



La versión digital de esta tesis está protegida por la Ley de Derechos de Autor del Ecuador.

Los derechos de autor han sido entregados a la "ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL" bajo el libre consentimiento del (los) autor(es).

Al consultar esta tesis deberá acatar con las disposiciones de la Ley y las siguientes condiciones de uso:

- Cualquier uso que haga de estos documentos o imágenes deben ser sólo para efectos de investigación o estudio académico, y usted no puede ponerlos a disposición de otra persona.
- Usted deberá reconocer el derecho del autor a ser identificado y citado como el autor de esta tesis.
- No se podrá obtener ningún beneficio comercial y las obras derivadas tienen que estar bajo los mismos términos de licencia que el trabajo original.

El Libre Acceso a la información, promueve el reconocimiento de la originalidad de las ideas de los demás, respetando las normas de presentación y de citación de autores con el fin de no incurrir en actos ilegítimos de copiar y hacer pasar como propias las creaciones de terceras personas.

***Respeto hacia sí mismo y hacia los demás.***

# **ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL**

## **FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA**

### **DESARROLLO DE METODOLOGÍAS Y PROGRAMACIÓN DE APLICACIONES PARA MODELACIÓN, IDENTIFICACIÓN Y SIMULACIÓN.**

#### **PROYECTO PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE INGENIERA EN ELECTRÓNICA Y CONTROL**

**LADY PAMELA CABEZAS ARIAS**

cl\_jal3225@hotmail.com

**DIRECTOR: MSc. CARLOS PATRICIO BURBANO ROMERO**

pburbanor@hotmail.com

**CODIRECTOR: Dr. JORGE ANDRÉS ROSALES ACOSTA**

androsaco@yahoo.com

**Quito, mayo de 2013**

## **DECLARACIÓN**

Yo, Lady Pamela Cabezas Arias, declaro bajo juramento que el trabajo aquí descrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentada para ningún grado o calificación profesional; y, que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

A través de la presente declaración cedo mis derechos de propiedad intelectual correspondientes a este trabajo, a la Escuela Politécnica Nacional, según lo establecido por la Ley de Propiedad Intelectual, por su Reglamento y por la normatividad institucional vigente.

---

Lady Pamela Cabezas Arias

## **CERTIFICACIÓN**

Certificamos que el presente trabajo fue desarrollado por Lady Pamela Cabezas Arias, bajo nuestra supervisión.

---

**MSc. Patricio Burbano**  
**DIRECTOR DEL PROYECTO**

---

**Dr. Andrés Rosales**  
**CODIRECTOR DEL PROYECTO**

## **AGRADECIMIENTO**

A mis padres por el esfuerzo realizado a lo largo de mi vida estudiantil, por la lucha incansable para sobresalir a pesar de las dificultades, a mis herman@s que con cada ocurrencia me alegraron en las etapas más difíciles de mi vida.

Al MSc. Patricio Burbano un gran maestro y amigo que con sus enseñanzas ha sabido dejar huella en mí del inmenso trabajo que realiza en la docencia, la calidad de persona lo hace único y no hay duda de que ama lo que hace y transmite a la juventud su sabiduría, su perseverancia es digna de admiración y su apoyo incondicional han forjado en mí un espíritu de lucha constante que lo conservaré a lo largo de mi vida.

Al Dr. Andrés Rosales por su guía y apoyo en la realización de este proyecto.

## DEDICATORIA

Dedicado a mis padres los pilares de mi vida, siempre estuvieron junto a mí en los momentos en los cuales estaba por desmayar, sus consejos los llevo en el alma, son palabras que hallan lugar en el corazón y que me dieron fuerzas para ver el lado positivo de las cosas, a pesar de las más grandes tormentas.

A mi novio, mi amigo y confidente incondicional quien ha compartido buenos y malos momentos junto a mí, nunca olvidaré el instante en que nos conocimos y desde aquel instante has sido la fuerza que necesité para no abandonar mis sueños TE AMO.

A mi querida universidad y a los verdaderos docentes que en ella dedican su vida entera a la enseñanza e investigación para forjar un mejor país, porque un verdadero maestro no pone trabas a la enseñanza.

A los amigos verdaderos que supieron apoyarme con palabras de aliento en la realización de éste proyecto de titulación.

## RESUMEN

Desde un punto de vista sistémico, las aplicaciones tecnológicas, industriales y financieras en la actualidad requieren modelos matemáticos eficientes y eficaces para realizar predicciones acertadas acerca del comportamiento de los sistemas involucrados en cada uno de ellos, más aún la industria de la robótica enfocada a facilitar la vida de los humanos. Es por ello que el presente proyecto de titulación se enfoca al desarrollo de metodologías para la modelación identificación y simulación de diversos prototipos a manera de tutorial, con lo que se busca difundir los diferentes métodos empleados para obtener modelos adecuados que permitan disminuir costos en la elaboración de prototipos reales y visualizar el comportamiento de los sistemas en lazo abierto, esto es sin acción del control realimentado.

Desde el enfoque de los sistemas de control el objetivo de la modelación es hallar el modelo analítico de un sistema, el mismo que permite diseñar un controlador adecuado para cerrar el lazo e implementar un correcto funcionamiento dinámico del sistema, lo que ahorra recursos y permite mejorar la calidad de los sistemas.

Los programas necesarios para la simulación de los modelos matemáticos son implementados en Matlab y Simulink, lo que permite crear un entorno interactivo con las diversas aplicaciones que ofrece este software, además de mostrar los resultados en lazo abierto de los modelos matemáticos sometidos a simulación, ya sea por medio de sus ecuaciones diferenciales, función de transferencia, o variables de estado.

Finalmente, una vez estudiados los diferentes métodos de modelación, simulación e identificación, se encuentra los modelos matemáticos de sistemas complejos como un helicóptero, robot omnidireccional, brazo robótico tipo RR, considerando momentos de inercia y reactor químico de agitación continua.

## PRESENTACIÓN

El presente proyecto de titulación aborda las diferentes metodologías de modelación, identificación y simulación de sistemas sencillos y complejos, presentados en la robótica, procesos industriales y servomecanismos.

En el capítulo 1, se presentan los conceptos fundamentales de modelación, simulación e identificación, necesarios para comprender el desarrollo del proyecto, así como ciertos parámetros que debe tener la estructura general del sistema a modelarse.

En el capítulo 2, se desarrollan las metodologías para modelación e identificación, planteando ejemplos con un grado de complejidad medio para explicar paso a paso, a manera de tutorial, la estructura y los equivalentes de cada componente mecánico, físico y de procesos que se debe llevar a cabo para conseguir variables de estado, ecuaciones diferenciales y funciones de transferencia.

En el capítulo 3, se presentan modelos matemáticos complejos por medio de metodologías avanzadas de modelación como Euler-Lagrange (método variacional), Newton-Euler y el uso de matrices homogéneas que permiten simplificar el modelado de los sistemas mediante transformaciones de rotación y traslación necesarios para representar sistemas complejos. Se obtienen modelos no lineales, los mismos que son linealizados en un punto de operación estratégico de acuerdo a las condiciones iniciales del sistema.

En el capítulo 4 se realiza la programación y simulación de 4 sistemas complejos por medio de Matlab y Simulink, cada sistema contiene la descripción del algoritmo implementado así como la respuesta de cada uno a señales de entrada paso y sinusoidales

En el capítulo 5, se presenta las conclusiones y recomendaciones obtenidas en el desarrollo del proyecto de titulación.



## CONTENIDO

### CAPÍTULO 1

|  |          |
|--|----------|
| <b>MODELACIÓN, SIMULACIÓN E IDENTIFICACIÓN .....</b>       | <b>1</b> |
| <b>1.1. MODELACIÓN .....</b>                               | <b>1</b> |
| 1.1.1. MÉTODO DIRECTO .....                                | 1        |
| 1.1.2. MÉTODO DE REDES .....                               | 1        |
| 1.1.3. MÉTODO VARIACIONAL .....                            | 1        |
| <b>1.2. SIMULACIÓN .....</b>                               | <b>2</b> |
| <b>1.3. IDENTIFICACIÓN .....</b>                           | <b>2</b> |
| <b>1.4. MÉTODOS DE IDENTIFICACIÓN .....</b>                | <b>5</b> |
| 1.4.1. IDENTIFICACIÓN EN EL DOMINIO DEL TIEMPO .....       | 6        |
| 1.4.2. IDENTIFICACIÓN EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA ..... | 6        |
| 1.4.3. MÍNIMOS CUADRADOS ORDINARIOS.....                   | 6        |
| 1.4.4. MÍNIMOS CUADRADOS RECURSIVOS .....                  | 10       |

### CAPÍTULO 2

|   |           |
|---|-----------|
| <b>DESARROLLO DE METODOLOGÍAS PARA MODELACIÓN E IDENTIFICACIÓN.....</b>   | <b>13</b> |
| <b>2.1. MÉTODO DIRECTO.....</b>   | <b>13</b> |
| 2.1.1. MODELO 1: SISTEMA MECÁNICO CON UNA MASA.....   | 14        |
| 2.1.2. MODELO 2: SISTEMA MECÁNICO CON DOS MASAS.....  | 16        |
| 2.1.3. TUTORIAL 1: MODELO A VARIABLES DE ESTADO DE UN SISTEMA MECÁNICO UTILIZANDO EL MÉTODO DIRECTO .....                                   | 18        |
| <b>2.2. MÉTODO DE REDES .....</b>   | <b>21</b> |
| 2.2.1. TUTORIAL 2: MODELO A VARIABLES DE ESTADO DE UN SISTEMA MECÁNICO Y FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA POR EL MÉTODO DE REDES .....              | 23        |
| 2.2.2. TUTORIAL 3: MODELO A VARIABLES DE ESTADO DE UN SISTEMA MECÁNICO CON DOS MASAS Y FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA POR EL MÉTODO DE REDES..... | 28        |
| 2.2.3. TUTORIAL 3: MODELO DEL ACELERÓMETRO .....  | 30        |
| <b>2.3. MÉTODO VARIACIONAL .....</b>  | <b>34</b> |
| 2.3.1. ENERGÍA ALMACENADA EN DISPOSITIVOS CAPACITIVOS .....   | 36        |
| 2.3.2. ENERGÍA ALMACENADA EN DISPOSITIVOS INDUCTIVOS.....   | 37        |
| 2.3.3. ENERGÍA DISIPADA EN DISPOSITIVOS RESISTIVOS .....  | 38        |

|   |    |
|---|----|
| 2.3.4. TUTORIAL 4: MODELO SIMPLIFICADO DE UN MANIPULADOR DE DOS GRADOS DE LIBERTAD.....   | 39 |
| 2.3.5. TUTORIAL 5: MODELO DE UNA GRÚA .....   | 45 |
| 2.4. MODELO DE PROCESOS SISTEMAS DE FLUIDOS.....  | 50 |
| 2.4.1. TUTORIAL 6: SISTEMA DE TANQUES ACOPLADOS.....                                      | 53 |
| 2.5. IDENTIFICACIÓN DE SISTEMAS EN EL DOMINIO DEL TIEMPO .....                            | 57 |
| 2.5.1. TUTORIAL 7: SISTEMA DE SEGUNDO ORDEN.....  | 58 |
| 2.6. IDENTIFICACIÓN DE SISTEMAS EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA. ....                      | 64 |
| 2.6.1. TUTORIAL 8: SISTEMA DE SEGUNDO ORDEN EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA. ....          | 64 |
| 2.7. IDENTIFICACIÓN DE SISTEMAS POR EL MÉTODO DE MÍNIMOS CUADRADOS ORDINARIOS (MCO). .... | 67 |
| 2.7.1. TUTORIAL 9: IDENTIFICACIÓN USANDO MCO .....  | 68 |

### CAPÍTULO 3

|   |     |
|---|-----|
| DESARROLLO DE ESTUDIO DE CASOS.....   | 70  |
| 3.1. ROBOTINO ® .....   | 71  |
| 3.1.1. DISEÑO Y FUNCIÓN .....   | 71  |
| 3.1.2. CHASIS Y PUENTE DE MANDO .....   | 72  |
| 3.1.3. MÓDULO DE LA UNIDAD DE ACCIONAMIENTO .....                                     | 73  |
| 3.1.4. MODELACIÓN DE ROBOTINO .....   | 75  |
| 3.1.4.1. MODELO CINEMÁTICO .....  | 75  |
| 3.1.4.2. MODELO DINÁMICO.....   | 80  |
| 3.2. HELICÓPTERO DE DOS GRADOS DE LIBERTAD .....                                      | 84  |
| 3.2.1. APLICACIÓN DEL MÉTODO VARIACIONAL.....   | 87  |
| 3.2.2. VARIABLES DE ESTADO .....  | 95  |
| 3.2.3. PUNTOS DE EQUILIBRIO.....  | 96  |
| 3.3. IDENTIFICACIÓN EN TIEMPO DE UN TRAMO DE OLEODUCTO .....                          | 98  |
| 3.4. BRAZO ROBÓTICO CON DOS GRADOS DE LIBERTAD CONSIDERANDO MOMENTOS DE INERCIA ..... | 110 |
| 3.5. MODELACIÓN RECTOR QUÍMICO DE AGITACIÓN CONTINUA ...                              | 118 |

### CAPÍTULO 4

|   |     |
|---|-----|
| PROGRAMACIÓN DEL SOFTWARE PARA IDENTIFICACIÓN Y SIMULACIÓN..... | 126 |
| 4.1. SIMULACIÓN.....  | 126 |

|  |            |
|--|------------|
| 4.1.1. SIMULACIÓN DINÁMICA .....   | 126        |
| 4.1.2. SIMULACIÓN CINEMÁTICA .....   | 126        |
| 4.2. MATLAB.....   | 127        |
| 4.2.1. SIMULINK .....  | 127        |
| 4.3. SOFTWARE DE SIMULACIÓN.....   | 128        |
| 4.4. SIMULACIÓN DE UN SISTEMA MECÁNICO-MASA RESORTE-AMORTIGUADOR .....                                 | 129        |
| 4.5. BRAZO ROBÓTICO CON DOS GRADOS DE LIBERTAD CON PAR VARIABLE Y COMPORTAMIENTO DE LA VELOCIDAD ..... | 135        |
| 4.6. REACTOR QUÍMICO DE AGITACIÓN CONTINUA.....  | 146        |
| 4.7. ROBOT MÓVIL .....   | 152        |
| 4.8. MÓDULO IDENTIFICACIÓN.....  | 160        |
| <br>   |            |
| <b>CAPÍTULO 5</b>  |            |
| <b>CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES .....</b>  | <b>166</b> |
| 5.1. CONCLUSIONES .....  | 166        |
| 5.2. RECOMENDACIONES .....   | 169        |
| <br>   |            |
| <b>REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>  | <b>170</b> |
| <b>ANEXOS .....</b>  | <b>173</b> |
| ANEXO A1.....  | 173        |
| <b>DIAGRAMA DE FLUJO DEL PROGRAMA IMPLEMENTADO BRAZO ROBÓTICO SIMULINK .....</b>                       | <b>173</b> |
| ANEXO A2.....  | 177        |
| <b>PROGRAMA IMPLEMENTADO EN EL SUBSISTEMA 2, CAPÍTULO 3 .....</b>                                      | <b>177</b> |
| ANEXO A3.....  | 180        |
| ANEXO A4.....  | 181        |

# CAPÍTULO 1

## MODELACIÓN, SIMULACIÓN E IDENTIFICACIÓN

### 1.1. MODELACIÓN

Es un procedimiento mediante el cual se obtiene un modelo analítico o matemático de la planta utilizando el conocimiento de la estructura, componentes de dicha planta y principios de ciencias naturales o principios de ingeniería. [1]

Para obtener el modelo adecuado de un sistema se deben seleccionar las variables que intervienen, las condiciones de operación y los parámetros involucrados para llegar a un modelo del comportamiento dinámico.

Se distingue 3 métodos de modelación dependiendo de la complejidad:

#### 1.1.1. MÉTODO DIRECTO

En el método directo en la modelación se plantean las ecuaciones dinámicas y constitutivas de los componentes, además de las restricciones de interconexión al flujo y el esfuerzo, obteniéndose un modelo a ecuaciones diferenciales. Reescribiendo dichas ecuaciones, utilizando variables de estado se llega a un modelo a variables de estado.

#### 1.1.2. MÉTODO DE REDES

El método de redes utiliza la teoría de redes eléctricas para sistemas no eléctricos, mediante un diagrama equivalente de red aplicando las ecuaciones matriciales de nodo en el dominio de "s", para llegar a un modelo en función de transferencia.

#### 1.1.3. MÉTODO VARIACIONAL

Este método utiliza energías y sirve para sistemas no lineales que no pueden ser representados en un diagrama de red, evitando las restricciones de interconexión y aplicando una fórmula basada en el cálculo del Lagrangiano.

## 1.2. SIMULACIÓN

La simulación es la técnica de desarrollo y ejecución del modelo de un sistema real para estudiar su conducta sin irrumpir en el entorno del mismo. [2]

Esta técnica se aplica para la emulación de la operación de un proceso o sistema del mundo real. Una vez construido el modelo, se ensayan diferentes condiciones con el fin de analizar el comportamiento dinámico. Los resultados obtenidos orientan sobre el comportamiento real para posteriores aplicaciones de control.

En la simulación se construye un modelo del sistema de interés, generalmente se usa el computador para imitar el comportamiento del sistema, cuando éste se somete a distintas condiciones de operación.

El por qué se utiliza ésta simulación radica en la solución a problemas matemáticos de sistemas para los cuales no se conoce solución analítica, o en procesos matemáticos en los que la resolución resulta compleja al momento de realizarla sin ayudas computacionales. La simulación permite hallar soluciones a problemas en los que la experimentación es costosa y permite la investigación de posibles estrategias de control, además de ofrecer una réplica más realista de un sistema.

Para la ejecución de una adecuada simulación es necesario recurrir a un software apropiado, considerando el tipo de sistema, las variables a intervenir y el tipo de respuesta que se desea obtener.

## 1.3. IDENTIFICACIÓN

La identificación de sistemas es un campo de la modelación matemática a partir de datos experimentales que refleja la dinámica de la planta. Se trata de determinar un modelo matemático a partir de un grupo de datos experimentales de entrada y de salida sin necesidad de conocer las leyes internas que gobiernan el comportamiento del sistema. [3]

El problema principal en la identificación de sistemas es determinar un modelo con la estructura adecuada, dentro de la cual se pueda encontrar un buen modelo. El ajuste de un modelo, dentro de una estructura determinada, es en la mayoría de los casos, un problema menor. Una regla básica en estimaciones “no es estimar lo que ya se sabe”. En otras palabras, se debe tener conocimiento y comprensión física sobre el sistema, antes de la selección de la estructura del modelo.

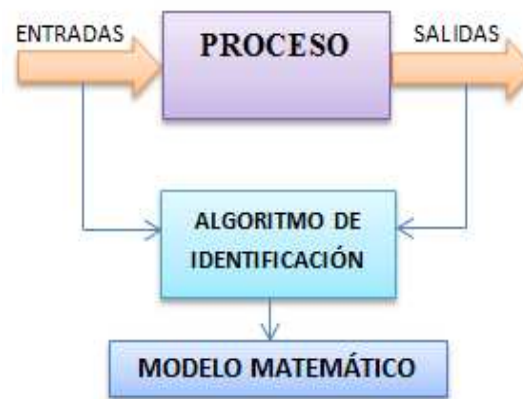


Figura 1.1 Identificación de un sistema

En términos generales, el proceso de identificación comprende los siguientes pasos [4]:

1. Obtención de datos de entrada - salida. Para ello se debe excitar el sistema mediante la aplicación de una señal de entrada y registrar la evolución de sus entradas y salidas durante un intervalo de tiempo.
2. Tratamiento previo de los datos registrados. Los datos registrados están generalmente acompañados de ruidos indeseados u otro tipo de imperfecciones que puede ser necesario corregir antes de iniciar la identificación del modelo. Se trata, por tanto, de ‘preparar’ los datos para facilitar y mejorar el proceso de identificación.
3. Elección de la estructura del modelo. Si el modelo que se desea obtener es un modelo paramétrico, el primer paso es determinar la estructura deseada para dicho modelo. Este punto se facilita en gran medida si se tiene un cierto conocimiento sobre las leyes físicas que rigen el proceso

4. Obtención de los parámetros del modelo. A continuación se procede a la estimación de los parámetros de la estructura que mejor ajustan la respuesta del modelo a los datos de entrada-salida obtenidos experimentalmente.
5. Validación del modelo. El último paso consiste en determinar si el modelo obtenido satisface el grado de exactitud requerido para la aplicación en cuestión. Si se llega a la conclusión de que el modelo no es válido, se deben revisar los siguientes aspectos como posibles causas:
  - a) El conjunto de datos de entrada-salida no proporciona suficiente información sobre la dinámica del sistema.
  - b) La estructura escogida no es capaz de proporcionar una buena descripción del modelo.
  - c) El criterio de ajuste de parámetros seleccionado no es el más adecuado.

Dependiendo de la posible causa, deberá repetirse el proceso de identificación desde el punto correspondiente. Por tanto, el proceso de identificación es un proceso iterativo, cuyos pasos pueden observarse en la Figura 1.2.

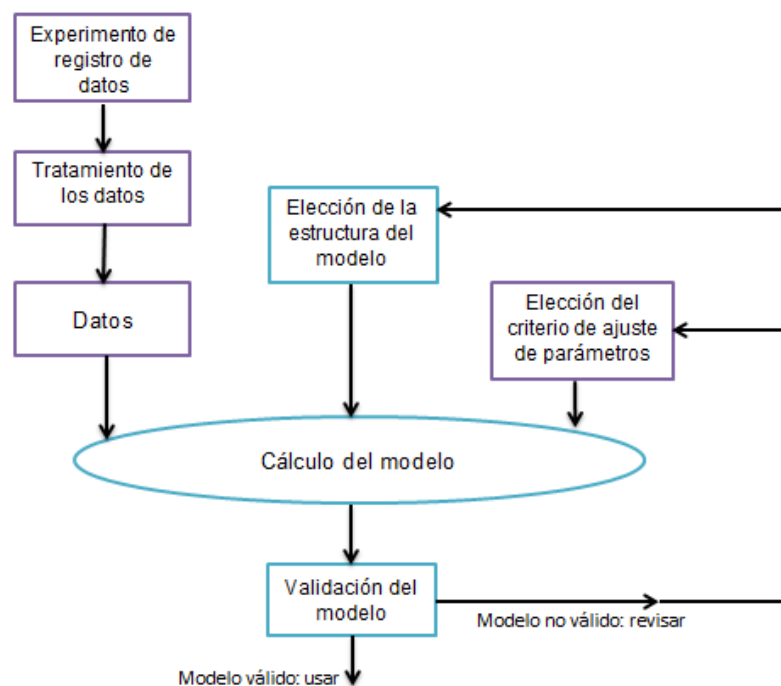


Figura 1.2 Proceso de identificación

## 1.4. MÉTODOS DE IDENTIFICACIÓN

Existen diversos métodos de identificación, que pueden clasificarse según distintos criterios:

- Dependiendo del tipo de modelo obtenido:
  1. *Métodos no paramétricos*, que permiten obtener modelos no paramétricos del sistema bajo estudio. Algunos de estos métodos son: análisis de la respuesta transitoria, análisis de la respuesta en frecuencia, análisis de la correlación, análisis espectral, análisis de Fourier, etc.
  2. *Métodos paramétricos*, que permiten obtener modelos paramétricos. Estos métodos requieren la elección de una posible estructura del modelo, de un criterio de ajuste de parámetros, y por último de la estimación de los parámetros que mejor ajustan el modelo a los datos experimentales.
  
- Dependiendo de la aplicación:
  1. *Métodos de identificación off-line (a posteriori)*, utilizados en aquellas aplicaciones en que no se requiera un ajuste continuado del modelo. En estos casos, se realiza la identificación previa de la planta, considerándose que la validez de los parámetros obtenidos no se verá alterada con el paso del tiempo.
  2. *Métodos de identificación on-line (identificación recursiva)*, en los que los parámetros se van actualizando continuamente a partir de los nuevos datos de entrada-salida obtenidos durante la evolución del proceso. Estos métodos son muy utilizados en sistemas de control adaptativo.

Dependiendo del criterio de ajuste de los parámetros. Existen diversos métodos matemáticos para ajustar los parámetros de una estructura a un conjunto de datos de entrada-salida. Algunos de los más utilizados en el campo de la identificación son el método de mínimos cuadrados y el método de máximo verosimilitud.



### 1.4.1. IDENTIFICACIÓN EN EL DOMINIO DEL TIEMPO

Para la identificación en el dominio del tiempo se recurre a la curva de reacción, se aplica la dominancia de polos y se aproxima a la expresión general  $y(t) = k_0 + k_1 e^{-t/\tau_1} + k_2 e^{-t/\tau_2} + \dots$  y se considera el valor de  $k_0$  estable en cada regresión realizada, para calcular  $k_1, \tau_1, k_2, \tau_2, k_3, \tau_3$ , etc.

Mediante esta técnica de identificación se pretende obtener la respuesta al escalón. Para ello, debe registrarse la evolución temporal de la salida del sistema tras la aplicación de una señal escalón.

### 1.4.2. IDENTIFICACIÓN EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA

Al realizar identificación en el dominio de la frecuencia se consideran los datos obtenidos del sistema tanto de magnitud como de ángulo de la función  $G(j\omega)$ , cabe recalcar que generalmente se utiliza la amplitud como dato para la realización de la identificación. Si se trata de calcular el retardo entonces se trabaja con la información de la fase.

### 1.4.3. MÍNIMOS CUADRADOS ORDINARIOS

Se deduce la Ecuación general del método de los mínimos cuadrados de acuerdo a  $N$  mediciones, valores verdaderos y valores identificados.

Para una deducción adecuada de la identificación por mínimos cuadrados ordinarios se plantea identificación paramétrica discreta, en la que se distingue modelos tipo AR y MA.

#### **Modelo AR: autoregressive model**

El modelo autorregresivo utiliza estadística y procesamiento de señal, éste consiste en realizar una representación de un proceso aleatorio, tomando como referencia las variables de tiempo que describen procesos en la naturaleza, economía, etc.

$$y(k) + y(k-1) + \dots + y(k-n) = b_a u(k-1) \quad (1.1)$$

### Modelo MA: moving average

Éste tipo de modelo se utiliza en estadística para hallar una media continua con un tipo de filtro de respuesta de impulso finito, y con ello se analiza un conjunto de datos mediante la creación de una serie de medias de diferentes subconjuntos.

$$y(k) = b_1u(k-1) + \dots + b_nu(k-n) \quad (1.2)$$

### Modelo ARMA

En éste tipo de modelo se combina los modelos tipo AR y MA con lo que se obtiene:

$$y(k) + a_1y(k-1) + a_2y(k-2) + \dots + a_ny(k-n) = b_1u(k-1) + b_2u(k-2) + \dots + b_nu(k-n)$$

$$y(k) = -a_1y(k-1) - \dots - a_ny(k-n) + b_1u(k-1) + \dots + b_nu(k-n) \quad (1.3)$$

### Derivación MATRICIAL de la expresión de los estimadores MCO

Se plantea el desarrollo de los estimadores utilizando álgebra matricial, a través de un vector de residuos  $e(k)$  y una matriz de información  $x(k)$ .

$$y(k) = X(k)\theta(k) + e(k)$$

$$Y(N) = X(N) + e(N)$$

$$\theta(k) = \begin{bmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ -a_n \\ b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix} \quad \theta(k) = \text{Vector de parámetros}$$

$$y(k) = x(k) \cdot \theta(k) \rightarrow \text{Ecuación ARMA}$$

$$x(k) = \underbrace{[y(k-1) - \dots - y(k-n)]}_{\text{Valores anteriores de}} \underbrace{u(k-1) \dots u(k-n)}_{\text{salida y entrada}}$$

Se quiere estimar  $\hat{\theta}(k)$  vector de parámetros desconocidos a identificar.

Error de estimación:  $e(k) = \theta(k) - \hat{\theta}(k)$  no se conoce el error.

Se utiliza el error de la Ecuación:

$$y(k) - x(k) \cdot \hat{\theta}(k) = e(k) = \text{error de ecuación}$$

$J(N)$  = Función de costo (Índice de desempeño)

$$J(N) = \sum_{k=n}^N e^2(k) = e^2(k) + e^2(k+1) + \dots + e^2(N) = E^T(N) \cdot E(N)$$

### ERRORES:

$$e(n) = y(n) - x(n) \cdot \hat{\theta}(n)$$

$$e(n+1) = y(n+1) - x(n+1) \cdot \hat{\theta}(n+1)$$

$$e(N) = y(N) - x(N) \cdot \hat{\theta}(N)$$

Donde  $y(k)$  representa la primera medición de salida del sistema que se requiere identificar y  $y(N)$  la enésima medición del sistema.

$$Y(N) = \begin{bmatrix} y(n) \\ y(n+1) \\ \cdot \\ \cdot \\ y(N) \end{bmatrix} \rightarrow \text{Vector de salida (mediciones)}$$

$$X(N) = \begin{bmatrix} x(n) \\ x(n+1) \\ \cdot \\ \cdot \\ x(N) \end{bmatrix} \rightarrow \text{Matriz de información}$$

$$E(N) = \begin{bmatrix} e(n) \\ e(n+1) \\ \vdots \\ e(N) \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Vector de error}$$

En forma vectorial

$$E(N) = Y(N) - X(N) \cdot \hat{\theta}(N) \quad (1.4)$$

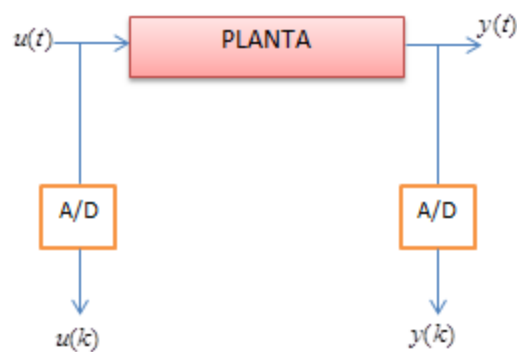


Figura 1.3 Representación de un sistema entrada salida

Para minimizar el error:

$$J(N) = E^T(N) * E(N)$$

$$J(N) = e_n^2 + e_{(n+1)}^2 + \dots \dots \dots e_N^2$$

$$J(N) = \sum_{i=n}^N e_i^2 \quad ; Y - X\theta = E$$

$$J(N) = (Y - X\theta)^T * (Y - X\theta)$$

De acuerdo a la expresión anterior se aplica la propiedad distributiva y se obtiene la expresión 1.4

$$J(N) = Y^T Y - Y^T X \theta - \theta^T X^T Y + \theta^T X^T X \theta \quad (1.4)$$

Los productos matriciales  $Y^T X \theta$  y  $\theta^T X^T Y$  son en realidad el mismo e iguales a un escalar: puesto que efectivamente la primera expresión es la transpuesta de la

segunda y dado que el orden de cada una de ellas es de (1x1), es decir, un escalar, se visualiza dos expresiones equivalentes del mismo número (escalar).

Se escribe  $Y^T X \theta + \theta^T X^T Y$  como  $2Y^T X \theta$

Para resolver la minimización se recurre al concepto de derivada parcial, por cuanto en el caso de las matrices, se debe recordar la propiedad de matrices para la cual cualquier par de matrices A y B se cumple que:

$$\frac{\partial(A^T B A)}{\partial A} = 2BA = 2A^T B$$

Se minimiza J

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \theta} = 0 &= \frac{(Y^T Y - 2\theta^T X^T Y + \theta^T X^T X \theta)}{\partial \theta} \\ 0 &= 0 - 2X^T Y + 2X^T X \theta \\ \theta &= [X^T X]^{-1} \cdot X^T Y \end{aligned}$$

Generalizando la expresión anterior para un orden n-ésimo se obtiene (1.5)

$$\hat{\theta}(N) = [X^T(N) * X(N)]^{-1} * X^T(N) Y(N) \quad (1.5)$$

$X(N)$  = Matriz formada por la salida del sistema y la entrada del mismo.

$Y(N)$  = Matriz formada con los valores de salida del sistema.

#### 1.4.4. MÍNIMOS CUADRADOS RECURSIVOS

En el método recursivo el vector de parámetros  $\theta$ , se calcula a partir de los resultados obtenidos en el instante anterior ( $N-1$ ) y de los datos de entrada y salida actuales (instante N). El sistema puede ser descrito por una Ecuación diferencial lineal.

$$y(k) = -a_1 y(k-1) - a_2 y(k-2) \dots - a_n y(k-n) + b_1 u(k-d-1) + b_2 u(k-d-2) + \dots + b_n u(k-d-n) + e(k) \quad (1.6)$$

Se puede describir en forma vectorial:

$$y(k) = \varphi^T(k) \theta + e(k) \quad (1.7)$$

Al relacionar la Ecuación (1.6) y (1.7) se obtiene

$$\begin{aligned}\varphi^T(k) &= [-y(k-1) - y(k-2) \dots - y(k-n) + u(k-d-1) + u(k-d-2) \dots + u(k-d-n)] \\ \theta &= [a_1 \ a_2 \dots \ a_n \ b_1 \ b_2 \dots \ b_n]^T\end{aligned}\quad (1.8)$$

Al aplicar expresiones como la (1.7) y (1.8) se llega al resultado de la matriz de covarianza necesario para la validación del modelo. [5]

El proceso para la identificación selecciona varios parámetros de acuerdo a lineamientos del proceso, los cuales se presentan a continuación:

1. Seleccionar  $\theta(k) = [\varphi]^T$  y  $P(k) = \alpha I$
2. Conformar el vector:  $\varphi^T(k+1)$
3. Calcular  $L(k+1)$
4. Obtener los nuevos valores de  $y(k+1)$  y de  $u(k+1)$
5. Calcular el error de estimación:

$$e(k+1) = y(k+1) - \varphi^T(k+1)\theta(k)$$

6. Calcular los nuevos parámetros estimados :

$$\theta(k+1) = \theta(k) + L(k+1)e(k+1)$$

7. Actualizar la matriz de covarianza:

$$P(k+1) = \frac{1}{\lambda} [I - L(k+1)\varphi^T(k+1)]P(k)$$

8. Actualizar el vector de medidas:  $\varphi(k+2)$
9. Hacer  $k = k+1$  y retornar al paso 3

De forma general la matriz de covarianza se representa de la siguiente forma:

$$P(N+1) = [X^T(N+1) * X(N+1)]^{-1}$$

Para evitar la inversión de matrices se implementa el siguiente algoritmo:

$$\hat{\theta}(k+1) = L(k+1) * E(k+1)$$

$$E(k+1) = Y(k+1) - X(k+1)\hat{\theta}(k)$$

$$L(k+1) = P(k)X^T(k+1)[I + X(k+1)P(k)X^T(k+1)]^{-1}$$

$$\underline{P(k+1) = [I - L(k+1)X(k+1)]P(k)} \quad (1.9)$$

$L(k+1)$  = vector de ganancias

$E(k+1)$  = error de predicción

$\hat{\theta}(k+1)$  = valor anterior

$Y(k+1)$  = nueva medición

## CAPÍTULO 2

### DESARROLLO DE METODOLOGÍAS PARA MODELACIÓN E IDENTIFICACIÓN

Un modelo es una representación simplificada de un sistema que permite responder interrogantes sobre este último sin recurrir a la experimentación sobre dicho sistema.

#### 2.1. MÉTODO DIRECTO

La modelación por medio del método directo permite seleccionar las variables que intervienen en un sistema, sea éste físico, eléctrico, mecánico de fluidos, etc. El método directo permite visualizar el sentido de las fuerzas mediante física aplicada con leyes de Newton, éstas son:

1. Ningún cuerpo abandona su estado de reposo o movimiento uniforme a menos que una fuerza externa actúe sobre él y lo cambie de estado.
2. Al aplicar una fuerza a un cuerpo, éste se acelera. La aceleración se produce en la misma dirección que la fuerza aplicada y es inversamente proporcional a la masa del cuerpo que se mueve.
3. A toda acción se opone una reacción, de la misma magnitud y sentido contrario.

La ley fundamental de la dinámica lo constituye la sumatoria de fuerzas para obtener un producto masa por aceleración, y las ecuaciones diferenciales obtenidas a partir de la sumatoria de fuerzas correspondiente a cada cuerpo, en ocasiones se desprece ciertos parámetros para la obtención de modelos no complejos y lineales, lo que facilita la representación de los sistemas en variables de estado.



### 2.1.1. MODELO 1: SISTEMA MECÁNICO CON UNA MASA

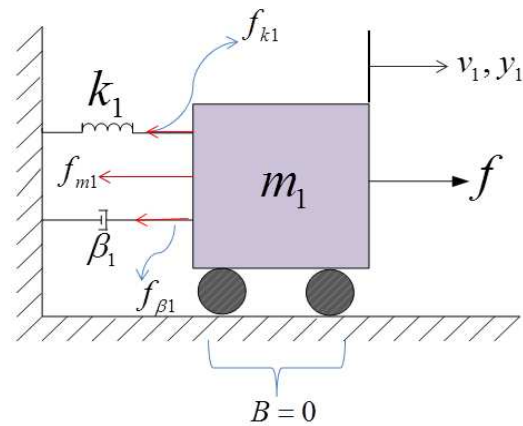
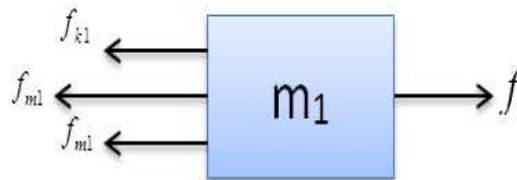


Figura 2.1 Sistema mecánico

Se plantea el sistema de la Figura 2.1 para su análisis mediante el método directo, para lo cual se tiene varios pasos para la obtención de sus ecuaciones diferenciales y variables de estado.

1. Plantear el diagrama de cuerpo libre, considerando las fuerzas que actúan sobre éste.



2. Aplicar la segunda ley de Newton, en la que interviene la sumatoria de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo; en el sistema actúan 4 fuerzas que son representadas de acuerdo al sentido de la masa 1.

$f_{k1}$  = fuerza producida por el resorte

$f_{\beta 1}$  = fuerza producida por el amortiguador

$f_{m1}$  = fuerza de reacción producida por la fuerza de acción  $f$

$f$  = fuerza de acción

3. Plantear la sumatoria de fuerzas de acuerdo al diagrama de cuerpo libre

$$\sum f = 0$$

$$f_{m1} + f_{B1} + f_{k1} = f$$

$$\begin{cases} f_{m1} = m_1 a_1 = m_1 \dot{v}_1 = m_1 \ddot{y}_1 \\ f_{B1} = B_1 v_1 = B_1 \dot{y}_1 \\ f_{k1} = k_1 y_1 \end{cases}$$

$$m_1 \ddot{y}_1 + B_1 \dot{y}_1 + k_1 y_1 = f \quad (2.1)$$

4. Plantear las variables de estado de acuerdo a la entrada y salida aplicada al sistema, en éste caso la entrada del sistema es la fuerza de acción  $f$  y las variables de salida son el desplazamiento y la velocidad.

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} u = f \\ y = y_1 \end{array}$$

5. Se describe cada una de las variables para obtener las matrices correspondientes a las variables de estado.

$v_1$  = velocidad de la masa 1 y equivalente a la primera derivada del desplazamiento e igual a  $\frac{dy_1}{dt}$

$y_1 = x_1$  = desplazamiento realizado por la masa 1

$v_1 = x_2 = \dot{x}_1$  = velocidad de la masa 1

6. Reemplazar las variables de estado en la Ecuación 2.1 para obtener la matriz de estados.

$$m_1 \ddot{y}_1 + B_1 \dot{y}_1 + k_1 y_1 = f$$

$$m_1 \dot{x}_2 + B_1 x_2 + k_1 x_1 = u$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{k_1}{m_1} x_1 - \frac{B_1}{m_1} x_2 + \frac{1}{m_1} u$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{m_1} & -\frac{B_1}{m_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_1} \end{bmatrix} u \quad (2.2)$$

$$y = (1 \quad 0) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

La Ecuación 2.2 representa la matriz de variables de estado donde se tiene A, B, C y D.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{m_1} & -\frac{B_1}{m_1} \end{bmatrix} = \text{Matriz de estados}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_1} \end{bmatrix} = \text{Matriz de entrada}$$

$$C = (1 \quad 0) = \text{Matriz de salida}$$

$$D = 0 = \text{Matriz de transmisión directa o matriz cero}$$

### 2.1.2. MODELO 2: SISTEMA MECÁNICO CON DOS MASAS

Este sistema presenta dos masas unidas mediante resortes y un amortiguador.

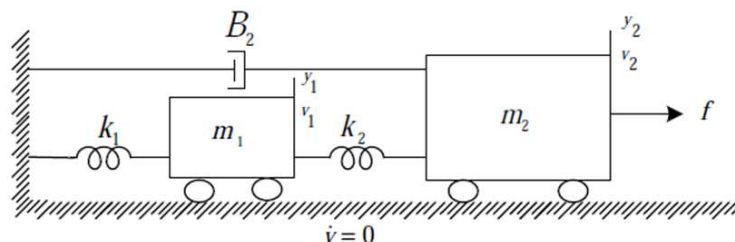


Figura 2.2 Sistema mecánico

Al considerar la utilización del método directo para la modelación de cualquier tipo de sistema cabe recalcar que no sólo se deben plantear ecuaciones básicas de ingeniería sino también considerar los parámetros que intervienen, las mediciones necesarias para determinar dichos parámetros y su posterior calibración y validación.

Analizando el modelo y las fuerzas que intervienen en el sistema, se sugiere los siguientes pasos para la solución directa de un sistema mecánico compuesto por un sistema masa-resorte-amortiguador.

Primero plantear diagramas de cuerpo libre para cada masa del sistema de acuerdo a leyes físicas y despreciar el rozamiento de las llantas con respecto al pavimento.

Se desprecia el rozamiento en las llantas para obtener condiciones ideales y reducir el grado de complejidad de las ecuaciones diferenciales, puesto que la fuerza de rozamiento se relaciona con la fuerza normal producida por el contacto de un cuerpo con el sitio de referencia, en éste caso el piso, y opuesta al sentido de la fuerza producida por el peso de la masa.

Segundo, al considerar las fuerzas que actúan sobre el sistema y por las cuales existe reacción en el mismo, el sentido de las fuerzas debe ser colocado adecuadamente sobre el diagrama del sistema para posteriormente trasladarlo a los diagramas de cuerpo libre correspondientes a cada cuerpo del sistema.

Como tercer paso es indispensable plantear el o los diagramas de cuerpo libre observando las fuerzas de acción y reacción incidentes en cada cuerpo del sistema.

El diagrama de cuerpo libre se lo obtiene graficando las fuerzas actuantes y de reacción a causa de las fuerzas aplicadas sobre el cuerpo, tal es el caso del cuerpo 2, se aplica una fuerza  $f$  para mover el sistema a la derecha de su posición de reposo, al realizar ésta maniobra el cuerpo 2 produce una fuerza de oposición al movimiento inicial  $f_{m2}$ , el resorte y el amortiguador tratan de volver a su punto de equilibrio o reposo con fuerzas que se oponen al sentido de la fuerza de acción.

### 2.1.3. TUTORIAL 1: MODELO A VARIABLES DE ESTADO DE UN SISTEMA MECÁNICO UTILIZANDO EL MÉTODO DIRECTO

Los modelos 1 y 2 presentados como introducción a la modelación por medio del método directo dan un indicio de los pasos que se deben seguir para obtener ecuaciones diferenciales adecuadas, para lo cual se detalla paso a paso la solución de sistemas mecánicos a través del método directo o de fuerzas.

1. Analizar las variables a intervenir sean éstas mecánicas, eléctricas de fluidos, entre otras; para el caso planteado en la Figura 2.2, observando los diagramas de cuerpo libre se puede obtener las ecuaciones del sistema.

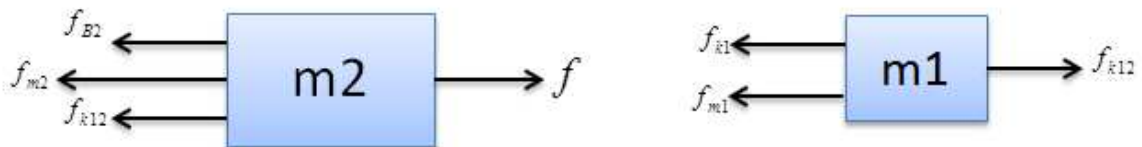


Figura 2. 3 Diagrama de cuerpo

2. Realizar la sumatoria de fuerzas para cada cuerpo, según la dirección de cada una de las fuerzas que intervienen en el sistema, de tal forma que se planteen adecuadamente el sentido de las acciones ejecutadas en cada una de las masas.
  - Ecuación para la masa 2, interviene el amortiguador  $B_2$ , con la fuerza ejercida en oposición al movimiento generado por la fuerza  $f$ , la fuerza de reacción  $f_{m2}$  y la fuerza generada por acción de la masa 1 y 2 en el resorte  $k_2 = k_{12}$

$$f_{B2} + f_{m2} + f_{k12} = f$$

$$f_{m2} = m_2 \ddot{y}_2$$

$$f_{B2} = B_2 \dot{y}_2$$

$$f_{k12} = k_{12}(y_2 - y_1)$$

La diferencia de desplazamientos  $(y_2 - y_1)$  siempre inicia por el lado de la excitación propiciada por la fuerza externa.

$$m_2 \ddot{y}_2 + B_2 \dot{y}_2 + k_{12}(y_2 - y_1) = f \quad (2.3)$$

La expresión 2.3 representa una Ecuación diferencial de segundo orden asociada al primer cuerpo del sistema masa resorte denotada por  $m_2$ .

- Ecuación para la masa 1, en ésta interviene un resorte con referencia a la pared  $k_1$  y un resorte sujeto a la masa 2 a través del cual el impulso propiciado por la fuerza  $f$  trata de llevar  $m_1$  en dirección opuesta al movimiento de  $k_1$ .

3. De acuerdo a la Figura 2.3 relacionada con el diagrama de cuerpo libre y las fuerzas que intervienen en la masa 1 son  $f_{k12}$  por acción del resorte  $k_2$ ,  $f_{k1}$  fuerza producida por el resorte  $k_1$ , la misma que se encuentra en sentido contrario a la fuerza aplicada  $f$  y  $f_{m1}$  como fuerza de reacción a causa de  $f$ .

$$\begin{aligned} f_{m1} + f_{k1} &= f_{k12} \\ f_{m1} &= m_1 \ddot{y}_1 \\ f_{k1} &= k_1 \dot{y}_1 \\ f_{k12} &= k_{12}(y_2 - y_1) \end{aligned}$$

$$m_1 \ddot{y}_1 + k_1 y_1 = k_{12}(y_2 - y_1) \quad (2.4)$$

La expresión 2.4 representa la segunda Ecuación diferencial del sistema, la cual pertenece a la masa 2.

4. A partir de las ecuaciones 2.3 y 2.4 se obtiene las variables de estado del sistema, se identifica las variables de entrada y salida para construir la matriz de estados.

$$x = \begin{bmatrix} y_1 \\ v_1 \\ y_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} u = f \\ y = y_1 \end{array}$$

5. Identificar las variables de salida del sistema, generalmente éstas son la reacción ocasionada al aplicar una fuerza externa al sistema que hace cambiar de su estado de reposo a movimiento.

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

6. Reemplazar las variables generalizadas en las ecuaciones diferenciales por variables relacionadas con la matriz planteada en el punto 4.

$$\begin{array}{l} v_1 = \dot{x}_2 = \dot{x}_1 \\ v_2 = \dot{x}_4 = \dot{x}_3 \end{array}$$

7. Trasladar las ecuaciones diferenciales 2.3 y 2.4 con variables específicas obtenidas en el punto 6 para hallar sus variables de estado.

$$\begin{array}{l} m_2 \ddot{y}_2 + B_2 \dot{y}_2 + k_{12}(y_2 - y_1) = f \\ m_2 \dot{x}_4 + B_2 x_4 + k_{12} x_3 - k_{12} x_1 = f \\ \dot{x}_4 = \frac{1}{m_2} f + \frac{k_{12}}{m_2} x_1 - \frac{k_{12}}{m_2} x_3 - \frac{B_2}{m_2} x_4 \end{array}$$


---

$$\begin{array}{l} m_1 \ddot{y}_1 + k_1 y_1 = k_{12}(y_2 - y_1) \\ m_1 \dot{x}_2 + k_1 x_1 = k_{12} x_3 - k_{12} x_1 \\ \dot{x}_2 = -\frac{(k_1 + k_{12})}{m_1} x_1 + \frac{k_{12}}{m_1} x_3 \end{array}$$


---

8. Observar las expresiones obtenidas en el punto 6 y 7 y reemplazar las variables de estado  $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, \dot{x}_4$  por sus respectivos equivalentes, considerando el orden de cada variable y obtener la matriz de variables de estado.

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-(k_1+k_{12})}{m_1} & 0 & \frac{k_2}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2}{m_2} & 0 & -\frac{k_2}{m_2} & -\frac{B_2}{m_2} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} f \quad y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

La matriz de estados presenta varias ventajas, por lo que es indispensable el hallazgo de dicha expresión para un análisis minucioso del comportamiento de los sistemas.

- Se aplica a sistemas lineales y no lineales.
- Permite analizar sistemas de más de una entrada o más de una salida.
- Pueden ser sistemas variantes o invariantes en el tiempo.
- Las condiciones iniciales pueden ser diferentes de cero
- Proporciona información de lo que pasa dentro del sistema.

