 2-118 se tiene sumatorios en los que se ha eliminado la primera armónica ( $u = 1$  y  $K_2 = 0$  respectivamente), pues para la primera armónica del rotor, se tiene la reactancia de flujo principal  $x_{m_2}$ .

La reactancia de dispersión del rotor para la armónica de orden  $v$  está dado por:

$$\begin{aligned} \text{ec. 2-122} \quad x_{2v} = & 0.2 Q_2 f_1 \frac{p\tau l_e}{g K_c} K_{SKv}^2 \times 2.54 \times 10^{-8} \sum_{K_2 \neq 0} \\ & \left( \frac{1}{K_2 Q_2 + v \frac{p}{2}} \right)^2 \end{aligned}$$

a la cual se llega dándole a  $u$  el valor  $u = \frac{K_2 Q_2}{\frac{p}{2}} + v$

El sumatorio de las ecuaciones 2-122 y 1-121 se hacen pequeños a medida que se aumenta el número de barras del rotor y para valores suficientemente grandes de  $Q_2$  el término

$$K_2 \neq 0 \frac{1}{K_2 Q_2 + v \frac{p}{2}} \approx 0, \text{ ya que}$$

el término que tiene mayor incidencia en ese sumatorio es cuando  $K_2 = 1$ . Para  $K_2 > 1$  el término decrece con mayor rapidez.

## 2.5.2 MECANISMOS DE ELIMINACION DE ARMONICAS.

a) FACTOR DE REDUCCION DE PASO.- Es necesario ver la curva característica de la f.m.m. para devanados con paso completo y con paso reducido. En la Fig. 2.15 que se muestra a continuación están representadas las curvas de f.m.m. de un devanado de dos capas distribuido uniformemente de paso entero ( $\beta = 1$ ) para dos momentos de tiempo que se diferencian entre sí en  $30^\circ$  y también la curva sinusoidal del armónico fundamental de f.m.m.



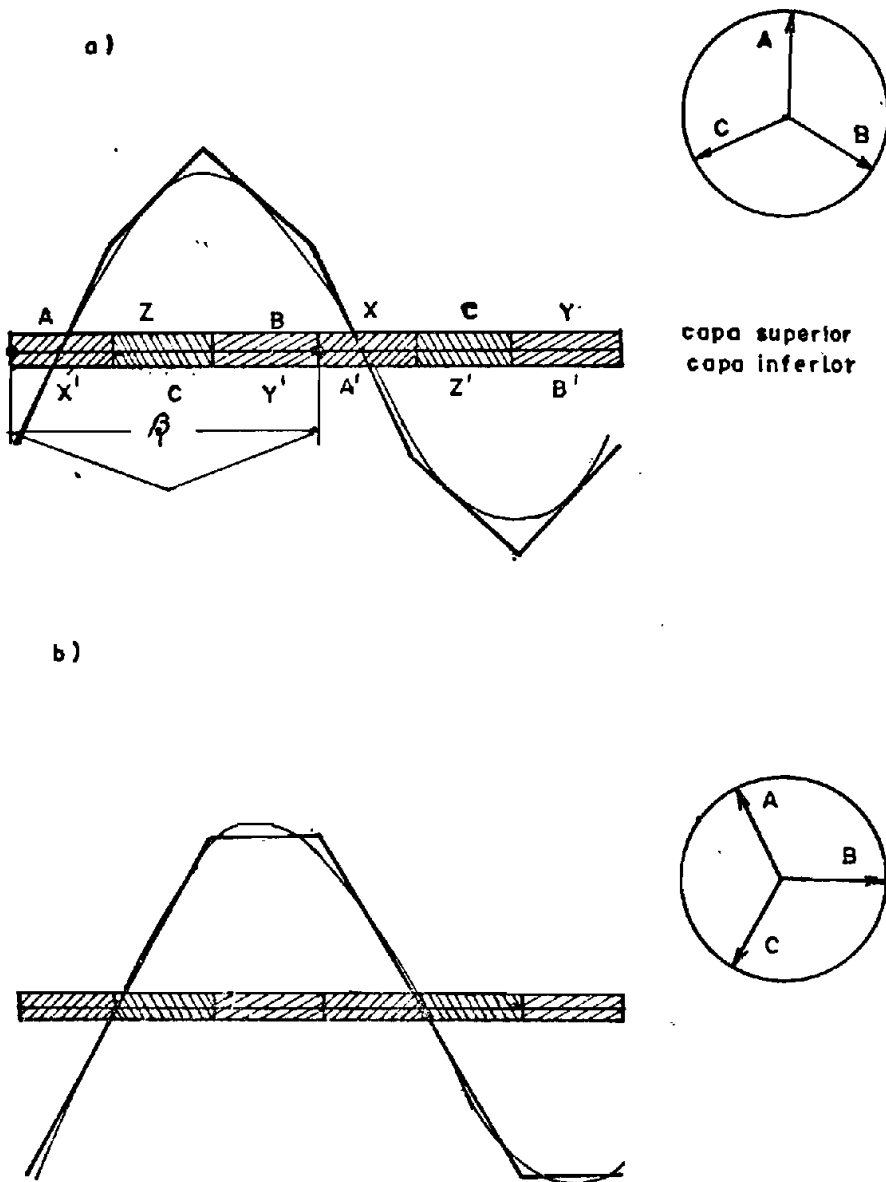
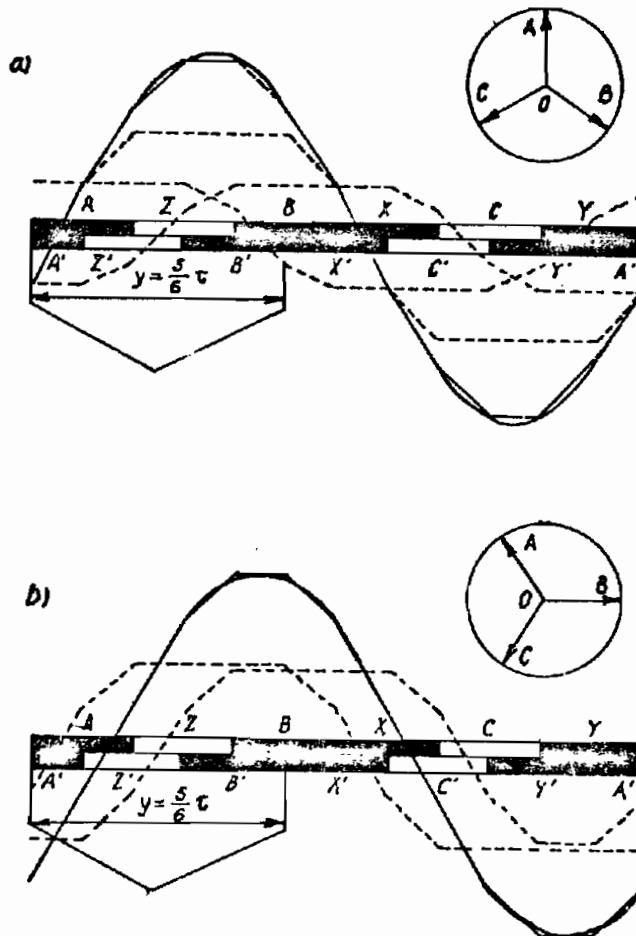


FIG. 2.15

Curvas de f.m.m. de un devanado uniformemente distribuido de paso entero para dos momentos de tiempo.

En la Fig. 2.16, a y b, están representadas las curvas de f.m.m. de un devanado de dos capas uniformemente distribuí-

dos con un paso reducido de  $y = \frac{5}{6} \tau$  para los mismos momentos de tiempo que en la Fig. 2.15, a y b.



Curvas de f.m.m. de un devanado de dos capas uniformemente distribuido con paso relativo  $\beta = 5/6$  para dos momentos de tiempo.

FIG. 2.16

La comparación de las curvas de f.m.m. de los devanados de paso entero y de paso reducido siendo  $\beta = \frac{5}{6} = 0,833$  demuestra que en el último caso la curva de f.m.m. coincide mucho mejor con la curva sinusoidal de f.m.m. que cuando el paso

es entero. Esta tesis se deriva también del análisis de las expresiones obtenidas para la f.m.m. De acuerdo con el Apéndice A.1:

$$\text{ec. 2-123} \quad \frac{K_{\text{red}_v}}{K_{\text{red}_1}} = \frac{\text{sen } v \left( \frac{5}{6} \frac{\pi}{2} \right)}{\text{sen} \left( \frac{5}{6} \frac{\pi}{2} \right)}$$

Para la armónica  $v = 7$ .

$$\text{ec. 2-124} \quad \frac{K_{\text{red}_7}}{K_{\text{red}_1}} = \frac{0.259}{0.966} = 0.268$$

Por eso, cuando el paso es reducido ( $\beta = \frac{5}{6}$ ) los armónicos 5<sup>a</sup> y 7<sup>a</sup> se reducen hasta 0.268 del valor de los mismos cuando el paso es diametral (entero,  $\beta = 1$ ), a causa de lo cual el contenido relativo de armónicos disminuye notablemente.

Para comparar la influencia de la reducción del paso en la magnitud relativa de los armónicos superiores, en la figura 2.17 se dan las diferencias entre las f.m.m. para dos momentos de tiempo principales (críticos), que se diferencian entre sí en 30°, cuando el paso se reduce desde  $\beta = 1,0$  hasta  $\beta = 0,5$ .

En la Fig. 2.17, las curvas demuestran que los mejores resultados los proporciona la reducción del paso entre los lí-

mites  $\beta = 0.833$  hasta  $\beta = 0.805$ . Cuando  $\beta = 0.667$  el conte  
nido de armónicos es el mismo que para  $\beta = 1.0$  .

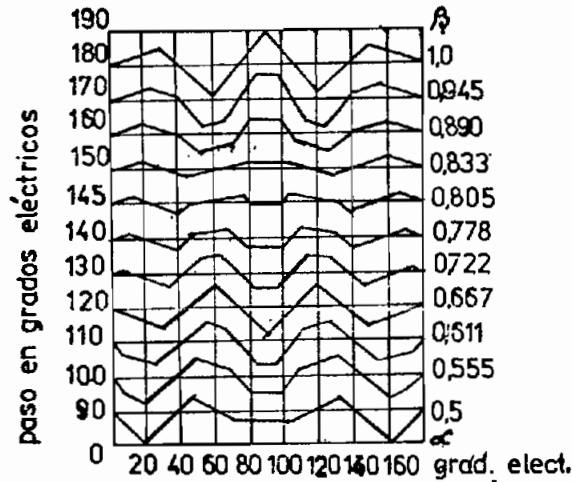


FIG. 2.17

Este rango de reducción de paso (0.833 - 0.805) se constituye en un acápito importante dentro de las directrices generales para el diseño de un motor de propósito múltiple. Este no es el caso cuando se desea eliminar una armónica en forma particular, pues para solucionar este problema ya no nos in  
teresa un rango de variación de la reducción de paso, sino un valor exacto. Por ejemplo, si se desea un motor que arranque con carga, interesa que se elimine totalmente la 7<sup>a</sup> armónica, ya que ésta tiene su torque máximo (y mínimo por consiguiente) alrededor del deslizamiento  $s = 0.86$  (ver ec. 2-109) mientras que la 5<sup>a</sup> armónica no aparece con fuerza sino en  $s = 1.2$ , que siendo un punto de funcionamiento como genera-

dor no interesa al propósito de la máquina mencionada. Por esto se debe lograr que:

$$\frac{K_{red,7}}{K_{red,1}} = \frac{\text{sen } 7 \beta \frac{\pi}{2}}{\text{sen } \beta \frac{\pi}{2}} = 0$$

de donde:

$$\text{sen } 7 \beta \frac{\pi}{2} = 0$$

o sea,

$$7 \beta \frac{\pi}{2} = K \pi \quad K = 1, 2, 3, \dots$$

$$\beta = \frac{2K}{7} = \frac{2}{7}; \frac{4}{7}; \frac{6}{7}$$

cuando  $\beta < 1$  (paso reducido)

dentro de estos 3 posibles valores de  $\beta$  se selecciona aquel que posibilita un mayor factor de paso para la primera armónica, siendo este  $\beta = \frac{6}{7} = 0.856$ .

Si por alguna razón particular de diseño se desea eliminar totalmente la armónica de orden  $v = 5$ , interesa un factor de paso que satisfaga la condición

$$\text{sen } 5 \beta \frac{\pi}{2} = 0$$

o lo que es igual:

$$5 \beta \frac{\pi}{2} = K \pi \quad K = 1, 2, 3, 4, \dots, \text{ etc.}$$

$$\beta = \frac{2K}{5} = \frac{2}{5}, \frac{4}{5}$$

Seleccionando para  $\beta < 1$ , el mayor valor, se tiene:

$$\beta = \frac{4}{5} = 0.8$$

para el cual no existe la 5ª armónica.

Debe notarse que los valores  $\beta = 0.856$  y  $\beta = 0.8$  que suprimen las armónicas  $v = 7$  y  $v = 5$ , respectivamente, se encuentran muy próximas al rango óptimo de reducción de paso, para supresión de armónicas  $|\beta(0,805 - 0.833)|$ .

b) MEDIANTE LA INCLINACION DE LAS RANURAS.- Este mecanismo de supresión de armónicas puede añadirse al anterior o utilizarse por separado. La inclinación de las ranuras puede realizarse en el rotor o en el estator, siendo la inclinación efectiva, la relativa existente entre los dos bobinados.

Del Apéndice A.1 extraemos:

ec. 2-126 
$$K_{si} = \frac{\text{sen} \left( \frac{\gamma_s}{2} \right)}{\frac{\gamma_s}{2}}$$

en donde  $\gamma_s$  es el ángulo central dado por la inclinación  $s$ .

$$\text{ec. 2-127} \quad \gamma_s = \frac{s}{\tau_{2s}} \alpha_{2s} = \frac{s}{\tau_{2s}} \times \left( \frac{\tau_{2s}}{\tau} \right) \pi$$

$$\text{ec. 2-127.a} \quad \gamma_s = \frac{s}{\tau} \pi$$

en donde  $\tau_{2s}$  es el valor del ancho de ranura y  $\tau$  es el paso polar.

Al reemplazar la ec. 2-127.a en la ec. 2-126, se tiene:

$$\text{ec. 2-128} \quad K_{si} = \frac{\text{sen} \left| \left( \frac{s}{\tau} \right) \frac{\pi}{2} \right|}{\left( \frac{s}{\tau} \right) \frac{\pi}{2}}$$

Este factor de inclinación, tomado para la armónica de orden  $v$  sería:

$$\text{ec. 2-128.a} \quad K_{siv} = \frac{\text{sen } v \left| \left( \frac{s}{\tau} \right) \frac{\pi}{2} \right|}{v \left( \frac{s}{\tau} \right) \frac{\pi}{2}}$$

Supóngase que mediante este mecanismo se desea eliminar totalmente la armónica de orden  $v$ . Para que esto suceda,

$$\text{sen } v \left| \left( \frac{s}{\tau} \right) \frac{\pi}{2} \right| = 0 \quad s \neq 0$$

o lo que es igual:

$$v \left( \frac{s}{\tau} \right) \frac{\pi}{2} = \pi$$

de donde,

$$\text{ec. 2-129} \quad s = \frac{2\tau}{v}$$

De la ecuación 2-129, para que  $K_{sv}$  sea cero  $s = \frac{2\tau}{v}$ . En este caso, el factor de inclinación  $K_{si}$  dado por la ec. 2-128 es:

$$\text{ec. 2-130} \quad K_{si} = \frac{\text{sen } \frac{\pi}{v}}{\frac{\pi}{v}}$$

Ejemplo.- Se desea eliminar totalmente la armónica  $v = 7$ , sin hacer uso de paso acortado,

$$s = \frac{2\tau}{7}$$

$$\text{ec. 2-131} \quad V_{si} = \frac{\text{sen } \frac{\pi}{7}}{\frac{\pi}{7}} = \frac{0.426}{0.448} = 0.95$$

Este resultado es alentador, pues, para una eliminación completa de la armónica  $v = 7$ , la armónica fundamental ha tenido un deterioro de sólo 5%.



Es importante que se note, que a medida que se incrementa el orden de la armónica a eliminarse completamente, el factor de inclinación  $K_{Si}$  para la armónica fundamental ( $v = 1$ ) se aproxima más a la unidad. Experimentos todavía con base teórica incompleta han demostrado un crecimiento apreciable de las corrientes parásitas en el hierro ( o acero ) al tener inclinaciones ( $s$ ) de gran valor, como es el caso de:  $s = \frac{2}{7} \tau$  (para eliminación de la armónica  $v = 7$ ), por lo que este método de eliminación de armónicas es usual, especialmente para la eliminación de armónicas de orden elevado. Entre las armónicas de orden elevado existen aquellas que se denominan "de ranura" y que por tener un factor de distribución idéntico al de la armónica fundamental se presentan con relativa fuerza dentro de la máquina. Las armónicas de ranuras están dadas por la ec. 2-63.

$$v = 2 m Q \pm 1$$

$$\text{ec. 2-132} \quad v = 2 \frac{Q}{p} K \pm 1$$

para  $K$  entero

$Q$  = número de ranuras.

De éstas las más importantes son aquellas que resultan de reemplazar  $K = 1$ , es decir:

$$\text{ec. 2-132.a} \quad v = 2 \left( \frac{Q}{p} \right) \pm 1$$

Para una máquina definida, existe un número definido de ranuu

ras ( $Q$ ) y por tanto una s3la arm3nica de ranura que cumpla con la ec. 2-132.a.

La Fig. 2.18 que se muestra a continuaci3n, describe la arm3nica de ranura, la ranura del estator, y la inclinaci3n de la barra del rotor necesaria para eliminar esa arm3nica. (Rev3cese adem3s el art3culo 2.4.1 y las Figuras 2.9 y 2.10.

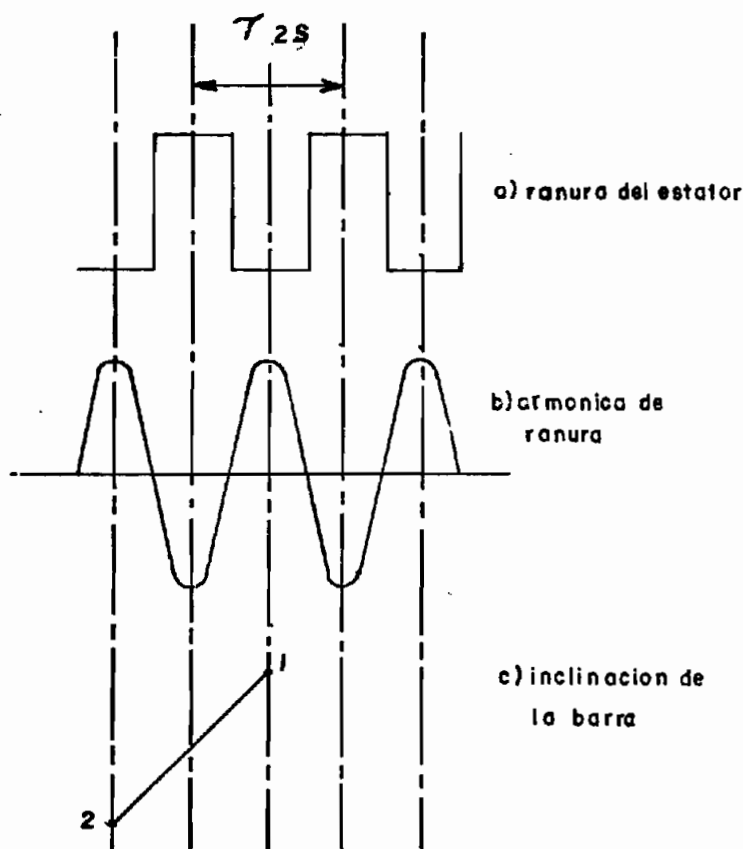


FIG. 2.18

En la Fig. 2.18 a) y b) se ha tomado como longitud de onda de la arm3nica de ranura, el valor de la longitud entre dos ranuras  $\tau_{2s}$ . Esto se demostr3 ya en el art3culo 2.4.1.

En la Fig. 2.18 c), se justifica la eliminación de la armónica de ranura al tener la barra una inclinación  $s = \tau_{2s}$ . Se trata ahora de justificar esto matemáticamente. Por el Apéndice A.1, se tiene que el factor de inclinación para la armónica de orden  $v$  es:

$$K_{siv} = \frac{\text{sen } v \left| \left( \frac{s}{\tau} \right) \frac{\pi}{2} \right|}{v \left| \left( \frac{s}{\tau} \right) \frac{\pi}{2} \right|}$$

al reemplazar  $v$  por  $v = 2 \left( \frac{Q}{p} \right) \pm 1$ , la ecuación anterior se convierte en:

$$K_{siv} = \frac{\text{sen } (2Q \pm 1) \left| \left( \frac{s}{\tau} \right) \frac{\pi}{2} \right|}{(2Q \pm 1) \left| \left( \frac{s}{\tau} \right) \frac{\pi}{2} \right|}$$

Es sencillo demostrar que para tener  $K_{siv} = 0$ ,  $s$  debe ser:

$$s = \frac{PT}{Q} ; \quad \text{con lo que queda demostrado.}$$

c) MEDIANTE EL ESCOGITAMIENTO DEL FACTOR DE DISTRIBUCION ( $K_d$ ).

Este mecanismo tiene sólo importancia teórica, pero no importancia práctica, ya que al reducirse por este método el factor de distribución de cualquier armónica, es grande la disminución que sufre el factor de distribución de la primera armónica. En esencia este mecanismo se lleva a la prácti

ca al remover ranuras de una fase a otra hasta lograr que el factor de distribución de una determinada armónica se anule. Se debe tratar de escoger aquella posibilidad que disminuya al mínimo factor de distribución de la primera armónica.

Ejemplo: Se tiene un motor polifásico de  $p = 2$  polos,  $m = 3$  fases y  $q = 6$  ranuras por polo y por fase. En este motor se desea eliminar la séptima armónica ( $v = 7$ ) si las ranuras del motor son axiales y su paso no es acortado.

El ángulo eléctrico entre ranuras adyacentes es:

$$\text{ec. 2-133} \quad \alpha_s = \frac{180^\circ}{m \times q} = \frac{180}{3 \times 6} = 10^\circ$$

La estrella de ranuras correspondiente es la que se muestra a continuación, en la Fig. 2.19.

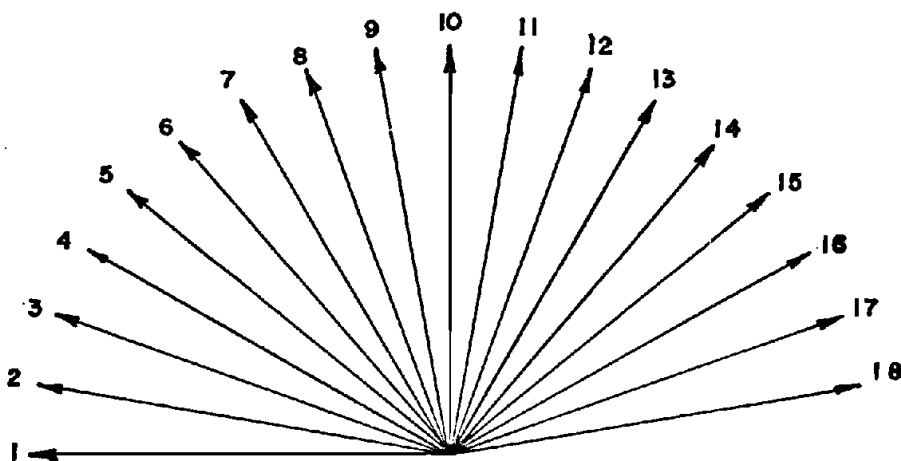


FIG. 2.19  
Estrella de ranuras

La estrella de ranuras que se muestra en la Fig. 2.19, representa sólo 18 vectores-ranuras de f.m.m., es decir la mitad del total existente en el estator. La otra mitad tiene vectores que se encuentran en la semicircunferencia complementaria, pero que al conectarse con los primeros en forma inversa pueden sumarse y representarse por la misma estrella de ranuras.

El máximo factor de distribución para la primera armónica se obtiene al tomar las 6 primeras ranuras para la fase A, las 6 siguientes para la fase C y las 6 últimas para la fase B. Este arreglo da los siguientes factores de distribución:

Para la primera armónica:

$$K_{d_1} = \frac{\text{sen } q \left( \frac{\alpha_s}{2} \right)}{q \text{ sen } \left( \frac{\alpha_s}{2} \right)} = \frac{\text{sen } 6 \left( \frac{10}{2} \right)}{6 \text{ sen } \left( \frac{10^\circ}{2} \right)}$$

$$K_{d_1} = 0.958$$

Para la armónica de orden v.

$$K_{d_v} = \frac{\text{sen } v q \left( \frac{\alpha_s}{2} \right)}{q \text{ sen } v \left( \frac{\alpha_s}{2} \right)} = \frac{\text{sen } v (30^\circ)}{6 \text{ sen } v (5^\circ)}$$

Para la séptima armónica ( $v = 7$ ),

$$Kd_7 = \frac{\text{sen } 210^\circ}{6 \text{ sen } 35^\circ} = - 0.146$$

Para eliminar la armónica  $v = 7$  se arregla las ranuras de tal manera que la ranura 7 se la incluye en la fase A y se excluye de la misma a la ranura 2 y para las restantes fases de igual manera. Este nuevo arreglo deja para la fase A dos siguientes vectores ranura: 1,3,4,5,6,8; produciendo el factor de distribución,

$$Kd_7 = \frac{E|0^\circ + E|7 \times 20^\circ + E|7 \times 30^\circ + E|7 \times 40^\circ + E|7 \times 50^\circ + E|7 \times 70^\circ}{6 E}$$

$$Kd_7 = 0.005 \approx 0.0$$

Pero este nuevo arreglo que elimina la armónica  $v = 7$ , disminuye notablemente la armónica fundamental, como puede verse a continuación:

$$Kd_1 = \frac{E|0 + E|20 + E|30^\circ + E|40 + E|50^\circ + E|70^\circ}{6 E}$$

$$Kd_1 = 0.758$$

Al comparar este valor con el que tenía  $Kd_1$  en el primer arreglo, se constata una disminución del 20%, lo cual resulta considerable.

