

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

ESCUELA DE INGENIERÍA

EVALUACIÓN DEL COMPORTAMIENTO DE ELECTRODOS DE PUESTA A TIERRA EN UN SUELO ESTRATIFICADO MEDIANTE SIMULACIÓN EMPLEANDO UN COMPUTADOR PERSONAL

**PROYECTO PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE INGENIERO
ELÉCTRICO**

CRISTIAN PATRICIO MARÍN CAJAS

DIRECTOR: ING. PAÚL AYORA

QUITO, OCTUBRE, 2005

DECLARACIÓN

Yo CRISTIAN PATRICIO MARÍN CAJAS, declaro bajo juramento que el trabajo aquí descrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentada para ningún grado o calificación profesional; y, que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

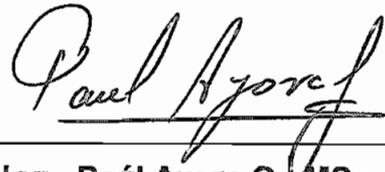
A través de la presente declaración cedo mis derechos de propiedad intelectual correspondientes a este trabajo, a la Escuela Politécnica Nacional, según lo establecido por la Ley de Propiedad Intelectual, por su Reglamento y por la normatividad institucional vigente.



CRISTIAN P. MARÍN C.

CERTIFICACIÓN

Certifico que el presente trabajo fue desarrollado por CRISTIAN PATRICIO MARÍN CAJAS, bajo mi supervisión.



**Ing. Paúl Ayora G. MSc.
DIRECTOR DE PROYECTO**

AGRADECIMIENTO

A Dios.

A mis Padres.

Al ing. Paúl Ayora.

A la E.P.N.

CONTENIDO

DECLARACIÓN.....	ii
CERTIFICACIÓN.....	iii
DEDICATORIA.....	iv
AGRADECIMIENTO.....	v
CONTENIDO.....	vi
LISTADO DE TABLAS.....	x
RESUMEN.....	xii
PRESENTACIÓN.....	xiii
CAPÍTULO I.....	1
CONSIDERACIONES GENERALES	1
1.1 INTRODUCCIÓN	1
1.2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	5
1.3 OBJETIVO.....	9
1.4 ALCANCE.....	10
CAPÍTULO II	11
DESARROLLO DE ECUACIONES PARA EVALUAR EL COMPORTAMIENTO DE LOS ELECTRODOS DE PUESTA A TIERRA	11
2.1 CONSIDERACIONES INICIALES.....	11
2.2 PLANTEAMIENTO DE LAS ECUACIONES PARA EVALUAR EL COMPORTAMIENTO DE ELECTRODOS PUNTUALES.....	11
2.2.1 ESTUDIO DE UN ELECTRODO PUNTUAL EN LA SUPERFICIE DE UN SUELO UNIFORME.....	11
2.2.2 ESTUDIO DE UN ELECTRODO PUNTUAL DEBAJO DE LA SUPERFICIE DE LA TIERRA.....	13
2.2.3 ESTUDIO DE UN ELECTRODO PUNTUAL DEBAJO DE LA SUPERFICIE DE LA TIERRA EN UN SUELO ESTRATIFICADO HORIZONTALMENTE POR EL MÉTODO DE LAS IMÁGENES	13
2.2.3.1 Estudio de un electrodo puntual en suelo de dos capas.....	15
2.2.3.2 Estudio de un electrodo puntual en suelo de tres capas.....	17
2.2.3.2.1 Punto en la capa de resistividad ρ_2 y electrodo en la capa de resistividad ρ_2	18
2.2.3.2.2 Punto en la capa de resistividad ρ_3 y electrodo en la capa de resistividad ρ_3	19
2.2.3.2.3 Punto en la capa de resistividad ρ_1 y electrodo en la capa de resistividad ρ_3	20
2.2.3.2.4 Punto en la capa de resistividad ρ_1 y electrodo en la capa de resistividad ρ_2	20
2.2.3.2.5 Punto en la capa de resistividad ρ_2 y electrodo en la capa de resistividad ρ_3	20
2.2.3.2.6 Punto en la capa de resistividad ρ_3 y electrodo en la capa de resistividad ρ_2	21
2.3 PLANTEAMIENTO DE LAS ECUACIONES PARA EVALUAR EL COMPORTAMIENTO DE ELECTRODOS LINEALES	21
2.3.1 ELECTRODO FORMADO POR UN CONDUCTOR LINEAL, EN UN MEDIO HOMOGÉNEO CONSIDERACIONES BÁSICAS.....	21
2.3.2 ELECTRODO FORMADO POR UN CONDUCTOR LINEAL, EN UN SUELO ESTRATIFICADO	23

2.3.2.1	Electrodo formado por un conductor lineal, enterrado en una capa de un suelo estratificado	28
2.3.2.2	Electrodo formado por un conductor lineal, enterrado en dos capas de un suelo estratificado	28
2.3.3	PLANTEAMIENTO DE LAS ECUACIONES PARA EL CÁLCULO DEL POTENCIAL MEDIO ENTRE CONDUCTORES LINEALES	30
2.3.3.1	Cada electrodo en una capa de un suelo estratificado	30
2.3.3.2	Electrodos en varias capas de un suelo estratificado.....	33
2.3.4	DETERMINACIÓN DE LA “RESISTENCIA MUTUA” ENTRE CONDUCTORES LINEALES	37
2.4	PLANTEAMIENTO DE LAS ECUACIONES PARA EVALUAR EL COMPORTAMIENTO DE ELECTRODOS DE PUESTA A TIERRA COMPLEJOS.....	38
2.4.1	CONSIDERACIONES BÁSICAS	38
2.4.2	METODOLOGÍA DE SOLUCIÓN.....	39
2.4.2.1	Determinación de la distribución de corriente	40
2.4.2.2	Determinación de la resistencia del electrodo	43
2.4.2.3	Determinación de los voltajes de toque o contacto y de paso	44
CAPÍTULO III.....		45
DESARROLLO DEL PROGRAMA COMPUTACIONAL		45
3.1	CONSIDERACIONES INICIALES	45
3.2	SECUENCIA DE CÁLCULO	49
3.3	DIAGRAMAS DE FLUJO	52
3.3.1	DIAGRAMA DE FLUJO DE PROCESO DE CÁLCULO.....	52
3.3.2	TRANSICIÓN DE ESTADOS.....	53
CAPÍTULO IV.....		54
VALIDACIÓN Y EJEMPLOS DE USO DEL PROGRAMA.....		54
4.1	ESTUDIO COMPARATIVO CON APLICACIONES SIMILARES	54
4.2	SIMULACIÓN DEL COMPORTAMIENTO DE ELECTRODOS COMUNES	57
4.2.1	ELECTRODO VERTICAL	57
4.2.2	CONDUCTOR HORIZONTAL	59
4.2.3	PLACA HORIZONTAL.....	60
4.2.4	ESTRELLA DE TRES PUNTAS	62
4.3	EVALUACIÓN DEL COMPORTAMIENTO DE ELECTRODOS COMUNES .	63
4.3.1	RESISTENCIA	63
4.3.2	POTENCIALES.....	63
4.3.3	DISTRIBUCIÓN DE CORRIENTE.....	63
4.4	VARIACIÓN DE LA RESISTENCIA Y POTENCIALES CON LA LONGITUD DE LOS SEGMENTOS QUE FORMAN EL ELECTRODO.	65
CAPÍTULO V		69
ANÁLISIS DE ELECTRODOS DE PUESTA A TIERRA COMPLEJOS		69
5.1	ESTUDIO DE SENSIBILIDAD PARA UN ELECTRODO DE PUESTA A TIERRA DE FORMA CUADRADA.....	69
5.1.1	SUELO HOMOGÉNEO	70
5.1.1.1	Distribución de corriente.....	70
5.1.1.2	Resistencia.....	71
5.1.1.3	Potenciales.....	73
5.1.2	SUELO NO HOMOGÉNEO	76
5.1.2.1	Suelo de dos capas.....	76

5.1.2.1.1	Distribución de corriente.....	77
5.1.2.1.2	Resistencia	78
5.1.2.1.3	Potenciales	80
5.1.2.1.4	Distribución de corriente.....	84
5.1.2.1.5	Resistencia	85
5.1.2.1.6	Potenciales.....	85
5.1.2.2	Suelo de tres capas	88
5.1.2.2.1	Distribución de corriente.....	88
5.1.2.2.2	Resistencia	89
5.1.2.2.3	Potenciales	91
5.1.2.2.4	Resistencia	92
5.1.2.2.5	Potenciales	92
5.1.2.2.6	Resistencia	93
5.1.2.2.7	Potenciales	93
5.2	ESTUDIO DE SENSIBILIDAD PARA UN ELECTRODO DE PUESTA A TIERRA DE FORMA CUADRADA CON VARILLAS ENTERRADAS EN UN SUELO NO HOMOGÉNEO.....	93
5.3	ESTUDIO DE SENSIBILIDAD PARA UNA MALLA CON VARILLAS ENTERRADAS EN UN SUELO NO HOMOGÉNEO	98
5.4	ESTUDIO DE SENSIBILIDAD PARA UN ELECTRODO EN FORMA DE ANILLO EN UN SUELO NO HOMOGÉNEO.....	101
CAPÍTULO VI.....		104
CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES		104
APÉNDICE A.....		107
DESARROLLO DE LAS EXPRESIONES DE VOLTAJE EN UN PUNTO DEBIDO A LA CORRIENTE QUE ABANDONA UN ELECTRODO PUNTUAL EN SUELOS ESTRATIFICADOS.....		107
A.1	SUELO DE DOS CAPAS.....	107
A.2	SUELO DE TRES CAPAS.....	110
APÉNDICE B.....		114
VALORES DE CONSTANTES DE LA EXPRESIÓN 2.27.....		114
APÉNDICE C.....		117
TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS		117
APÉNDICE D.....		122
INTEGRACIÓN DE LA EXPRESIÓN PARA DETERMINAR EL POTENCIAL QUE INDUCE UN CONDUCTOR LINEAL EN UN PUNTO		122
APÉNDICE E.....		124
DETALLES DE LA EXPRESIÓN 2.46.....		124
APÉNDICE F		127
DETERMINACIÓN DE COORDENADAS PARA UN SEGMENTO EN EL PUNTO EN LA INTERFAZ DE DOS CAPAS		127
APÉNDICE G		131
DETALLES DE LA EXPRESIÓN 2.54.....		131
APÉNDICE H		134

(TABLAS DE RESULTADOS DE SIMULACIÓN PARA UNA MALLA CUADRADA)..... 134

APÉNDICE I..... 137

(MANUAL DE USUARIO DEL PROGRAMA AEPT)..... 137

I.1 INTRODUCCIÓN 137

I.2 REQUERIMIENTOS DE HARDWARE Y SOFTWARE..... 137

I.3 INSTALACIÓN..... 137

I.4 INICIO Y SALIDA..... 138

I.5 DESCRIPCIÓN DE PANTALLAS 139

 I.5.1 PANTALLA DE PRESENTACIÓN 139

 I.5.2 PANTALLA DE INGRESO DE GEOMETRÍA DEL ELECTRODO..... 139

 I.5.3 PANTALLA DE INGRESO DE DATOS DEL SUELO, DIÁMETRO, CORRIENTE DE DISEÑO Y COORDENADAS SOBRE LA SUPERFICIE PARA EL CÁLCULO DE ELECTRODOS..... 140

I.6 CORRIDA Y REPORTES..... 143

I.7 INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS 146

I.8 LÍMITES DEL PROGRAMA..... 148

BIBLIOGRAFÍA..... 150

LISTADO DE TABLAS

Tabla 1.1 Valores orientativos de resistividades promedio de suelo	7
Tabla 4.1 Comparación de resultados de resistencia, voltaje en el punto central de la malla y corriente en los segmentos, entre el programa AEPT con las referencias [9] y [17]	55
Tabla 4.2 Comparación de resultados de resistencia del programa AEPT con las referencias [13], [14], [15], y [17].....	56
Tabla 4.3 Resumen de resultados para el electrodo de la figura 4.2 (Barra vertical)	58
Tabla 4.4 Resumen de resultados para el electrodo de la figura 4.4 (Conductor horizontal)	59
Tabla 4.5 Resumen de resultados para el electrodo de la figura 4.6 (Placa horizontal) ..	61
Tabla 4.6 Resumen de resultados para el electrodo de la figura 4.8 (Estrella de tres puntas).....	62
Tabla 4.7 Variación de resistencia y potenciales con la longitud de segmentación para varios electrodos.....	66
Tabla 4.8 Variación de resistencia y potenciales con la longitud de segmentación para los electrodos indicados	67
Tabla 5.1 Variación de la resistencia con el espesor del segundo estrato y voltaje en la superficie sobre el centro de la malla de la figura 5.25.....	90
Tabla 5.2 Variación de la resistencia y potenciales en un punto en la superficie directa sobre el centro de la malla de la figura 5.25.....	90
Tabla 5.3 Variación de la resistencia con el espesor del segundo estrato y voltaje en la superficie sobre el centro de la malla de la figura 5.27.....	91
Tabla 5.4 Variación de la resistencia y potenciales en un punto en la superficie directa sobre el centro de la malla de la figura 5.27.....	92
Tabla 5.6 Variación de la resistencia y potenciales en un punto en la superficie directa sobre el centro de la malla de la figura 5.28.....	94
Tabla 5.7 Variación de la resistencia y potenciales en un punto en la superficie directa sobre el centro de la malla de la figura 5.28 para diferentes valores de espesor de la segunda capa	95
Tabla 5.8 Variación de la resistencia y potenciales en un punto en la superficie directa sobre el centro de la malla de la figura 5.31.....	99
Tabla 5.9 Variación de la resistencia y potenciales en un punto en la superficie directa sobre el centro del electrodo de la figura 5.34.....	102
Tabla B.1 Punto en la capa de resistividad ρ_2 y electrodo en la capa de resistividad ρ_2	114
Tabla B.2 Punto en la capa de resistividad ρ_3 y electrodo en la capa de resistividad ρ_3	115
Tabla B.3 Punto en la capa de resistividad ρ_1 y electrodo en la capa de resistividad ρ_2	115
Tabla B.4 Punto en la capa de resistividad ρ_1 y electrodo en la capa de resistividad ρ_3	115
Tabla B.5 Punto en la capa de resistividad ρ_2 y electrodo en la capa de resistividad ρ_3	116
Tabla B.6 Punto en la capa de resistividad ρ_3 y electrodo en la capa de resistividad ρ_2	116
Tabla H.1 Valores de resistencia para el electrodo de la figura 5.9 para los valores de espesor de la primera capa H, y Coeficiente de reflexión K, indicados	134
Tabla H.2 Valores de resistencia para el electrodo de la figura 5.9 para los valores de espesor de la primera capa H, y Coeficiente de reflexión K, indicados	134
Tabla H.3 Valores de voltaje de toque para el electrodo de la figura 5.9 para los valores de espesor de la primera capa H, y Coeficiente de reflexión K, indicados	135
Tabla H.4 Valores de voltaje de toque para el electrodo de la figura 5.9 para los valores de espesor de la primera capa H, y Coeficiente de reflexión K, indicados	135
Tabla H.5 Valores de voltaje de paso para el electrodo de la figura 5.9 para los valores de espesor de la primera capa H, y Coeficiente de reflexión K, indicados	136
Tabla H.6 Valores de voltaje de paso para el electrodo de la figura 5.9 para los valores de espesor de la primera capa H, y Coeficiente de reflexión K, indicados	136

Tabla I.1 Relaciones para obtener la corriente en amperios y los potenciales en porcentaje y en porcentaje del GPR 149

RESUMEN

El objetivo de este proyecto de Titulación es evaluar el comportamiento de los electrodos complejos de puesta a tierra en un suelo estratificado.

El presente trabajo desarrolla las expresiones que gobiernan el comportamiento de los electrodos considerando las estratificaciones que puede tener un suelo.

Las ecuaciones que modelan un sistema de puesta a tierra, enterrado en un suelo estratificado se obtienen por el método de las imágenes para una fuente puntual de corriente, este análisis posibilita la resolución de las ecuaciones de potencial mediante la integración a lo largo de la trayectoria que representa un segmento recto o electrodo lineal.

Se desarrollan las expresiones matemáticas para calcular la “resistencia mutua” y propia de los segmentos, considerando capas irregulares de suelo o capas con diferentes resistividades. Estas expresiones son halladas mediante la determinación del potencial medio entre electrodos lineales, y tienen la ventaja de ser aplicables cualquiera que sea la posición relativa de los segmentos.

Finalmente se aplica el método de los momentos para evaluar el comportamiento de los electrodos de puesta a tierra, este método implica que conceptualmente la malla o puesta a tierra puede ser dividida en segmentos rectos de conductor.

Se desarrolla un programa computacional que permite la obtención de resistencia de puesta a tierra y de potenciales de toque o contacto y de paso para electrodos complejos.

Se presenta algunos análisis representativos de los resultados cuantitativos y gráficos que pueden obtenerse por medio del programa computacional.

PRESENTACIÓN

Los métodos de evaluación del comportamiento de electrodos de puesta a tierra que existen en la actualidad son limitados debido a que realizan una serie de simplificaciones en su aplicabilidad, por tanto esos resultados no siempre se acercan a la realidad.

En el presente trabajo se plantea, y resuelve el problema del análisis de electrodos complejos, mediante el concepto de segmentación del electrodo.

Este trabajo está orientado a analizar el comportamiento que puede tener un electrodo en un suelo estratificado de tres capas, debido a que en la práctica el electrodo puede estar inmerso en la segunda o tercera capa de un suelo no homogéneo, y la primera capa es la de protección, y es añadida al suelo original sobre la superficie del terreno.

Mediante la ayuda de un programa computacional, elaborado en base a las expresiones desarrolladas, se evalúa el comportamiento de los electrodos de puesta a tierra que pueden ser caracterizados por la resistencia de puesta a tierra, y los gradientes de potencial que se dan en condiciones de falla. Además mediante los parámetros encontrados con el programa se pretende observar que tipos de configuración de puesta a tierra cumplen con criterios de optimización y seguridad.