Con la representación en el Espacio de Estado o Variables de Estado se conoce y controla la dinámica interna de un sistema y su respuesta. Las variables de estado en conjunto son capaces de determinar las condiciones dinámicas del sistema para la variable independiente, siendo éste el tiempo.

La representación en espacio de estado puede ser derivada desde las ecuaciones diferenciales que representan a un sistema.

## 2.2. MÉTODO DE REDES

El método de redes o red generalizada está formado por la interconexión de elementos y fuentes generalizadas, que representan a las diferentes clases de elementos físicos, y las variables que intervienen en ella permiten la obtención de cantidades que describen el comportamiento dinámico de los mismos.

Además permite obtener un equivalente circuitual de sistemas complejos. El diagrama de red evita dibujar el diagrama de cuerpo libre y permite plantear directamente las ecuaciones y reducir el grado de dificultad para identificar el sentido de las fuerzas que actúan en cada cuerpo del sistema.



- Éste método utiliza teoría de redes eléctricas y se extiende a sistemas no eléctricos siempre y cuando se encuentre su equivalente de red adecuadamente, lo que facilita al estudiante el estudio de sistemas mecánicos con los cuales no se encuentre familiarizado cotidianamente.
- Utiliza ecuaciones matriciales de nodo.
- Se obtiene un modelo a función de transferencia (se trabaja en el dominio de "s").
- El método de redes permite realizar analogías de elementos mecánicos ideales con elementos eléctricos para facilitar la construcción del circuito.

Los elementos que presentan su equivalente eléctrico son:

- La masa de un cuerpo es reemplazado por un capacitor, ya que la masa almacena energía cinética en función de su velocidad y el capacitor es un dispositivo que almacena energía eléctrica.
- Un resorte deforma cantidades constantes y estacionarias cuando se carga con fuerzas constantes y por definición un resorte puro no tiene masa, las fuerzas que actúan en sus extremos deben estar balanceadas en los sistemas que interactúan con éste tipo de elementos por lo que éste elemento se compara con un inductor ya que éste elemento depende de la variación de la corriente para actuar y de esta forma almacena energía en forma continua.
- Un amortiguador no tiene masa o efectos de resorte, representa únicamente, los efectos de la resistencia a razón de la deformación. Cuando un amortiguador sufre extensión o compresión a causa de fuerzas iguales y opuestas aplicadas a sus extremos se realiza un trabajo que se disipa en forma de energía, por lo que su símil es la resistencia que disipa la energía almacenada en forma de calor.

Un equivalente eléctrico a partir de un sistema mecánico requiere de puntos de referencia para su transformación y conexión adecuada por lo es necesario identificar si las variables son transvariables o pervariables.

Transvariable: son aquellas variables que requieren dos puntos para medirse y se obtienen a través de resistores, inductores o capacitores.

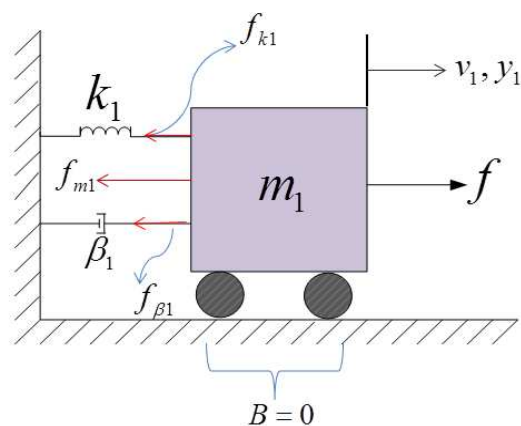
Pervariables: son aquellas variables que se propagan por los elementos y para cuya medición se requiere solamente un punto.

Tabla 1.1 Analogías mecánicas y eléctricas

| Elemento mecánico |              | Elemento eléctrico |                     | Representación  |
|-------------------|--------------|--------------------|---------------------|---|
| Símbolo           | Cantidad     | Símbolo            | Cantidad            |   |
| <b>f</b>          | Fuerza       | f                  | Fuente de corriente |    |
| <b>M</b>          | Masa         | C                  | Capacitor           |    |
| <b>B</b>          | Amortiguador | R                  | Resistencia         |    |
| <b>K</b>          | Resorte      | L                  | Inductor            |  |

Se analiza la Tabla 1.1 considerando que los elementos mecánicos, de fluidos y otros tienen equivalente eléctrico para facilitar la resolución de los problemas que se presenten en torno a la modelación de los sistemas.

### 2.2.1. TUTORIAL 2: MODELO A VARIABLES DE ESTADO DE UN SISTEMA MECÁNICO Y FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA POR EL MÉTODO DE REDES



El sistema mecánico presentado en la Figura 2.1 será transformado a un sistema eléctrico a través de sus equivalentes respectivos de acuerdo a la Tabla 1.1.

1. Observar los elementos que componen el sistema y realizar un cuadro comparativo para facilitar la transformación de los elementos mecánicos a eléctricos, en éste caso el sistema está compuesto por un resorte un amortiguador y una masa sostenida a través de éstos elementos a un sistema de referencia que es la pared y el piso a los que se encuentra sujeto los elementos antes mencionados.
2. Las características de los elementos mecánicos transformados a eléctricos se deducen a partir de la siguiente comparación :

$$e = \text{esfuerzo} = v = \text{velocidad}$$

$$f = \text{fuerza} = \text{flujo} = i$$

$$\text{Entrada} = f = u$$

$$\text{Salida} = y = \text{posición}$$

$$v_i = L \frac{di}{dt}$$

$$\int v_i = \int L \frac{di}{dt}$$

$$e_a = \int v_i \cdot dt = x = Li = Lf$$

$$f = \frac{1}{L} x = kx$$

$$\underline{\underline{L = \frac{1}{k}}}$$

Fuerza producida por un amortiguador  $f_B = B \cdot v$  se despeja  $1/B$

$$\frac{v}{f} = \frac{1}{B} = \frac{\text{esfuerzo}}{\text{flujo}} \therefore \text{es equivalente a } \frac{V}{I} = R$$

$$\underline{\underline{R = \frac{v}{f} = \frac{1}{B}}}$$

Tabla 1.2 Analogía mecánicas y eléctrica Figura 2.1

| Elemento mecánico |              | Elemento eléctrico |                     | Característica    | Equivalente Laplace |
|-------------------|--------------|--------------------|---------------------|-------------------|---------------------|
| Símbolo           | Cantidad     | Símbolo            | Cantidad            |                   |                     |
| <b>f</b>          | Fuerza       | f                  | Fuente de corriente | $f$               | $F(s)$              |
| <b>m1</b>         | Masa         | C                  | Capacitor           | $c = m$           | $m_1 s$             |
| <b>B1</b>         | Amortiguador | R                  | Resistencia         | $R = \frac{1}{B}$ | $B_1$               |
| <b>K1</b>         | Resorte      | L                  | Inductor            | $L = \frac{1}{K}$ | $\frac{k_1}{s}$     |

3. Se inicia la construcción del circuito equivalente por la masa principal del sistema ya que ésta se transforma en un capacitor referido a tierra, se considera cada masa o punto con velocidad un nodo para el circuito, en este caso se presenta únicamente un nodo al que se conecta los elementos presentes en el sistema.
4. Se recomienda colocar en orden de aparición los elementos en el circuito tomando como referencia el capacitor referido a tierra, la bobina deberá colocarse al lado izquierdo de ésta y el resistor al lado derecho del capacitor.
5. La fuerza externa aplicada al sistema actúa como una fuente de corriente colocada en el mismo sentido al que se aplica la fuerza, en éste caso en forma ascendente, lo que permite construir el diagrama equivalente de red.
6. Colocar el sentido de las corrientes de acuerdo a conocimientos básicos de circuitos eléctricos, se conserva el nombre colocado en el sistema mecánico para no confundir la nomenclatura utilizada.

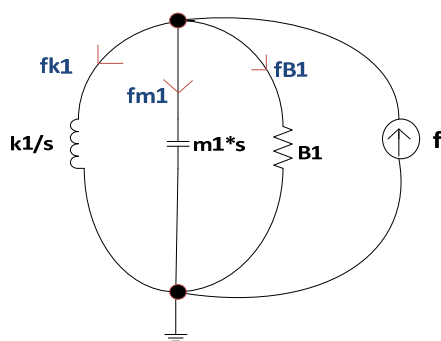


Figura 2. 4 Diagrama de red en el dominio de “s”

7. La Figura 2.4 representa el sistema equivalente de red con referencia inercial y sentido de corrientes colocadas adecuadamente para observar el sentido de las mismas y construir la o las ecuaciones respectivas de cada sistema.
8. Aplicar ley de mallas y nodos para obtener las ecuaciones requeridas.

$$f_{k1} + f_{m1} + f_{B1} = f \quad (2.6)$$

9. Plantear las variables de estado de acuerdo a la entrada y salida aplicada al sistema, en éste caso la entrada del sistema es la fuerza de acción  $f$  y las variables de salida son el desplazamiento y la velocidad.

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} u = f \\ y = y_1 \end{array}$$

10. Se describe cada una de las variables para obtener las matrices correspondientes a las variables de estado.

$v_1$  = velocidad de la masa 1 y equivalente a la primera derivada del desplazamiento e igual a  $\frac{dy_1}{dt}$

$y_1 = x_1$  = desplazamiento realizado por la masa 1

$v_1 = x_2 = \dot{x}_1$  = velocidad de la masa 1

11. Reemplazar las variables de estado en la Ecuación 2.6 para obtener la matriz de estados.

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{y}_1 + B_1 \dot{y}_1 + k_1 y_1 &= f \\ m_1 \dot{x}_2 + B_1 x_2 + k_1 x_1 &= u \\ \dot{x}_2 &= -\frac{k_1}{m_1} x_1 - \frac{B_1}{m_1} x_2 + \frac{1}{m_1} u \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{m_1} & -\frac{B_1}{m_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_1} \end{bmatrix} u \quad (2.7)$$

$$y = (1 \quad 0) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

La Ecuación 2.7 representa la matriz de variables de estado donde se tiene A, B, C y D.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{m_1} & -\frac{B_1}{m_1} \end{bmatrix} = \text{Matriz de estados}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_1} \end{bmatrix} = \text{Matriz de entrada}$$

$$C = (1 \quad 0) = \text{Matriz de salida}$$

$$D = 0 = \text{Matriz de transmisión directa o matriz cero}$$

12. Obtener la función de transferencia del sistema para lo cual se aplica ecuaciones matriciales de nodo.

$$[Y]^* [V_n] = [I] \quad (2.8)$$

13. La Ecuación 2.8 representa las admitancias presentes en el sistema por el producto del voltaje de nodo e igual a la fuente que suministra energía al sistema, por lo cual la Ecuación 2.8 queda representada en la Ecuación 2.9 a partir del gráfico 2.4 en el que se muestra las características de cada elemento transformado a Laplace.

$$[Y]*[V_n]=[I]$$

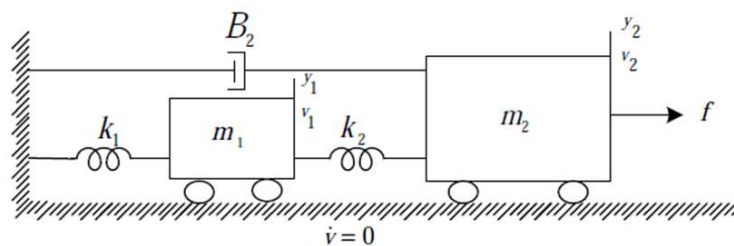
$$\left[ \frac{k_1}{s} + m_1 s + B_1 \right] V_1 = I = f$$

$$\frac{V_1(s)}{F(s)} = \frac{\text{SALIDA}}{\text{ENTRADA}} = \frac{1}{\left[ \frac{k_1}{s} + m_1 s + B_1 \right]}$$

$$\frac{V_1(s)}{F(s)} = \frac{s}{m_1 s^2 + B_1 s + k_1} = G_1(s) \quad (2.10)$$

14. Al aplicar correctamente el equivalente de red para sistemas mecánicos de fluidos y otros se encuentra fácilmente las ecuaciones diferenciales, variables de estado y función de transferencia de los sistemas planteados sin necesidad de considerar diagramas de cuerpo libre, leyes físicas y sentido de las fuerzas aplicadas.

### 2.2.2. TUTORIAL 3: MODELO A VARIABLES DE ESTADO DE UN SISTEMA MECÁNICO CON DOS MASAS Y FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA POR EL MÉTODO DE REDES



Los sistemas incrementan su complejidad cuanto más elementos contenga en su estructura y en dichos casos las consideraciones para plantear un sistema equivalente de red debe incluir nuevas consideraciones.

1. Se considera el sistema de la Figura 2.2 para lo cual se plantea el circuito eléctrico de acuerdo a la equivalencia de la Tabla 1.1 pero ésta vez transformado al dominio de "s", para la aplicación de la Ecuación matricial de nodos y la ley de Kirchhoff:

$$[Y] * [V_n] = [I] \quad (2.11)$$

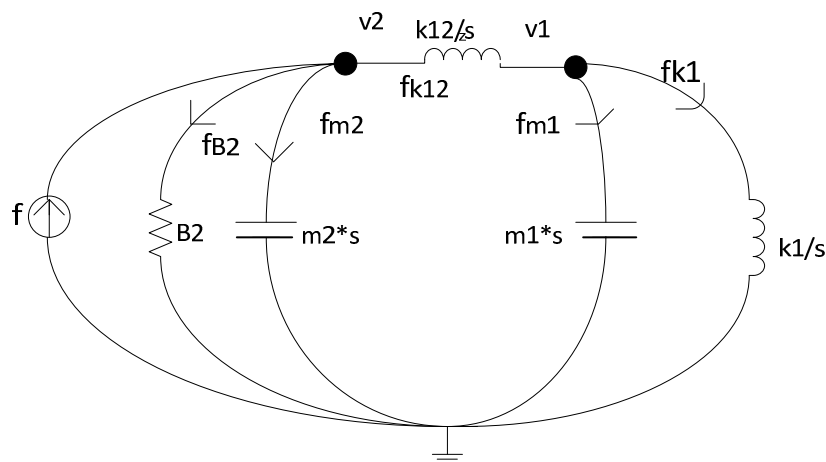


Figura 2. 5 Diagrama de red en el dominio de "s"

2. Observar la caída de voltaje en los nodos  $v_2$  y  $v_1$  ( $v_2 - v_1$ )
3. Plantear la Ecuación del resorte  $k_{12}$  de acuerdo a relaciones mecánicas, considerando el desplazamiento del sistema mecánico (caída de voltaje).

$$fk_{12} = k_{12}(y_2 - y_1) \quad (2.12)$$

4. Plantear las ecuaciones matriciales de nodo considerando los elementos que actúan en cada uno de éstos.

$$\begin{bmatrix} m_1s + \frac{k_1}{s} + \frac{k_{12}}{s} & -\frac{k_{12}}{s} \\ -\frac{k_{12}}{s} & m_2s + \frac{k_{12}}{s} + B_2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Para plantear las ecuaciones se consideran las ramas entre los nodos, en la cual se realiza la suma de los elementos de cada nodo en la diagonal principal y en la secundaria se colocan los elementos comunes para ambos nodos con signo negativo, sin olvidar las fuerzas externas que intervienen en el sistema.

5. Para hallar la función de transferencia se debe calcular  $\frac{V_2(s)}{F(s)}$  para lo cual se aplica la regla de Kramer de determinantes.



$$V_2(s) = \frac{\begin{vmatrix} \left(m_1s + \frac{k_1}{s} + \frac{k_{12}}{s}\right) & 0 \\ -\frac{k_{12}}{s} & F(s) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \left(m_1s + \frac{k_1}{s} + \frac{k_{12}}{s}\right) & -\frac{k_{12}}{s} \\ -\frac{k_{12}}{s} & \left(m_2s + \frac{k_{12}}{s} + B_2\right) \end{vmatrix}}$$

$$V_2(s) = \frac{\left(m_1s + \frac{k_1}{s} + \frac{k_{12}}{s}\right) * F(s)}{\left(m_1s + \frac{k_1}{s} + \frac{k_{12}}{s}\right) * \left(m_2s + \frac{k_{12}}{s} + B_2\right) - \left(\frac{k_{12}}{s}\right)^2}$$

$$\frac{V_2(s)}{F(s)} = \frac{m_1s^3 + (k_1 + k_{12})s}{m_1m_2s^4 + m_1B_2s^3 + (m_2k_{12} + m_2k_1 + m_1k_{12})s^2 + (k_1B_2 + k_{12}B_2)s + k_1k_{12}} \quad (2.14)$$

La expresión (2.14) muestra la función de transferencia del sistema de la Figura 2.2, aplicando el método de redes y en el dominio de "s" lo que facilita la obtención de la Ecuación diferencial del sistema, tomando la transformada inversa de Laplace.

Con éste método se tiene mayor confiabilidad del sentido de las fuerzas en cualquier tipo de sistema sin importar cuantas actúen sobre cada cuerpo

### 2.2.3. TUTORIAL 3: MODELO DEL ACELERÓMETRO

Se amplía el estudio del método de redes mediante la modelación de un acelerómetro en el cual intervienen fuerzas externas e internas propias de cada elemento.

1. Dibujar el diagrama de red del sistema de acuerdo a la referencia inercial de la masa 1 la cual es un capacitor referido a tierra colocando el nodo  $v_1$  como el punto de conexión del amortiguador  $B_1$  y del resorte  $k_1$ . La masa 2 se encuentra referida a tierra ya que se encuentra conectada por medio de la masa 1 y el nodo  $v_2$ .

2. Entre el nodo  $v_1$  y  $v_2$  se coloca el resorte  $k_2$  y el amortiguador  $B_2$  transformado a su equivalente eléctrico, una bobina y un resistor respectivamente.

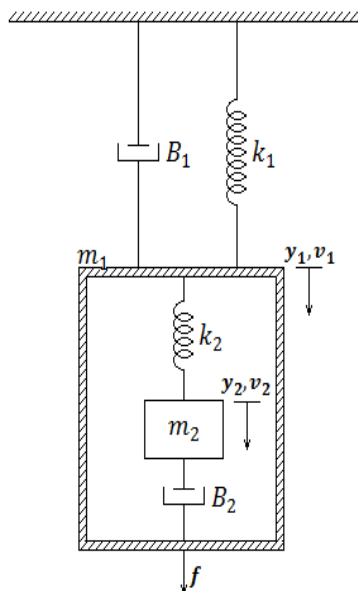


Figura 2. 6 Acelerómetro

3. Al observar la Figura 2.6 y de acuerdo al numeral uno se grafica el circuito eléctrico para obtener el sentido de las fuerzas del sistema, ya que si se realizara una sumatoria de fuerzas para el sistema éstas resultarían complejas al momento de colocar el sentido de cada una actuando sobre cada cuerpo y causarían confusión.

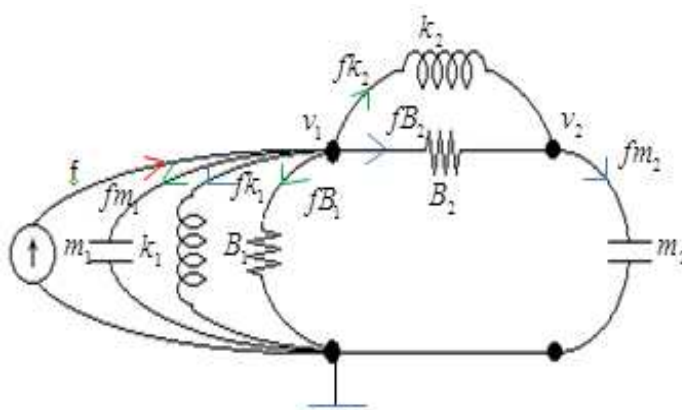


Figura 2. 7 Diagrama de red acelerómetro

4. Plantear las restricciones del sistema de acuerdo a la Figura 2.7

$$\begin{aligned} fm_1 + fB_1 + fB_2 + fk_1 + fk_2 &= f \\ fB_2 + fk_2 &= fm_2 \end{aligned} \quad (2.15)$$

5. Plantear el modelo a Ecuación diferencial tomando como referencia (2.15)

$$m_1\ddot{y}_1 + B_1\dot{y}_1 + k_1y_1 + k_2(y_1 - y_2) + B_2(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) = f \quad (2.16)$$

$$B_2(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) + k_2(y_1 - y_2) = m_2\ddot{y}_2 \quad (2.17)$$

6. Determinar el modelo a variables de estado considerando los siguientes parámetros de entrada y salida:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ v_1 \\ y_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dot{y}_1 \\ y_2 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_3 = x_4$$

7. Reemplazar (2.18) en (2.16) y (2.17) para obtener las variables de estado del sistema.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{k_1 + k_2}{m_1}x_1 - \frac{B_1 + B_2}{m_1}x_2 + \frac{k_2}{m_1}x_3 + \frac{B_2}{m_1}x_4 + \frac{1}{m_1}f \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= \frac{k_2}{m_2}x_1 + \frac{B_2}{m_2}x_2 - \frac{k_2}{m_2}x_3 - \frac{B_2}{m_2}x_4 \end{aligned} \quad (2.19)$$

8. Formular el modelo a variables de estado:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1 + k_2}{m_1} & -\frac{B_1 + B_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & \frac{B_2}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2}{m_2} & \frac{B_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} & -\frac{B_2}{m_2} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} f \quad (2.20)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

9. Obtener el modelo a función de transferencia planteando el diagrama de red en función de "s", se toma como referencia la deducción realizada en el tutorial dos numeral dos, se aplica transformada de Laplace para impedancias.

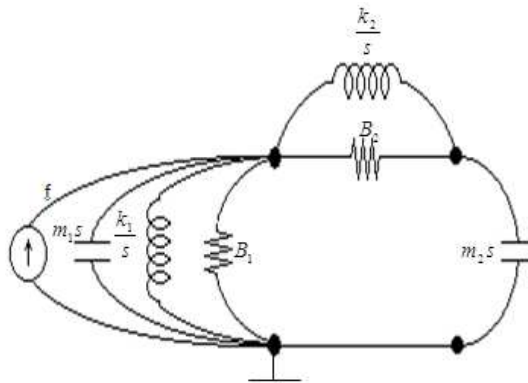


Figura 2. 8 Diagrama de red acelerómetro dominio "s"

10. Aplicar la Ecuación fundamental de nodos de acuerdo a las especificaciones de la Figura 2.8

$$\begin{aligned}
 & [Y][U_n] = [I] \\
 & \begin{bmatrix} m_1s + \frac{k_1}{s} + B_1 + \frac{k_2}{s} + B_2 & -\left(B_2 + \frac{k_2}{s}\right) \\ -\left(B_2 + \frac{k_2}{s}\right) & B_2 + \frac{k_2}{s} + m_2s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(s) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.21)
 \end{aligned}$$

11. Aplicar la regla de Kramer para obtener la función de transferencia con la utilización de (2.21).

$$F_o(s) = \frac{\begin{vmatrix} \left(m_1s + \frac{k_1}{s} + B_1 + \frac{k_2}{s} + B_2\right) & F(s) \\ -\left(B_2 + \frac{k_2}{s}\right) & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \left(m_1s + \frac{k_1}{s} + B_1 + \frac{k_2}{s} + B_2\right) & -\left(B_2 + \frac{k_2}{s}\right) \\ -\left(B_2 + \frac{k_2}{s}\right) & \left(B_2 + \frac{k_2}{s} + m_2s\right) \end{vmatrix}}$$

$$F_o(s) = \frac{\left(B_2 + \frac{k_2}{s}\right)F(s)}{\left(m_1s + \frac{k_1}{s} + B_1 + \frac{k_2}{s} + B_2\right) * \left(B_2 + \frac{k_2}{s} + m_2s\right) - \left(B_2 + \frac{k_2}{s}\right)^2} \quad (2.22)$$

Resolver la expresión (2.22) para obtener la función de transferencia del sistema general, se recomienda agrupar los términos de manera ascendente para facilitar el entendimiento de la función hallada para el modelo.

$$\frac{F_o(s)}{F(s)} = \frac{(B_2s^2 + k_2s)}{m_1m_2s^4 + (m_1B_2 + m_2B_1 + m_2B_2)s^3 + (m_1k_2 + m_2k_1 + m_2k_2 + B_1B_2)s^2 + (k_1B_2 + k_2B_1)s + k_1k_2} \quad (2.23)$$

La expresión obtenida (2.23) representa la función de transferencia del acelerómetro, siendo ésta de cuarto orden debido a las variables que intervienen en el sistema, cabe recalcar que con la función de transferencia del sistema se puede probar la estabilidad del mismo con distintos valores de los elementos, dependiendo de la aplicación que se le asigne al acelerómetro, así como realizar pruebas de cada elemento con valores mínimos y máximos, mediante simulación lo que permite conocer el comportamiento dinámico del sistema.

### 2.3. MÉTODO VARIACIONAL

Los modelos matemáticos de los sistemas físicos (mecánicos, eléctricos, etc.) pueden derivarse de consideraciones de energía sin aplicarles las leyes de Newton o Kirchhoff.

Los sistemas mecánicos presentan ecuaciones de movimiento que necesitan ser derivadas, para lo cual se utiliza la energía potencial y cinética de los mismos.

Al derivar las ecuaciones de movimiento para un sistema mecánico complicado, conviene hacerlo aplicando dos métodos diferentes ( uno basado en la segunda ley de Newton y el otro considerando energías actuantes en el sistema); el

método de Lagrange es un recurso acertado para derivar ecuaciones de ésta clase se sistemas.

Para derivar las ecuaciones de movimiento de Lagrange, es necesario definir las coordenadas generalizadas y el Lagrangiano, para establecer el principio de Hamilton. [6]

### Coordenadas Generalizadas

Las coordenadas generalizadas de un sistema son un conjunto de coordenadas independientes que se necesita para describir completamente el movimiento del sistema. El número de coordenadas generalizadas necesario para describir el movimiento del sistema es igual al número de grados de libertad que posea el sistema.

Si un sistema requiere  $n$  coordenadas generalizadas  $q_1, q_2, \dots, q_n$  necesitamos considerar  $n$  coordenadas generalizadas como coordenadas de un sistema coordinado  $n$ -dimensional en un espacio  $n$ -dimensional. Por lo tanto en cualquier instante el sistema se caracteriza mediante un punto en este espacio  $n$ -dimensional se mueve y describe una curva en el espacio.

### Lagrangiano

El Lagrangiano  $L$  de un sistema se define por:

$$L = U^* - T$$

$U^*$  =co-energía almacenada en dispositivos con efecto capacitivo(C).

$T$ = energía almacenada en dispositivos con efecto inductivo (L).

$J$ = co-contenido en elementos disipativos (R).

$F$ = fuentes de flujo

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial \lambda} \right) + \left( \frac{\partial J}{\partial \dot{\lambda}} \right) = F \quad (2.24)$$

La Ecuación (2.24) es conocida como Ecuación de movimiento de Euler-Lagrange para sistemas conservativos. Si no se disipa energía en un sistema, se le llama conservativo. Un sistema mecánico conservativo es aquel en el cual la energía aparece solamente como energía cinética y energía potencial.

### Principio de Hamilton

El Principio de Hamilton establece que el movimiento del punto del sistema en el espacio  $n$ -dimensional de  $t = t_1$  a  $t = t_2$  es tal que la integral

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

### 2.3.1. ENERGÍA ALMACENADA EN DISPOSITIVOS CAPACITIVOS

#### Acumulación de flujo

$$q = \int f \cdot dt = f_a \quad \dot{q} = f$$

$$q = c \cdot e \quad (2.25)$$

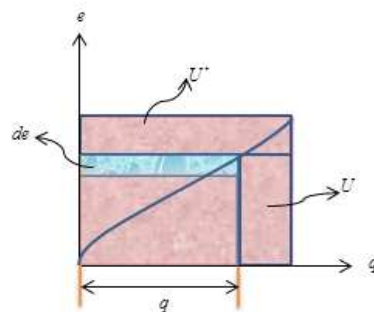


Figura 2. 9 Representación de energía en dispositivos capacitivos

La Figura 2.9 representa la acumulación de energía en dispositivos capacitivos, los mismos que exhiben una relación de carga y voltaje dando como resultado la capacitancia.

Una capacitancia ideal tiene una carga proporcional a la diferencia de potencial. La expresión de acumulación de flujo describe en sus componentes:

$q$  = carga del capacitor





### Acumulación de esfuerzo

$$e_a = \lambda = \int e^* dt \quad \dot{\lambda} = e$$

$$\lambda = Lf = \text{cantidad de acople de flujo} \rightarrow f = \frac{1}{L} \lambda$$

$T$  = energía almacenadora

$f$  = flujo o fuerza

### Energía

$$T = \int f^* d\lambda = \frac{1}{2} \int \lambda^* d\lambda$$

$$T = \frac{1}{2} * \frac{1}{L} \lambda^2$$

La expresión (2.27) se relaciona con la energía potencial de un elemento mecánico.

$$E_p = \frac{1}{2} kx^2 \quad T = \frac{1}{2} Lf^2 \quad (2.27)$$

### 2.3.3. ENERGÍA DISIPADA EN DISPOSITIVOS RESISTIVOS

La Figura 2.11 representa la energía almacenada en dispositivos resistivos o disipativos, para lo cual se realiza la comparación entre un amortiguador como elemento mecánico y una resistencia como elemento eléctrico para obtener la energía que disipa un amortiguador.

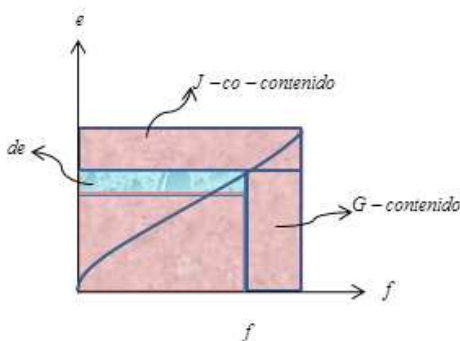


Figura 2. 11 Energía en dispositivos resistivos

$J$  = energía de elementos disipativos

$$e = Rf \longrightarrow f = \frac{1}{R}e$$

$$\lambda = \int e^* dt \longrightarrow \dot{\lambda} = e$$

### Co-Contenido

$$J = \int f^* de = \frac{1}{R} \int_0^e e^* de$$

$$J = \frac{1}{2} * \frac{1}{R} e^2 = \frac{1}{2R} (\dot{\lambda})^2 = \frac{1}{2} * \frac{1}{B} * f^2$$

$$J = \frac{1}{2B} f^2 \qquad J = \frac{1}{2} R i^2 \qquad (2.28)$$

La energía de los dispositivos disipativos se relaciona directamente con los elementos resistivos, para realizar la deducción de la expresión (2.28) se considera el co-contenido del dispositivo y las relaciones fundamentales de integración, las mismas que son tomadas a partir de los pedazos de diferencial mostrado en la gráfica para poder realizar una comparación adecuada entre  $R = B$ , la corriente del inductor es comparado con el esfuerzo para tener una expresión general al momento de plantear el método de Lagrange para la obtención de ecuaciones diferenciales en modelos lineales y no lineales.

#### **2.3.4. TUTORIAL 4: MODELO SIMPLIFICADO DE UN MANIPULADOR DE DOS GRADOS DE LIBERTAD**

El presente tutorial pretende mostrar la manera adecuada de aplicar el método variacional para obtener el modelo matemático deseado, sin necesidad de incurrir en leyes físicas que compliquen la deducción de ecuaciones diferenciales y variables de estado.

Modelo de un manipulador simplificado sin considerar el momento de inercia de las masas de cada extremidad del brazo robótico, se desprecia los momentos de inercia para obtener un modelo idealizado del sistema y deducir de forma sencilla el modelo matemático.

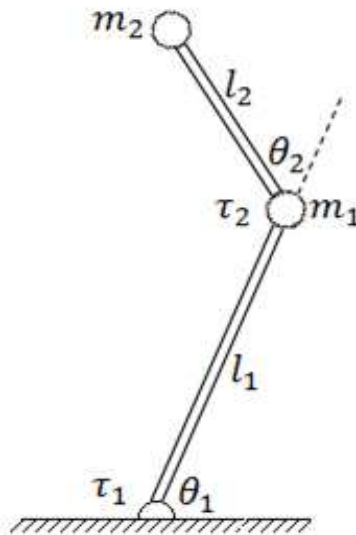


Figura 2. 11 Manipulador simplificado

Para aplicar el método variacional es necesario considerar las condiciones iniciales de:

- Sentido de giro de las masas horario
  - Punto de referencia de la masa 2, el piso a donde se encuentra sujeto el primer eslabón, la referencia se traslada al segundo eslabón.
1. Realizar el diagrama de velocidades para determinar la velocidad neta a la cual se mueve la masa 2, para ello es necesario trasladar referencias en el mismo diagrama para relacionar vectores y ángulos suplementarios y complementarios.

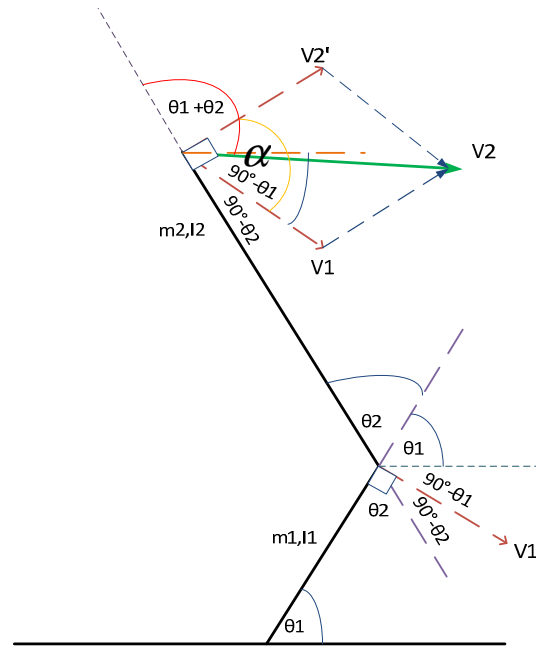


Figura 2.13 Diagrama de velocidades relativas

- Realizar la suma de los ángulos correspondientes a la masa dos de tal manera que tengamos un ángulo suplementario es decir la suma total sea igual a  $180^\circ$ , y así obtener la equivalencia de ángulo  $\alpha$ .

$$90 + \alpha + 90 - \theta_2 = 180$$

$$\alpha = \theta_2$$

- Aplicar ley de cosenos para determinar  $v_2'$ , una vez hallado el equivalente de  $\alpha$  en términos de ángulos conocidos la velocidad relativa del segundo eslabón queda en función de la velocidad 1 y el ángulo 2  $\theta_2$ :

$$v_2'^2 = v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2 \cos(180 - \theta_2)$$

$$v_2'^2 = v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2 \cos(\theta_2) \quad (2.29)$$

- Seleccionar las coordenadas generalizadas, éstas coordenadas son independientes y son necesarias para describir el movimiento del sistema, el número de variables depende de los grados de libertad que posea el sistema en este caso son dos por lo tanto se tiene  $\theta_1, \theta_2$ .

5. Seleccionar las coordenadas variacionales, éstas son las que colocan restricciones al sistema y debe permitir variaciones admisibles a lo largo del funcionamiento del mismo:  $\theta_1, \theta_2$ .
6. Calcular el Lagrangiano, co-energía y co-contenido, esto es necesario para obtener la energía cinética y potencial del sistema en una sola expresión que permita aplicar la Ecuación de Euler-Lagrange basado en términos de trabajo y energía, todas las acciones que no generen un trabajo no son consideradas para el sistema en éste método.

$$L = U^* - T, \quad J.$$

$U^*$  = co-energía relacionado directamente con la energía cinética de los componentes del sistema, éstos son elementos capacitivos en forma eléctrica y masas en forma mecánica, la energía cinética  $U^*$  es de todo el sistema por lo tanto compone la sumatoria de las energías cinéticas parciales de cada eslabón con masa propia.

$$E_c = U^* = \frac{1}{2}mv^2$$

$$U^* = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 \quad (2.30)$$

La expresión 2.31 relaciona la velocidad angular con la velocidad lineal donde

$v$  = velocidad lineal del eslabón

$w = \dot{\theta}$  = velocidad angular

$\theta$  = desplazamiento angular

$l$  = longitud de cada eslabón

$$v = wl \quad (2.31)$$

7. Reemplazar la expresión 2.31 en 2.30 para obtener una expresión en términos conocidos del sistema, éstos son  $m_n, l_n, \theta_n$ .

$$U^* = \frac{1}{2}m_1(l_1\dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2}m_2\left((l_1\dot{\theta}_1)^2 + (l_2\dot{\theta}_2)^2 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos\theta_2\right) \quad (2.32)$$

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{1}{2} kx^2 \\ J &= \frac{1}{2} Bv^2 \end{aligned} \right\} = 0$$

$$L = U^* - T \quad ; T = 0$$

$$L = U^*$$

No se encuentra elementos inductivos ni disipativos por lo que T y J son cero y el cálculo del Lagrangiano depende únicamente de la co-energía almacenada en dispositivos con efecto capacitivo como lo son cada eslabón del brazo robótico con dos grados de libertad ya que posee masas propias.

$$L = \frac{1}{2} m_1 (l_1 \dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left( (l_1 \dot{\theta}_1)^2 + (l_2 \dot{\theta}_2)^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \right) \quad (2.33)$$

8. Para cada coordenada variacional aplicar la Ecuación de Euler-Lagrange, el Lagrangiano L es sometido a derivación para cada variable que actúe en el sistema.

Para  $\theta_1$ :

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right] - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} + \frac{\partial J}{\partial \dot{\theta}_1} = \tau_1$$

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right] = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}_1} \left( \frac{1}{2} m_1 (l_1 \dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left( (l_1 \dot{\theta}_1)^2 + (l_2 \dot{\theta}_2)^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \right) \right) \right]$$

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right] = [m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 = \tau_1]$$

$$(m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 (\ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 - \dot{\theta}_2 \sin \theta_2) = \tau_1 \quad (2.34)$$

Para  $\theta_2$ :

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right] - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} + \frac{\partial J}{\partial \dot{\theta}_2} = \tau_2$$

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right] = \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} m_2 l_2^2 * 2 * \dot{\theta}_2 + \frac{1}{2} * m_2 * 2 * l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \right]$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = -\frac{1}{2} m_2 * 2 * l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2$$

$$m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \left( \ddot{\theta}_1 \cos \theta_2 - \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 \right) + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 = \tau_2 \quad (2.35)$$

Las ecuaciones (2.34) y (2.35) representa las ecuaciones diferenciales del sistema y se obtuvieron al derivar para cada coordenada variacional el lagrangiano obtenido de la sumatoria de energías que actúan sobre el sistema.

9. Modelo a variables de estado, considerando los parámetros del sistema y el modelo no lineal del sistema planteado.

La Ecuación establece el modelo dinámico inverso de un robot, dando los pares de fuerzas que deben proporcionar los actuadores para que las variables articulares sigan una determinada trayectoria  $\theta$ , donde:

$H(\theta)$  = matriz de inercias

$c(\theta, \dot{\theta})$  = matriz de aceleraciones centrífuga y de Coriolis

$g(\theta)$  = matriz de gravedad

$\tau$  = par o torque de torsión aplicado a cada eslabón

$$H(\theta) * \ddot{\theta} + c(\theta, \dot{\theta}) + g(\theta) = \tau$$

$$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

La Ecuación 2.36 se extrae a partir del modelo general dinámico de un robot.

$$\begin{aligned}
 h_{11}(\theta) &= (m_1 l_1^2 + m_2 l_1^2) \\
 h_{12}(\theta) &= m_2 l_1 l_2 \cos \theta_2 \\
 h_{21}(\theta) &= m_2 l_1 l_2 \cos \theta_2 \\
 h_{22}(\theta) &= m_2 l_2^2 \\
 c_{11}(\theta, \dot{\theta}) &= 0 \\
 c_{12}(\theta, \dot{\theta}) &= -m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \\
 c_{21}(\theta, \dot{\theta}) &= -m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 \\
 c_{22}(\theta, \dot{\theta}) &= m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 \\
 g_1(\theta) &= 0 \\
 g_2(\theta) &= 0
 \end{aligned}$$

De acuerdo a las ecuaciones que se deducen en 2.34 y 2.35 no se encuentran terminos independientes y la fuerza externa que actúa en el modelo simplificado del manipulador es el torque aplicado en cada unión del mismo .

Los elementos de las matrices que componen la expresión 2.36 se obtiene a partir de las ecuaciones diferenciales 2.34 y 2.35 de acuerdo a las variables relacionadas con cada matriz.

### 2.3.5. TUTORIAL 5: MODELO DE UNA GRÚA

1. Hallar el modelo de la Figura 2.14 que representa una grúa compuesta por un sistema masa resorte y un péndulo.

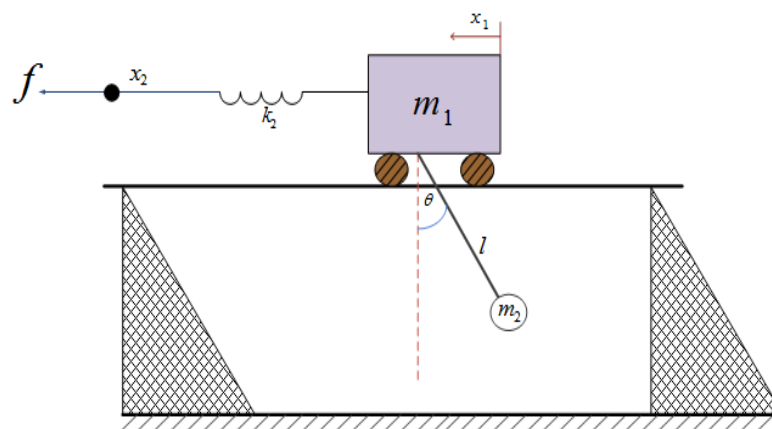


Figura 2.14 Modelo de una Grúa



2. Plantear el diagrama de velocidades relativas para determinar el equivalente de velocidad de la masa 2.

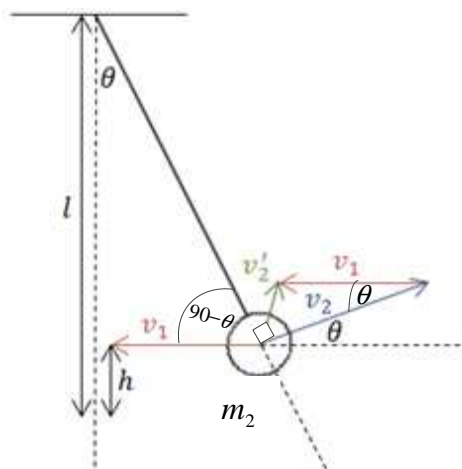


Figura 2.15 Velocidad relativa de los cuerpos

3. Aplicar ley de cosenos para determinar  $v_2'$ , en función de la velocidad 1, 2 y el ángulo  $\theta$ :

$$v_2'^2 = v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2 \cos \theta \quad (2.37)$$

4. Seleccionar las coordenadas generalizadas, éstas coordenadas son independientes y son necesarias para describir el movimiento del sistema, el número de variables depende de los grados de libertad que posea el sistema en este caso son dos por lo tanto se tiene  $x_1, x_2, \theta$ .
5. Seleccionar las coordenadas variacionales, éstas son las que colocan restricciones al sistema y debe permitir variaciones admisibles a lo largo del funcionamiento del mismo  $x_1, x_2, \theta$ .
6. Calcular  $L = U^* - T, J$ .

$$U^* = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

Se reemplaza el equivalente de la velocidad relativa 2, se considera la velocidad adquirida por la masa 1 lineal y la velocidad adquirida por el cuerpo 2 o masa 2 como velocidad angular a la cual se debe aplicar el equivalente  $v = \omega l$ , donde

$w = \dot{\theta}$  es la velocidad angular y  $l$  la longitud del cable al cual se encuentra sujeto la masa 2 .

$$U^* = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1)^2 + \frac{1}{2}m_2\left((\dot{x}_1)^2 + (l\dot{\theta})^2 + 2l\dot{x}_1\dot{\theta}\cos\theta\right) \quad (2.38)$$

7. Analizar la presencia de elementos disipativos y almacenadores de esfuerzo como lo son el rozamiento viscoso y los resortes respectivamente y aplicar las expresiones halladas para la aplicación en el método variacional deducidas al inicio del capítulo.

***T = energía potencial***

La energía potencial en una grúa se encuentra en el resorte y en el péndulo suspendido desde  $m_1$

$$T = \frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2 + m_2gl(1 - \cos\theta) \quad (2.39)$$

***J = energía proporcionada por elementos que produzcan rozamiento viscoso***

En éste caso no se desprecia el rozamiento producido por las llantas de la grúa al desplazarse de  $x_1$  a  $x_2$

$$J = \frac{1}{2}B\dot{x}_1^2 \quad (2.40)$$

8. Aplicar la Ecuación general para hallar el Lagrangiano y reemplazando las respectivas expresiones 2.38 y 2.39 en L.

$$L = U^* - T$$

$$L = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1)^2 + \frac{1}{2}m_2\left((\dot{x}_1)^2 + (l\dot{\theta})^2 + 2l\dot{x}_1\dot{\theta}\cos\theta\right) - \frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2 - m_2gl(1 - \cos\theta) \quad (2.41)$$

9. Para cada coordenada variacional aplicar la Ecuación (2.24) a partir de la Ecuación 2.41 y 2.40 según corresponda.

Para  $x_1$ :

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right] - \frac{\partial L}{\partial x_1} + \frac{\partial J}{\partial \dot{x}_1} = 0$$

$$(m_1 + m_2)\ddot{x}_1 + m_2 l (\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta} \sin \theta) - k_2(x_2 - x_1)(-1) + B\dot{x}_1 = 0$$

$$(m_1 + m_2)\ddot{x}_1 + m_2 l (\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta} \sin \theta) + k_2(x_2 - x_1) + B\dot{x}_1 = 0 \quad (2.42)$$

Para  $x_2$ :

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right] - \frac{\partial L}{\partial x_2} + \frac{\partial J}{\partial \dot{x}_2} = f$$

$$k_2(x_2 - x_1) = f \quad (2.43)$$

Para  $\theta$ :

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right] - \frac{\partial L}{\partial \theta} + \frac{\partial J}{\partial \dot{\theta}} = 0$$

$$m_2 l (\cos \theta) \ddot{x}_1 + m_2 l^2 \ddot{\theta} + \left( m_2 l \dot{\theta} \sin \theta - m_2 l \sin \theta \right) \dot{x}_1 - m_2 g l \sin \theta \quad (2.44)$$

10. Ecuaciones diferenciales del sistema se obtiene a partir de las ecuaciones 2.42, 2.43 y 2.44

$$\begin{cases} (m_1 + m_2)\ddot{x}_1 + m_2 l (\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta} \sin \theta) + k_2(x_2 - x_1) + B\dot{x}_1 = 0 \\ k_2(x_2 - x_1) = f \\ m_2 l (\cos \theta) \ddot{x}_1 + m_2 l^2 \ddot{\theta} + \left( m_2 l \dot{\theta} \sin \theta - m_2 l \sin \theta \right) \dot{x}_1 - m_2 g l \sin \theta \end{cases}$$

11. Ordenar los términos de las ecuaciones diferenciales en matrices de estado

$H(x_1, x_2, \theta)$  = matriz de inercias

$c(x_1, x_2, \theta, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{\theta})$  = matriz de aceleraciones centrífuga y de Coriolis

$g(x_1, x_2, \theta)$  = matriz de gravedad

$f$  = par o torque de torsión aplicado a cada eslabón

$$H(x_1, x_2, \theta) \ddot{x}_1 \ddot{\theta} + c(x_1, x_2, \theta, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{\theta}) + g(x_1, x_2, \theta) = f$$

$$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

12. La expresión 2.45 contiene los elementos de las ecuaciones diferenciales en forma ordenada de acuerdo a las variable que intervienen en cada matriz sea esta de inercia, aceleración o de gravedad, para obtener los componentes de cada matriz se observa las variables en cada Ecuación diferencial y se coloca únicamente los elementos que contienen las variables de estado en cada fila y columna.

$$\begin{aligned} h_{11} &= m_1 + m_2 & h_{23} &= 0 \\ h_{12} &= 0 & h_{31} &= m_2 l \cos \theta \\ h_{13} &= m_2 l \cos \theta & h_{32} &= 0 \\ h_{21} &= 0 & h_{33} &= m_2 l^2 \\ h_{22} &= 0 & & \\ c_{11} &= B & & \\ c_{12} &= 0 & & \\ c_{13} &= -m_2 l \dot{\theta} \sin \theta & c_{31} &= m_2 l \dot{\theta} \sin \theta - m_2 l \dot{\theta} \sin \theta \\ c_{21} &= 0 & c_{32} &= 0 \\ c_{22} &= 0 & c_{33} &= m_2 l \dot{x}_1 \sin \theta \\ c_{23} &= 0 & & \\ g_{11} &= -k & g_{31} &= 0 \\ g_{12} &= k & g_{32} &= 0 \\ g_{13} &= 0 & g_{33} &= -m_2 g \sin \theta \\ g_{21} &= -k & & \\ g_{22} &= k & & \\ g_{23} &= 0 & & \end{aligned}$$

## 2.4. MODELO DE PROCESOS SISTEMAS DE FLUIDOS

Para la modelación de procesos con sistemas de fluidos se puede utilizar un equivalente eléctrico considerando la semejanza de cada uno de los elementos que intervienen en el proceso con elementos eléctricos, similar al método de redes utilizado en tutoriales anteriores.