### 2.5.3 PARES MOTORES SINCRONICOS.

En el caso general, por par motor sincrónico se comprende a-  
quel que surge a determinada velocidad de rotación del rotor  
como resultado de la interacción de las armónicas de un mis-  
mo orden del rotor y el estator. Es decir, cuando una armó-  
nica  $v_a$  del estator produzca una armónica  $v_b$  del estator  
( $u = \pm v_b$ ), y que a una sola velocidad del rotor esté esta-  
cionaria con respecto a esta segunda armónica  $v_b$ . En este  
caso  $v_a$  es la fuente de excitación del rotor,  $v_b$  es la fuen-  
te de potencia del estator. Entonces se puede resumir las  
condiciones que deben cumplirse para que ocurra un par motor  
sincrónico.

$$\text{ec. 2-134} \quad \mu_a = \pm v_b \quad \text{y}$$

$$\text{ec. 2-135} \quad V_{\mu a} = V_{v_b} \quad V = \text{velocidad.}$$

Recordando la ec. 2-59 que relaciona la velocidad de la armó-  
nica  $\mu$  del rotor en términos de la velocidad de la armónica  
fundamental del estator:

$$\text{ec. 2-136} \quad V_{1\mu} = |1 + (u-v)(1-s)| \left(\frac{1}{u}\right) V_1 \quad (v=1)$$

en donde:  $V_{1\mu}$  es la velocidad relativa al estator de la  
armónica de orden  $\mu$  del rotor.

$V_1$  es la velocidad de propagación de la onda principal del estator con respecto al estator.

Como por ec. 2-134  $\mu_a = \pm v_b$ , se toma el primer caso:

a)  $\mu_a = + v_b$ . Se satisface la condición  $V_{1\mu_a} = V_1 v_b$  sólo si

$$\text{ec. 2-137} \quad (\mu_a - v_a)(1 - s) = 0$$

y ya que  $\mu_a = + v_b$ , entonces  $\mu_a \neq v_a$ . De esto se deduce que  $(\mu_a - v_a)(1 - s) = 0$  sólo cuando  $s = 1$ , es decir cuando el rotor está en reposo. Por lo tanto, si una armónica  $v_a$  del estator produce una armónica  $\mu_a \neq v_a$  del rotor y existe otra armónica del estator  $v_b = + \mu_a$ , las armónicas  $\mu_a$  y  $v_b$  producirán un par motor asíncrono en reposo, esto es, un par motor inicial de arranque, que también es conocido como punto muerto.

b) Si  $\mu_a = - v_b$ , se satisface la condición  $V_{1\mu_a} = V_1 v_b$  si:

$$\text{ec. 2-138} \quad (\mu_a - v_a)(1 - s) = - 2$$

puesto que, de esta manera el paréntesis recto de la ec. 2-136 será igual a (-1), y quedará:

$$V_{1\mu_a} = - \frac{1}{\mu_a} V_1 (v = 1)$$



pero como  $\mu_a = -v_b$

$$V_{1\mu_a} = - \frac{1}{-v_b} V_1 (v=1) = \frac{1}{v_b} V_1 (v=1)$$

$$V_{1\mu_a} = V_1 v_b \quad (\text{que era lo que se deseaba conseguir}).$$

Por esto es posible si la ec. 2-138 es cierta, es decir si:

$$\frac{1-s}{-2} = \frac{1}{\mu_a - v_a} \quad \text{ó,}$$

$$\text{ec. 2-139} \quad s = 1 + \frac{2}{\mu_a - v_a}$$

Recordando las ecuaciones 2-52 y 2-61:

$$\mu = K_2 m_2 + v \quad \text{Rotor devanado}$$

$$\mu = K_2 \left( \frac{Q_2}{\frac{p}{2}} \right) + v \quad \text{Rotor de jaula}$$

$K_2$  es entero.

$$\text{ec. 2-140} \quad (\mu - v) = K_2 m_2 \quad \text{Rotor devanado}$$

$$(\mu - v) = K_2 \left( \frac{Q_2}{\frac{p}{2}} \right) \quad \text{Rotor de jaula}$$

Reemplazando la ec. 2-140 en la ec. 2-139 resulta:

$$\text{ec. 2-141.a } s = 1 + \frac{2}{K_2 m_2} \quad \text{para rotor bobinado.}$$

$$\text{ec. 2-141.b } s = 1 + \frac{P}{K_2 Q_2} \quad \text{para rotor de jaula.}$$

$$\text{pero } s = \frac{n_s - n}{n_s} \quad \text{y} \quad n_s = \frac{120 f_1}{P}$$

resultando que:

$$\text{ec. 2-142.a } n = - \frac{240 f_1}{K_2 m_2 P} \quad \text{para rotor devanado.}$$

$$\text{ec. 2-142.b } n = - \frac{120 f_1}{K_2 Q_2} \quad \text{para rotor jaula de ardilla.}$$

Si la armónica  $a$  corresponde a un valor  $K_2$  negativo, la "cúspide síncrona" ocurrirá en  $n$  positivo y viceversa.

#### CALCULO DE LA MAGNITUD DE LOS PARES MOTORES SINCRONOS.-

De acuerdo con la ley de Biot-Savart, la fuerza en un conductor sencillo es:

$$\text{ec. 2-143.a } F = 8.85 \times 10^{-8} B \ell I \sin \alpha \quad |\ell b|$$

Se ha dicho ya que la armónica de orden  $v_a$  es la excitatriz del campo que produce una armónica de orden  $\mu_a$  del rotor que junto con otra armónica del estator de orden  $v_b \neq \mu_a$  origina fuerzas tangenciales y par motor. Teniendo presente esto, la inducción magnética  $B$  debe ser sustituida por la distribución de flujo de la armónica de orden  $\mu_a$  del rotor, mientras que  $I$  debe ser sustituida por la distribución de corriente de la armónica de orden  $v_b$  del estator. Para completar estas sustituciones, debe notarse que  $\sin \alpha$  debe ser reemplazado por el factor de inclinación  $K_{SK\mu_a}$  (véase Apéndice A.1).

1º Reemplazo:

Recordando la ec. 2-54:

$$\text{ec. 2-143.b } b_u = B_u \sin \left[ S_v \omega t - u \left( \frac{x_2}{\tau} \right) \pi \right]$$

y por las ecuaciones 2-55 y 2-49

$$\text{ec. 2-143.c } B_u = 0.9 m_2 \frac{1}{u} N_2 \frac{K_{dr_2u}}{p} \times \frac{3.19}{g K_c} I_{2v}$$

Se asume  $K_s = 1$  para armónicos del rotor.

Por las ecuaciones 2-95, 2-100 y 2-98 :

$$\dot{I}_{2V} = \frac{\dot{I}'_{1V}}{1 + \frac{x_{2V}}{x_{mV}} - j \frac{r_{2V}}{S_V x_{m2V}}}$$

$$\dot{I}'_{1V} = \frac{m_1 N_1 Kdr_{1V}}{m_2 N_2 Kdr_{2V}} \dot{I}_{1V}$$

$$\dot{I}_{1V} = \frac{\dot{I}_1}{v}$$

Con un triple reemplazo obtenemos:

$$I_{2V} = - \frac{m_1 N_1 Kdr_{1V}}{m_2 N_2 Kdr_{2V}} \times \frac{I_1}{1 + \frac{x_{2V}}{x_{mV}} - j \frac{r_{2V}}{S_{Va} x_{m2V}}} \times \frac{1}{v}$$

ec. 2-144 
$$\dot{I}_{2V} = \frac{m_1 N_1 Kdr_{1V}}{m_2 N_2 Kdr_{2V}} \times \frac{G I_1}{v} \quad \left| \psi_{Va} \right.$$

siendo:

ec. 2-145 
$$G = \frac{S_{Va} x_{m2Va}}{\sqrt{r_{2Va}^2 + S_{Va}^2 (1 + \tau_{2Va})^2} x_{m2Va}^2} ; \tau_{2Va} = \frac{x_{2Va}}{x_{m2Va}}$$

y  $\psi_{Va} = \pi \cdot \alpha_{Va}$

$$\text{ec. 2-146} \quad \tan \alpha_{va} = \frac{\gamma_{2va}}{(1 + \tau_{2va}) S_{va} x_{m_{2va}}}$$

Reemplazando la ec. 2-144 en la ec. 2-143.b, se obtiene:

$$Bu_a = \frac{0.9}{\mu} \frac{m_1 N_1 K_{dr_{1v}}}{K_{dr_{2v}}} K_{dr_{2u}} \times \frac{3.19}{pgKc} \frac{GI_1}{v} \left| \psi_{va} \right.$$

Para un rotor jaula de ardilla:  $K_{dr_{2u}} = 1$ ,  $K_{dr_{2v}} = 1$ . Haciendo estos reemplazos e introduciendo el factor de inclinación  $K_{skva}$ , se obtiene:

$$\text{ec. 2-147} \quad Bu_a = 0.9 \frac{1}{\mu} \frac{m_1 N_1 K_{dr_{1v}}}{K_{skva}} \times \frac{3.19}{pg Kc} G I \left| \psi_{va} \right.$$

El ángulo  $\psi_{va}$  significa adelanto dentro de la onda, por lo que se debe aumentar el ángulo dentro de la ec. 2-143.a.

$$\text{ec. 2-148.a} \quad bu_a = Bu_a \text{ sen } \left[ S_v \omega t - u \left( \frac{x_2}{\tau} \right) \pi + \psi_{va} \right]$$

debe notarse que este nuevo  $Bu_a$  ya no posee el ángulo  $\psi_{va}$  logrando un cambio de coordenadas de  $x_2$  en  $x_1$  idéntico al realizado para demostrar la ec. 2-58 y recordando que para un rotor jaula de ardilla  $\mu = K_2 \left( \frac{Q_2}{\frac{1}{2} P} \right) + v$

$$\text{ec. 2-148.b } bu_a = Bu_a \text{ sen } \left[ \left\{ 1 + \left( \frac{2K_2 Q_2}{P} \right) (1-s) \right\} \omega t - \mu_a \left( \frac{x_1}{\tau} \right) \pi + \psi_{va} \right]$$

Pero esta ecuación aún no está totalmente generalizada, ya que se ha supuesto que en  $t = 0$  las coordenadas  $x_1$  del estator y  $x_2$  del rotor son iguales. Se acepta a continuación que en el tiempo  $t = 0$  el sistema de coordenadas del rotor está deslizado con respecto al sistema de coordenadas del estator por un arco  $x'$  en dirección opuesta al sentido de rotación. Si el rotor está defasado en la dirección negativa, la corriente que induce la armónica  $v_a$  en el rotor estará avanzada por el ángulo de tiempo  $v \left( \frac{x'_2}{\tau} \right) \pi$ , pero con un razonamiento análogo, la armónica de orden  $\mu_a$  que estará avanzada por el ángulo  $\mu_a \left( \frac{x'_2}{\tau} \right) \pi$ ; por lo que se concluye que existirá un ángulo diferencial, que depende del orden de  $v$  y de  $\mu$  y que va a ser igual a:

$$(\mu_a - v_a) \frac{x'_2}{\tau} \pi$$

ángulo que debe ser introducido en la ec. 2-148.b. De esta manera:

$$\text{ec. 2-148.c } bu_a = Bu_a \text{ sen } \left[ \left\{ 1 + \left( \frac{2K_2 Q_2}{P} \right) (1-s) \right\} \omega t + (\mu_a - v_a) \left( \frac{x_2}{\tau} \right) \pi + \psi_{va} \right]$$

Esta última ecuación (ec. 2-148.c), como se ha dicho anterior

mente, debe reemplazar a la inducción B, en la ec. 2-143.a, para lograr la fuerza sobre un solo conductor. Para obtener la fuerza en todo el rotor, debemos integrar la ec. 2-143.a sobre toda la circunferencia del rotor, circunferencia dada por  $(p\tau)$ , en donde, como ya es sabido p es el número de polos, y  $\tau$  es el paso polar. De este modo y con  $I = a_{vb} dx_1$

$$F_{\text{Total}} = 8.85 \times 10^{-8} \ell \int_0^{p\tau} bu_a \times a_{vb} dx_1 \quad ||b|$$

mientras que el torque parásito sincrónico está dado por:

$$\text{ec. 2-149.a} \quad T_{\text{sín}} = 8.85 \times 10^{-8} \ell \left| \frac{p\tau}{2\pi} \right| \int_0^{p\tau} bu_a a_{vb} dx_1 \quad (\text{b-pie})$$

$\left(\frac{p\tau}{2\pi}\right)$  es el radio del rotor, en donde  $\tau$  está dado en pies.

$$\text{ec. 2-149.b} \quad T_{\text{sín}} = 0.369 \times 10^{-8} \ell \frac{p\tau}{\pi} \int_0^{p\tau} bu_a a_{vb} dx_1 \quad (\text{b-pie})$$

si  $\tau$  está dado en pulgadas.

En estas últimas ecuaciones  $T_{\text{sín}}$  está en función de una integral que involucra al término  $bu_a$  dado por la ec. 2-148.c y al término  $a_{vb}$  que indica la distribución de corrientes en

el rotor, debidas a la armónica de orden  $v_b$  que actúa como fuente de potencia para el torque síncrono.  $a_{v_b}$  debe estar dado en unidades de corriente sobre longitud.

Siempre que se conoce la distribución de corrientes  $a_x$ , puede ser calculada la curva de la f.m.m. es decir,

$$f.m.m(x) = \int_0^x a_x dx$$

Operando inversamente:

$$ec. 2-150 \quad a_x = \frac{d}{dx} (f.m.m)$$

y recordando la fórmula de la f.m.m de la armónica de orden  $v$  ( $f.m.m(v)$ ), dada por las ecuaciones 2-28 y 2-35.

$$ec. 2-151.a \quad f_v = F_v \text{ sen } \left[ \omega t - v \left( \frac{x_1}{\tau} \right) \pi \right]$$

donde:

$$ec. 2-151.b \quad F_v = \frac{m_1}{2} F_{sv} = 0.9 m_1 \left( \frac{1}{v} \right) N_1 K_d r_{1vb} I_1$$

de donde:



$$a_{vb} = \frac{d}{dx} \left\{ F_v \text{sen} \left[ \omega t - v \left( \frac{x_1}{\tau} \right) \pi \right] \right\}$$

ec. 2-152.a  $a_{vb} = - A_{vb} \cos \left( \omega t - v_b \left( \frac{x_1}{\tau} \right) \pi \right)$

siendo:

ec. 2-152.b  $A_{vb} = 2.82 \left( \frac{1}{pT} \right) m_1 N_1 K d r_1 v_b I_1$

Para calcular el torque síncrono ( $T_{s\text{ín}}$ ), basta reemplazar la ec. 2-152 en la ec. 2-149.a.

ec. 2-153.a 
$$T_{s\text{ín}} = - c \int_0^{2\pi} \text{sen} [d_1 - (\mu_a + v_b)] d\alpha -$$
  
$$- c \int_0^{2\pi} \text{sen} [d_2 - (\mu_a - v_b)] d\alpha$$

Para llegar a la ec. 2-153.a se han efectuado los reemplazos:

1ª  $\left( \frac{x_1}{\tau} \right) \pi = \alpha_1$

2ª  $[2 + K_{2a} Q_2 (1-s)] \omega t + (\mu_a - v_a) \left( \frac{x_2}{\tau} \right) \pi + \psi_{va} = \delta_1$

$$3^{\text{a}} \quad K_{2a} Q(1-s)\omega t + (\mu_a - v_a) \left( \frac{x_2'}{\tau} \right) \pi + \psi_{v_a} = \delta_2$$

$$4^{\text{a}} \quad \frac{0.369}{4\pi^2} 10^{-8} (pT)^2 \ell B_{\mu_a} A_{v_b} = C$$

Por la ec. 2-134;  $\mu_a = \pm v_b$ . Si se cumple la primera opción, es decir  $\mu_a = + v_b$  el par motor síncrono ocurre a  $s = 1$ . Con estos dos reemplazos la ec. 2-153.a se transforma en:

$$\text{ec. 2-153.b} \quad T_{s\text{ín}} = 2\pi C \text{ sen } \delta_2 \quad (s=1)$$

Si se cumple la segunda opción  $\mu_a = -v_b$ , el par motor síncro no ocurre a  $s = 1 + \frac{P}{K_2 Q_2}$  (Ver ec. 2-141.b). Al realizar los respectivos reemplazos en la ec. 2-153.a se obtiene,

$$\text{ec. 2-153.c} \quad T_{s\text{ín}} = 2\pi \text{ sen } \delta_1$$

Al reemplazar las ec. 2-140 y 2-146 en las ecuaciones 2-153b y 2-153.c, se obtiene en ambos casos:

$$\text{ec. 2-153.d} \quad T_{s\text{ín}} = 2\pi C \text{ sen } \left( K_{2a} \frac{Q_2}{\frac{P}{2}} \frac{\pi}{\tau} x_2' - \alpha_v \right)$$

Así pues, se concluye que el torque es independiente del tiempo, siendo función más bien de la posición relativa de las f.m.m.s del estator y rotor ( $x_2'$ ). El valor máximo del par

motor síncrono es:

ec. 2-154  $T_{s\sin} \text{ máx} = 2 C$

donde:  $C = \frac{0,369}{4\pi^2} 10^{-8} (pT)^2 l B_{\mu a} A_{vb}$

$$B_{\mu a} = 0.9 \frac{1}{\mu_a} \frac{3.19}{pgKc} \frac{m_1 N_1 K d r_1 v_a}{v \times K_s K_{v_a}} \text{ GI (Ver ec. 2-147)}$$

$$G = \frac{S_{v_a} x_{m_2 v_a}}{\sqrt{r_{2v_a}^2 + S_{v_a}^2 (1 + \tau_{2v_a})^2 x_{m_2 v_a}^2}} \text{ (Ver ec. 2-145)}$$

Cuando  $r_{2v_a}^2 \ll S_{v_a}^2 (1 + \tau_{2v_a})^2 x_{m_2 v_a}^2$ , se puede asumir que:

$$G = \frac{1}{1 + \tau_{2v_a}}$$

#### 2.5.4 MECANISMOS PARA LA ELIMINACION DE LOS PARES MOTORES SINCRONOS PARASITOS.

Además de los mecanismos utilizados para la eliminación de pares motores asíncronos, sirve el criterio siguiente:

- 1) Se debe evitar que una armónica  $v_a$  produzca una armónica  $\mu_a$  del mismo orden que otra armónica estática  $v_b$ . Recor

dando que:

$$\mu = \frac{K_2 Q_2}{\frac{p}{2}} + v$$

$$v = K_1 m_1 + 1$$

Sea entonces (\*)  $v_a = K_a m_1 + 1$ , que produce una armónica y

$$(**) \mu_a = \frac{K_2 Q_2}{\frac{p}{2}} + v_a$$

Reemplazando (\*) en (\*\*), se obtiene:

$$\mu_a = \frac{K_2 Q_2}{\frac{p}{2}} + K_a m_1 + 1$$

Para que exista par síncrono, esta armónica  $\mu_a$  debe ser igual a la armónica  $v_b$  dada por:

$$(***) v_b = K_b m + 1$$

igualando (\*\*\*) con (\*\*),

$$\frac{K_2 Q_2}{\frac{p}{2}} + K_a m_1 + 1 \neq K_b m_1 + 1$$

en donde  $K_2$ ,  $K_a$  y  $K_b$  son enteros de cualquier valor.

$$\text{ec. 2-155} \quad \frac{2 K_2 Q_2}{m_1 p} = (K_b - K_a) = \text{número entero}$$

De la ec. 2-155 se puede notar que siempre va a existir un valor  $K_2$  para el cual se cumpla esa igualdad. Es decir, no existe posibilidad de eliminar el par motor síncrono por es cogitamiento adecuado del número de barras  $Q_2$ . En cambio sí es posible tratar que el valor de  $K_2$ , para el cual la ec. 2-155 se cumple sea elevado, ya que así el orden de la armónica  $\mu$  dada por:

$$\mu = \frac{K_2 Q_2}{\frac{p}{2}} + v ,$$

es elevado, y su valor dado por la ec. 2-147 se hace despreciable, ya que es inversamente proporcional al orden de la armónica.

Ejemplo.- Sea un motor de inducción trifásico, cuatripolar  
Jaula de ardilla.

Tomando dos casos:

a) Número de barras  $Q_2 = 24$

$$\frac{2 K_2 Q_2}{m_1 p} = \frac{2 K_2 \times 24}{3 \times 4} = 4 K_2$$

Para este número de barras se cumple la ecuación 2-155 para todo valor de  $K_2$ ; es decir toda armónica del rotor está en posibilidades de generar torques síncronos.

Tomando  $K_2$  en sentido progresivo ascendente, el primer entero para la ec. 2-155 se obtiene para  $K_2 = \underline{+1}$ , entonces:

$$\mu_a = \frac{K_2 Q_2}{\frac{p}{2}} + v_a = \frac{1 \times 24}{2} + (-5) = 7$$

Por la ec. 2-155  $(K_b - K_a) = 4$ . Sea  $K_b = +2$  y  $K_a = -2$ ; entonces:

$$v_a = -2(3) + 1 = -5$$

$$v_b = 2(3) + 1 = 7$$

Lo que se ha obtenido puede describirse del siguiente modo: La quinta armónica del estator ( $v = 5$ ) produce en el rotor la séptima armónica ( $u = 7$ ) del mismo orden que la armónica del estator ( $v = 7$ ). Estas dos últimas interaccionan formando un torque síncrono de valor igual al dado por las ecuaciones 2-154.

b) Número de barras  $Q_2 = 41$

$$\frac{2 K_2 Q_2}{m_1 p} = \frac{2 K_2 \times 41}{3 \times 4} = K_2 \left( \frac{41}{6} \right)$$

Al tomar  $K_2$  en sentido progresivo ascendente, se obtiene el primer entero para la ec. 2-155 cuando  $K_2 = \underline{+ 6}$ . Para este valor de  $K_2$ , la ecuación 2-155 se transforma en:

$$-6 \left( \frac{41}{6} \right) = (K_b - K_a) . \quad \text{Sea } K_b = 1 \text{ y } K_a = 42.$$

$$v_a = + 1(3) + 1 = 4$$

$$v_b = 42(3) + 1 = 127$$

$$\mu_a = \frac{6(41)}{\frac{4}{22}} + 4 = 127$$

Si se compara los casos a) y b), se nota claramente que el caso b tiene pares síncronos de menor valor, pues lo producen armónicas de orden elevado.

## 2.6 CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.

Casi todas las recomendaciones de diseño están dadas para el rotor Jaula de ardilla, ya que este rotor no "reconoce" entre las diversas armónicas, y lo mismo responde a la f.m.m.

principal que a sus armónicas, y con cada una tiende a formar su respectiva curva de torque. En el rotor de fase devanada las armónicas tienden a eliminarse, ya que el número de polos de ese rotor es idéntico al número de polos de la f.m.m. del estator ( $v = 1$ ), y por lo cual el factor de distribución del rotor para las armónicas de orden elevado es cercano a cero.

Las pérdidas debidas a las armónicas de la máquina deben ser subdivididas en dos rubros. El primero está dado por la relación:

$$Pér_1 \% = \frac{\sum_{v \neq 1} f.m.m.(v)}{f.m.m. + \sum f.m.m.(v)}$$

El segundo rubro está dado por:

$$Pér_2 \% = \frac{\sum_{u \neq 1} f.m.m._{v=1}(u)}{f.m.m._{v=1}^{(u=1)} + \sum_{u \neq 1} f.m.m._{v=1}(u)}$$

en donde  $f.m.m._{v=1}(u)$  es la armónica de orden  $u$  del rotor, provocada por la f.m.m. fundamental del estator ( $v = 1$ ). Tomando en cuenta estas ecuaciones se disminuyen las pérdidas debido a las armónicas al formar bobinados con formas de onda próximas a la sinusoidal. Este aspecto es analizado en los factores de distribución y de paso, analizados en el



Apéndice A.1.