CAPÍTULO I

CONSIDERACIONES GENERALES

1.1 INTRODUCCIÓN

En un sistema Eléctrico existe la denominada **“TIERRA”** que identifica un electrodo enterrado con un **POTENCIAL O VOLTAJE QUE SERVIRÁ COMO NIVEL DE REFERENCIA BÁSICO** y respecto al cual normalmente se medirán o consideraran los correspondientes a los otros niveles, dispositivos, equipos, puntos etc., del sistema eléctrico [21].

Esta “Tierra” al ser básicamente un electrodo de referencia puede tener un potencial variable en el tiempo en forma similar a la cubierta de un barco, respecto a la cual se indican alturas (potenciales) dentro del barco y fuera de él pero que varía su propia altura respecto a un nivel fijo con las mareas y las olas. Siguiendo el símil del barco en el cual la cubierta debe existir físicamente, así mismo el electrodo referencial de potenciales del sistema eléctrico debe estar constituidos por elementos físicos, a los cuales se los denomina la **“PUESTA A TIERRA “** o simplemente **“TIERRA”**

Una “Tierra” es parte de un sistema denominado **SISTEMA DE PUESTA A TIERRA.**

Un sistema de puesta a tierra seguro tiene dos objetivos [20]:

- Despejar la corriente eléctrica en la tierra bajo condiciones normales y de falla sin exceder los límites del equipamiento y sin afectar adversamente el funcionamiento y la continuidad de servicio [20].

- Asegurar que una persona en la vecindad de las instalaciones de puesta a tierra no este expuesta a las peligrosas y criticas descargas eléctricas [20].

En resumen la instalación de puesta a tierra de un circuito eléctrico se establece principalmente con el objetivo de limitar la diferencia de potencial que se puede presentar entre varios puntos bajo condiciones de falla o descarga eléctrica debido a que la corriente originada produce gradientes de potencial dentro y alrededor de la instalación. Dependiendo de las magnitudes de estas diferencias de potencial se considera que existe riesgo tanto para las personas como para el equipo inmerso en la instalación.

Un adecuado diseño e instalación de puesta a tierra deberá conseguir que en las instalaciones y cercanías no aparezcan diferencias de potencial peligrosas y que permita el paso a tierra de las corrientes de falla o de descargas atmosféricas.

Para lograr que una puesta a tierra cumpla con los objetivos previstos es necesario establecer un medio a través del cual sea posible entrar en contacto con el terreno o suelo y conocer como va actuar este medio al que se conoce como "electrodo de puesta a tierra", que físicamente es un conjunto de elementos metálicos unidos electromecánicamente entre sí, enterrado, utilizado para disipar corriente hacia tierra, considerando que "Tierra" es un terminal que posee un potencial eléctrico referencial cero conectado a este medio.

Debido a que los electrodos permanecen en contacto directo con el terreno estos deben ser construidos con materiales inalterables a ciertos factores como humedad y acción química del terreno. Por esto se suele usar materiales como el cobre, el acero galvanizado y el hierro bañado en zinc.

El comportamiento de los electrodos de puesta a tierra puede ser caracterizado (o se diferencian entre ellos) por:

- La resistencia de puesta a tierra, y en ciertas ocasiones por la impedancia (lo último a elevada frecuencia).

- La diferencia de potencial entre puntos sobre la superficie de la tierra.

Al analizar la diferencia de potencial entre puntos sobre la superficie de la tierra lo que se está considerando son potenciales que pueden afectar a las personas que se encuentran en la instalación.

Por tanto, a lo largo de la tesis se usan ciertos conceptos que conviene tener presente:

GPR: es el máximo voltaje que la puesta a tierra alcanza respecto de la tierra remota, es decir es el voltaje al que se encuentra la malla o electrodo de puesta a tierra.

Potencial de Paso: es la diferencia de potencial en la superficie experimentada por una persona, cuyos pies están apartados un metro entre sí, sin tocar ningún objeto puesto a tierra (ver figura 1.1).

Potencial de Toque: también llamada tensión de contacto, es la diferencia de potencial entre el GPR y el potencial en la superficie en un punto donde una persona esta parada, mientras al mismo tiempo tiene una mano en contacto con una estructura que está conectada a tierra (ver figura 1.1).

Una corriente eléctrica que circula por el cuerpo Humano puede producir un efecto más o menos grave incluso la muerte. Los efectos fisiológicos de una corriente son diferentes según se trate de una cd, ca, o de una corriente a alta frecuencia, en cada caso depende de la intensidad, duración, de la trayectoria y condiciones fisiológicas del cuerpo.

La resistencia del cuerpo humano incluyendo la resistencia de contacto (resistencia entre la mano y el conductor, depende del tipo de piel (lisa o callosa) o entre el pie y el suelo, depende del tipo de calzado) puede alcanzar valores entre 500 y 2000 Ω

De lo anterior se puede comprender porque las normas de seguridad establecen valores máximos de tensiones de seguridad. Estos valores pueden tener variaciones de acuerdo con las normas y reglamentos de los distintos países, en general se establece que ningún punto de una instalación eléctrica se debe presentar tensiones de paso y de contacto superiores a:

60 V cuando se marca la eliminación rápida de una falla de línea a tierra.

720 V cuando la falla se elimina en un segundo

Si se supone que la resistencia del cuerpo humano es de 3000 Ω las corrientes en cada caso son de: 20 mA y 40 mA respectivamente.

Fuente: Referencia [22]

Para mayor información se puede recurrir a referencia [3], [21], [23].

En la referencia [3], y [23] se establece los potenciales de toque y paso tolerable mediante ecuaciones, en las que se ha introducido una constante Cs para tomar en consideración las reflexiones en la capa de roca triturada

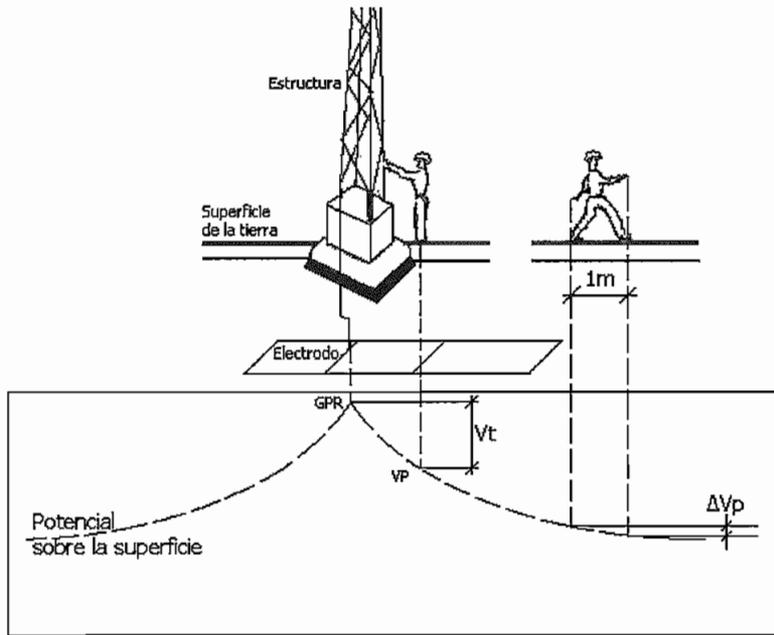


Figura 1.1 Potencial de toque y potencial de paso asociados a la presencia humana

Fuente: Referencia [22]

AEPT *: nombre del programa desarrollado en el presente trabajo para cálculo de parámetros (resistencia de puesta a tierra y potenciales).

Corriente: constituye cargas eléctricas en movimiento.

Corriente de diseño**: corresponde a la mayor corriente entre la malla y la tierra circundante, es decir la corriente más elevada que se descargara por tierra, para determinarla es necesario determinar la falla que originará la mayor corriente (**la metodología para obtener la corriente de diseño no se toma en cuenta en el presente trabajo y más bien se considera como dato para nuestro estudio**).

El diseñador de un sistema de puesta a tierra se enfrenta con dos tareas:

- Obtener un valor de resistencia de puesta a tierra requerido.
- Asegurar que los potenciales de toque y los potenciales de paso sean satisfactorios.

* AEPT son las iniciales de Análisis de Electrodo de Puesta a Tierra

** Un método para encontrar la corriente de diseño se encuentra en la referencia [21], Las fallas trifásicas (fallas simétricas) usualmente producen las mayores intensidades de cortocircuito [24].

Por facilidad el diseñador debe concentrarse en obtener el valor de resistencia de puesta a tierra, este valor debe ser definido en base a criterios o consideraciones de protección.

Los factores que influyen a la resistencia de puesta a tierra son:

- Las dimensiones físicas y atributos del sistema de electrodos de tierra (características físicas, material, y profundidad de enterramiento).
- Las condiciones del suelo, es decir su resistividad o resistividades si se trata de un suelo no homogéneo, esto depende de la composición del suelo.

El sistema de puesta a tierra consiste en un material conductor fuera del suelo, el electrodo enterrado en el suelo y el suelo mismo. Todos estos componentes contribuyen al valor de resistencia de puesta a tierra y los valores de potenciales sobre la superficie del suelo.

La instalación de puesta a tierra se debe construir en sitios donde se instalen:

- Pararrayos.
- Descargadores de sobretensión.
- Transformadores de potencia y distribución.
- Todo elemento o estructura metálica que tenga que ver con el sistema

1.2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El problema general consiste en evaluar el comportamiento de los electrodos de puesta a tierra complejos, entendiendo como “complejo” a aquel que puede considerarse formado por un número finito de segmentos lineales de conductor. Así entendido se puede decir que todo electrodo puede ser considerado como un electrodo de puesta a tierra complejo, por ejemplo un electrodo lineal se puede considerar como un electrodo complejo si se asume formado por varios

conductores rectos colineales, una malla metálica es un electrodo complejo ya que puede considerarse formada por varios conductores lineales unidos entre sí.

La evaluación del comportamiento de los electrodos caracterizada por resistencia del electrodo de puesta a tierra y determinación de voltajes de interés en la superficie depende de:

- Forma, tamaño y configuración del electrodo.

- Características del suelo alrededor del electrodo como un medio conductor.

- Naturaleza de la excitación externa aplicada al electrodo, esto puede ser:
 - a) Desequilibrios electrónicos.
 - b) Sobretensiones de origen atmosférico.
 - c) Sobrecargas de maniobra.
 - d) Cargas estáticas

La forma tamaño y configuración de los electrodos de puesta a tierra son muy variadas, pero en general se puede considerar que está formado por segmentos lineales de conductor y estos formados por electrodos puntuales a lo largo de una trayectoria recta [1].

Entre las propiedades eléctricas del suelo, la permeabilidad se considera como una constante igual a la unidad. La constante dieléctrica del suelo no es considerada en problemas de puesta a tierra. La rigidez dieléctrica del suelo adquiere importancia en problemas de descargas. La resistividad del suelo es de decisiva importancia en problemas de puestas a tierra, debido a que la resistencia de tierra depende de esta [2].

Por tanto la medición de la resistividad del sitio se vuelve imprescindible, esta medida debe realizarse en las condiciones más desfavorables esto es en época de sequía y a las horas de mayor calor, así la medición de la resistividad del terreno es fundamental para encontrar los puntos óptimos para localizar la red de tierras en donde se requiera.

Como una guía general, en la tabla 1.1 se indican valores aproximados de resistividad. La resistividad del terreno se expresa en [ohmios-metro]. Esta unidad es la resistencia entre dos caras opuestas de un cubo de 1 metro por lado de tierra homogénea cuando menos hasta unos tres metros de profundidad (a la resistividad también se la denomina resistencia específica del suelo).

Tabla 1.1 Valores orientativos de resistividades promedio de suelo

Tipo	Resistividad (ohmios-metros)	
Terreno pantanoso	3	30
Tierra vegetal / arcilla húmeda	5	50
Humus	10	50
Concreto húmedo	30	100
Creta porosa	30	100
Arcillas compactas	100	200
Calizas Blancas	100	300
Calizas agrietadas	500	1000
Cuarzo	800	1000
Rocas de mica	800	1000
Calizas compactas	1000	5000
Suelo pedregoso desnudo	1500	3000
Concreto seco	2000	10000

Fuente: [18], [19]

Existen diversos métodos para determinar la resistividad de un terreno pudiendo citarse el método de Wenner cuyo detalle se puede encontrar en la referencia [24], [21] . Existen otros métodos a usar en situaciones más difíciles. Por ejemplo la técnica de Schlumbergei cuyo detalle se puede encontrar en referencia [18]

Para medir la resistividad del suelo se requiere de un *terrómetro* o *Megger* de tierras de cuatro terminales con sus cuatro puntas enterradas la misma distancia, y espaciadas la misma longitud en línea recta.

De la tabla anterior se puede decir que los terrenos secos y amarillentos presentan mayor resistividad mientras que los terrenos húmedos y negros

presentan menor resistividad, lo que facilitara a la malla o electrodo de puesta a tierra a cumplir su objetivo.

En la práctica es difícil encontrar condiciones de suelo regular u homogéneo. Un suelo donde la resistividad varia marcadamente es más frecuente. Una aproximación teórica más exacta a esta situación es suponer una estratificación de la tierra en dos o más capas de profundidad adecuada. Por ejemplo, puede existir una capa superficial de tierra de moldeo (marga) o turba sobre arena, grava o arcilla. Más abajo aún el material puede cambiar a roca. Esto puede representarse como una estructura de suelo de tres capas, donde la resistividad de las capas aumenta con la profundidad.

La estructura real del suelo y las propiedades eléctricas de cada capa afectarán el valor de resistencia a tierra del electrodo y puede ser importante apreciar esto anticipadamente. Por ejemplo, como aplicación a esto y en la practica se usa una delgada capa de gravilla de diez a quince centímetros de espesor sobre la superficie de terreno incrementa la resistencia entre el suelo y los pies de las personas en una subestación, por que con esto la corriente por el cuerpo será menor debido a una mayor resistencia de contacto entre el suelo y los pies.

La estratificación del suelo no solo tiene influencia en la resistencia del electrodo sino también afecta a factores como: la distribución de corriente a lo largo de la frontera electrodo-suelo*, la distribución del potencial, y el campo eléctrico en las vecindades del electrodo.

Los métodos de evaluación del comportamiento de los electrodos de puesta a tierra que existe en la actualidad son limitados porque realizan una serie de simplificaciones para su aplicabilidad, por tanto estos resultados no siempre se acercan a la realidad

* Frontera electrodo-suelo corresponde al límite o la frontera de contacto entre la superficie del conductor que forma el electrodo y el suelo donde se encuentra inmerso este electrodo

Estas simplificaciones consisten en considerar una resistividad aparente en un suelo con una sola capa, electrodos enterrados en la primera capa del suelo, emplear máximo dos capas homogéneas de suelo.

Para obtener un resultado más cercano a la realidad se ve la necesidad de desarrollar una herramienta que incluya estos factores en la evaluación del comportamiento de las puestas a tierra.

La metodología para obtener los valores de resistividad del suelo no se toma en cuenta en el presente trabajo y más bien se consideran como datos para nuestro estudio.

La longitud del conductor es generalmente pequeña en comparación con la penetración de la onda de excitación* por esta razón el tiempo de propagación en el electrodo a frecuencia industrial es despreciable por tanto la evaluación del comportamiento del electrodo se lo puede hacer en base de las ecuaciones de campo para el caso estacionario.

Si la longitud de conductor es comparable con la penetración de la onda de excitación en tierra, o si se desea analizar el comportamiento del electrodo para excitaciones transitorias tales como sobrevoltajes por descargas atmosféricas ya no es posible efectuar un estudio de tipo estático [6].

El presente trabajo considera el estudio del caso estacionario

1.3 OBJETIVO

El presente trabajo tiene como objetivo fundamental evaluar el comportamiento de los electrodos de puesta a tierra complejos en un suelo estratificado de varias capas. Para esto primero se tendrá que desarrollar las expresiones que gobiernan el comportamiento de los electrodos de puesta a tierra considerando las

* La onda de excitación corresponde a la onda de corriente producida durante la falla, y su forma corresponde a una senoide amortiguada [25]

estratificaciones que puede tener un suelo y además considerando que estos electrodos pueden estar inmersos en una o varias capas del suelo estratificado, luego se debe implementar una metodología de análisis que considere capas irregulares de suelo o capas con diferentes resistividades para obtener los valores de potencial de toque y potencial de paso sobre la superficie de la instalación y sectores aledaños, y con esto desarrollar un programa computacional de fácil manejo y comprensión para personas con poco conocimiento del tema, que permita evaluar el comportamiento de los electrodos de puesta a tierra.

1.4 ALCANCE

Mediante los resultados obtenidos con el programa observar que tipos de configuración de puesta a tierra cumplen con criterios de optimización y seguridad.

La evaluación del comportamiento de los electrodos se la hará considerando electrodos individuales es decir se excluye el estudio de puesta a tierra múltiples.

Cabe recalcar que las condiciones bajo las cuales fue diseñado el electrodo se consideran datos para nuestro problema, es decir no se contempla cómo se diseñó el electrodo, únicamente se considera la evaluación del comportamiento del electrodo. No obstante mediante los parámetros encontrados con el programa se podrá observar que tipos de configuración de puesta a tierra cumplen con criterios de optimización y seguridad y cuales configuraciones no cumplen, así se podrá modificar el diseño original buscando su optimización hasta concluir con la ayuda del programa el cumplimiento de los criterios de seguridad.

CAPÍTULO II

DESARROLLO DE ECUACIONES PARA EVALUAR EL COMPORTAMIENTO DE LOS ELECTRODOS DE PUESTA A TIERRA

2.1 CONSIDERACIONES INICIALES

Como se menciona anteriormente, todo electrodo de puesta a tierra por complejo que sea, puede ser considerado formado por segmentos rectos de conductor, y estos a su vez formados por electrodos puntuales.

Por tanto en lo que sigue, se desarrollan las expresiones que gobiernan el comportamiento de un electrodo puntual ubicado en un medio homogéneo, y en un medio no homogéneo. A base de estas expresiones se desarrollan ecuaciones que permiten describir el comportamiento de electrodos lineales, tanto en suelos homogéneos como no homogéneos, en este último caso se contempla, un suelo estratificado de tres capas, y el electrodo puede estar inmerso en la segunda capa o tercera capa, y la primera capa está asociada en la práctica con una delgada capa de gravilla sobre la superficie del terreno en subestaciones.