Se analiza los componentes de sistemas de fluidos considerando la presión y el caudal como variables de esfuerzo y flujo respectivamente.

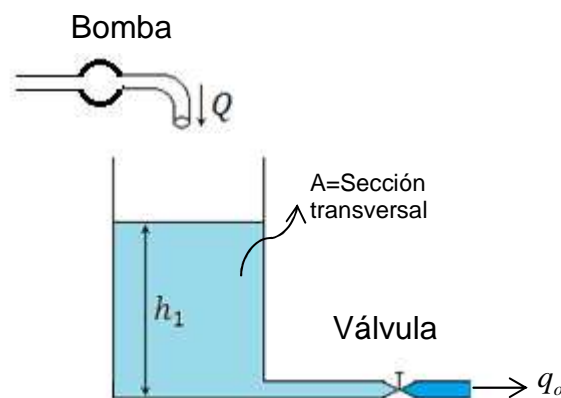


Figura 2. 16 Sistemas de fluidos

Un sistema de fluidos está compuesto por elementos lineales y no lineales además de elementos capacitivos e inductivos.

Se toma como referencia un tanque de sección transversal constante, con las siguientes características.

$$v = \text{volumen} = \int Q dt = f_a$$

$$v = C_f * P = C_f \rho h$$

$C_f$  = capacidad del fluido

$P$  = Presión de almacenamiento

$\rho$  = densidad del fluido generalmente agua ( $\rho = 1$ )

$h$  = altura del fluido en el tanque contenedor

$$v = A \cdot h = C_f \rho h \implies C_f = \frac{v}{\rho} \quad (2.46)$$

En la Ecuación (2.46) se calcula la capacidad del fluido de acuerdo a la sección transversal del tanque y a la especificación del fluido. [6]

### TUBERÍAS LARGAS Y DELGADAS

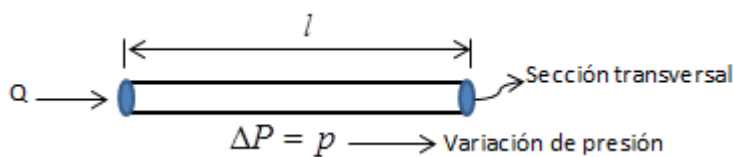


Figura 2. 17 Tuberías largas y delgadas

$$\gamma = \text{momentum} = \int p^* dt = e_a \therefore \text{Acumulación de esfuerzo}$$

$$\int \frac{F}{A} dt = \int \frac{ma}{A} dt$$

$$m = \delta \cdot V = \delta \cdot A \cdot l$$

$$\gamma = \int \frac{\delta A}{A} l \cdot \frac{dv}{dt} \cdot dt$$

$$\delta \cdot l \cdot v = Q \cdot L_f \quad (2.47)$$

$$L_f = \frac{\delta \cdot l \cdot v}{A \cdot v}$$

$$Q = \frac{dv}{dt} = A \frac{dl}{dt} = Av \quad (2.48)$$

$$L_f = \frac{\rho \cdot l}{A} \quad (2.49)$$

La Ecuación (2.49) representa el efecto inductivo en una tubería, el mismo que se simboliza por  $L_f$ , el componente inductivo es significativo si la tubería es de gran tamaño y su sección transversal es pequeña.

Además de los elementos capacitivos e inductivos se tiene elementos disipativos que dependen de la superficie por donde atravesará el flujo sea éste por superficies porosas, por orificios o válvulas.

En sistemas de fluidos los elementos con características capacitivas lo componen los tanques de almacenamiento y las tuberías tienen características inductivas.



Figura 2. 17 Flujo Turbulento

La Figura 2.17 representa un flujo turbulento, el mismo que arroja variables no lineales que deben ser linealizadas para poder obtener las variables de estado del sistema y la función de transferencia.

$$Q = k\sqrt{P}$$

$$Q = k_v\sqrt{h} \quad (2.50)$$

La expresión 2.50 representa el caudal de una válvula para lo cual es necesario determinar la resistencia de la válvula  $k_v$ , linealizar la expresión encontrada. Las variables de estado comunes para éste tipo de procesos son la altura (h), el caudal (Q) y la resistencia al flujo (R).

Tabla 1.3 Analogías hidráulicas y eléctricas

| Elemento hidráulico |                      | Elemento eléctrico |                         |
|---------------------|----------------------|--------------------|-------------------------|
| Símbolo             | Cantidad             | Símbolo            | Cantidad                |
| $q_i$               | Caudal de entrada    | $i_i$              | Fuente de corriente     |
| $h$                 | Altura               | $v_c$              | Voltaje del condensador |
| $A$                 | Área de depósito     | $C$                | Capacitancia            |
| $R$                 | Resistencia al flujo | $R$                | Resistencia             |

La tabla 1.3 contiene las equivalencias entre elementos hidráulicos y elementos eléctricos, los mismos que son útiles al momento de transformar un sistema de fluidos a un circuito eléctrico para facilitar la solución del sistema.

#### 2.4.1. TUTORIAL 6: SISTEMA DE TANQUES ACOPLADOS

Se plantea un sistema de nivel de líquidos formado por dos tanques acoplados con alturas diferentes y cuyo caudal depende de la apertura de cada una de las válvulas.

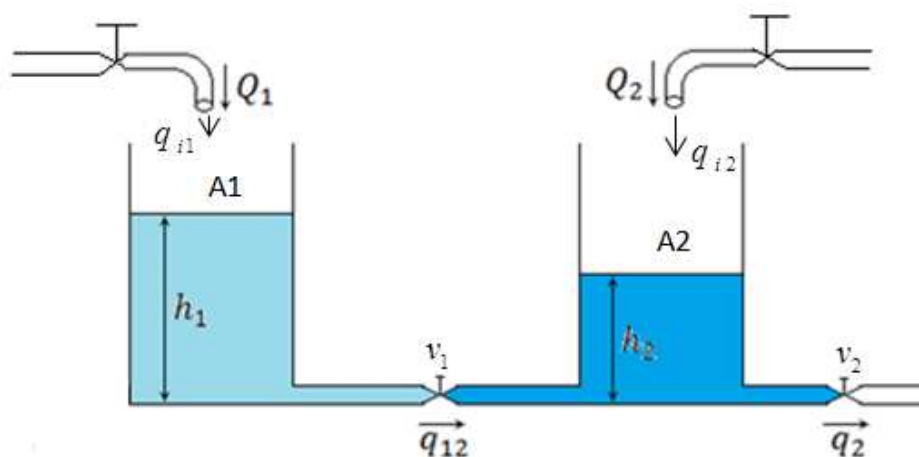


Figura 2. 18 Tanques de almacenamiento de fluidos

Para el sistema se considera dos válvulas que actúan en el proceso  $v_1$ ,  $v_2$  así como el porcentaje de apertura de cada una de ellas representado por  $x_1$ ,  $x_2$  respectivamente y el caudal en cada tanque  $Q_1$  y  $Q_2$ . La modelación de éste proceso se realiza en los siguientes pasos.

1. Plantear las ecuaciones del sistema considerando las restricciones de cada uno de los tanques, como la diferencia de alturas y su repercusión en el caudal, partiendo de la expresión (2.48) y considerando el caudal entrante y saliente del tanque con características  $A_1, h_1$ . Se utiliza el valor de la diferencia de alturas para determinar el sentido del caudal. Se puede utilizar un equivalente de red con alturas como nodos si el sistema resulta complejo para modelarlo directamente.



Se considera  $h_1 > h_2$  para facilitar el desarrollo del proceso y la obtención de las variables de estado del sistema.

$$\begin{aligned} Q_1 &= q_{i1} - q_{12} \\ A_1 \cdot \frac{dh_1}{dt} &= q_{i1} - q_{12} \end{aligned} \quad (2.51)$$

2. Plantear las ecuaciones necesarias para el tanque con características  $A_2, h_2$ , en forma general la suma de los caudales depende del sentido de los mismos, sea éste entrante o saliente, se realiza una similitud con las corrientes de un circuito eléctrico al asumir el sentido y el signo de la corriente, por ejemplo  $q_{12}$  ingresa al tanque dos por medio de la válvula  $v_2$ , por cuanto se asume un signo positivo para la expresión (2.52), si el caudal se encuentra saliendo, el signo será negativo.

$$\begin{aligned} Q_2 &= q_{i2} + q_{12} - q_2 \\ A_2 \cdot \frac{dh_2}{dt} &= q_{i2} + q_{12} - q_2 \end{aligned} \quad (2.52)$$

3. Seleccionar las ecuaciones, variables de entrada y salida del sistema

$$q_{12} = K_1 \cdot x_1 \cdot \sqrt{(h_1 - h_2)} \quad (2.53)$$

$$q_2 = K_2 \cdot x_2 \cdot \sqrt{h_2} \quad (2.54)$$

Ecuaciones del sistema: 4 ecuaciones

Variables del sistema  $\{h_1, h_2, q_{i1}, q_{i2}, q_{12}, q_2, x_1, x_2\}$

Variables de entrada:  $\{q_{i1}, q_{i2}, x_1, x_2\}$

Variables de salida:  $q_2$

Variables de estado:  $\{h_1, h_2\}$

4. Linealizar el sistema hallando el punto de equilibrio y utilizando las 4 ecuaciones encontradas anteriormente, tomando como referencia (2.51), (2.52), (2.52) y (2.54) se resuelve el sistema de ecuaciones en el punto de equilibrio:

$$q_{120} = q_{i10} \quad (2.55)$$

$$q_{120} = K_1 \cdot x_{10} \cdot \sqrt{h_{10} - h_{20}} \quad (2.56)$$

$$q_{20} = q_{120} + q_{i20} \quad (2.57)$$

$$q_{20} = K_2 \cdot x_{20} \cdot \sqrt{h_{20}} \quad (2.58)$$

Se coloca un subíndice cero para identificar los parámetros relacionados con condiciones iniciales.

5. Al realizar la linealización de las ecuaciones se verifica el punto de equilibrio, donde  $h_{10} \geq h_{20}$ , partiendo de la Ecuación (2.57) y (2.58).

$$q_{20} = q_{i10} + q_{i20}$$

$$q_{20} = K_2 \cdot x_{20} \cdot \sqrt{h_{20}}$$

$$q_{i10} + q_{i20} = K_2 \cdot x_{20} \cdot \sqrt{h_{20}}$$

$$h_{20} = \left( \frac{q_{i10} + q_{i20}}{k_2 x_{20}} \right)^2 \quad (2.59)$$

6. Relación entre (2.55), (2.56) y (2.59) para obtener  $h_{10}$  en función de parámetros de entrada.

$$K_1 \cdot x_{10} \cdot \sqrt{h_{10} - h_{20}} = q_{i10}$$

$$h_{10} = \frac{(q_{i10})^2 + (k_1 x_{10})^2 \cdot h_{20}}{(k_1 x_{10})^2}$$

$$h_{10} = \left( \frac{q_{i10} + q_{i20}}{k_2 x_{20}} \right)^2 + \left( \frac{q_{i10}}{k_1 x_{10}} \right)^2 \quad (2.60)$$

7. Aplicando criterios de linealización y considerando a las variables lineales como formas incrementales se considera las siguientes ecuaciones partiendo de (2.53) y (2.54).

$$\Delta q_{12} = k_1 \sqrt{h_{10} - h_{20}} \cdot \Delta x_1 + \frac{k_1 x_{10}}{2\sqrt{h_{10} - h_{20}}} \cdot (\Delta h_1 - \Delta h_2) \quad (2.61)$$

$$\Delta q_2 = k_2 \sqrt{h_{20}} \cdot \Delta x_2 + \frac{k_2 x_{20}}{2\sqrt{h_{20}}} \Delta h_2$$

8. Hallar las variables de estado utilizando las ecuaciones linealizadas.

De (2.51) y (2.61) se encuentra  $\frac{dh_1}{dt}$

$$A_1 \cdot \frac{dh_1}{dt} = q_{i1} - q_{12}$$

$$\frac{dh_1}{dt} = \frac{q_{i1}}{A_1} - \frac{q_{12}}{A_1}$$

$$\frac{dh_1}{dt} = -\frac{k_1 x_{10}}{2A_1 \sqrt{h_{10} - h_{20}}} \Delta h_1 + \frac{k_1 x_{10}}{2A_1 \sqrt{h_{10} - h_{20}}} \Delta h_2 + \frac{1}{A_1} q_{i1} - \frac{k_1 \sqrt{h_{10} - h_{20}}}{A_1} \Delta x_1 \quad (2.62)$$

De (2.52) y (2.61) se tiene  $\frac{dh_2}{dt}$

$$\frac{dh_2}{dt} = \frac{q_{12}}{A_2} + \frac{q_{i2}}{A_2} - \frac{q_2}{A_2}$$

$$\frac{dh_2}{dt} = \frac{k_1 \sqrt{h_{10} - h_{20}}}{A_2} \Delta x_1 + \frac{k_1 x_{10}}{2A_2 \sqrt{h_{10} - h_{20}}} \Delta h_1 - \frac{k_1 x_{10}}{2A_2 \sqrt{h_{10} - h_{20}}} \Delta h_2 + \frac{1}{A_2} q_{i2} - \frac{k_2 \sqrt{h_{20}}}{A_2} \Delta x_2 + \frac{k_2 x_{20}}{2A_2 \sqrt{h_{20}}} \Delta h_2 \quad (2.63)$$

9. Según las Ecuaciones (2.62) y (2.63), se tiene las variables de estado linealizadas.

$$\begin{pmatrix} \frac{d\Delta h_1}{dt} \\ \frac{d\Delta h_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{k_1 x_{10}}{2A_1 \sqrt{h_{10} - h_{20}}} & \frac{k_1 x_{10}}{2A_1 \sqrt{h_{10} - h_{20}}} \\ \frac{k_1 x_{10}}{2A_2 \sqrt{h_{10} - h_{20}}} & \left( -\frac{k_1 x_{10}}{2A_2 \sqrt{h_{10} - h_{20}}} + \frac{k_2 x_{20}}{2A_2 \sqrt{h_{20}}} \right) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta h_1 \\ \Delta h_2 \end{pmatrix} + B$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{A_1} & 0 & -\frac{k_1 \sqrt{h_{10} - h_{20}}}{A_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{A_2} & \frac{k_1 \sqrt{h_{10} - h_{20}}}{A_2} & -\frac{k_2 \sqrt{h_{20}}}{A_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_{i1} \\ q_{i2} \\ \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix} \quad (2.64)$$

$$\Delta q_2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{k_2 x_{20}}{2\sqrt{h_{20}}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta h_1 \\ \Delta h_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & k_2 \sqrt{h_{20}} \end{pmatrix} \Delta x_2 \cdot \begin{pmatrix} \Delta q_{i1} \\ \Delta q_{i2} \\ \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix} \quad (2.65)$$

Al obtener las variables de estado del sistema en las Ecuaciones (2.64) y (2.65), se visualiza claramente la relación directa entre la apertura de la válvula de salida y la variación del caudal  $q_2$ .

## 2.5. IDENTIFICACIÓN DE SISTEMAS EN EL DOMINIO DEL TIEMPO

Se utiliza la curva de reacción para obtener el valor en estado estable del sistema, éste valor se obtiene al realizar varias mediciones del proceso y realizar una curva con los valores de entrada y salida a lo largo del tiempo.

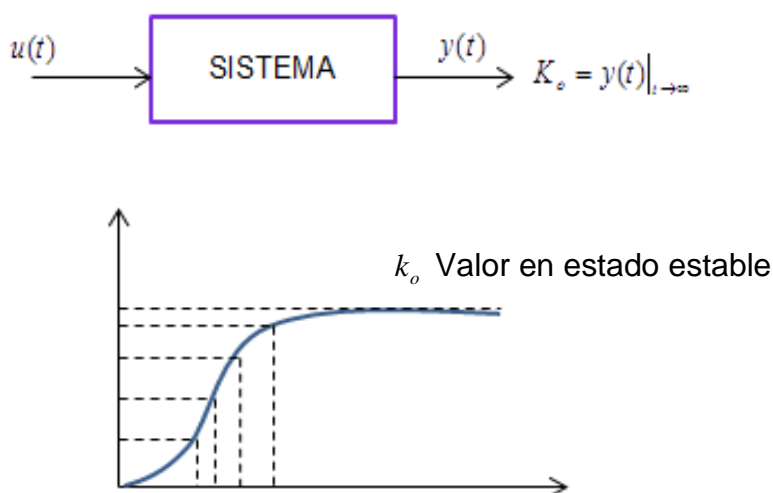


Figura 2.19 Sistema estable o Curva de Reacción

$$y(t) = k_0 + k_1 e^{-t/\tau_1} + k_2 e^{-t/\tau_2} + k_3 e^{-t/\tau_3} + \dots \quad (2.66)$$

Se aplica dominancia de polos para reducir la expresión 2.68 y aproximar a una Ecuación de una recta, para realizar dicho análisis se entiende por dominancia de polos de lazo cerrado a la relación entre las partes reales de dichos polos. Si las relaciones de polos exceden de cinco y no hay ceros cercanos, los polos de lazo cerrado más cercanos al eje  $j\omega$  dominan la respuesta transitoria y a estos se los conoce como polos dominantes.

Si alguna constante de tiempo  $\tau_1$  es dominante, para tiempos grandes los términos de la Ecuación (2.66) que tienen las constantes de tiempo pequeñas

tienden a cero, mientras que el término de la constante de tiempo grande continúa siendo diferente de cero entonces la Ecuación 2.67 se aproxima a:

$$c(t) - A = k_1 e^{-t/\tau_1} \quad (2.67)$$

$$y(t) = k_0 + k_1 e^{-t/\tau_1}$$

$$|y(t) - k_0| = k_1 e^{-t/\tau_1}$$

$$\ln|y(t) - k_0| = \ln k_1 e^{-t/\tau_1}$$

$$\ln|y(t) - k_0| = \ln k_1 - \frac{t}{\tau_1}$$

$$y = b_0 + mt \quad (2.68)$$

Con la expresión (2.68) se obtiene la Ecuación de la recta y se calcula  $k_1, \tau_1$  iteraciones para calcular  $k_2, \tau_2$  hasta llegar a la mejor aproximación para validar el modelo. [7]

### 2.5.1. TUTORIAL 7: SISTEMA DE SEGUNDO ORDEN

El siguiente tutorial muestra el método de identificación en el dominio del tiempo con un ejemplo práctico en el que se requiere datos del tiempo y la señal de salida, así como los valores en estado estable del sistema, para ello se requiere obtener la función de transferencia y realizar la validación del modelo.

Tabla 1.4 Datos en el dominio del tiempo

| $t$        | $y(t)$   |
|------------|----------|
| <b>0</b>   | <b>0</b> |
| <b>0.5</b> | 0.16     |
| <b>1.0</b> | 0.40     |
| <b>1.5</b> | 0.60     |
| <b>2</b>   | 0.75     |
| <b>2.5</b> | 0.84     |
| <b>3.0</b> | 0.90     |
| <b>3.5</b> | 0.94     |
| <b>4.0</b> | 0.96     |
| <b>4.5</b> | 0.98     |
| <b>5</b>   | 1        |

1. Ingresar los valores de  $y(t)$  y  $t$  en forma matricial en Matlab considerando la transpuesta de cada una para formar la matriz *datos*.

```
>> t= [0 0.5 1 1.5 2 2.5 3 3.5 4 4.5 5]';
>> y= [0 0.16 0.4 0.6 0.75 0.84 0.9 0.94 0.96 0.98 1]';
>> datos= [t y]
```

2. Ingresar el valor de  $k_0$  y asignar una variable arbitraria al valor absoluto de los valores de salida.

```
>> k0=1;
>> y2=abs (y-1);    en forma general es el valor de  $y - k_0$ 
>> semilogy(t,y2,'b*');
>> grid
```

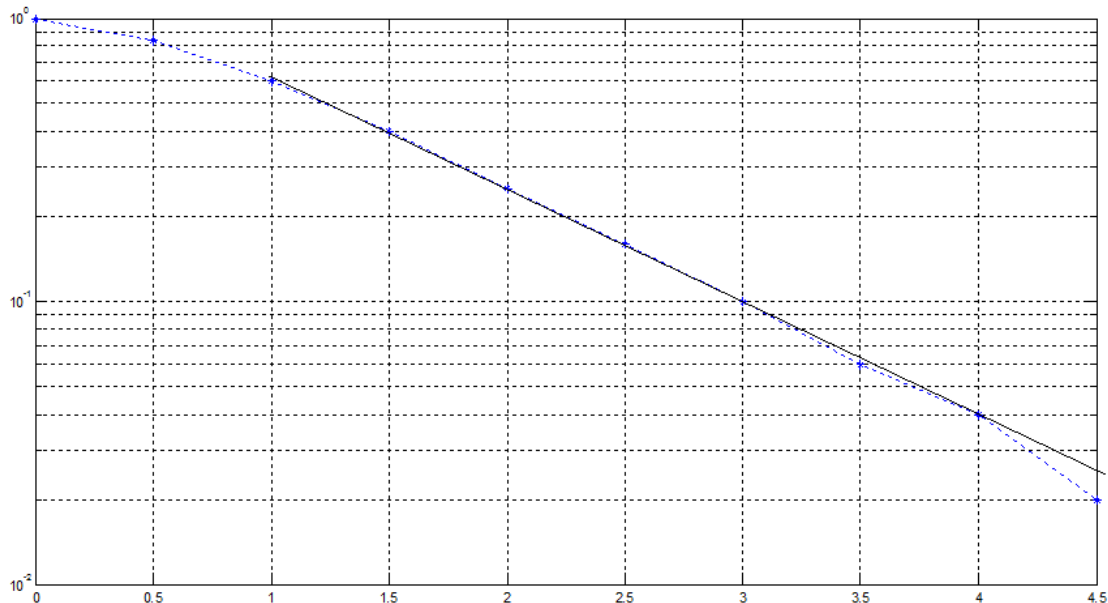


Figura 2.20 Primera aproximación

3. Utilizar los puntos del 4 al 9 de izquierda a derecha para trazar los puntos más cercanos a la recta como se observa en la Figura 2.20
4. Según la Ecuación (2.66) y aplicando el logaritmo natural de la expresión se obtiene:

$$\ln|y(t) - k_0| = \ln(k_1) - \frac{t}{\tau_1} \quad \rightarrow \quad y(t) = b_0 + m t$$

5. Para obtener la primera aproximación de la recta se introduce en Matlab los puntos del 4 al 9 y se aplica la función polyfit para obtener los coeficientes de la Ecuación de la recta.

- El comando polyfit calcula los coeficientes de un polinomio de grado “n”, mediante mínimos cuadrados, a una serie de datos, en términos generales:

$$yy = \text{polyfit}(x, y, \text{orden})$$

$x$  = Abscisa de los puntos a interpolar, expresada como vector fila.

$y$  = Ordenada de los puntos a interpolar, expresada como vector fila.

$\text{orden}$  = Indica el orden del polinomio que se utilizará en el ajuste.

```
>> y1=log(y2);
```

```
>> y0=y1(4:9);
```

```
>> t0=t(4:9);
```

```
>> p=polyfit(t0, y0, 1)
```

Al aplicar la función polyfit se obtiene los valores de la recta  $y(t) = b_0 + m t$

p =

```
-0.9294  0.4775
```

6. Estos son los valores que se reemplazan en la Ecuación de primer orden:

$$y = b_0 + m t$$

$$b_0 = 0.4775$$

$$m = -0.9294$$

$$y = -0.9294 t + 0.4775$$

7. Reemplazar los valores obtenidos en la Ecuación (2.68) para obtener el valor de  $\tau_1$ .

$$k_1 = e^{b_0} = e^{0.4775} = 1.612$$

$$\tau_1 = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{-0.9294} = 1.076$$

8. El signo de  $k_1$  es la diferencia de  $(y - t_{es})$ : signo negativo. Por lo que la primera aproximación a la función de la planta nos queda:

$$y(t) = k_0 - k_1 e^{-t/\tau_1} \quad (2.69)$$

$$y(t) = 1 - 1.162 e^{-t/1.076}$$

9. Para la segunda aproximación se tiene la expresión (2.70).

$$|y(t) - k_0 - k_1 e^{-t/\tau_1}| = k_2 e^{-t/\tau_2} \quad (2.70)$$

10. Se coloca las instrucciones necesarias para introducir los valores obtenidos de

```

k1 y τ1.
>> k1=-1.162;
>> ta1=1.076;
>> y_1=k1*exp(-t/ta1);
>> y3=abs(y-1+y_1);
>> semilogy(t,abs(y3),'b*:')

```

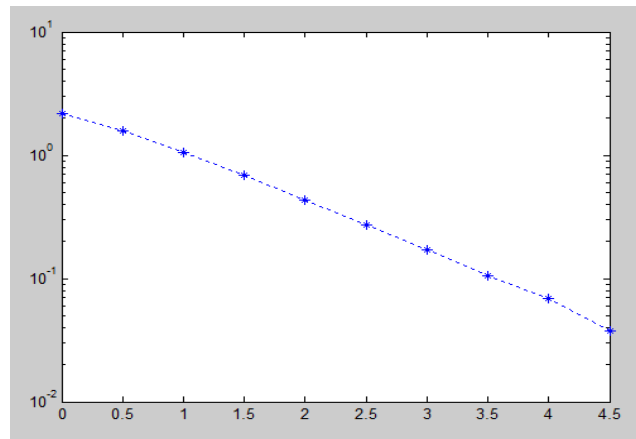


Figura 2. 21 Sistema con primera iteración

11. Colocar una recta en los puntos más próximos de la primera iteración para formar una nueva recta e ir descartando los valores lejanos de la función.

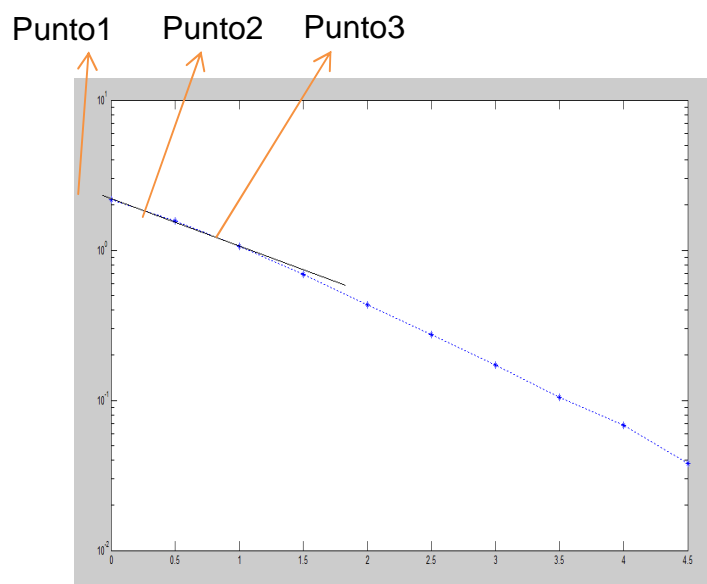


Figura 2. 22 Aproximación segunda recta



12. Repetir el paso número 5 ,6 y 7 para obtener el valor de los parámetros de la recta y el valor de  $\tau_2$  .

```
>> y4=log(abs(y-k0+1.162*exp(-t/1.076)));
>> yo1=y4(1:3);
>> to1=t(1:3);
>> p1=polyfit(to1,yo1,1)
```

p1 =

-2.8215 -0.4422

Estos son los valores que se reemplazan en la Ecuación de primer orden:

$$y = bo + mt$$

$$bo = -0.4422$$

$$m = -2.8215$$

Donde:

$$k_2 = e^{bo} = e^{-0.4422} = 0.6426 \qquad \tau_2 = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{-2.8215} = 0.3544$$

13. Obtener la expresión de la salida con la segunda aproximación, la cual queda reflejada en la Ecuación (2.68).

$$y(t) = 1 - 1.162 e^{-\frac{t}{1.076}} + 0.6426 e^{-t/0.3544} \quad (2.71)$$

14. Repetir el procedimiento las veces que sea necesario para obtener la mejor aproximación al valor real de la recta. En este caso ya no hay más puntos para la interpolación.

15. Para obtener la función de transferencia se utiliza el comando syms y se transforma la expresión (2.71) al dominio de "s", se multiplica el valor de la función de transferencia por "s" para obtener una expresión manejable para el análisis de polos y ceros.

```
>> g=y3*s
```

Transfer function:

38250 s<sup>3</sup> - 2.504e005 s<sup>2</sup> + 3.278e006 s

-----

1.25e006 s<sup>3</sup> + 4.689e006 s<sup>2</sup> + 3.278e006 s

16. Validación del modelo obtenido para verificar el funcionamiento adecuado del sistema.

```
>> t= [0 0.5 1 1.5 2 2.5 3 3.5 4 4.5 5]';
>> y= [0 0.16 0.4 0.6 0.75 0.84 0.9 0.94 0.96 0.98 1]';
>> step(g,8)
>> hold on
>> plot(t,y,'b*:')
```

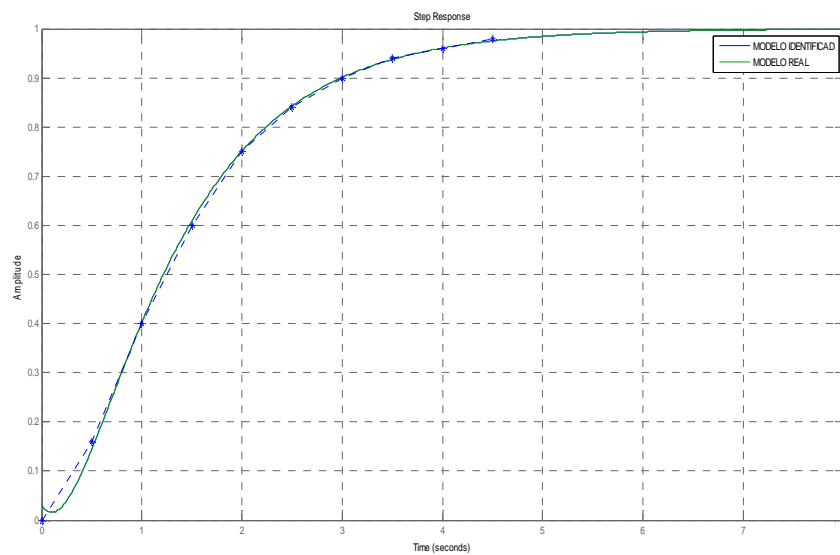


Figura 2. 23 Validación del modelo

Se verifica la trayectoria del modelo identificado, con lo que se espera un funcionamiento similar al sistema original. El modelo identificado presenta dos puntos que no coinciden con el modelo real, esto es consecuencia de los datos experimentales que presentan desviación del sistema, el modelo identificado elimina los puntos que no coinciden en la generación de trayectorias por lo que su gráfica es clara y sin variaciones de mediciones.

## 2.6. IDENTIFICACIÓN DE SISTEMAS EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA.

La identificación en el dominio de la frecuencia consiste en identificar los puntos más próximos a la fase, con el cual se vuelve estable el sistema para facilitar el entendimiento de este tema se plantea un ejemplo práctico con los valores de magnitud y fase para realizar la identificación.

Tabla 1.5 Datos en el dominio de la frecuencia

| $w$         | $ GH(jw) _{db}$ | $\angle GH(jw)^\circ$ |
|-------------|-----------------|-----------------------|
| <b>0.01</b> | 6.02            | -0.68                 |
| <b>0.05</b> | 6.01            | -3.43                 |
| <b>0.1</b>  | 5.97            | -6.86                 |
| <b>0.5</b>  | 5.00            | -32.27                |
| <b>1.62</b> | 0               | -76.26                |
| <b>2</b>    | -1.61           | -85.28                |
| <b>3</b>    | -5.31           | -102.52               |
| <b>5</b>    | -11.13          | -123.69               |
| <b>8</b>    | -17.62          | -140.86               |
| <b>10</b>   | -21.01          | -147.72               |
| <b>50</b>   | -48             | -173.14               |

### 2.6.1. TUTORIAL 8: SISTEMA DE SEGUNDO ORDEN EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA.

1. Ingresar los valores de frecuencia y magnitud para obtener matrices y formar una matriz ordenada llamada *datos*.

```
>> w=[0.01 0.05 0.1 0.5 1.62 2 3 5 8 10 50]';
```

```
>> gh_m=[6.02 6.01 5.97 5 0 -1.61 -5.31 -11.13 -17.62 -21.01 -48]';
```

```
>> datos=[w gh_m ]
```

2. Obtener la gráfica correspondiente del sistema formada por las matrices  $w$ ,  $gh$ , obteniendo los puntos de la frecuencia de corte en  $-3dB$  con los que se calcula las constantes de tiempo  $\tau_1$  y  $\tau_2$ , el número de constantes que intervienen en la identificación por frecuencia depende del orden del sistema, esto se obtiene a partir del cruce de frecuencia  $-20dB/dec$  y  $-40dB/dec$

```
>> semilogx(w,gh_m,'b*:')
```

```
>> grid
```

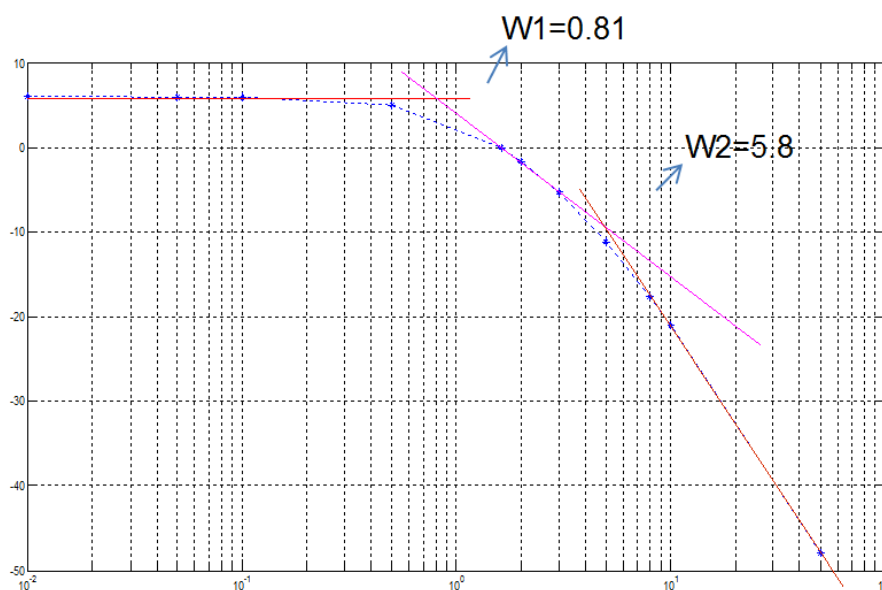


Figura 2. 24 Puntos de corte en frecuencia

$w_1$  = frecuencia de corte 1

$w_2$  = frecuencia de corte 2

3. Aplicar dominancia de polos para obtener la función de transferencia con la Ecuación (2.72).

$$G(jw) = \frac{k}{(jw\tau_1 + 1)(jw\tau_2 + 1)} \quad (2.72)$$

Con la expresión (2.72) se obtiene el valor de  $\tau_1$  y  $\tau_2$  de acuerdo a la expresión (2.73);

$$k = \text{antilog}\left(\frac{M}{20}\right) = 10^{\frac{M}{20}} \longrightarrow \text{A baja frecuencia}$$

$$\tau_1 = \frac{1}{w_1}; \quad \tau_2 = \frac{1}{w_2} \quad (2.73)$$

4. Ingresar los valores en Matlab tanto de la frecuencia como de las constantes de tiempo obtenido para  $\tau_1$  y  $\tau_2$ , además del valor de la magnitud; y según la expresión (2.72) obtener la función de transferencia reemplazando los valores de cada uno de los parámetros.

```
>> w1=0.81;
>> w2=5.8;
>> tao1=1/w1
tao1 =
    1.2346
>> tao2=1/w2
tao2 =
    0.1724
>> M=6.02;
>> k=10^(M/20);
>> s=tf('s');
>> g=k/((tao1*s+1)*(tao2*s+1))
```

$$g = \frac{2}{0.2129s^2 + 1.407s + 1} \quad (2.74)$$

La Ecuación (2.74) representa la función de transferencia de un sistema de segundo orden, en el dominio de "s".

5. Validación del modelo obteniendo la respuesta en magnitud del sistema

```
>> bodemag(g)
>> hold on
>> semilogx(w,gh_m,'g*:')
```

```
>> grid
>> legend('Modelo Identificado','Modelo Real')
```

La Figura 2.25 muestra el sistema original y el identificado transpuestos, en el que el modelo identificado sigue la trayectoria del modelo real obtenido con las mediciones experimentales.

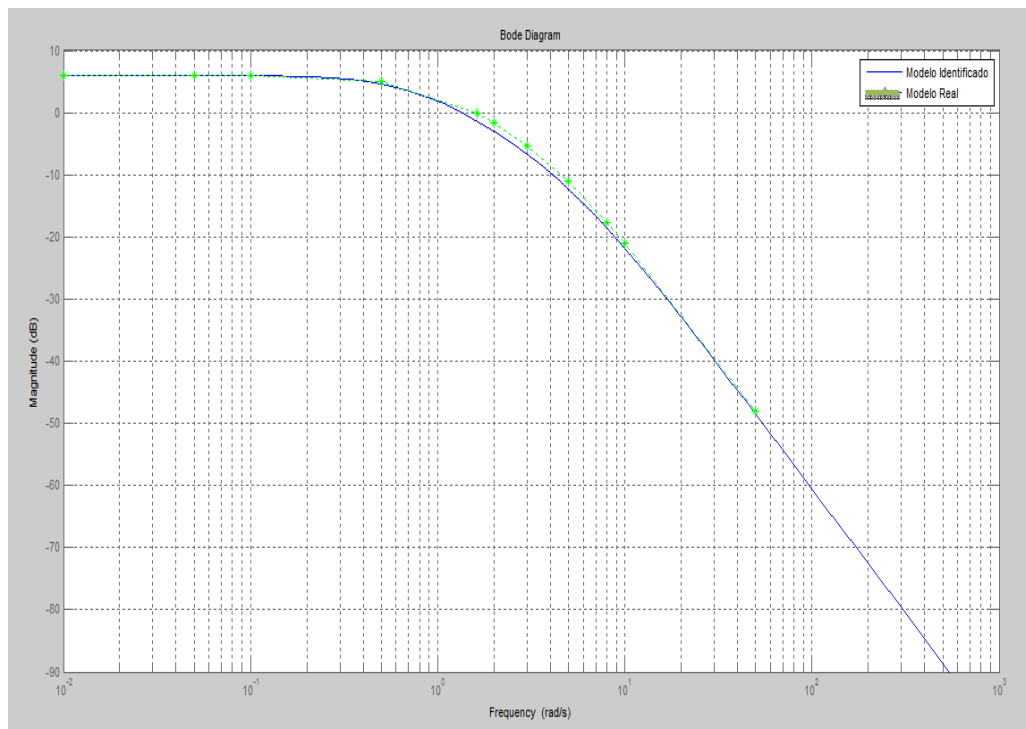


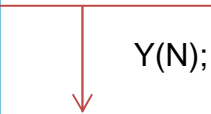
Figura 2. 25 Validación en magnitud del modelo

## 2.7. IDENTIFICACIÓN DE SISTEMAS POR EL MÉTODO DE MÍNIMOS CUADRADOS ORDINARIOS (MCO).

Para la identificación usando MCO se utiliza mediciones de entrada y salida de un sistema con los cuales se forma la matriz X y vector Y. La entrada debe ser una señal de excitación persistente, en este caso se utiliza una Pseudo Random Binary Signal (PRBS).

Tabla 1.6 Pseudo Random Binary Signal

| $K$ | $u(k)$ | $Y(k)$ |
|-----|--------|--------|
| 0   | 1      | 0.0    |
| 1   | -1     | 1.2    |
| 2   | -1     | -0.24  |
| 3   | 1      | -1.39  |
| 4   | -1     | 0.086  |
| 5   | 1      | -1.13  |


  
 $Y(N); K=1$

### 2.7.1. TUTORIAL 9: IDENTIFICACIÓN USANDO MCO

1. Utilizar los valores de entrada y salida de la tabla 1.6 y formar las matrices X y Y las cuales descartan la primera medición de la tabla.

Para formar la matriz X se toma los valores de salida para la primera columna y la entrada para la segunda, sin olvidar descartar la última medición.

La matriz Y se forma con los valores de salida del sistema descartando la primera medición.

$$X = \begin{bmatrix} 1.2 & -1 \\ -0.24 & -1 \\ -1.39 & 1 \\ 0.086 & -1 \end{bmatrix} \quad X^T = \begin{bmatrix} 0 & 1.2 & -0.24 & -1.39 & 0.086 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} 1.2 \\ -0.24 \\ -1.39 \\ 0.086 \\ -1.13 \end{bmatrix} \quad (2.75)$$

2. Al formar la matriz  $X'$  se obtiene la expresión  $X^T * X$

$$X^T * X = \begin{bmatrix} 0.4444 & 0.2165 \\ 0.2165 & 0.3055 \end{bmatrix} \quad (2.76)$$

3. Finalmente reemplazar las expresiones anteriores para obtener  $\theta$  de acuerdo a la Ecuación 1.2 la cual se deduce en el capítulo 1.

$$\hat{\theta}(N) = [X^T(N) * X(N)]^{-1} * X^T(N)Y(N) \quad (2.77)$$

$$\hat{\theta} = \begin{bmatrix} 0.4444 & 0.2165 \\ 0.2165 & 0.3055 \end{bmatrix}^{-1} * \begin{bmatrix} 0 & 1.2 & -0.24 & -1.39 & 0.086 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1.2 \\ -0.24 \\ -1.39 \\ 0.086 \\ -1.13 \end{bmatrix}$$

4. Se obtiene los valores del sistema de primer orden, el orden del sistema se obtiene a partir del número de columnas que se forme para  $\theta$ .

$$\hat{\theta} = \begin{bmatrix} 0.7999 \\ 1.1989 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} \quad (2.78)$$



## CAPÍTULO 3

### DESARROLLO DE ESTUDIO DE CASOS

Se plantea 5 casos de estudio, la modelación del Robotino, helicóptero con dos grados de libertad, identificación en tiempo de un tramo de oleoducto, brazo robótico con dos grados de libertad considerando los momentos de inercia y la modelación de un reactor químico de agitación continua, los mismos que se resuelven con el método adecuado de acuerdo a las condiciones del entorno.

El enfoque presentado en los casos de estudio abarca ámbitos de robótica, procesos y demás áreas de interés en la Escuela Politécnica Nacional, la identificación y modelación de robots facilita el planteamiento de soluciones en el control, además permite realizar pruebas en dicho modelo antes de ser implementado mediante la simulación, lo que genera investigación y disminución de recursos al momento de colocar controladores, actuadores y demás puesto que ya se conoce el comportamiento del sistema.

La modelación se hace necesaria para conocer el comportamiento de un sistema en determinadas condiciones y ante unas determinadas entradas, se puede recurrir a la experimentación sobre dicho sistema y a la observación de sus salidas. Sin embargo, en muchos casos la experimentación puede resultar compleja o incluso imposible de llevar a cabo, lo que hace necesario trabajar con algún tipo de representación que se aproxime a la realidad. [8]



Figura 3.1 Modelos físicos de robots y vehículos

## **3.1. ROBOTINO ®**

### **3.1.1. DISEÑO Y FUNCIÓN**

Robotino® es un sistema de robot móvil de alta calidad, plenamente funcional con accionamiento omnidireccional. Las tres unidades de accionamiento permiten realizar movimientos en todas direcciones adelante, atrás y lateralmente. Además, el robot también puede girar sobre un punto. También está equipado con una webcam y varios tipos de sensores analógicos para medición de distancias, por ejemplo, sensores binarios para protección de colisiones y sensores digitales para detectar la velocidad real. Esto asegura que se cumplan todas las prestaciones que se exigen a este tipo de sistemas.

El sistema puede ponerse en marcha inmediatamente sin necesidad de conectarlo a un PC. El controlador de Robotino® consiste en un PC embebido con una tarjeta compact flash, en la cual se han instalado varias aplicaciones de demostración y el sistema operativo (Linux). Las aplicaciones de demostración pueden ejecutarse directamente desde el panel de control del Robotino®.

Robotino® puede programarse con el software Robotino®View en un PC a través del LAN inalámbrico. Robotino®View es capaz de transmitir señales al controlador del motor, así como visualizar, cambiar y evaluar valores de los sensores. Robotino® puede programarse con Robotino®View incluso durante el funcionamiento real. También están disponibles APIs Linux y C++ para la programación del Robotino®. La webcam permite visualizar y evaluar una imagen de cámara en vivo con ayuda del Robotino®View. Con ello, pueden implementarse aplicaciones tales como el trazado de rutas y seguimiento de objetos. Robotino® es autónomo. Numerosos sensores, una cámara y un controlador de altas prestaciones aportan al sistema la necesaria “inteligencia”. Puede accederse al controlador directamente a través de la LAN inalámbrica (WLAN). Cuando está correctamente programado, Robotino® realiza de forma autónoma las tareas asignadas. [9]

### 3.1.2. CHASIS Y PUENTE DE MANDO

El chasis consiste en una plataforma de acero inoxidable soldada con láser.

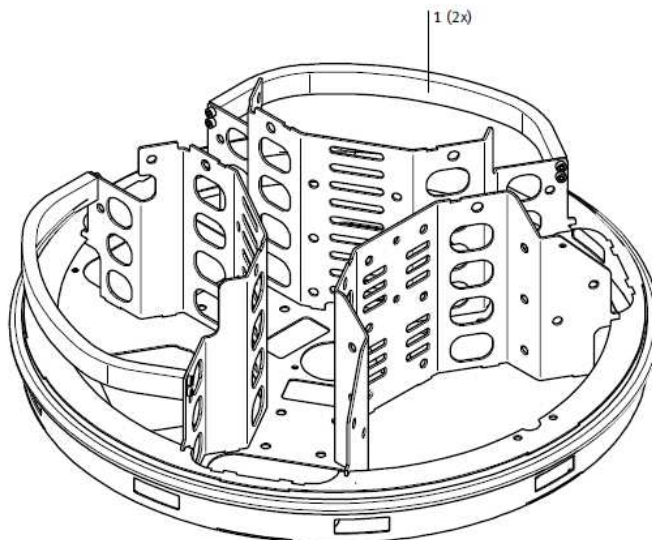


Figura 3. 2 Chasis y puente de mando, Asa (1), tomado de [9]

Las baterías recargables, las unidades de accionamiento y la cámara se hallan montadas en el chasis, en el que también se hallan situados los sensores de medición de distancia y el sensor anticolidión. El chasis ofrece un espacio adicional y opciones de montaje para otros añadidos, sensores y/o actuadores.

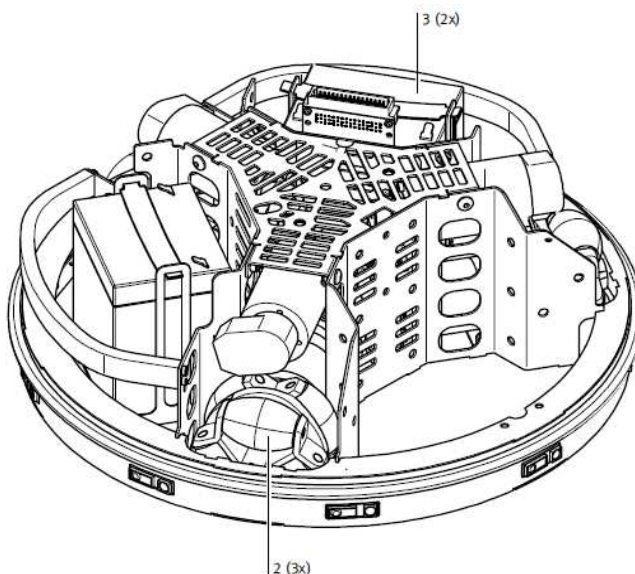


Figura 3. 3 Unidades de accionamiento (2) y batería (3), tomado de [9]

Los componentes muy sensibles del sistema, tales como el controlador, el módulo de E/A y los interfaces, se halla situados en el puente de mando. El puente de mando está conectado a los demás módulos del sistema por medio de un conector.

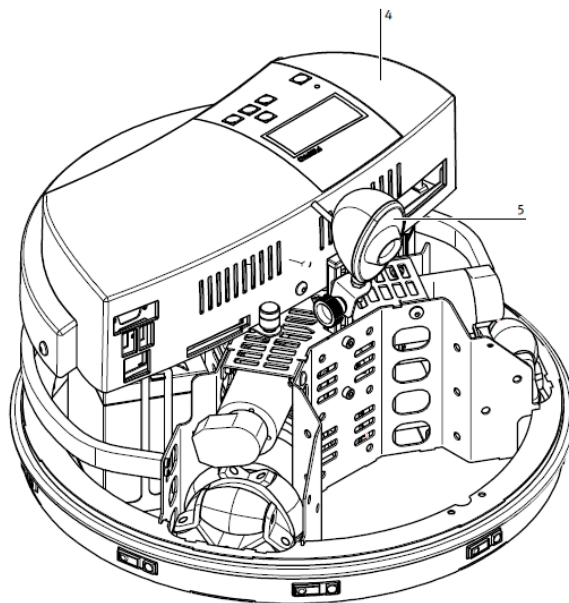


Figura 3. 4 Puente de mando (4) y cámara (5), tomado de [9]

### 3.1.3. MÓDULO DE LA UNIDAD DE ACCIONAMIENTO

Robotino® es accionado por 3 unidades de accionamiento omnidireccionales independientes. Se hallan montadas formando un ángulo de  $120^\circ$  entre sí.