Para una máquina de inducción polifásica de interés, es decir que tenga un diseño práctico y útil, no se presentan armónicas pares. Además, en toda máquina trifásica se elimina la tercera armónica. De las restantes tiene particular importancia el papel desempeñado por las armónicas de orden  $v = 5$ ;  $v = 7$ , y las armónicas de ranura. La quinta y la séptima tienen importancia debido a que su amplitud es considerable, y las de ranura por tener el factor de distribución del mismo valor que el de la fundamental.

La quinta armónica presenta problemas serios en el torque, cuando la máquina funciona como freno ( $s \approx 1,2$ ), pues es alrededor de ese deslizamiento que se produce el par motor asíncrono máximo debido a esta armónica, el mismo que está dado por la ec. 2-103.

$$\text{ec. 2-156} \quad T_S \text{ máx} = 0.920 \frac{p}{\omega} Q_2 \frac{x_{m_{2v}}}{1+r_{2v}} (I'_{1v})^2$$

En todo caso, el torque parásito asíncrono producido por esta armónica no interesa desde un punto de vista práctico, cuando se desea el funcionamiento de la máquina de inducción como motor. En una máquina, en la cual no se toman precauciones para la atenuación de los pares motores síncronos, es

posible que la quinta armónica sea la causa de mal funcionamiento en el arranque; mal funcionamiento debido a la presencia del "torque síncrono de reposo ( $s = 1$ )".

La séptima armónica produce el par motor parásito asíncrono máximo para un deslizamiento próximo a  $s = 0.86$ , por lo que es esta armónica la que debe ser reducida, por cualquiera de los métodos ya estudiados, especialmente por acortamiento de paso, siendo el de mayor utilización,

$$y \cong \frac{5}{6} \tau$$

y es la longitud entre 2 espiras conformantes de una bobina.

o lo que da igual, un acortamiento de paso cercano a  $150^\circ$  eléctricos en lugar de los usuales  $180^\circ$  que existen en un paso polar. (Véase Apéndice A.1).

El acortamiento de paso expuesto, no sólo reduce la cuantía de la quinta armónica, sino que en general reduce todas las armónicas al lograr una forma de onda cercana a la sinusoidal (Ver Figuras 2.16 y 2.17). Por esto es recomendable para toda máquina de inducción una reducción de paso  $\beta_1 = \frac{y}{\tau}$  comprendida entre  $\beta_1 = 0,805$  y  $\beta_2 = 0,833$ .

Las armónicas de ranura tienen longitudes de onda iguales a las longitudes entre ranuras (o submúltiplos de esas longitu

des cuando  $K_2 > 1$ , en la fórmula  $v = 2 m q K \pm 1$ ), por lo cual se puede eliminarlas totalmente al inclinar las barras del rotor en una longitud idéntica a la existente entre ranuras (ver Fig. 2.18). Es inconveniente utilizar el método de inclinación de ranuras para eliminar las armónicas de orden no muy elevado, ya que este tipo de armónicas al tener longitudes de onda mucho mayores que la longitud entre ranuras, necesitan inclinaciones de gran magnitud en las barras del rotor, lo cual incrementa las corrientes parásitas dentro del rotor.

Respecto al factor de distribución, es necesario puntualizar que, intrínsecamente conlleva la disminución de armónicas, puesto que, mientras mejor estén distribuidos los bobinados de cada polo y de cada fase, la onda de f.m.m. tiene mayor proximidad a la senoide. Esto significa que para devanados bien distribuidos, el factor de distribución de la primera armónica es mucho mayor que el factor de distribución de la armónica de orden  $v > 1$ . En todo caso, por este mecanismo no se puede eliminar totalmente una armónica determinada, ya que de hacerlo, el propio factor de distribución de la armónica fundamental se ve seriamente mermado, con el consiguiente aumento de las pérdidas de la máquina y el deterioro de su rendimiento. Habiendo mecanismo de mayor eficiencia para la eliminación de armónicas, no se debe sacrificar el factor de distribución de la primera armónica ( $Kd_1$ ), en aras

de eliminar totalmente una armónica determinada (Véase Apéndice A.1).

Para combatir los pares motores síncronos parásitos, que son los que en muchas máquinas impiden el arranque con carga, además de las técnicas ya descritas de eliminación de armónicas, se debe tomar en cuenta la siguiente recomendación: Siendo su origen, la existencia de armónicas del mismo orden en el estator y el rotor, pero de distinto origen, y luego de analizar las ecuaciones de cada una de estas armónicas (Véase las ecuaciones 2-155); es menester que el número de barras del rotor sea el mayor posible dentro de las necesidades de diseño, y que este número de barras ( $Q_2$ ) no sea divisible ni para el número de polos ( $p$ ), ni para el número de fases del rotor ( $m_1$ ).

C A P I T U L O      I I I

MAQUINAS DE CORRIENTE CONTINUA

3.1 INTRODUCCION TEORICA.

3.1.1 PRINCIPIO DE FUNCIONAMIENTO.

Se considera primeramente que la máquina funciona en el régimen de generador. En la Fig. 3.1, se muestra una máquina cuyo sistema magnético se compone de dos polos N-S fijos en el espacio, que generan un flujo magnético de magnitud constante. En este mismo espacio se encuentra el inducido, en cuya superficie se ha colocado la espira ab - cd, los extremos de esta espira se han conectado a un anillo dividido en dos partes simétricas, y sobre los anillos se han instalado las escobillas A y B, a las cuales se conecta el circuito exterior compuesto de receptores de energía eléctrica.

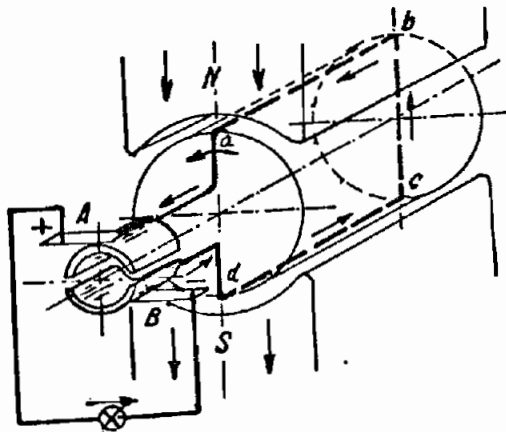


Fig 3-1 Esquema de funcionamiento de una máquina de corriente continua.

Poniendo el inducido en rotación con velocidad constante ( $v$ ) en la dirección dada. Supóngase que por toda la longitud de la parte activa del conductor  $ab$ , o sea, por aquella de su parte que corta las líneas del campo magnético, la inducción  $B$  tiene un mismo valor. Entonces, en virtud de la ley de inducción electromagnética de Faraday el valor instantáneo de la f.e.m., inducida en el conductor al girar el inducido, se determina por la fórmula:

$$\text{ec. 3-1} \quad e = B \ell v$$

Siendo  $\ell$  la longitud del sector activo del conductor  $ab$ , es constante para cada máquina. Por esto, también cuando la velocidad del inducido es constante, se tiene que:

$$\text{ec. 3-2} \quad e = K B$$

Sea la línea neutra geométrica aquella que pasa por el centro del inducido, y justamente por la mitad de la distancia entre los polos  $N$  y  $S$ ; y sea paso polar  $\tau$ , la parte de la circunferencia del inducido que corresponde a un polo.

Como se verá posteriormente, la distribución de la inducción magnética bajo los polos de una máquina real tiene un carácter complejo. Pero haciendo uso del método de descomposición de las curvas en serie de curvas armónicas, se puede separar

la primera, o principal curva armónica, es decir, considerar que la inducción magnética está distribuída bajo los polos N y S en forma sinusoidal (Fig. 3.2). En este caso la f.e.m. inducida en el conductor varía con el tiempo también en forma sinusoidal.

La dirección de la f.e.m. inducida se halla fácilmente por la regla de la mano derecha. Aplicando esta regla al conductor ab en la Fig. 3.1, se nota que cuando este pasa por el polo norte, en el se induce f.e.m. dirigido desde el plano hacia nosotros, y cuando pasa bajo el polo sur, en dirección contraria, o sea, desde nosotros hacia el plano del dibujo.

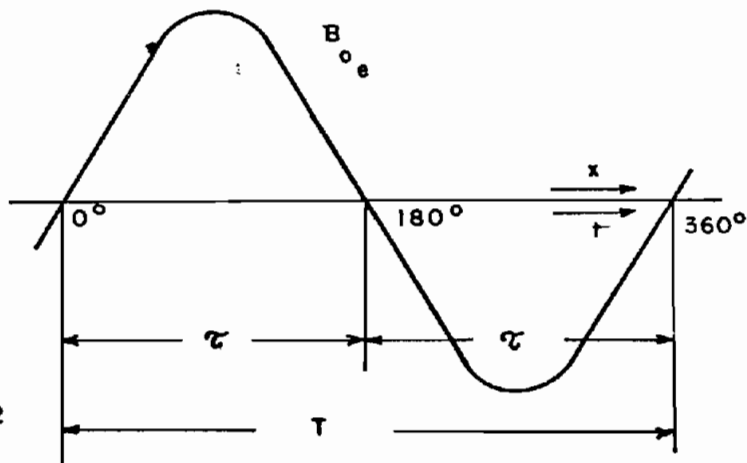


Fig. 3-2

Así pues, en el conductor ab se induce f.e.m. variable con el tiempo, que cambia su dirección dos veces en una vuelta del inducido. El tiempo  $T$ , en el curso del cual tiene lugar un cambio completo de la f.e.m., se llama período de la f.e.m. El número de períodos en un segundo se llama frecuencia y se mide en hertzios (Hz). En el caso general, cuando la

máquina tiene  $p$  polos, la frecuencia de la f.e.m. inducida aumenta proporcionalmente a  $p$ , es decir,

$$f = \frac{p}{2} n ,$$

donde  $n$  es la velocidad de rotación medida por el número de revoluciones por segundo. Generalmente  $n$  se mide por el número de revoluciones por minuto, en este caso:

ec. 3-3  $f = \frac{p \cdot n}{120}$

Al examinar la Fig. 3.1 se ve que cada escobilla está conec-tada por intermedio del anillo con un sólo conductor cualquie-ra, a saber: la escobilla A, con el conductor  $ab$ , y la esco-billa B, con el conductor  $cd$ . Por consiguiente, en los bornes del circuito exterior surge tensión variable con el tiempo pero en una sólo dirección: Por la escobilla A siempre entrante (+) y por la escobilla B saliente (-) (Fig. 3.3).

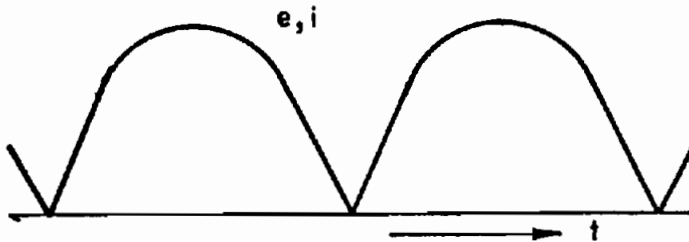


Fig. 3-3 Corriente y fem rectificado



Para rectificar totalmente la corriente alterna es necesario colocar las escobillas así como se muestra en la Fig. 3.1, de tal modo que la f.e.m. inducida en la espira sea igual a cero en el momento en que la escobilla pasa de una otra.

La pulsación de la corriente en la Fig. 3.3, tiene lugar en los límites desde su valor máximo hasta cero. La forma de la onda de pulsación se suaviza ostensiblemente cuando aumenta el número de conductores. ejecutado de manera correspondiente y conectado al colector.

#### MOMENTO ELECTROMAGNETICO DEL GENERADOR.

Suponiendo que el inducido gira por la acción de un motor primario, que lo impulsa con velocidad constante  $n$ , mediante el momento  $M_1$  (Fig. 3.4) y si el generador está excitado, entonces en el conductor  $a$ , del devanado del inducido, que se encuentra bajo el polo norte, se induce f.e.m. dirigida hacia nosotros; la corriente  $i_a$  que circula por el conductor  $a$  está en la misma dirección.

En un conductor por el que circula una corriente  $i_a$ , y sometido este a la acción de un campo magnético, surge una fuerza electromagnética  $f_x$ . Considerando que la inducción  $B_x$  tiene un mismo valor por la longitud del conductor  $l$  situado en el

plano perpendicular a la dirección de las líneas del campo magnético, se tiene:

$$\text{ec. 3-4} \quad f_x = B_x \ell i_a$$

Las líneas de flujo son perpendiculares a las superficies equipotenciales, y teniendo presente que el hierro tiene permeabilidad mucho mayor que el aire, se asume que las líneas de campo son perpendiculares al inducido. Entonces la fuerza  $f_x$  crea en el árbol del generador el momento:

$$\text{ec. 3-5} \quad M_x = f_x \frac{D_a}{2} = B_x i_a \frac{D_a}{2}$$

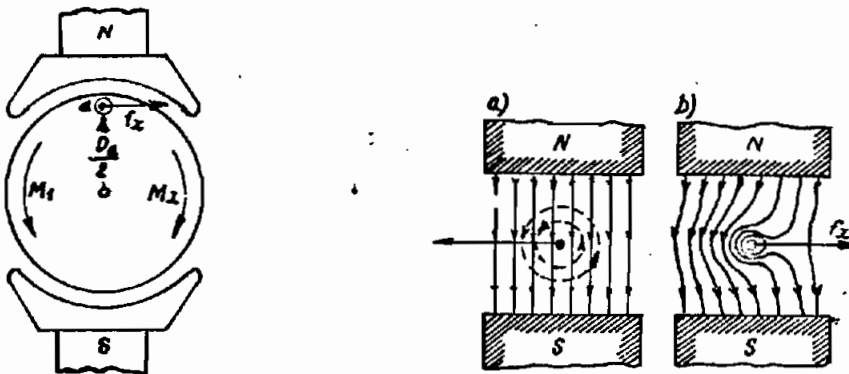


FIG. 3.4

Para determinar la dirección de este momento, es suficiente hacer coincidir el campo magnético fundamental con el campo creado por la corriente en el conductor  $i_a$  (Fig. 3.4,a). El campo resultante se muestra en la Fig. 3.4,b. Está demostra

do entonces, que la fuerza  $f_x$  está dirigida en sentido opuesto a la dirección de rotación del inducido y, por consiguiente, el momento electromagnético del conductor  $M_x$  actúa en sentido contrario respecto del momento del motor primario  $M_1$ , es decir, es frenante respecto a este último. Esta deducción, tiene carácter general, o sea, es válida para cualesquiera condiciones de funcionamiento de la máquina como generador.

En una máquina real, bajo cada polo se encuentran  $\frac{Q}{p}$  conductores, por eso el momento electromagnético del generador, creado por todos los conductores en la máquina con un número de polos  $p$ , será:

$$M_a = p \sum_1^{\frac{Q}{p}} M_x = p \ell i_a \sum_1^{\frac{Q}{p}} \frac{D_a}{2} B_x$$

( $Q$  = número de conductores del inducido)

Siendo suficientemente grande el número de conductores, la magnitud de la suma  $\sum_1^{\frac{Q}{p}} B_x$  es igual al valor medio de la inducción  $B_{med}$  multiplicado por el número de conductores que se encuentran bajo un paso polar, es decir:

$$\sum_1^{\frac{Q}{p}} B_x = B_{med} \frac{Q}{p}$$

Tomando en consideración que,

$$B_{med} = \frac{\phi}{\tau \ell} = \frac{\phi}{\left(\frac{\pi D}{p}\right) \ell} = p \frac{\phi}{\pi D a \ell}$$

obtenemos para el momento electromagnético la expresión:

$$M_a = p \ell i_a \frac{D a}{2} Q \frac{\phi}{\pi D a \ell}$$

ec. 3-6 
$$M_a = \frac{1}{2\pi} p Q i_a \phi$$

En una máquina construída  $p$  y  $Q$  vienen dadas. En este caso la fórmula para el momento se puede escribir así:

$$M_a = C \text{ cob } i_a \phi$$

ec. 3-7

$$C \text{ cob} = \frac{pQ}{2\pi}$$

### 3.1.2 ELEMENTOS FUNDAMENTALES DE LA CONSTRUCCION DE UNA MÁQUINA DE CORRIENTE CONTINUA.

La máquina de corriente continua consta de dos partes principales:

- 1) La parte inmóvil, destinada principalmente para crear el flujo magnético, y

2) La parte rotatoria, llamada inducido, en la que transcurre el proceso de transformación de la energía mecánica en eléctrica (generador eléctrico) ó a la inversa, la transformación de la energía eléctrica en mecánica (motor eléctrico).

Las partes inmóvil y rotatoria están separadas una de otra, por el espacio denominado entrehierro.

La parte inmóvil de la máquina de corriente continua está compuesta por los polos principales, destinados para crear el flujo magnético principal; polos auxiliares, instalados entre los principales y que sirven para lograr el funcionamiento sin chispas de las escobillas en el colector (es usual prescindir de ellos en las máquinas de pequeña potencia), y el armazón.

El inducido representa un cuerpo cilíndrico, que gira en el espacio entre los polos, y está compuesto por el núcleo dentado del inducido, el devanado arrollado a éste; el colector y el aparato de escobillas.

### 3.2 ESTUDIO DE LA CURVA DE MAGNETIZACION.

Consideramos la curva de inducción de una máquina excitada, en vacío. En estas condiciones la curva de inducción está

determinada por la característica polar existente. En la figura 3.5, se representa la mitad de dos polos N y S contiguos, con el sector de inducido correspondiente, así como tubos de flujo salientes del polo Norte y entrantes al Polo Sur.

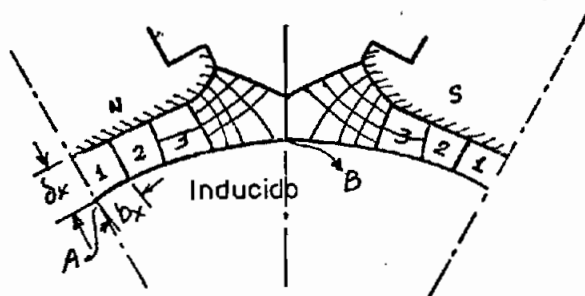


FIG. 3.5

Tomando en consideración los valores corrientes de la inducción en el hierro, aceptamos que su permeabilidad es bastante grande y que, por consiguiente, la superficie del inducido y las zapatas polares son superficies equipotenciales, que deben ser intersecadas por las líneas de fuerza magnética en el entrehierro bajo ángulo recto. La línea media trazada entre los polos por el punto neutro en el inducido, tiene por las condiciones de simetría el mismo potencial que la superficie del inducido. Al construir el campo magnético dividimos todo el espacio entre las superficies equipotenciales en tubos unitarios de tal modo que la anchura media  $b_x$  de cada tubo sea igual a su longitud media  $\delta_x$ . En la Fig. 3.5, todo

el espacio entre las líneas axiales de los polos Norte y Sur se ha dividido aproximadamente en  $m = 7,5$  tubos unitarios a  $m/2 = 3,75$  tubos por cada mitad del polo. Si la longitud del inducido es  $l_a$ , entonces la permeancia de cada tubo será

$$\text{ec. 3-8} \quad \Lambda_t = \mu_0 \frac{l_a b_x}{\delta_x} = \mu_0 l_a = \text{const.}$$

es decir, todos los tubos unitarios, construídos por el método indicado, tienen igual permeancia.

Sea  $F\delta_0$  la fuerza magnetomotriz (f.m.m) en el entrehierro, entonces para todos los tubos unitarios  $F\delta_0 = \text{const.}$  (Cuando se considera liso el inducido). El flujo de cada tubo  $\phi_t$  está dado por:

$$\text{ec. 3-9} \quad \phi_t = F\delta_0 \Lambda_t = F\delta_0 \mu_0 l_a$$

es decir, los flujos de todos los tubos elementales son iguales. Entonces, el flujo magnético en el entrehierro puede ser expresado en la forma:

$$\phi_0 = m \phi_t = m F\delta_0 \mu_0 l_a$$

de donde:

$$F\delta_0 = \frac{\phi_0}{\mu_0 m l_a}$$

En el cuadro del campo representado en la Fig. 3.5, sólo los tubos 1 y 2, situados cerca de la línea axial del polo, representan en su sección prácticamente cuadrados. El tubo 3, ya diverge del cuadrado, y el tubo 4, en el borde de la zapa polar representa un pentágono irregular. Tal cuadro respecto del tubo puede servir para el cálculo sólomente en primera aproximación. Para precisar el cálculo, el tubo 3 se divide suplementariamente en cuatro tubos parciales, y el tubo 4, en 16 tubos parciales observando las mismas condiciones que al construir los tubos unitarios. Al dividir los tubos unitarios en un gran número de tubos parciales obtenemos una red que divide todo el espacio examinado (a excepción de los sectores que lindan con la zona neutra) prácticamente en cuadrados.

El cuadro del campo representado en la Fig. 3.5 permite determinar junto con la f.m.m.  $F\delta_0$ , la distribución de la componente normal de la inducción en el entrehierro. Para ello basta dividir el flujo del tubo unitario  $\phi_t = F\delta_0 \mu_0 l_a$  para el área de su sección transversal media  $St_x = b_x \text{ med } l_a = \delta_x \text{ med } l_a$ , por consiguiente,

$$\text{ec. 3-10} \quad Bd_x = \frac{\phi_t}{St_x} = \frac{F\delta_0 \mu_0 l_a}{\delta_x \text{ med } l_a} = \mu_0 \frac{F\delta_0}{\delta_x \text{ med}}$$

Así pues, para el valor dado de la f.m.m.  $F\delta_0$ , la inducción



$B\delta_x$  es inversamente proporcional a la longitud media del tubo en el entrehierro. Valiéndose de este procedimiento, se construye la curva de distribución de la inducción en el entrehierro a lo largo de la circunferencia desarrollada del inducido (Fig. 3.6).

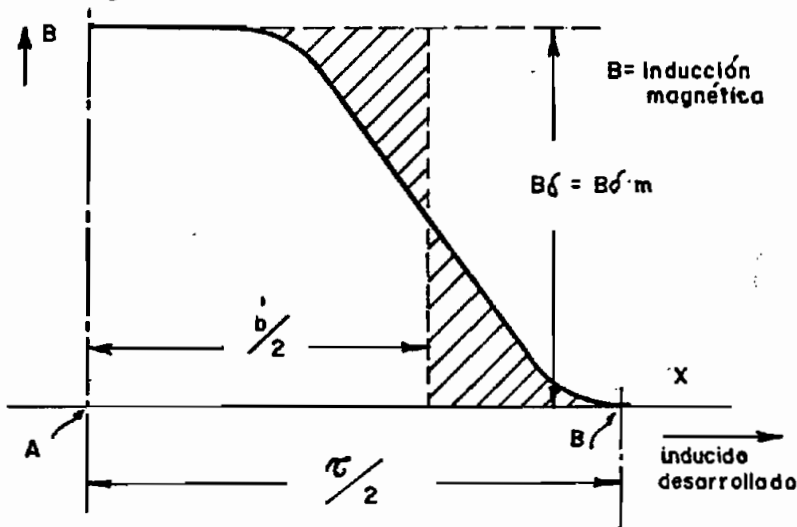


FIG. 3.6

La curva anterior es demostrativa de que la inducción en el entrehierro varía por la circunferencia del inducido de punto a punto, alcanzando su valor máximo  $B\delta_m$  en la zona contigua al centro del polo. Para simplificar el cálculo de la f.m.m. del entrehierro  $F\delta_0$ , sin recurrir a las curvas de distribución de la inducción, se introduce el concepto de inducción prevista  $B\delta$  en el entrehierro, haciendo uso para este fin del método de reducción. La esencia de este método, ampliamente aplicado en la teoría y cálculo de las máquinas eléctricas, consiste en lo siguiente: el cuadro real de la inducción, generalmente complicado en el sentido físico, se

sustituye por el reducido, el cual debe tener la forma más simple y ofrecer los mismos resultados cuantitativos que el cuadro real.

En el caso en cuestión, la curva trapezoidal real (línea lle na de la Fig. 3.6) de distribución de la inducción magnética en el entrehierro bajo el paso polar, se sustituye por un rec tángulo (línea a trazos en la misma figura) cuya altura es la inducción prevista  $B\delta = B\delta_m$  y cuya base es  $b'$ , que debe ser determinado de tal modo que las áreas rayadas sean equidimensionales. La base  $b'$  (Fig. 3.6) se llama "arco polar previs- to", y la relación,

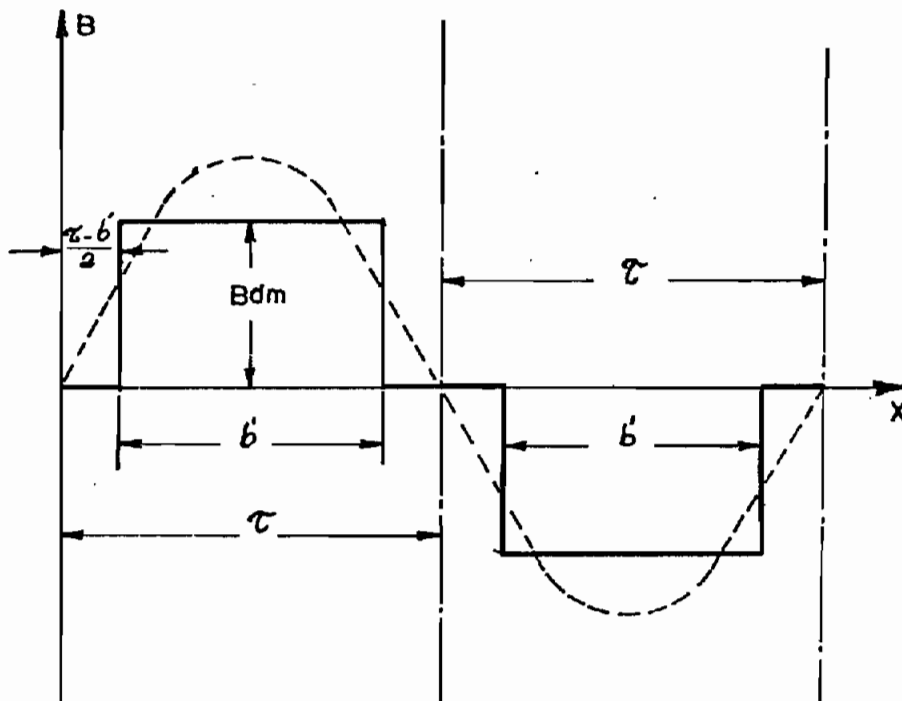
$$\text{ec. 3-11} \quad \alpha = \frac{b'}{\tau}$$

se denomina "coeficiente previsto" de arco polar. Este coe-  
ficiente oscila entre 0.6 y 0.8 en la mayoría de máquinas.