2.2 PLANTEAMIENTO DE LAS ECUACIONES PARA EVALUAR EL COMPORTAMIENTO DE ELECTRODOS PUNTUALES

2.2.1 ESTUDIO DE UN ELECTRODO PUNTUAL EN LA SUPERFICIE DE UN SUELO UNIFORME

Considere un electrodo puntual en la superficie de la tierra (ver figura 2.1).

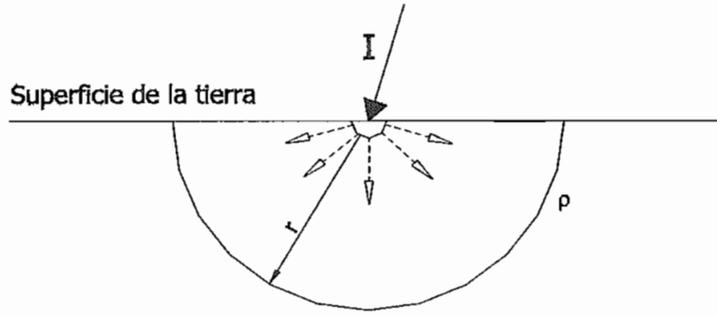


Figura 2.1 Electrodo puntual en la superficie de la tierra

Sea la corriente I que entra a tierra por un electrodo puntual, y lo deja por otro suficientemente remoto de modo que su presencia puede ser despreciada, bajo estas circunstancias la corriente abandona el electrodo en forma radial. Considerando la superficie semiesférica con centro en el electrodo y radio r . El área de la superficie es $2\pi r^2$, a la distancia r se tiene que [2]:

La densidad de corriente radial es:

$$J = \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot r^2} \quad (2.1)$$

Si ρ es la resistividad de la tierra, la intensidad de campo en dirección radial es:

$$E = \frac{\rho \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot r^2} \quad (2.2)$$

El potencial a la distancia r respecto de un punto remoto es:

$$V = - \int_{\infty}^r E(r) dr \quad (2.3)$$

de donde:

$$V = \frac{\rho \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot r} \quad (2.4)$$

2.2.2 ESTUDIO DE UN ELECTRODO PUNTUAL DEBAJO DE LA SUPERFICIE DE LA TIERRA

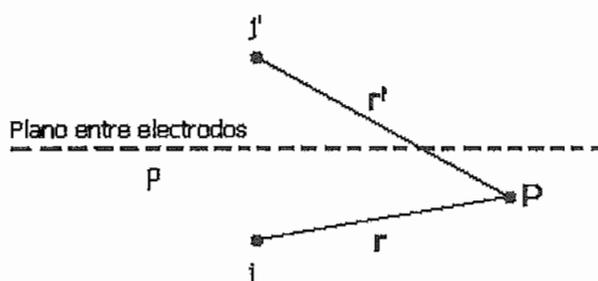


Figura 2.2 Electrodo puntuales en un medio conductivo infinito

Considerando dos electrodos puntuales j y j' , en un medio conductivo que se prolonga al infinito (ver figura 2.2), sea I la corriente que entra a cada electrodo. El potencial debido a la corriente que abandona cada electrodo es la mitad del que se halló en el caso anterior puesto que la corriente ahora es radiada en todas las direcciones. El potencial inducido por los dos electrodos en el punto P es [2]:

$$V(P) = \frac{\rho \cdot I}{4 \cdot \pi} \left[\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \right] \quad (2.5)$$

donde r y r' son las distancias entre j , j' y el punto P , respectivamente.

2.2.3 ESTUDIO DE UN ELECTRODO PUNTUAL DEBAJO DE LA SUPERFICIE DE LA TIERRA EN UN SUELO ESTRATIFICADO HORIZONTALMENTE POR EL MÉTODO DE LAS IMÁGENES

Las ecuaciones que gobiernan el comportamiento de un electrodo puntual en un suelo estratificado pueden ser obtenidas por el método de las imágenes. El resultado es una serie infinita de términos que representan la contribución de cada imagen del electrodo puntual al potencial en el punto donde se lo esté calculando [3].

La discontinuidad entre las capas puede ser caracterizada mediante el coeficiente de reflexión [3].

$$K_{ij} = \frac{\rho_i - \rho_j}{\rho_i + \rho_j} \quad (2.6)$$

donde ρ indica la resistividad del suelo, y los subíndices i, j , indican las capas involucradas

El efecto de la discontinuidad en la superficie de la tierra puede ser tomado en cuenta considerando una imagen del sistema de forma de satisfacer las condiciones de frontera en la discontinuidad, luego el problema original es transformado en dos fuentes de corrientes idénticas I e I' simétricamente colocadas (ver figura 2.3). Este problema puede ser resuelto tomando múltiples imágenes en la interfaz A , ubicadas bajo la superficie de la tierra y en la interfaz B , ubicadas sobre la superficie de la tierra.

La teoría de imágenes al ser aplicada a problemas de electrodos embebidos bajo la superficie de la tierra, **asume que esta superficie es un cuasi espejo y que toda la región bajo ella es reflejada en la región sobre sí misma**, es decir el suelo con sus diferentes estratos [4], [5].

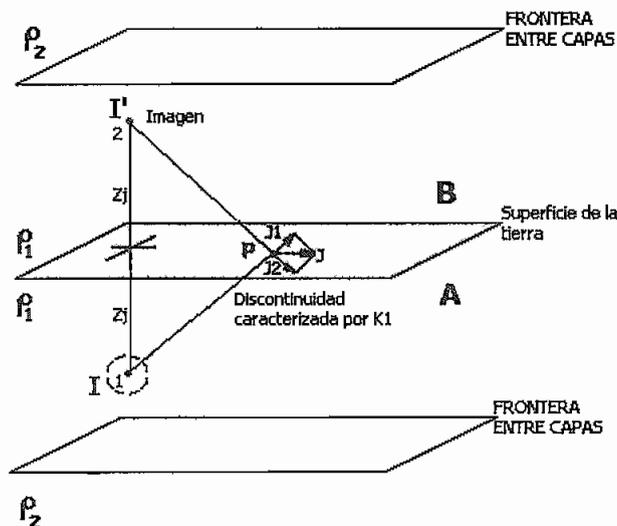


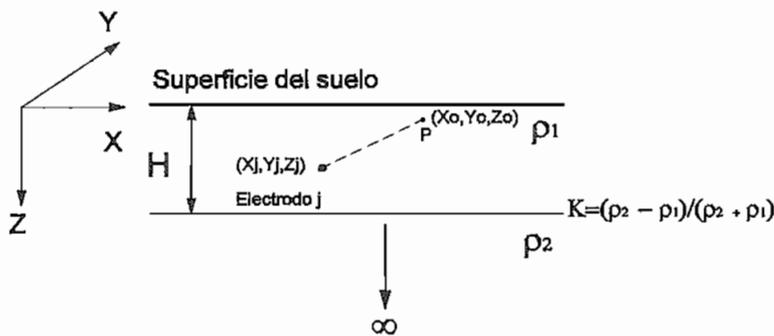
Figura 2.3 Electrodo en un suelo de tres capas con su imagen

Se observa que ahora hay dos electrodos (1 y 2), separados una distancia $2Z_j$, cada uno de los cuales recibe una corriente I , se asume que ambos están embebidos en un medio de resistividad ρ_1 . Es importante que el problema obtenido por el método de las imágenes, satisfaga las condiciones de frontera, y la discontinuidad entre los estratos de suelo, para lo cual los coeficientes de reflexión simplifica en gran parte el problema.

A partir de que la distribución de corriente debido a un electrodo puntual embebido en el suelo es radial, entonces, en cualquier punto P , existe dos componentes de densidad de corriente, una debido a cada electrodo (1, 2). La densidad de corriente resultante es un vector suma de las dos componentes. Ahora, si el punto P se encuentra en cualquier lugar en la superficie de la tierra, se observa que la corriente es paralela a la frontera y por tanto las líneas equipotenciales deben ser perpendiculares.

2.2.3.1 Estudio de un electrodo puntual en suelo de dos capas

A continuación se considera el caso en que el electrodo y el punto donde se desea determinar el potencial se encuentran en la primera capa de un suelo estratificado de dos capas.



H es la profundidad de la primera capa

Figura 2.4 Electrodo puntual en un suelo estratificado de dos capas

La discontinuidad entre la primera y segunda capa puede ser caracterizada mediante el coeficiente de reflexión.

$$K = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} \quad (2.7)$$

donde:

ρ_1 = es la resistividad de la primera capa del suelo y

ρ_2 = es la resistividad de la segunda capa del suelo (ver figura 2.4)

El voltaje en el punto P debido a la corriente que abandona el electrodo es:

(Ver desarrollo en APÉNDICE A)

$$V(P) = \frac{\rho_1 I}{4 \cdot \pi} \left\{ \left(\frac{1}{r_{O}} + \frac{1}{r_{O'}} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} K^n \left(\frac{1}{r_{An}} + \frac{1}{r_{An}'} + \frac{1}{r_{Bn}} + \frac{1}{r_{Bn}'} \right) \right\} \quad (2.8)$$

o:

$$V(P) = \frac{\rho_1 I}{4 \cdot \pi} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} K^{|n|} \left(\frac{1}{r_{n+}} + \frac{1}{r_{n-}} \right) \right\} \quad (2.9)$$

donde:

$$r_{n+} = \sqrt{(X_j - X_o)^2 + (Y_j - Y_o)^2 + (2nH + Z_j - Z_o)^2} \quad (2.10)$$

$$r_{n-} = \sqrt{(X_j - X_o)^2 + (Y_j - Y_o)^2 + (2nH + Z_j + Z_o)^2} \quad (2.11)$$

El caso de suelo homogéneo no es más que un caso particular de las expresiones anteriores para $n=0$.

De manera análoga se puede determinar las expresiones cuando el electrodo y el punto donde se requiere el potencial, se encuentran en las diferentes capas de un suelo estratificado.

2.2.3.2 Estudio de un electrodo puntual en suelo de tres capas

A continuación se va a considerar un suelo estratificado de tres capas, como se menciona anteriormente en la practica el electrodo puede estar inmerso en la segunda o tercera capa del suelo estratificado*, y si se considera que el punto donde se desea determinar el potencial se encuentra en cualquiera de los estratos, se presentan varias alternativas que asocian al estrato en que se encuentra el electrodo, y al estrato donde se requiere el potencial, es decir al estrato donde se encuentra el punto de interés.

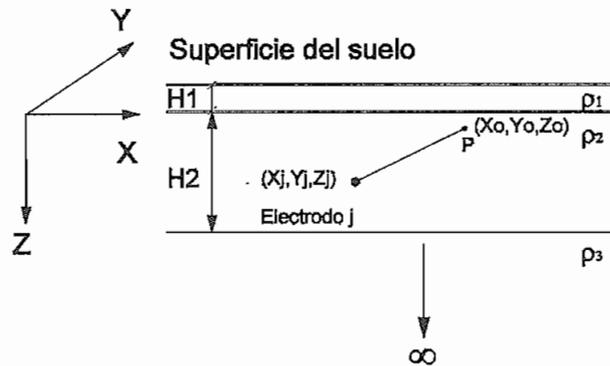


Figura 2.5 Modelo electrodo puntual en un suelo no homogéneo de tres capas considerando que el electrodo y el punto se encuentra en la segunda capa

La discontinuidad entre la y segunda primera capa puede ser caracterizada mediante el coeficiente de reflexión.

$$K_1 = K_{12} = -K_{21} = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \quad (2.12)$$

La discontinuidad entre la segunda y tercera capa puede ser caracterizada mediante el coeficiente de reflexión.

$$K_2 = K_{32} = -K_{23} = \frac{\rho_3 - \rho_2}{\rho_3 + \rho_2} \quad (2.13)$$

* La primera capa es la de protección y es añadida al suelo original. En esta capa no se instala la malla (o electrodo)

Se considera los siguientes casos:

2.2.3.2.1 Punto en la capa de resistividad ρ_2 y electrodo en la capa de resistividad ρ_2

El voltaje en el punto P debido a la corriente que abandona el electrodo es:

(Ver desarrollo en APÉNDICE A)

$$\begin{aligned}
 V(P) = \frac{\rho_2 I}{4 \cdot \pi} & \left\{ \left(\frac{1}{r_o} + \frac{K_1^2}{r_o'} \right) + \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} K_2^n \left(\frac{K_1^{n-1}}{r_{An}} + \frac{K_1^{n-1}}{r_{An}'} + \frac{K_1^{n+1}}{r_{Bn}} + \frac{K_1^{n+1}}{r_{Bn}'} \right) + \right. \\
 & + \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} K_2^n \left(\frac{K_1^{n-2}}{r_{An}} + \frac{K_1^n}{r_{An}'} + \frac{K_1^n}{r_{Bn}} + \frac{K_1^{n+2}}{r_{Bn}'} \right) + \\
 & \left. + \sum_{n=1,2,3,\dots}^{\infty} \left(\frac{K_1^{|n-2|} K_2^{n-1}}{r_{an}} + \frac{K_1^{n-1} K_2^n}{r_{an}'} + \frac{K_1^n K_2^{n-1}}{r_{bn}} + \frac{K_1^{n+1} K_2^n}{r_{bn}'} \right) \right\}
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

donde:

$$r_o = \sqrt{(X_j - X_o)^2 + (Y_j - Y_o)^2 + (Z_j - Z_o)^2} \tag{a}$$

$$r_o' = \sqrt{(X_j - X_o)^2 + (Y_j - Y_o)^2 + (Z_j + Z_o)^2} \tag{b}$$

$$r_{an} = \sqrt{(X_j - X_o)^2 + (Y_j - Y_o)^2 + ((Z_j + Z_o) - 2(H1 + (n-1)H))^2} \tag{c}$$

$$r_{an}' = \sqrt{(X_j - X_o)^2 + (Y_j - Y_o)^2 + ((Z_j - Z_o) + 2(H2 + (n-1)H))^2} \tag{d}$$

$$r_{bn} = \sqrt{(X_j - X_o)^2 + (Y_j - Y_o)^2 + ((Z_j - Z_o) - 2(H1 + (n-1)H))^2} \tag{e}$$

$$r_{bn}' = \sqrt{(X_j - X_o)^2 + (Y_j - Y_o)^2 + ((Z_j + Z_o) + 2(H2 + (n-1)H))^2} \tag{f}$$

$$r_{An} = \sqrt{(X_j - X_o)^2 + (Y_j - Y_o)^2 + ((Z_j + Z_o) - 2nH)^2} \tag{g}$$

$$r_{An}' = \sqrt{(Xj - Xo)^2 + (Yj - Yo)^2 + ((Zj - Zo) + 2nH)^2} \quad (h)$$

$$r_{Bn} = \sqrt{(Xj - Xo)^2 + (Yj - Yo)^2 + ((Zj - Zo) - 2nH)^2} \quad (i)$$

$$r_{Bn}' = \sqrt{(Xj - Xo)^2 + (Yj - Yo)^2 + ((Zj + Zo) + 2nH)^2} \quad (j)$$

(2.15)

y

$$H = H1 + H2 \quad (2.16)$$

donde H es la suma de los espesores de las capas H1 (espesor de la primera capa) y H2 (espesor de la segunda capa), como se indica en la figura 2.5.

La expresión 2.14 permite determinar el potencial inducido debido a la corriente que abandona el electrodo puntual cuando el electrodo y el punto donde se determina el potencial están en cualquier coordenada inmersa en la capa de resistividad ρ_2 .

2.2.3.2.2 Punto en la capa de resistividad ρ_3 y electrodo en la capa de resistividad ρ_3

El voltaje en el punto P debido a la corriente que abandona el electrodo es:

$$V(P) = \frac{\rho_3 I}{4\pi} \left\{ \left(\frac{1}{ro} + \frac{(K_1 K_2)^2}{ro'} \right) + \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \left[K_1^{n-1} \left[\frac{K_2^{|n-2|}}{r_{An}} + \frac{K_2^n}{r_{An}'} \right] + K_1^{n+1} \left[\frac{K_2^n}{r_{Bn}} + \frac{K_2^{n+2}}{r_{Bn}'} \right] \right] + \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \left(\frac{(K_1 K_2)^{n-2}}{r_{An}} + \frac{(K_1 K_2)^n}{r_{An}'} \frac{(K_1 K_2)^n}{r_{Bn}} + \frac{(K_1 K_2)^{n+2}}{r_{Bn}'} \right) + \sum_{n=1,2,3,\dots}^{\infty} \left(\frac{(K_1 K_2)^{|n-2|}}{r_{an}} + \frac{(K_1 K_2)^{n-1}}{r_{an}'} + \frac{(K_1 K_2)^n}{r_{bn}} + \frac{(K_1 K_2)^{n+1}}{r_{bn}'} \right) \right\} \quad (2.17)$$

2.2.3.2.3 Punto en la capa de resistividad ρ_1 y electrodo en la capa de resistividad ρ_2

El voltaje en el punto P debido a la corriente que abandona el electrodo es:

$$\begin{aligned}
 V(P) = \frac{\rho_2 I}{4 \cdot \pi} \left\{ \left(\frac{K_1}{ro} + \frac{K_1}{ro'} \right) + \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} K_1^n K_2^n \left(\frac{1}{r_{An}} + \frac{1}{r_{An'}} + \frac{1}{r_{Bn}} + \frac{1}{r_{Bn'}} \right) + \right. \\
 \left. + \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} K_2^n \left(\frac{K_1^{n-1}}{r_{An}} + \frac{K_1^{n+1}}{r_{An'}} + \frac{K_1^{n-1}}{r_{Bn}} + \frac{K_1^{n+1}}{r_{Bn'}} \right) + \right. \\
 \left. + \sum_{n=1,2,3,\dots}^{\infty} \left(\frac{(K_1 K_2)^{n-1}}{r_{an}} + \frac{(K_1 K_2)^n}{r_{an'}} + \frac{(K_1 K_2)^{n-1}}{r_{bn}} + \frac{(K_1 K_2)^n}{r_{bn'}} \right) \right\}
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