Cada una de las 3 unidades de accionamiento consta de los siguientes componentes:

- Motor DC
- Reductor con una relación de reducción de 16:1
- Rodillos omnidireccionales
- Correa dentada
- Encoder incremental

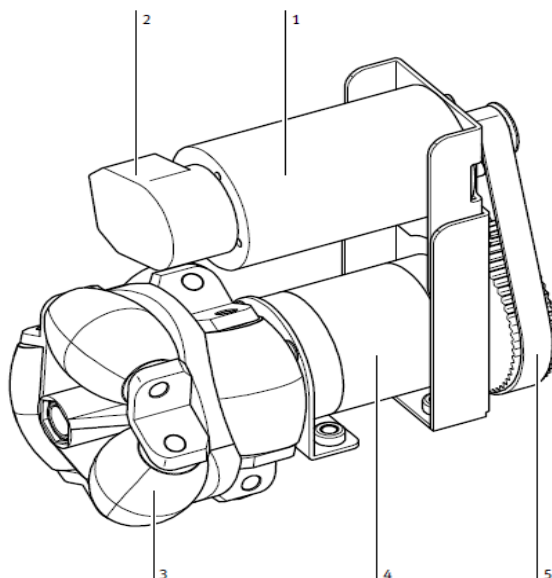


Figura 3.5 Motor (1), Encoder incremental (2), Rodillos omnidireccionales (3), Reductor (4), Correa dentada (5), tomado de [9]

Todos los componentes individuales están fijados a la brida de montaje en la parte posterior. Junto con la brida frontal, la unidad de accionamiento está sujeta al chasis con tornillos. Con ello se asegura el correcto posicionado de las unidades de accionamiento entre sí.

La velocidad real del motor puede compararse con la velocidad deseada por medio del encoder incremental, y puede regularse con un regulador PID a través de la placa de circuito de E/S.

La modelación de Robotino® se realiza por medio de los métodos estudiados, considerando el entorno adecuado para obtener un modelo a variables de estado.

El proceso de identificación se realiza mediante la obtención de datos de entrada - salida. Para ello se debe excitar el sistema mediante la aplicación de una señal de entrada y registrar la evolución de sus entradas y salidas durante un intervalo de tiempo.

### 3.1.4. MODELACIÓN DE ROBOTINO

#### 3.1.4.1. MODELO CINEMÁTICO

Para obtener el modelo matemático del robot móvil omnidireccional Robotino es necesario considerar los tres grados de movilidad que posee debido a sus tres ruedas. Las ruedas omnidireccionales, además de los movimientos básicos de atrás y adelante, permiten movimientos complicados: movimientos en todas las direcciones, diagonalmente, lateralmente e incluso 360°.

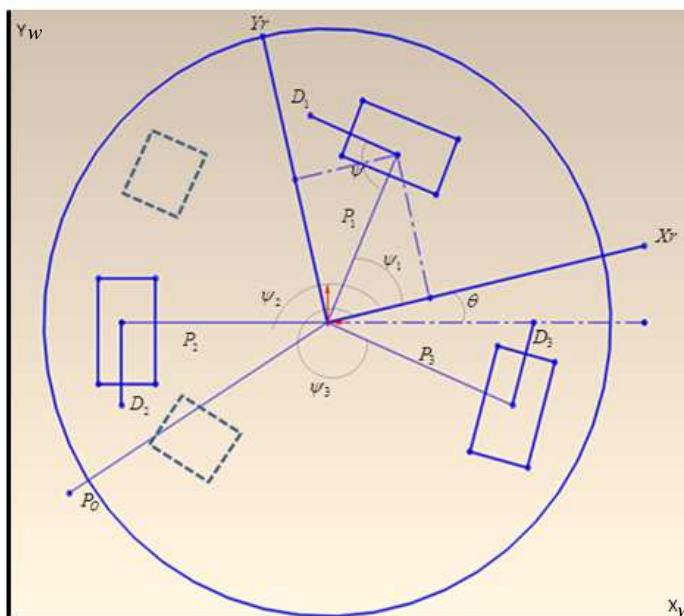


Figura 3.6 Geometría Robotino para obtener el modelo cinemático

La Figura 3.6 muestra una vista superior de la configuración del robot móvil, en este se identifica el marco de referencia móvil  $\{X_r, Y_r\}$  situado en el centro del vehículo. El eje de referencia fijo es el X-Y, el cual provee la localización absoluta del vehículo.

Para obtener el modelo se asume ciertos parámetros que facilitan la deducción del mismo.

- Se asume que no existe rozamiento entre las llantas y el piso tomado como referencia.
- El centro de masa del Robotino ésta situado en el centro geométrico del robot.
- La distancia entre el centro geométrico del robot y el centro de la rueda es constante.

$X_w, Y_w =$  Eje de referencia fijo

$X_r, Y_r =$  Marco de referencia móvil

$P_o =$  Describe la ubicación actual del robot entorno al eje de referencia fijo

$P_i =$  Describe la localización del centro de las ruedas individualmente

$D_i =$  Son vectores unitarios en dirección positiva a las ruedas

$\theta =$  Describe el desplazamiento angular del robot

$\varphi_i =$  Describe la rotación de los ejes de las ruedas con respecto a  $X_r, Y_r$

$\psi =$  Describe el ángulo fijo entre  $P_i$  y  $D_i$ .

El modelo cinemático del robot móvil omnidireccional Robotino se obtiene al considerar las relaciones de velocidad a partir de las coordenadas fijas mostradas en la Figura 3.6.

### **TRANSFORMACIÓN ENTRE LAS VELOCIDADES DE LAS RUEDAS Y LA VELOCIDAD DEL ROBOT**

Para simplificar el modelo se determina la relación entre la velocidad de cada rueda y la velocidad del robot con respecto al sistema fijo X-Y. Por lo tanto se define un vector que contiene las velocidades de traslación de cada rueda.

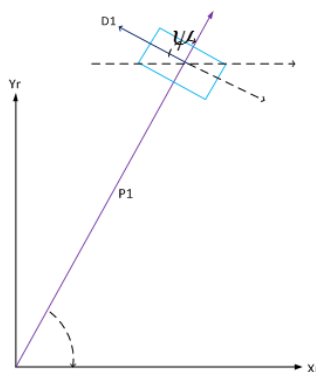


Figura 3.7 Propiedades geométricas en una sola rueda

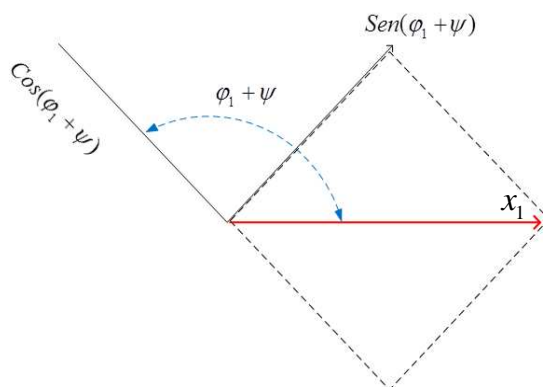


Figura 3.8 Vector unitario en una sola rueda

Vector velocidades de traslación:

$$v_w = [v_1 \quad v_2 \quad v_3]^T \quad (3.1)$$

Vector unitario:

$$\begin{aligned} D_1 \cdot X_r &= |D_1| \cdot |X_1| \cos(\varphi_1 + \psi) \\ D_1 \cdot X_r &= \cos(\varphi_1 + \psi) \end{aligned} \quad (3.2)$$

La velocidad de cada rueda y la velocidad del robot se expresa por la rotación de un vector unitario en dirección  $X_r$ .

$$v_i = \begin{bmatrix} \cos(\varphi_i + \psi) & \text{sen}(\varphi_i + \psi) \\ \text{sen}(\varphi_i + \psi) & -\cos(\varphi_i + \psi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi_i + \psi) \\ \text{sen}(\varphi_i + \psi) \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Para obtener el término coseno del movimiento del robot es necesario hacer girar la rueda, y la parte sinusoidal se obtiene moviendo las ruedas lateralmente.



Se toma como referencia la rotación de  $X_r - Y_r$  con lo que se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \cos(\varphi_i + \psi) & \text{sen}(\varphi_i + \psi) \\ \text{sen}(\varphi_i + \psi) & -\cos(\varphi_i + \psi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{sen}(\varphi_i + \psi) \\ -\cos(\varphi_i + \psi) \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Se utiliza la siguiente nomenclatura:

$W_i$  = velocidad angular de las llantas

$r$  = radio de las ruedas

$R$  = distancia entre la rueda y el centro del robot

La velocidad tangencial del robot  $\Omega$  tiene como base las ecuaciones 3.3 y 3.4 además de considerar  $\psi = 90^\circ = \pi/2$  de acuerdo a la Figura 3.7.

La velocidad tangencial y angular de cada rueda se relaciona con la expresión 3.5 y la Figura 3.8 en la cual se diferencia.

$$v_1 = w_1 \cdot r \quad v_2 = w_2 \cdot r \quad v_3 = w_3 \cdot r \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} -\text{sen}(\varphi_1) \dot{x}_1 + \cos(\varphi_1) \dot{y}_1 + R\Omega &= w_1 \\ -\text{sen}(\varphi_2) \dot{x}_2 + \cos(\varphi_2) \dot{y}_1 + R\Omega &= w_2 \\ -\text{sen}(\varphi_3) \dot{x}_3 + \cos(\varphi_3) \dot{y}_1 + R\Omega &= w_3 \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} -\sin(\varphi_1) & \cos(\varphi_1) & R \\ -\sin(\varphi_2) & \cos(\varphi_2) & R \\ -\sin(\varphi_3) & \cos(\varphi_3) & R \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{x}_r \\ \dot{y}_r \\ \Omega \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Entonces se halla el modelo cinemático inverso necesario para el control del robot móvil Robotino, éste modelo consiste en encontrar los valores que deben adoptar las coordenadas articulares del robot, para que su extremo se posicione y oriente según una determinada localización espacial.

Para la deducción del modelo inverso del Robotino® se utiliza el método geométrico ya que se obtienen los valores de las primeras variables articulares

que son las que posicionan al robot prescindiendo de la orientación de su extremo.

Se determina la velocidad del robot relacionado con las velocidades de cada rueda por medio de la matriz inversa. Se expresa en coordenadas globales.

La posición de la rueda está dada respecto al sistema fijo X-Y mediante un desplazamiento  ${}^{\omega}P_0$  y rotación  ${}^{\omega}_rR$ .

Se considera  $\omega$  y  $r$  con respecto al sistema de referencia fijo X-Y y el sistema de referencia  $Xr-Yr$ .

$$P_i^{\omega} = P_0^{\omega} + {}^{\omega}_rR(\theta) + {}^rP_i \quad (3.8)$$

En la Figura 3.6 el ángulo  $\theta$  representa el ángulo de rotación con el eje  $Xr-Yr$  con respecto al sistema de coordenadas global. Si se considera la velocidad en la rueda el desplazamiento entre el marco de referencia fija no presenta ningún efecto.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \cos(\theta + \varphi_i + \psi) & \text{sen}(\theta + \varphi_i + \psi) \\ \text{sen}(\theta + \varphi_i + \psi) & -\cos(\theta + \varphi_i + \psi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos(\theta + \varphi_i + \psi) \\ \text{sen}(\theta + \varphi_i + \psi) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \cos(\theta + \varphi_i + \psi) & \text{sen}(\theta + \varphi_i + \psi) \\ \text{sen}(\theta + \varphi_i + \psi) & -\cos(\theta + \varphi_i + \psi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \text{sen}(\theta + \varphi_i + \psi) \\ -\cos(\theta + \varphi_i + \psi) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.9)$$

La Ecuación 3.7 indica el movimiento de las ruedas y del robot sin considerar el ángulo de rotación por lo que se plantea la Ecuación 3.8 en la que la rotación interviene en el coseno y la rotación tangencial  $\Omega$ , de acuerdo al movimiento de las ruedas omnidireccionales  $\psi = 90^\circ = \pi/2$ .

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} -\sin(\theta + \varphi_1) & \cos(\theta + \varphi_1) & R \\ -\sin(\theta + \varphi_2) & \cos(\theta + \varphi_2) & R \\ -\sin(\theta + \varphi_3) & \cos(\theta + \varphi_3) & R \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{x}_\omega \\ \dot{y}_\omega \\ \Omega \end{bmatrix} \quad (3.10) \quad [10]$$

La expresión 3.10 representa el modelo cinemático del robot móvil con el cual se puede realizar el control del mismo con la implementación de diferentes algoritmos.

### 3.1.4.2. MODELO DINÁMICO

El modelo dinámico del robot móvil se obtiene a partir del método de Euler-Lagrange. Para lo cual se considera que el centro de masa G se encuentra en el origen de los ejes de referencia móvil.

El tutorial 4 capítulo 2, presenta los pasos que se deben realizar para aplicar el método de Euler- Lagrange.

1. Seleccionar variables generalizadas  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{\Omega}$ .
2. Seleccionar coordenadas variacionales  $\dot{x}_\omega, \dot{y}_\omega, \dot{\Omega}$ .
3. Calcular  $L = U^* - T$

Se considera la siguiente nomenclatura para hallar el modelo dinámico del Robotino.

$M_R$  = masa total del Robotino

$I_R$  = momento de inercia total del Robotino

$\Omega$  = velocidad tangencial

Energía Cinética del robot con respecto al eje móvil se expresa con la Ecuación (3.11).

$$E_C = \frac{1}{2} M_R V_{GX}^2 + \frac{1}{2} M_R V_{GY}^2 \quad (3.11)$$

$$V_{GX} = \left( \dot{X}_\omega + Y_\omega \Omega \right)$$

$$V_{GY} = \left( \dot{Y}_\omega + X_\omega \Omega \right)$$

$$\text{Momento de inercia del robot} = \frac{1}{2} I_R \dot{\Omega}^2$$

$$\text{Momento de inercia de cada rueda} = \sum_1^3 \frac{1}{2} I_i (\dot{\theta}_i)^2$$

$T = 0$  No se almacena esfuerzo puesto que se desprecia los resortes para su análisis

$J = 0$  No existe co-contenido puesto que desprecia los amortiguadores que posee el sistema.

$$\therefore L = U^*$$

$$U^* = E_C + \sum I_{i,j}$$

$$U^* = \frac{1}{2} M_R V_{GX}^2 + \frac{1}{2} M_R V_{GY}^2 + \frac{1}{2} I_R (\dot{\Omega})^2 + \frac{1}{2} I_1 (\dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2} I_2 (\dot{\theta}_2)^2 + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\theta}_3)^2 \quad (3.12)$$

4. Para cada coordenada variacional aplicar la siguiente Ecuación:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{e}_a} \right) - \frac{\partial L}{\partial e_a} + \left( \frac{\partial J}{\partial \dot{e}_a} - F \right) = 0$$

Para  $X_\omega$

$$\frac{d}{dt} \left( \dot{X}_\omega - Y_\omega \Omega \right) = \ddot{X}_\omega - \dot{Y}_\omega \dot{\Omega} = F_1$$

Para  $Y_\omega$

$$\frac{d}{dt} \left( \dot{Y}_\omega + X_\omega \Omega \right) = \ddot{Y}_\omega + \dot{X}_\omega \dot{\Omega} = F_2$$

Para  $\Omega$

$$I_R \ddot{\Omega} = F_3$$

Para  $\theta_1$

$$I_1 \ddot{\theta}_1 = \tau_1$$

Para  $\theta_2$

$$I_2 \ddot{\theta}_2 = \tau_2$$

Para  $\theta_3$

$$I_3 \ddot{\theta}_3 = \tau_3$$

De acuerdo a las ecuaciones obtenidas se presenta las siguientes matrices:

$$\begin{bmatrix} M_R & 0 & 0 \\ 0 & M_R & 0 \\ 0 & 0 & I_R \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{X}_\omega \\ \ddot{Y}_\omega \\ \ddot{\Omega}_\omega \end{bmatrix} + \dot{\Omega} \begin{bmatrix} 0 & -M_R & 0 \\ M_R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{X}_\omega \\ \dot{Y}_\omega \\ \dot{\Omega}_\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

$$\begin{bmatrix} I_{R1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{R2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{R3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Distancia del centro

$$R' = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} -\sin(\theta) & \cos(\theta) & R \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & R \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & R \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Se desprecia la fricción y el deslizamiento entre las ruedas y la superficie, por lo que se las expresiones (3.13) y (3.14) se representa en 3.16:

(3.16)

$$\begin{bmatrix} \frac{3Ir}{2r^2} + M_R & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3Ir}{2r^2} + M_R & 0 \\ 0 & 0 & I_R + \frac{3R^2Ir}{2r^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{X}_\omega \\ \ddot{Y}_\omega \\ \ddot{\Omega}_\omega \end{bmatrix} + \dot{\Omega} \begin{bmatrix} 0 & -M_R & 0 \\ M_R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{X}_\omega \\ \dot{Y}_\omega \\ \dot{\Omega}_\omega \end{bmatrix} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} -\sin(\theta) & \cos(\theta) & R \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & R \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix}$$

Se deduce el modelo dinámico del sistema en la forma:

$$D\ddot{Q} + C(\dot{Q})\dot{Q} = B\tau \quad (3.17)$$

La expresión 3.17 contiene los parámetros del sistema representados por:

$D$  = matriz de inercia del sistema

$C(\dot{Q})$  = matriz de coriolis y fuerzas centrípetas

$B$  = representa la relación entre las entradas de control con el sistema físico

La matriz 3.16 representa el modelo dinámico del Robotino pero en coordenadas móviles, con respecto a  $X_r, Y_r$ , por lo que es indispensable transformar éstas matrices a la referencia inercial  $X_w, Y_w$ .

Se aplica transformación de coordenadas aplicando  $\dot{Q} = T\dot{Q}$

Donde  $T$  representa la matriz de rotación elemental en sentido horario, la matriz de rotación del sistema de coordenadas  $O, X_r, Y_r, Z_r$ , respecto al sistema de coordenadas  $X, Y, Z$ .

$$R_z(\varphi) = T = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\text{sen} \varphi & 0 \\ \text{sen} \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Se considera la expresión (3.18) multiplicada por (3.17) con la cual se obtiene:

$$DT\ddot{Q} + [D\dot{T} + C(\dot{Q})T]\dot{Q} = B\tau \quad (3.19)$$

Al considerar el producto  $D.T$  se obtiene una matriz anti-simétrica positiva por lo que se realiza el producto de la matriz transpuesta  $T$  por la expresión (3.19)

$$T^{-1}DT\ddot{Q} + [T^{-1}D\dot{T} + T^{-1}C(\dot{Q})T]\dot{Q} = T^{-1}B\tau \quad (3.20)$$

La expresión 3.20 se simplifica en una con menor grado de complejidad representado por:

$$D(\ddot{Q}) + C(\dot{Q})\dot{Q} = \beta\tau \quad (3.21)$$

Con lo cual se obtiene las variables de estado del modelo dinámico del Robotino.

$$D = \begin{bmatrix} \frac{3Ir}{2r^2} + M_R & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3Ir}{2r^2} + M_R & 0 \\ 0 & 0 & I_R + \frac{3R^2Ir}{2r^2} \end{bmatrix} \quad C(\dot{Q}) = \frac{3Ir}{2r^2} \begin{bmatrix} 0 & \dot{\varphi} & 0 \\ \dot{\varphi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

$$\beta = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} -\text{sen}(\theta + \varphi) & -\text{sen}(\theta + \varphi) & \cos \varphi \\ \cos(\theta + \varphi) & -\cos(\theta + \varphi) & \text{sen} \varphi \\ R & R & R \end{bmatrix}$$

### 3.2. HELICÓPTERO DE DOS GRADOS DE LIBERTAD

Un helicóptero vuela por los mismos principios de un avión, pero en el caso de los helicópteros la sustentación se logra por la rotación de las aspas. Éstas hacen que la sustentación sea posible. Su forma produce una fuerza cuando el aire pasa a través de ellas. Las aspas del rotor tienen perfiles diseñados específicamente para las características de vuelo. [11]

Para la modelación del helicóptero se considera que está pivotado alrededor del eje de inclinación Pitch  $\theta$  y alrededor del eje de orientación Yaw  $\Psi$ .

Se considera el ángulo Pitch positivo cuando la nariz del helicóptero se eleva y el ángulo Yaw es definido positivo para rotaciones en sentido de las manecillas del reloj.

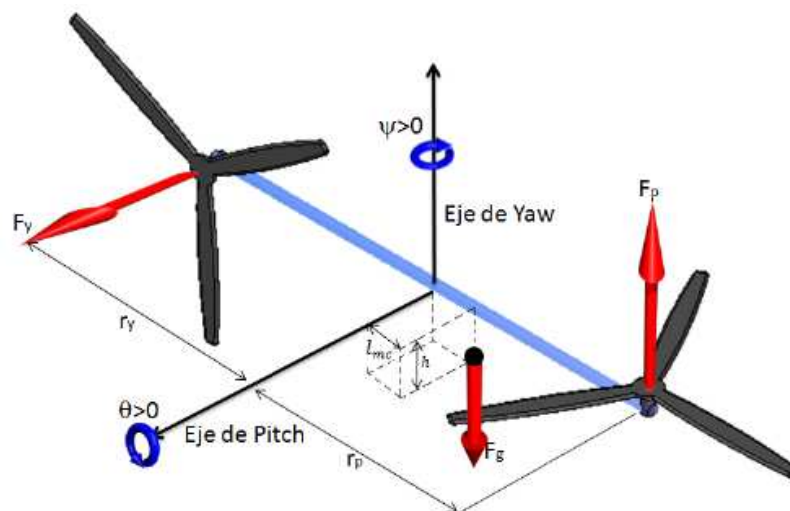


Figura 3.9 Dinámica del helicóptero, Tomado de [12]

De acuerdo a la Figura 3.9 existe una fuerza de empuje  $F_p$  la cual es normal al plano de la hélice frontal y una fuerza de empuje  $F_y$  normal al plano de la hélice trasera. [12]

Considerando la dinámica del helicóptero se obtiene las siguientes características:

- Se genera un torque en el eje pitch a causa de la fuerza de empuje  $F_p$  que se encuentra a una distancia  $r_p$ .
- Un torque en el eje Yaw aplicado por la fuerza  $F_y$  que se encuentra a una distancia  $r_y$  del centro de referencia.
- La fuerza gravitacional  $F_g$  genera un torque en el eje pitch como consecuencia del centro de masa ubicado a una distancia  $l_{mc}$  y a una altura  $h$  por debajo de la longitud de fuselaje.

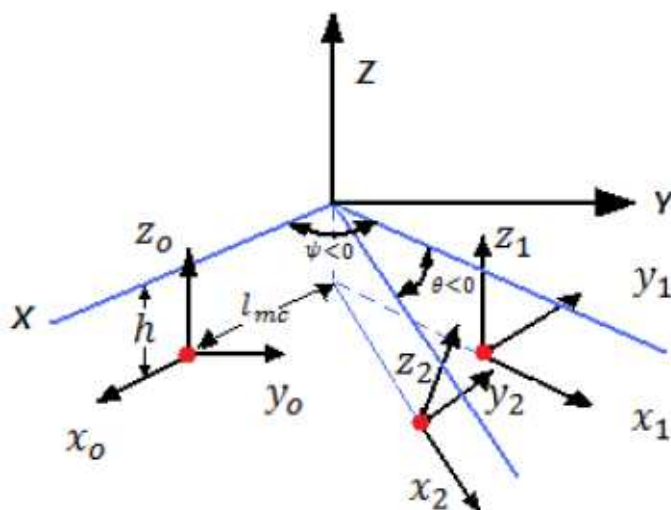


Figura 3.10 Cinemática del helicóptero, Tomado de [12]

Para hallar el modelo cinemático directo se usan matrices de transformación homogéneas que representan la posición y orientación del cuerpo en el espacio. [13]

El helicóptero rota con respecto a Z un ángulo  $\Psi$  y con respecto a Y un ángulo  $\theta$ , por lo que se considera la posición del centro de masa  $T_0^2$  con respecto al sistema coordinado fijo.



Se hace uso de matrices de transformación homogéneas  $Rot_{z_0,\psi}$  y  $Rot_{y_1,\theta}$  [13]

$$T_0^2 = Rot_{z_0,\psi} Rot_{y_1,\theta} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_{mc} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Se aplica matrices de transformación homogénea, además de rotación que se basa en el escalado y deslizado. Cabe recalcar que se aplica ángulos negativos para reemplazar  $\theta$  positivo y lograr que el helicóptero se eleve.

$$T_0^2 = \begin{bmatrix} \cos\psi & \text{sen}\psi & 0 & 0 \\ -\text{sen}\psi & \cos\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \text{sen}\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \text{sen}\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_{mc} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Resolviendo la expresión anterior se obtiene:

$$T_0^2 = \begin{bmatrix} \cos\psi \cos\theta & \text{sen}\psi & -\cos\psi \text{sen}\theta & l_{mc} \cos\psi \cos\theta + h \cos\psi \text{sen}\theta \\ -\cos\theta \text{sen}\psi & \cos\psi & \text{sen}\psi \text{sen}\theta & -l_{mc} \cos\theta \text{sen}\psi - h \text{sen}\psi \text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & 0 & \cos\theta & l_{mc} \text{sen}\theta - h \cos\theta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Es necesario determinar las coordenadas cartesianas del centro de masa para hallar el modelo dinámico del sistema. La posición cartesiana del centro de masas es:

$$\begin{aligned} X_{mc} &= (l_{mc} \cos\theta + h \text{sen}\theta) \cos\psi \\ Y_{mc} &= (-l_{mc} \cos\theta - h \text{sen}\theta) \text{sen}\psi \quad (3.25) \\ Z_{mc} &= l_{mc} \text{sen}\theta - h \cos\theta \end{aligned}$$

Para hallar la expresión que represente el centro de masa total se considera la siguiente nomenclatura:

$m_p$  = masa del motor Pitch

$m_y$  = masa del motor Yaw

$m_{shield}$  =masa de las hélices y sus protecciones

Cálculo del centro de masa  $Md_{mc} = \sum m_i r_i$  donde:

$M$ =masa total

$r_i$ =centro de masas de cada sección

$m_i$ = masa de cada sección

Se presenta el cálculo de la longitud del centro de masa y la altura del mismo en función de la masa y las coordenadas mencionadas anteriormente.

$$\begin{aligned}
 Ml_{mc} &= (m_p + m_{shield}) * x_p + (m_y + m_{shield}) * x_y \\
 (m_p + m_y + 2m_{shield}) * l_{mc} &= (m_p + m_{shield}) * x_p + (m_y + m_{shield}) * x_y \\
 l_{mc} &= \frac{(m_p + m_{shield})x_p + (m_y + m_{shield})x_y}{(m_p + m_y + 2m_{shield})} \quad (3.26)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Mh &= (m_p + m_{shield}) * z_p + (m_y + m_{shield}) * z_y \\
 (m_p + m_y + 2m_{shield}) * h &= (m_p + m_{shield}) * z_p + (m_y + m_{shield}) * z_y \\
 h &= \frac{(m_p + m_{shield})z_p + (m_y + m_{shield})z_y}{(m_p + m_y + 2m_{shield})} \quad (3.27)
 \end{aligned}$$

De acuerdo a la nomenclatura utilizada en las ecuaciones 3.26 y 3.27 se describe los siguientes términos:

$X_p$ =distancia entre el pivote y el centro del motor pitch en x

$X_y$ =distancia entre el pivote y el centro del motor de Yaw en x

$Z_p$ = distancia entre el pivote y el centro del motor de pitch en z

$Z_y$ = distancia entre el pivote y el centro del motor de Yaw en z

### 3.2.1. APLICACIÓN DEL MÉTODO VARIACIONAL

Al aplicar este método en la modelación del helicóptero se obtiene, las variables de estado y la función de transferencia. Cabe recalcar que en el Capítulo 2 se presenta los pasos que se aplican en éste método partiendo de la Ecuación (2.17).

De acuerdo al método y el procedimiento planteado en el tutorial 4 se plantea lo siguiente:

### 1. Coordenadas generalizadas

$q_1$  = ángulo alrededor del eje Pitch

$q_2$  = ángulo alrededor del eje Yaw

$$q = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \dot{q}_1 & \dot{q}_2 \end{bmatrix}^T \quad (3.28)$$

$$q = \begin{bmatrix} \theta & \psi & \dot{\theta} & \dot{\psi} \end{bmatrix}^T$$

Se considera fuerzas generalizadas de acuerdo al eje Pitch y Yaw

$$Q_1 = \tau_p(V_{mp}, V_{my}) - B_p \dot{\theta} \quad \wedge \quad Q_2 = \tau_y(V_{mp}, V_{my}) - B_y \dot{\psi} \quad (3.29)$$

La Ecuación 3.29 incluye la fricción viscosa rotacional actuando en los ejes de Pitch y Yaw  $B_p$  y  $B_y$ . Las torques aplicados a los ejes de Pitch y Yaw son función de los voltajes aplicados a los motores. La dinámica de los motores juegan un papel importante en la elaboración del modelo (la velocidad de los motores alcanza el estado estacionario en un tiempo cercano a 50ms), entonces su dinámica es despreciables y se puede aproximar la conversión de voltaje a torque por una constante [14].

$$\tau_p(V_{mp}, V_{my}) = \tau_{pp} + \tau_{py} \quad (3.30)$$

$$\tau_y(V_{mp}, V_{my}) = \tau_{yp} + \tau_{yy}$$

$$\tau_{pp} + \tau_{py} = (K_{pp} V_{mp} + F_{cpp}) + (K_{py} V_{my} + F_{cpy})$$

$$\tau_{yp} + \tau_{yy} = (K_{yp} V_{mp} + F_{cyp}) \cos \theta + (K_{yy} V_{my} + F_{cyy}) \cos \theta \quad (3.31)$$

$V_{mp}$  = entrada de voltaje del motor pitch

$V_{my}$  = entrada de voltaje al motor yaw

Se considera que los torques en los ejes de Pitch y Yaw están acoplados:

$\tau_{pp}, \tau_{yy}, \tau_{py}$  y  $\tau_{yp}$  = funciones de torque

$K_{pp}, K_{py}, K_{yp}$  y  $K_{yy}$  = constantes de voltaje a torque de los motores de Pitch y Yaw halladas experimentalmente.

$F_{cpp}, F_{cpy}, F_{cyp}$  y  $F_{cyy}$  = términos debido a la fricción de Coulomb, en general el voltaje necesario para que el sistema inicie el movimiento.

$K_{pp}$  = Constante de voltaje a torque actuando en el eje Pitch debida al voltaje aplicado al momento Pitch.

$K_{py}$  = Constante de voltaje a torque actuando en el eje Pitch debida al voltaje aplicado al motor del eje Yaw.

$K_{yp}$  = Constante de voltaje a torque actuando en el eje Yaw debida al voltaje aplicado al motor Pitch.

$K_{yy}$  = Constante de voltaje a torque actuando en el eje Yaw debida al voltaje aplicado al momento de Yaw.

Cabe recalcar que la fuerza de empuje cuando  $V_{mp} > 0$  causa que la nariz del helicóptero se eleve, pero a la vez genera un torque sobre el eje yaw que hace rotar al helicóptero en Yaw debido a la resistencia del aire sobre el área transversal de la hélice generando un torque en el eje del motor y como el motor está fijo al sistema que es móvil con respecto al pivote, este torque se refleja en el pivote. El mismo efecto se presenta al aplicar voltaje al motor de Yaw. Evaluando las expresiones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial q_1} \right) = Q_1$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial q_2} \right) = Q_2$$

(3.32)

2. Coordenadas variacionales  $(\theta, \psi)$

3. Calcular  $L = U^* - T$  y  $J$  de acuerdo al modelo físico del helicóptero.

Para hallar el modelo cinemático del helicóptero es necesario recurrir a la energía cinética y potencial que actúa en helicóptero al encontrarse en movimiento.

La energía potencial debido a la gravedad es :

$$P = m_{heli} \cdot g \cdot Z_{mc} = m_{heli} \cdot g \cdot (l_{mc} \cdot \sin \theta - h \cos \theta) \quad (3.33)$$

Considerando que  $m_{heli}$  es la masa móvil total del helicóptero necesario para calcular la energía potencial del helicóptero.

$L_{mc}$ = Posición en x del centro de masa

$h$ = posición en z del centro de masa

La energía cinética total:

$$T = T_{r,p} + T_{r,y} + T_z \quad (3.34)$$

De acuerdo a la nomenclatura utilizada

$T_{r,p}$ =energía cinética rotacional actuando sobre Pitch

$T_{r,y}$ = energía cinética rotacional actuando sobre Yaw

$T_z$ =energía traslacional

De forma general la energía cinética se expresa:

$$E = \frac{1}{2} m v^2$$

Al considerar los momentos rotacionales se realiza una comparación  $m = J$ ,  $\dot{\theta}$  y

$\dot{\psi}$  representan la velocidad angular

$J_p$ =momentos de inercia equivalentes en Pitch

$J_y$ =momentos de inercia equivalentes en Yaw

Energía cinética rotacional en Pitch

$$T_{r,p} = \frac{1}{2} J_p \left( \dot{\theta} \right)^2 \quad (3.35)$$

Energía cinética rotacional en Yaw

$$T_{r,y} = \frac{1}{2} J_y \left( \dot{\psi} \right)^2 \quad (4.36)$$

Considerando el centro de masa del helicóptero la energía cinética traslacional toma en cuenta el movimiento en los tres ejes del espacio

$$T_t = m_{heli} \left( \dot{X}_{mc}^2 + \dot{Y}_{mc}^2 + \dot{Z}_{mc}^2 \right) = \frac{1}{2} m_{heli} v^2 \quad (3.37)$$

Utilizando la expresión (3.38) se halla en términos de los ángulos Pitch y Yaw la energía cinética rotacional, en forma general se plantea:

$$C = \frac{\partial C}{\partial \psi} \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) + \frac{\partial C}{\partial \theta} \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \right) \quad (3.38)$$

Para todas las coordenadas se aplica la expresión 3.38, donde  $C = X_{mc}, Y_{mc}, Z_{mc}$ . Las coordenadas hacen referencia a la Ecuación 3.25

$$\begin{aligned} \dot{X}_{mc} &= \frac{\partial X_{mc}}{\partial \psi} \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) + \frac{\partial X_{mc}}{\partial \theta} \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \right) \\ \dot{X}_{mc} &= \frac{\partial}{\partial \psi} [(l_{mc} \cos \theta + h \operatorname{sen} \theta) \cos \psi] \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} [(l_{mc} \cos \theta + h \operatorname{sen} \theta) \cos \psi] \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \right) \\ \dot{X}_{mc} &= (-l_{mc} \cos \theta \operatorname{sen} \psi - h \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \psi) \dot{\psi} + (-l_{mc} \operatorname{sen} \theta \cos \psi + h \cos \theta \cos \psi) \dot{\theta} \\ \dot{X}_{mc} &= \underline{- (l_{mc} \cos \theta + h \operatorname{sen} \theta) \operatorname{sen} \psi \cdot \dot{\psi} - (l_{mc} \operatorname{sen} \theta - h \cos \theta) \cos \psi \dot{\theta}} \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} \dot{Y}_{mc} &= \frac{\partial Y_{mc}}{\partial \psi} \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) + \frac{\partial Y_{mc}}{\partial \theta} \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \right) \\ \dot{Y}_{mc} &= \frac{\partial}{\partial \psi} [(-l_{mc} \cos \theta - h \operatorname{sen} \theta) \operatorname{sen} \psi] \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} [(-l_{mc} \cos \theta - h \operatorname{sen} \theta) \operatorname{sen} \psi] \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \right) \\ \dot{Y}_{mc} &= \underline{- (l_{mc} \cos \theta + h \operatorname{sen} \theta) \cos \psi \cdot \dot{\psi} + (l_{mc} \operatorname{sen} \theta - h \cos \theta) \operatorname{sen} \psi \cdot \dot{\theta}} \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned}\dot{Z}_{mc} &= \frac{\partial Z_{mc}}{\partial \psi} \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) + \frac{\partial Z_{mc}}{\partial \theta} \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \right) \\ \dot{Z}_{mc} &= \frac{\partial}{\partial \psi} (l_{mc} \text{sen } \theta - h \cos \theta) \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} (l_{mc} \text{sen } \theta - h \cos \theta) \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \right) \quad (3.41) \\ \dot{Z}_{mc} &= \underline{(l_{mc} \cos \theta + h \text{sen } \theta) \dot{\theta}}\end{aligned}$$

Según 3.37  $v^2 = \dot{X}_{mc}^2 + \dot{Y}_{mc}^2 + \dot{Z}_{mc}^2$ , reemplazando 3.39, 3.40 y 4.41 en 4.37 se obtiene:

$$v^2 = \left[ (h^2 + \cos^2 \theta * (l_{mc}^2 - h^2) + l_{mc} h \text{sen}(2\theta)) \dot{\psi}^2 + (l_{mc}^2 + h^2) \dot{\theta}^2 \right] \quad (4.42)$$

Se obtiene la expresión total de 3.30 reemplazando 3.13 en la misma.

$$T_t = \frac{1}{2} m_{heli} \left[ (h^2 + \cos^2 \theta * (l_{mc}^2 - h^2) + l_{mc} h \text{sen}(2\theta)) \dot{\psi}^2 + (l_{mc}^2 + h^2) \dot{\theta}^2 \right] \quad (4.43)$$

En forma general  $L = U^* - T$  y J, lo hallamos con las ecuaciones (3.39), (3.40), (3.41) y de acuerdo al rozamiento viscoso presente en el motor Pitch y Yaw

$$\begin{aligned}L &= \frac{1}{2} M_{heli} \left[ (h^2 + \cos^2 \theta * (l_{mc}^2 - h^2) + l_{mc} h \text{sen}(2\theta)) \dot{\psi}^2 + (l_{mc}^2 + h^2) \dot{\theta}^2 \right] \\ &- m_{heli} \cdot g \cdot (l_{mc} \text{sen } \theta - h \cos \theta) + \frac{1}{2} J_{eqp} \left( \dot{\theta} \right)^2 + \frac{1}{2} J_{eqy} \left( \dot{\psi} \right)^2\end{aligned} \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned}J_p &= \frac{1}{2} B_p \dot{\theta}^2 \\ J_y &= \frac{1}{2} B_y \dot{\theta}^2\end{aligned} \quad (3.45)$$

4. Para cada coordenada variacional aplicar la Ecuación 2.17, por lo tanto lo aplicamos para  $\theta$  y  $\psi$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial \theta} \right) + \left( \frac{\partial J}{\partial \dot{\theta}} \right) = Q_1$$

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} \left[ \frac{1}{2} (l_{mc}^2 + h^2) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} J_{eqp} (\dot{\theta})^2 \right] \right\} - \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{1}{2} M_{heli} \cos^2 \theta (l_{mc}^2 - h^2) \dot{\psi}^2 + \frac{1}{2} M_{heli} l_{mc} h \text{sen}(2\theta) \dot{\psi}^2 \right. \\ \left. - M_{heli} g l_{mc} \text{sen} \theta + m_{heli} \cdot g \cdot h \cdot \cos \theta \right] + \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} \left( \frac{1}{2} B_p (\dot{\theta})^2 \right) = Q_1$$

$$(J_{eqp} + M_{heli} (l_{mc}^2 + h^2)) \ddot{\theta} + M_{heli} \left[ \frac{\text{sen}(2\theta) (l_{mc}^2 - h^2) \dot{\psi}^2}{2} - l_{mc} \cdot h \cdot \cos(2\theta) \right] \dot{\psi}^2 + \quad (3.46)$$

$$M_{heli} g (l_{mc} \cos \theta + h \text{sen} \theta) + B_p \dot{\theta} = (K_{pp} V_{mp} + F_{cpp}) + (K_{py} V_{my} + F_{cpy})$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial \psi} \right) + \left( \frac{\partial J}{\partial \dot{\psi}} \right) = Q_2$$

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial}{\partial \dot{\psi}} \left[ \frac{1}{2} M_{heli} (h^2 + \cos^2 \theta * (l_{mc}^2 - h^2) + l_{mc} h \text{sen}(2\theta)) \dot{\psi}^2 + \frac{1}{2} J_{eqy} (\dot{\psi})^2 \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial \dot{\psi}} \left( \frac{1}{2} B_y (\dot{\psi})^2 \right) = Q_2$$

$$[J_{eqy} + M_{heli} [\cos^2 \theta * (l_{mc}^2 - h^2) + l_{mc} h \text{sen}(2\theta) + h^2]] \ddot{\psi} + M_{heli} [\text{sen}(2\theta) (h^2 - l_{mc}^2) + \quad (3.47)$$

$$2l_{mc} h \cos(2\theta)] \dot{\theta} \dot{\psi} + B_y \dot{\psi} = (K_{yp} V_{mp} + F_{cyp}) \cos \theta + (K_{yy} V_{my} + F_{cyy}) \cos \theta$$

Con las ecuaciones 3.46 y 3.47 se encuentran el momento de inercia sobre el centro de masa

$$J_{eqp} = J_{bodyp} + J_p + J_y \quad (3.48)$$

$$J_{eqy} = J_{bodyy} + J_p + J_y + J_{shaft}$$

De acuerdo a la Ecuación 3.48 se plantea los momentos de inercia de los cuerpos que intervienen en el helicóptero, asumiendo el de una varilla delgada de acuerdo a dos ejes, y el momento de inercia equivalente tomado para los ejes Pitch y Yaw se asume un aro planteándose ecuaciones generales para el momento de inercia de cada uno de los cuerpos.



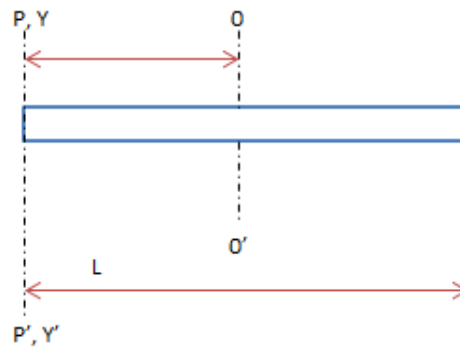


Figura 3.11 Momento de inercia de una varilla delgada, Tomado de [15]

$$J_{oo'} = \frac{1}{12} mL^2 \quad (3.49)$$

$$J_{pp'} = \frac{1}{3} mL^2$$

La Ecuación 3.49 representa el momento de inercia de una varilla delgada de acuerdo a los ejes señalados. [15]

$$J_{bodyy} = \frac{1}{12} m_{body} L_{body}^2 \quad (3.50)$$

$$J_{bodyy} = \frac{1}{12} m_{body} L_{body}^2 \quad (3.51)$$

$$J_{shaft} = \frac{1}{3} m_{shaft} L_{shaft}^2 \quad (3.52)$$

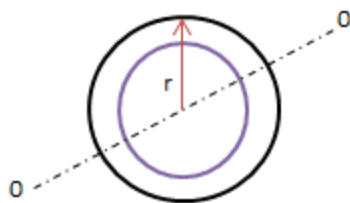


Figura 3.12 Momento de inercia de un aro, Tomado de [15]

$$J_{oo'} = mr^2 \quad (3.54)$$

$$J_p = (m_{mp} + m_{shield}) * r_p^2 \quad (3.55)$$

$$J_p = (m_{my} + m_{shield}) * r_y^2$$

$M_{hel}$ = Masa móvil total del helicóptero

$m_{mp}$ = Masa del motor de Pitch

$m_{my}$ = Masa del motor Yaw

$m_{shield}$ = Masa del ensamblaje de la hélice

$m_{bodyp}$ = Masa que se mueve alrededor del eje Pitch

$m_{bodyy}$ = Masa que se mueve alrededor del eje Yaw

$m_{shaft}$ = Masa del eje metálico que gira alrededor del eje Yaw

$L_{body}$ = Longitud total del cuerpo del helicóptero.

$L_{shaft}$ = Longitud del eje metálico que gira alrededor del eje Yaw.

$J_{shaft}$ = Momento de inercia del eje metálico.

$J_{eqp}$ = Momento de inercia equivalente alrededor del eje Yaw

### 3.2.2. VARIABLES DE ESTADO

Las variables de estado del sistema lo constituyen los ángulos Pitch y Yaw además de la velocidad que cada uno de éstos provoca en el helicóptero.

$$X = \begin{bmatrix} \theta \\ \psi \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Se interpreta que las variables de salida son las señales de control de cada uno de los motores del helicóptero de acuerdo al eje Pitch o Yaw.

$$U = \begin{bmatrix} V_{mp} \\ V_{my} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Debido a lo no linealidad presente en este sistema se recurre a la linealización de las variables.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{\theta} = x_3 = f_1(X) \\ \dot{x}_2 &= \dot{\psi} = x_4 = f_2(X) \end{aligned} \quad (3.56)$$

Partiendo de la Ecuación (3.46) y (3.47) se obtiene la expresión  $\dot{x}_3$  y  $\dot{x}_4$ , necesarias para la linealización de las variables de estado del sistema.

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 = \ddot{\theta} = & - \frac{M_{heli} \left[ \frac{\text{sen}(2\theta)(l_{mc}^2 - h^2)}{2} - l_{mc} \cdot h \cdot \cos(2\theta) \right] \dot{\psi}^2}{(J_{eqp} + M_{heli}(l_{mc}^2 + h^2))} \\ & - \frac{M_{heli} g(l_{mc} \cos \theta + h \text{sen} \theta) + B_p \dot{\theta} - (K_{pp} V_{mp} + F_{cpp}) - (K_{py} V_{my} + F_{cpy})}{(J_{eqp} + M_{heli}(l_{mc}^2 + h^2))} = f_3(X) \end{aligned} \quad (3.57)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_4 = \ddot{\psi} = & - \frac{M_{heli} [\text{sen}(2\theta)(h^2 - l_{mc}^2) + 2l_{mc} h \cos(2\theta)] \dot{\theta} \dot{\psi}}{[J_{eqy} + M_{heli} [\cos^2 \theta * (l_{mc}^2 - h^2) + l_{mc} h \text{sen}(2\theta) + h^2]]} \\ & - \frac{B_y \dot{\psi} - (K_{yp} V_{mp} + F_{cyp}) \cos \theta - (K_{yy} V_{my} + F_{cyy}) \cos \theta}{[J_{eqy} + M_{heli} [\cos^2 \theta * (l_{mc}^2 - h^2) + l_{mc} h \text{sen}(2\theta) + h^2]]} = f_4(X) \end{aligned}$$

### 3.2.3. PUNTOS DE EQUILIBRIO

Para obtener un modelo lineal se considera los parámetros que permanecen constantes alrededor del punto de equilibrio  $\bar{x}_1 = \bar{\theta}$ .

$$\begin{aligned} \dot{X}_x &= A(\bar{\theta})X_x + B(\bar{\theta})U_x \\ X_x &= X - \bar{X} \quad U_x = U - \bar{U} \\ A(\bar{\theta}) &= \frac{\partial f(X)}{\partial X} \quad B(\bar{\theta}) = \frac{\partial f(X)}{\partial U} \end{aligned}$$

De acuerdo a las ecuaciones obtenidas se linealiza de acuerdo a las variables  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ ,  $x_4$ , aplicando derivadas parciales a cada una de las funciones obtenidas en la Ecuación (3.57)

$$A(\bar{\theta}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(X)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(X)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1(X)}{\partial x_3} & \frac{\partial f_1(X)}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_2(X)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(X)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2(X)}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2(X)}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_3(X)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3(X)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3(X)}{\partial x_3} & \frac{\partial f_3(X)}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_4(X)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_4(X)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_4(X)}{\partial x_3} & \frac{\partial f_4(X)}{\partial x_4} \end{bmatrix}$$

$$B(\bar{\theta}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(X)}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1(X)}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_2(X)}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2(X)}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_3(X)}{\partial u_1} & \frac{\partial f_3(X)}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_4(X)}{\partial u_1} & \frac{\partial f_4(X)}{\partial u_2} \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

Considerando la Ecuación (3.58) y la expresión (3.57) se realiza el procedimiento adecuado para obtener  $A(\bar{\theta})$  y  $B(\bar{\theta})$  evaluando las matrices  $X = \bar{X}$  y  $U = \bar{U}$ .

$$A(\bar{\theta}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{M_{heli} g (l_{mc} \overline{\sin \theta} - h \overline{\cos \theta})}{[J_{eqp} + M_{heli} (l_{mc}^2 + h^2)]} & -B_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-B_y}{J_{eqy} + M_{heli} [\overline{\cos^2 \theta} (l_{mc}^2 - h^2) + l_{mc} \overline{hsen(2\theta)} + h^2]} \end{bmatrix}$$

$$B(\bar{\theta}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{K_{pp}}{[J_{eqp} + M_{heli} (l_{mc}^2 + h^2)]} & \frac{K_{py}}{[J_{eqp} + M_{heli} (l_{mc}^2 + h^2)]} \\ \frac{K_{yp} \overline{\cos \theta}}{J_{eqy} + M_{heli} [\overline{\cos^2 \theta} (l_{mc}^2 - h^2) + l_{mc} \overline{hsen(2\theta)} + h^2]} & \frac{K_{yy} \overline{\cos \theta}}{J_{eqy} + M_{heli} [\overline{\cos^2 \theta} (l_{mc}^2 - h^2) + l_{mc} \overline{hsen(2\theta)} + h^2]} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

Se linealiza alrededor de  $\bar{\theta} = 0$

$$A(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{M_{heli}gh}{[J_{eqp} + M_{heli}(l_{mc}^2 + h^2)]} & 0 & -\frac{B_p}{[J_{eqp} + M_{heli}(l_{mc}^2 + h^2)]} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{B_y}{[J_{eqy} + M_{heli}l_{mc}^2]} \end{bmatrix}$$

$$B(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{K_{pp}}{[J_{eqp} + M_{heli}(l_{mc}^2 + h^2)]} & \frac{K_{py}}{[J_{eqp} + M_{heli}(l_{mc}^2 + h^2)]} \\ \frac{K_{yp}}{[J_{eqy} + M_{heli}l_{mc}^2]} & \frac{K_{yy}}{[J_{eqy} + M_{heli}l_{mc}^2]} \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

Los valores obtenidos para las variables de estado depende del valor que le asignemos a  $\bar{\theta}$ , partiendo de la expresión (3.59) y (3.60) se obtiene la función de transferencia.