### 3.2.1 DESCOMPOSICION EN SERIE DE FOURIER DE LA CURVA DE IN- DUCCION.

Teniendo en cuenta la reducción de la curva de inducción, se llega a la Fig. 3.7 que muestra en la línea punteada a su primera armónica sinusoidal. Para encontrar los valores de las armónicas de la curva de inducción reducida  $B$ , se debe tener presente que la misma está dada por las ecuaciones si

güentes:



$\tau$  = paso polar ;     $b'$  = arco polar previsto ;  
 $B_{\delta m}$  = inducción máx en el entrehierro.

FIG. 3.7

	Valor de la Inducción $ B_x $	Límites (x)
1)	0	$0 < x < \frac{\tau - b'}{2}$
2)	$B_{\delta m}$	$\frac{\tau - b'}{2} < x < \frac{\tau + b'}{2}$

Valor de la Inducción	Límites
3) 0	$\frac{\tau+b'}{2} < x < \frac{3\tau-b'}{2}$
4) -Bdm	$\frac{3\tau-b'}{2} < x < \frac{3\tau+b'}{2}$
5) 0	$\frac{3\tau+b'}{2} < x < 2\tau$

La curva "reducida" de la inducción dada por las 5 ecuaciones anteriores puede descomponerse en Series de Fourier. Así:

ec. 3-12 
$$B = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ sen } n\theta_e$$

$\theta_e$  = ángulo en grados eléctricos

$$\theta_e = \frac{p}{2} \theta$$

$\theta$  = ángulo geométrico =  $\frac{x}{a}$

p = número de polos.

Los coeficientes de Fourier,  $b_n$ , están determinados por:

ec. 3-13 
$$b_n = \frac{2}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} B(x) \text{ sen } (n \omega_0 x) dx$$

$$x = a\theta$$

$$dx = a d\theta$$

; a = radio del inducido.

Realizando estos reemplazos en la ec. 3-13, así como los correspondientes a  $B(x)$  dados en las 5 ecuaciones, resulta:

$$\text{ec. 3-14} \quad b_n = \left(\frac{4}{\pi}\right) B\delta m \operatorname{sen} n \left(\frac{\pi}{2}\right) \operatorname{sen} n \left(\frac{b'}{\tau}\right) \left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Cuando  $n=1$ , se tiene el coeficiente de la armónica fundamental, el mismo que está dado por:

$$b_1 = \frac{4}{\pi} B\delta m \operatorname{sen} \left(\frac{b'}{\tau}\right) \left(\frac{\pi}{2}\right)$$

debido a que:

$$0 < \frac{b'}{\tau} = \alpha < 1$$

entonces:

$$0 < \frac{b'}{\tau} \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2}$$

así mismo

$$0 < \operatorname{sen} \left(\frac{b'}{\tau}\right) \left(\frac{\pi}{2}\right) < 1$$

y finalmente

$$0 < b_1 < \frac{4}{\pi} B\delta m$$

Esto lleva a concluir que el coeficiente de la primera armónica disminuye ininterrumpidamente, con la disminución de  $\alpha$ .

Cuando  $n = 3$ , se tiene que:

$$\text{ec. 3-15} \quad b_3 = - \frac{4}{\pi \times 3} B_{dm} \text{ sen } \left( \frac{d'}{\tau} \right) \left( \frac{3\pi}{2} \right)$$

Para variaciones de  $\alpha$  desde cero hasta 1, se obtiene variaciones de diferente pendiente para el coeficiente  $b_3$ . Esto se ilustra en la Fig. 3.8.

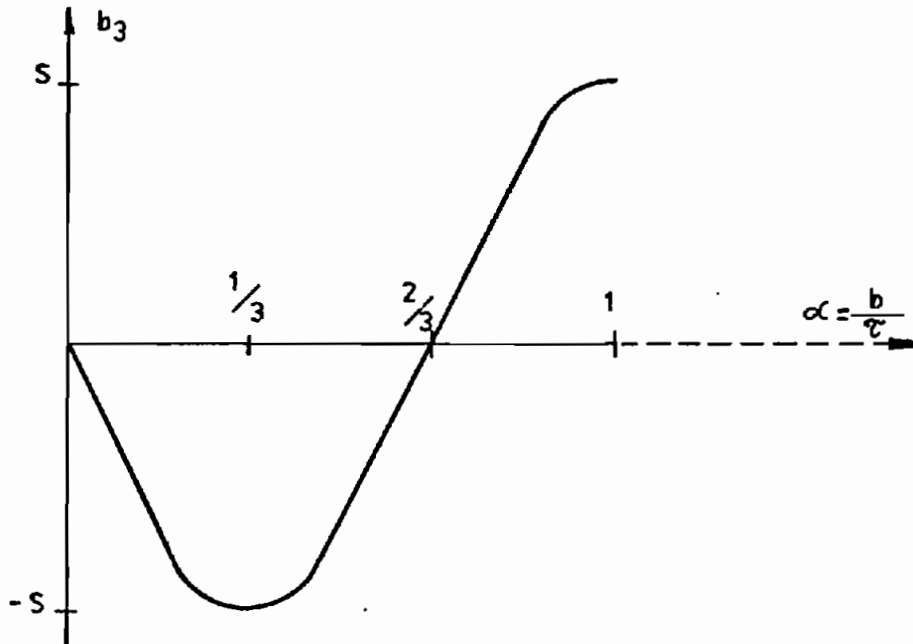


FIG. 3.8.

De la Fig. anterior se aprecia claramente que para  $n = 3$ , se obtiene  $\frac{3}{4}$  de longitud de onda, dentro de la variación del coeficiente  $b_3$ . Se puede generalizar, que el coeficiente  $b_n$  tiene variaciones de su valor en forma sinusoidal, de a-

cuerdo con las variaciones de  $\alpha$ , en una extensión de  $\frac{n}{4}$  de longitud de onda. Para eliminar la tercera armónica, basta diseñar los polos de excitación con extensiones polares reducidas de valor  $b' = \frac{2}{3} \tau$ . Para eliminar la quinta armónica se puede escoger  $b' = \frac{2}{5} \tau$  ó  $b' = \frac{4}{5} \tau$ . y para eliminar la armónica de orden  $n$  se debe escoger cualquiera de los valores siguientes:  $b' = \frac{2}{n} \tau$ ;  $b' = \frac{4}{n} \tau$ ; ....;  $b' = \frac{n-1}{n} \tau$ . De estos posibles valores se debe escoger  $b' = \frac{n-1}{n} \tau$ , ya que éste al ser el mayor de la lista anterior, da la mayor longitud polar y por ende un mejoramiento de la curva de inducción en el entre hierro, un mayor valor de la primera armónica, y menor saturación del entrehierro, ya que el flujo se distribuye en mayor superficie.

De la Fig. 3.8 se concluye también la necesidad de evitar el valor de  $b' = \frac{1}{3} \tau$ , ya que este produce el máximo coeficiente para la tercera armónica. Así mismo debe evitarse los valores:

$$b' = \frac{1}{n} \tau ; b' = \frac{3}{n} \tau ; \dots ; b' = \frac{n-2}{n} \tau ;$$

ya que estos producen valores máximos para las armónicas de grado  $n$ .

### 3.3 VOLTAJE INDUCIDO DEBIDO A LA PRIMERA Y TERCERA ARMONICA DE LA INDUCCION POLAR.

$$| B | = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ sen } n \theta_e$$

$$b_n = \frac{4}{\pi \times n} \times B_{dm} \left[ \text{sen } \frac{n\pi}{2} \times \text{sen} \left( \frac{nb'}{\tau} \right) \frac{\pi}{2} \right] \quad (\text{deducido anteriormente})$$

El voltaje inducido en forma general, está dado por:

$$e \text{ ind} = - \int_S \frac{\partial B}{\partial t} \cdot \hat{n} \, dA + \oint_C (\vec{u} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell}$$

$\vec{u}$  = velocidad con que el conductor corta las líneas de flujo.

$d\vec{\ell}$  = es el vector diferencial de la longitud del conductor.

teniendo en cuenta que el flujo polar no varía con el tiempo.

$$\text{ec. 3-16} \quad e \text{ ind} = \oint_C (\vec{u} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell}$$

En la máquina de C.C. la velocidad  $\vec{u} = -(\omega r \times a) \vec{a}_\theta$ , siendo  $a$  el radio del inducido,  $\omega r$  su velocidad angular y  $\vec{a}_\theta$  el vector unitario que es siempre tangente al inducido. (Ver Figura 3.9).

Además, debido a la gran diferencia de permeabilidad entre



el vacío y el hierro, las líneas de flujo son perpendiculares al inducido. Esto significa que:

$$\vec{B} = -B \cdot \vec{a}_r$$

$$(\vec{u} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} = (\omega_r \times a) |B| \times (\vec{a}_\theta \times \vec{a}_r) \cdot \vec{a}_e dl$$

$$= \omega_r \times a \times B \times (\vec{a}_e \cdot \vec{a}_\ell) \cdot dl$$

$$= \omega_r \times a \times B dl \text{ (tomamos sentido de giro trigonométrico).}$$

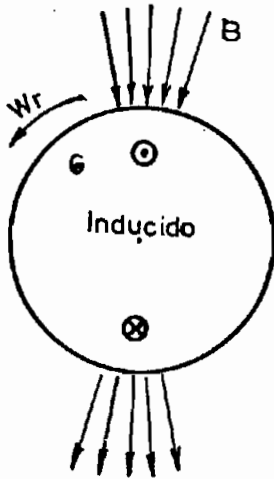


FIG. 3.9.a

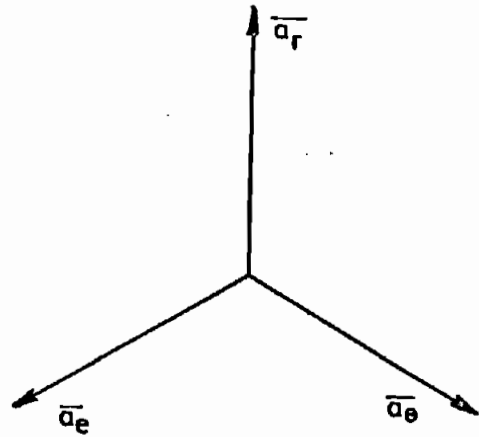


FIG. 3.9.b

$$e \text{ ind} = \oint_c \omega_r a B dl$$

Para una máquina en particular, la velocidad angular y el ra di o del inducido son constantes cuando ésta funciona en esta do est able. Para esta condición se tiene:

$$e \text{ ind} = a \omega_r \int_C B \, dl$$

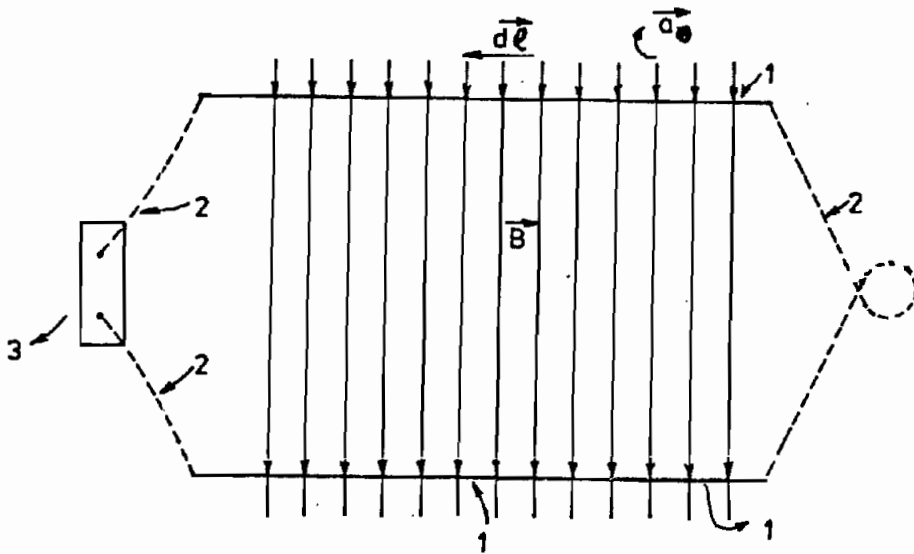


FIG. 3.10

1. lados activos de una espira.
2. partes frontales no actúan
3. delgas

NOTA: Para el ejemplo hemos tomado un arrollamiento imbricado simple de paso diametral, lo cual significa que el primer lado activo se encuentra desfasado  $(n\pi)$  rad. del segundo lado activo para la armónica de grado  $n$ .

$$e \text{ ind} = a \omega_r \int_C \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ sen } n \theta_e \, dl$$

$$e \text{ ind} = a \omega_r \left\{ \int_0^{+l} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ sen } n \theta_e \, dl + \int_{+l}^0 \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ sen } n(\theta_e + \pi) \, dl \right\}$$

(Ver Fig. 3.10).

$$\begin{aligned} \text{sen } n(\theta_e + \pi) &= \text{sen } (n \theta_e + \pi) \text{ debido a que } n \text{ es impar} \\ &= -\text{sen } n \theta_e \end{aligned}$$

$$e_{\text{ind}} = \sum_{n=2}^{\infty} a_n b_n \omega_r \left\{ 2 \int_0^l \text{sen } n \theta_e \, dl \right\}$$

ec. 3-17 
$$e_{\text{ind}} = \sum_{n=1}^{\infty} 2 a_n l \omega_r b_n \text{sen } n \theta_e$$

Particularizando para la primera armónica:

$$e_1 = 2 a l \omega_r b_1 \text{sen } \theta_e ;$$

de ecuación 1 
$$b_1 = \frac{4 B \, dm}{\pi} \text{sen} \left( \frac{b'}{\tau} \right) \left( \frac{\pi}{2} \right)$$

ec. 3-18 
$$e_1 = \left[ \frac{8}{\pi} (a l B dm \omega_r) \text{sen} \left( \frac{b'}{\tau} \times \frac{\pi}{2} \right) \right] \text{sen } \theta_e$$

Particularizando para la tercera armónica:

$$e_3 = 2 a l \omega_r b_3 \text{sen } 3 \theta_e$$

de ecuación 1 
$$b_3 = - \frac{4 B dm}{3\pi} \text{sen} \left( \frac{b'}{\tau} \frac{3\pi}{2} \right)$$

ec. 3-19 
$$e_3 = \left[ \frac{8}{3\pi} (a \ell B d m \omega_r) \operatorname{sen} \left( \frac{b'}{\tau} \frac{3\pi}{2} \right) \right] \operatorname{sen} 3 \theta_e$$

$$\frac{e_1}{e_3} = - \frac{3 \operatorname{sen} \left[ (b'/\tau) \times \pi/2 \right]}{\operatorname{sen} \left( \frac{3b'}{\pi} \frac{\pi}{2} \right)} = \frac{b_1}{b_3}$$

(Se ha tomado en cuenta una sola espira).

Graficando la ec. 3-18 y la ec. 3-19 se produce la Fig. 3.11.

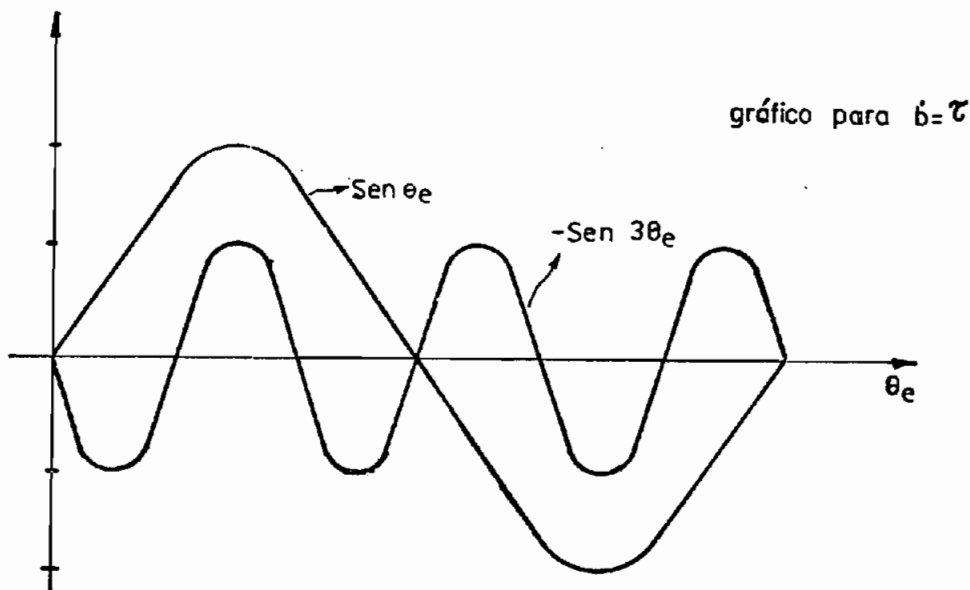


FIG. 3.11

De la Fig. anterior se nota claramente que la tercera armónica aumenta la amplitud de la primera armónica en la cresta de la onda, pero la disminuye radicalmente en los sectores inicial y terminal del paso polar. Si la razón de la primera ar

mónica respecto a la tercera se hace pequeña, es decir  $b' \ll \tau$  la influencia ya analizada de la tercera armónica ocasiona que los bobinados distribuidos en el espacio tengan voltajes inducidos con saltos no sinusoidales. Teniendo presente que cada espira va conectada a delgas contiguas, entonces la diferencia de tensión entre delgas sea elevada en algunos sectores. Esto contribuye a formar el denominado FUEGO CIRCULAR EN EL COLECTOR.

El fuego circular es bastante peligroso, puesto que puede conducir a serias averías de la máquina. Las formas de su eliminación se analizará más adelante.

Voltaje inducido entre escobillas, debido a la primera armónica y a la tercera armónica.

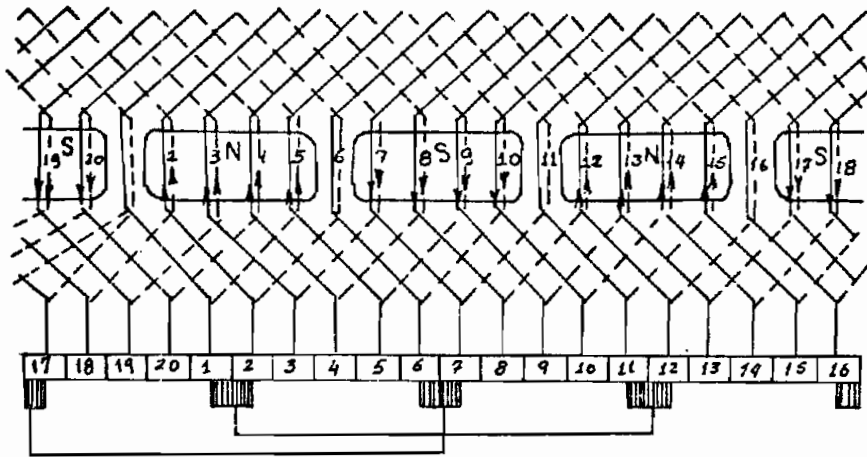
El Voltaje inducido entre escobillas es la suma de los voltajes inducidos en las diferentes espiras conectadas en serie, que tienen como punto de partida y de llegada dos escobillas de diversa polaridad. Cada espira tiene su voltaje inducido, en un momento determinado, dependiendo del sitio que ocupe dentro de la distribución de flujo en el eje de abscisas (inducido) de la figura anterior.

ARROLLAMIENTO IMBRICADO SIMPLE DE PASO DIAMETRAL.

En una máquina de  $P/2$  pares de polos, el arrollamiento imbricado tiene  $m = p$  circuitos en paralelo, constituidos por la

capa superior de los conductores situados bajo el primer paso polar en serie con los conductores de la capa inferior del segundo paso polar, de tal forma que los voltajes se sumen entre sí y por tanto la estrella vectorial de los voltajes de ranura, no abarca  $360^\circ$  sino solamente  $180^\circ$  eléctricos (Para una descripción gráfica de este fenómeno, pueden mirarse los ejemplos posteriores). El voltaje resultante entre escobillas no es otra cosa que la suma vectorial de esa estrella de ranuras, y la tercera armónica sólo representa disminución de los vectores extremos, es decir una pequeña disminución del voltaje terminal entre ranuras y que para el efecto pasa desapercibida. La tercera armónica, al disminuir el voltaje inducido en los extremos polares, disminuye también el voltaje de conmutación, lo cual en ciertos casos es ventajoso. (Ver apéndice A-2 , además de la Fig. 3.11.

Ejemplo: Las figuras que siguen a continuación representan a un arrollamiento imbricado de 4 polos, desarrollado y la estrella de ranuras del mismo arrollamiento. El número de ranuras es 20 y el número de conductores en cada capa de la ranura es 1. El número total de conductores es  $20 \times 2 = 40$ , y por consiguiente el número de espiras es 20. Un paso polar es  $20/4 = 5$  delgas del colector. El paso posterior y p ( ancho de bobina) se toma igual a 5 delgas del colector. El paso anterior ya se toma igual a 4 delgas (Véase Capítulo 3.3 de "Máquinas de Corriente Continua" de Michael Liwschitz - Garik y Clyde C. Whipple).



Desarrollo del diagrama de un arrollamiento imbricado de 4 polos y dos capas con ranuras y un conductor por capa.

FIG. 3.12

Siendo 20 el número de ranuras; el ángulo de defasamiento entre 2 ranuras contiguas está dado por:

$$\alpha_e = \frac{2 \times 360}{20} = 36 \text{ grados eléctricos} \quad \left| \alpha_2 = \frac{360 \times (p/2)}{Q} \right|$$

Tomando en consideración que según la Fig. 3.12 el conductor 1, se encuentra entre los polos N y S, se asume que la f.e.m. inducida por éste es de valor nulo, y por lo tanto su vector representativo no debe tener componente de ordenada, es decir se encuentra sobre la abscisa x.

El conductor 2 está a  $36^\circ$  del conductor 1; el 3 a  $72^\circ$ ; etc.

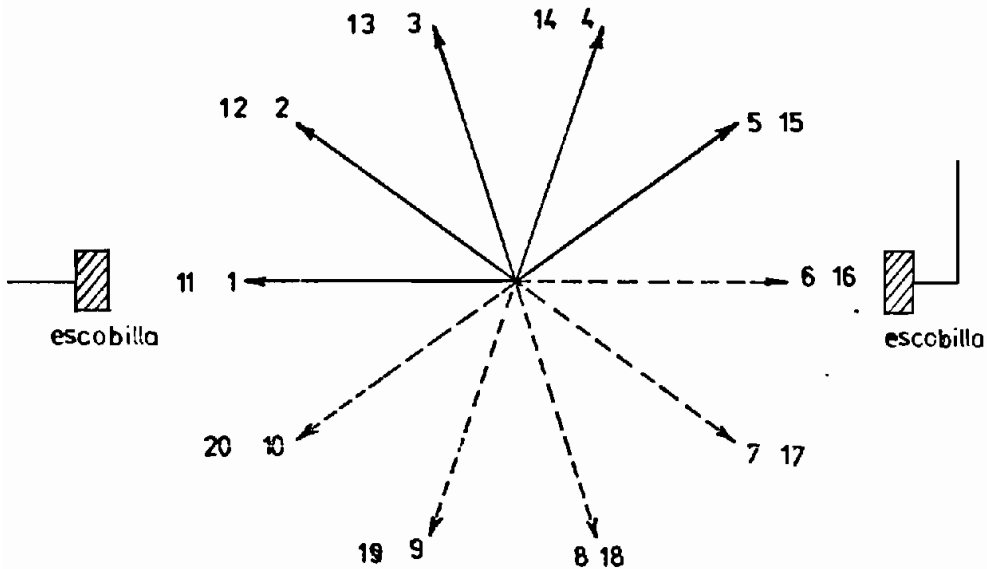


FIG. 3.13

NOTA: En esta estrella, cada vector es la suma de el voltaje inducido en la primera capa, más la negación del voltaje inducido en su conductor complementario que se encuentra después de un paso polar, en la capa inferior. Se ha tomado en cuenta la influencia de la primera armónica solamente.