2.2.3.2.4 Punto en la capa de resistividad ρ_1 y electrodo en la capa de resistividad ρ_3

El voltaje en el punto P debido a la corriente que abandona el electrodo es:

$$\begin{aligned}
 V(P) = \frac{\rho_3 I}{4\pi} \left\{ \left(\frac{K_1 K_2}{ro} + \frac{K_1 K_2}{ro'} \right) + \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} K_1^n \left[K_2^{n-1} \left(\frac{1}{r_{An}} + \frac{1}{r_{Bn}} \right) + K_2^{n+1} \left(\frac{1}{r_{An'}} + \frac{1}{r_{Bn'}} \right) \right] - \right. \\
 \left. - \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \left((K_1)^{n-1} (K_2)^{n-1} \left[\frac{1}{r_{An}} + \frac{1}{r_{Bn}} \right] + (K_1)^{n+1} (K_2)^{n+1} \left[\frac{1}{r_{An'}} + \frac{1}{r_{Bn'}} \right] \right) + \right. \\
 \left. + \sum_{n=1,2,3,\dots}^{\infty} \left(\frac{(K_1 \cdot (-K_2))^{n-1}}{r_{an}} + \frac{(K_1 \cdot (-K_2))^n}{r_{an'}} + \frac{(K_1 \cdot (-K_2))^{n-1}}{r_{bn}} + \frac{(K_1 \cdot (-K_2))^n}{r_{bn'}} \right) \right\}
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

2.2.3.2.5 Punto en la capa de resistividad ρ_2 y electrodo en la capa de resistividad ρ_3

El voltaje en el punto P debido a la corriente que abandona el electrodo es:

$$\begin{aligned}
 V(P) = \frac{\rho_3 I}{4\pi} \left\{ \left(\frac{K_2}{ro} + \frac{K_1^2 K_2}{ro'} \right) + \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \left(\frac{(K_1 \cdot K_2)^{n-1}}{r_{An}} + \frac{K_1^{n-1} K_2^{n+1}}{r_{An'}} + \frac{K_1^{n+1} K_2^{n-1}}{r_{Bn}} + \frac{(K_1 \cdot K_2)^{n+1}}{r_{Bn'}} \right) - \right. \\
 \left. - \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \left(\frac{K_1^{n-2} (K_2)^{n-1}}{r_{An}} + \frac{K_1^n (K_2)^{n+1}}{r_{An'}} + \frac{K_1^n (K_2)^{n-1}}{r_{Bn}} + \frac{K_1^{n+2} (K_2)^{n+1}}{r_{Bn'}} \right) + \right. \\
 \left. + \sum_{n=1,2,3,\dots}^{\infty} \left(\frac{K_1^{|n-2|} (-K_2)^{n-1}}{r_{an}} + \frac{K_1^{n-1} (-K_2)^n}{r_{an'}} + \frac{K_1^n (-K_2)^{n-1}}{r_{bn}} + \frac{K_1^{n+1} (-K_2)^n}{r_{bn'}} \right) \right\}
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

2.2.3.2.6 Punto en la capa de resistividad ρ_3 y electrodo en la capa de resistividad ρ_2

El voltaje en el punto P debido a la corriente que abandona el electrodo es:

$$\begin{aligned}
 V(P) = \frac{\rho_2 I}{4 \cdot \pi} \left\{ \left(\frac{K_2}{ro} + \frac{K_1^2 K_2}{ro'} \right) + \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \left((K_1 K_2)^{n-1} \left[\frac{1}{r_{An}} + \frac{1}{r_{An}'} \right] + (K_1 K_2)^{n+1} \left[\frac{1}{r_{Bn}} + \frac{1}{r_{Bn}'} \right] \right) + \right. \\
 \left. + \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \left(K_2^{n-1} \left[\frac{K_1^{n-2}}{r_{An}} + \frac{K_1^n}{r_{An}'} \right] + K_2^{n+1} \left[\frac{K_1^n}{r_{Bn}} + \frac{K_1^{n+2}}{r_{Bn}'} \right] \right) + \right. \\
 \left. + \sum_{n=1,2,3,\dots}^{\infty} \left(\frac{(K_1 K_2)^{n-2}}{r_{an}} + \frac{(K_1 K_2)^{n-1}}{r_{an}'} + \frac{(K_1 K_2)^n}{r_{bn}} + \frac{(K_1 K_2)^{n+1}}{r_{bn}'} \right) \right\} \quad (2.21)
 \end{aligned}$$

Los subíndices A, a y B, b denotan las distancias desde las imágenes reflejadas por la interfaz A, a y B, b al punto P respectivamente.

2.3 PLANTEAMIENTO DE LAS ECUACIONES PARA EVALUAR EL COMPORTAMIENTO DE ELECTRODOS LINEALES

2.3.1 ELECTRODO FORMADO POR UN CONDUCTOR LINEAL, EN UN MEDIO HOMOGÉNEO CONSIDERACIONES BÁSICAS

Considere un conductor lineal de longitud L a lo largo del eje X entre $X=-L/2$ y $X=L/2$, enterrado, en un medio de resistividad ρ que se extiende indefinidamente (ver figura 2.6).

Superficie de suelo

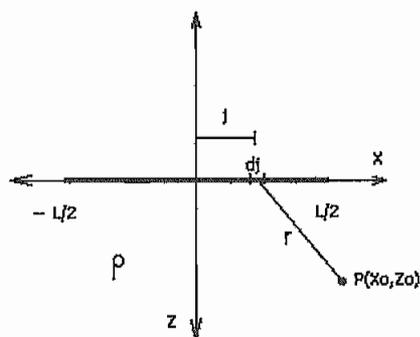


Figura 2.6 Electrodo lineal en un medio que se extiende indefinidamente

Sea $I(j)$ la corriente que abandona el conductor a la distancia $x=j$, el potencial en un punto $P(X_0, Z_0)$ debido a la corriente que abandona el elemento dj del conductor es:

$$dV(X_0, Y_0) = \frac{dI(j)}{dj} \cdot \frac{\rho}{4\pi} \left[\frac{1}{r} \right] \cdot du \quad (2.22)$$

donde:

$$r = \sqrt{(X_0 - j)^2 + Z_0^2} \quad (2.23)$$

es la distancia de P a dj , y $dI(j)/dj$ es el valor de la densidad de corriente en el punto j

Luego el potencial en el punto $P(X_0, Z_0)$ debido a la corriente que abandona el electrodo es:

$$dV(X_0, Y_0) = \frac{\rho}{4\pi} \frac{dI(j)}{dj} \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{(X_0 - j)^2 + Z_0^2}} \right] \cdot du \quad (2.24)$$

Si la resistencia del conductor se asume despreciable de manera que no haya caída de voltaje a lo largo del conductor la condición de frontera a ser satisfecha en la superficie del conductor es:

$$\frac{dV(X_0, re)}{dx_j} = 0 \quad (2.25)$$

donde (X_0, re) es un punto sobre la superficie del conductor (re es el radio del conductor, es decir $Z_0=re$). La distribución de corriente a lo largo del conductor debe satisfacer la siguiente ecuación:

$$0 = \frac{d}{dj} \cdot \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dI(j)}{dj} \cdot \frac{1}{\sqrt{(X_0 - j)^2 + re^2}} \cdot dj \quad (2.26)$$

Cuando se calcula el potencial medio sobre el conductor con la distribución de corriente obtenida de la ecuación anterior se encuentra que esta difiere poco si en el cálculo se supone que la distribución de densidad de corriente es constante a lo largo de todo el conductor, luego para el caso de un conductor lineal no se comete mayor error al suponer que **la distribución de corriente lineal es constante a lo largo del conductor** [2].

2.3.2 ELECTRODO FORMADO POR UN CONDUCTOR LINEAL, EN UN SUELO ESTRATIFICADO

A continuación se considera el caso de un electrodo compuesto por un conductor lineal de longitud L , enterrado en la segunda capa de un suelo estratificado de tres capas. El electrodo se extiende del punto $M_i(X_i, Y_i, Z_i)$ al $M_f(X_f, Y_f, Z_f)$ donde los subíndices i indican el extremo inicial y los subíndices f el extremo final (ver figura 2.7).

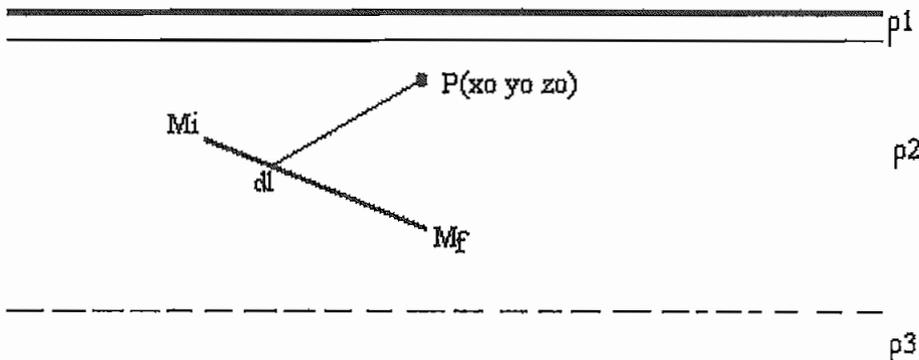


Figura 2.7 Electrodo lineal en un medio estratificado

Si i es la densidad de corriente lineal a lo largo del conductor, el potencial producido en el punto $P(X_o, Y_o, Z_o)$ por un elemento infinitesimal del conductor dl depende del estrato en que se encuentre el conductor y el punto P .

De manera general se puede decir que las expresiones de potencial tienen la forma:

$$\begin{aligned}
dV(P) = i \cdot cte_{rsis} & \left\{ \left(\frac{cte_{KO}}{rO} + \frac{cte_{KO'}}{rO'} \right) + \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \left(\frac{cte_{K11}}{r_{An}} + \frac{cte_{K12}}{r_{An}'} + \frac{cte_{K13}}{r_{Bn}} + \frac{cte_{K14}}{r_{Bn}'} \right) \right\} \cdot dl + \\
& + i \cdot cte_{rsis} \left\{ \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \left(\frac{cte_{K21}}{r_{An}} + \frac{cte_{K22}}{r_{An}'} + \frac{cte_{K23}}{r_{Bn}} + \frac{cte_{K24}}{r_{Bn}'} \right) \right\} \cdot dl + \\
& + i \cdot cte_{rsis} \left\{ \sum_{n=1,2,3,\dots}^{\infty} \left(\frac{cte_{K31}}{r_{an}} + \frac{cte_{K32}}{r_{an}'} + \frac{cte_{K33}}{r_{bn}} + \frac{cte_{K34}}{r_{bn}'} \right) \right\} \cdot dl
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Los valores de las constantes (cte_{rsis} , cte_{KO} , $cte_{KO'}$, cte_{K11} , cte_{K12} , cte_{K13} , cte_{K14} , cte_{K21} , cte_{K22} , cte_{K23} , cte_{K24} , cte_{K31} , cte_{K32} , cte_{K33} y cte_{K34}) de la expresión anterior dependen del estrato en el que está el punto donde se requiera el potencial, así como el electrodo por donde abandona la corriente (ver detalles en el APÉNDICE B).

Como la distribución de corriente es constante según se indico, i se puede considerar constante. Luego el potencial total inducido por el conductor en $P(X_o, Y_o, Z_o)$ es:

$$\begin{aligned}
V(P) = i \cdot cte_{rsis} \int_{\psi} & \left\{ \left(\frac{cte_{KO}}{rO} + \frac{cte_{KO'}}{rO'} \right) + \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \left(\frac{cte_{K11}}{r_{An}} + \frac{cte_{K12}}{r_{An}'} + \frac{cte_{K13}}{r_{Bn}} + \frac{cte_{K14}}{r_{Bn}'} \right) \right\} \cdot dl + \\
& + i \cdot cte_{rsis} \int_{\psi} \left\{ \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \left(\frac{cte_{K21}}{r_{An}} + \frac{cte_{K22}}{r_{An}'} + \frac{cte_{K23}}{r_{Bn}} + \frac{cte_{K24}}{r_{Bn}'} \right) \right\} \cdot dl + \\
& + i \cdot cte_{rsis} \int_{\psi} \left\{ \sum_{n=1,2,3,\dots}^{\infty} \left(\frac{cte_{K31}}{r_{an}} + \frac{cte_{K32}}{r_{an}'} + \frac{cte_{K33}}{r_{bn}} + \frac{cte_{K34}}{r_{bn}'} \right) \right\} \cdot dl
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Con el fin de poder llevar a cabo esta integración a lo largo de la trayectoria ψ del electrodo, conviene escoger un nuevo sistema de referencia para simplificar los cálculos.

Se escoge el nuevo sistema de referencia denominado **UVW** de manera que el eje **U** coincida con el eje del conductor, de forma que las coordenadas del

conductor en este nuevo sistema de referencia sean: $M_i(0,0,0)$ y $M_f(U_f,0,0)$ donde $U_f=L$ es la longitud del conductor. Las coordenadas del punto P en este nuevo sistema de referencia son U_o, V_o, W_o [7].

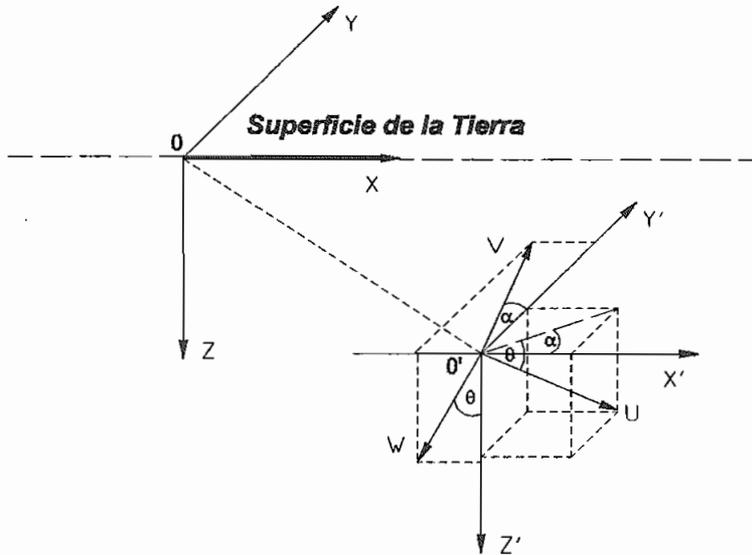


Figura 2.8 Sistema de referencia UVW ligado al eje del conductor

El sistema $X'Y'Z'$ es paralelo al sistema XYZ pero coincide en su origen con el sistema UVW .

La relación entre el sistema de referencia XYZ y el sistema UVW se establece en el APÉNDICE C.

Para pasar del sistema XYZ al sistema UVW

$$\begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \alpha & \cos \theta \cdot \sin \alpha & \sin \theta \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ -\sin \theta \cos \alpha & -\sin \theta \cdot \sin \alpha & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X - X_i \\ Y - Y_i \\ Z - Z_i \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Para pasar del sistema UVW al sistema XYZ

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cdot \cos \alpha & -\sin \alpha & -\sin \theta \cdot \cos \alpha \\ \cos \theta \cdot \sin \alpha & \cos \alpha & -\sin \theta \cdot \sin \alpha \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

donde:

$$\sin \theta = \frac{Z_f + Z_i}{\sqrt{(X_f - X_i)^2 + (Y_f - Y_i)^2 + (Z_f + Z_i)^2}} \quad (2.31)$$

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{(X_f - X_i)^2 + (Y_f - Y_i)^2}}{\sqrt{(X_f - X_i)^2 + (Y_f - Y_i)^2 + (Z_f + Z_i)^2}} \quad (2.32)$$

$$\sin \alpha = \frac{Y_f + Y_i}{\sqrt{(X_f - X_i)^2 + (Y_f - Y_i)^2}} \quad (2.33)$$

$$\cos \alpha = \frac{X_f + X_i}{\sqrt{(X_f - X_i)^2 + (Y_f - Y_i)^2}} \quad (2.34)$$

En base a las ecuaciones anteriores y tomando en cuenta que el conductor no tiene coordenadas en \mathbf{V} ni en \mathbf{W} se obtiene:

$$r_o = \sqrt{(U - U_o)^2 + V_o^2 + W_o^2} \quad (2.35)$$

$$r_o' = \sqrt{\frac{[U - \{U_o \cdot \cos 2\theta - W_o \cdot \sin 2\theta - 2Z_i \cdot \sin \theta\}]^2 + V_o^2}{+ [U_o \cdot \sin 2\theta + W_o \cdot \cos 2\theta + 2Z_i \cos \theta]^2}} \quad (2.36)$$

$$r_{an} = \sqrt{\frac{[U - \{U_o \cdot \cos 2\theta - W_o \cdot \sin 2\theta - (2Z_i - 2(H1 + (n-1)H)) \cdot \sin \theta\}]^2 + V_o^2}{+ [U_o \cdot \sin 2\theta + W_o \cdot \cos 2\theta + (2Z_i - 2(H1 + (n-1)H)) \cos \theta]^2}} \quad (2.37)$$

$$r_{an}' = \sqrt{[U - (U_o - 2(H2 + (n-1)H) \cdot \sin \theta)]^2 + V_o^2 + [W_o - 2(H2 + (n-1)H) \cdot \cos \theta]^2} \quad (2.38)$$

$$r_{bn} = \sqrt{[U - (U_0 + 2(H1 + (n-1)H) \cdot \sin \theta)]^2 + V_0^2 + [W_0 + 2(H1 + (n-1)H) \cdot \cos \theta]^2} \quad (2.39)$$

$$r_{bn}' = \sqrt{\frac{[U - \{U_0 \cdot \cos 2\theta - W_0 \cdot \sin 2\theta - (2Zi + 2(H2 + (n-1)H)) \cdot \sin \theta\}]^2 + V_0^2}{+ [U_0 \cdot \sin 2\theta + W_0 \cdot \cos 2\theta + (2Zi + 2(H2 + (n-1)H)) \cos \theta]^2}} \quad (2.40)$$

$$r_{An} = \sqrt{\frac{[U - \{U_0 \cdot \cos 2\theta - W_0 \cdot \sin 2\theta - (2Zi - 2nH) \cdot \sin \theta\}]^2 + V_0^2}{+ [U_0 \cdot \sin 2\theta + W_0 \cdot \cos 2\theta + (2Zi - 2nH) \cos \theta]^2}} \quad (2.41)$$

$$r_{An}' = \sqrt{[U - (U_0 - 2nH \cdot \sin \theta)]^2 + V_0^2 + [W_0 - 2nH \cdot \cos \theta]^2} \quad (2.42)$$

$$r_{Bn} = \sqrt{[U - (U_0 + 2nH \cdot \sin \theta)]^2 + V_0^2 + [W_0 + 2nH \cdot \cos \theta]^2} \quad (2.43)$$

$$r_{Bn}' = \sqrt{\frac{[U - \{U_0 \cdot \cos 2\theta - W_0 \cdot \sin 2\theta - (2Zi + 2nH) \cdot \sin \theta\}]^2 + V_0^2}{+ [U_0 \cdot \sin 2\theta + W_0 \cdot \cos 2\theta + (2Zi + 2nH) \cos \theta]^2}} \quad (2.44)$$