### 3.3. IDENTIFICACIÓN EN TIEMPO DE UN TRAMO DE OLEODUCTO

El tramo de oleoducto que se analiza con datos experimentales perteneció a SOTE la prueba debió realizarse en condiciones normales de operación, se realiza un cambio del paso de set point de pequeña amplitud, ya que una parada imprevista produciría consecuencias de tiempo y dinero.

Se considera datos de la respuesta del sistema de un oleoducto tomada en el tiempo de acuerdo a la presión de descarga que se le aplica a éste obteniendo los datos de la Tabla 3.1, donde la respuesta del sistema es no oscilatoria.

Para identificar al sistema, se introdujo una función paso a la entrada del mismo y se observó su salida.

Se considera que el sistema funciona las 24 horas del día y los 365 días del año, y que generalmente el bombeo se realiza utilizando cinco bombas y manteniéndose una de respaldo, por tanto estas son las condiciones normales de operación. Se introdujo al set point una variación de 115 psi, obteniéndose variaciones de la presión de salida en función del tiempo. [7]

Se presentan los datos correspondientes a la variación en tiempo de la presión para su posterior identificación.

Tabla 3.1. Variación de la presión de descarga en función del tiempo

| <b>TIEMPO<br/>EN SEG</b> | <b><math>\Delta</math> PRESIÓN DE<br/>DESCARGAR EN PSI</b> |
|--------------------------|--|
| 0                        | 0  |
| 2                        | 1  |
| 6                        | 16   |
| 11                       | 35   |
| 12                       | 42   |
| 14                       | 49   |
| 15                       | 53   |
| 17                       | 62   |
| 18                       | 65   |
| 22                       | 79   |
| 24                       | 85   |
| 28                       | 92   |
| 31                       | 96   |
| 33                       | 99   |
| 36                       | 102  |
| 39                       | 105  |
| 43                       | 107  |
| 46                       | 108  |
| 49                       | 110  |
| 52                       | 111  |
| 56                       | 112  |

En el dominio del tiempo la respuesta de un sistema no oscilatorio tiene la siguiente forma:

$$C(t) = A + k_1 e^{-t/\tau_1} + k_2 e^{-t/\tau_2} + k_3 e^{-t/\tau_3} + \dots + k_n e^{-t/\tau_n} \quad (3.61)$$

Donde:

$A$  = amplitud de variación en la señal de salida

$\tau_i$  = constantes de tiempo del sistema.

$n$  = orden del sistema.

$k_i$  = constantes de proporcionalidad.

Si alguna constante de tiempo  $\tau_i$  es dominante, para tiempos grandes los términos de la Ecuación 3.62 que tienen las constantes de tiempo pequeñas tienden a cero, mientras que el término de la constante de tiempo grande continua siendo diferente de cero, por lo que se aproxima a:

$$C(t) \approx A + k_1 e^{-t/\tau_1} + 0 + 0 + \dots + 0 \quad (3.63)$$

$$C(t) = A + k_1 e^{-t/\tau_1} \quad (3.64)$$

De acuerdo a lo planteado en el tutorial 7 se sigue los pasos correspondientes para obtener los valores medidos del sistema.

1. Ingresar los valores de  $y(t)$  y  $t$  en forma matricial en Matlab considerando la transpuesta de cada una para formar la matriz *datos*.

```
>> t=[0 2 6 11 12 14 15 17 18 22 24 28 31 33 36 39 43 46 49 52 56]';
```

```
>> y=[0 1 16 35 42 49 53 62 65 79 85 92 96 99 102 105 107 108 110 111 112]';
```

```
>> datos=[t y];
```

2. Ingresar el valor de  $k_0$  y asignar una variable al valor absoluto de los valores de salida.

```
>> k0=115;
>> y2=abs(y-k0);
>> semilogy(t,y2,'b*');
>>grid
```

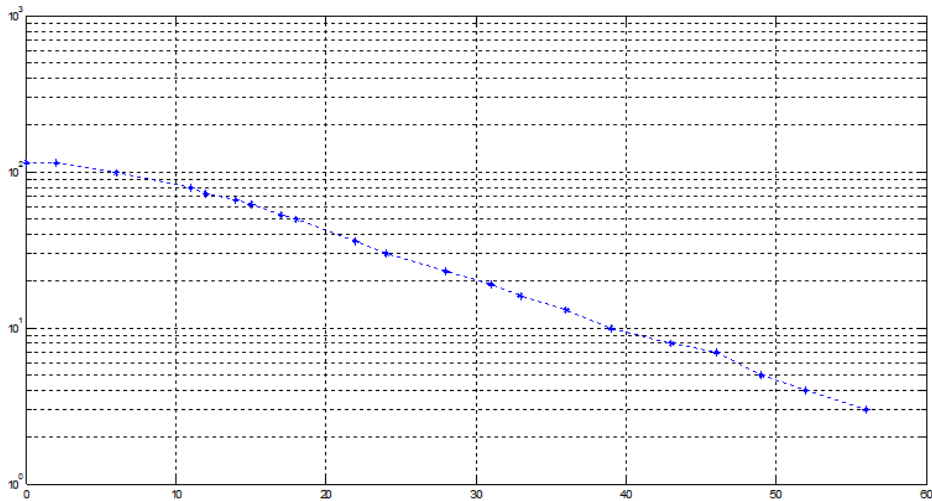


Figura 3.13 Representación logarítmica, para identificar al sistema

La Figura (3.13) nos muestra la representación logarítmica del sistema sin aproximación con la recta de acuerdo a los puntos obtenidos en la medición.

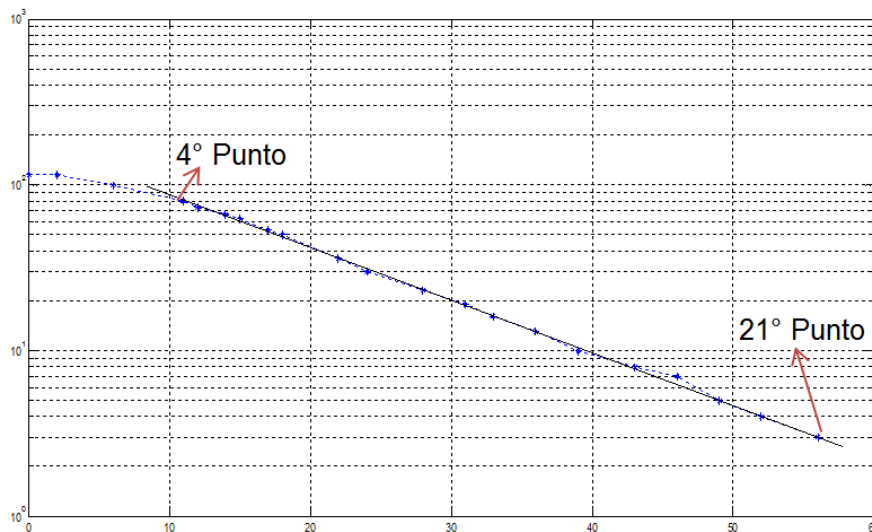


Figura 3.14 Representación logarítmica, para identificar al sistema con aproximación a una recta



3. Utilizar desde el cuarto punto al vigésimo primero de izquierda a derecha para trazar los puntos más cercanos a la recta como se observa en la Figura 3.14
4. Según la Ecuación (3.33) y aplicando el logaritmo natural de la expresión se obtiene :

$$\ln|y(t) - k_0| = \ln(k_1) - \frac{t}{\tau_1} \quad \rightarrow \quad y(t) = b_0 + m t$$

5. Para obtener la primera aproximación de la recta introducimos en Matlab los puntos utilizados en el punto tres de la primera función, además obtenemos los valores de la Ecuación de primer orden  $b_0$  y  $m$ .

```
>> y1=log(y2);
```

```
>> y0=y1 (4:21);
```

```
>> t0=t(4:21);
```

```
>> p=polyfit (t0, y0, 1)
```

Al aplicar la función polyfit obtenemos los valores de la recta  $y(t) = b_0 + m t$

p =

```
-0.0728  5.1917
```

6. Estos son los valores que se reemplazan en la Ecuación de primer orden:

$$y = b_0 + m t$$

$$b_0 = 5.1917$$

$$m = -0.0728$$

$$y = -0.0728t + 5.1917 \quad (3.65)$$

7. Reemplazar los valores obtenidos en la Ecuación (3.32) para obtener el valor de  $\tau_1$ .

$$k_1 = e^{b_0} = e^{5.1917} = 181.27 \quad \tau_1 = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{-0.0728} = 13.73$$

8. El signo de  $k_1$  es la diferencia de  $(y - t_{es})$ : signo negativo. Por lo que la primera aproximación a la función de la planta nos queda:

$$y(t) = k_0 - k_1 e^{-t/\tau_1} \quad (3.66)$$

$$y(t) = 115 - 181.27 e^{-t/13.73}$$

9. Para la segunda aproximación tenemos la expresión (3.67)

$$|y(t) - k_0 - k_1 e^{-t/\tau_1}| = k_2 e^{-t/\tau_2}$$

10. Se coloca los valores de  $k_1$  y  $\tau_1$  obteniendo el sistema con la primera iteración.

```
>> k1=-181.27;
>> ta1=13.73;
>> y_1=k1*exp(-t/ta1);
>> y3=abs(y-k0+y_1);
>> semilogy(t,abs(y3),'b+:')
```

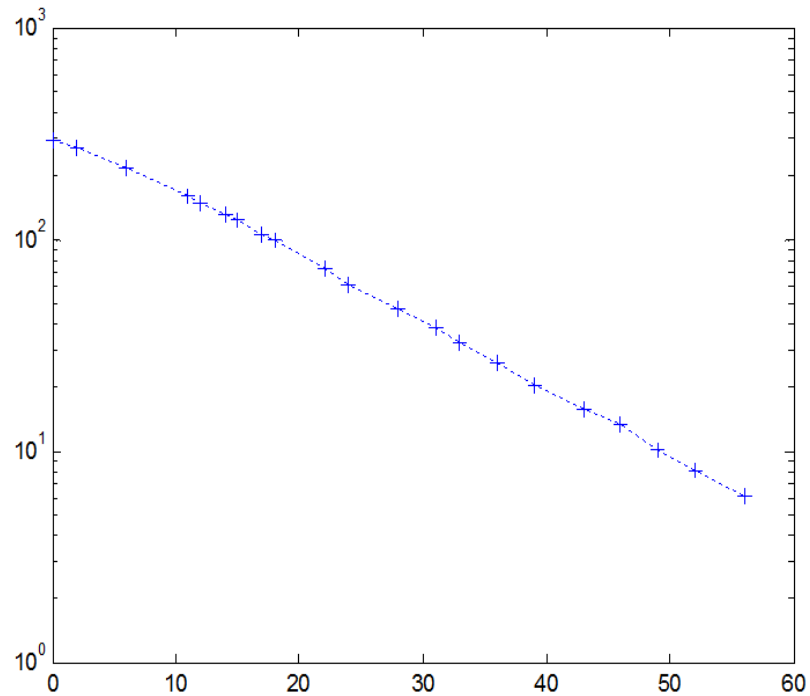


Figura 3.15 Sistema con primera iteración

11. Colocar una recta en los puntos más próximos de la primera iteración para formar una nueva recta e ir descartando los valores lejanos de la función según los datos establecidos inicialmente.

```
>> k1=-181.27;
>> ta1=13.73;
```

```
>> y_1=k1*exp(-t/ta1);
>> y3=abs(y-k0+y_1);
>> semilogy(t,abs(y3),'b+:')
>> grid
```

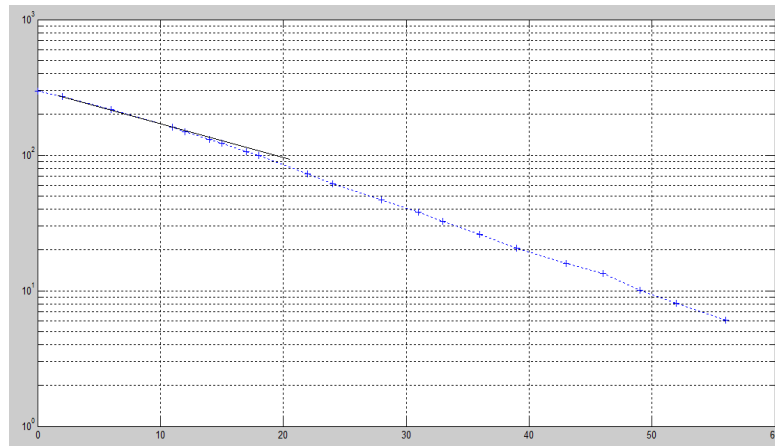


Figura 3.16 Aproximación segunda recta

12. Repetir el paso número 5 ,6 y 7 para obtener el valor de los parámetros de la recta y el valor de  $\tau_2$  .

```
>> y4=log(abs(y-k0+181.27*exp(-t/13.73)));
>> yo1=y4(2:4);
>> to1=t(2:4);
>> p1=polyfit(to1,yo1,1)
```

p1 =

-0.3889 4.7809

Estos son los valores que se reemplazan en la Ecuación de primer orden:

$$y = bo + mt$$

$$bo = 4.7809$$

$$m = -0.3889$$

Donde:

$$k_2 = e^{b_0} = e^{4.7809} = 119.21 \quad \tau_2 = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{-0.3889} = 2.57$$

13. Según la Ecuación 3.61 la Ecuación para  $c(t)$  es:

$$y(t) = 115 - 181.27e^{-\frac{t}{13.73}} + 119.21 e^{-\frac{t}{2.57}} + k_3 e^{-\frac{t}{\tau_3}} + \dots + k_n e^{-\frac{t}{\tau_n}} \quad (3.68)$$

14. Se grafica la Ecuación 3.68 para realizar una tercera iteración

15. Se calcula los parámetros de la tercera recta

```
>> y5=abs(y-k0+k1*exp(-t/ta1)-k2*exp(-t/ta2));
>> semilogy(t,abs(y5),'g*:')
>> y6=log(abs(y-k0+k1*exp(-t/13.73)-k2*exp(-t/ta2)));
>> yo2=y6(1:2);
>> to2=t(1:2);
>> p2=polyfit(to2,yo2,1)
```

p2 =

-0.7402 3.9692

Estos son los valores que se reemplazan en la Ecuación de primer orden:

$$y = bo + mt$$

$$bo = 3.9692$$

$$m = -0.7402$$

Donde:

$$k_3 = e^{b_0} = e^{3.9692} = 52.94 \quad \tau_3 = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{-0.7402} = 1.3509$$

16. Según la Ecuación 3.61 la Ecuación para  $c(t)$  es:

$$y(t) = 115 - 181.27e^{-\frac{t}{13.73}} + 119.21e^{-\frac{t}{2.57}} - 52.94e^{-\frac{t}{13509}} + \dots + k_n e^{-\frac{t}{\tau_n}}$$

(3.69)

17. Para obtener la función de transferencia se utiliza el comando `>>syms` y transformamos la expresión (3.35) al dominio de "s"

```
>> syms t s
```

```
>> y1=115-181.27*exp(-t/13.73)+119.21*exp(-t/2.57)-52.94*exp(-t/1.3509);
```

```
>> y2=laplace(y1,s)
```

```
y2 =
```

```
11921/(100*(s + 100/257)) - 18127/(100*(s + 100/1373)) - 2647/(50*(s + 10000/13509)) + 115/s
```

```
>> s=tf('s');
```

```
>> y3=11921/(100*(s + 100/257)) - 18127/(100*(s + 100/1373)) - 2647/(50*(s + 10000/13509)) + 115/s
```

Transfer function:

```
3.003e006 s^2 - 2.351e006 s + 1.206e006
```

```
-----
```

```
500000 s^4 + 6.011e005 s^3 + 1.851e005 s^2 + 1.049e004 s
```

```
>> g=y3*s
```

Transfer function:

```
3.003e006 s^3 - 2.351e006 s^2 + 1.206e006 s
```

```
-----
```

```
500000 s^4 + 6.011e005 s^3 + 1.851e005 s^2 + 1.049e004 s
```

18. Validación del modelo obtenido para verificar el comportamiento del modelo

```
>> t=[0 2 6 11 12 14 15 17 18 22 24 28 31 33 36 39 43 46 49 52 56]';
```

```
>> y=[0 1 16 35 42 49 53 62 65 79 85 92 96 99 102 105 107 108 110 111 112]';
```

```
>> step(g,60)
```

```
>> hold on
```

```
>> plot(t,y,'b*:')
```

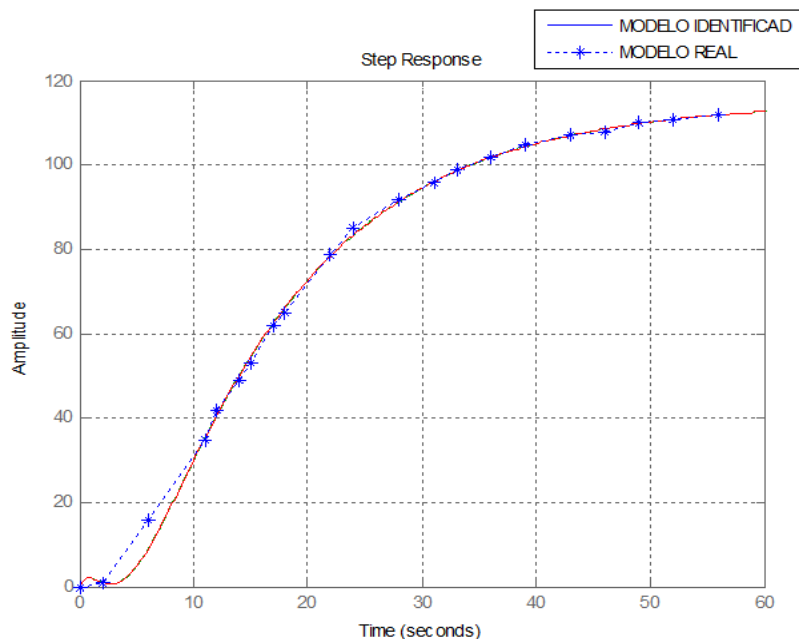


Figura 3.17 Respuesta a la función paso, identificando el sistema

De acuerdo a las gráficas el modelo real es la representación de la variación de la presión de descarga en función del tiempo, al ser excitado el sistema en lazo cerrado por una función paso, y el modelo identificado de acuerdo a los datos y función de transferencia obtenidos de acuerdo a las iteraciones realizadas.

Un modelo identificado presenta mayor validez al utilizar el coeficiente de regresión, el mismo que se obtiene aplicando la siguiente expresión:

$$\gamma^2 = \frac{\sum_{n=1}^n (c(t)_{ident} - \bar{y})^2}{\sum_{n=1}^n (c(t)_{real} - \bar{y})^2} \quad (3.70)$$

$$\bar{y} = y_{promedio} = \frac{1}{n} \sum_{n=1}^n c(t)_{real} \quad (3.71)$$

$\gamma^2$  = coeficiente de regresión

$n$  = número de puntos tomados

$c(t)_{real}$  = puntos medidos de la variable controlada

$c(t)_{ident}$  = función identificada

Para obtener el coeficiente de regresión es necesario realizar una tabla comparativa entre la función real y la identificada.

Tabla 3.2 Cálculos para encontrar el coeficiente de regresión

| tiempo           | $c(t)_{real}$ | $c(t)_{ident}$ | $(c(t)_{ident} - y_{promedio})^2$ | $(c(t)_{real} - y_{promedio})^2$ |
|------------------|---------------|----------------|-----------------------------------|----------------------------------|
| <b>0</b>         | 0             | 0              | 5308,163265                       | 5308,163265                      |
| <b>2</b>         | 1             | 1              | 5163,44898                        | 5163,44898                       |
| <b>6</b>         | 17            | 12             | 3703,591837                       | 3120,020408                      |
| <b>11</b>        | 35            | 36             | 1358,44898                        | 1433,163265                      |
| <b>12</b>        | 42            | 41,9           | 958,3446939                       | 952,1632653                      |
| <b>14</b>        | 49            | 51             | 477,7346939                       | 569,1632653                      |
| <b>15</b>        | 53            | 55             | 318,877551                        | 394,3061224                      |
| <b>17</b>        | 62            | 63             | 97,16326531                       | 117,877551                       |
| <b>18</b>        | 65            | 66             | 47,02040816                       | 61,73469388                      |
| <b>22</b>        | 79            | 78             | 26,44897959                       | 37,73469388                      |
| <b>24</b>        | 85            | 83,9           | 121,9446939                       | 147,4489796                      |
| <b>28</b>        | 92            | 91,72          | 355,8073796                       | 366,4489796                      |
| <b>31</b>        | 96            | 96,31          | 550,0365082                       | 535,5918367                      |
| <b>33</b>        | 99            | 98,86          | 676,1485796                       | 683,4489796                      |
| <b>36</b>        | 102           | 102,05         | 852,2229082                       | 849,3061224                      |
| <b>39</b>        | 105           | 105            | 1033,163265                       | 1033,163265                      |
| <b>43</b>        | 107           | 107,2          | 1179,431837                       | 1165,734694                      |
| <b>46</b>        | 108           | 107            | 1165,734694                       | 1235,020408                      |
| <b>49</b>        | 110           | 110            | 1379,591837                       | 1379,591837                      |
| <b>52</b>        | 111           | 111            | 1454,877551                       | 1454,877551                      |
| <b>56</b>        | 112           | 112            | 1532,163265                       | 1532,163265                      |
| <b>Sumatoria</b> | 1530          |                | 27760,36517                       | 27540,57143                      |

Se realizan 21 mediciones con las cuales se obtienen  $y_{promedio}$  y  $\gamma$  aplicando las expresiones (3.38) y (3.39).

$$\bar{y} = y_{promedio} = \frac{1}{n} \sum_{n=1}^n c(t)_{real} = \frac{1530}{21} = 72.8571$$

$$\gamma^2 = \frac{\sum_{n=1}^n (c(t)_{ident} - \bar{y})^2}{\sum_{n=1}^n (c(t)_{real} - \bar{y})^2} = \frac{27760,36517}{27540,57143} = 1,00798073$$

El coeficiente de regresión corrobora que la función identificada es válida puesto que toma el valor de 1,0079.

La función de transferencia se obtiene aplicando la transformada de Laplace la expresión 3.35 mediante matlab.

$$C(s) = \frac{3.003s^2 - 2.351s + 1.206}{0.5s^4 + 0.6011s^3 + 0.1851s^2 + 0.01049s} \quad (3.72)$$

Se considera que la entrada paso es de 115 psi, por lo que aplicando la transformada de Laplace se obtiene:

$$R(s) = \frac{115}{s} \quad (3.73)$$

Considerando que la función de transferencia es  $\frac{C(s)}{R(s)}$  se reemplaza la expresión 3.39 y 3.40 y se obtiene:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{3.003s^2 - 2.351s + 1.026}{57.5s^3 + 69.1265s^2 + 21.2865s + 1.2063} \quad (3.74)$$



### 3.4. BRAZO ROBÓTICO CON DOS GRADOS DE LIBERTAD CONSIDERANDO MOMENTOS DE INERCIA

Para la modelación del brazo robótico tipo RR, con dos grados de libertad se considera los momentos de inercia presentes en cada uno de los eslabones.

El modelo dinámico de los manipuladores facilita la simulación de movimientos de alta precisión.

Los manipuladores permiten realizar trabajos complejos para el ser humano y que impliquen riesgo físico, por lo que se puede manipular las variables de entrada para obtener el resultado requerido de acuerdo a la aplicación deseada, para éste caso el torque aplicado a cada uno de los eslabones hace variar las entradas del sistema. La Figura 3.18 muestra la ubicación de los eslabones y los momentos de inercia de acuerdo a los centros de masa de cada uno de ellos.

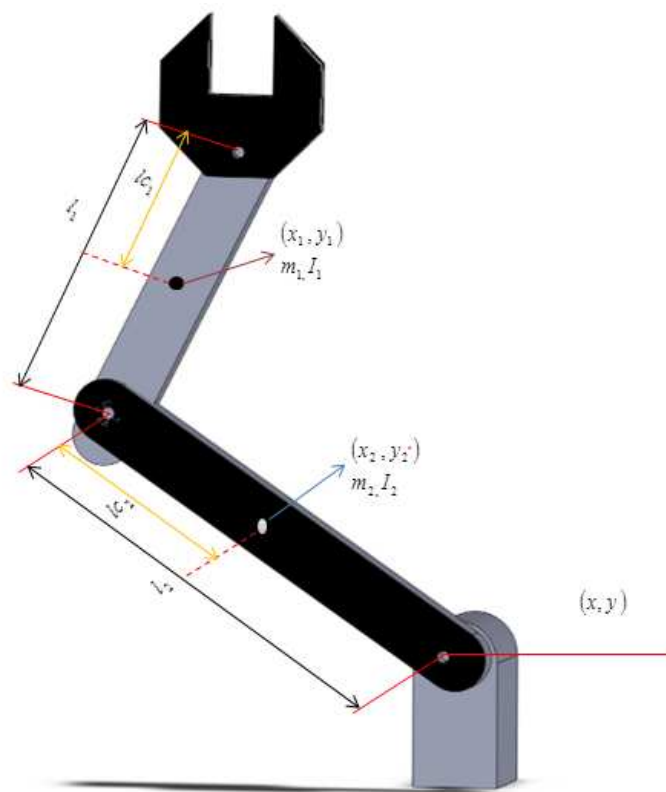


Figura 3.18 Manipulador con dos grados de libertad

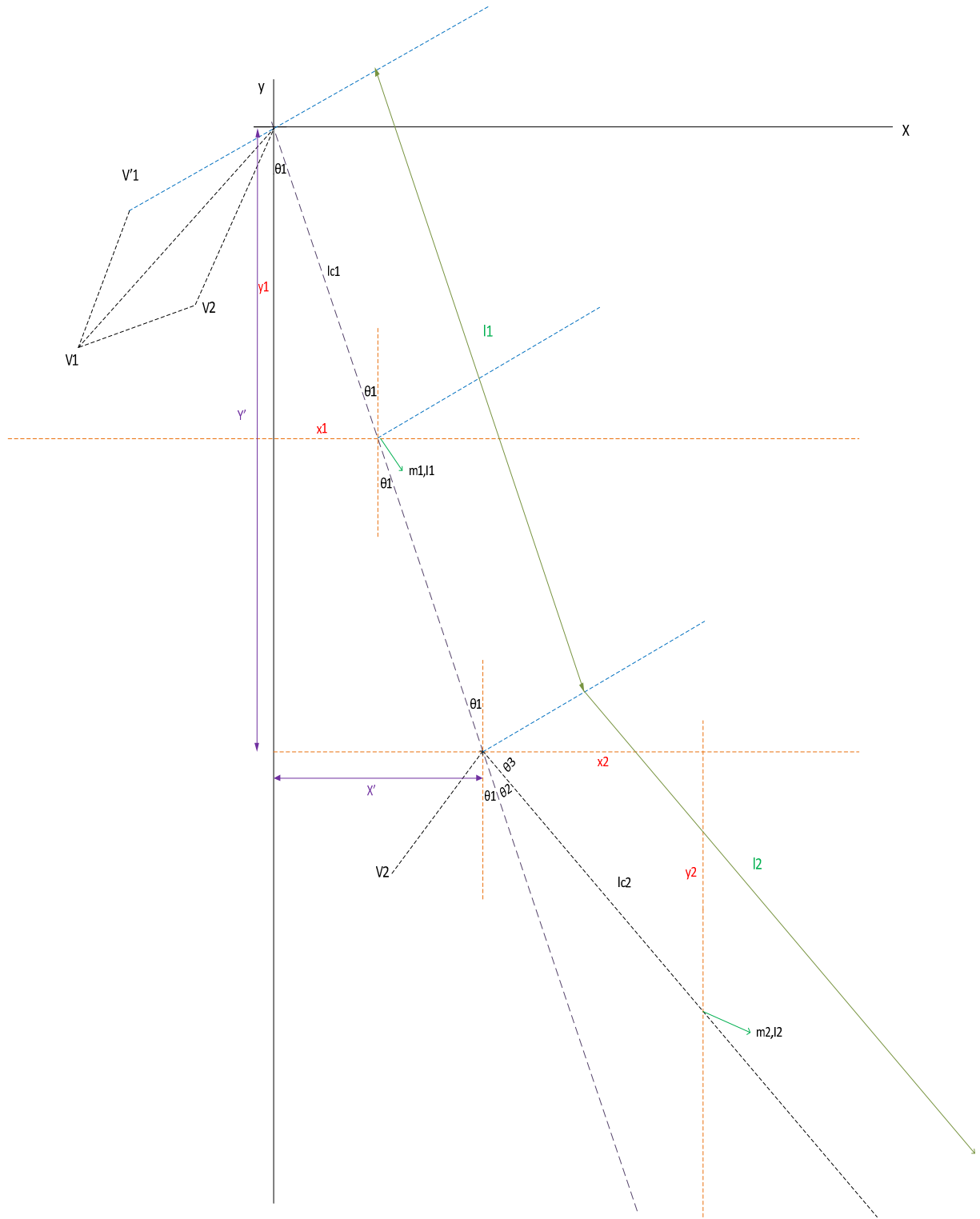


Figura 3.19 Manipulador con dos grados de libertad, ubicación de ángulos y longitudes

Para obtener las variables de estado del manipulador tipo RR se aplica el método de Euler – Lagrange considerando los momentos de inercia de cada eslabón y aplicando leyes fundamentales de geometría se obtiene los ángulos y longitudes con respecto a un punto específico.

1. Seleccionar variables generalizadas  $\theta_1, \theta_2$ .
2. Seleccionar coordenadas variacionales  $\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$ .
3. Calcular  $L = U^* - T$  ;  $J$ =co-contenido

Para un robot con dos grados de libertad se considera la energía cinética y potencial.

$\theta = \text{posición}$                        $\dot{\theta} = \text{velocidad}$

$$\begin{aligned} E_{cT} &= E_{c1} + E_{c2} \\ E_{pT} &= E_{p1} + E_{p2} \end{aligned} \quad (3.75)$$

$m_1$  y  $m_2$  masas de eslabones

$I_1$  y  $I_2$  momentos de inercia

$v_1$  y  $v_2$  rapidez centro de masa

$$v_1 = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 & \dot{y}_1 \end{pmatrix}^T \quad v_2 = \begin{pmatrix} \dot{x}_2 & \dot{y}_2 \end{pmatrix}^T$$

$$U^* = \frac{1}{2} c \left( \dot{e}_a \right)^2$$

$$U^* = K_1 \left( \theta, \dot{\theta} \right) + K_2 \left( \theta, \dot{\theta} \right) \quad (3.76)$$

$$U^* = \left[ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2 \right] + \left[ \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} I_2 \left( \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \right)^2 \right]$$

De acuerdo a la Figura 3.19 se tiene la obtiene los ángulos de acuerdo a leyes fundamentales de trigonometría.

$$\text{sen} \theta_1 = \frac{x_1}{lc_1}$$

$$\cos \theta_1 = \frac{y_1}{lc_1}$$

$$x_1 = lc_1 \text{sen} \theta_1 \quad (3.77)$$

$$y_1 = -lc_1 \cos \theta_1 \quad (3.78)$$

$$\text{sen } \theta_1 = \frac{x'}{l_1} = \frac{x_1}{lc_1} \qquad \cos \theta_1 = \frac{y'}{l_1}$$

$$\underline{x' = l_1 \text{sen } \theta_1} \Rightarrow x' = \frac{l_1 x_1}{lc_1} \quad (3.79) \qquad y' = l_1 \cos \theta_1 \quad (3.80)$$

$$\cos(\theta_2 + \theta_3) = \frac{x'}{l_1} = \frac{l_1 \text{sen } \theta_1}{l_1}$$

$$\theta = \theta_2 + \theta_3$$

$$\cos \theta_3 = \frac{x_2}{lc_2}$$

$$\cos(90 - \theta_1 - \theta_2) = \cos[90 - (\theta_1 + \theta_2)] \quad (3.81)$$

$$\cos(90 - \theta_1 - \theta_2) = \text{sen}(\theta_1 + \theta_2)$$

Reemplazando las ecuaciones de (3.76) y (3.77) en (3.79) y en (3.80) se obtiene:

$$\begin{aligned} x_2' &= \cos \theta_3 * lc_2 \\ x_2' &= \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) * lc_2 \qquad (3.82) \\ x_2 &= x' + x_2' \\ x_2 &= l_1 \text{sen } \theta_1 + lc_2 \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \end{aligned}$$

$$\text{sen } \theta_3 = \frac{y_2'}{lc_2} \qquad \text{sen } \theta_3 = \text{sen}(90 - \theta_1 - \theta_2) = \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

$$y_2' = lc_2 * \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

$$y_2 = -(l_1 \cos \theta_1 + lc_2 * \cos(\theta_1 + \theta_2)) \quad (3.83)$$

De acuerdo a las especificaciones de velocidad relativa de acuerdo al centro de masa se obtiene los siguientes resultados.

$$\begin{aligned}
 v_1 &= \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1(\cos \theta_1) \dot{\theta}_1 \\ l_1(\sin \theta_1) \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \\
 v_2 &= \begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dt}(l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)) \\ \frac{d}{dt}(-l_1 \cos \theta_1 - l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)) \end{bmatrix} \quad (3.84) \\
 v_2 &= \begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1(\cos \theta_1) \dot{\theta}_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ l_1(\sin \theta_1) \dot{\theta}_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

En la expresión 3.83 se obtiene el valor individual de los componentes de la velocidad.

$$\begin{aligned}
 v_1^2 &= \left( \dot{x}_1 \right)^2 + \left( \dot{y}_1 \right)^2 \\
 v_1^2 &= \left[ l_1(\cos \theta_1) \dot{\theta}_1 \right]^2 + \left[ l_1(\sin \theta_1) \dot{\theta}_1 \right]^2 \\
 v_1^2 &= l_1^2 \left( \dot{\theta}_1 \right)^2 \left[ \cos^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_1 \right] \\
 \underline{v_1^2} &= l_1^2 \left( \dot{\theta}_1 \right)^2 \quad (3.85)
 \end{aligned}$$

$$v_2^2 = \left( \dot{x}_2 \right)^2 + \left( \dot{y}_2 \right)^2 \quad (3.86)$$

Se reemplaza (3.84) y (3.85) en (3.86)

$$v_2^2 = \left[ l_1(\cos \theta_1) \dot{\theta}_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \right]^2 + \left[ l_1(\sin \theta_1) \dot{\theta}_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \right]^2$$

Se desarrolla la expresión de  $v_2^2$  y se aplica conceptos básicos de ingeniería, con lo que se obtiene:

$$v_2^2 = l_1^2 \left( \dot{\theta}_1 \right)^2 + (lc_2)^2 \cdot \left[ \left( \dot{\theta}_1 \right)^2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \left( \dot{\theta}_2 \right)^2 \right] + 2l_1lc_2 \left( \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \right) \cos \theta_2 \quad (3.87)$$

Las energías cinéticas asociadas a cada eslabón del robot rígido están determinadas por:

$$\begin{aligned} K_1(\theta, \dot{\theta}) &= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2 \\ K_1(\theta, \dot{\theta}) &= \frac{1}{2} m_1 (lc_1)^2 \left( \dot{\theta}_1 \right)^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2 \\ K_2(\theta, \dot{\theta}) &= \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} I_2 \left( \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \right)^2 \\ K_2(\theta, \dot{\theta}) &= \frac{1}{2} m_2 \left[ l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + (lc_2)^2 \left[ \dot{\theta}_1^2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2 \right] + 2l_1lc_2 \left( \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \right) \cos \theta_2 \right] + \frac{1}{2} I_2 \left( \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \right)^2 \\ K_2(\theta, \dot{\theta}) &= \frac{1}{2} m_2 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (lc_2)^2 \left[ \dot{\theta}_1^2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2 \right] + m_2 l_1 lc_2 \left( \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \right) \cos \theta_2 + \frac{1}{2} I_2 \left( \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \right)^2 \end{aligned} \quad 3.88$$

Se considera la energía potencial de cada eslabón asociados a la referencia x,y

$$\begin{aligned} U_T &= E_p \\ E_p &= E_{p1} + E_{p2} \\ E_{p1} &= m_1 \cdot g \cdot y_1 \\ E_{p1} &= -m_1 \cdot lc_1 \cdot g \cdot \cos \theta_1 \\ E_{p2} &= m_2 \cdot g \cdot y_2 \\ E_{p2} &= m_2 \cdot g \cdot \left[ -(l_1 \cos \theta_1 + lc_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)) \right] \\ E_{p2} &= -m_2 l_1 g \cos \theta_1 - m_2 lc_2 g \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{aligned} \quad (3.89)$$

$$U^* = K_1(\theta, \dot{\theta}) + K_2(\theta, \dot{\theta}) + U_T$$

$$T = \frac{1}{2L} (e_a)^2 \rightarrow \text{almacenador de esfuerzo}$$

$$T = 0$$

$$J = \frac{1}{2R} \left( \dot{e}_a \right)^2 \longrightarrow \text{co-contenido, no posee medio viscoso ni resistivo}$$

$$J = 0$$

$$\therefore L = U^* \quad (3.90)$$

Para obtener el Lagrangiano se reemplaza las expresiones (3.88) y (3.89) en (3.90)

$$L = \frac{1}{2}m_1(lc_1)^2(\dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(lc_2)^2\left[\dot{\theta}_1^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2\right] + m_2l_1lc_2\left(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\right)\cos\theta_2 + \frac{1}{2}I_2\left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right)^2 + m_1 \cdot lc_1 \cdot g \cdot \cos\theta_1 + m_2l_1g \cos\theta_1 + m_2lc_2g \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

4. Para cada coordenada variacional aplicar la Ecuación (2.17) la cual se presenta en el capítulo 2.

Para  $\theta_1$ :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right] - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = \tau_1 \quad (3.91)$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right] = m_1(lc_1)^2\ddot{\theta}_1 + I_1\ddot{\theta}_1 + m_2l_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2(lc_2)^2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + m_2l_1lc_2\left[\left(2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2\right)\cos\theta_2 - \left(2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right)\sin\theta_2\dot{\theta}_2\right] + I_2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right] = [m_1(lc_1)^2 + m_2l_1^2 + m_2(lc_2)^2 + 2m_2l_1lc_2\cos\theta_2]\ddot{\theta}_1 + [m_2(lc_2)^2 + m_2l_1lc_2\cos\theta_2]\ddot{\theta}_2 - 2m_2l_1lc_2\sin\theta_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - m_2l_1lc_2\sin\theta_2(\dot{\theta}_2)^2 + I_1\ddot{\theta}_1 + I_2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -m_1lc_1g\sin\theta_1 - m_2l_1g\sin\theta_1 - m_2lc_2g\sin(\theta_1 + \theta_2)$$

$$-\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -\{-[m_1lc_1 + m_2l_1]g\sin\theta_1 - m_2lc_2g\sin(\theta_1 + \theta_2)\}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right] - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = \tau_2 \quad (3.92)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right] &= m_2 (lc_2)^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 (lc_2)^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 lc_2 \left[ \ddot{\theta}_1 \cos \theta_2 - \dot{\theta}_1 \operatorname{sen} \theta_2 \dot{\theta}_2 \right] + I_2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\ \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right] &= m_2 (lc_2)^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 (lc_2)^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 lc_2 (\cos \theta_2) \ddot{\theta}_1 - m_2 l_1 lc_2 (\operatorname{sen} \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + I_2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\ - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} &= - \left\{ -m_2 lc_2 g \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2) - m_2 l_1 lc_2 \left( \left( \dot{\theta}_1 \right)^2 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \right) \operatorname{sen} \theta_2 \right\} \end{aligned}$$

Variables de estado

Modelo en Forma General

$$\tau = M(\theta) \ddot{\theta} + C(\theta, \dot{\theta}) + g(\theta)$$

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11}(\theta) & M_{12}(\theta) \\ M_{21}(\theta) & M_{22}(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{11}(\theta, \dot{\theta}) & C_{12}(\theta, \dot{\theta}) \\ C_{21}(\theta, \dot{\theta}) & C_{22}(\theta, \dot{\theta}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1(\theta) \\ g_2(\theta) \end{bmatrix} \quad (3.93)$$

Se obtiene los coeficientes de la expresión (3.93) de acuerdo a las expresiones que se hallaron anteriormente para (3.91) y (3.92)

$$M_{11}(\theta) = m_1 (lc_1)^2 + m_2 l_1^2 + m_2 (lc_2)^2 + 2m_2 l_1 lc_2 \cos \theta_2 + I_1 + I_2$$

$$M_{12}(\theta) = m_2 (lc_2)^2 + m_2 l_1 lc_2 \cos \theta_2 + I_2$$

$$M_{21}(\theta) = m_2 (lc_2)^2 + m_2 l_1 lc_2 \cos \theta_2 + I_2$$

$$M_{22}(\theta) = m_2 (lc_2)^2 + I_2$$

$$C_{11}(\theta, \dot{\theta}) = -m_2 l_1 lc_2 \operatorname{sen} \theta_2 \dot{\theta}_2$$

$$C_{12}(\theta, \dot{\theta}) = -m_2 l_1 lc_2 \operatorname{sen} \theta_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)$$

$$C_{21}(\theta, \dot{\theta}) = m_2 l_1 lc_2 \operatorname{sen} \theta_2 \dot{\theta}_1$$

$$C_{22}(\theta, \dot{\theta}) = 0$$

$$g_1(\theta) = [m_1 lc_1 + m_2 l_1] g \operatorname{sen} \theta_1 + m_2 lc_2 g \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)$$

$$g_2(\theta) = m_2 lc_2 g \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)$$



### 3.5. MODELACIÓN RECTOR QUÍMICO DE AGITACIÓN CONTINUA

Un reactor químico presenta un proceso no lineal y al añadirle agitación continua en la que interviene un flujo continuo de material reaccionante y del cual sale material reaccionado, necesita una agitación casi perfecta para alcanzar una fase líquida no demasiado viscosa.

El propósito de este tipo de reactores es conseguir una buena mezcla de materiales en su interior, presenta una camisa que cubre el reactor por medio del cual circula líquido refrigerante para que se lleve a cabo la reacción. [16]

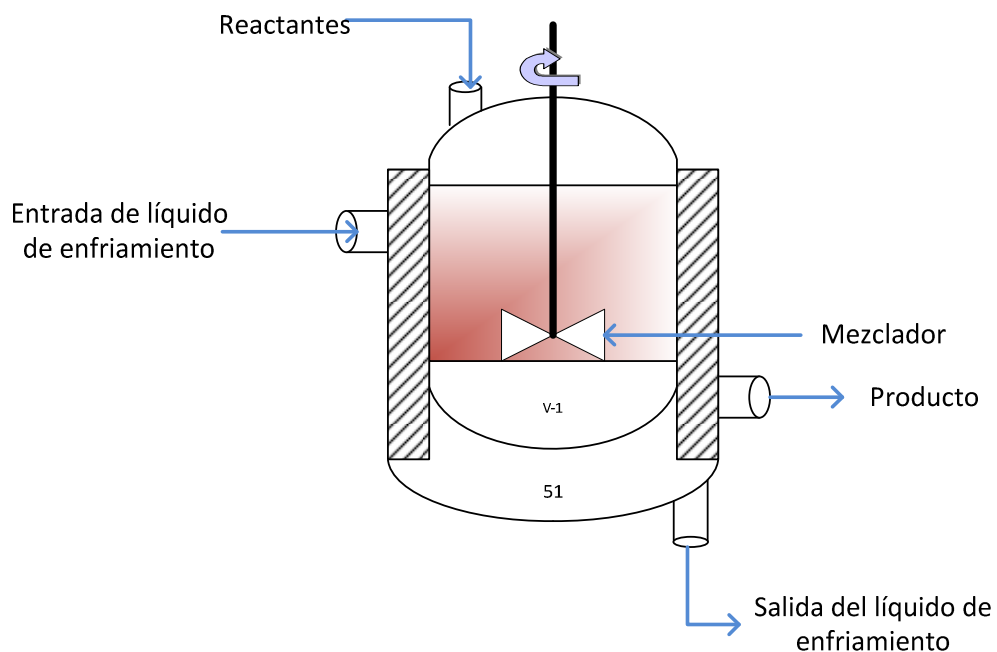


Figura 3.20 Reactor químico tipo continuo

Para la modelación de este reactor es necesario considerar:

- Pérdidas de calor circundantes despreciables.
- Propiedades termodinámicas, densidades, y las capacidades caloríficas de los reactantes y los productos iguales y constantes.
- Mezcla perfecta en el reactor, por lo tanto la concentración, presión y temperatura son iguales en cualquier punto del tanque.

- Temperaturas uniformes en ambas caras (camisa de enfriamiento y/o calentamiento).
- Volúmenes constantes  $V$ ,  $V_c$

El reactor es rodeado por una camisa de enfriamiento o calentamiento para remover el calor de reacción. [17]

Considerando las variables y restricciones del reactor se plantea los parámetros del sistema.

1. Variables de Entrada (manipuladas, perturbaciones)

**Manipuladas** { \* **Flujo del Producto A:**  $q$   
\* **Flujo del Líquido refrigerante:**  $q_c(t)$

**Perturbaciones** { \* **Concentración del producto A en la  
entrada del reactor**  $C_{A_i}(t)$   
\* **Temperatura de entrada del producto A:**  $T_i(t)$

2. Variables de salida

**Medidas** { \* **Concentración del Producto sobrante A  
en la entrada del reactor**  $C_A(t)$   
\* **Temperatura del reactor:**  $T(t)$   
\* **Temperatura del líquido refrigerante:**  $T_c(t)$

3. Restricciones  
Volumen del refrigerante
4. Características de operación  
Continuo

Tabla 3.3 Nomenclatura utilizada en el balance de masa de los productos

| Símbolo  | Significado   |
|----------|---|
| $\rho$   | Densidad de los productos y los reactivos [Kgmole/ $m^3$ ]  |
| $c_p$    | Capacidad calorífica a presión constante de los productos y los reactivos [Joules/(Kgmole- $^{\circ}C$ )] |
| $c_v$    | Capacidad calorífica a volumen constante [Joules/(Kgmole- $^{\circ}C$ )]                                  |
| $U$      | Coefficiente global de transferencia de calor [Joules/(hr- $m^2$ - $^{\circ}C$ )]                         |
| $A$      | Área de transferencia de calor $m^2$  |
| $AH$     | Calor de reacción [Joules/Kgmole] mol de reacción de A  |
| $T_s$    | Temperatura del vapor saturado $^{\circ}K$  |
| $q$      | Flujo del producto  |
| $C_{Ai}$ | Concentración de producto en la entrada.  |

Balance de masa del producto reactante "A", se considera el estado dinámico del reactor.

$$q.C_{Ai}(t) - Vr_A(t) - qC_A(t) = V \frac{\partial}{\partial t} C_A(t) \quad (3.94)$$

Para una reacción de primer orden

$$r_A(t) = K_0(t).e^{-E/RT(t)}.C_A(t) \quad (3.95)$$

Balance de energía en el reactor

$$q.\rho.c_p.T_i(t) - V.r_A(t).\Delta Hr - UA[T(t) - T_s(t)] - q.\rho.c_p.T(t) = V.\rho.c_v \frac{\partial}{\partial t} T(t) \quad (3.96)$$

Balance de energía en la cámara del líquido refrigerante

$$q_c(t) \cdot \rho_c \cdot c_{pc} \cdot T_{ci}(t) - UA[T(t) - T_c(t)] - q_c(t) \cdot \rho_c \cdot c_{pc} \cdot T_c(t) = V_c \cdot \rho_c \cdot c_{vc} \frac{\partial}{\partial t} T_c(t) \quad (3.97)$$

Las ecuaciones obtenidas de (3.94) a (3.97) son no lineales por lo cual es necesario aplicar métodos de linealización alrededor de las condiciones de operación.