Las diez primeras ranuras forman un círculo de vectores, pero los vectores que se encuentran con líneas discontinuas se los toma como parte de los vectorialmente opuestos. Así, el vector 7 se lo toma como conformante del vector 2, etc. Las 10 ranuras restantes forman un círculo de vectores idénticos a los dados por las 10 ranuras restantes.



El voltaje total inducido entre escobillas  $e_{1T}$  es:

$$e_{1T} = e_{11} + e_{12} + e_{13} + e_{14} + e_{15}$$

Todos los voltajes tienen la misma amplitud, dada por la ec. 3-18.

$e_{1i}$  significa voltaje inducido en la espira  $i$ , debido a la primera armónica.

$$e_{1T} = \left| \frac{8}{\pi} (a \quad Bdm \omega_r) \operatorname{sen} \left( \frac{b'}{\tau} \frac{\pi}{2} \right) \right| \left| \operatorname{sen} 0^\circ + \operatorname{sen} 36^\circ + \operatorname{sen} 72^\circ + \right. \\ \left. + \operatorname{sen} 108^\circ + \operatorname{sen} 144^\circ \right|$$

$$e_{1T} = E_{\max} \left| 2 (\operatorname{sen} 36 + \operatorname{sen} 72) \right| = 2(1,54) E_{1\max}$$

$$e_{1T} = 3,08 E_{\max}$$

Este voltaje resultante varía de acuerdo con el número de elementos de devanado cortocircuitado, pero esta variación es pequeña y no es de interés analizarla.

El voltaje total inducido entre escobillas  $e_{3T}$  es:

$$e_{3T} = e_{31} + e_{32} + e_{33} + e_{34} + e_{35}$$

Debido a que la tercera armónica tiene su período igual a la

tercera parte del período de la primera armónica, el defasamiento entre dos ranuras es  $3 \times 36 = 108^\circ$

$e_{3,i}$  significa voltaje inducido en la espira  $i$ , debido a la tercera armónica.

$$e_{3,T} = E_{3,max} |\text{sen } 108 + \text{sen } 216 + \text{sen } 324 + \text{sen } 432|$$

$$e_{3,T} = 1,44 E_{3,max}$$

En forma general, si se toman ranuras cuyos extremos están defasados  $180^\circ$  para la primera armónica, para la tercera, están defasados  $3 \times 180^\circ$ . Esto significa que sólo la tercera parte de las ranuras aportan con su valor de tercera armónica al voltaje de escobillas.

Ejemplo 2.- La figura que se describe a continuación, muestra el desarrollo de un arrollamiento ondulado que corresponde a 4 polos. El número de ranuras es 19 y el número de conductores en cada capa de una ranura es 1. El número total de conductores es  $19 \times 2 = 38$ , y, por consiguiente, el número de espiras (elementos de devanado) así como el número de delgas del colector es 19. De acuerdo con la ecuación  $y = \frac{K + 1}{p/2}$  (dada en el capítulo 3.3, del libro ya mencionado de Siwshitz Garik) donde  $K$  es el número de ranuras,  $y$ ,  $y$  es el número de ranuras entre elementos de devanado que se encuentran bajo polos del mismo signo ( $y = y_p + y_a$ )

En un paso polar hay  $19/4 = 4\frac{3}{4}$  delgas del colector. El ancho de bobina y p se toma de 5 delgas del colector, o sea, pa recido al paso polar pero ligeramente mayor que éste. El pa so anterior es entonces  $Y_a = 9 - 5 = 4$  delgas del colector. Como hay sólo 1 conductor por capa en la ranura, el paso pos terior y el paso anterior son 5 y 4 ranuras, respectivamente.

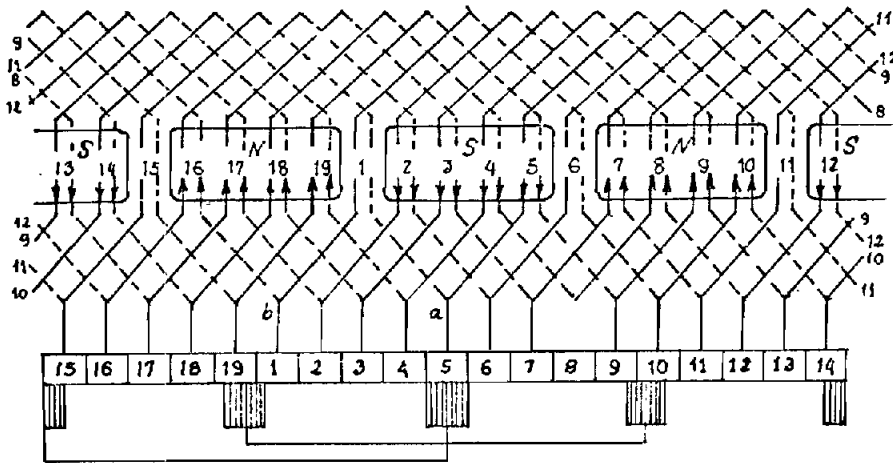


Fig. 3.14 Diagrama desarrollado de un arrollamiento ondulado de 4 polos, 2 capas, con 19 ranuras y un conductor por capa.

En este arrollamiento ondulado, el ángulo entre dos ranuras es  $\frac{4 \times 180}{19} = 37\frac{17}{19}$  grados eléctricos. Empezando nuevamente con el conductor 1 y dibujando los 19 conductores a  $37\frac{17}{19}$  gra dos uno de otro, obtenemos la estrella de ranuras que se des drible a continuación. (Fig. 3.15).

Debido a la particularidad que tienen los arrollamientos ondu lados de unir los conductores más cercanos eléctricamente, cum

que sean de polos diferentes, se forma siempre sólo 2 circuitos en paralelo (Ver capítulo 3.4 de "Máquinas de Corriente Continua" de Liwshitz - Garik).

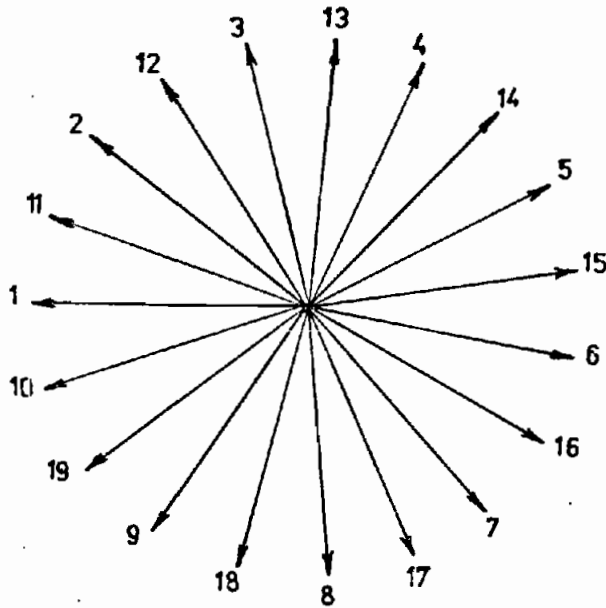


FIG. 3.15

El voltaje total  $e_{1T}$  inducido entre escobillas debido a la armónica  $n = 1$  es:

$$e_{1T} = e_{11} + e_2 + e_{12} + e_3 + e_{13} + e_{14} + e_5 + e$$

$$e_{1T} \cong E_{1\max} (\text{sen } 19 + \text{sen } 38 + \text{sen } 57 + \text{sen } 76 + \text{sen } 95 + \\ + \text{sen } 114 + \text{sen } 133 + \text{sen } 152)$$

$$e_{1T} = 5,86 E_{1\max}$$

El voltaje total para la armónica  $n = 3$ , es:

$$e_{3T} = E_{3\max} (\sin 57 + \sin 114 + \sin 171 + \sin 228 + \sin 285 + \\ + \sin 342 + \sin 399 + \sin 456)$$

$$e_{3T} = E_{3\max} (1,51)$$

De idéntica forma, como en el caso de arrollamiento imbricado la tercera armónica tiene 3 partes componentes, 2 de las cuales se eliminan entre sí.

### 3.3.1 CONCLUSIONES ACERCA DEL VOLTAJE INDUCIDO ENTRE ESCOBILLAS Y EL MOMENTO ELECTROMAGNETICO.

La forma no sinusoidal de la curva de la inducción polar no produce pérdidas ni en el voltaje inducido, ni en el momento electromagnético, debido a que las f.e.m. de cada bobina se suman, independientemente del valor inducido en ellas. De esta manera el efecto de estas armónicas queda circunscrito al problema que éstas puedan causar cuando existen bruscas diferencias de voltaje inducido entre delgas continuas del colector. Cuando se da esta situación, se ve favorecida la creación y sostenimiento del cortocircuito del colector, denominado "fuego circular", el mismo que será analizado conjuntamente con el subcapítulo "Distorsión de la Curva de Inducción debida a la Reacción de Armadura", que se mira a continuación.

### 3.4 DISTORSION DE LA CURVA DE INDUCCION DEBIDA A LA REACCION

DE ARMADURA.

A continuación se muestran los polos principales y el inducido desarrollado.

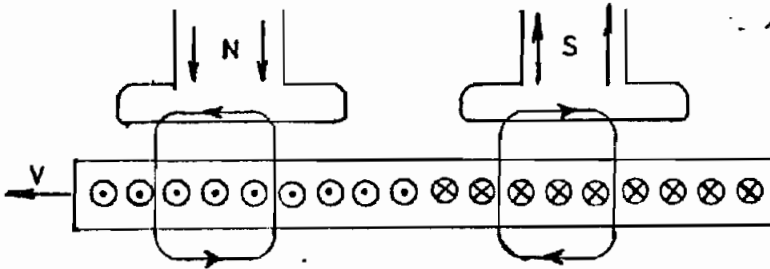


FIG. 3.16

Bajo el polo norte se inducen corrientes que salen del plano y bajo el polo sur, entran al mismo.

Se ha tomado caminos magnéticos bajo los 2 polos, que dependen del valor de la corriente que encierran. Exactamente bajo el centro polar la f.m.m. es nula, siendo máxima en el punto de cambio de polaridad de las corrientes (escobillas).

Asumiendo una distribución continua y homogénea de las corrientes en el inducido, la curva representativa de la f.m.m. sería: (Fig. 3.17)

En el espacio interpolar, el entrehierro crece considerablemente, por lo cual la inducción  $B$  y el flujo  $\phi$  decrecen en ese sector. (Fig. 3.18)

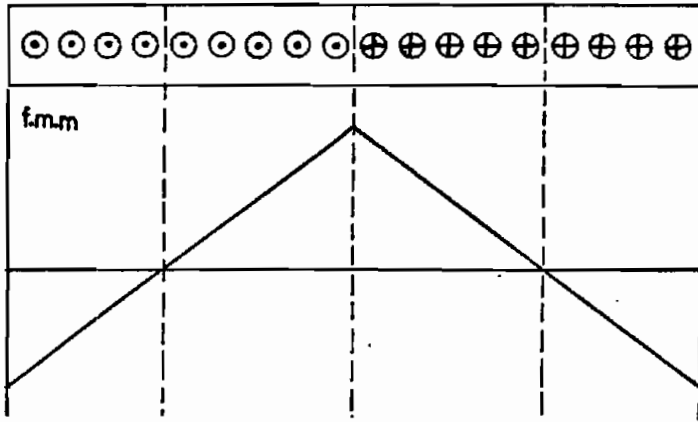


FIG. 3.17

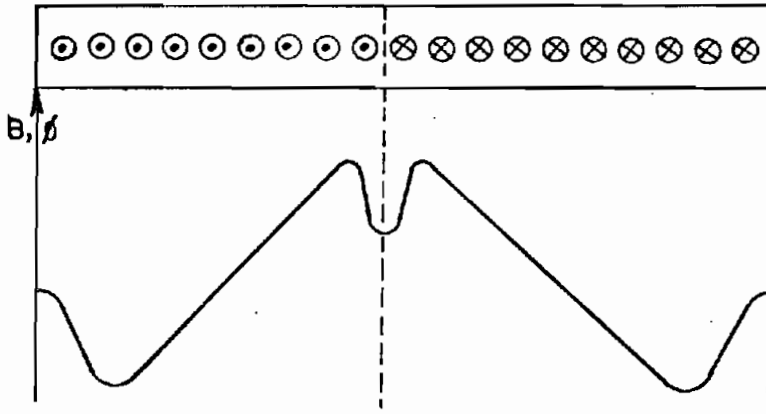


FIG. 3.18

La reacción de inducido provoca que la curva de inducción se distorsione, pues aumenta el valor de la inducción en la arista anterior del polo y la disminuye en la arista posterior. Si la saturación de hierro tiene valores despreciables para ese rango de trabajo, el aumento de la inducción efectuado en la arista anterior, es del mismo valor que su disminución en la arista contigua. Si la saturación del hierro tiene valores apreciables, la disminución de la inducción en la arista anterior, es de mayor valor que su aumento en la arista poste

rior, provocándose la desmagnetización de la máquina. Las 2 posibilidades están representadas en el siguiente gráfico, estando con línea punteada, la curva de hierro saturado.

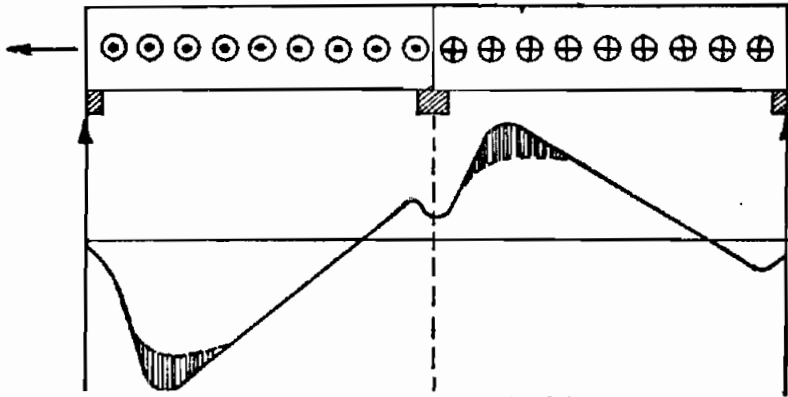


FIG. 3.19

En el gráfico anterior se ve que si las escobillas están situadas en la línea neutra geométrica, éstas cortocircuitan secciones que están afectadas por un valor no nulo de inducción  $B$ . Este valor no nulo de inducción genera un voltaje que implica modificaciones en las condiciones de conmutación, lo que se analiza en el Apéndice A.2.

Se supone en primera instancia, que la máquina funciona como generador  $G$  y que las escobillas  $A$  y  $B$  están colocadas por línea neutra geométrica. (Ver Fig. 3.20.a).

Se representa la f.e.m.  $e_a$ , inducida en la sección  $a$ , antes de comenzar la conmutación, por un segmento dirigido hacia arriba a partir del eje de abscisas. Al funcionar la máquina como generador, la corriente  $i_a$  coincide por su dirección con



la f.e.m.  $e_a$  y crea en la zona de conmutación el campo transversal del inducido, mostrado en la Fig. . con dos líneas de trazos. Aplicando la regla de la mano derecha se halla que cuando la sección a, se encuentra por debajo de la escobilla A y comienza a conmutarse, el campo del inducido, induce en esta sección una f.e.m.  $e_{aq}$  del mismo signo que la f.e.m.  $e_a$ ; por eso en la Fig. 3.20.b, la f.e.m.  $e_{aq}$  se representa por un segmento dirigido de la misma manera que la f.e.m.  $e_a$ , del eje de abscisas hacia arriba.

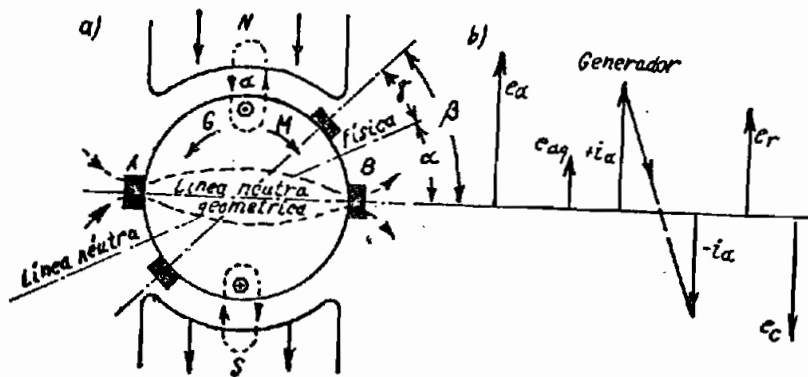


FIG. 3.20

Durante el tiempo de conmutación T la corriente  $i_a$  varía desde  $+ i_a$  hasta  $- i_a$  (Ver Apéndice A.2), y en la sección conmutada se crea la f.e.m. reactiva  $e_r$ , dirigida siempre en sentido opuesto con respecto al cambio de la corriente  $i_a$  que tie

ne lugar en la sección; de acuerdo con esto, ella deberá ser representada por un segmento dirigido así como las fuerzas electromotrices  $e_a$  y  $e_{aq}$ , del eje de abscisas hacia arriba. Se ve que la f.e.m.  $e_{aq}$  actúa en la misma dirección que la f.e.m.  $e_r$ , es decir no acelera la conmutación y, por consiguiente, ejerce sobre ésta una influencia desfavorable.

Desviando las escobillas en el sentido de rotación del inducido a un ángulo  $\alpha$  a la posición de la línea neutra física, se ve que  $e_{aq} = 0$ . Pero, además, hay que compensar la f.e.m. reactiva  $e_r$ , creando en la sección conmutada la f.e.m.  $e_K$  dirigida en sentido opuesto a la f.e.m.  $e_r$ , por consiguiente, esta f.e.m. deberá estar representada por un segmento dirigido del eje de abscisas hacia abajo. Comparando las fuerzas electromotrices  $e_a$  y  $e_K$  se ve que éstas deben poseer distintos signos; con otras palabras, si la f.e.m.  $e_a$  hasta el comienzo de la conmutación se crea en el campo de polaridad norte, la f.e.m.  $e_r$ , durante la conmutación deberá ser creada en el campo de polaridad sur. Para satisfacer esta condición, hay que desviar suplementariamente las escobillas de la línea neutra física a cierto ángulo  $\gamma$  en el sentido de rotación del inducido.

Esta deducción tiene carácter general, es decir, para el mejoramiento de la conmutación de una máquina sin polos auxiliares, que funciona como generador, hay que desviar las escobillas de la línea neutra geométrica en el sentido de rotación

del inducido a un ángulo  $\beta = \alpha + \gamma$ . En el caso del motor se da el proceso inverso.

La insuficiencia fundamental del procedimiento de creación del campo de conmutación por medio del desvío de escobillas consiste en que el ángulo de decalaje de las escobillas  $\beta$  debe variar en función de la carga. En toda una serie de casos esto es imposible, por ejemplo en las máquinas cerradas y en las máquinas que funcionan con carga bruscamente variable. Por esta razón en tales máquinas hay que colocar las escobillas en cierta posición media correspondiente a la carga de mayor tiempo de utilización. Pero en este caso se obtendrá un campo de conmutación excesivo a pequeñas cargas e insuficiente a altas cargas.

Si las escobillas están colocadas en la línea neutra geométrica, la magnitud admisible de la f.e.m. no compensada en las máquinas sin polos auxiliares constituye  $e_r + e_{aq} < 2 + 35$ .

#### 3.4.1 CONSECUENCIAS DE LA DISTORSION DE LA CURVA DE INDUCCION.

##### a) FUEGO CIRCULAR:

Se ha notado en el artículo precedente que cuando se tiene una cresta brusca de corriente en la sección conmutada, predomina

mína significativamente la f.e.m. reactiva  $e_r$ , a consecuencia de lo cual la conmutación adquiere un caracter descelorado. En estas condiciones en el contacto por escobillas transitorio se libera una cantidad considerable de energía que provoca un aumento brusco de la caída de potencial y conduce al surgimiento de un arco potente de conmutación entre la delga posterior y el lado de la escobilla que mediante las propias fuerzas electrodinámicas puede conducir a la formación del llamado Fuego circular en el colector, que no es otra cosa que un arco que se cierra entre escobilla de distinta polaridad.

Es evidente que este fenómeno está determinado fundamentalmente por variaciones bruscas de carga y de cortocircuito, pero puede ser iniciado i/o favorecido cuando el voltaje entre delgas es bastante elevado. Se vio de la curva de inducción en carga (sin polos auxiliares ni devanados de compensación) la distorsión que sufre la inducción debida a los polos principales. Es así como en la arista posterior se incrementa su valor y en la anterior se reduce. Teniendo presente que el voltaje inducido en una sección depende en forma directa del valor de la inducción en este punto, lógicamente a mayor reacción de inducido, mayor distorsión de la inducción, mayor voltaje inducido en la sección que se encuentra bajo la arista anterior del polo, lo que conlleva a que aumente la diferencia de potencial entre delgas adyacentes. Es en este sentido que la distorsión de la curva conlleva una mayor posibilidad de

creación de arco y fuego circular.

Supongamos que en el inducido se ha colocado un devanado im  
bricado simple de paso entero. La tensión entre 2 delgas con  
tiguas se determina por la f.e.m.  $e_{cx} = 2 B_x \ell$ ,  $v_a = CBx$ , in  
ducida en la sección conectada a estas delgas, donde  $B_x$  re-  
presenta la inducción en el punto del espacio donde en este  
instante se encuentra la sección (Ver Fig. 3.21).

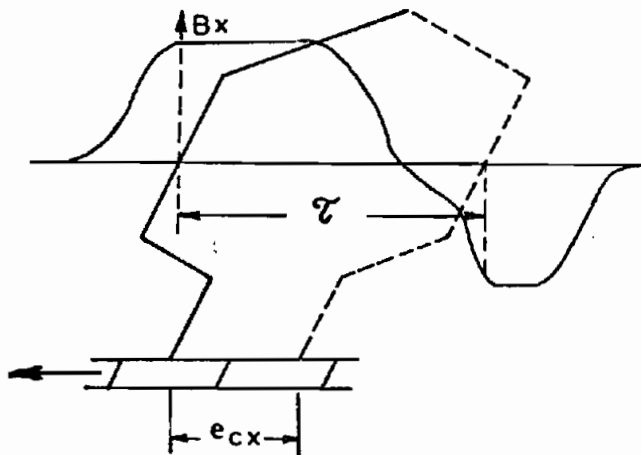


FIG. 3.21

Siendo el número de delgas lo suficientemente grande, se pue  
de asumir que la distribución de la tensión entre las delgas  
contiguas en el colector, corresponde en determinada escala a  
la distribución de la inducción a lo largo del entrehierro de  
la máquina.

En la Fig. 3.22, la curva 1 representa la distribución de la

tensión entre las delgas durante carga. Siendo relativamente pequeño el número de divisiones de colector por polo la tensión entre las delgas tiene el caracter de la curva escalonada 2, cuya línea media (la curva 1) es proporcional a la curva de inducción a lo largo del entrehierro de la máquina.

Si  $E_T$  es la tensión entre dos escobillas contiguas de distinta polaridad y  $K$  es el número de divisiones de colector, entonces el valor medio de la tensión entre 2 delgas contiguas es:

$$\text{ec. 3-20} \quad e_{\text{med}} = \frac{E_T}{Kp} = p \frac{E_T}{K}$$

Se puede demostrar que la tensión  $e_{\text{med}}$ , no depende del tipo de devanado.

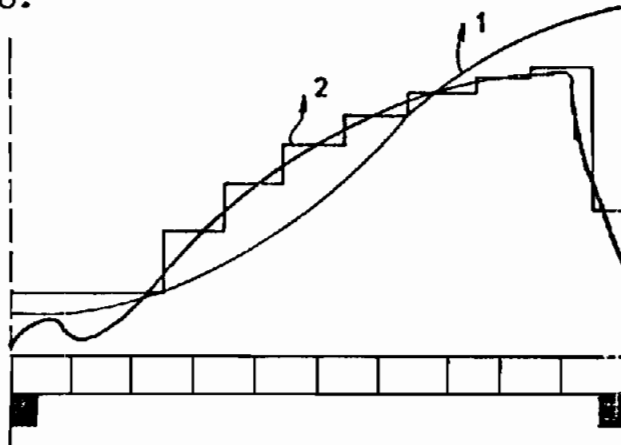


FIG. 3.22

Para determinar  $e_{\text{máx}}$  se debe tener en cuenta que a) la f.e.m de la máquina se crea no por todo el número de secciones  $S$ , sino sólo por el número de secciones  $\alpha'S = \alpha'K$ ; y, b) la re-

acción transversal del inducido en las máquinas sin devanado compensador al distorsionar fuertemente la distribución de la inducción magnética en el entrehierro, la aumenta en la arista anterior al generador y la disminuye en el motor. Correspondientemente aumenta la f.e.m. de las secciones que se encuentran en estos lugares bajo los polos, este aumento se tiene en cuenta por medio del coeficiente  $K_u = 1,3$  a  $1,5$ . Entonces:

$$\text{ec. 3-21} \quad e_{\text{máx}} = K_u p \frac{E_T}{\alpha' K}$$

Experimentos realizados por científicos soviéticos han demostrado que la conmutación transcurre felizmente sólo en el caso cuando  $e_{\text{máx}} < 25$  a  $28$  v. en las máquinas de gran potencia,  $30$  a  $35$  v. en las máquinas de potencia media, y  $50$  a  $60$  v. en las máquinas de pequeña potencia. Si la tensión  $e_{\text{máx}}$  sobrepasa estos límites, entonces la junta aislante entre dos delgas contiguas puede ser cubierta por el arco, a lo que contribuye también el polvo metálico y de carbón que siempre existe en el colector. El arco ioniza el espacio circundante y a la vez contribuye a la formación de otros arcos más potentes, como resultado de lo cual pueden ocurrir serias averías en las máquinas (Ver "Máquinas Eléctricas" Kostenko, Tomo I).

b) REDUCCION DE VOLTAJE GENERADO.