Como el eje U coincide con el conductor $Uf=L$, la integral para calcular el potencial que el conductor induce en un punto P , solo depende de la variable U , con lo que la ecuación 2.28 puede ser expresada como:

$$\begin{aligned} V(P) = i \cdot cte_{rsis} \int_0^{Uf} & \left\{ \left(\frac{cte_{KO}}{r_0} + \frac{cte_{KO'}}{r_0'} \right) + \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \left(\frac{cte_{K11}}{r_{An}} + \frac{cte_{K12}}{r_{An}'} + \frac{cte_{K13}}{r_{Bn}} + \frac{cte_{K14}}{r_{Bn}'} \right) \right\} \cdot dU + \\ & + i \cdot cte_{rsis} \int_0^{Uf} \left\{ \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \left(\frac{cte_{K21}}{r_{An}} + \frac{cte_{K22}}{r_{An}'} + \frac{cte_{K23}}{r_{Bn}} + \frac{cte_{K24}}{r_{Bn}'} \right) \right\} \cdot dU + \\ & + i \cdot cte_{rsis} \int_0^{Uf} \left\{ \sum_{n=1,2,3,\dots}^{\infty} \left(\frac{cte_{K31}}{r_{an}} + \frac{cte_{K32}}{r_{an}'} + \frac{cte_{K33}}{r_{bn}} + \frac{cte_{K34}}{r_{bn}'} \right) \right\} \cdot dU \end{aligned} \quad (2.45)$$

Integrando la expresión anterior (ver APÉNDICE D) se obtiene que el potencial inducido en el punto $P(U_0, V_0, W_0)$ por la corriente que abandona el conductor que está dada por:

$$\begin{aligned}
 V(P) = i \cdot cte_{rsis} \left\{ cte_{KO} \cdot fo + cte_{KO'} \cdot fo' + \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} cte_{K11} \cdot f_{An} + cte_{K12} \cdot f_{An'} + cte_{K13} \cdot f_{Bn'} + \right. \\
 + cte_{K14} \cdot f_{Bn'} + \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} cte_{K21} \cdot f_{An} + cte_{K22} \cdot f_{An'} + cte_{K23} \cdot f_{Bn'} + cte_{K24} \cdot f_{Bn'} + \\
 \left. + \sum_{n=1,2,3,\dots}^{\infty} cte_{K31} \cdot f_{an} + cte_{K32} \cdot f_{an'} + cte_{K33} \cdot f_{bn'} + cte_{K34} \cdot f_{bn'} \right\}
 \end{aligned}
 \tag{2.46}$$

donde: los detalles de esta expresión se encuentran en el APÉNDICE E.

2.3.2.1 Electrodo formado por un conductor lineal, enterrado en una capa de un suelo estratificado

La ecuación 2.46 es una expresión general que indica el potencial en un punto debido a la corriente que abandona un electrodo lineal, y como ya se indicó depende del estrato en el que se encuentra el electrodo y el punto respectivamente, siempre y cuando este electrodo no salga de los límites donde es válida esta expresión.

2.3.2.2 Electrodo formado por un conductor lineal, enterrado en dos capas de un suelo estratificado

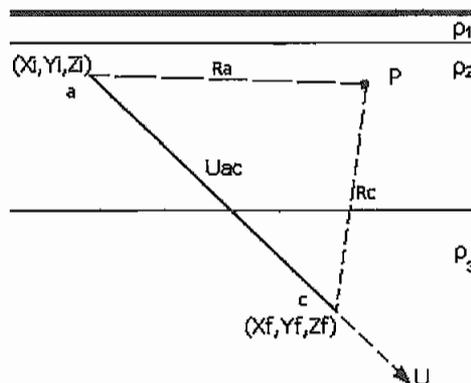


Figura 2.9 Electrodo inmerso en dos capas de un suelo estratificado

Para obtener el potencial en un punto debido a un electrodo enterrado en dos capas de un suelo uniforme se debe considerar que este potencial es igual al potencial obtenido por dos electrodos independientes colineales cada uno de los cuales estará sumergido en una sola capa de suelo.

Considere un electrodo lineal ac que se extiende desde el punto a hasta el punto c embebido en dos capas del suelo estratificado (ver figura 2.9). Si a este electrodo se lo divide en dos electrodos completamente independientes U_{ab} , U_{bc} considerando el punto b que es el punto en la frontera en donde el electrodo pasa de la una capa a la otra (ver figura 2.10).

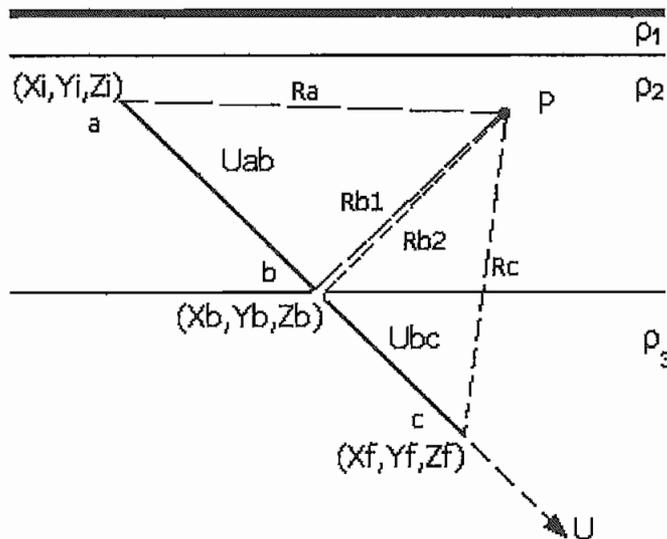


Figura 2.10 Electrodo dividido en dos electrodos independientes cada uno perteneciente a una capa del suelo estratificado

Se habrá resuelto el problema, aplicando para cada electrodo independiente la expresión 2.46, correspondiente para su caso, para U_{ab} se utilizará la expresión que describa el comportamiento del punto y electrodo en la segunda capa del suelo, y para U_{bc} se utilizará la expresión que describa el comportamiento del punto en la segunda capa y electrodo en la tercera capa.

Para realizar lo anterior es necesario determinar las coordenadas del punto b , puesto que el electrodo U_{ab} está caracterizado por (X_i, Y_i, Z_i) como coordenadas iniciales y el punto (X_b, Y_b, Z_b) como coordenadas finales, y el electrodo U_{bc} está

caracterizado por (X_b, Y_b, Z_b) como coordenadas iniciales y el punto (X_f, Y_f, Z_f) como coordenadas finales.

Las coordenadas del punto **b** en el sistema XYZ son (ver detalles APÉNDICE F):

$$X_b = X_f - (Z_f - H) \left(\frac{X_f - X_i}{Z_f - Z_i} \right) \quad (2.47)$$

$$Y_b = Y_f - (Z_f - H) \left(\frac{Y_f - Y_i}{Z_f - Z_i} \right) \quad (2.48)$$

$$Z_b = H \quad (2.49)$$

2.3.3 PLANTEAMIENTO DE LAS ECUACIONES PARA EL CÁLCULO DEL POTENCIAL MEDIO ENTRE CONDUCTORES LINEALES

A continuación se plantea las expresiones para la determinación del potencial medio entre los conductores lineales, o voltaje medio propio de electrodo lineal si se considera el efecto del conductor sobre sí mismo.

2.3.3.1 Cada electrodo en una capa de un suelo estratificado

Se va a analizar el caso general, en el cual cada electrodo pertenece a una capa de un suelo estratificado, es decir, por ejemplo el un electrodo estará enteramente en la segunda capa mientras que el otro electrodo estará en la tercera capa de un suelo no homogéneo, o ambos están en una sola capa ya sea la segunda o tercera de un suelo no homogéneo.

Superficie de la tierra

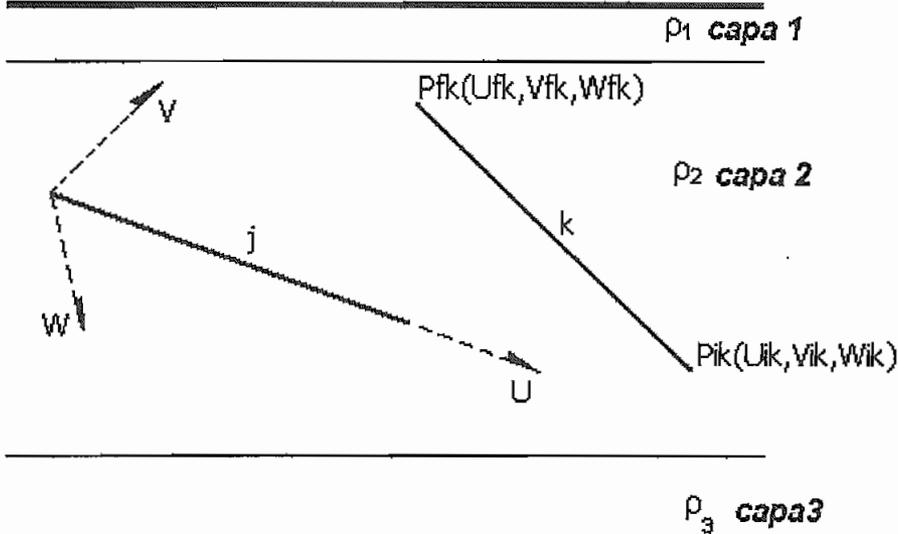


Figura 2.11 Determinación del potencial medio entre el electrodo j y el electrodo k

Considere dos electrodos lineales j y k en el sistema de referencia UVW donde cada electrodo está inmerso enteramente en la segunda capa de un suelo no homogéneo (ver figura 2.11). Si V_{jk} es el potencial que el electrodo j induce en un punto cualquiera que pertenece al electrodo k ; dado por la ecuación 2.46, el potencial medio que j produce en el electrodo k está definido por la integral de V_{jk} a lo largo del electrodo k , dividida para la longitud del electrodo k , ecuación 2.50.

$$\bar{V}_{jk} = \frac{\int_{\psi} V_{jk} dl}{l(\psi)} \quad (2.50)$$

V_{jk} es el potencial que produce el conductor j en un punto del electrodo k y está dado por la ecuación 2.46.

El símbolo \int_{ψ} indica que se debe integrar V_{jk} a lo largo de la trayectoria ψ . En este caso la trayectoria es el segmento de recta que representa al electrodo k , $l(\psi)$ es la longitud de dicha trayectoria [1], [8].

Puesto que V_{jk} como el segmento de recta que representa a k están en función de UVW , es conveniente escribir V_{jk} y la recta que representa al electrodo k en

función de una sola variable, esto es posible hacerlo si se considera que las coordenadas de los puntos que forman al electrodo k , no son independientes entre sí y dos cualesquiera de ellas se pueden poner en función de la restante así [7]:

$$U_K = a' \lambda_k + b' \quad (a)$$

$$V_K = a'' \lambda_k + b'' \quad (b)$$

$$W_K = a''' \lambda_k + b''' \quad (c)$$

(2.51)

donde λ_k puede ser U_k , V_k , W_k y

$$a' = \frac{U_{jk} - U_{ik}}{\lambda_{jk} - \lambda_{ik}} \quad (a)$$

$$a'' = \frac{V_{jk} - V_{ik}}{\lambda_{jk} - \lambda_{ik}} \quad (b)$$

$$a''' = \frac{W_{jk} - W_{ik}}{\lambda_{jk} - \lambda_{ik}} \quad (c)$$

$$b' = \frac{\lambda_{jk} \cdot U_{ik} - \lambda_{ik} \cdot U_{jk}}{\lambda_{jk} - \lambda_{ik}} \quad (d)$$

$$b'' = \frac{\lambda_{jk} \cdot V_{ik} - \lambda_{ik} \cdot V_{jk}}{\lambda_{jk} - \lambda_{ik}} \quad (e)$$

$$b''' = \frac{\lambda_{jk} \cdot W_{ik} - \lambda_{ik} \cdot W_{jk}}{\lambda_{jk} - \lambda_{ik}} \quad (f)$$

(2.52)

Considerando las ecuaciones (2.50, 2.51, 2.52), el voltaje medio que el electrodo j induce en el electrodo k puede hallarse mediante [7]:

$$\bar{V}_{jk} = \frac{\int_{\lambda_{ik}}^{\lambda_{jk}} V_{jk}(\lambda_k) d\lambda}{\lambda_{jk} - \lambda_{ik}} \quad (2.53)$$

donde, λ toma los valores de las coordenadas que presentan la mayor diferencia entre sí, es decir, si las coordenadas en U presentan mayor diferencia que las correspondientes en V y W ; λ toma los valores de las coordenadas en U , de igual manera ocurre con V y W respectivamente.

$V_{jk}(\lambda_k)$ puede expresarse, reemplazando la ecuación 2.51 en 2.46.

$$\begin{aligned}
 V_{jk} = i \cdot cte_{rsis} \left\{ cte_{KO} \cdot ffo + cte_{KO'} \cdot ffo' + \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} cte_{K11} \cdot ff_{An} + cte_{K12} \cdot ff_{An'} + cte_{K13} \cdot ff_{Bn'} + \right. \\
 + cte_{K14} \cdot ff_{Bn'} + \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} cte_{K21} \cdot ff_{An} + cte_{K22} \cdot ff_{An'} + cte_{K23} \cdot ff_{Bn'} + cte_{K24} \cdot ff_{Bn'} + \\
 \left. + \sum_{n=1,2,3,\dots}^{\infty} cte_{K31} \cdot ff_{an} + cte_{K32} \cdot ff_{an'} + cte_{K33} \cdot ff_{bn'} + cte_{K34} \cdot ff_{bn'} \right\}
 \end{aligned}
 \tag{2.54}$$

donde: los detalles de esta ecuación se encuentran en el APÉNDICE G

2.3.3.2 Electrodo en varias capas de un suelo estratificado

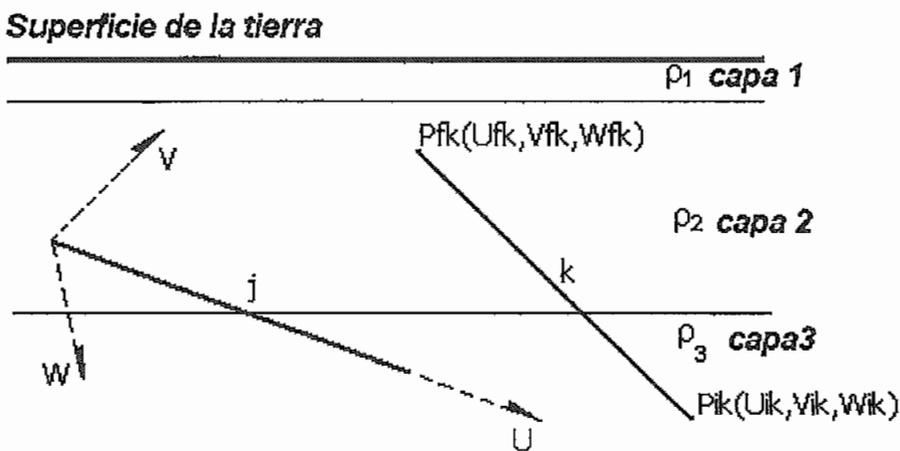


Figura 2.12 Determinación del potencial medio entre el electrodo j y el electrodo k con los electrodos en varias capas

Considere dos electrodos lineales j y k en el sistema de referencia UVW inmersos en dos capas de un suelo estratificado (ver figura 2.12).

La manera de resolver este problema es dividiendo a cada electrodo en dos electrodos donde cada uno de estos estará inmerso en una sola capa del suelo no homogéneo (ver figura 2.13).

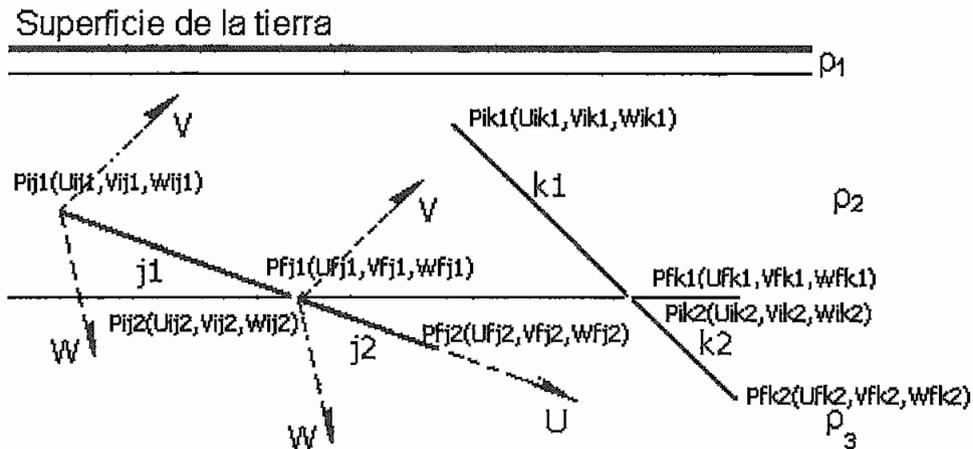
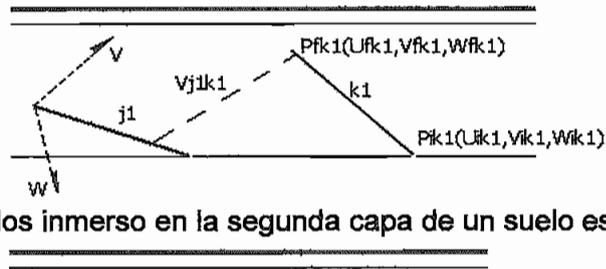


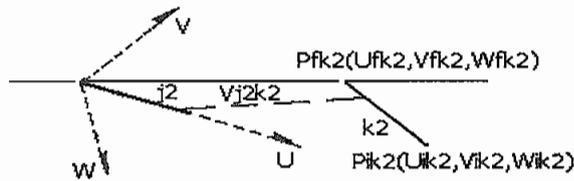
Figura 2.13 División de electrodos para la determinación del potencial medio entre el electrodo j y el electrodo k con los electrodos en varias capas

Como se observa en la figura anterior el electrodo j ha sido dividido en $j1$ y $j2$ mientras que el electrodo k ha sido dividido en $k1$ y $k2$, con esta consideración el problema anterior se transforma en cuatro casos en donde cada electrodo pertenece a una capa de un suelo estratificado, problema ya resuelto en el punto anterior (ver figura 2.14).