La no linealidad se presenta en mayor porcentaje en la Ecuación de reacción 3.95 y a la cual se aplica las series de Taylor para obtener un modelo lineal con  $r_A(\bar{T}, \bar{C}_A)$  que constiuyen los puntos de operación

$$f(\bar{T}, \bar{C}_A) = f(\bar{T}^n, \bar{C}_A^n) + \left( \frac{\partial \bar{r}_A}{\partial \bar{C}_A} \right) (\bar{C}_A - \bar{C}_A^n) + \left( \frac{\partial \bar{r}_A}{\partial \bar{T}} \right) (\bar{T} - \bar{T}^n) + T.O.S \quad (3.98)$$

En el proceso de linealización se considera a los términos de orden superior de Taylor igual a cero , así como  $f(\bar{T}^n, \bar{C}_A^n) = 0$

$$f(\bar{T}, \bar{C}_A) = \left( \frac{\partial \bar{r}_A}{\partial \bar{C}_A} \right) (\bar{C}_A) + \left( \frac{\partial \bar{r}_A}{\partial \bar{T}} \right) (\bar{T}) \quad (3.99)$$

Considerando la Ecuación (3.95) para linealización se obtiene:

$$r_A = \bar{r}_A + f(\bar{T}, \bar{C}_A) \quad (3.100)$$

$$r_A = \bar{r}_A + \left( \frac{\partial \bar{r}_A}{\partial \bar{C}_A} \right) (\bar{C}_A) + \left( \frac{\partial \bar{r}_A}{\partial \bar{T}} \right) (\bar{T}) \quad (3.101)$$

$$r_A = \bar{r}_A + C_1 \cdot C_A(t) + C_2 \cdot T$$

Se encuentra los valores de  $C_1, C_2$  para reemplazarlos en las ecuaciones (3.94), (3.96), (3.97).

$$\bar{r}_A(t) = K_0(t) \cdot e^{-E/RT(t)} \cdot \bar{C}_A(t)$$

$$C_1 = \left. \frac{\partial \bar{r}_A}{\partial \bar{C}_A} \right|_{ic=0} = \frac{\partial}{\partial \bar{C}_A} [k_0 e^{-E/RT(t)} \bar{C}_A(t)] \quad (3.102)$$

$$C_1 = k_0 e^{-E/RT(t)}$$

$$C_2 = \left. \frac{\partial r_A}{\partial T} \right|_{ic=0} = \frac{\partial}{\partial T} \left[ k_0 e^{-E/RT(t)} \bar{C}_A(t) \right] \quad (3.103)$$

$$C_2 = \frac{k_0 \cdot E \cdot \bar{C}_A}{RT^2} e^{-E/RT(t)}$$

$$T(t) = T(t) - \bar{T} \quad (3.104)$$

$$C_A(t) = c_A(t) - \bar{c}_A$$

Se reemplaza la Ecuación (3.101) en (3.94) y (3.96) para obtener ecuaciones diferenciales lineales con dos incógnitas.

$$q \cdot C_{Ai}(t) - Vr_A(t) - qC_A(t) = V \frac{\partial}{\partial t} C_A(t)$$

$$q \cdot C_{Ai}(t) - V(\bar{r}_A + C_1 \cdot C_A(t) + C_2 \cdot T) - qC_A(t) = V \frac{\partial}{\partial t} C_A(t)$$

$$q \cdot C_{Ai}(t) - V \cdot \bar{r}_A - V \cdot C_1 \cdot C_A(t) - V \cdot C_2 \cdot T(t) - qC_A(t) = V \frac{\partial}{\partial t} C_A(t) \quad (3.105)$$

$$q \cdot \rho \cdot c_p \cdot T_i(t) - V \cdot r_A(t) \cdot \Delta Hr - UA[T(t) - T_s(t)] - q \cdot \rho \cdot c_p \cdot T(t) = V \cdot \rho \cdot c_v \frac{\partial}{\partial t} T(t)$$

$$q \cdot \rho \cdot c_p \cdot T_i(t) - V(\bar{r}_A + C_1 \cdot C_A(t) + C_2 \cdot T) \Delta Hr - UA[T(t) - T_s(t)] - q \cdot \rho \cdot c_p \cdot T(t) = V \cdot \rho \cdot c_v \frac{\partial}{\partial t} T(t)$$

$$q \cdot \rho \cdot c_p \cdot T_i(t) - V(\Delta Hr) \bar{r}_A - V(\Delta Hr) \cdot C_1 \cdot C_A(t) - V(\Delta Hr) C_2 \cdot T(t) - UA[T(t) - T_s(t)] - q \cdot \rho \cdot c_p \cdot T(t) = V \cdot \rho \cdot c_v \frac{\partial}{\partial t} T(t) \quad (3.106)$$

Para obtener ecuaciones diferenciales lineales considerando las variables de desviación se desprecia  $\bar{r}_A$

$$q \cdot C_{Ai}(t) - V \cdot C_1 \cdot C_A(t) - V \cdot C_2 \cdot T(t) - qC_A(t) = V \frac{\partial}{\partial t} C_A(t) \quad (3.107)$$

$$q \cdot \rho \cdot c_p \cdot T_i(t) - V(\Delta Hr) \cdot C_1 \cdot C_A(t) - V(\Delta Hr) C_2 \cdot T(t) - UA T(t) - q \cdot \rho \cdot c_p \cdot T(t) = V \cdot \rho \cdot c_v \frac{\partial}{\partial t} T(t) \quad (3.108)$$

De acuerdo a la Ecuación 3.107 se considera términos semejantes para expresarlo en función de la concentración de entrada, concentración de salida y su temperatura.

$$\begin{aligned}
q.C_{Ai}(t) - V.C_2.T(t) - C_A(t)(V.C_1 + q) &= V \frac{\partial}{\partial t} C_A(t) \\
q.C_{Ai}(t) - V.C_2.T(t) &= V \frac{\partial}{\partial t} C_A(t) + C_A(t)(V.C_1 + q) \quad (3.109) \\
\frac{q}{(V.C_1 + q)}.C_{Ai}(t) - \frac{V.C_2}{(V.C_1 + q)}.T(t) &= \frac{V}{(V.C_1 + q)} \cdot \frac{\partial C_A(t)}{\partial t} + C_A(t)
\end{aligned}$$

En la Ecuación 3.109 se observa los términos acoplados algebraicamente por lo que se reemplaza éstos valores por una constante y así reducir el tamaño de la expresión.

$$\begin{aligned}
\frac{V}{(V.C_1 + q)} \cdot \frac{\partial C_A(t)}{\partial t} + C_A(t) &= \frac{q}{(V.C_1 + q)}.C_{Ai}(t) - \frac{V.C_2}{(V.C_1 + q)}.T(t) \\
\tau_1 = \frac{V}{(V.C_1 + q)} \quad k_1 = \frac{q}{(V.C_1 + q)} \quad k_2 = \frac{V.C_2}{(V.C_1 + q)} \quad (3.110)
\end{aligned}$$

Se reemplaza 3.110 en 3.109

$$\begin{aligned}
\tau_1 \frac{\partial C_A(t)}{\partial t} + C_A(t) &= k_1.C_{Ai}(t) - k_2.T(t) \quad (3.111) \\
\tau_1 \cdot \dot{C}_A + C_A(t) &= k_1.C_{Ai}(t) - k_2.T(t)
\end{aligned}$$

Se despeja la derivada de mayor orden para obtener la primera Ecuación en variables de estado para el sistema.

$$\dot{C}_A = \frac{k_1}{\tau_1} C_{Ai}(t) - \frac{k_2}{\tau_1} T(t) - \frac{1}{\tau_1} C_A(t) \quad (3.112)$$

A la Ecuación 3.111 se aplica la Transformada de Laplace para obtener la primera función de salida del sistema.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} \left[ \tau_1 \cdot \dot{C}_A + C_A(t) = k_1.C_{Ai}(t) - k_2.T(t) \right] \\
\tau_1 \cdot s.C_A(s) + C_A(s) &= k_1.C_{Ai}(s) - k_2.T(s) \\
C_A(s) \cdot (\tau_1 \cdot s + 1) &= k_1.C_{Ai}(s) - k_2.T(s)
\end{aligned}$$

$$\underline{C_A(s) = \frac{k_1}{(\tau_1 s + 1)} \cdot C_{Ai}(s) - \frac{k_2}{(\tau_1 s + 1)} \cdot T(s)} \quad (3.113)$$

Se aplica el mismo mecanismo para la Ecuación 3.109 con lo cual se obtiene la segunda Ecuación de salida.

$$q \cdot \rho \cdot c_p \cdot T_i(t) - V(\Delta H r) \cdot C_1 \cdot C_A(t) - V(\Delta H r) C_2 \cdot T(t) - UA T(t) - q \cdot \rho \cdot c_p \cdot T(t) = V \cdot \rho \cdot c_v \frac{\partial T(t)}{\partial t}$$

$$q \cdot \rho \cdot c_p \cdot T_i(t) - V(\Delta H r) \cdot C_1 \cdot C_A(t) - T(t) [V(\Delta H r) C_2 + UA + q \cdot \rho \cdot c_p] = V \cdot \rho \cdot c_v \frac{\partial T(t)}{\partial t}$$

$$q \cdot \rho \cdot c_p \cdot T_i(t) - V(\Delta H r) \cdot C_1 \cdot C_A(t) = V \cdot \rho \cdot c_v \frac{\partial T(t)}{\partial t} + T(t) [V(\Delta H r) C_2 + UA + q \cdot \rho \cdot c_p]$$

$$\frac{q \cdot \rho \cdot c_p}{V(\Delta H r) C_2 + UA + q \cdot \rho \cdot c_p} \cdot T_i(t) - \frac{V(\Delta H r) \cdot C_1}{V(\Delta H r) C_2 + UA + q \cdot \rho \cdot c_p} \cdot C_A(t) = \frac{V \cdot \rho \cdot c_v}{V(\Delta H r) C_2 + UA + q \cdot \rho \cdot c_p} \frac{\partial T(t)}{\partial t} + T(t)$$

Se ordena algebraicamente la expresión anterior y se obtiene  $\tau_2, k_3, k_4$

$$\tau_2 = \frac{V \cdot \rho \cdot c_v}{V(\Delta H r) C_2 + UA + q \cdot \rho \cdot c_p}$$

$$k_3 = \frac{q \cdot \rho \cdot c_p}{V(\Delta H r) C_2 + UA + q \cdot \rho \cdot c_p}$$

$$k_4 = \frac{V(\Delta H r) \cdot C_1}{V(\Delta H r) C_2 + UA + q \cdot \rho \cdot c_p}$$

$$\tau_2 \frac{\partial T(t)}{\partial t} + T(t) = k_3 T_i(t) - k_4 C_A(t) \quad (3.114)$$

De acuerdo a la Ecuación (3.102) se despeja la derivada de mayor orden para obtener la segunda Ecuación para representar el sistema en variables de estado.

$$\begin{aligned} \tau_2 \cdot \dot{T}(t) + T(t) &= k_3 T_i(t) - k_4 C_A(t) \\ \dot{T}(t) &= \frac{k_3}{\tau_2} T_i(t) - \frac{k_4}{\tau_2} C_A(t) - \frac{1}{\tau_2} T(t) \end{aligned} \quad (3.115)$$

Transformada de Laplace para obtener la función de salida del sistema

$$\mathcal{L} \left[ \tau_2 \dot{T}(t) + T(t) = k_3 T_i(t) - k_4 C_A(t) \right]$$

$$\tau_2 \cdot s T(s) + T(s) = k_3 T_i(s) - k_4 C_A(s)$$

$$T(s) \cdot (\tau_2 \cdot s + 1) = k_3 T_i(s) - k_4 C_A(s)$$

$$\underline{T(s) = \frac{k_3}{\tau_2 s + 1} T_i(s) - \frac{k_4}{\tau_2 s + 1} C_A(s)} \quad (3.116)$$

Considerando las ecuaciones (3.112) y (3.113) se halla las matrices que representan las variables de estado

$$\begin{bmatrix} \dot{C}_A(t) \\ \dot{T}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\tau_1} & -\frac{k_2}{\tau_1} \\ -\frac{1}{\tau_2} & -\frac{k_4}{\tau_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_A(t) \\ T(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{k_1}{\tau_1} & 0 \\ 0 & \frac{k_3}{\tau_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{Ai}(t) \\ T_i(t) \end{bmatrix} \quad (3.117)$$

$$Y = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} C_A(t) \\ T(t) \end{bmatrix}$$



## **CAPÍTULO 4**

### **PROGRAMACIÓN DEL SOFTWARE PARA IDENTIFICACIÓN Y SIMULACIÓN**

#### **4.1. SIMULACIÓN**

La simulación es el proceso de modelar un sistema real y llevar a cabo experiencias con él, con la finalidad de comprender el comportamiento del sistema o evaluar nuevas estrategias dentro de los límites impuestos por un cierto criterio o un conjunto de ellos, para el funcionamiento del sistema. El objetivo de la simulación es la mejor comprensión del movimiento del mecanismo o sistema y poder predecir el movimiento del sistema sin necesidad de usar un prototipo físico que resultaría muy costoso. [18]

##### **4.1.1. SIMULACIÓN DINÁMICA**

Ésta simulación obtiene los valores de fuerzas y momentos requeridos en los actuadores con la finalidad de conseguir un comportamiento deseado en el movimiento del robot cuando se llega a la etapa de control en los sistemas. [18]

##### **4.1.2. SIMULACIÓN CINEMÁTICA**

La cinemática, se centra en el estudio del movimiento en función de su geometría. Entre las aplicaciones inmediatas se encuentran la posibilidad de utilizarlo como modelo matemático de partida para el diseño del controlador, dado que en ciertas ocasiones los sistemas que van a ser controlados no tienen información necesaria para iniciar el diseño de los mismos.

Un sistema en el que se conozca su función de transferencia o variables de estado presenta facilidades para hallar los puntos de estabilidad. [19]

## 4.2. MATLAB

Para la programación que se utiliza en la identificación y simulación de los casos de estudio se maneja MATLAB, un software de alto desempeño diseñado para realizar cálculos técnicos. MATLAB integra el cálculo, la visualización y la programación en un ambiente fácil de utilizar donde los problemas y las soluciones se expresan en una notación matemática.

MATLAB es un sistema interactivo cuyo elemento básico de datos no requiere de un es el arreglo previo. Esto permite resolver muchos problemas computacionales, específicamente aquellos que involucren vectores y matrices. [20]

MATLAB se utiliza ampliamente en:

- Cálculos numéricos
- Desarrollo de algoritmos
- Modelado, simulación y prueba de prototipos
- Análisis de datos, exploración y visualización
- Graficación de datos con fines científicos o de ingeniería
- Desarrollo de aplicaciones que requieran de una interfaz gráfica de usuario (GUI, Graphical User Interface).

### 4.2.1. SIMULINK

Simulink es un software hecho para modelar, simular y analizar sistemas dinámicos. Soporta tanto sistemas lineales como no lineales, modelando en tiempo continuo, tiempo discreto o en forma mixta. Los sistemas a modelar también pueden tener velocidades múltiples, es decir, tener diferentes partes que se manejen a cinéticas diferentes. [21]

### 4.3. SOFTWARE DE SIMULACIÓN

El presente software contiene 5 sistemas de simulación y una opción de identificación a partir de datos experimentales.

**Modelo 1:** Sistema Mecánico Masa-Amortiguador -Resorte

**Modelo 2:** Brazo Robótico

**Modelo 3:** Reactor Químico de Agitación Continua

**Modelo 4:** Robot Móvil Trayectorias

**Modelo 5:** Robot móvil Simulink

**Identificación:** Modelos identificados-datos experimentales

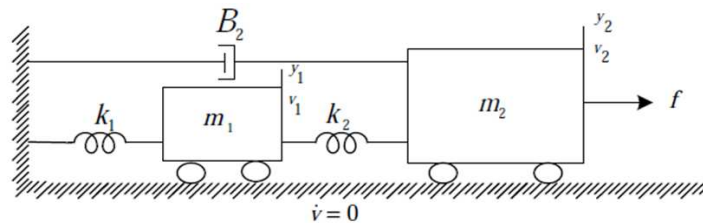


Figura 4.1 Software de Simulación e Identificación

El software desarrollado permite ingresar datos parametrizables para cada modelo, los mismo que permiten obtener una respuesta adecuada de los sistemas en lazo abierto sin necesidad de incurrir en la deducción de los modelos matemáticos y largas horas de programación, éste software fue desarrollado para brindar facilidad al estudiante en el entendimiento de la modelación e identificación.

#### 4.4. SIMULACIÓN DE UN SISTEMA MECÁNICO-MASA RESORTE-AMORTIGUADOR

Para la realización de esta simulación fue necesario obtener las ecuaciones diferenciales del sistema, las mismas que se hallaron en el capítulo dos, Primer Tutorial, Figura 2.2



Para utilizar el software adecuadamente se debe dar click en el botón Sistema Mecánico y colocar el valor requerido en cada campo, las características varían de acuerdo a los parámetros que se ingresen, todos los campos son obligatorios, caso contrario la simulación desplegará un mensaje de error.

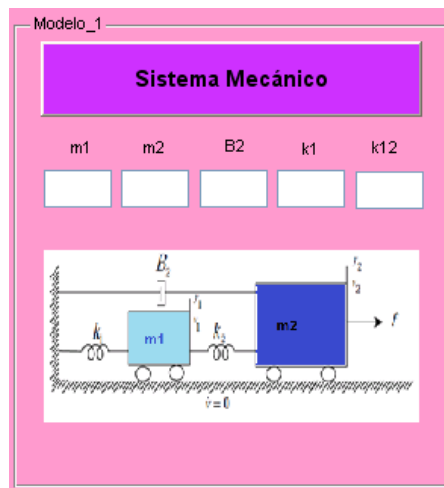


Figura 4.2 Software de Simulación Modelo 1



Figura 4.3 Error en parámetros de entrada

La programación del módulo 1 se la realiza a partir de las ecuaciones planteadas en el Capítulo 2 y se despeja la de mayor orden para construir el diagrama de flujo con dos salidas.

Las ecuaciones que se desprenden de este sistema debido a sus dos masas son:

$$m_2 \ddot{y}_2 + B_2 \dot{y}_2 + k_{12}(y_2 - y_1) = f \quad (4.1)$$

$$\ddot{y}_2 = \frac{f}{m_2} - \frac{B_2}{m_2} \dot{y}_2 - \frac{k_{12}}{m_2} (y_2 - y_1)$$

$$m_1 \ddot{y}_1 + k_1 y_1 = k_{12}(y_2 - y_1) \quad (4.2)$$

$$\ddot{y}_1 = \frac{k_{12}}{m_1} y_2 - \left( \frac{k_{12}}{m_1} + \frac{k_1}{m_1} \right) y_1$$

Para realizar la simulación es indispensable colocar valores numéricos a los parámetros del sistema.

Tabla 4.1 Parámetros del sistema

|                |              |
|----------------|--------------|
| $f$            | 6 [Nm]       |
| $m_1$          | 1 [Kg]       |
| $m_2$          | 2 [Kg]       |
| $k_1 = k_{12}$ | 1<br>[N/m]   |
| $B_2$          | 2<br>[N/m/s] |

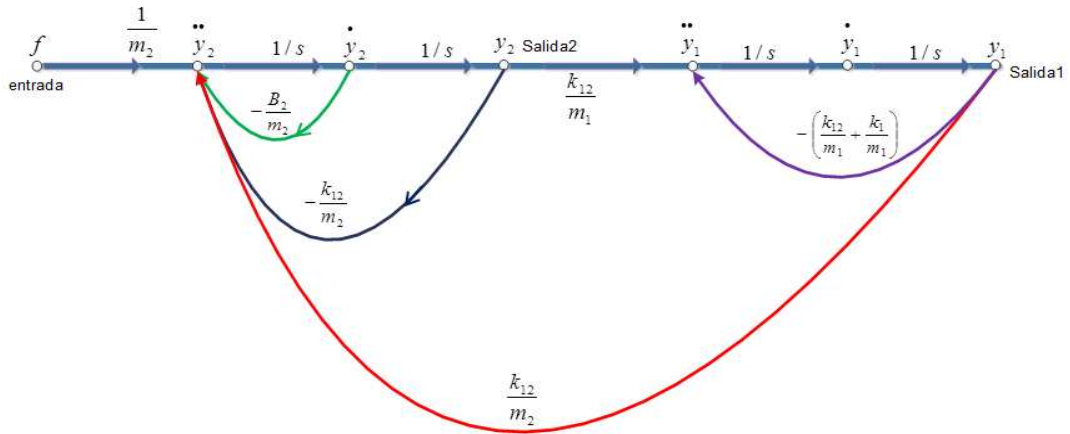


Figura 4.4 Diagrama de flujo-sistema mecánico

En la Figura 4.4 se presenta el diagrama de flujo del sistema mecánico masa, resorte amortiguador. Se considera que el diagrama de flujo representa un conjunto de ecuaciones dinámicas simultáneas. Al construir un diagrama de flujo los puntos de unión o nodos sirven para representar variables y por consiguiente los nodos están conectados por segmentos lineales llamados ramas, cada rama posee una ganancia colocada en la parte inferior o superior de la flecha, la cual se coloca en la dirección en la que se va a transmitir la señal.

Éste tipo de diagramas son la representación entrada-salida para sistemas lineales que son modelados por ecuaciones algebraicas. [22]

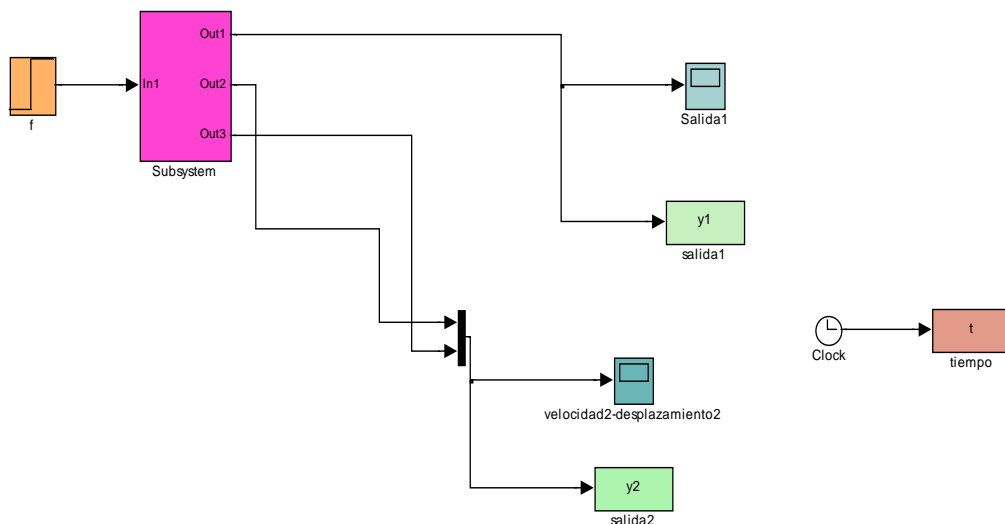


Figura 4.5 Sistema mecánico Simulink

A partir del diagrama de flujo que se presenta en la Figura 4.4 se procede a la construcción del sistema en Simulink el cual está creado con un subsistema para proveer de mayores herramientas de simulación, esto se observa en la Figura 4.6, la variable  $t$  conectada con la herramienta clock permite importar las gráficas obtenidas al espacio de trabajo de Matlab.

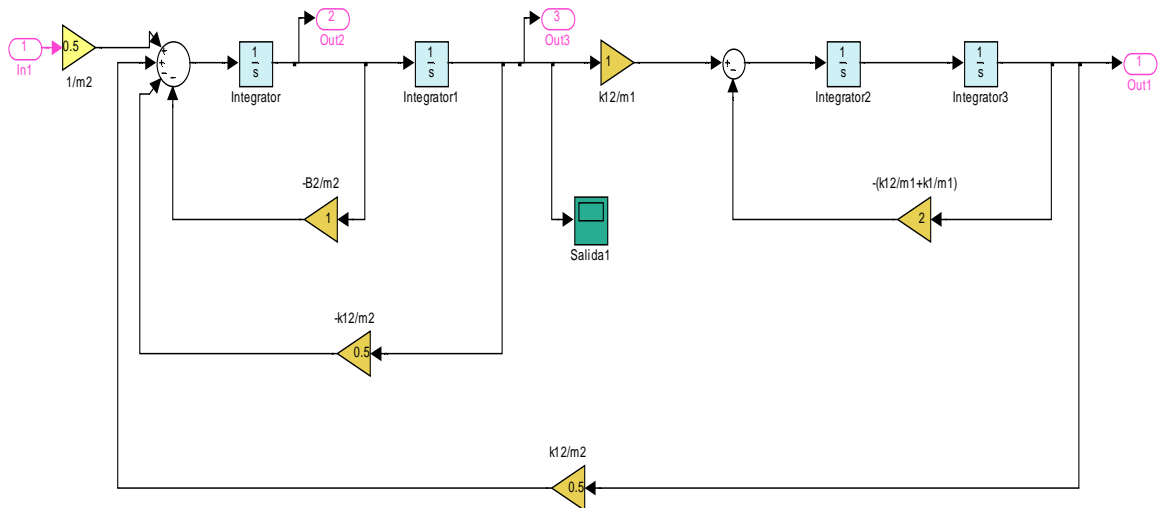


Figura 4.6 Subsistema sistema mecánico

La Figura 4.6 presenta el subsistema de la Figura 4.5 , éste se construye mediante la utilización de los bloques de ganancias y los integradores para obtener velocidad y desplazamiento del sistema.

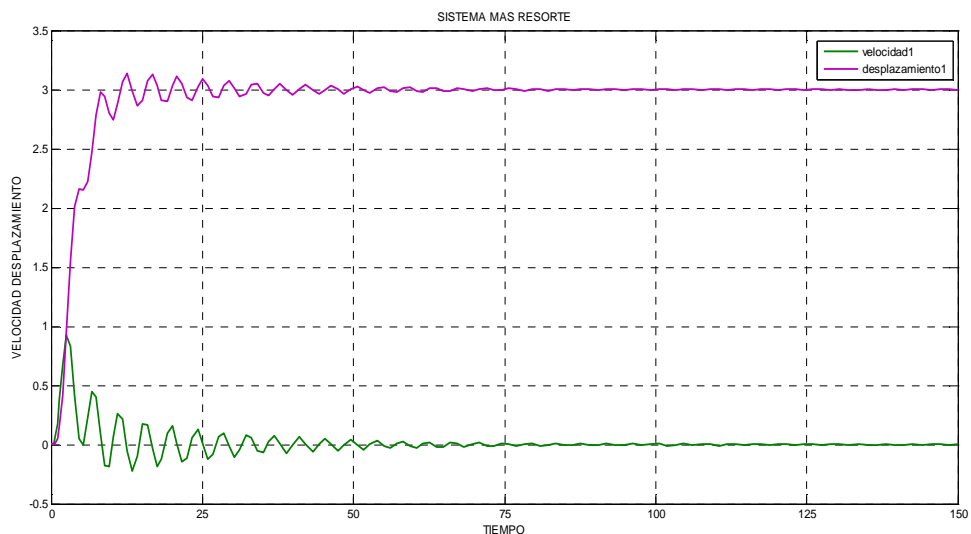


Figura 4.7 Velocidad y desplazamiento masa1

La Figura 4.7 presenta la respuesta de desplazamiento y velocidad para  $m_1$  la cual está sujeta a dos resortes uno a la derecha y otro a la izquierda por lo que el desplazamiento será oscilatorio debido al movimiento que presenta la masa en el sistema, la masa1 posee una máxima velocidad de 0.8 m/s y su tiempo de estabilización es de 75 segundos

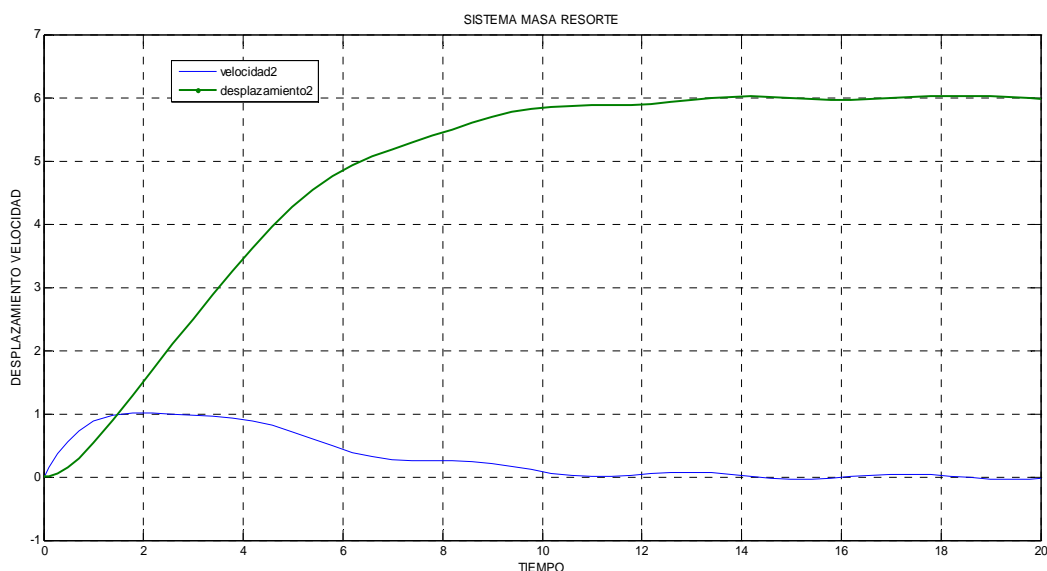


Figura 4.8 Velocidad desplazamiento masa2

La masa  $m_2$  inicia en reposo por lo que el movimiento incrementa al aplicar la fuerza externa sobre el sistema y se mantiene con su máxima velocidad por 5 segundos, al cabo de éste tiempo el sistema vuelve al reposo puesto que las masas conectadas entre sí llegan a su posición original gracias al amortiguador conectado en la masa 2.

La respuesta de desplazamiento muestra un sistema sobreamortiguado puesto que no presenta sobreimpulso.

El tiempo de establecimiento es aproximadamente 10 segundos, el sistema presenta dos polos complejos conjugados y un cero complejo conjugado en la salida de la masa1, los mismos que se presentan en la Figura 4.9, obtenida a través de la herramienta de Matlab-Sisotool, la cual permite graficar los polos y ceros del sistema así como el diagrama de Bode tanto en fase como magnitud.



De acuerdo a los parámetros de la tabla 4.1 se obtiene las variables de estado del sistema masa-resorte-amortiguador en valores numéricos, puesto que la definición general se deduce en el capítulo 2, tutorial uno, Ecuación (2.4).

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0 & -0.5 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

(4.3)

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = 0$$

Las variables de estado del sistema permiten obtener la función de transferencia necesaria para hallar los valores propios que son los polos del sistema y los ceros se obtienen mediante la herramienta Sisotool.

$$p_1 = -0.0668 \pm 1.4829i$$

$$p_2 = -0.4332 \pm 0.7022i$$

$$c = -0.0034 \pm 1.139i$$

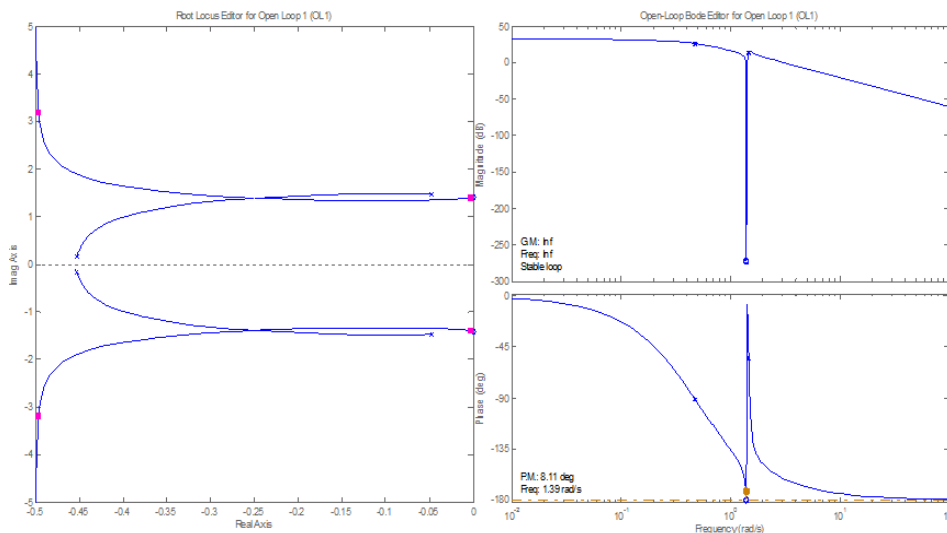


Figura 4.9 Polos y ceros masa2

#### 4.5. BRAZO ROBÓTICO CON DOS GRADOS DE LIBERTAD CON PAR VARIABLE Y COMPORTAMIENTO DE LA VELOCIDAD

Un brazo robótico con dos grados de libertad presenta ecuaciones no lineales las cuales se obtienen por métodos de modelación presentados en el Capítulo dos y tres, en el Capítulo 3 se obtiene las ecuaciones diferenciales y el modelo en variables de estado del sistema .

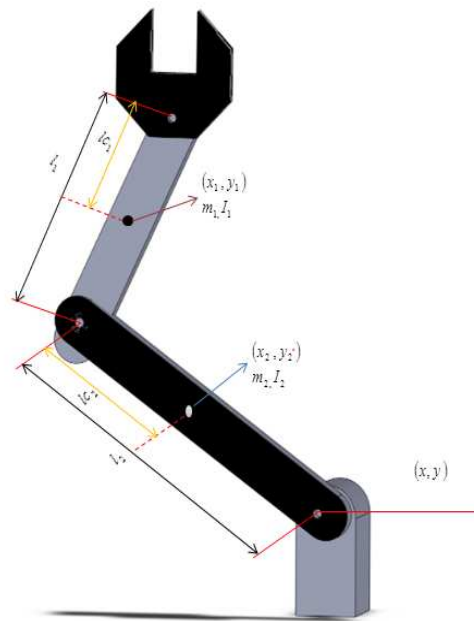


Figura 4.10 Manipulador tipo RR

Las ecuaciones que se desprenden del sistema se deducen detalladamente en el Capítulo 3, en este capítulo se presenta ecuaciones generales del sistema para un mejor entendimiento de los algoritmos de simulación.

$$\tau = M(\theta)\ddot{\theta} + C(\theta, \dot{\theta}) + g(\theta)$$

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11}(\theta) & M_{12}(\theta) \\ M_{21}(\theta) & M_{22}(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{11}(\theta, \dot{\theta}) & C_{12}(\theta, \dot{\theta}) \\ C_{21}(\theta, \dot{\theta}) & C_{22}(\theta, \dot{\theta}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1(\theta) \\ g_2(\theta) \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

La Ecuación 4.4 describe el modelo dinámico inverso del manipulador tipo RR el mismo que está compuesto por  $M(\theta)$  que es la matriz de inercia,  $C(\theta, \dot{\theta})$  matriz de coriolis y aceleración centrífuga, además de  $g(\theta)$  que es la matriz de gravedad.

La matriz de inercia o de masas  $M(\theta)$  es una matriz simétrica, definida positiva, está acotada superior e inferiormente, ya que sus elementos dependen de las variables  $\theta_i$ , de las articulaciones mediante funciones trigonométricas de senos y cosenos que aparecen siempre en el numerador.

La matriz de coriolis y aceleración centrífuga  $C(\theta, \dot{\theta})$  tiene términos cuadráticos en  $\dot{\theta}_i$  y corresponden a las fuerzas centrífugas de las articulaciones, y términos en  $\theta_i \theta_j$  que corresponden las fuerzas de coriolis.

La matriz de gravedad  $g(\theta)$  representa a todos los términos en los que aparece la gravedad, los cuales dependen de senos y cosenos de las variables articulares.  
[23]

Tabla 4.2 Parámetros del sistema

|        |                              |
|--------|------------------------------|
| $m_1$  | 2.97 [kg]                    |
| $m_2$  | 1.56 [kg]                    |
| $l_1$  | 0.2 [m]                      |
| $l_2$  | 0.15 [m]                     |
| $lc_1$ | 0.08373 [m]                  |
| $lc_2$ | 0.07224 [m]                  |
| $I_1$  | 0.0226 [kg.m <sup>2</sup> ]  |
| $I_2$  | 0.00641 [kg.m <sup>2</sup> ] |
| $g$    | 9.81 [m/s <sup>2</sup> ]     |

Se aplica los parámetros presentados en la Tabla 4.2 a las ecuaciones que se deducen en el Capítulo 3 para el brazo robótico de dos grados de libertad considerando los momentos de inercia en cada eslabón.

$$\begin{aligned}
 M_{11}(\theta) &= m_1(lc_1)^2 + m_2l_1^2 + m_2(lc_2)^2 + 2m_2l_1lc_2 \cos \theta_2 + I_1 + I_2 \\
 M_{12}(\theta) &= m_2(lc_2)^2 + m_2l_1lc_2 \cos \theta_2 + I_2 \\
 M_{21}(\theta) &= m_2(lc_2)^2 + m_2l_1lc_2 \cos \theta_2 + I_2 \\
 M_{22}(\theta) &= m_2(lc_2)^2 + I_2 \\
 C_{11}(\theta, \dot{\theta}) &= -m_2l_1lc_2 \text{sen} \theta_2 \dot{\theta}_2 \\
 C_{12}(\theta, \dot{\theta}) &= -m_2l_1lc_2 \text{sen} \theta_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\
 C_{21}(\theta, \dot{\theta}) &= m_2l_1lc_2 \text{sen} \theta_2 \dot{\theta}_1 \\
 C_{22}(\theta, \dot{\theta}) &= 0 \\
 g_1(\theta) &= [m_1lc_1 + m_2l_1]g \text{sen} \theta_1 + m_2lc_2g \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \\
 g_2(\theta) &= m_2lc_2g \text{sen}(\theta_1 + \theta_2)
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Las ecuaciones presentadas en la expresión (4.5) constituyen el modelo dinámico de un brazo robótico tipo RR considerando sus momentos de inercia, éstas ecuaciones se implementan dentro de una función embebida que contienen los parámetros numéricos necesarios para ejecutar el código incluido dentro de ésta función (Embedded MATLAB Function).

Para crear subsistemas tales como el de la Figura 4.11 es necesario definir un sistema general, que abarque las entradas y salidas del mismo, al estar completamente seguros del sistema que se implementó en base a las ecuaciones obtenidas se procede a elegir los elementos que se desea estén dentro del bloque, cabe recalcar que una vez creado los bloques no se puede retroceder en el proceso ni cambiar las entradas y salidas seleccionadas.

Las señales de prueba que se emplean en el programa principal constan de dos tipos, una señal tipo paso y una sinusoidal, lo que permite analizar el comportamiento del sistema ante comportamientos espontáneos y dinámicos,

respectivamente. Las dos señales de prueba se encuentran conectadas mediante un switch manual que permite el manejo de la señal individualmente para cada subsistema lo que facilita el análisis del modelo dinámico encargado de hallar la relación entre las fuerzas que actúan sobre un cuerpo y el movimiento que en él se origina.

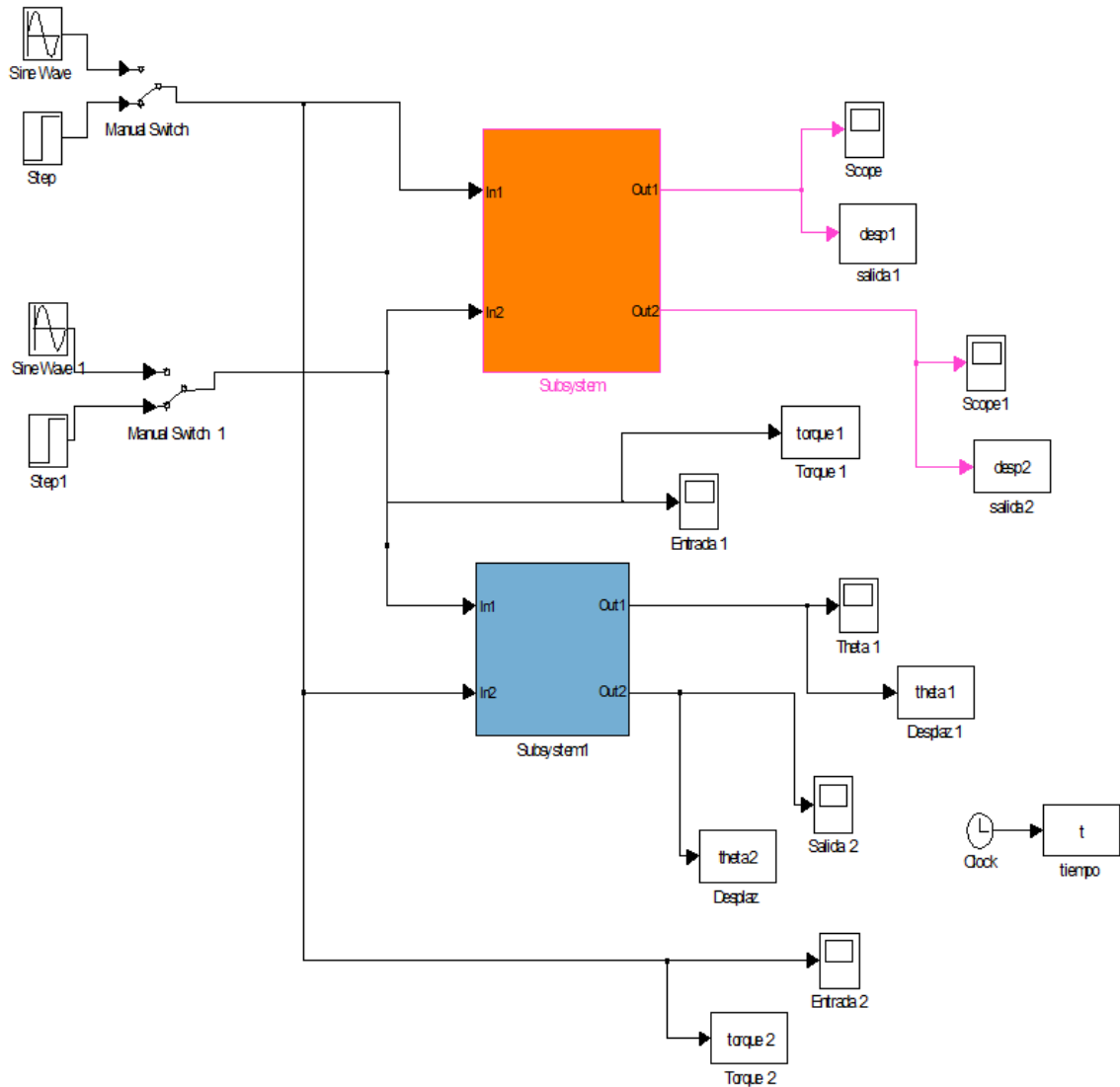


Figura 4.11 Sistema Brazo Robótico

Para obtener un resultado adecuado de las gráficas presentadas en Simulink es necesario emplear la herramienta To Workspace la misma que traslada el gráfico a Matlab y facilita la visualización del resultado sin necesidad de ejecutar el osciloscopio.

La Figura 4.11 presenta el sistema implementado para mostrar el desplazamiento, torque y velocidad del prototipo de dos grados de libertad tipo RR, el mismo que consta de subsistemas, conteniendo dentro de éstos nuevos programas que se manejan con las ecuaciones obtenidas del modelo matemático.

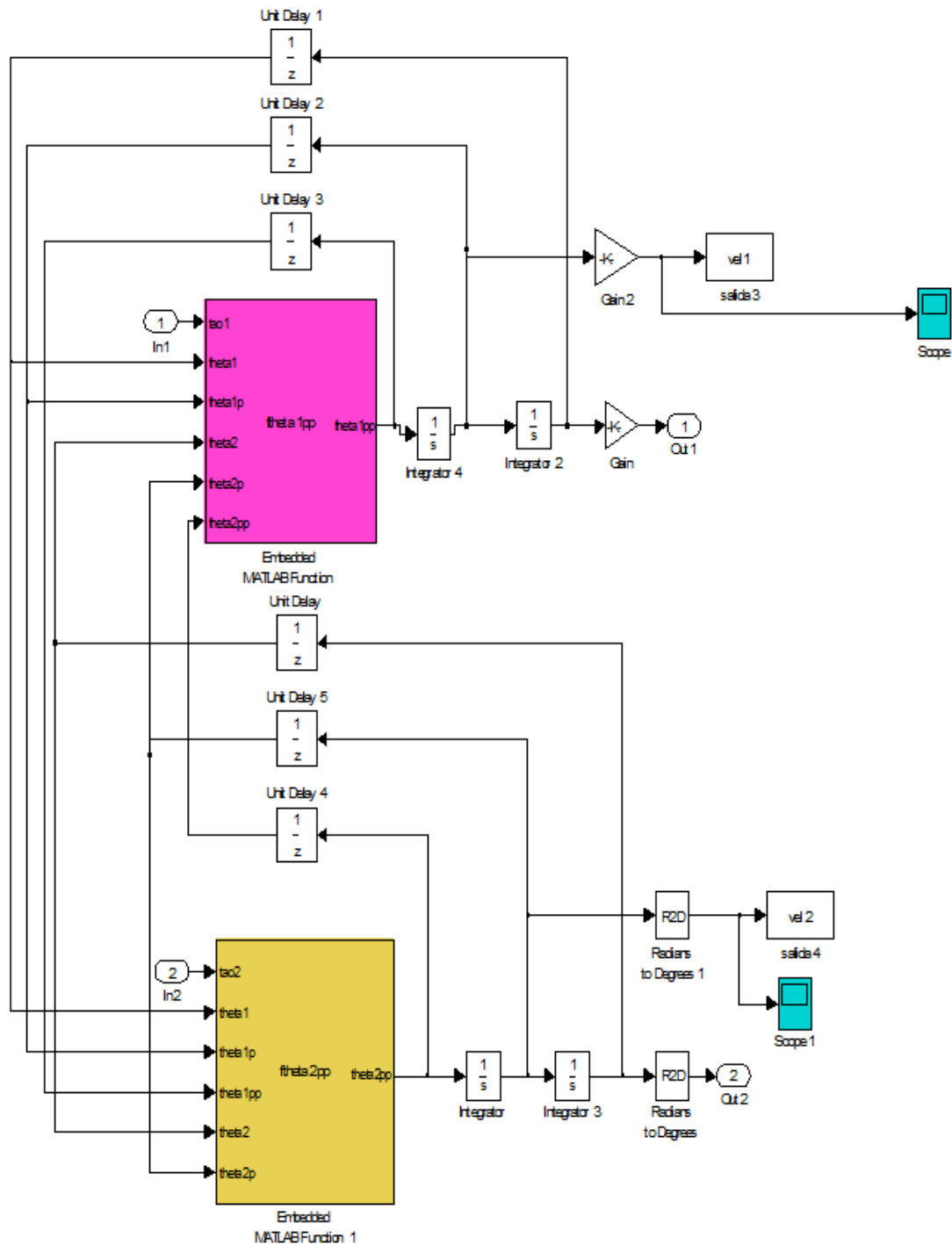


Figura 4.12 Subsistema 1 con entrada paso

El subsistema contenido en la Figura 4.12 de color naranja se muestra en la Figura 4.13 el cual contiene el modelo matemático del brazo robótico por medio de la función embedded que almacena el código descrito para el funcionamiento del sistema.

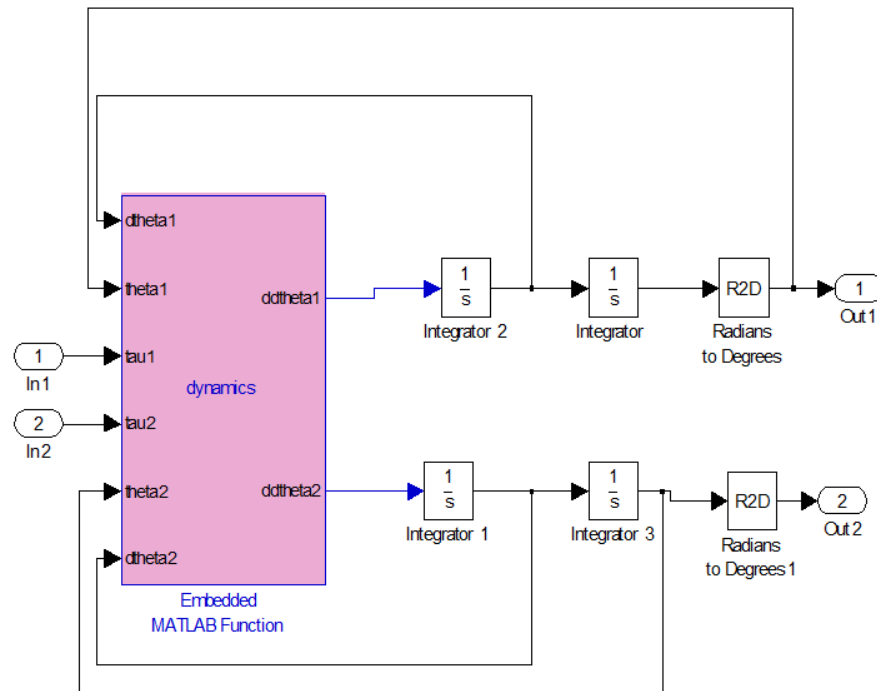


Figura 4.13 Subsistema2

La Figura 4.13 muestra el subsistema implementado en el diagrama principal dentro del cual se encuentra el sistema dinámico expresado en ecuaciones diferenciales, para facilitar la visualización del desplazamiento angular se convierte de radianes a grados.

Los programas implementados dentro del bloque embedded se colocan en el anexo A2.

El sistema implementado se encuentra en lazo abierto ya que no se coloca ningún tipo de control por lo cual la salida no tiene ningún efecto sobre la acción de control. Un sistema en lazo abierto es de fácil construcción y no existe problema en el valor a colocarse de ganancia.