Al distorsionarse la curva de inducción, ya se ha analizado que se incrementa en una mitad polar y decrece en la otra. Ese aumento se compensaría con esta reducción. Al tomar en cuenta que el factor  $\mu$  de permeabilidad no es constante se llega fácilmente a la conclusión que al aumentarse la f.m.m.  $\mu$  decrece y se tiene un aumento menos significativo de flujo magnético que su reducción.

En vista que el voltaje inducido entre escobillas es la suma de los voltajes de las secciones, y que estos dependen de la curva de inducción, se vislumbra claramente que la distorsión provocada por la reacción de inducido disminuye el voltaje generado entre escobillas. Este efecto es importante tomarlo en cuenta sobre todo cuando se trata de un generador.

En ocasiones que se desea mejorar la conmutación mediante el desvío de las escobillas en la dirección del neutro físico de la máquina se forman componentes netamente desmagnetizantes como se analizará a continuación.

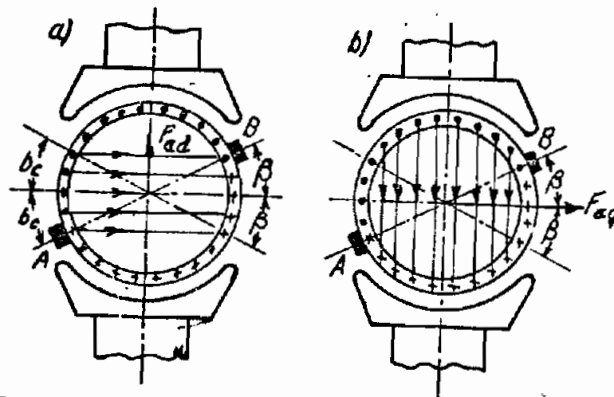
Considérese la Fig. 3.23, a y b, que muestran una máquina de corriente continua con sus escobillas desplazadas cierto ángulo  $\beta$ . En estas condiciones el inducido puede ser considerado como dos electroimanes coincidentes, uno de los cuales, formado por la parte del arrollamiento incluida en el ángulo doble  $2\beta$ , crea la f.m.m. longitudinal  $F_{ad}$  del inducido, y el otro,



formado por la parte restante del arrollamiento incluida en el arco  $\tau-2bc$ , crea la f.m.m. transversal  $F_{aq}$  del inducido. Si se considera que el valor de la f.m.m. de ese mismo inducido, cuando se encuentra en el neutro geométrico, es  $F_{m\acute{a}x}$ , entonces:

ec. 3-22 
$$F_{ad} = \frac{\beta}{\pi} F_{m\acute{a}x}$$

ec. 3-23 
$$F_{aq} = \frac{\pi - \beta}{\pi} F_{m\acute{a}x}$$



Fuerza magnetizante longitudinal y transversal del inducido para el caso de desplazamiento de las escobillas en la línea neutra

FIG. 3.23

La distorsión causada por la f.m.m.  $F_{aq}$  ha sido analizada con anterioridad, mientras que la f.m.m.  $F_{ad}$  causa una disminución neta de la f.m.m. polar, incrementando la desmagnetización de la máquina, y restándole eficiencia.

Para poder realizar una apreciación cuantitativa del efecto

desmagnetizante, y poder calcular con precisión el valor del factor  $K_u$  involucrado en la ec. 3-21, se va a encontrar una ecuación que permita hallar el valor de la inducción  $B$  en cual quier punto de la periferia del inducido.

### 3.4.2 CALCULO DE LA INDUCCION MAGNETICA DEBIDA A LA REACCION DEL INDUCIDO.

Se parte del conocimiento de que  $\vec{B} = \nabla \times A$ , en donde  $A$  es el vector potencial magnético, teniendo como restricción, el in terés de encontrar el valor de la inducción sólo en la peri feria del inducido.

Si se tiene un conductor de radio =  $a$ ; el vector potencial magnético, debido a la corriente que circula por él, está da do por:

$$\text{ec. 3-24} \quad \vec{A} = \frac{uI}{2\pi} \left( \frac{1}{2} + \log \frac{r}{a} \right) \times \vec{n}_z$$

$\vec{n}_z$  es el sentido de la corriente.

$r$  es la distancia del centro del conductor hasta el punto.

En el caso del inducido, la corriente se encuentra en cada uno de los conductores pertenecientes a la armadura. Se puede suponer, con suficiente precisión, que la corriente se encuen

tra distribuída en forma continua.

$$dI = \rho_i R d\theta$$

$$\text{pero, } \rho_i = \frac{Q I}{R p \pi}$$

$\rho_i$  = densidad longitudinal de corriente.

$\frac{Q}{p}$  = número de conductores en  $\pi$  radianes eléctricos.

$R$  = radio de la armadura.

$p$  = número de polos.

$$\text{ec. 3-25} \quad dI = \frac{QI}{p\pi} d\theta \vec{n}_z$$

De esta manera podemos hablar de diferencial de vector potencial magnético  $d\vec{A}$ .

$$\text{ec. 3-26} \quad d\vec{A} = \frac{\mu}{2\pi} \frac{dI(\theta)}{r(\theta)} \left( \frac{1}{2} + \log \frac{r(\theta)}{a} \right)$$

Fig. 3.24, Sean  $P$  y  $P_1$  dos puntos entre los cuales se toma la distancia  $r(\theta)$ .

$P_1$  representa el punto en el que deseamos encontrar el vector potencial magnético y tiene coordenadas polares  $R_1 e^{j\theta_1}$ .

P es un punto ubicado en la periferia del inducido de coordenadas  $R e^{j\theta}$ .

$R_1 = R =$  radio del inducido.

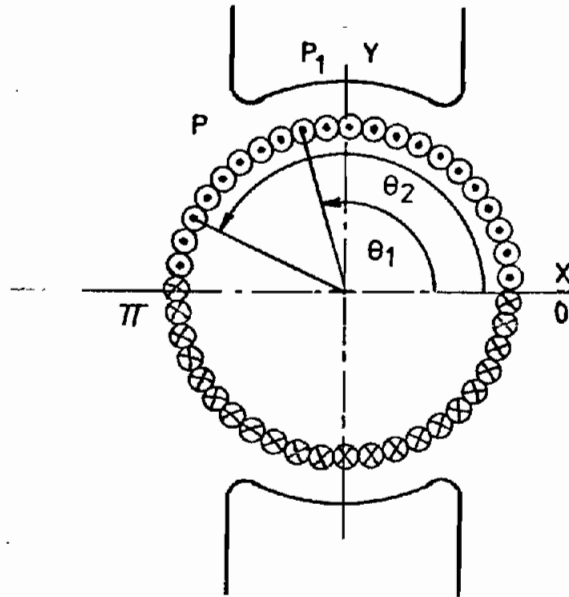


FIG. 3.24

$$\bar{r} = \overline{PP_1} = Re^{j\theta_1} - Re^{i\theta} = (R \cos \theta_1 + j R \sin \theta_1) - (R \cos \theta + j R \sin \theta)$$

Transformación conforme del inducido.-

Realizo la Transformación conforme lo siguiente (Ver textos sobre Variable Compleja).

$\omega_i = \log Z_i$  (Z representa la variable compleja que da cuenta de la posición de un punto en el plano).

$$\omega = \log Z = \log R e^{j\theta} = \log R + j\theta$$

$$\omega_1 = \log Z_1 = \log R e^{j\theta_1} = \log R + j\theta_1$$

en donde  $\log R$  se grafica en la coordenada  $u$ , y  $j\theta$  en la coordenada  $v$  (Sistema de coordenadas  $u, v$  de la Fig.3.25).

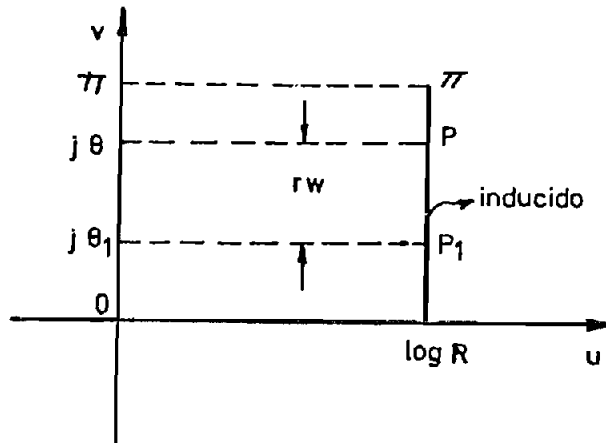


FIG. 3.25

En este nuevo sistema hemos logrado linealizar el inducido, aunque en la Fig. 3.25 está representado sólo en lo que corresponde al sector que tiene una misma dirección de corrientes de la Fig. 3.24. La distancia entre  $P_1$  y  $P$  en este nuevo sistema ( $r_\omega$ ) está dado por:

$$r_\omega = j (\theta - \theta_1)$$

Para los cálculos que siguen a continuación se supone que el punto  $P_1$  es fijo y el punto  $P$  varía entre los valores angulares  $0$  y  $\pi$  radianes. Así, se tiene:

$$\int_0^\pi \log r_\omega d\theta = \int_0^\pi \log [j(\theta-\theta_1)] d\theta = j(\theta-\theta_1) \left[ \log j(\theta-\theta_1) - 1 \right]_0^\pi$$

Efectuándose la Transformación Conforme inversa (consúltese cualquier texto acerca de Variable Compleja).

$$\int_0^\pi \log r(\theta) d\theta = e^{\int_0^\pi \log r_\omega d\theta} = j \left[ \frac{(\theta-\theta_1)}{e} \right]^{j(\theta-\theta_1)} \Bigg|_0^\pi$$

Además, por las ecuaciones 3-25 y 3-26

$$\vec{A}_1 = \int \frac{u d\vec{I}(\theta)}{2\pi} \left( \frac{1}{2} + \log \frac{r(\theta)}{a} \right) d\theta$$

siendo  $d\vec{I} = \begin{cases} \frac{QI}{P\pi} d\theta \vec{n}_z & 0 < \theta < \pi \\ -\frac{QI}{P\pi} d\theta \vec{n}_z & \pi < \theta < 2\pi \end{cases}$

por esto:

$$\vec{A}_1 = \int_0^\pi \frac{uQI}{2} \left( \frac{1}{2} + \log \frac{r(\theta)}{a} \right) d\theta - \int_\pi^{2\pi} \frac{uQI}{2} \left( \frac{1}{2} + \log \frac{r(\theta)}{a} \right) d\theta$$

$$\vec{A}_1 = \frac{uQI}{2} \left\{ \left[ j \left( \frac{\theta - \theta_1}{e} \right)^{j(\theta - \theta_1)} \right]_0^\pi - \left[ j \left( \frac{\theta - \theta_1}{e} \right)^{j(\theta - \theta_1)} \right]_\pi^{2\pi} \right\}$$

$$\text{ec. 3-27} \quad \vec{A}_1 = \frac{uQI}{2} \left\{ 2j \left( \frac{\pi - \theta_1}{e} \right)^{j(\pi - \theta_1)} \quad j\theta_1 \quad j(2\pi - \theta_1) \right. \\ \left. - j \left( \frac{e}{\theta_1} \right) \quad -j \left( \frac{2\pi - \theta_1}{e} \right) \right\}$$

Hasta este punto se ha logrado el análisis del vector potencial magnético, sin considerar la existencia del hierro de los polos de excitación. El aporte de los polos puede ser tomado en cuenta mediante el método de las imágenes, es decir "creando conductores" con sentido de circulación de corrientes inverso de los de la armadura y a igual distancia respecto a los bordes de los polos. Esto puede verse en el gráfico 3.26.

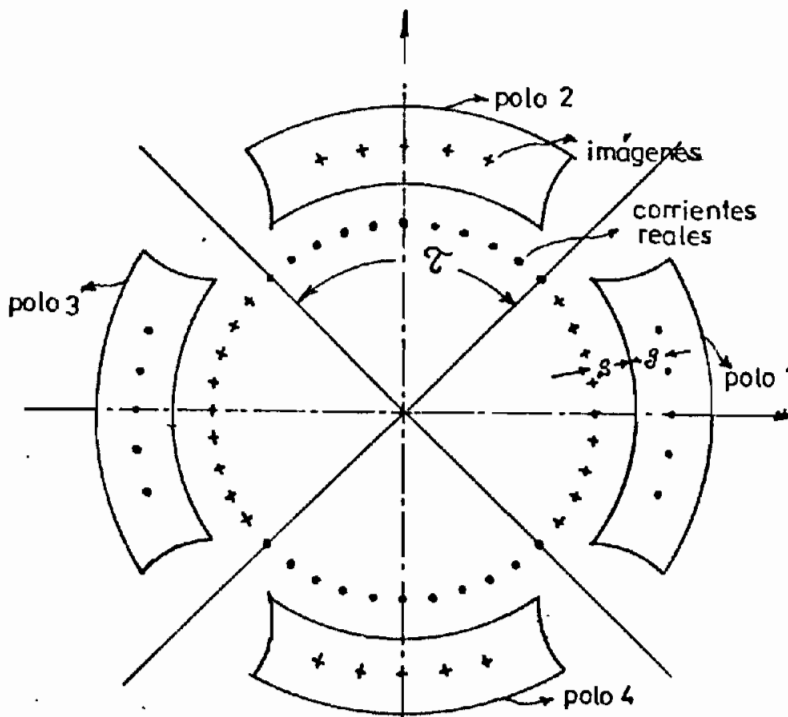


FIG. 3.26

En la Fig. 3.26 se representa la imagen de las corrientes de inducido en los polos de una máquina cuadripolar. Esto es posible a que se considera que la permeabilidad  $\mu$  del hierro es mucho mayor que la del aire  $\mu_0$

$$\mu \gg \mu_0$$

Sea  $\tau$  la longitud del paso polar,  $b$  la longitud del polo, entonces se recuerda que el coeficiente  $\alpha$  está dado por:

$$\alpha = \frac{b}{\tau}$$

Para el caso particular de la máquina de 4 polos

$$\tau = \frac{\pi}{2} R_p \quad ; \quad R_p = \text{radio de curvatura polar}$$

$$b = \alpha \tau = \alpha \frac{\pi}{2} R_p$$

$$\frac{b}{R_p} = \frac{\alpha \pi}{2} = \text{ángulo central existente entre los extremos de un polo.}$$

$$\frac{b}{2R_p} = \frac{\alpha \pi}{4} = \text{ángulo central entre el centro polar y un extremo.}$$

De acuerdo con la Fig. 3.26, el polo 1 se encuentra simétrico respecto al eje X, y su vértice superior forma un ángulo central  $\frac{\alpha \pi}{4}$ . El polo 2 tiene vértices anterior y posterior de



$\frac{\pi}{4} (4-\alpha)$  y  $\frac{\pi}{4} (4+\alpha)$  respectivamente. El polo 3 tiene vértices anterior y posterior de  $\frac{\pi}{4} (4-\alpha)$  y  $\frac{\pi}{4} (4+\alpha)$  respectivamente. Finalmente, el polo 4 tiene sus vértices formando ángulos de  $\frac{\pi}{4} (6-\alpha)$  y  $-\frac{\pi}{4} (6+\alpha)$ . El vértice anterior del polo 1 que se encuentra en el cuarto cuadrante forma un ángulo de  $\frac{\pi}{4} (8-\alpha)$ .

En coordenadas polares, la posición de cada una de las corrientes imágenes queda determinada por  $(R + 2g) e^{jB}$ ; en donde  $g$  es la longitud del entrehierro.

Realizando la transformación Conforme  $\omega = \log Z$ ; con  $\omega$  en nuevas coordenadas.  $(u, v)$ .

$$\omega = \log Z$$

$$Z = (R + 2g) e^{j\theta}$$

ec. 3-28  $\omega = \log (R + 2g) + j\theta$

Sea  $\phi_i$  la densidad lineal de carga

$QI =$  corriente total

$QI =$  corriente imagen total

$$\phi_i = \frac{\alpha \left( \frac{Q}{P} \right) I}{\alpha (R + 2g) \pi} = \frac{\left( \frac{Q}{P} \right) I}{(R + 2g) \pi}$$

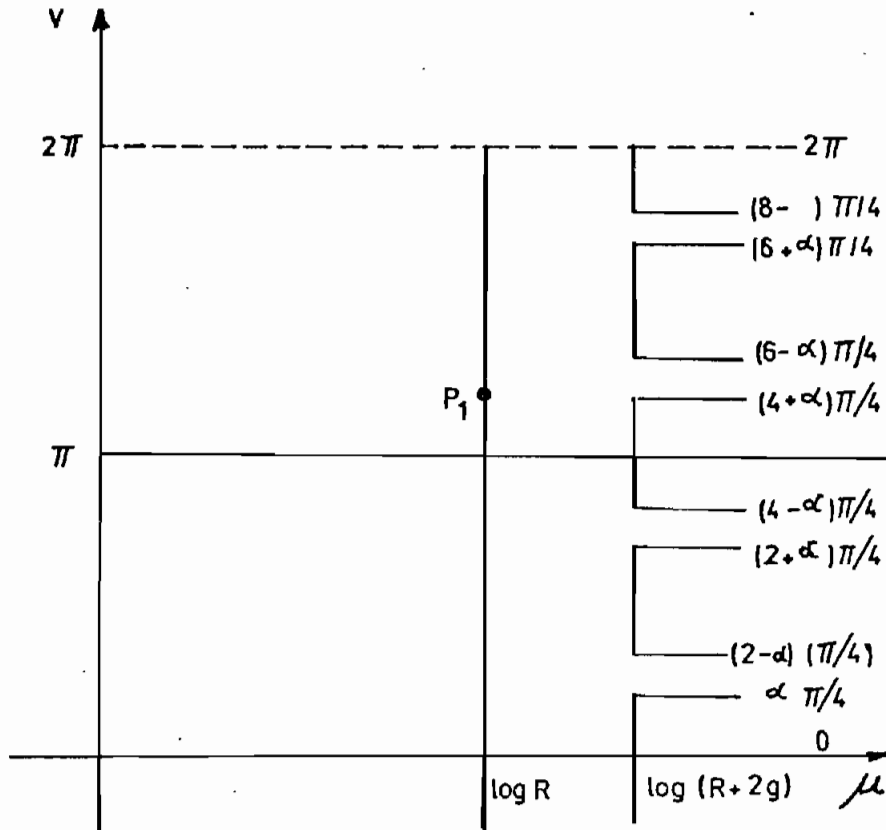


FIG. 3.27

El diferencial  $dI$  de corriente es:

$$dI = \phi_i \times (R + 2g) d\theta$$

$$dI = \frac{QI}{\pi p} d\theta \quad (\text{las diferenciales de corriente son iguales tanto en la armadura como en la imagen}).$$

ec. 3-29 
$$dA_2 = \frac{u dI_2(\theta)}{2\pi} \left( \frac{1}{2} + \log \frac{r_2(\theta)}{a} \right)$$

$$\vec{dI}_2 = \begin{cases} -\frac{QI}{\pi} & 0 < \theta < \pi \\ \frac{QI}{\pi} & \pi < \theta < 2\pi \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{contrario al signo de la corriente} \\ \text{de armadura.} \end{array}$$

al integrarse sobre  $2\pi$ , en la ec. 3-29 se elimina el término  $(\frac{1}{2})$ , así como el radio del conductor  $a$ .

Sea  $r_{\omega_2}$  la distancia entre el punto  $P_1$  y cualquier punto  $P$  perteneciente a la imagen. Entonces,

$$\int \log r_{\omega_2} d\theta = \int \log \sqrt{\left[ \log R - \log(R + 2g) \right]^2 + j(\theta - \theta_1)^2}$$

$$c = \left[ \log R - \log(R + 2g) \right]$$

$$\log r_{\omega_2} d\theta = j(\theta - \theta_1) \log \sqrt{c^2 + j(\theta - \theta_1)^2} - j(\theta - \theta_1) +$$

$$+ c \operatorname{arc} \cos \frac{c}{\sqrt{c^2 + j(\theta - \theta_1)^2}}$$

Realizando la transformación normal inversa  $Z = e^{\omega}$  y siendo  $r_2$  la distancia real existente en el inducido.

$$\int \log r_2 d\theta = e \int \log r_{\omega_2} d\theta$$

$$= \left| \frac{\sqrt{c^2 + j(\theta - \theta_1)^2}}{e} \right|^{j(\theta - \theta_1)} \left( \frac{R}{R + 2g} \right)^{j \arccos \frac{c}{\sqrt{c^2 + j(\theta - \theta_1)^2}}}$$

Por tanto, el vector potencial magnético  $\vec{A}_2$ , debido a las imágenes es igual a:

$$\begin{aligned} \text{ec. 3-30} \quad \vec{A}_2 = & \left\{ - \frac{uQI}{2} \left[ \frac{\sqrt{c^2 + j(\theta - \theta_1)^2}}{e} \right]^{j(\theta - \theta_1)} \right. \\ & \left. \left( \frac{R}{R + 2g} \right)^{j \arccos \frac{c}{\sqrt{c^2 + j(\theta - \theta_1)^2}}} \right\} \left. \begin{array}{l} \pi \\ 0 \end{array} \right\} \\ & + \frac{uQI}{2} \left\{ \left[ \frac{\sqrt{c^2 + j(\theta - \theta_1)^2}}{e} \right]^{j(\theta - \theta_1)} \right. \\ & \left. \left( \frac{R}{R + 2g} \right)^{j \arccos \frac{c}{\sqrt{c^2 + j(\theta - \theta_1)^2}}} \right\} \left. \begin{array}{l} 2\pi \\ \pi \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Se debe tener presente los límites polares ya descritos anteriormente, a partir de la Fig. 3.26.

Según la teoría de las imágenes, se deben tomar imágenes sucesivas, es decir deben encontrarse  $\vec{A}_3, \vec{A}_4; \dots$ , etc. Siendo el vector potencial magnético resultante  $A_R = \vec{A}_1 + \vec{A}_2 +$

$\vec{A}_1 + \dots$ , etc.

Para una primera aproximación se puede tomar  $\vec{A}_R$  como la suma de las ecuaciones 3-27 y 3-30; a partir de lo cual se calcula la inducción magnética en cualquier punto

$$B_R = \nabla \times A_R$$

### 3.5 MECANISMOS PARA MEJORAR LA FORMA DE LA CURVA DE INDUCCION MAGNETICA.

Los mecanismos a estudiarse, fundamentalmente, tratan de contrarrestar la distorsión de la curva de inducción, provocada por la reacción de armadura.

#### 3.5.1 POLOS AUXILIARES.

Los polos auxiliares se colocan en la línea neutra geométrica, al igual que las escobillas, como se muestra en la Fig. 3.28.

Considerando que el entrehierro no está saturado, la f.m.m. auxiliar, creada por los polos auxiliares, debe ser igual a la f.m.m. máxima debida a la reacción del inducido ( $F_{aq}$ ), más la f.m.m. necesaria para crear el voltaje de conmutación necesario para contrarrestar el voltaje reactivo  $e_r$  debido a la

variación brusca de corriente en el elemento cortocircuitado (Ver Apéndice A-2).

ec. 3-31  $F_{aux} = F_{aq} + F_{\delta aux}$

En la Fig. 3.28, a se ha representado la curva de f.m.m. reducida, debida a los polos de excitación, y la debida a los polos auxiliares. En la Fig. 3.28.b, está la reacción de armadura, y en la Fig. 3.28.c, se encuentra la resultante que indica una pequeña f.m.m. en el sector de escobillas en sentido opuesto a la reacción de inducido.

Para realizar un cálculo teórico del valor de  $F_{aux}$  dado por la ec. 3-31, puede consultarse el libro de "Máquinas Eléctricas" Tomo I, de M.P. Kostenko y L.M. Piotrovski en su capítulo 6 - 4 titulado "Creación del campo de conmutación por medio de los polos auxiliares. En todo caso el mecanismo frecuentemente utilizado para encontrar el valor de  $F_{aux}$  dado por la ec. 3-31, es el método de sintonización, es decir aumentar gradualmente el número de espiras de los polos de conmutación, hasta que la conmutación transcurra sin chispas. Este mecanismo, para la mayoría de máquinas de corriente continua, puede ser suficiente, pero en algunos casos la reacción de inducido es lo suficientemente elevada, como para que se den caídas bruscas de f.m.m. en sectores en donde no se puede compensar mediante polos auxiliares, dándose mayores posisi

bilidades de que se forme arco entre delgas contiguas. (Véase Fig. 3.28.c).