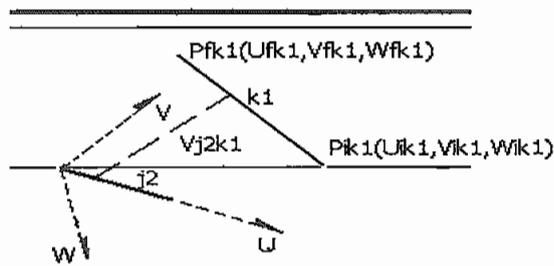
Los gráficos de la figura 2.14 corresponden a los casos que se pueden dar por tanto, por tanto el suelo y los electrodos corresponde al de la figura 2.13 (considerando la división mencionada)



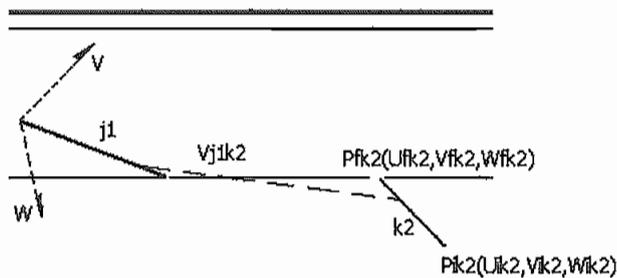
(a) Electrodo inmerso en la segunda capa de un suelo estratificado



(b) Electrodo inmerso en la tercera capa de un suelo estratificado



(c) Un electrodo inmerso en la segunda capa y otro electrodo inmerso en la tercera capa de un suelo estratificado



(d) Un electrodo inmerso en la segunda capa y otro electrodo inmerso en la tercera capa de un suelo estratificado

Figura 2.14 Casos particulares luego de división de electrodos para la determinación del potencial medio

Para resolver esto como en el punto anterior es necesario tener las coordenadas de los cuatro electrodos lineales, de esto se conoce:

$$P_{ij1}(X_{ij1}, Y_{ij1}, Z_{ij1}) = P_{ij}(X_{ij}, Y_{ij}, Z_{ij}) \quad (\text{a})$$

$$P_{ff2}(X_{ff2}, Y_{ff2}, Z_{ff2}) = P_{ff}(X_{ff}, Y_{ff}, Z_{ff}) \quad (\text{b})$$

$$P_{ik2}(X_{ik2}, Y_{ik2}, Z_{ik2}) = P_{ik}(X_{ik}, Y_{ik}, Z_{ik}) \quad (\text{c})$$

$$P_{fk1}(X_{fk1}, Y_{fk1}, Z_{fk1}) = P_{fk}(X_{fk}, Y_{fk}, Z_{fk}) \quad (\text{d})$$

(2.55)

Para encontrar las coordenadas faltantes se utiliza las siguientes expresiones.

$$X_{ff1} = X_{ij2} = X_{ff} - (Z_{ff} - H) \left(\frac{X_{ff} - X_{ij}}{Z_{ff} - Z_{ij}} \right) \quad (\text{2.56})$$

$$Y_{ff1} = Y_{ij2} = Y_{ff} - (Z_{ff} - H) \left(\frac{Y_{ff} - Y_{ij}}{Z_{ff} - Z_{ij}} \right) \quad (\text{2.57})$$

$$Z_{ff1} = Z_{ij2} = H \quad (\text{2.58})$$

$$X_{fk1} = X_{ik2} = X_{fk} - (Z_{fk} - H) \left(\frac{X_{fk} - X_{ik}}{Z_{fk} - Z_{ik}} \right) \quad (\text{2.59})$$

$$Y_{fk1} = Y_{ik2} = Y_{fk} - (Z_{fk} - H) \left(\frac{Y_{fk} - Y_{ik}}{Z_{fk} - Z_{ik}} \right) \quad (\text{2.60})$$

$$Z_{fk1} = Z_{ik2} = H \quad (\text{2.61})$$

Cuando se trata de evaluar el potencial medio propio es decir cuando $j=k$, se tienen indeterminaciones debido a que la expresión de voltaje que produce un conductor lineal es válida en cualquier punto menos en el propio eje del conductor. Para evitar esto la integración (2.53) se la debe realizar sobre la superficie del conductor y no sobre su eje, para esto se debe tomar en cuenta el radio del conductor (ver figura 2.15).

Superficie de la tierra

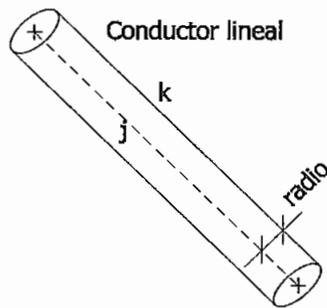


Figura 2.15 Ejemplo de un electrodo para evaluar el potencial medio propio

(en la figura se presenta un electrodo inclinado a manera de ejemplo, debido a que las expresiones desarrolladas son válidas cualquiera que sea la posición relativa del electrodo, además que se puede dar este caso)

2.3.4 DETERMINACIÓN DE LA “RESISTENCIA MUTUA” ENTRE CONDUCTORES LINEALES

La “resistencia mutua” entre el conductor j y el conductor k está dada por [1]:

$$\bar{R}_{jk} = \frac{\bar{V}_{jk}}{I_j} \quad (2.62)$$

donde I_j es la corriente que abandona el electrodo j y es igual a $i_j \times L_j$ donde L_j es la longitud del conductor j .

La resistencia mutua es un factor fundamentalmente geométrico que depende del tamaño de separación y orientación de los conductores.

La resistencia mutua del conductor j respectó del conductor k es idéntica que la resistencia mutua del conductor k respecto del j esto es [1], [4]:

$$\bar{R}_{jk} = \bar{R}_{kj} \quad (2.63)$$

Cuando $j=k$ se obtiene la resistencia propia del conductor j .

2.4 PLANTEAMIENTO DE LAS ECUACIONES PARA EVALUAR EL COMPORTAMIENTO DE ELECTRODOS DE PUESTA A TIERRA COMPLEJOS

2.4.1 CONSIDERACIONES BÁSICAS

La longitud del conductor involucrada en el electrodo de puesta a tierra es generalmente pequeña en comparación con la profundidad de la onda de excitación* que está dada por la ecuación 2.64

$$\Delta = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{\rho \cdot 10^7}{f}} \quad (2.64)$$

donde:

Δ = profundidad de penetración en metros

ρ = resistividad del suelo en ohmio-metro

f = frecuencia en Hz**

El tiempo de propagación de esta onda en el electrodo a la frecuencia industrial es generalmente despreciable. En consecuencia la evaluación del

* La onda de excitación corresponde a la onda de corriente producida durante la falla, y su forma corresponde a una senoide amortiguada [25].

** El rango de frecuencia es muy variada, pero en caso de fallas se puede considerar el valor aceptado de frecuencia limite de 1 kHz [25].

comportamiento del electrodo se lo puede hacer con base en las ecuaciones de campo para el caso estacionario [1], [9].

Cuando la longitud de conductor utilizado es aproximadamente igual o excede la profundidad de penetración en la tierra; o si se está interesado en analizar el comportamiento del electrodo de puesta a tierra frente a excitaciones transitorias como sobrevoltajes por descargas atmosféricas, no es posible efectuar un estudio de tipo estático [9].

2.4.2 METODOLOGÍA DE SOLUCIÓN

La evaluación del comportamiento de los electrodos de puesta a tierra, consiste fundamentalmente en la determinación de la resistencia del electrodo y de los potenciales que se genera durante las condiciones de falla.

La evaluación del comportamiento de pequeños electrodos lineales puede determinarse en base de las expresiones del punto anterior (2.3) para una distribución de corriente constante, sin embargo para electrodo de tierra complejos ésta suposición no es valida, ya que la corriente disipada por las diferentes partes del electrodo no es uniforme [1], [9].

El método de los momentos aplicado al problema de evaluación del comportamiento de electrodos de puesta a tierra implica que la malla puede ser dividida en muchos segmentos. Dentro de cada segmento la densidad de corriente se asume constante, pero ésta varia de segmento en segmento [6], [10].

Para un electrodo que ha sido dividido en n segmentos, el potencial que se genera en el segmento k debido a sí mismo y a los demás segmentos está dado por:

$$V_k = \sum_{j=1}^n R_{jk} \cdot I_j \quad (2.65)$$

donde:

R_{jk} = resistencia entre el j-ésimo segmento y el segmento k

I_j = corriente que abandona el j-ésimo segmento

Cuando $j=k$ se está calculando el voltaje inducido en el segmento por la propia corriente que lo abandona y la resistencia R_{jj} es la resistencia propia del segmento j.

Aplicando la ecuación 2.65 a cada segmento en que ha sido dividido el electrodo se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones de orden n:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \cdot \\ V_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \cdot & R_{1n} \\ R_{21} & R_{22} & \cdot & R_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ R_{n1} & R_{n2} & \cdot & R_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \cdot \\ I_n \end{bmatrix}$$

En forma compacta:

$$[V] = [R] \cdot [I]$$

(2.66)

Los valores de R_{jk} están dados por la ecuación 2.62. La ventaja de esta expresión es que permite que los segmentos estén en cualquier orientación entre ellos y con respecto de la superficie de la tierra.

2.4.2.1 Determinación de la distribución de corriente

Considerando que todos los segmentos forman parte del mismo electrodo y la caída de potencial entre los distintos segmentos es despreciable; se puede asumir que el potencial que alcanzan todos los segmentos es igual al potencial que alcanza la puesta a tierra respecto a tierra remota este potencial será designado por GPR [1].

De lo anterior se tiene:

$$GPR = V_1 = V_2 = \dots = V_n \quad (2.67)$$

Luego con el sistema de ecuaciones de la expresión 2.66 se tiene que hallar el valor de las n corrientes y el valor de **GPR** que también es desconocido, es decir se obtiene un sistema de $n+1$ incógnitas con n ecuaciones.

Para evitar el problema anterior se va a calcular el valor de las corrientes para que la malla de tierra se eleve un voltio respecto de tierra remota, **GPR=1**.

Puesto que las corrientes son calculadas para un **GPR=1**, éstas están en por unidad (pu) del valor de **GPR**, por tanto la base para obtener la corriente en amperios, es el valor de **GPR**.

Para resolver el sistema de ecuaciones de la expresión 2.66 puede ser resuelto por algunos métodos como: inversión de la matriz de "resistencias mutuas", métodos iterativos.

La inversión de la matriz de resistencias puede ser complicada cuando esta es de un orden elevado, de forma que esta inversión podría no resultar práctica para este caso.

En cuanto a los métodos de iteraciones la matriz de resistencias debe cumplir con ciertos criterios para garantizar la convergencia.

Para resolver el sistema se plantea el siguiente esquema de iteraciones [11]:

$$I^{u+1} = I^u - [A(I^u)]^{-1} f(I^u) \quad (2.68)$$

donde:

$$f(I) = [R] \cdot [I] + [V] \quad (2.69)$$

y la matriz **A**, es una matriz no singular a determinarse.

La ecuación 2.68 corresponde a un esquema de iteraciones general, la flexibilidad de este reside en el escogimiento de la matriz **A**.

A se define como:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & A_{22} & \cdot & 0 \\ \cdot & & \cdot & \\ 0 & 0 & & A_{nn} \end{bmatrix} \quad (2.70)$$

Se escoge la matriz **A** como una matriz diagonal constante cuyos elementos de elementos de la diagonal están definidos por:

$$A_{jj} = \sum_{k=1}^n R_{jk} \quad (2.71)$$

Remplazando la ecuación 2.69 y considerando $GPR=1$ en la ecuación 2.68 se obtiene la siguiente expresión:

$$I^{u+1} = I^u - A^{-1} \{ [R] \cdot [I^u] - [1] \} \quad (2.72)$$

Para la primera iteración de la j-ésima corriente se escoge un valor inicial igual a:

$$I_j = \left[\sum_{k=1}^n R_{jk} \right]^{-1} \quad (2.73)$$

es decir que para la primera iteración se parte de una distribución de corriente uniforme en todo el electrodo.

Las expresiones 2.72 y 2.73 permiten hallar las corrientes en los distintos segmentos que forman el electrodo.

2.4.2.2 Determinación de la resistencia del electrodo

La corriente total en pu que abandona el electrodo está dada por:

$$I = \sum_{j=1}^n I_j \quad (2.74)$$

El potencial en pu que alcanza la puesta a tierra respecto de tierra remota es:

$$GPR = R_g \cdot I \quad (2.75)$$

donde; R_g es el valor de la resistencia a tierra que se busca e I es la corriente total que abandona la puesta a tierra, luego despejando R_g , recordando que $GPR=1$ y reemplazando I de la expresión 2.74 se obtiene:

$$R_g = \left[\sum_{j=1}^n I_j \right]^{-1} \quad (2.76)$$

El valor de GPR en voltios es:

$$GPR = R_g \cdot I_{cc} \quad (2.77)$$

donde:

GPR = potencial del electrodo respecto de tierra remota

I_{cc} = corriente de diseño en Amperios.

Finalmente el valor en amperios de la j -ésima corriente que abandona un segmento está dado por:

$$I_j (\text{Amperios}) = I_j (\text{pu}) \cdot GPR_k (\text{Volios}) \quad (2.78)$$

2.4.2.3 Determinación de los voltajes de toque o contacto y de paso

Conocida la distribución de corriente se puede encontrar los potenciales generados en los puntos de interés, así para un punto $P(X, Y, 0)$ en la superficie de la tierra el potencial inducido será igual a la sumatoria de los potenciales generados en dicho punto por cada uno de los segmentos en que se ha dividido el electrodo.

$$V(P) = \sum_{j=1}^n V_j(P) \quad (2.79)$$

donde $V_j(P)$ es el potencial producido en el punto $P(X, Y, 0)$ por la corriente I_j disipada en la tierra por el segmento j parte del electrodo de puesta a tierra y cuyo valor está dado por la expresión 2.46.

El potencial de toque, V_t , en cualquier punto está dado por:

$$V_t(X, Y, 0) = GPR - V(X, Y, 0) \quad (2.80)$$

El potencial de paso, V_p , entre el punto $P(X, Y, 0)$ y $Q(X_1, Y_1, 0)$ está dado por:

$$\Delta V_p = V(X, Y, 0) - V(X_1, Y_1, 0) \quad (2.81)$$

Se debe recordar que por definición, la distancia entre el punto P y Q es de un metro.

CAPÍTULO III

DESARROLLO DEL PROGRAMA COMPUTACIONAL

3.1 CONSIDERACIONES INICIALES

El programa que a continuación se describe aplica el modelo matemático desarrollado en el capítulo II para evaluar el comportamiento de los electrodos de puesta a tierra.

En este capítulo se pretende exponer con amplitud la forma en la cual se ha desarrollado el programa digital, usando para el efecto el programa Matlab.

Matlab es un programa para realizar cálculos numéricos con vectores, escalares y matrices. Una capacidad atractiva de este programa es la de realizar una amplia variedad de gráficos en dos y tres dimensiones lo cual es muy útil para el fin de graficar potenciales a lo largo de la superficie. Además Matlab tiene un lenguaje de programación propio.

Matlab, al igual que otros lenguajes de programación, dispone de sentencias para la realización de bifurcaciones y bucles. Las bifurcaciones permiten realizar una u otra operación según se cumpla o no la condición indicada. Los bucles permiten repetir las mismas operaciones sobre diferentes datos. Para finalizar el cuerpo de estas sentencias se utiliza la palabra *end*.

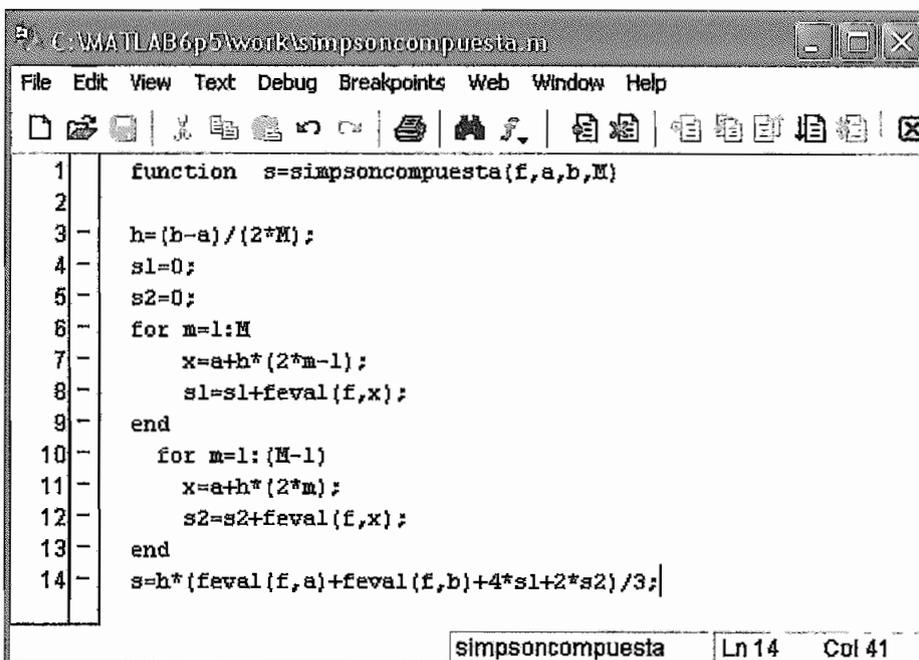
Cuando se va a realizar una serie de operaciones complicadas y de forma repetitiva se utiliza los llamados M-Files que son ficheros de texto donde se teclea las instrucciones del Matlab, dichas instrucciones se ejecutan cuando el programa detecta el nombre del fichero en el proceso de ejecución.