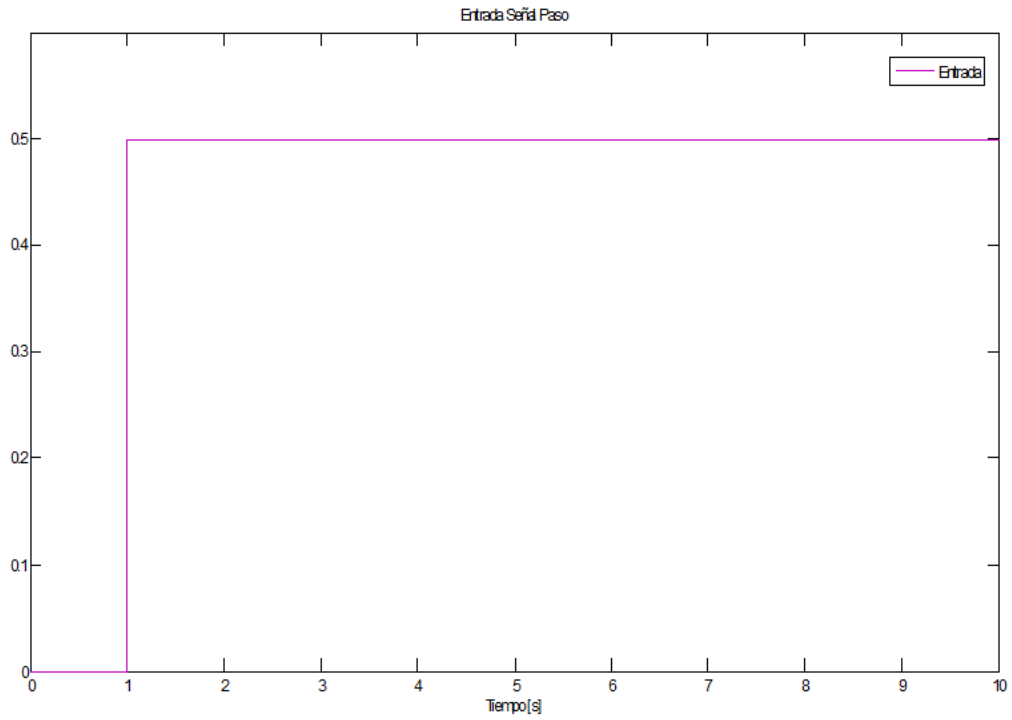


Figura 4.14 Entrada Señal paso

La Figura 4.14 muestra la señal de entrada al eslabón 1 del brazo robótico tipo RR, la cual es enviada a los distintos subsistemas del modelo simulado.

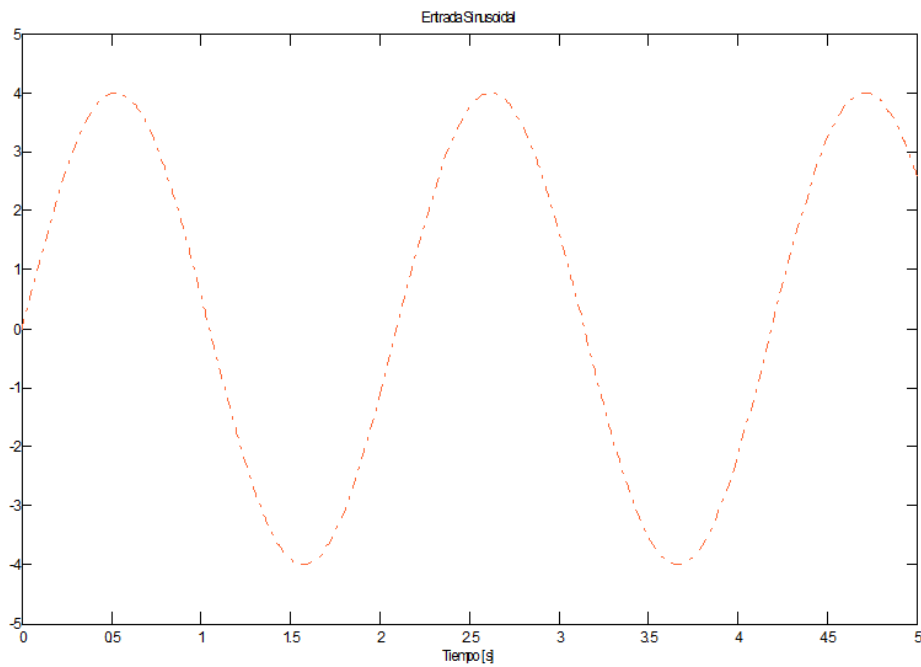


Figura 4.15 Entrada Señal Sinusoidal



La Figura 4.15 muestra la señal de entrada sinusoidal aplicada a cada uno de los eslabones para observar la respuesta del sistema ante éste tipo de señal, se utiliza dos tipos de señales para observar el efecto que causa cada una de éstas en el sistema, ya que una señal tipo sinusoidal presenta mayor número de oscilaciones lo que proporcionará una mayor cantidad de impulsos consecutivos.

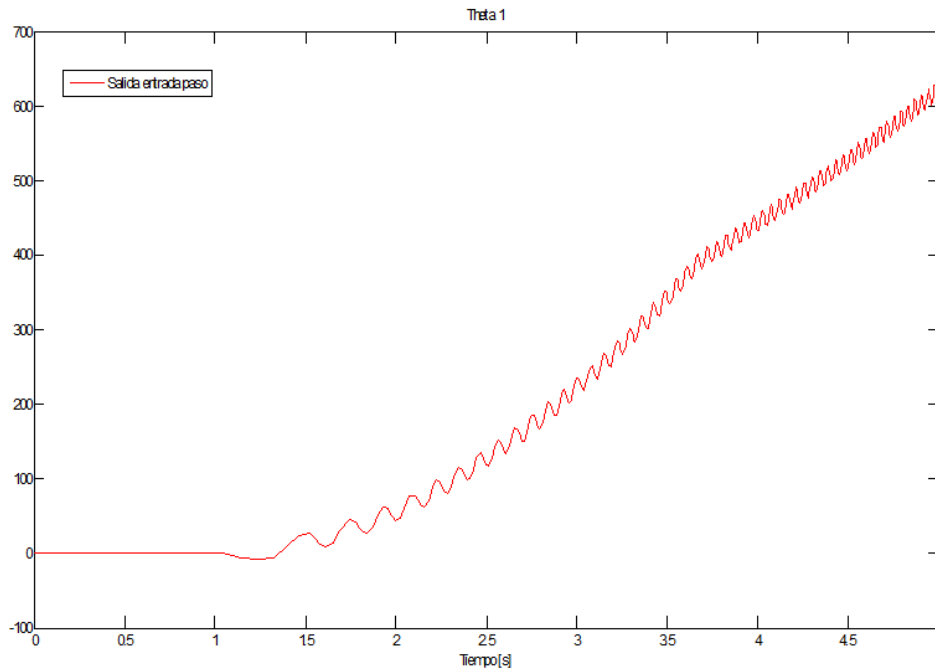


Figura 4.16 Ángulo de desplazamiento primer eslabón

La Figura 4.16 muestra el desplazamiento del primer eslabón durante un período de 5 segundos, en los cuales las perturbaciones son notables debido a la inercia que debe vencer el sistema para empezar el movimiento, puesto que los parámetros del primer eslabón son mayores que el segundo eslabón para no sufrir desequilibrio al momento de mover el eslabón más pequeño.

El modelo que se implementa es el dinámico, el cual permite conocer los momentos, fuerzas, desplazamientos aproximados que se deben aplicar al modelo real para que funcione adecuadamente sin control.

El ángulo se incrementa debido a que inicialmente el sistema se encuentra oscilando hasta estabilizar al sistema equilibrando los pesos de los eslabones.

El primer eslabón está sujeto al movimiento inicial que le proporciona la señal de prueba por tal motivo permanece en reposo 1 segundo y posteriormente incrementa su movimiento indefinidamente.

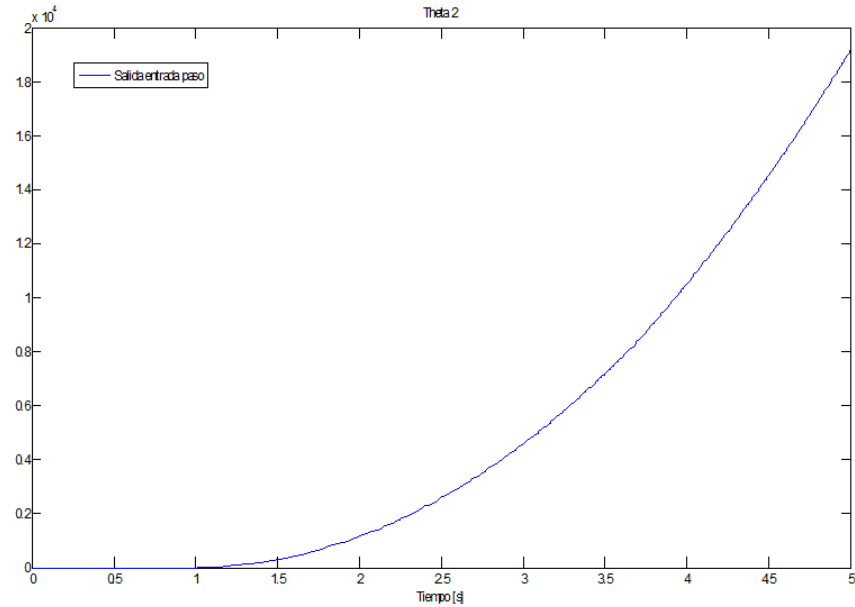


Figura 4.17 Ángulo de desplazamiento segundo eslabón

La respuesta del segundo eslabón es ascendente y no presenta oscilaciones debido a que el primer eslabón se encuentra de base para que no se pierda el impulso alcanzado por éste al momento de comenzar el movimiento.

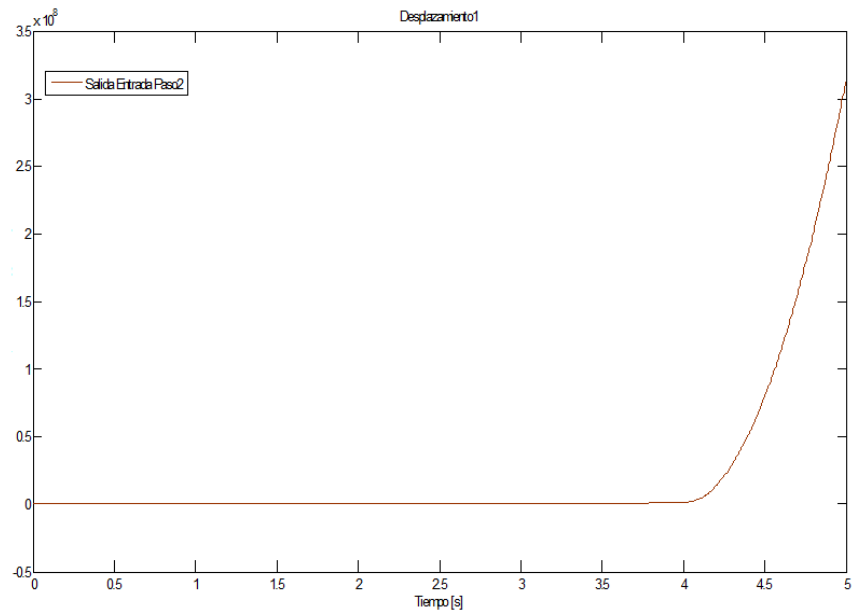


Figura 4.18 Ángulo de desplazamiento primer eslabón

La Figura 4.19 muestra el desplazamiento angular del primer eslabón del subsistema presentado en la Figura 4.12, al instante 4,2 segundos inicia el movimiento del brazo y se considera que el eslabón se mueve 180 grados con una base fija.

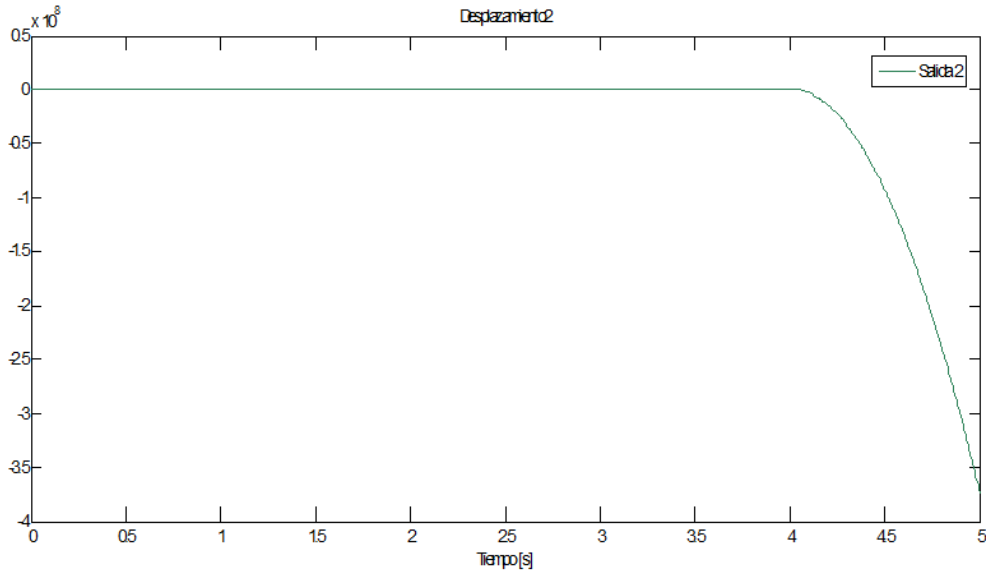


Figura 4.19 Desplazamiento segundo eslabón

La Figura 4.19 describe el desplazamiento del segundo eslabón, el mismo que al estar sujeto al primer eslabón tiende a descender debido a la acción de la gravedad, al igual que el primer eslabón comienza su movimiento descendente a los 4,2 segundos instante en el cual vence la inercia del sistema, y al no tener sistema de control desciende presurosamente.

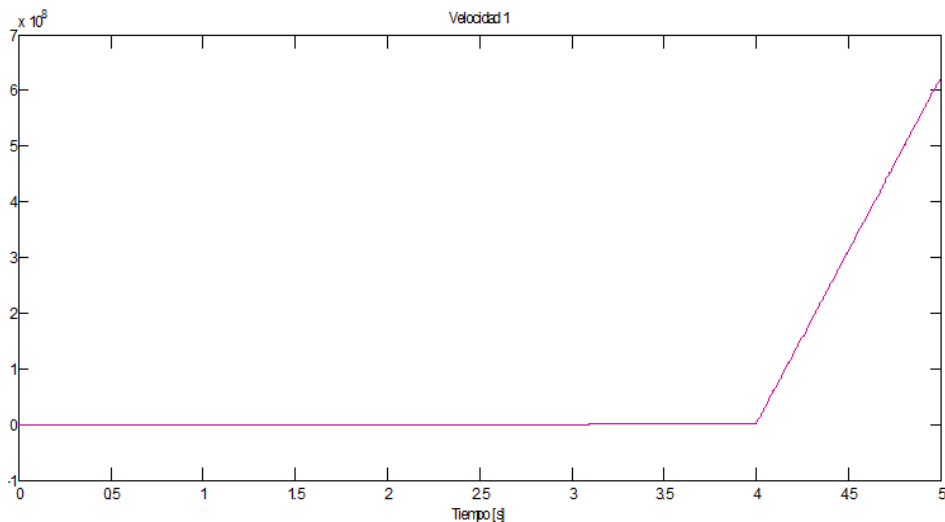


Figura 4.20 Velocidad del primer eslabón

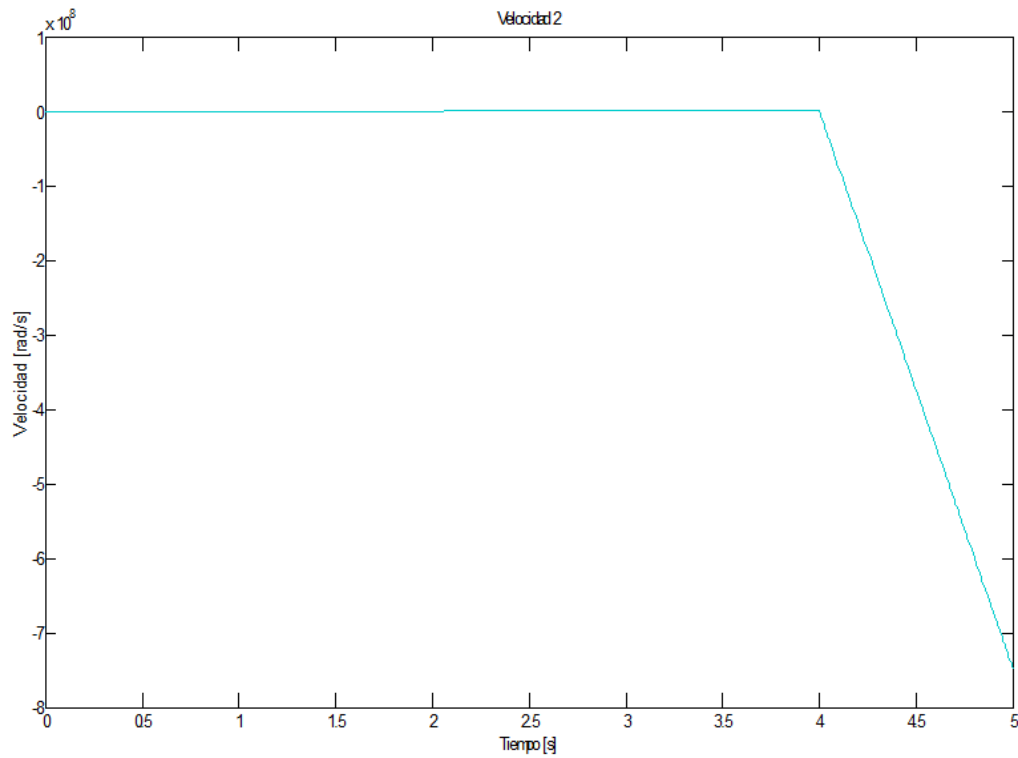


Figura 4.21 Velocidad del segundo eslabón

Las Figuras 4.20 y 4.21 describen la velocidad de cada uno de los eslabones, en el mismo sentido del desplazamiento

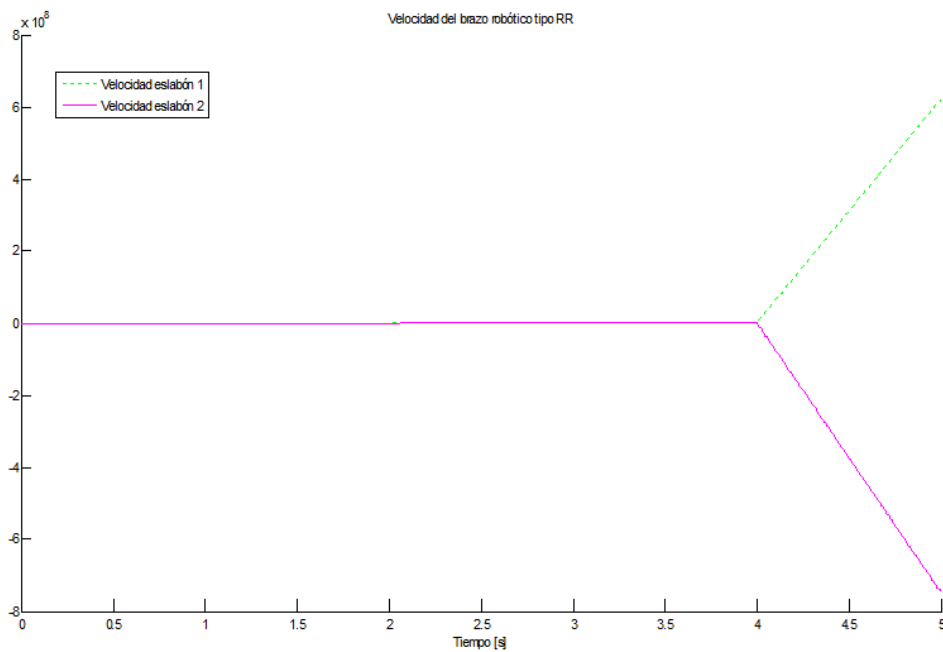


Figura 4.22 Velocidad del brazo robótico tipo RR

La Figura 4.22 compara las velocidades de cada eslabón en la misma gráfica en la cual comienza el movimiento tanto ascendente como descendente de cada eslabón, en el instante 4,2 segundos; de acuerdo a las pruebas realizadas con el modelo de simulación, el movimiento ascendente y descendente no se estabiliza debido a que las pruebas son en lazo abierto por lo que no se compara la salida del sistema con el valor deseado de la salida del sistema (sistema de referencia).

#### 4.6. REACTOR QUÍMICO DE AGITACIÓN CONTINUA

El modelo 3 del software de simulación se refiere a un Reactor Químico de Agitación Continua, su curva de reacción depende de dos parámetros de entrada, éstos son la concentración del producto y su temperatura.

Una vez llenados los campos solicitados se da click en el botón Reactor Químico de Agitación Continua y se despliega la gráfica obtenida a la salida del proceso.

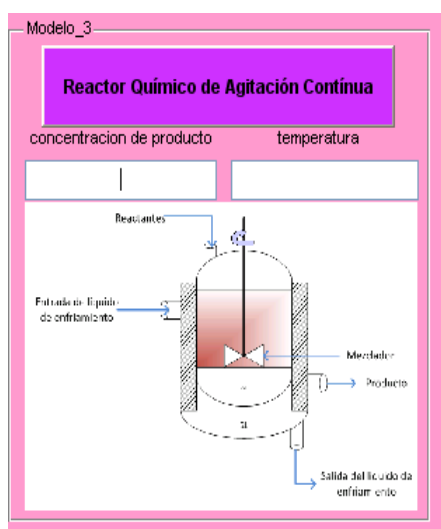


Figura 4.23 Reactor químico tipo continuo

Un reactor químico de agitación continua presenta gran sensibilidad a la temperatura, los puntos de equilibrio para la linealización del modelo matemático pueden ser estables en lazo abierto pero no garantiza que no sea sensible a cambios ambientales.

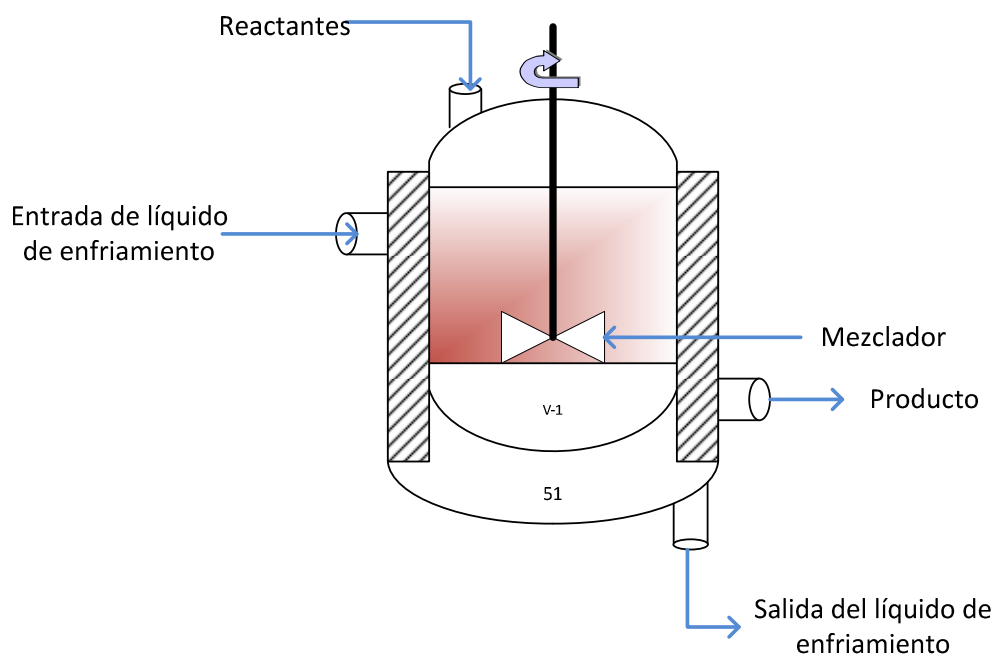


Figura 4.24 Reactor químico tipo continuo

Se presenta las variables de estado del sistema, las mismas que permiten obtener valores numéricos necesarios para la simulación, la deducción de estas expresiones se las realiza a detalle en el capítulo 3.

$$\begin{bmatrix} \dot{C}_A(t) \\ \dot{T}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\tau_1} & -\frac{k_2}{\tau_1} \\ -\frac{1}{\tau_2} & -\frac{k_4}{\tau_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_A(t) \\ T(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{k_1}{\tau_1} & 0 \\ 0 & \frac{k_3}{\tau_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{Ai}(t) \\ T_i(t) \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

$$Y = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} C_A(t) \\ T(t) \end{bmatrix}$$

Los variables de estado que maneja un reactor químico de agitación continua se relacionan directamente con la concentración de salida del producto  $C_A(t)$  y la temperatura de salida del mismo  $T(t)$ .

Para obtener valores numéricos en la expresión (4.6) es necesario reemplazar los valores que se muestran en la tabla 4.3 y hallar el equivalente de cada constante mostrada en las variables de estado.

Tabla 4.3 Parámetros del sistema [24]

|   |             |   |
|---|-------------|---|
| Volumen Reactor                             | V           | 0.37548342 [m <sup>3</sup> ]                |
| Energía de activación                       | E           | 64704147 [Joules/Kgmole]                    |
| Densidad del Reactivo                       | $\rho$      | 880.913 [Kgmole/m <sup>3</sup> ]            |
| Calor de Reacción                           | $\Delta Hr$ | -27956717 [Joules/Kgmole]                   |
| Factor de Frecuencia                        | $k_0$       | 1.73515x10 <sup>3</sup> [1/min]             |
| Constante Universal de los gases            | R           | 8314.34 [Joules/Kgmole-°K]                  |
| Capacidad Calorífica del Reactor            | $C_p$       | 3684.384 [Joules/Kgmole-°C]                 |
| Capacidad Calorífica a volumen constante    | $C_v$       | 4186.8 [Joules/Kgmole-°C]                   |
| Coeficiente de Transferencia de Calor Total | U           | 1533153.75 [Joules/(hr·m <sup>2</sup> ·°C)] |
| Concentración de Salida                     | $C_A$       | 1.285011818 [Kgmole/m <sup>3</sup> ]        |
| Concentración de Entrada del producto       | $C_{Ai}$    | 14.38771178 [Kgmole/m <sup>3</sup> ]        |
| Flujo del producto                          | q           | 0.037846848 [m <sup>3</sup> /min]           |
| Flujo del líquido refrigerante              | qc          | 0.024839472 [m <sup>3</sup> /min]           |
| Temperatura del reactor                     | T           | 383.3333 °K                                 |
| Temperatura de entrada del reactor          | Ti          | 321.1111 °K                                 |

Los valores numéricos de los parámetros permiten reemplazar las expresiones literales por una menos compleja.

$$C_1 = k_0 e^{-E/RT(t)} = 26677.00587$$

$$C_2 = \frac{k_0 \cdot E \cdot \bar{C}_A}{RT^2} e^{-E/RT(t)} = 1814.71$$

$$\tau_1 = \frac{V}{(V \cdot C_1 + q)} = 3.7485 \times 10^{-5}$$

$$k_1 = \frac{q}{(V \cdot C_1 + q)} = 3.7783 \times 10^{-6}$$

$$k_2 = \frac{V \cdot C_2}{(V \cdot C_1 + q)} = 0.06802$$

$$\tau_2 = \frac{V \cdot \rho \cdot c_v}{V(\Delta Hr)C_2 + UA + q \cdot \rho \cdot c_p} = -7.27163 \times 10^{-5}$$

$$k_3 = \frac{q \cdot \rho \cdot c_p}{V(\Delta Hr)C_2 + UA + q \cdot \rho \cdot c_p} = -6.3990 \times 10^{-5}$$

$$k_4 = \frac{V(\Delta Hr) \cdot C_1}{V(\Delta Hr)C_2 + UA + q \cdot \rho \cdot c_p} = 14.704$$

$$\begin{bmatrix} \dot{C}_A(t) \\ \dot{T}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -26677.33 & -1814.59 \\ 13752.07 & 202210.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_A(t) \\ T(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.10079 & 0 \\ 0 & 0.8799 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{Ai}(t) \\ Ti(t) \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_A(t) \\ T(t) \end{bmatrix}$$

Al obtener las variables de estado del sistema Ecuación (4.7), se facilita la obtención de las funciones de transferencia y sus valores propios. El reactor químico de agitación continua presenta dos salidas una hace referencia a la concentración de salida del producto y la otra a la temperatura de salida.

La Figura 4.25 muestra el lugar geométrico del sistema, sus polos  $p_1 = 2.0207 \times 10^5$  y  $p_2 = -0.2657 \times 10^5$  muy alejados del círculo unitario debido al tipo de variables que se maneja en un proceso químico tal es el caso de la temperatura.

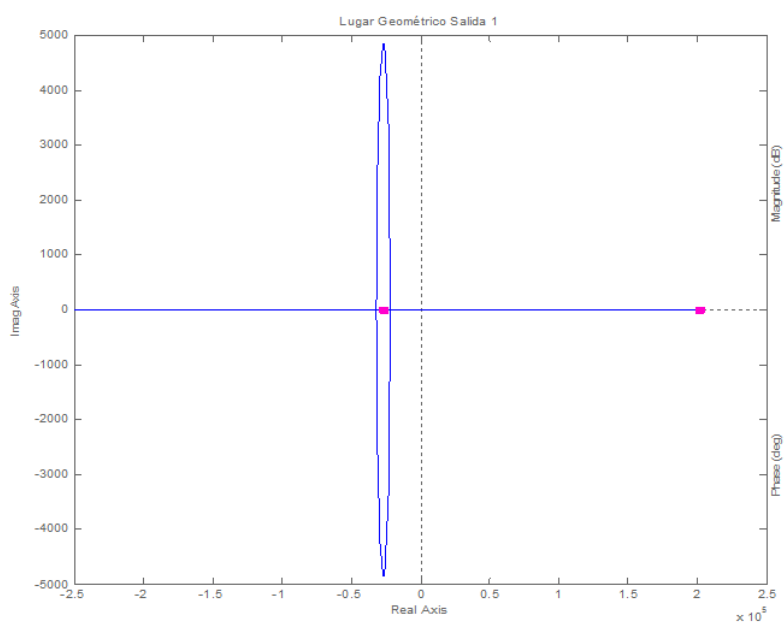


Figura 4.25 Lugar Geométrico Concentración de Salida Producto



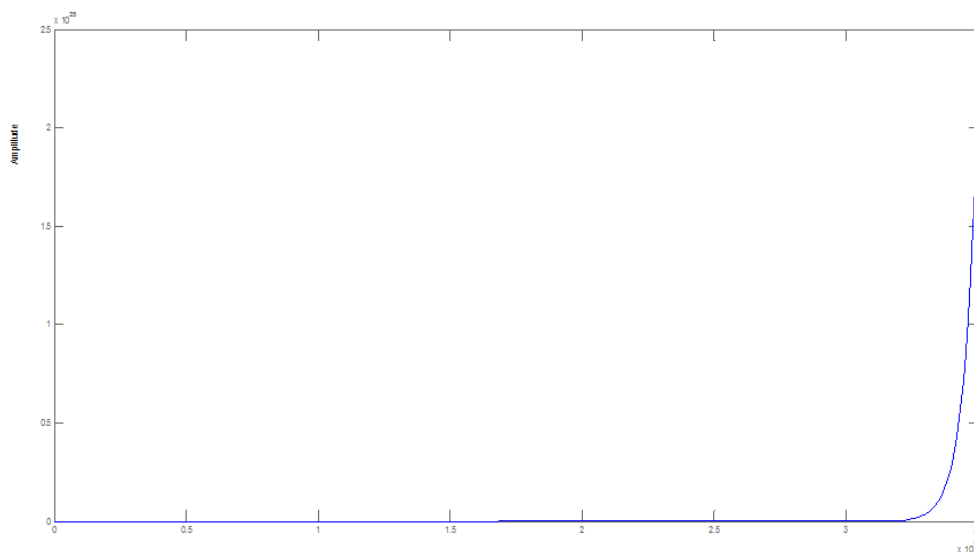


Figura 4.26 Salida 1 del Sistema

La Figura 4.26 muestra el comportamiento de sistema al analizar la concentración del producto de salida en el reactor, el tiempo de inicio de salida del producto es 0.33 ms y la cantidad de producto que sale es muy grande debido a que la simulación del sistema se lo realiza sin ningún tipo de control ya que es objeto de otro tipo de estudio el cual no se abarca en éste proyecto de titulación.

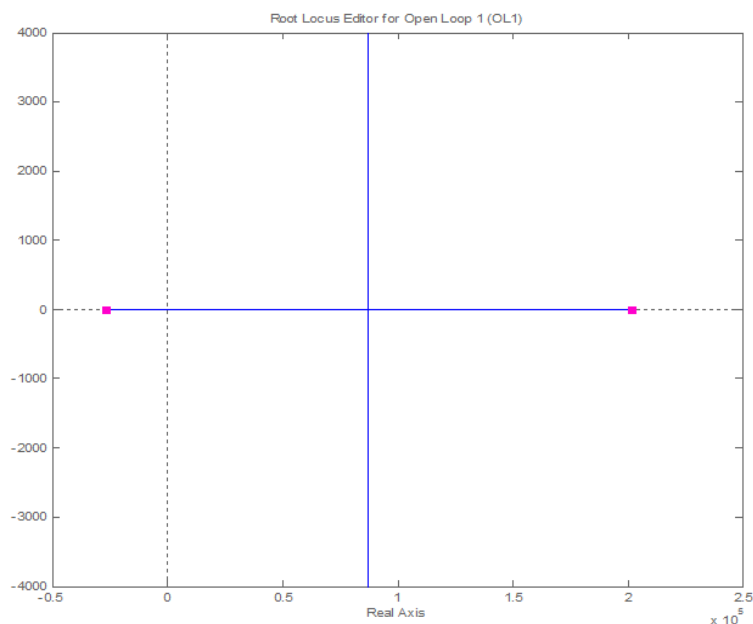


Figura 4.27 Lugar Geométrico Salida 2

La Figura 4.27 muestra el lugar geométrico de la segunda salida del reactor, ésta es la temperatura final del reactor, los polos que presenta son  $p_1 = 2.0207 \times 10^5$  y

$p_2 = -0.2657 \times 10^5$  muy alejados del círculo unitario, debido a que no existe una acción que controle el sistema.

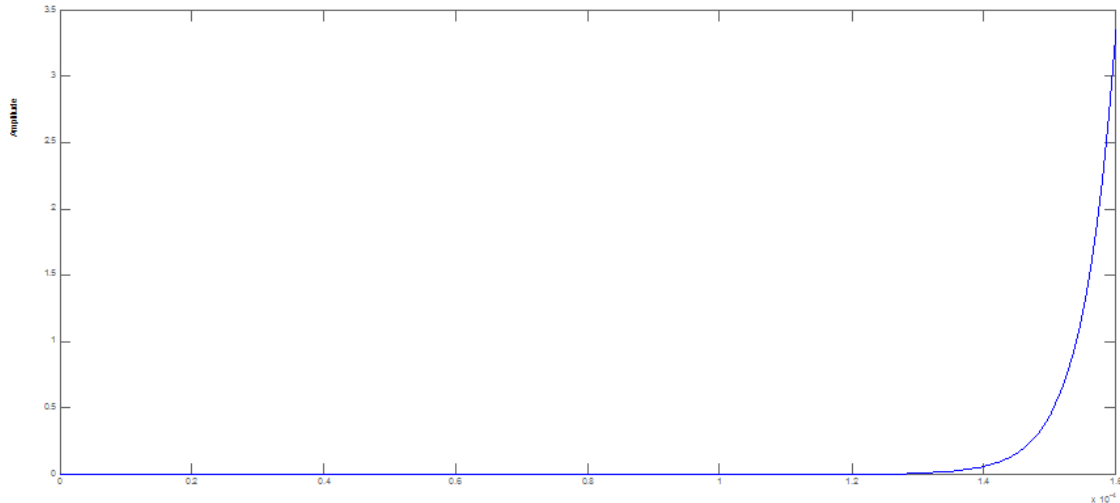


Figura 4.28 Salida 2 Reactor Químico de Agitación Continua

La Figura 4.28 muestra el comportamiento de la temperatura en el reactor, que inicia su incremento a los 1.4 ms.

El programa utilizado para la simulación del sistema es implementado en un archivo .m por la facilidad que presenta éste con las ecuaciones no lineales.

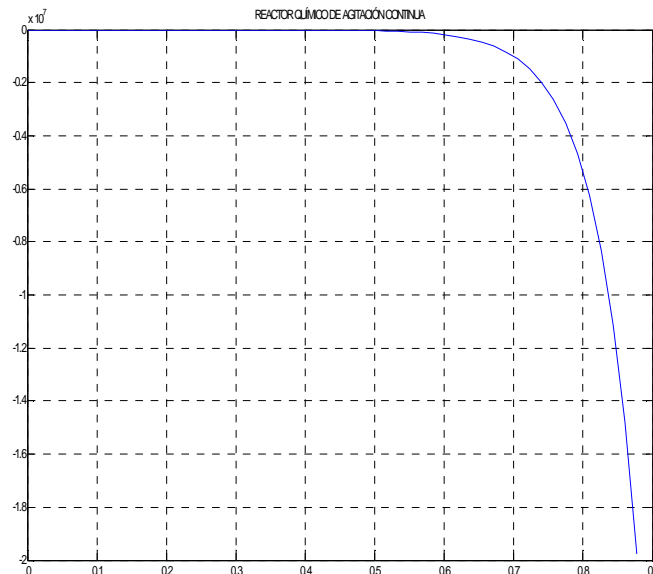


Figura 4.29 Respuesta de temperatura del reactor a una señal de entrada escalón

La Figura 4.29 describe el cambio abrupto de temperatura en el reactor al no tener ningún tipo de control, la temperatura del reactor debe ser precisa para que no se afecte a la sustancia que se encuentran en su interior.

La temperatura del reactor disminuye a medida que se coloca mayor número de reactivos y depende de los valores iniciales que se coloquen en las constantes deducidas para las variables de estado presentadas en la Ecuación 4.6.

Al simular el comportamiento de un reactor químico de agitación continua se observa que es complejo manejar las variables que intervienen en el proceso como presión y temperatura puesto que si no existe algún tipo de control las respuestas del sistema incrementan indefinidamente y no se puede manejar un proceso adecuado, ver anexo A3 descripción del programa utilizado.

#### 4.7. ROBOT MÓVIL

Se realiza la descripción de éste robot móvil tomando como referencia el modelo matemático deducido en proyectos de titulación anteriores , esto se realiza con la finalidad de implementar las ecuaciones obtenidas en un software que nos permita visualizar la generación de trayectorias mediante un modelo cinemático.

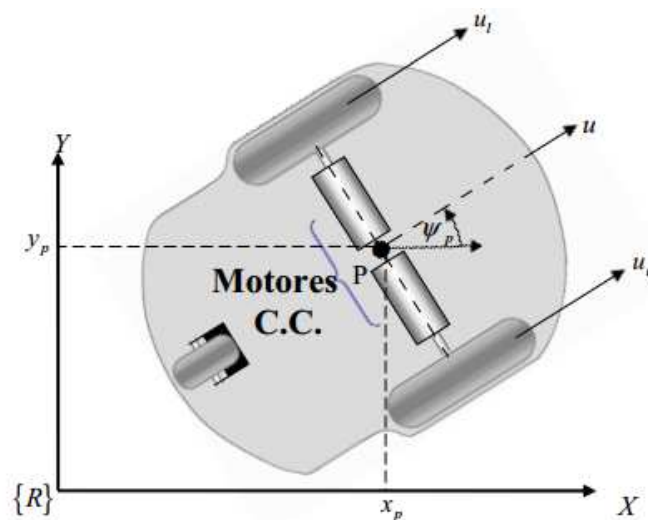


Figura 4.30 Modelo de la estructura robot móvil, tomado de [25]

La Figura 4.30 muestra la geometría de un robot móvil tipo unicycle, donde la posición del robot móvil la define el punto P, ubicado en el centro del eje que une las dos ruedas, donde  $\{R\}$  representa el sistema de referencia coordenadas globales,  $(x_p, y_p)$  que define la posición del robot respecto a  $\{R\}$  y  $\psi_p$  determina la orientación del robot respecto a  $\{R\}$ . [25]

La cinemática de un robot móvil con el punto de control ubicado en el centro del eje que une las ruedas puede ser modelada por la Ecuación (4.8)

$$\begin{cases} \dot{x} = u \cos \psi \\ \dot{y} = u \sin \psi \\ \dot{\psi} = \omega \end{cases} \quad (4.8)$$

Donde  $\dot{x}$  y  $\dot{y}$  representan las velocidades del robot respecto a los ejes  $x$  y  $y$ , respectivamente, del sistema de coordenadas.

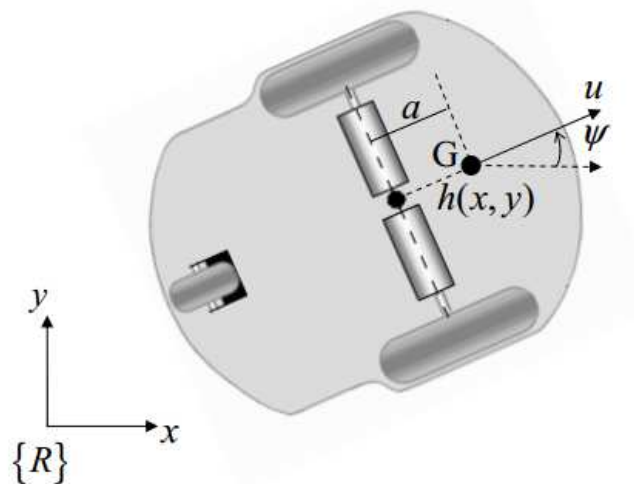


Figura 4.31 Robot móvil tipo unicycle, tomado de [25]

La Figura 4.31 muestra el robot móvil tipo unicycle desde la posición definida en el punto G, donde G representa el centro de masa y se encuentra ubicado a una distancia  $a$  por delante del centro del eje que une las ruedas, siendo  $x$  y  $y$  la

posición del punto G respecto al sistema de referencia global, y  $\psi$  define su orientación respecto a  $\{R\}$ .

La restricción de velocidad no holonómica del robot móvil determina que sólo se puede mover perpendicularmente al eje que une las ruedas, y está dada por:

$$\dot{x} \operatorname{sen}(\psi) - \dot{y} \operatorname{cos}(\psi) + a \dot{\psi} = 0 \quad (4.9)$$

El modelo cinemático del robot móvil, considerando la restricción no holonómica, puede ser representado por:

$$\begin{cases} \dot{x} = u \operatorname{cos}(\psi) - a \omega \operatorname{sen}(\psi) \\ \dot{y} = u \operatorname{sen}(\psi) + a \omega \operatorname{cos}(\psi) \\ \dot{\psi} = \omega \end{cases} \quad (4.10)$$

El movimiento de un robot móvil tipo unicycle es representado por los estados  $[x, y, \psi]$  y las entradas  $[u, \omega]$ . [25]

El modelo cinemático del robot móvil tipo unicycle es analizado con mayor profundidad en un proyecto de titulación anterior véase referencia [25], en el presente proyecto se toma las ecuaciones relevantes del robot para poder realizar la programación y simulación de las trayectorias.

Se realiza las trayectorias para el robot móvil Pioneer basados en el programa implementado en base a ecuaciones de traslación y rotación.

El tipo de trayectoria depende de los parámetros que se introduzcan en el sistema, en éste caso se encuentra con un controlador PID lo que permite que no exista oscilaciones al momento de ejecutar cualquier movimiento programado dentro del esquema planteado. [25]

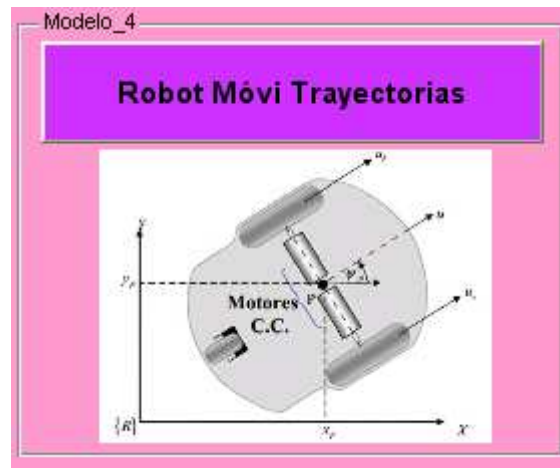


Figura 4.32 Robot móvil tipo uniciclo, modelo 4



Figura 4.33 Menú de trayectorias robot Pioneer

Al escoger cualquier trayectoria mostrada en la Figura 4.33 se considera que la Ecuación de cada una de las trayectorias debe estar expresada en ecuaciones paramétricas y con rango de distancia para no exceder los límites de movimiento.

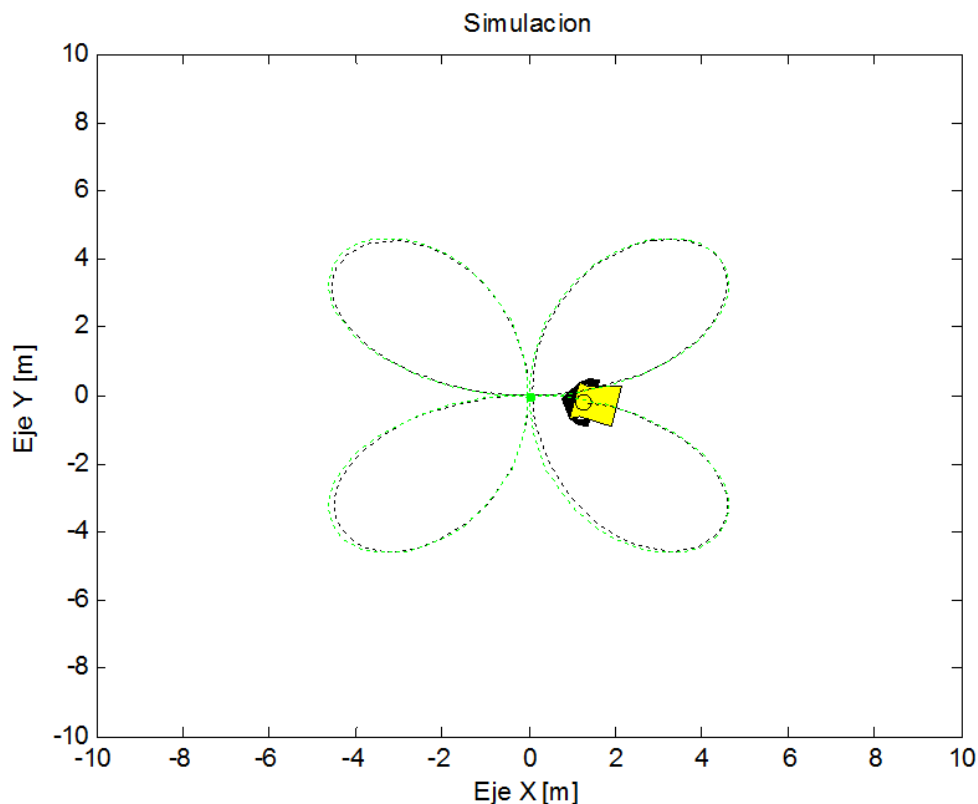


Figura 4.34 Primera Trayectoria escogida

La Figura 4.34 describe el movimiento del robot móvil con trayectoria definida, además de la forma del robot de acuerdo a la opción que se escoja, el algoritmo de simulación se lo presenta en el anexo A4

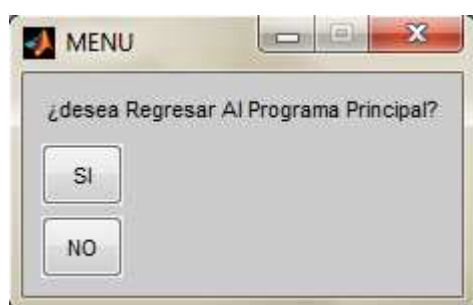


Figura 4.35 Menú de Retorno al sistema

La opción del menú interactivo es un aditamento a los programas de Matlab los cuales presentan mayor comprensión al momento de hacerlo interactivo con el usuario.

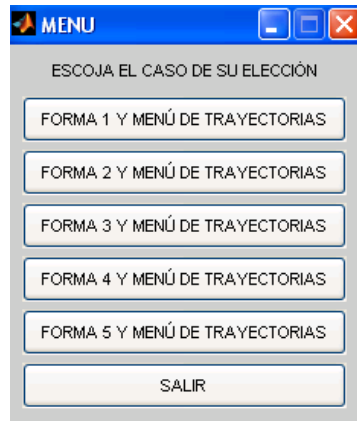


Figura 4.36 Menú programa principal

La Figura 4.36 presenta las opciones del menú principal del robot móvil, cada “forma” es modificada en coordenadas para obtener una Figura diferente del robot, además del color, lo cual facilita el entendimiento en la simulación.

Si el sistema no posee coordenadas definidas para el movimiento, el modelo cinemático no tiene validez.