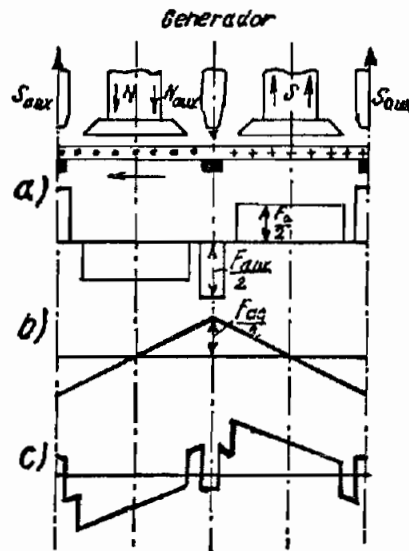
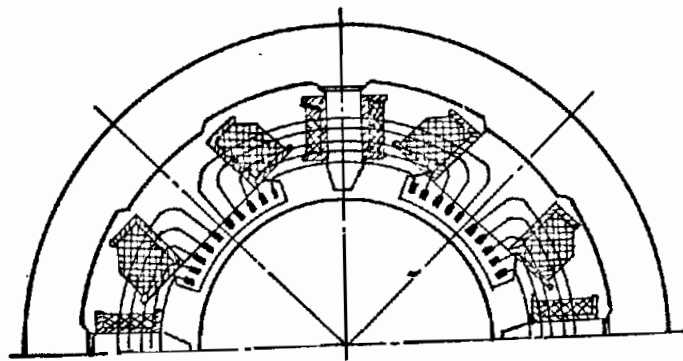


FIG. 3.28

### 3.5.2 ARROLLAMIENTO DE COMPENSACION.

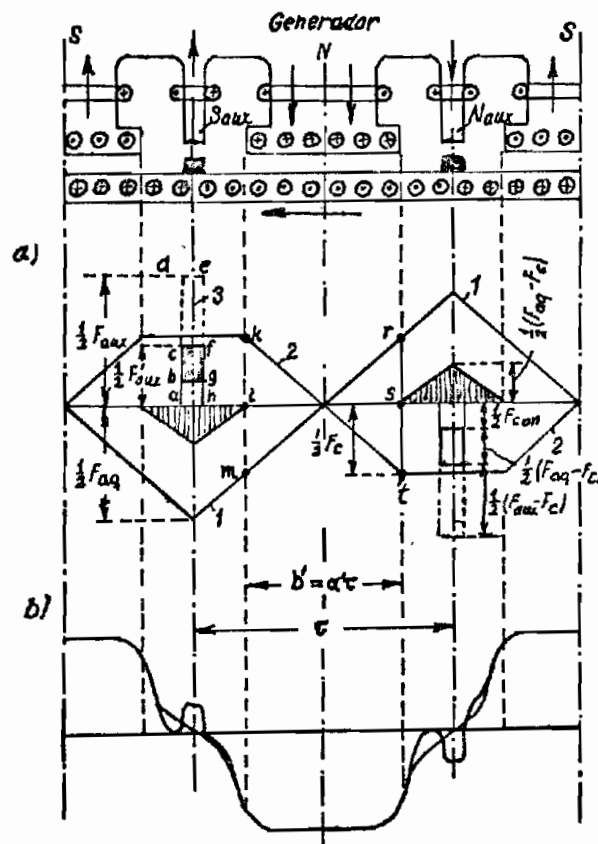
Este mecanismo se utiliza generalmente junto con los polos auxiliares. Elimina en forma más eficiente la reacción de inducido. Para que la compensación tenga lugar a cualquier carga, es menester que el arrollamiento de compensación esté en serie con el inducido. El arrollamiento de compensación se coloca en ranuras existentes para el efecto en los polos principales, como se indica en la Fig. 3.29.

En la Fig. 3.30 se puede mirar las curvas de f.m.m. tanto de



Arrollamiento compensador

FIG. 3.29



Curvas de la fuerza magnetizante  $F_{aq}$  y  $F_k$  y curva del campo resultante de una maquina con arrollamiento compensador.

FIG. 3.30



la reacción de inducido, como de los polos auxiliares y arrollamientos de compensación. También se expone la resultante de todas ellas, que es una curva muy parecida a la existente en vacío y sólo por el efecto de los polos principales.

### 3.6 CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.

1) La curva de inducción polar en vacío, sin la presencia de la reacción de inducido, es similar a la curva de inducción bajo carga pero cuando se utilizan arrollamientos de compensación y polos auxiliares. Esta curva, que es la óptima, dentro de las variantes existentes en la máquina de corriente continua, puede ser descompuesta en serie de Fourier, utilizando para ello la técnica de "Reducción" que transforma la curva real en otra que presenta características de onda cuadrada. De las armónicas dadas por la Serie de Fourier, toma relativo énfasis la tercera armónica, ya que ésta produce caídas bruscas en la curva de inducción, generando voltajes entre delgas contiguas, que pueden generar arco eléctrico.

2) La reacción de inducido distorsiona la curva de inducción y f.m.m. de la máquina (Ver Fig. 3.17 y 3.18), creando los siguientes problemas:

a) Conmutación.- Se aumentan las dificultades en este aspecto, debido a que el neutro geométrico, lugar usual de ubicación de escobillas no coincide con el neutro magnético, esto con

lleva la existencia de cierto voltaje  $e_k$  de conmutación que descelera la curva de conmutación y fortalece el chisporroteo. (Ver Apéndice A-2).

b) Fuego Circular.- Existe mayor posibilidad de creación del fuego circular, ya que el voltaje  $u_c$  entre delgas no es constante, sino que más bien existen bruscas alteraciones de la curva de inducción, dándose sectores en donde se produce un voltaje entre delgas altamente peligroso y que se denomina:

$$\text{ec. 3-32} \quad e \text{ máx} = K_u \quad p \frac{E_T}{\alpha' K}$$

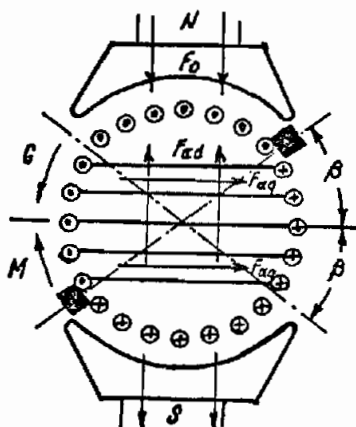
en donde  $E_T$  es el voltaje total inducido entre delgas,  $K$  es el número de delgas del colector,  $p$  el número de polos y  $K_u$  es el coeficiente que involucra el incremento de tensión entre delgas contiguas, debido a la distorsión de la curva de inducción, por causa de la reacción de inducido, y que adopta valores experimentales comprendidos entre 1.3 y 1.5. Para poder encontrar teóricamente este valor, se recomienda realizar un programa digital que grafique las expresiones matemáticas dadas por las ecuaciones 3-27, 3-30 y 3-30.1, expresiones que ofrecen el valor de la inducción magnética resultante de una máquina en condiciones de carga y que por tanto permiten encontrar el coeficiente  $K_u$  de la ec. 3-32.

- c) Desmagnetización debida a la saturación.- En la Fig. 3.19 se representa el efecto provocado por la saturación del entrehierro cuando se suman la reacción del inducido y la curva polar. Esta saturación existe en sectores en los cuales se suman las 2 curvas, pero no en los sectores en que se restan. De esto se concluye que la desmagnetización se hace presente en toda máquina cuando existe saturación en el entrehierro, lo cual redundará en pérdidas para la misma.
- d) Desmagnetización debida al giro de las escobillas.- En máquinas que no poseen polos auxiliares, ni devanados de compensación se deslizan las escobillas hacia el sector magnéticamente neutro en ciertos casos y en otros incluso se llega a tener un mayor giro. Esto se hace para que las escobillas cortocircuiten un elemento de devanado en el cual se ha inducido cierto voltaje de conmutación  $e_K$  que contrarreste al voltaje reactivo  $e_r$ , evitando así el chisporroteo (Véase Fig. 3.20 y Apéndice A-2).

Este método de mejorar la conmutación, tiene varios problemas, pues, además de servir sólo para máquinas con carga estable (pues de otra manera habría que mover continuamente las escobillas, al variar la carga), el inducido queda dividido en 2 imanes superpuestos, los cuales generan f.m.m transversal  $F_{aq}$  y f.m.m longitudinal  $F_{al}$ . Esta última se opone a la f.m.m. de los polos de excitación. A mayor desvío de escobillas, existe mayor desmagnetización de la má

quina (Ver Fig. 3.31).

Debido a estos problemas que trae consigo el desvío de las escobillas de la zona neutra geométrica, se recomienda su utilización sólo en máquinas de pequeña potencia, en donde sea demasiado complicado por su estrechez física, la utilización de polos auxiliares y devanados de compensación, o cuando la máquina se haya diseñado para trabajar a una carga fija que presente una reacción de inducido estable.



Reacción longitudinal del inducido en el generador.

FIG. 3.31

3) Como recomendación general, se propone la investigación de cierta particularidad de la máquina de corriente continua, aún no esclarecida, como es el de conmutación, chisporroteo y fuego circular. Para esto se debe partir de la graficación de la curva de magnetización de la reacción de inducido,

cuya expresión ha sido alcanzada en esta tesis.

Como inicio de esta investigación debe calcularse la autoinductancia e inductancia mutua para los bobinados cortocircuitados en el momento de la conmutación. Además, utilizando el gráfico sobre la curva de magnetización, debida a la reacción de inducido, se puede calcular el factor  $K_u$  dado en la ecuación 3-32, para diversos valores de corriente de inducido, de tal forma que se pueda determinar la máxima carga de la máquina sin que se presente el arco entre delgas contiguas.

A P E N D I C E S

APENDICE 1. FACTORES DE DISTRIBUCION, PASO E INCLINACION.

A-1.1 ESTRELLA DE RANURAS.

La estrella de ranuras indica el defasamiento eléctrico entre las diferentes ranuras de la máquina. Además de facilitar el arreglo y disposición de ranuras, permite derivar en forma simple, fórmulas para los factores de distribución y paso. La Fig. A.1 representa la estrella de ranuras de un bobinado de dos ranuras por polo y por fase ( $q = 2$ ). El ángulo entre dos ranuras  $\alpha_s$  es:

$$\alpha_s = \frac{180^\circ}{3 \times 2} = 30^\circ$$

A dos ranuras adyacentes corresponde dos vectores adyacentes, representando cada vector, ya sea la distribución de corriente ó de f.e.m. inducidas en cada ranura. Pese a que el bobinado es de dos capas, la estrella de ranuras sólo considera a la capa superior, ya que la inferior se comporta en forma similar.

Las ranuras 1,2,7, y 8 pertenecen a la fase A, las ranuras 3, 4, 9 y 10 a la fase C, y así sucesivamente. El vector 7 con el que se inicia el segundo polo está defasado  $180^\circ$  con res-

pecto al vector 1; el vector 8 está defasado  $180^\circ$  con respecto al vector 2, y así sucesivamente. Las ranuras 1 y 7 están situadas en campos de la misma intensidad pero de polaridad diferente; esto explica el defasamiento de  $180^\circ$ . Lo mis

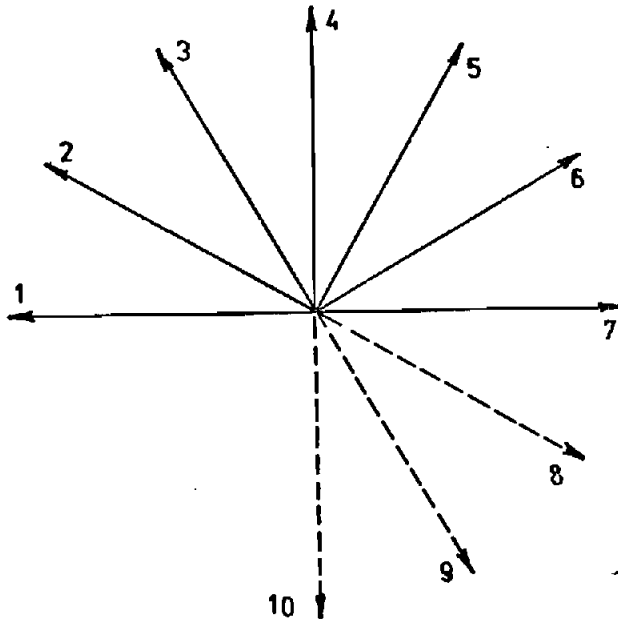


FIG. A.1

mo se aplica a las ranuras 2 y 8, 3 y 9, y así sucesivamente. Las conexiones externas (los cabezales) se hacen de tal manera que las f.e.m. de los lados pares de las bobinas 1 y 7, 2 y 8, y así sucesivamente, se unen. Por lo tanto, el defasamiento de  $180^\circ$  puede desprejarse y el vector 7 puede mostrarse en coincidencia con el vector 1, el vector 8 en coincidencia con el vector 2, y así sucesivamente. La estrella de ra

nuras del arrollamiento de dos polos está completamente representada entonces por la mitad del círculo.

El ángulo eléctrico que existe entre cada ranura, difiere para cada armónica, ya que la armónica de orden  $v$  al tener una longitud de onda  $v$  veces menor que la fundamental, va a producir distanciamiento de fase entre ranuras contiguas que son  $v$  veces mayores que las de la primera armónica.

#### A-1.2 CALCULO DEL COEFICIENTE DE DISTRIBUCION.

Debido a que el ángulo de ranura en grados eléctricos difiere para cada armónica, el coeficiente de distribución  $K_d$  debe ser calculado para cada una de ellas.

Si  $q$  es el número de bobinas por polo y por fase, de modo general vamos a tener  $q$  valores que se van a sumar geométricamente. Lógicamente la suma geométrica de estos  $q$  valores es menor que la suma aritmética de los mismos si  $q > 1$ . Por esto el factor de distribución  $K_d \leq 1$ .

Para encontrar la fórmula para  $K_d$ , se toma un devanado con  $q = 4$  ranuras por polo y por fase. El ángulo entre ranuras  $\alpha_s$  está dado por:

ec. A-1. 
$$\alpha_s = \frac{180 \times p}{Q} = \frac{180}{m \times q} \quad m = \text{número de fases.}$$



En la Fig. A.2 se describe graficamente la suma geométrica de los vectores representativos de cada ranura, y su respectiva resultante ( $f_r$ ).

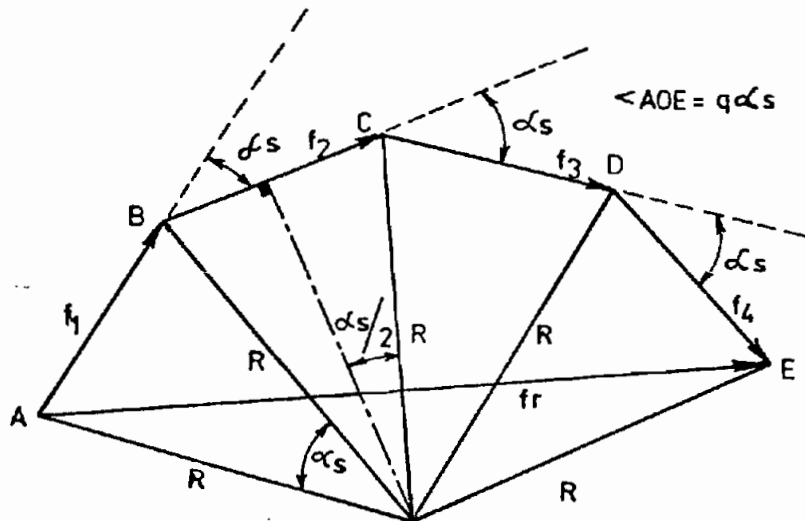


FIG. A.2

La Fig.A.2, representa los vectores de ranura con defasamientos vistos para la primera armónica. El factor de distribución para esta armónica se lo denota con el subíndice 1. De esta manera:

$$Kd_1 = \frac{f_r}{qf} = \frac{2R \operatorname{sen} q \left( \frac{\alpha_s}{2} \right)}{2R q \operatorname{sen} \left( \frac{\alpha_s}{2} \right)}$$

ec. A-2

$$Kd_1 = \frac{\operatorname{sen} q \left( \frac{\alpha_s}{2} \right)}{q \operatorname{sen} \frac{\alpha_s}{2}}$$

Para calcular el factor de distribución para la armónica de orden  $v$ , se debe recordar que el ángulo entre ranuras para esta armónica  $\alpha_s v$ , está dado por:

$$\text{ec. A-3} \quad \alpha_{sv} = v \alpha_s$$

Introduciendo la ecuación A-3 en la ecuación A-2, resulta:

$$\text{ec. A-4} \quad K_{dv} = \frac{\text{sen } q v \left(\frac{\alpha_s}{2}\right)}{q \text{ sen } v \left(\frac{\alpha_s}{2}\right)}$$

A medida que  $q$  crece, la forma de onda generada o inducida por el bobinado, se hace más cercana a la sinusoidal. El caso crítico se tiene cuando el devanado está uniformemente repartido. Es decir  $q \rightarrow \infty$ . Para este caso:

$$K_{d1} = \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{\text{sen } \frac{\pi}{2m}}{q \text{ sen } \frac{\pi}{2mq}}$$

Si el bobinado es trifásico,

$$\text{ec. A-2.1} \quad K_{d1} = \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{\text{sen } \frac{\pi}{6}}{q \text{ sen } \frac{\pi}{6q}} = \frac{3}{\pi} = 0.955$$

Con este mismo procedimiento, y para el mismo devanado, es fá

cil demostrar que:

$$\text{ec. A-4.1} \quad Kd_3 = \frac{2}{\pi}$$

$$\text{ec. A-4.2} \quad Kd_5 = \frac{3}{\pi} \times \frac{1}{5}$$

$$\text{ec. A-4.3} \quad Kd_7 = - \frac{3}{\pi} \times \frac{1}{7}$$

Cuando  $q$  decrece, se tiene como valor límite  $q = 1$ . En este caso se obtienen los siguientes factores de distribución:

$$\text{ec. A-2.2} \quad Kd_1 = 1$$

$$\text{ec. A-4.1} \quad Kd_3 = 1$$

$$\text{ec. A-4.2} \quad Kd_5 = 1$$

$$\text{ec. A-4.3} \quad Kd_7 = 1$$

La relación  $\frac{Kdv}{Kd_1}$  es máxima cuando  $q = 1$  y es mínima cuando  $q \rightarrow \infty$ . Es decir a medida que  $q$  crece se da un mecanismo natural de eliminación de armónicas. De los ejemplos límites anteriores se obtiene:

$$q \rightarrow \infty$$

Designamos con  $\beta$  la magnitud del paso relativo del devanado.

$$\text{ec. A-5} \quad \beta = \frac{y}{\tau}$$

Entonces, al paso del devanado le corresponde un ángulo  $\beta\pi$ , y las armónicas fundamentales de f.e.m. en los conductores 1' y 1" de la espira están desplazados en un ángulo  $\beta\pi$ , mientras que para el  $v$ -ésimo armónico en un ángulo de  $v\beta\pi$ .

En la Fig. A.3.b, se representa el diagrama vectorial para el armónico fundamental de f.e.m. de la espira; según este diagrama:

$$\dot{E}_{\text{esp}} = 2 \dot{E}_{\text{con}_1} \text{ sen } \frac{\beta\pi}{2}$$

$$\dot{E}_{\text{esp}} = 2 \dot{E}_{\text{con}_1} K_{\text{red}_1}$$

$\dot{E}_{\text{esp}}$  = f.e.m. de la espira, que se forma con los conductores 1' y 1".

$$\text{ec. A-6} \quad \text{donde} \quad K_{\text{red}_1} = \text{sen } \frac{\beta\pi}{2}$$

representa el coeficiente de reducción del paso de devanado del primer armónico de f.e.m.

El coeficiente  $K_{\text{red}_1}$  se puede expresar también por la magni-

$$\frac{Kd_3}{Kd_1} = \frac{2}{3} \quad ; \quad \frac{Kd_5}{Kd_1} = \frac{1}{5} \quad ; \quad \frac{Kd_7}{Kd_1} = \frac{1}{7}$$

$$q = 1$$

$$\frac{Kd_3}{Kd_1} = \frac{Kd_5}{Kd_1} = \frac{Kd_7}{Kd_1} = 1$$

### A-1.3 CALCULO DEL COEFICIENTE DE PASO.

Es conocido como factor de paso, factor de reducción ó factor de reducción de paso. Su símbolo es  $K_{red}$ .

Para mejorar la forma de onda, en casi todas las máquinas de corriente alterna se utilizan bobinados de paso reducido, como se indica en la Fig. A-3 (Véase además "Mecanismos de reducción de armónicas en el Capítulo II).

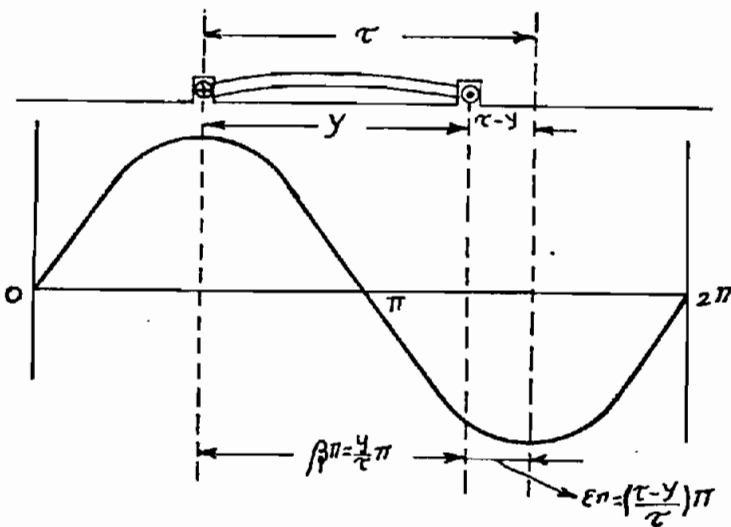


fig. A-3.a

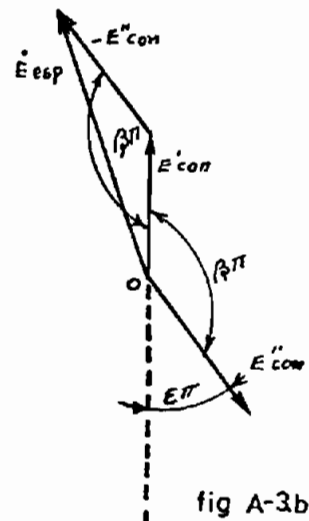


fig A-3b

FIG. A.3

tud relativa de reducción del paso  $\epsilon = 1 - \beta$ , o sea,

$$\text{ec. A-6.1} \quad K \text{ red}_1 = \cos \frac{\epsilon\pi}{2}$$

En el caso general, para la armónica de orden  $v$ ,

$$E \text{ esp}_v = 2 E \text{ con}_v K \text{ red}_v ,$$

donde:

$$\text{ec. A-7} \quad K \text{ red}_v = \text{sen } v \frac{\beta\pi}{2}$$

#### A-1.4 CALCULO DEL FACTOR DE INCLINACION.

Se le conoce también como factor de ranura, y se lo representa por  $K_{si}$ .

El factor de inclinación generalmente se lo introduce al calcular la f.e.m. inducida en el rotor, ya que son esas ranuras, las que generalmente se las inclina, para eliminar las denominadas "Armónicas de ranura". La Fig. A.4, muestra un rotor desarrollado con dos ranuras: La ranura A esta recta, siendo paralela al eje de rotación, mientras que la ranura B se halla inclinada.