Otro aspecto importante para programar en Matlab es la elaboración de las llamadas funciones:

La *primera línea* de un fichero llamado *nombre.m* que define una función tiene la forma:

function [lista de valores de retorno] = nombre(lista de argumentos)

donde *nombre* es el nombre de la función. Entre corchetes y separados por comas van los *valores de retorno* (siempre que haya más de uno), y entre paréntesis también separados por comas los *argumentos*. Puede haber funciones sin valor de retorno y también sin argumentos. Recuérdese que los *argumentos* son los *datos* de la función y los *valores de retorno* sus *resultados*. Si no hay valores de retorno se omiten los corchetes y el signo igual (=); si sólo hay un valor de retorno no hace falta poner corchetes. Tampoco hace falta poner paréntesis si no hay argumentos, un ejemplo se indica en la figura 3.1.



```

1 function s=simpsoncompuesta(f,a,b,M)
2
3 h=(b-a)/(2*M);
4 s1=0;
5 s2=0;
6 for m=1:M
7     x=a+h*(2*m-1);
8     s1=s1+feval(f,x);
9 end
10 for m=1:(M-1)
11     x=a+h*(2*m);
12     s2=s2+feval(f,x);
13 end
14 s=h*(feval(f,a)+feval(f,b)+4*s1+2*s2)/3;

```

simpsoncompuesta Ln 14 Col 41

Figura 3.1 Ejemplo de creación de una función y un fichero en Matlab

En la figura anterior se indica una ventana perteneciente a un fichero de nombre *simpsoncompuesta* en la cual se define una función para el cálculo de una

integral numérica, éste se verá con más detalle en el punto 3.2 (SECUENCIA DE CÁLCULO).

El programa ha sido desarrollado en su mayoría mediante dos sentencias una de bifurcación y otra de bucle respectivamente estas son la sentencia *if* y la sentencia *for* que se describe a continuación.

Sentencia *if* En su forma más simple, la sentencia *if* se escribe en la forma siguiente:

```
if condición
  sentencias
end
```

Existe también la *bifurcación múltiple*, en la que pueden concatenarse tantas condiciones como se desee, y que tiene la forma:

```
if condicion1
  bloque1
else if condicion2
  bloque2
else if condicion3
  bloque3
else           % opción por defecto para cuando no se cumplan
                % las condiciones 1,2,3
  bloque4
end
```

donde la opción por defecto *else* puede ser omitida: si no está presente no se hace nada en caso de que no se cumpla ninguna de las condiciones que se han chequeado.

Sentencia for La sentencia *for* repite un conjunto de sentencias un número predeterminado de veces. La siguiente construcción ejecuta *sentencias* con valores de *i* de 1 a *n*, variando de uno en uno.

```
for i=1:n
sentencias
end
```

o bien,

```
for i=vectorValores
sentencias
end
```

donde **vectorValores** es un vector con los distintos valores que tomará la variable *i*.

Cuando se introducen interactivamente en la línea de comandos, los bucles *for* se ejecutan sólo después de introducir la sentencia *end* que los completa.

Una de las facilidades del Matlab es la de importar datos desde archivos externos, como pueden ser archivos procedentes del Excel.

Lo anterior se lo realiza mediante la sentencia *xlsread* y tiene la forma:

```
[A] = xlsread('nombre del archivo','nombre de hoja de cálculo')
```

Un requisito importante para lo anterior es que el archivo de Excel se encuentre ubicado en el mismo directorio donde se encuentra los ficheros del programa.

Operadores relacionales

El lenguaje de programación de matlab dispone de los siguientes operadores relacionales:

```
<          menor que
```

>	mayor que
<=	menor o igual que
>=	mayor o igual que
= =	igual que
~ =	distinto que

Operadores lógicos

Matlab dispone de los siguientes operadores lógicos:

&	and
	or
~	negación lógica

Interfaces de usuario

Matlab posee un modulo llamado *Guide* (Graphical User Interface Development Environment) el cual permite crear de modo interactivo la interface de usuario, al modo Visual Basic. Guide se ejecuta a partir de la línea de comandos de Matlab. A continuación se abre la ventana *Guide Quick Start*, y de esta se escoge una figura en blanco (*Blank GUI*), sobre la cual se sitúa los distintos controles, entrada de datos, texto etc, con el ratón hasta terminar con el aspecto deseado.

3.2 SECUENCIA DE CÁLCULO

La primera función que realiza el programa digital es el ingreso de los datos necesarios; estos datos son los siguientes:

- Tipo de suelo (homogéneo o estratificado).
- Diámetro del conductor o electrodo.

- Corriente de descarga de falla a tierra en amperios.
- Resistividad o resistividades del suelo.
- Espesor de las capas del suelo estratificado (si fuese el caso), en caso de suelo homogéneo esto no es necesario.
- Coordenadas de los puntos entre los cuales se va a calcular los potenciales de toque y paso (coordenadas a lo largo de la superficie).
- Coordenadas de los segmentos que van a formar el electrodo, estas coordenadas se ingresa mediante un archivo de Excel llamado "coordenadas de los electrodos" que se encuentra en el mismo directorio que están los ficheros de Matlab que utiliza el programa.

Con los datos ingresados se procede al cálculo de los coeficientes de reflexión, mediante las ecuaciones 2.12 y 2.13, es importante señalar que en caso de suelo homogéneo este paso no procede. ✓

Luego, procede asociar los electrodos j , k cambiando las coordenadas de los electrodos del sistema de referencia XYZ al sistema UVW asociado al conductor j aplicando la ecuación 2.29. ✓

Se escoge a que coordenadas va corresponder λ la cual toma los valores de las coordenadas que presentan la mayor diferencia entre sí, para esto se realiza un algoritmo de comparación simple. Con esto se procede a calcular los valores necesarios previo al cálculo de las "resistencias mutuas".

A continuación se procede al cálculo de las "resistencias mutuas" entre los conductores j y k utilizando la ecuación 2.62, para lo cual previamente es necesario calcular el potencial medio indicado en la ecuación 2.53. Para la integral de la expresión 2.53 se utiliza el método compuesto de Simpson el cual aproxima la integral definida de la función entre los límites de la siguiente forma:

$$\int_b^a f(x)dx \approx \frac{h}{3}(f(a) + f(b)) + \frac{2h}{3} \sum_{m=1}^{M-1} f(x_{2m}) + \frac{4h}{3} \sum_{m=1}^M f(x_{2m-1}) \quad (3.1)$$

calculándose $f(x)$ en los puntos equidistantes $x_m = a + mh \quad m=0,1,\dots,2M$ con $x_0=a$ y $x_{2M}=b$.

Este método puede implementarse mediante un fichero (ver figura 3.1).

Una vez calculados las "resistencias mutuas" entre los electrodos se procede armar la matriz de la expresión 2.66, con el fin de encontrar la densidad de corriente y resistencia de puesta a tierra R_g .

Puesto que el Matlab es un programa para realizar cálculos numéricos con matrices se calcula las corrientes mediante inversión de la matriz de resistencias, considerando que se va a calcular el valor de las corrientes para que la malla de tierra se eleve un voltio respecto de tierra remota, $GPR=1$.

Una vez conocida la corriente en los segmentos se determina la resistencia de puesta a tierra mediante la expresión 2.76.

Luego con los valores de corrientes a lo largo del electrodo se puede proceder al cálculo del potencial que produce un segmento en la superficie, para con esto determinar los potenciales de interés.

Para lo anterior el primer paso es el transformar las coordenadas del punto al sistema de referencia UVW ligado al segmento aplicando la ecuación 2.29.

El siguiente paso es aplicar la ecuación 2.46 para determinar el potencial. Una vez calculado el potencial debido a cada segmento se procede aplicar la ecuación

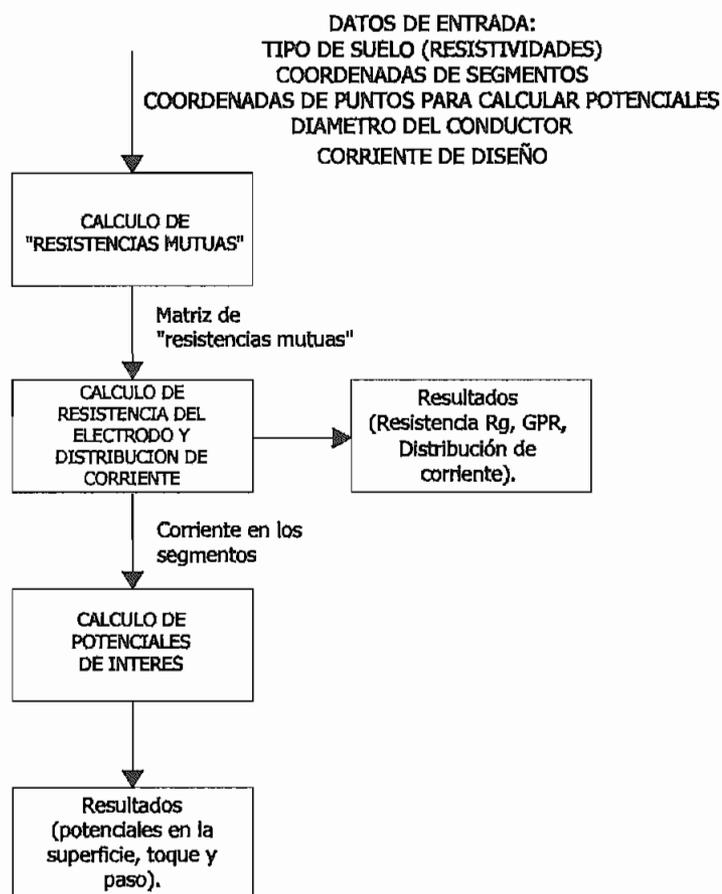
2.79 para encontrar el potencial debido a todos los segmentos que forman el electrodo.

Finalmente se procede a calcular los potenciales de toque y de paso a lo largo de una recta utilizando las ecuaciones 2.80 y 2.81.

3.3 DIAGRAMAS DE FLUJO

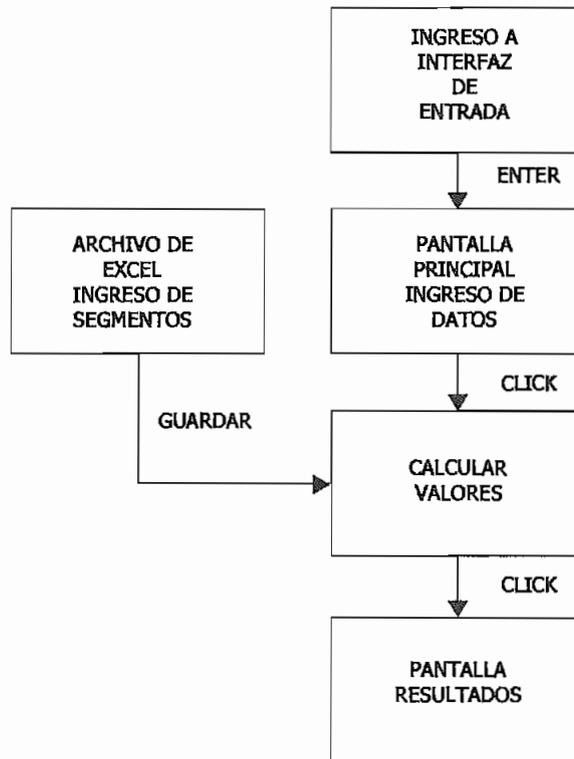
3.3.1 DIAGRAMA DE FLUJO DE PROCESO DE CÁLCULO.

A continuación se presenta el diagrama de flujo del proceso de cálculo que realiza el programa digital.



3.3.2 TRANSICIÓN DE ESTADOS.

A continuación se presenta el diagrama de transición de estados del programa digital.



* **Matlab** marca registrada de The Math Works, Inc

CAPÍTULO IV

VALIDACIÓN Y EJEMPLOS DE USO DEL PROGRAMA

4.1 ESTUDIO COMPARATIVO CON APLICACIONES SIMILARES

En este capítulo no se pretende realizar un análisis comparativo de la metodología utilizada para resolver el problema, sino una comparación de los resultados obtenidos.

Para el caso de potenciales en su mayoría solo se presenta las curvas de los potenciales en la superficie, si se desea tener una idea del comportamiento de los potenciales de toque recuérdese que estos están dados por el GPR menos el potencial en la superficie en el punto requerido.

En la tabla 4.1 se muestran los resultados obtenidos para los electrodos indicados. Estos se han tomado de la referencia [9] y [17].

Datos:

- diámetro del conductor 14 mm
- resistividad 1000 Ω -m
- profundidad de enterramiento 0.5 m
- corriente para descargar por tierra $I_{cc} = 1A$

Los datos indicados se han asumido las referencias [9], y [17], con las que se está comparando.

Tabla 4.1 Comparación de resultados de resistencia, voltaje en el punto central de la malla y corriente en los segmentos, entre el programa AEPT con las referencias [9] y [17]

Electrodo	Valores calculados según referencia [9]			Valores calculados según referencia [17]			Valores calculados por el programa AEPT		
	R(Ω)	I*(10^{-3})	V _p [%]*	R(Ω)	I* (10^{-3})	V _p [%]*	R(Ω)	I* (10^{-3})	V _p [%]*
<p>a</p>  <p>8 x 8</p>	64.16	3.896	54.32	64.16	3.896	54.31	64.01	3.904	54.68
<p>b</p>  <p>24 x 24</p>	20.6	1) 2.060 2) 2.232 3) 1.670 4) 1.385	78.64	20.58	1) 2.593 2) 2.232 3) 1.670 4) 1.386	78.65	20.70	1) 2.613 2) 2.259 3) 1.646 4) 1.395	79.09

* I corriente en el segmento
 * V_p voltaje en el punto central de la malla dado en % GPR

En la figura 4.1 se indica la distribución de potencial a lo largo de la superficie en porcentaje del GPR, para el electrodo a de la tabla 4.1.

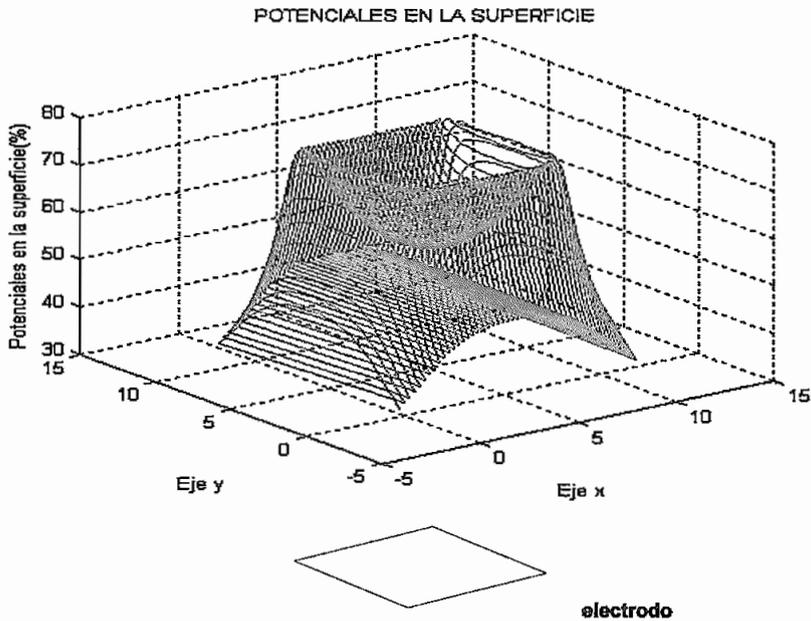


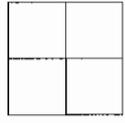
Figura 4.1 Potenciales en la superficie para el electrodo a de la tabla 4.1

En la tabla 4.2 se muestran los resultados obtenidos para los electrodos indicados. Estos se han tomado de la referencia [13], [14], [15], y [17] los datos para su desarrollo son:

- radio del conductor 50 mm*
- resistividad 100 Ω -m
- profundidad de enterramiento 0.5 m

Los datos indicados se han asumido las referencias [13], [14], [15], y [17], con las que se está comparando.

Tabla 4.2 Comparación de resultados de resistencia del programa AEPT con las referencias [13], [14], [15], y [17].

Electrodo	Método de iteraciones Ref. [13]	Método Multi-paso Ref. [13]	MTER Ref.[14]	Método de segmentación Ref.[15]	Ref.[17]	AEPT
	R(Ω)	R(Ω)	R(Ω)	R(Ω)	R(Ω)	R(Ω)
a  60 m	2.87	2.54	2.79	2.78	2.79	2.80
b  60m x 60m	1.84	1.73	1.79	1.85	1.80	1.89
c  100m x 100m	0.645	0.645	0.629	0.611	0.629	0.638
d  100m x 100m	0.586	0.558	0.552	0.558	0.5535	0.5571

Como se observa en la tabla anterior las respuestas del programa AEPT tienen similitud con los valores presentados en las referencias [13], [14], [15] y [17].

* En la práctica este radio de conductor no es aceptable, (se da para la comparación entre los diferentes métodos, debido a que las referencias mencionadas trabajan con este valor)

4.2 SIMULACIÓN DEL COMPORTAMIENTO DE ELECTRODOS COMUNES

A continuación se describe el comportamiento de cierto tipo de electrodos con el fin, principalmente de demostrar la versatilidad del programa (AEPT). Los datos para evaluar el comportamiento de estos electrodos son:

- diámetro del conductor 14 mm
- resistividad 100 Ω -m
- profundidad de enterramiento 0.5 m
- corriente para descargar por tierra $I_{cc} = 1$ A

Adicionalmente los potenciales son calculados para una superficie de 4m x 4m, la cual contiene al electrodo en cuestión.

Como nomenclatura se tiene:

V_{tmax}:	voltaje de toque máximo en el punto considerado
V_{pmax}:	voltaje de paso máximo entre los puntos indicados
V_c:	voltaje en la superficie considerando el centro del electrodo

El electrodo puede tomar diversas formas: barras verticales, placas y conductores horizontales. Las formas más comunes se describen a continuación.

4.2.1 ELECTRODO VERTICAL

Esta es la forma más común de electrodos, porque su costo de instalación es relativamente barato y pueden usarse para alcanzar en profundidad, suelo de baja resistividad, sólo con excavación limitada y relleno. Están disponibles en diversos tamaños, longitudes, diámetros y materiales [18].