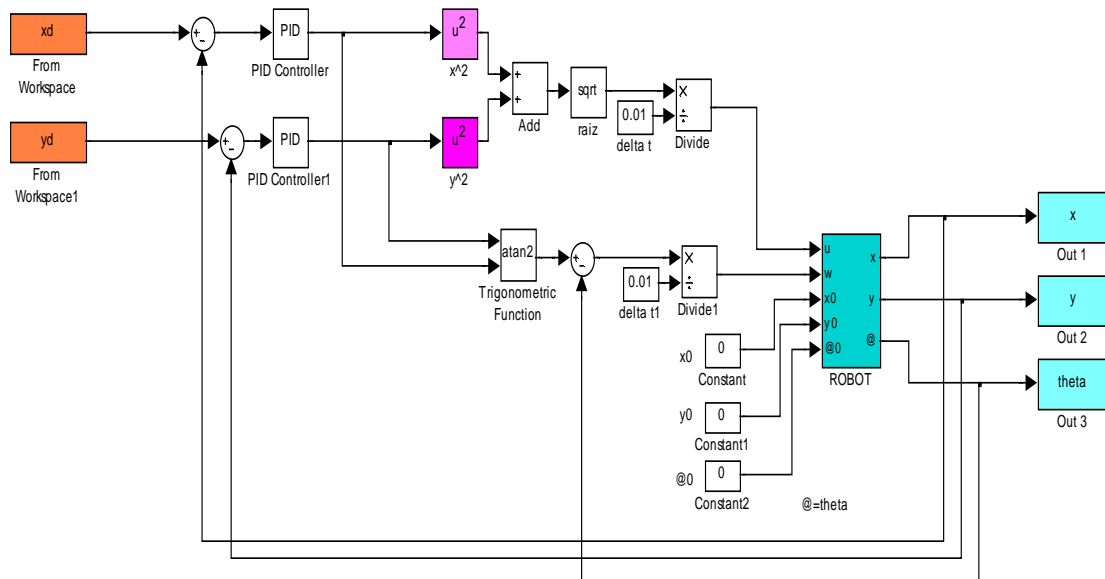


Figura 4.37 Modelo Cinemático Robot Móvil



La Figura 4.37 muestra el modelo cinemático del robot móvil tipo unicycle implementado en Simulink el cual contiene un subsistema con las ecuaciones paramétricas del robot.

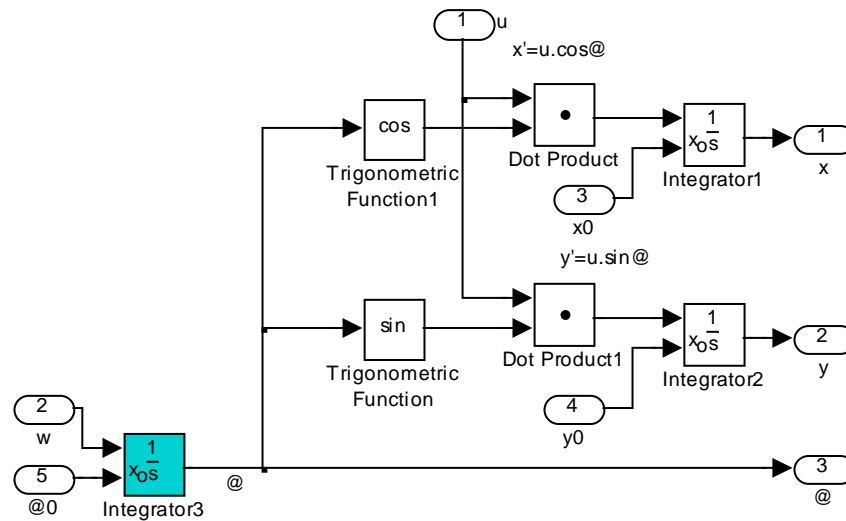


Figura 4.38 Subsistema Robot Móvil

El modelo cinemático del robot móvil se obtiene a partir de las ecuaciones diferenciales del modelo matemático y por medio de un diagrama de flujo y despejando la derivada de mayor orden.

El modelo que se implementa en Simulink tiene conexión con la simulación de trayectorias interactivas (movimiento en tiempo real), archivos .m y el espacio de trabajo de Matlab, una alternativa para no correr el modelo en Matlab y únicamente abrir el archivo .m es colocar en el espacio del tiempo "tsim" con lo que el software reconoce q existe un archivo conectado con la simulación. [26]

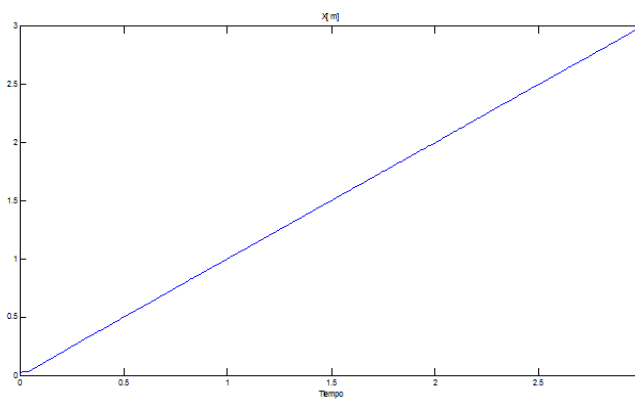


Figura 4.39 Desplazamiento en X

El desplazamiento en x del robot móvil incrementa a medida que incrementa el tiempo presentando una velocidad constante en x a lo largo del movimiento.

La velocidad es lineal e igual a 1m/s por cada 0,5s de desplazamiento, la aceleración en x es nula por lo que la fuerza que debe romper para iniciar el movimiento es la de fricción ya que impide el movimiento fluido de las llantas del robot.

La velocidad de cada rueda se analiza independientemente de acuerdo al movimiento que realice en cada instante de movimiento.

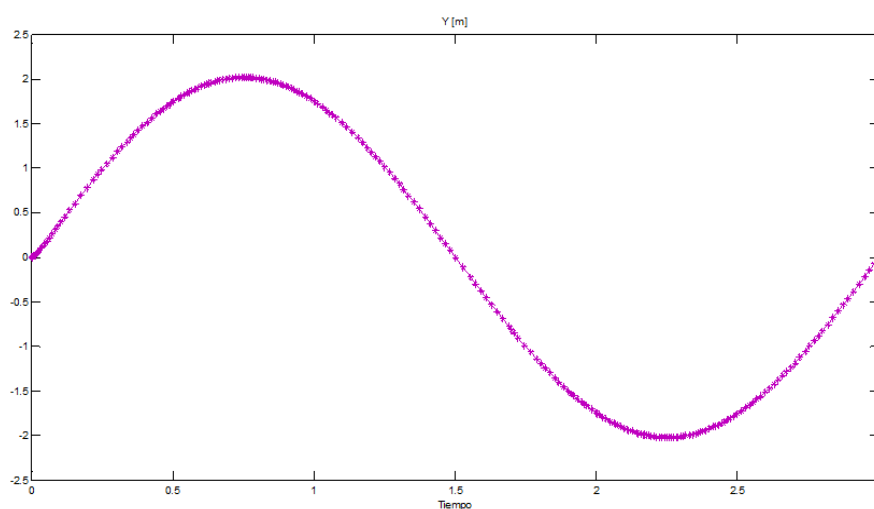


Figura 4.40 Desplazamiento en Y

El desplazamiento presentado en la Figura 4.40 es para una trayectoria senoidal que se considera ideal para el robot, la cual debe seguir en condiciones ideales, sin embargo para que el robot siga dicha trayectoria debe tener un controlador que permita compensar los parámetros implícitos en el sistema y disminuir el error.

La precisión que presente el sistema en sus trayectorias depende de la calibración que se proporcione al robot, tanto en velocidad como aceleración por medio del sistema mecánico y electrónico, para cada entrada de referencia colocada corresponde una condición de operación fija.

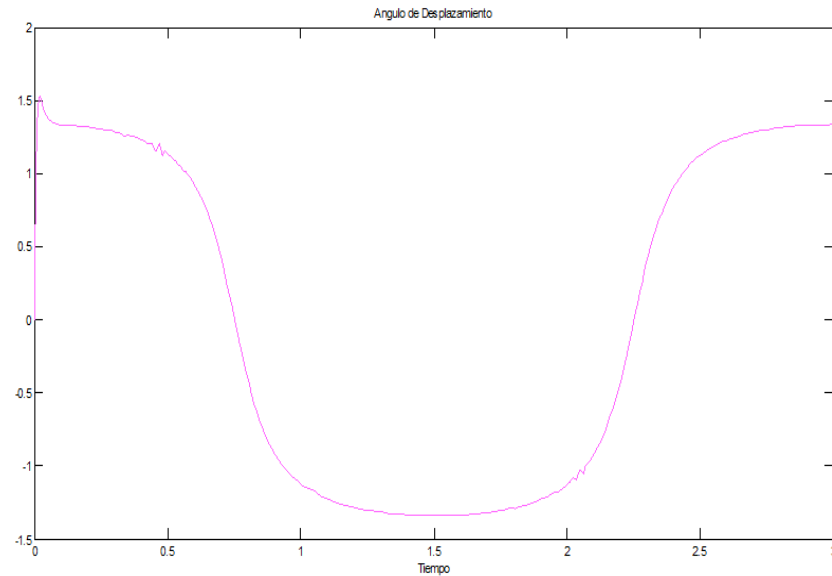


Figura 4.41 Ángulo de desplazamiento

El desplazamiento angular del robot móvil depende de la velocidad angular que presente el a la entrada del robot.

Existe un segundo que el sistema disminuye su movilidad por lo cual el desplazamiento decrece, si se presenta perturbación externa como una fuerza ajena al medio en que trabaja el prototipo el sistema no es capaz de adaptarse y no se llega a la velocidad requerida.

El sistema no puede ser simulado sin ningún tipo de controlador puesto que el modelo cinemático del robot requiere un control de las coordenadas donde se fija la trayectoria por lo que se coloca un PID autosintonizable en Simulink, debido a que el controlador no es objeto de estudio en éste proyecto de titulación.

#### 4.8. MÓDULO IDENTIFICACIÓN

El módulo de identificación permite obtener los coeficientes de la recta , las constantes de tiempo y las condiciones iniciales  $k_{n+1}$ , esta diseñado para iniciar su funcionamiento dando click en el botón Identificación

**IDENTIFICACIÓN**

Figura 4.42 Botón Principal Identificación de Sistemas

La Figura 4.42 muestra la aplicación programada para realizar la identificación de diferentes sistemas a partir de 10 datos experimentales hasta 21 datos, según el número de pruebas que se haya realizado en el proceso o sistema que se requiere identificar.

Además se obtiene la función de transferencia a partir de los datos que se ingresan y la gráfica del modelo real transpuesta con el modelo identificado.

#### 4.8.1. MANUAL DE UTILIZACIÓN MÓDULO IDENTIFICACIÓN

1. Seleccionar el número de datos para la identificación



Figura 4.43 Módulo Identificación

2. Al seleccionar el número de datos para la identificación se despliega la siguiente pantalla con los parámetros requeridos para iniciar la identificación, todos los campos son obligatorios y dar click en el botón Aceptar.

Seleccione el numero de datos para la identificación:

11 Datos

$t=$

$y=$

$k0=$

Figura 4.44 Módulo Identificación

- Colocar los puntos que coincidan en una recta trazada sobre el gráfico desplegado en la parte derecha de la simulación.

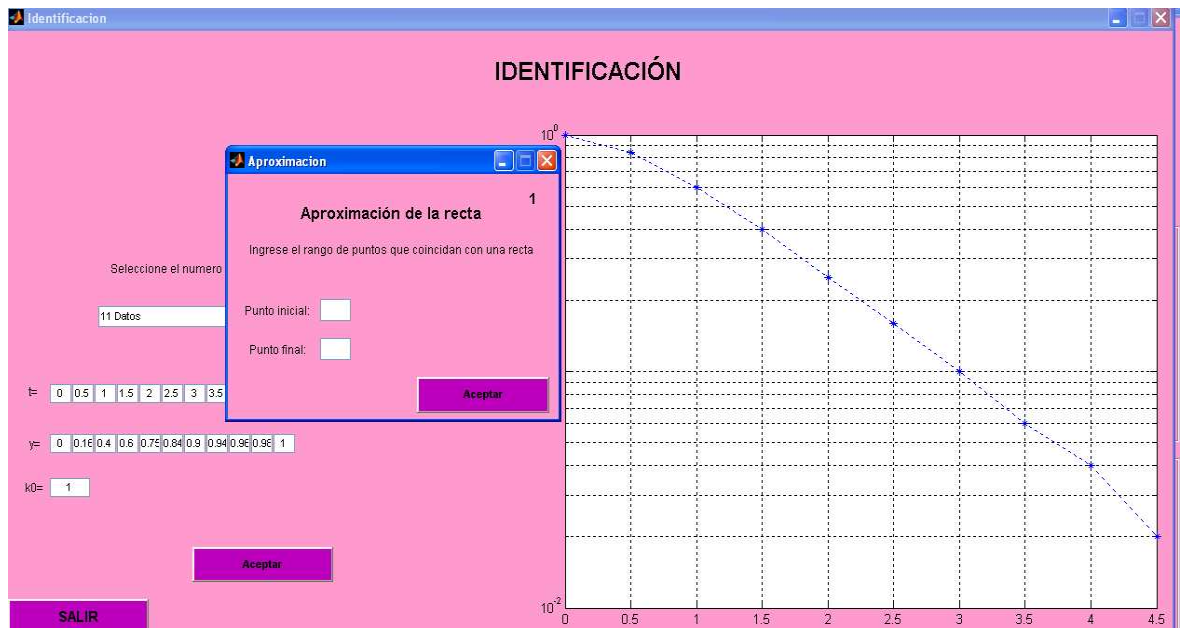


Figura 4.45 Módulo Identificación-Aproximación a una recta

- Colocar los puntos más próximos a la recta requerida y dal click en aceptar

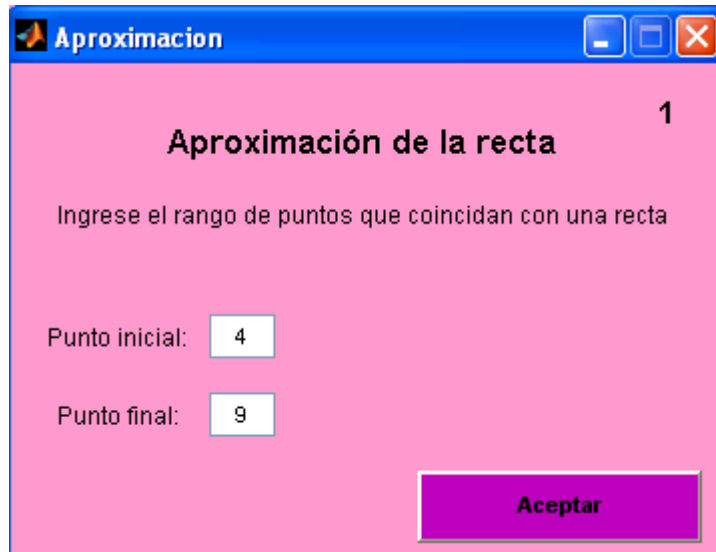


Figura 4.46 Módulo Identificación –Puntos de la recta

5. Dar click en acepta y llenar los valores correspondientes a la segunda iteración.

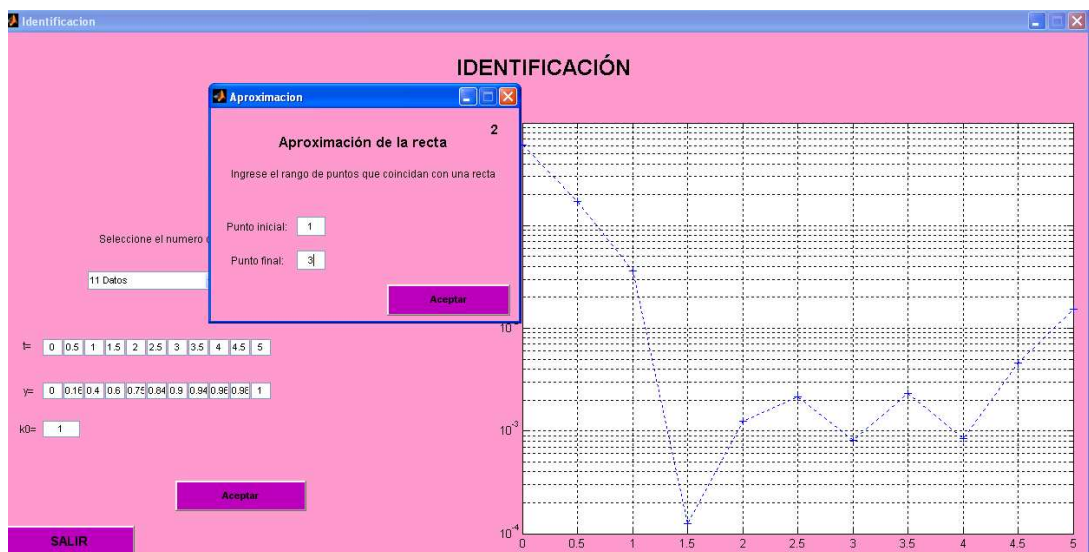


Figura 4.47 Módulo Identificación Segunda Iteración

6. Dar click en acepta y llenar los valores correspondientes a la tercera iteración.

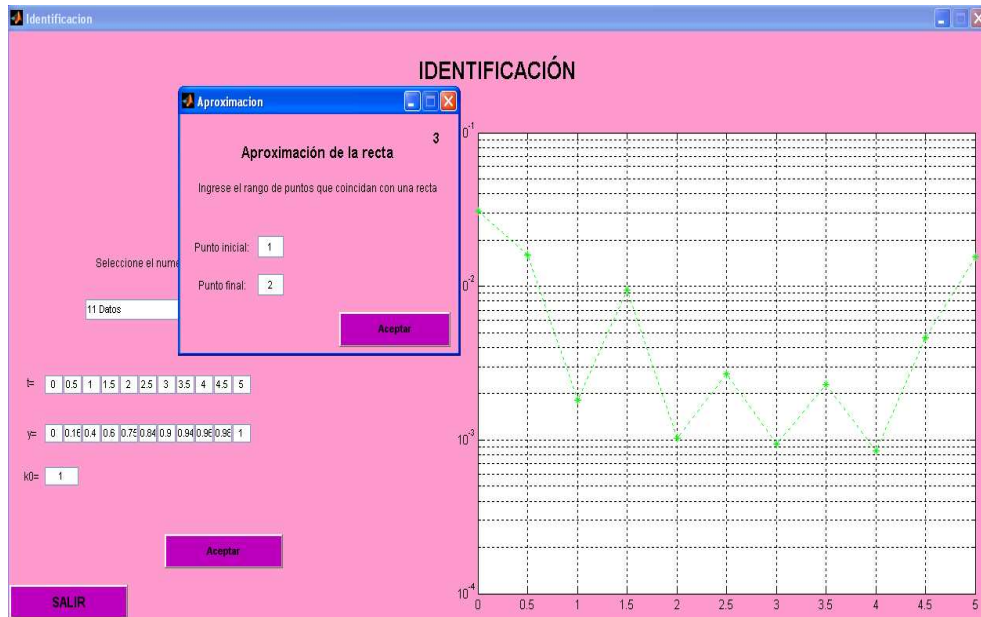


Figura 4.48 Módulo Identificación Tercera Iteración

7. Dar click en aceptar y esperar unos segundos, para que se ejecute las acciones correspondientes para el cálculo de las constantes, función de transferencia y diagrama correspondiente al modelo identificado transpuesto con el modelo real



Figura 4.49 Módulo Identificación Resultado

La Figura 4.49 muestra los resultados correspondientes al módulo de Identificación, el cual internamente ejecuta la serie de algoritmos necesarios para que los datos obtenidos en un proceso puedan ser identificados en el dominio del tiempo y obtener la función de transferencia necesaria para aplicar algoritmos de control que mejoren la calidad del sistema que requiere el análisis.



## CAPÍTULO 5

### CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En el desarrollo del presente proyecto de titulación se alcanzó los objetivos planteados y se presentan las conclusiones y recomendaciones obtenidas de acuerdo a las diferentes complejidades de cada sistema modelado, simulado e identificado.

#### 5.1. CONCLUSIONES

- En el Capítulo 2 se presenta varios ejemplares de modelación a manera de tutorial y se transforma modelos físicos, mecánicos y de fluidos a sistemas eléctricos para poder visualizar mejor el sentido de las fuerzas ya que al plantearlo por medio de física clásica no se interpreta claramente el sentido de las fuerzas que actúan en cada sistema y existe confusión al momento de plantear las ecuaciones diferenciales, es por ello que por medio de la transformación a circuito eléctrico se logra identificar que elemento es equivalente y el sentido de cada una de las fuerza.
- El método más adecuado en la modelación de sistemas es el variacional, ya que permite obtener variables de estado a partir de sistemas no lineales complejos en el caso del manipulador con dos grados de libertad presentado en el Capítulo 2, puede ser modelado mediante física newtoniana pero el complemento geométrico es demasiado complejo para analizar las variables de estado por lo que resulta más sencillo el obtener variables generalizadas y plantear el Lagrangiano del sistema.
- Un sistema puede ser estable a pesar de encontrarse en lazo abierto y presentar un tiempo de estabilización alto. Lo que hace a un sistema estable son las características de entrada no el tiempo en que se demora en alcanzar la estabilidad, por lo que éstos aspectos pueden ser estudiados inicialmente a partir de un modelo.

- Simulink es una herramienta computacional de Matlab, la cual facilita el modelado de sistemas mediante bloques y funciones incorporadas en el espacio de trabajo, lo que permite una visualización física del modelo matemático en comparación a un archivo .m que no muestra el código sino la aplicación que se programe para cada sistema.
- Un brazo robótico con dos grados de libertad, considerando momentos de inercia y centros de masa diferentes para cada eslabón, no sigue una trayectoria definida con el modelo dinámico, es necesario hallar su modelo cinemático para manejar sus trayectorias por medio de matrices de rotación y traslación.
- Una señal de prueba sinusoidal brinda mayor rango de simulación debido a que ciertos sistemas como el brazo robótico tipo RR requiere mayor período para observar el comportamiento oscilatorio de cada eslabón cuando no se encuentra sujeto a ninguna base.
- Para utilizar el bloque embedded presente en Simulink es necesario tener instalado un compilador que permita leer el código presente en el bloque, pero en 64 bits el software Matlab para versiones superiores a R2008a presenta conflictos de compatibilidad y hace que al momento de correr la simulación arroje un error que colapsa la simulación.
- Al simular el modelo cinemático del robot móvil tipo unicycle se presenta varios errores de seguimiento de trayectoria al no colocar un controlador en la simulación ya que el modelo cinemático comandado por sus matrices de rotación y traslación no tiene referencia moviéndose indefinidamente en línea recta.
- Para obtener el modelo cinemático en el Robotino® se utiliza cinemática inversa y es necesario establecer un sistema de referencia que identifique cada rueda del robot ya que sin ello los ángulos entre las ruedas no pueden ser analizados por sus vectores unitarios para obtener su velocidad tangencial y definir sus matrices homogéneas.

- Para modelar el helicóptero con dos grados de libertad es necesario analizar los ejes y ángulos que intervienen en el sistema no se puede tomar un centro de masa erróneo ya que esto afecta al sistema de referencia que se coloque para aplicar el método de modelación de Newton-Euler.
- La metodología que facilita el modelado matemático de sistemas complejos es el Lagrangiano que predice el comportamiento dinámico, considerando la energía que se genera al realizar diversos movimientos con estos, el trabajo también es considerado como una acción si el movimiento es continuo, hay que considerar que las expresiones obtenidas son complejas y requieren un manejo especial matemático así como notación adecuada para obtener un modelo lineal apto para la simulación, ya que con sistemas no lineales la simulación es complicada al implementar sistemas dentro de un algoritmo computacional.
- El modelo del reactor químico de agitación continua puede ser simulado linealizado, debido a la complejidad matemática que presenta para ello es necesario tener condiciones iniciales alrededor de un punto de operación y aplicar series de Taylor.
- El método de modelación de Newton-Euler es útil en sistemas mecánicos considerando las fuerzas y torques que actúan en el sistema, pero presenta restricciones entre las relaciones de fuerzas presentes, por lo que la matemática se vuelve compleja.
- SolidWorks es un software que permite simular los movimientos de un robot físicamente con un entorno interactivo, además de fabricarlo virtualmente con los materiales, longitudes y pesos que se desee, lo que permite visualizar cual será el comportamiento con cada característica que se coloque al modelo.

## 5.2. RECOMENDACIONES

- Existen modelos mecánico-eléctricos complejos que no pueden ser modelados mediante Lagrange-Euler o Newton Euler, por lo que se recomienda utilizar métodos avanzados como, Denavit- Hartenberg que se basa en un sistema de coordenadas para obtener una matriz de transformación que permita obtener un modelo matemático generalizado.
- Simulink contiene una función llamada embedded que permite comprimir código .m en un solo bloque para incorporarlo al diagrama general del sistema y no tener que llamar a un archivo externo pero no funciona adecuadamente en versiones superiores a Matlab R2008a y presenta conflicto en equipos de 64 bits, por lo que se recomienda trabajar en una máquina virtual con el sistema operativo XP, o a su vez cambiar el equipo de 64 bits a 32 bits mediante complementos para el sistema.
- Simulink en su versión 7.12.0 R2011a presenta problemas de compatibilidad con la librería Robotics lo que ocasiona conflictos de simulación por lo que se recomienda instalar la versión completa desde el primer uso puesto que al reinstalar los toolkits se confunden y no permiten reemplazar los archivos antiguos por los nuevos.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

### CAPÍTULO 1

[1] Burbano P., Apuntes de Modelación y Simulación, EPN, Quito 2012

[2] <http://es.scribd.com/doc/11314683/Simulacion-de-Sistemas>

[3] <http://es.scribd.com/doc/60447993/trabajo-IDENTIFICACION-2>

[4] Guillen E., Identificación de Sistemas, “Aplicación al modelado de un motor de continua”, Electrónica.

[5] García L., “Sistemas de Control Avanzado”, Colombia 2010, <http://es.scribd.com/doc/42853442/25/Identificacion-por-el-metodo-de-minimos-cuadrados-recursivos>.

### CAPÍTULO 2

[6] Burbano P., Apuntes de Modelación y Simulación, EPN, Quito 2012

[7] Cunachi M., Estudio de sistemas de Control en la Estación de Bombeo Lago Agrio del Oleoducto Trans-Ecuador, noviembre 1996

### CAPÍTULO 3

[8] <http://193.146.57.132/depeca/repositorio/asignaturas/32328/Tema6.pdf>

[9] Manual Robotino 2007

[10] <http://www.control.aau.dk/~tb/wiki/index.php/Kinematics>

[11] A.M. Kuethe and C.Y. Chow, Foundations of Aerodynamics. Wiley and Sons, New York, 1986

[12] Vivas E., Control del Helicóptero 2D usando métodos de control robusto.

- [13] M. Spong and M. Vidyasagar. Robot Dynamics and Control. John Wiley & Sons, New York, 1 edition, 1989.
- [14] K. Zhou and J. C. Doyle. Essentials of Robust Control. Prentice-Hall, New jersey, 1998
- [15] Vallejo, Zambrano, "Física Vectorial2", Escuela Politécnica Nacional, 2004
- [16] Smith C., Corripio A., "Control Automático de Procesos",pág.121, 564.
- [17] Dochain, D., Babary, J.P., & Tali-Maamar, N. "Modelling and adaptive control of nonlinear distributed parameter bioreactors vía orthogonal collocation". Automatica, 55, 873-883. (1992)

## **CAPÍTULO 4**

- [18] López L., Modelación y Simulación Dinámica de un Brazo Robótico de 4 Grados de Libertad para Tareas sobre un plano horizontal, Pontificia Universidad Católica del Perú.
- [19] Muñoz Martínez V.F., Gil Gómez G, García Cerezo, Modelado Cinemático y Dinámico de un Robot Móvil Omni-Direccional.
- [20] Esqueda J., Matlab e interfaces Gráficas, Instituto Tecnológico de Ciudad Madero.
- [21] Apuntes de Simulink, IQ753 Diseño de Reactores Químicos.  
<http://proton.ucting.udg.mx/~cheko/pdf/matv.pdf>
- [22] Kuo Benjamín, "Sistemas de Control Automático" Séptima Edición.
- [23] Ollero A., "Manipuladores y robots móviles", Barcelona España, 2001
- [24] Acosta M., "Apuntes Síntesis de Plantas y Procesos", Escuela Politécnica Nacional, Quito, 2012.
- [25] Andaluz G., Modelación, Identificación y Control de Robots Móviles, Proyecto de Titulación, EPN, Agosto 2011.

[26] Rosales A., Apuntes Control Computarizado, Escuela Politécnica Nacional, Quito, 2012.

## ANEXOS

### ANEXO A1

#### DIAGRAMA DE FLUJO DEL PROGRAMA IMPLEMENTADO BRAZO ROBÓTICO SIMULINK

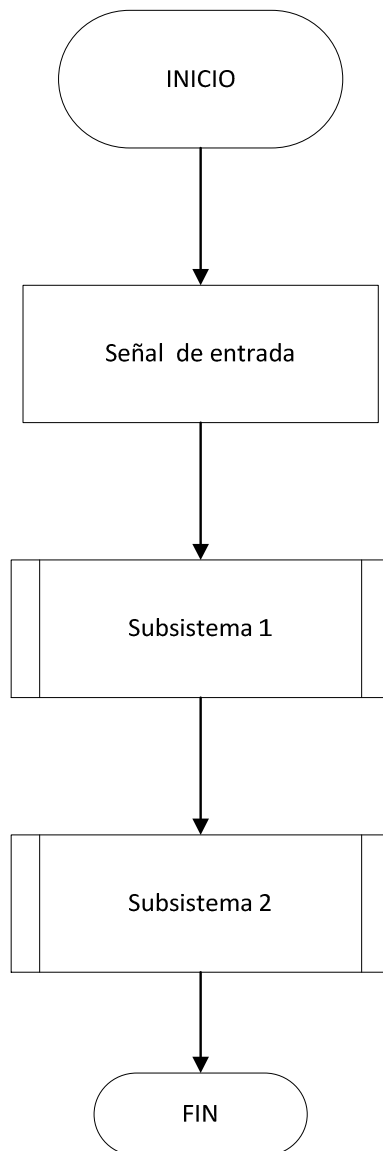


Figura A1 Diagrama Principal Brazo Robótico



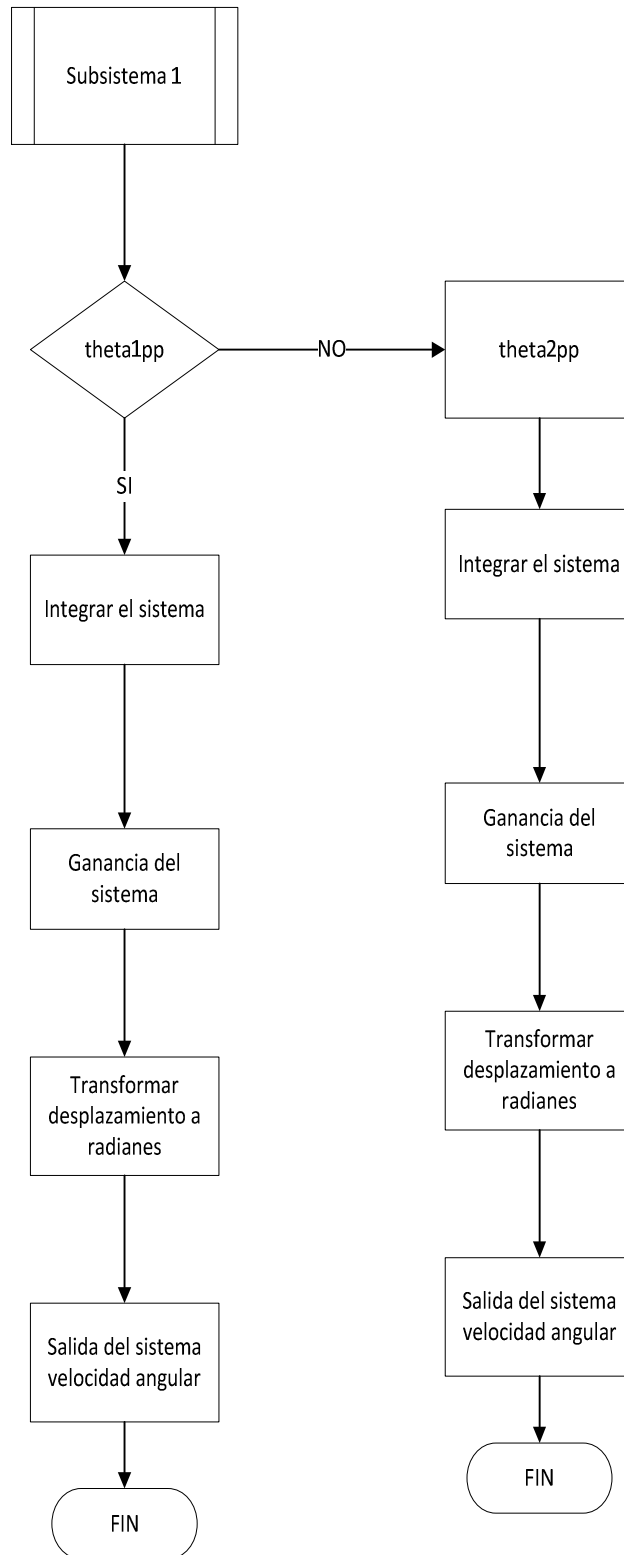


Figura A2 Subsistema1 implementado en el capítulo 3

Éste diagrama de flujo explica de manera simplificada el funcionamiento del sistema implementado para la medición de velocidad y desplazamiento angular en el brazo robótico tipo RR.

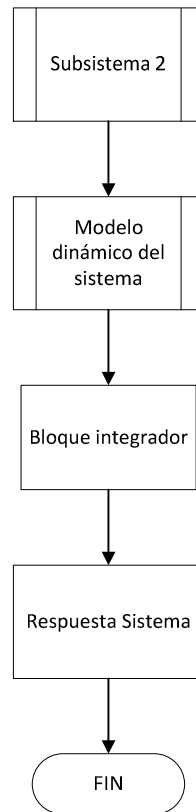


Figura A3 Subsistema2 implementado en el capítulo 3

El diagrama de flujo del subsistema 2 contiene el modelo dinámico del sistema que se lo coloca como subrutina para explicar los parámetros que contiene el algoritmo implementado para la simulación del sistema en lazo abierto.

El modelo cinemático del sistema no es implementado en un subsistema debido a que requiere un controlador para tener un manejo adecuado de las trayectorias, caso contrario en lazo abierto el sistema oscila sin ningún control y no presenta señal de salida visible.

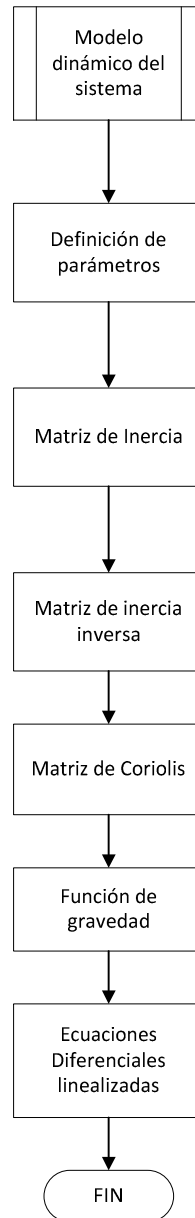


Figura A4 Modelo dinámico del sistema brazo robótico tipo RR

El modelo dinámico que se dedujo para el brazo robótico con dos grados de libertad considerando sus momentos de inercia presenta varias matrices propias de un modelo Lagrange-Euler en el que es imprescindible hallar las matrices de Coriolis, matriz de inercia y las fuerzas que actúan en el sistema por acción de la gravedad.

## ANEXO A2

### PROGRAMA IMPLEMENTADO EN EL SUBSISTEMA 2, CAPÍTULO 3

%Función que contiene los parámetros de un brazo robótico con dos grados de libertad , considerando los momentos de inercia y torques.

%Variables de estado obtenidos con el método Langrange-Euler.

%PROYECTO DE TITULACIÓN DESARROLLO DE METODOLOGÍAS Y

%PROGRAMACIÓN DE APLICACIONES PARA

%MODELACIÓN, IDENTIFICACIÓN Y SIMULACIÓN

%LADY CABEZAS

%%

%PARÁMETROS BRAZO ROBÓTICO SISTEMA INTERNACIONAL

m1=0.6;    %[Kg]

m2=0.3;    %[kg]

I1=0.0034;  %[kg.m2]

I2=0.0025;  %[kg.m2]

l1=0.19;    %[m]

l2=0.14;    %[m]

lc1=0.084;  %[m]

lc2=0.052;  %[m]

%%

%VARIABLES DE ESTADO

x(1)=theta1;    %se reemplaza el valor de tetha por una variable x1 y realizar el programa más fácil

x(2)=theta1p;

x(3)=theta2;

x(4)theta2p;

x(5)=ta1;        %torque del primer eslabón

x(6)=ta2;        %torque del segundo eslabón

```

%%
%Matriz de inercia M(theta)
% ---      ---
% |M11(theta) m12(theta) |
% |M21(theta) m22(theta) |
% ---      ---
M11=(m1*(lc1^2))+m2*(l1^2+lc2^2+2*l1*lc2*cos(x(3)))+I1+I2;
M12=(m2*(lc1^2))+m2*l1*lc2*cos(x(3))+I2;
M21=m2*((lc2^2)+l1*lc2*cos(x(3)))+I2;
M22=m2*(lc2^2)+I2;

%Matriz de inercia inversa M(theta)^(-1)
detM=((M11*M22)-(M12*M21));
dM11=(M22/detM);
dM12=- (M12/detM);
dM21=- (M21/detM);
dM22=(M11/detM);

%%
%Matriz de coriolis C(theta,thetap)
h=- (m2*l1*lc2*sin(x(3)));
c11=(h*(x(4)));
c12=(h*(x(2)))+(h*(x(4)));
c21=- (h*(x(2)));
c22=0;

%Matriz de coriolis representado como Ecuación diferencial
c111=c11*(x(2));
c121=c12*(x(4)); %112
c211=c21*(x(4)); %221
c221=0; %222

```

```
%%
```

```
%Matriz de acción gravitatoria G(theta)
```

```
g1=(m1*lc1+m2*l1)*g*sin(x(1))+m2*lc2*g*sin(x(1)+x(3));
```

```
g2=m2*lc2*g*sin(x(1)+x(3));
```

```
%%
```

```
%Ecuaciones
```

```
theta1pp=-dM11*(c111+c121)-dM12*(c211+c222)-(dM11*g1)-  
(dM12*phi2)+(dM11*ta1)+(dM12*ta2);
```

```
theta2pp=-dM21*(c111+c121)-dM22*(c211+c222)-(dM21*g1)-  
(dM22*g2)+(dM21*ta1)+(dM22*ta2);
```

```
thetapp = [theta1pp;theta2pp];
```

## ANEXO A3

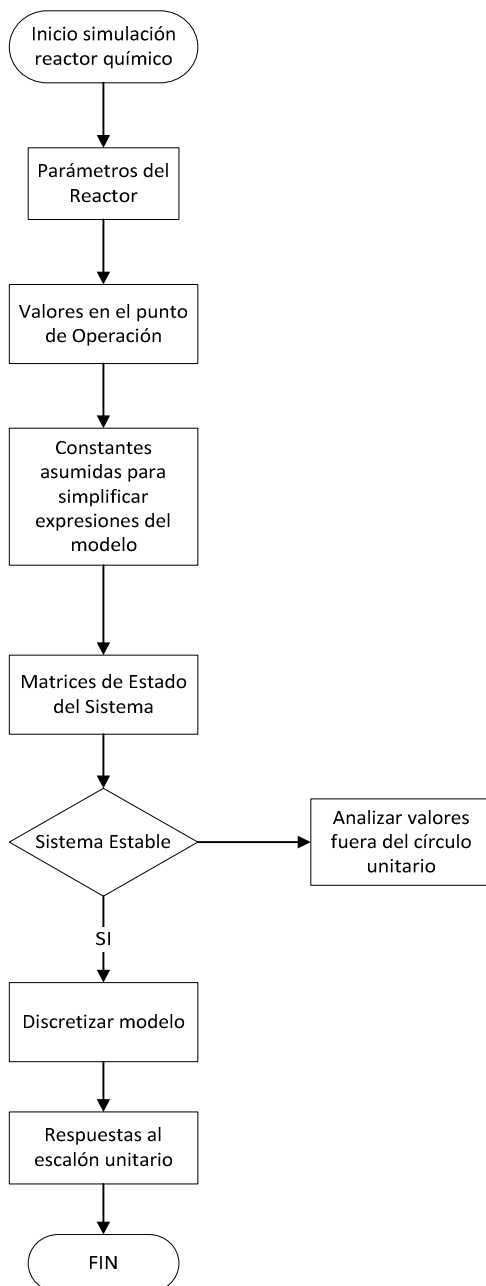


Figura A5 Modelo reactor químico de agitación continua

La Figura A5 representa el diagrama de flujo del reactor químico de agitación continua a través de los parámetros del reactor y las matrices de estado del sistema, éstos parámetros varían de acuerdo a las condiciones iniciales del sistema y el tipo de constantes que el sistema sea capaz de soportar.

## ANEXO A4

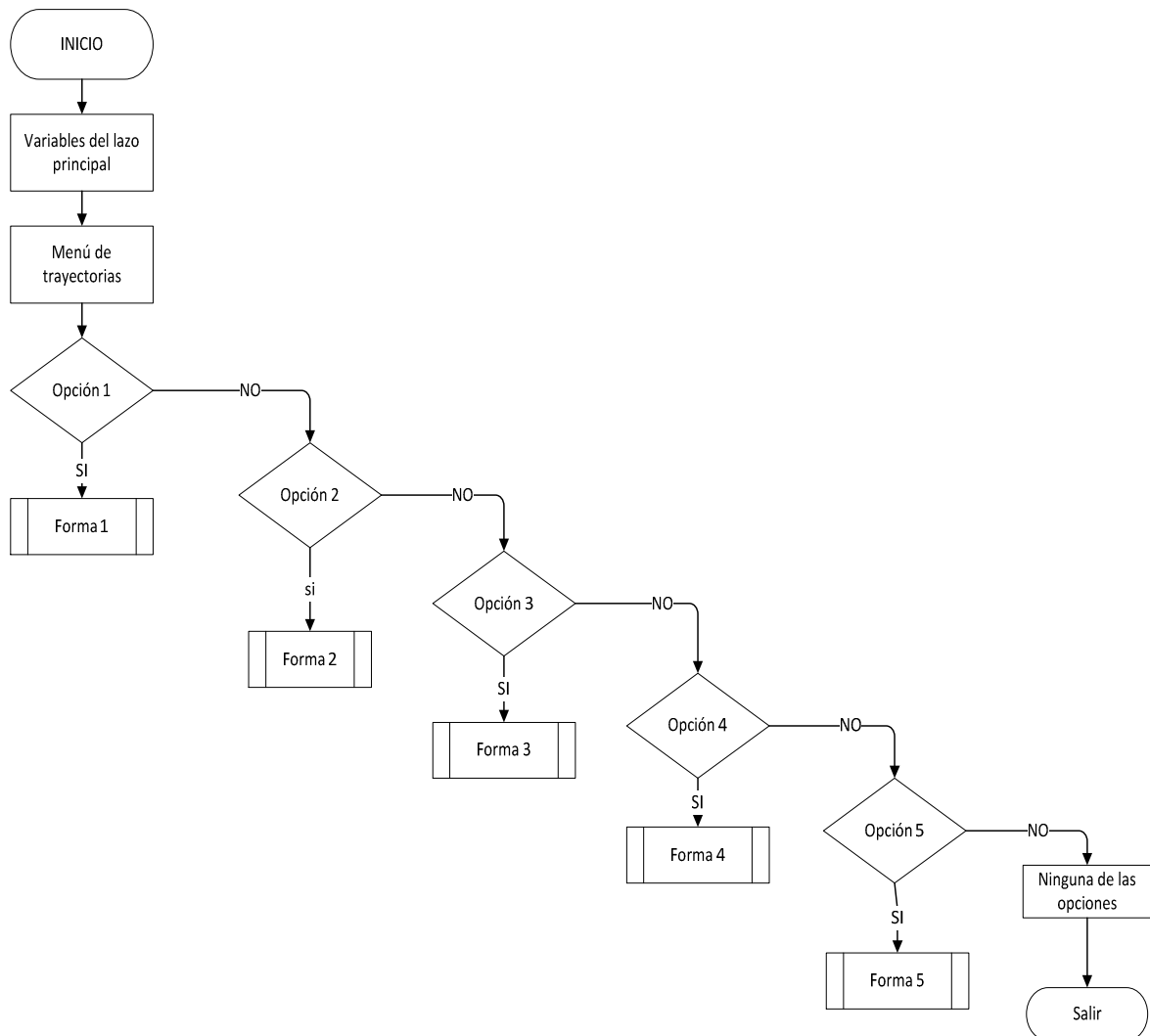


Figura A6 Diagrama Flujo Programación trayectorias

La Figura A6 muestra el diagrama principal para la generación de trayectorias el cual se encuentra desarrollado en un archivo .m y compuesto por varias funciones llamadas forma1, forma2, forma3, forma4, forma5, dentro de la cual se escoge el color y la forma del robot móvil, cada forma contiene una función que permite escoger el tipo de trayectoria a seguir.

Para generar la trayectoria de la elipse se ingresa los parámetros de  $x$  e  $y$ , de la astroide la longitud del radio de la Figura, esto es ancho y radio.



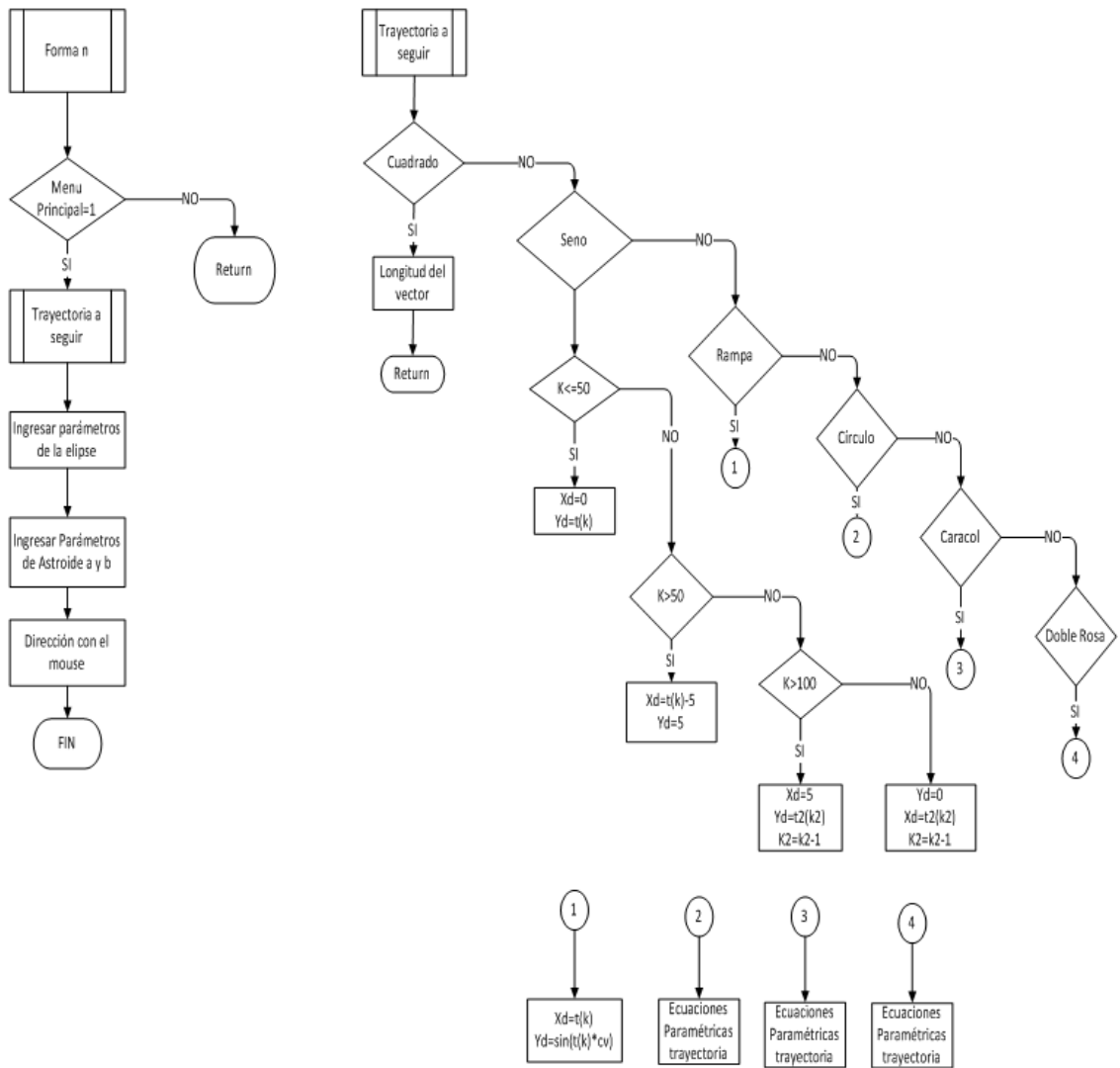


Figura A6 Diagrama Flujo Programación trayectorias

La Figura A6 muestra el diagrama de flujo del algoritmo implementado para generación de trayectorias en el robot móvil tipo unicycle, el programa principal se presenta en la Figura A5 en la que se observa 5 opciones de formas para el robot, cada forma presenta el mismo algoritmo por lo cual se le denomina n=5.