Sea  $S$  la inclinación en unidades de longitud;  $\tau_{2s}$  la longitud

media entre ranuras adyacentes, y  $\alpha_{2s}$  el ángulo central exis

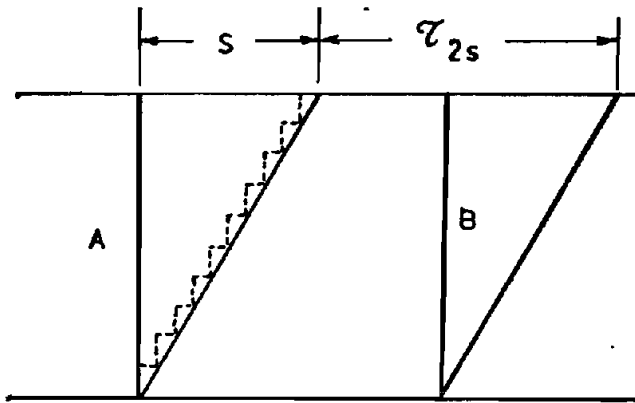


FIG. A.4

tente entre 2 ranuras contiguas del rotor. El ángulo en radianes correspondiente a la longitud de arco s, es:

$$\text{ec. A-8} \quad \gamma_s = \frac{s}{\tau_{2s}} \alpha_{2s} = \frac{s}{\tau_{2s}} \frac{p\pi}{Q_2}$$

La barra inclinada puede sustituir por un gran número (b) de elementos verticales y horizontales, como se indica en la Fig. A.4, con línea de trazos. Para determinar el factor de inclinación, se considerarán, las f.e.m.  $E$  y  $E_s$  inducidas en las barras recta e inclinada, respectivamente. Entonces:

$$\text{ec. A-9} \quad K_{si} = \frac{E_{si}}{E}$$

Los elementos horizontales de la barra inclinada no contribu-

yen en la generación de f.e.m. inducida y únicamente se considerarán los elementos verticales. El primer elemento coincide con la barra recta y tiene la f.e.m. inducida  $\frac{E}{c}$ . El elemento vertical que está luego, tiene la f.e.m. inducida  $(\frac{E}{c}) e^{j\beta}$ , donde

$$\beta = \frac{\gamma_s}{c}$$

El tercer elemento tiene la f.e.m. inducida  $(\frac{E}{c}) e^{j2\beta}$ , y así sucesivamente. De este modo:

$$\begin{aligned} E_{si} &= \left(\frac{E}{c}\right) (1 + e^{j\beta} + e^{j2\beta} + \dots + e^{j(c-1)\beta}) \\ &= \frac{E}{c} \frac{e^{jc\beta} - 1}{e^{j\beta} - 1} = \frac{E}{c} \frac{\cos c\beta - 1 + j \operatorname{sen} c\beta}{\cos \beta - 1 + j \operatorname{sen} \beta} \end{aligned}$$

Tomando la relación de los valores absolutos,

$$K_{si} = \frac{E_{si}}{E} = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{(\cos c\beta - 1)^2 + \operatorname{sen}^2 c\beta}{(\cos \beta - 1)^2 + \operatorname{sen}^2 \beta}} = \frac{1}{c} \frac{\operatorname{sen} c(\beta/2)}{\operatorname{sen}(\beta/2)}$$

Limitando el numerador y denominador separadamente,

ec. A-10 
$$K_{si} = \lim_{\substack{c \rightarrow \infty \\ \beta \rightarrow 0}} \frac{\operatorname{sen} c(\beta/2)}{c \operatorname{sen}(\beta/2)} = \frac{\operatorname{sen} c(\beta/2)}{c(\beta/2)} = \frac{\operatorname{sen} \gamma_s/2}{\gamma_s/2}$$



Introduciendo la ec. A-8 en la ec. A-10 resulta para la primera armónica:

$$\text{ec. A-11} \quad K_{si} = \frac{\text{sen } (s/\tau_{2s}) (p\pi/Q_2) 1/2}{(s/\tau_{2s}) (p\pi/Q_2) 1/2}$$

Esta ecuación es válida para la primera armónica del estator, debido a que sólo para esta onda corresponden  $\pi$  radianes a un paso polar. Para la armónica de orden  $v$  corresponde  $(v \pi)$  radianes, y por esto:

$$\text{ec. A-12} \quad K_{siv} = \frac{\text{sen } [v (s/\tau_{2s}) (p\pi/Q_2) 1/2]}{(v) (s/\tau_{2s}) (p\pi/Q_2) 1/2}$$

Puede notarse fácilmente que el factor de inclinación  $K_{siv}$  disminuye con el aumento del orden de la armónica  $v$ . Es prácticamente 1 para las armónicas principales ( $v = 1$ ).

Debe notarse que  $S$  es la inclinación de las ranuras del rotor con respecto a las ranuras del estator, independientemente de que el rotor o al estator estén inclinados. Si las ranuras de ambas partes de la máquina están inclinadas,  $s$  es la inclinación resultante.

A-1.5 FACTOR DE BOBINADO.

En ciertos devanados se hacen presentes el factor de distribución  $K_d$ , el factor de paso  $K_{red}$ , y el de inclinación  $K_{si}$ . En estos casos se usa un factor  $K_{sidred}$  que es el producto de estos tres anteriores y que es una constante para cada máquina. Se escoge este factor de tal manera que, para la armónica  $v$ ,

$$K_{sidred}(v) \approx 0$$

## APENDICE A-2.

### CONMUTACION.

La Conmutación representa un conjunto de fenómenos relacionados con la variación de la corriente en los conductores del devanado del inducido al pasar éstos por la zona donde se cortocircuitan por las escobillas colocadas en el colector.

La Conmutación se considera buena cuando el proceso de variación de la corriente en las secciones no va acompañado del surgimiento de chispas entre las escobillas y el colector, y la superficie del colector queda limpia, sin deteriorarse durante el funcionamiento duradero de la máquina.

Existen causas de origen mecánico y eléctrico para una deficiente conmutación. La tarea más importante y difícil es el análisis de las causas eléctricas del chisporroteo, pero esta tarea puede ser planteada en esencia sólo cuando las causas provocadas por los factores mecánicos pueden considerarse eliminadas.

#### A-2.1 CONMUTACION POR RESISTENCIA.

En este caso la variación de la corriente en la sección cortocircuitada queda determinada por la resistencia de contacto

entre la escobilla y las delgas, así como por las resistencias de las propias secciones y los eslabones de conexión entre las secciones del arrollamiento y el colector.

Cuando se utilizan escobillas de carbón o similares en cuanto al valor de su resistencia, pueden ser despreciados los valores de la resistencia de eslabones ( $\rho$ ) y de la sección cortocircuitada ( $R_S$ ).

En la Figura que se muestra a continuación, se representa la distribución de las corrientes durante la conmutación de una sección para cinco posiciones consecutivas del inducido con devanado anular imbricado simple dentro del intervalo de tiempo igual a  $1/4 T$ , en el caso más simple considerado de conmutación por resistencia.

El cortocircuito de la sección 2 considerada comienza en el instante  $t = 0$  y termina en el instante  $t = T$ . El camino recorrido por la junta aislante entre las delgas 2 y 3 en el instante  $t$  será igual a  $v_C t$  ( $v_C$  = velocidad periférica del colector), el camino recorrido en el período completo de conmutación es igual a la anchura de la escobilla  $b_e = v_C T$ .

En los instantes considerados la escobilla recubre, por la anchura, los siguientes sectores de las delgas:

$$b_1 = v_C t \quad \text{y} \quad b_2 = v_C (T-t)$$

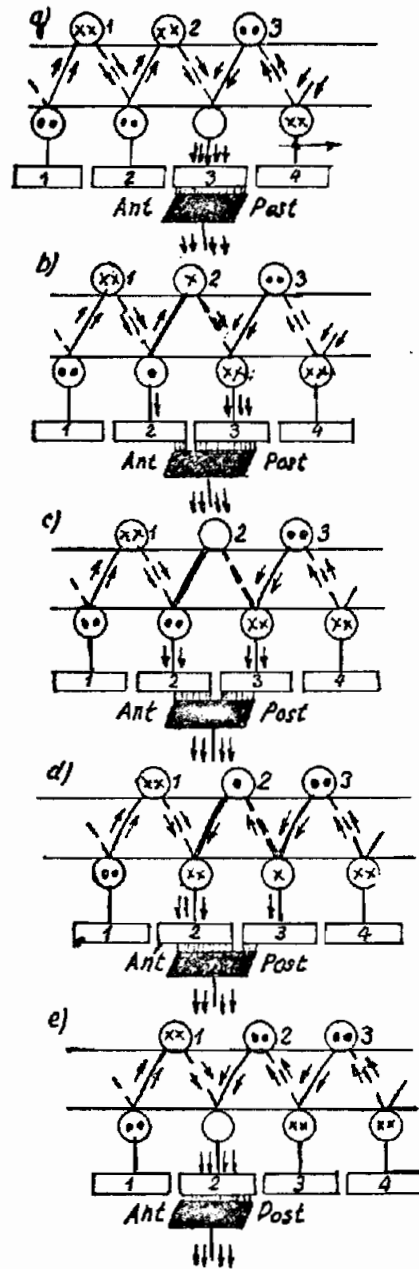


FIG. A.2.1.

Las áreas de contacto de la escobilla con las delgas 2 y 3 serán:  $S_1 = b_1 l_e$ ,  $S_2 = b_2 l_e$ ; ( $l_e$  = la longitud de las es-

cobillas), y el área total de contacto  $S_e = b_e l_e$ , de donde:

$$S_1 = S_e \frac{b_1}{b_e} = S_e \frac{t}{T}$$

y

$$S_2 = S_e \frac{b_2}{b_e} = S_e \frac{T-t}{T}$$

Las resistencias de transición (de contacto) entre la escobilla y las delgas contiguas, si se tiene en cuenta que la resistencia de contacto es inversamente proporcional al área de contacto, son iguales.

$$r_1 = R_e \frac{S_e}{S_1} = R_e \frac{T}{t}$$

$$r_2 = R_e \frac{S_e}{S_2} = R_e \frac{T}{T-t}$$

Para el contorno de cortocircuito (Ver Fig. A.2.2) se compone una ecuación de acuerdo a la segunda Ley de Kirchhoff: la suma de las fuerzas electromotrices en el contorno es igual a cero.

Por esta razón, si se supone que la resistencia de la sección y los eslabones son iguales a cero ( $R_S \approx 0$ ,  $\rho = 0$ ) se obtiene:

$$e = r_2 i_2 - r_1 i_1 = 0$$

Esto es característico de la conmutación por resistencia. La sección cortocircuitada no tiene voltajes inducidos.

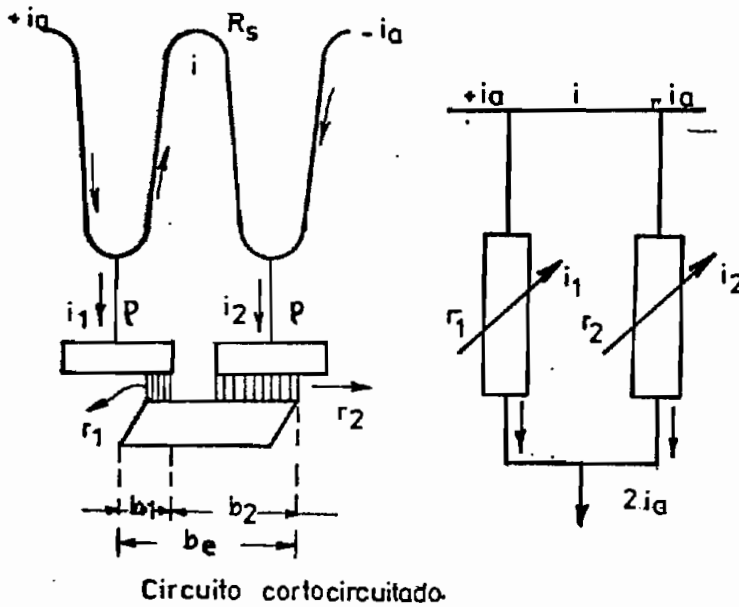


FIG. A.2.2

Pero de acuerdo con la Fig. A.2.2,

$$i_1 = i_a - i$$

$$i_2 = i_a + i$$

Trabajando con estas 3 últimas ecuaciones se incluye que:

$$i = i_a \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2} = i_a \left( 1 - 2 \frac{t}{T} \right)$$

Siendo  $i$  la corriente de la sección cortocircuitada durante la conmutación, se puede notar de esta ecuación que su variación es lineal, desde  $i = i_a$  cuando  $t = 0$ ; hasta  $i = -i_a$  cuando  $t = T$  (Ver Fig. A.2.3). En donde  $t$  es la variable tiempo, y  $T$  es el tiempo de conmutación.

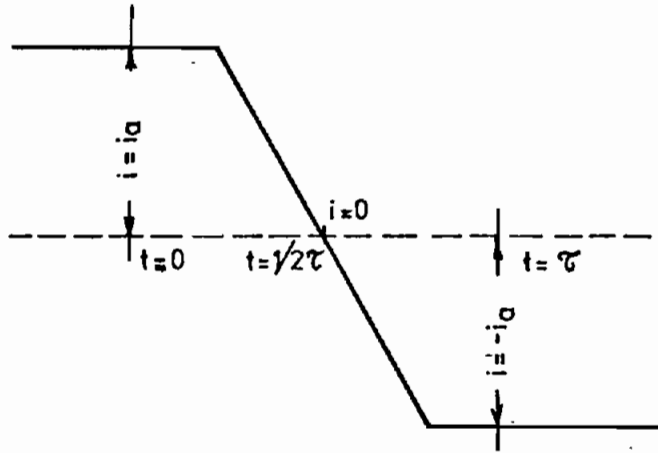


FIG. A.2.3

La densidad media de la corriente bajo la escobilla es:

$$j_0 = \frac{2i_a}{s_e} = \frac{i_e}{s_e} \quad ; \quad (i_e = \text{corriente de escobilla}).$$

Para la densidad de la corriente en los sectores de la superficie de la escobilla, que recubren las delgas 2 y 3, se tiene:

$$j_1 = \frac{i_1}{s_1} = \frac{i_1}{s_e} \frac{T}{t}$$

$$j_2 = \frac{i_2}{s_2} = \frac{i_2}{s_e} \frac{T}{T-t}$$

Por una serie de circunstancias que se analizarán a continuación, la variación de la corriente en la sección cortocircuitada puede no ser rectilínea (Ver Fig. A.2.4).



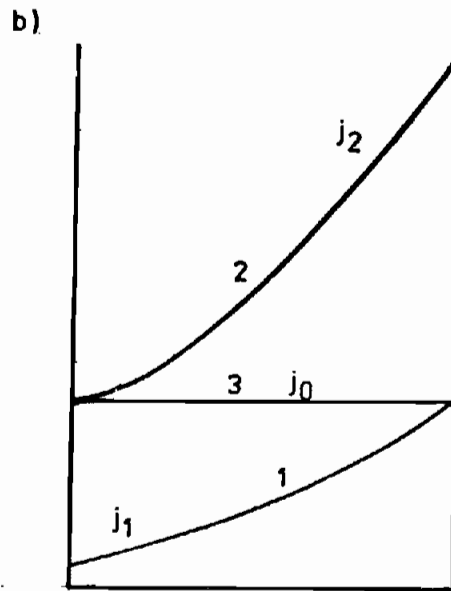
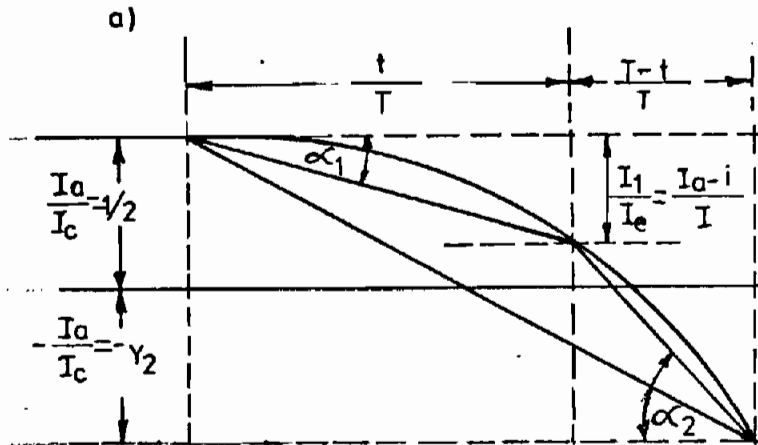


FIG. A.2.4.

En este caso para el instante  $\frac{t}{T}$  se tiene:

$$I_e \operatorname{tg} \alpha_1 = i_1 \frac{T}{t}$$

y

$$I_e \operatorname{tg} \alpha_2 = i_2 \frac{T}{T-t}$$

La densidad de la corriente para el instante considerado bajo el lado anterior de la escobilla es:

$$j_1 = \frac{I_e}{S_e} \operatorname{tg} \alpha_1 = j_0 \operatorname{tg} \alpha_1$$

y bajo el lado posterior de la escobilla es:

$$j_2 = \frac{I_e}{S_e} \operatorname{tg} \alpha_2 = j_0 \operatorname{tg} \alpha_2$$

En el caso de conmutación rectilínea  $\operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{tg} \alpha_2 = 1$  y, por consiguiente,

$$j_1 = j_2 = j_0 = \frac{I_e}{S_e} = \text{const.}$$

Cuando no se desprecian las resistencias de la sección ( $R_s$ ) y de los eslabones  $\rho$ , se llega a una ecuación que introduce el término siguiente:

$$i = i_0 \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2 + R_s} = i_a \frac{1 - 2 \frac{t}{T}}{1 + \frac{R}{R_e} \frac{t}{T} \left(1 - \frac{t}{T}\right)}$$

donde  $R = 2\rho + R_s$  .

La ingerencia de la resistencia  $R = 2\rho + R_s$  dentro de la ecua

ción distorsiona a la linealidad de las curvas a la forma siguiente:

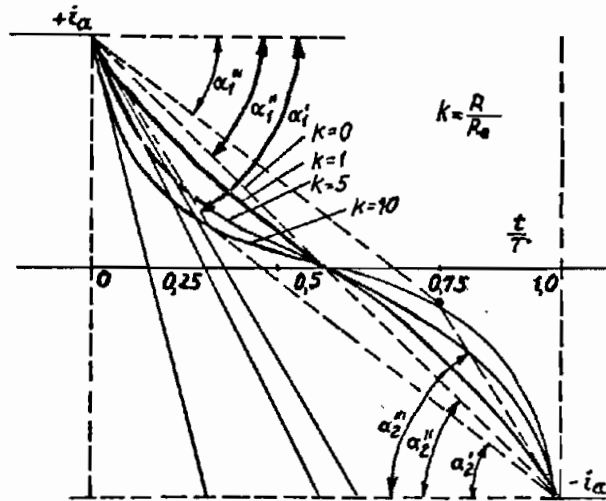


Fig. A.25 Curvas de las corrientes en las secciones conmutadas en el caso de conmutación por resistencia tomando en consideración  $R_s$  y  $p$ .

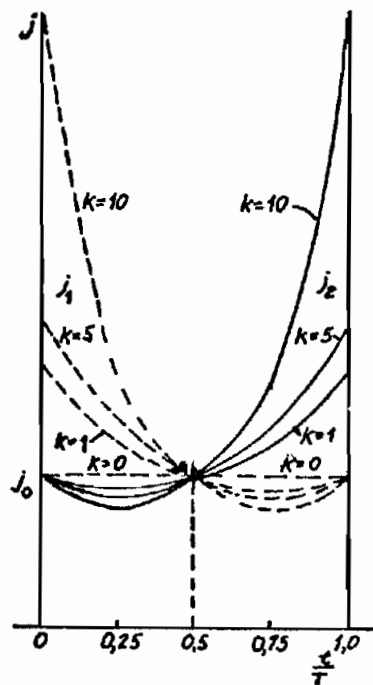


Fig. A.26

Variación de las densidades de corrientes bajo los lados anterior y posterior de las escobillas en el caso de conmutación por resistencia.

De estas curvas puede notarse facilmente que la densidad de corriente aumenta en las ranuras en el momento de empezar la conmutación y al final de la misma, lo cual puede, bajo ciertas circunstancias aledañas, formar chisporroteo.

## A-2.2 FUERZAS ELECTROMOTRICES INDUCIDAS EN LA SECCION CORTOCIRCUITADA DURANTE EL PROCESO DE CONMUTACION.

### 1) F.E.M. AUTOINDUCIDA Y DE INDUCCION MUTUA

La sección cortocircuitada en el momento de conmutación cambia su corriente desde  $i_a$  hasta  $-i_a$ , formándose un campo de autoinducción y de inducción mutua que se opone a la variación de la corriente.

La f.e.m. de autoinducción es:  $e_L = -L_S \frac{di}{dt}$ , en donde la autoinductancia  $L_S$  depende de la geometría de la ranura, fundamentalmente.

La f.e.m. de inducción mutua se sucede, cuando se han cortocircuitado a la vez varias secciones que se encuentran en una misma ranura.

$$e_M = -M \left( \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} + \dots + \frac{di_n}{dt} \right)$$

En todo caso tanto  $e_L$  como  $e_M$  desaceleran la curva de varia-

ción de corriente disminuyendo la pendiente en  $t = 0$  y aumentando la pendiente en  $t = T$  (Ver Fig. A.2.4).

Esto da como resultado un ascenso de la densidad de corriente en el instante en que la escobilla deja la delga previamente circuitado. Se incrementa de esta manera la posibilidad de chisporroteo.

## 2) F.E.M. DINAMICA

En la sección cortocircuitada del inducido en rotación se induce la f.e.m. dinámica e que surge como resultado de que los lados de la sección cortocircuitada cortan cierto campo magnético exterior que puede formarse en la zona de conmutación. El campo resultante en la zona de conmutación puede formarse tanto por la reacción del inducido, como por los polos de la máquina, principalmente por los auxiliares. La f.e.m. dinámica e puede adicionarse a las fuerzas electromotrices autoinducida y de inducción mutua o bien, estar dirigido en sentido opuesto.

### CONMUTACION TENIENDO EN CUENTA LAS F.E.M. EN LA SECCION CORTOCIRCUITADA.

Examinando para el caso más simple; anchura de escobilla igual a la división del colector, inducido de tambor con arrollamiento imbricado simple con una sección por la anchura de la ranu

ra  $u = 1$ , resistencia  $R = 2\rho + R_s$  despreciable.

De esta manera:

$$e_L \pm e_K = r_2 i_2 - r_1 i_1$$

$$i = i_a \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2} + \frac{e_L \pm e_K}{r_1 + r_2} = i_e + i_K$$

$$i_K = \frac{e_L \pm e_K}{r_1 + r_2} = i - i_L$$

Se puede lograr que  $i_e + i_K$  sea cero al tiempo  $t = T$  con lo que se logra la interrupción sin chispas. En este caso el valor de la densidad de corriente al tiempo  $t = 0$  es elevada, pero esto no representa problema, teniendo en cuenta que la conexión sin chispas se efectúa siempre con mayor facilidad que la interrupción.

### A-2.3 CAUSAS DEL CHISPORROTEO DE CARACTER ELECTROMAGNETICO.

Al principio se hizo la suposición que el chisporroteo es provocado por la densidad excesiva de la corriente bajo la escobilla. Pero los experimentos realizados a continuación demostraron que si la escobilla funciona en el colector siendo prácticamente activa la resistencia de la sección conmutada, no se observa chisporroteo incluso a densidades de corriente de

255 A/cm<sup>2</sup> en término medio en la escobilla, y de 350 - 400 A/cm<sup>2</sup> bajo el lado posterior de la escobilla.

Las investigaciones llevadas a cabo por K.I. Shenfer y S.B. Yuditski permitieron llegar a la conclusión de que cuando en la sección conmutada prevalece la f.e.m. reactiva  $e_r$ , es decir,  $e_r - e_K = \Delta e_K$ , la marcha del proceso de conmutación depende de la magnitud  $e_K$ , a saber: si  $\Delta e_K$  es menor que cierto valor crítico  $\Delta e_{Ker}$ , entonces la resistencia  $R_K$  varía según la siguiente curva; es decir, en el instante  $t = T$  dicha resistencia tiende a la infinidad, y la corriente  $i_K$  tiende a cero. En este caso la conmutación transcurre sin chisporroteo.

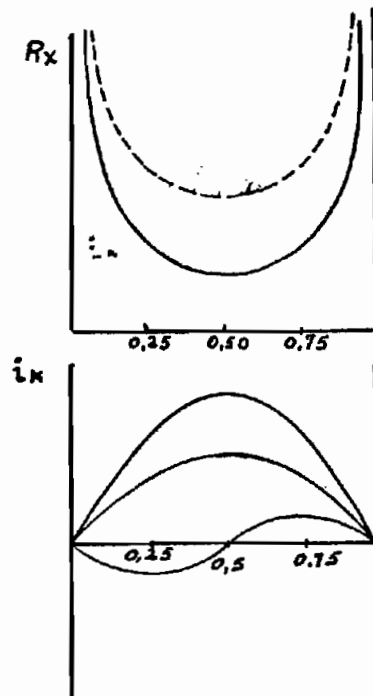


FIG. A.2.7

Si  $\Delta e_K > \Delta e_{Ke_r}$ , entonces, a partir de cierto instante  $t > \frac{T}{2}$ , la resistencia  $R_K$  casi no aumenta y, por consiguiente, siendo  $t = T$  la corriente  $i_K \neq 0$ . La energía electromagnética almacenada en ese momento,  $\frac{1}{2} L i_K^2$ , es precisamente la causa del chisporroteo en el lado posterior de la escobilla al interrumpir el circuito de corriente.



## B I B L I O G R A F I A

### a) TEXTOS:

- 1.- M. Liwschitz - Garik y C. Whipple, "Máquinas de Corriente Alterna", Segunda edición.
- 2.- M.P. Kostenko, L.M. Piotrovski, "Máquinas Eléctricas", Segunda edición, Tomos 1 y 2.
- 3.- Alexander S. Langsdorf, "Teoría de las Máquinas de Corriente Alterna", Segunda edición.

### b) ARTICULOS:

- 1.- M.M. Liwschitz, Field Harmonics in induction motors, AIEE, pp 797, año 1942.
- 2.- M.M. Liwschitz, Distribution factors and pitch factors of the harmonics of a fractional - slot winding, AIEE, pp 664, año 1943.
- 3.- M.M. Liwschitz, Leakage reactance of the squirrel cage rotor with respect to the stator harmonics and the equivalent circuit of the induction motor, AIEE, pp 1407, año 1947.
- 4.- K.L. Hansen, Torque components Due to space harmonics in Induction motors, AIEE, pp. 928, año 1922.

5.- A.R. Stevenson y R.H. Park, Graphical Determination of  
Magnetic Field, pp. 112, año 1927.

6.- J. Douglas, The Reluctance of Some Irregular Magnetic  
Fields, AIEE, pp. 1067, año 1915.