Superficie de la tierra



Figura 4.2 Electrodo vertical

Tabla 4.3 Resumen de resultados para el electrodo de la figura 4.2 (Barra vertical)

Parámetro	Resultado
Resistencia	34.99 Ω
GPR	34.99 V
V_c	12.81 V
V_{tmax}	30.05 V (-1,-1)
V_{pmax}	3.98 V, de (1.3,1,0) a (2.3,1,0)

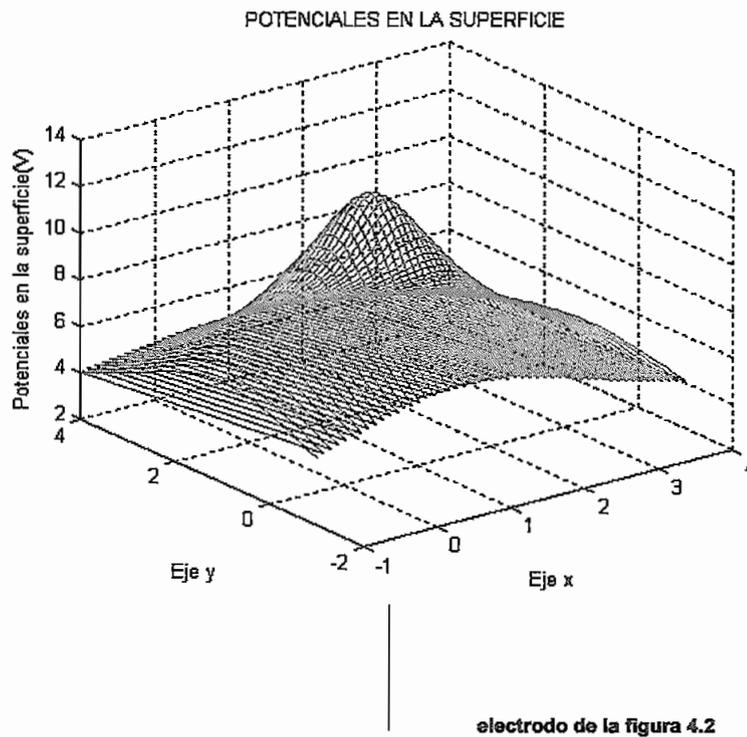


Figura 4.3 Potenciales en la superficie (barra vertical)

La curva de potenciales en la superficie es irregular. El voltaje de toque más peligroso se da en el extremo del área considerada mientras que el de paso se da considerando la mayor diferencia de potencial entre los potenciales en la superficie.

4.2.2 CONDUCTOR HORIZONTAL

Están hechos de cintas de cobre de alta conductividad o conductores (cables) [18].

Superficie de la tierra

(-1,0,0.5)

(1,0,0.5)

Figura 4.4 Conductor horizontal

Tabla 4.4 Resumen de resultados para el electrodo de la figura 4.4 (Conductor horizontal)

Parámetro	Resultado
Resistencia	49.0594 Ω
GPR	49.0594 V
V_c	22.92 V
Vtmax	43.47 V (-2,-2)
Vpmax	10.7 V, de (0,-0.1,0) a (0,-1.1,0)

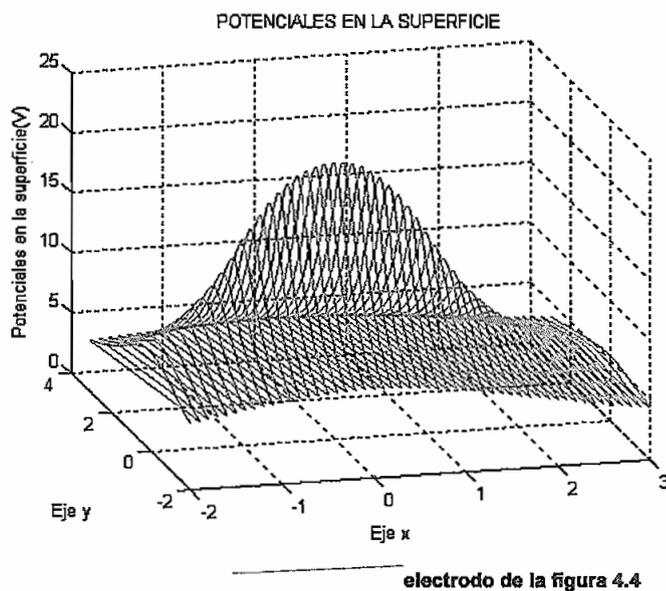


Figura 4.5 Potenciales en la superficie (barra horizontal)

4.2.3 PLACA HORIZONTAL

Se usa varios tipos de placas para propósitos de puesta a tierra, pero el tipo que se considera generalmente como electrodo debe ser sólido y de tamaño sustancial. Los electrodos de placa son de cobre o de hierro fundido. Las planchas de hierro fundido tienen un mínimo de 12mm de espesor y son cuadradas de 915 - 1220 mm por lado. Las planchas de cobre son típicamente cuadradas de 600 mm - 900 mm de lado y entre 1,6 mm y 3 mm de espesor [18].

Puesto que el programa AEPT trabaja con conductores rectos se ha simulado una placa cuadrada mediante la ubicación de 10 conductores rectos paralelos entre sí, en la figura 4.6 se indica las dimensiones de la placa simulada.

Superficie de la tierra

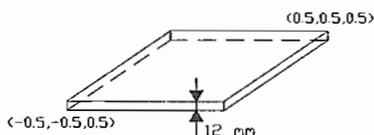


Figura 4.6 Placa horizontal

Tabla 4.5 Resumen de resultados para el electrodo de la figura 4.6 (Placa horizontal)

Parámetro	Resultado
Resistencia	30.11 Ω
GPR	30.11 V
V_c	23.57 V
V_{tmax}	24.55 V (-2,-2)
V_{pmax}	9.11 V, de (0,-0.1,0) a (0,-1,0)

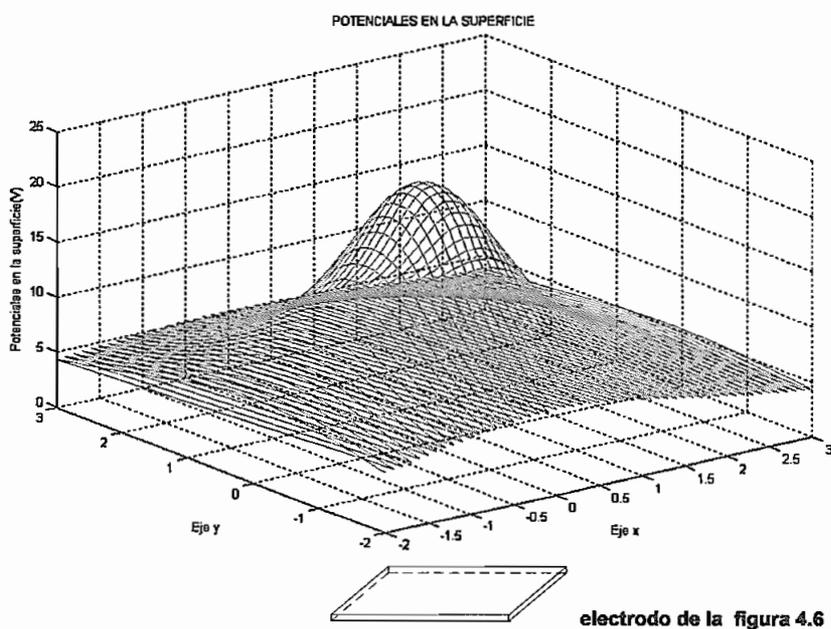


Figura 4.7 Potenciales en la superficie (placa horizontal)

4.2.4 ESTRELLA DE TRES PUNTAS

El siguiente constituye un electrodo atípico, pero constituye un valioso ejemplo para indicar la versatilidad del programa.

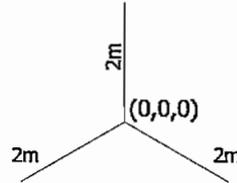
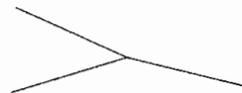
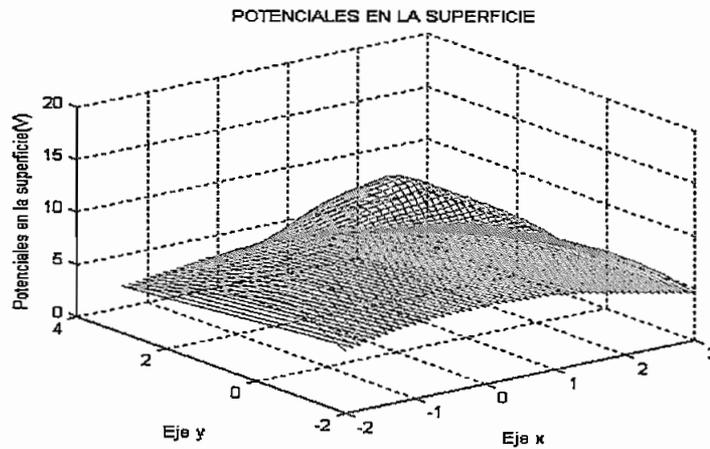


Figura 4.8 Estrella de tres puntas

Tabla 4.6 Resumen de resultados para el electrodo de la figura 4.8 (Estrella de tres puntas)

Parámetro	Resultado
Resistencia	23.2144 Ω (AEPT); 23.3571 Ω [16]; 22.6896 Ω [17]
GPR	23.2144 V
V_c	16.7 V
V_{max}	17.2591 V (-2,-2)
V_{pmax}	5.83 V, de (0,-0.3,0) a (0,-1.3,0)



electrodo figura de la 4.8

Figura 4.9 Potenciales en la superficie (estrella de tres puntas)

4.3 EVALUACIÓN DEL COMPORTAMIENTO DE ELECTRODOS COMUNES

4.3.1 RESISTENCIA

De los resultados de la simulación para electrodos comunes se observa que la resistencia decrece a medida que el área ocupada por el electrodo aumenta, además se puede apreciar que la barra vertical presenta menor resistencia, que la horizontal, esto se debe a que tiende a despejar la corriente de mejor manera al alejarse de la superficie. La menor resistencia corresponde al electrodo en forma de estrella, esto debido a que ocupa la mayor área de enterramiento incluso que la placa.

4.3.2 POTENCIALES

La curva de los potenciales en la superficie es irregular. Pero simétrico desde el centro del electrodo, el voltaje de toque más peligrosos se da en el extremo del área considerada, mientras que el de paso se da desde el centro del electrodo.

4.3.3 DISTRIBUCIÓN DE CORRIENTE

Para conductores relativamente pequeños se puede considerar una densidad de corriente uniforme, pero considerando un análisis más detallado en general se observa un crecimiento desde el centro del electrodo hacia el exterior, es decir en los extremos la corriente descargada crece notablemente, esto para cualquier electrodo un ejemplo de esto se indica en las siguientes figuras.

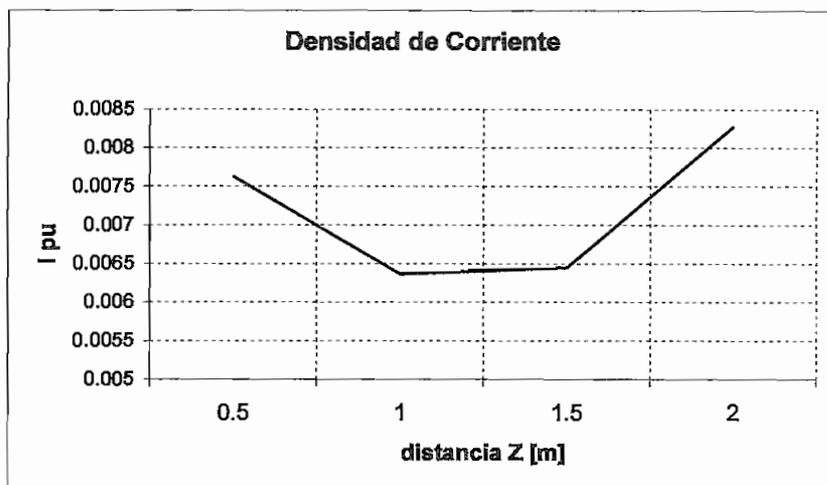


Figura 4.10 barra vertical (distribución de corriente)

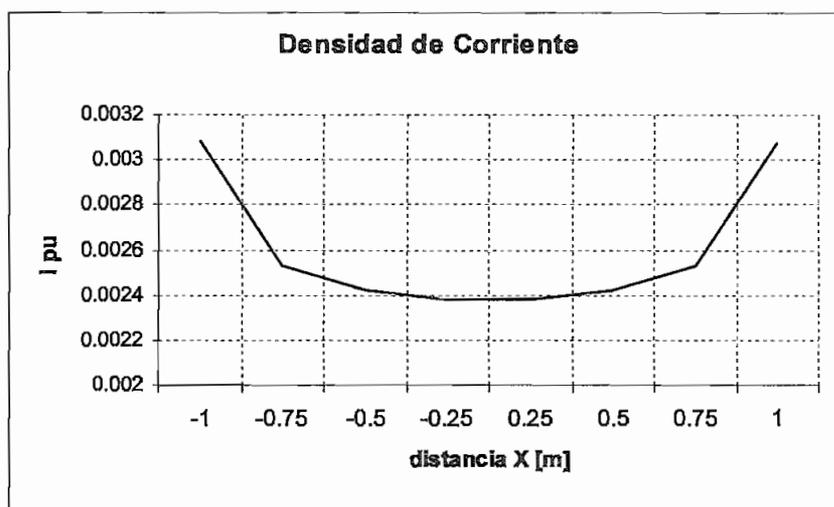


Figura 4.11 barra horizontal (distribución de corriente)

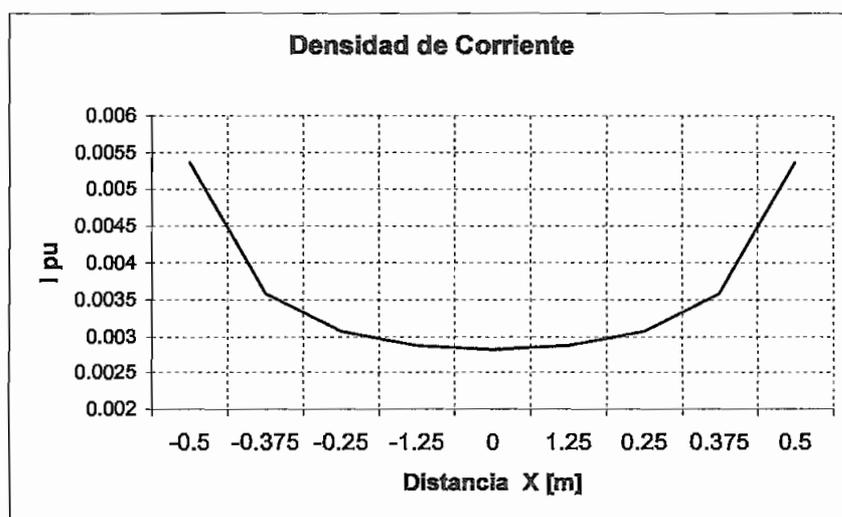


Figura 4.12 Placa horizontal (distribución de corriente)

4.4 VARIACIÓN DE LA RESISTENCIA Y POTENCIALES CON LA LONGITUD DE LOS SEGMENTOS QUE FORMAN EL ELECTRODO.

En lo que sigue se considera como “longitud de segmentación” al tamaño que tienen los conductores que van a formar el electrodo. Así por ejemplo un electrodo lineal de 16 m, puede considerarse formado por 16 segmentos de 1 m, o por un segmento de 16 m, o 2 segmentos de 8 m, o un segmento de 10 m y otro de 6 m, etc.

A continuación se presentan resultados obtenidos para distintos electrodos de puesta a tierra con el fin de apreciar la variación de los parámetros resistencia, GPR y Potenciales en la superficie en función de la longitud de la segmentación.

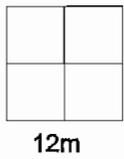
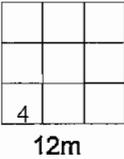
Los datos utilizados para desarrollar la tabla 4.7 son:

- diámetro del conductor 14 mm
- resistividad 1000 Ω -m
- profundidad de enterramiento 0.5 m
- corriente para descargar por tierra $I_{cc} = 1A$.

El potencial en la superficie V_c ha sido tomado en el centro del electrodo al igual que el voltaje de toque V_t , mientras que el voltaje de paso V_p , ha sido tomado desde el centro del electrodo, hacia la diagonal del mismo.

En la tabla que sigue se observa que la longitud de la segmentación no es muy determinante para encontrar el valor de la resistencia esto en porcentaje y en general se observa un ligero incremento a medida que la longitud del segmento se incrementa, por ejemplo en el electrodo b de la tabla 4.7, se observa un incremento del 1.85% del valor máximo hallado correspondiente a segmentación de 12m, y el mínimo con segmentación de 1m, es decir el programa es relativamente insensible a la longitud de la segmentación.

Tabla 4.7 Variación de resistencia y potenciales con la longitud de segmentación para varios electrodos

Electrodo	L* [m]	R [Ω -m]	Vc* [V]	Vt* [V]	Vp* [V]
 <p>a</p> <p>12m</p>	1	45.4366	23.2907	22.1459	0.1257
	2	45.4490	23.2936	22.1554	0.1258
	6	45.4543	23.3121	22.1422	0.1263
	12	45.4358	23.3115	22.1243	0.1227
 <p>b</p> <p>12m</p>	1	39.8402	36.4758	3.3644	2.3409
	2	40.4351	37.1463	3.2888	2.9226
	6	40.5714	38.4922	2.0792	3.4239
	12	40.5908	38.4633	2.1267	3.4606
 <p>c</p> <p>12m</p>	1	38.2024	31.7201	6.4823	0.5309
	4*	38.3312	31.7537	6.5775	0.5368
	6	38.4112	32.2121	6.1991	0.5687
	12	38.4523	32.1888	6.2635	0.5650

* Vc voltaje en el punto central de la malla

* Vt voltaje de toque en el punto central de la malla

* Vp voltaje de paso en el punto central de la malla

*En caso de L, por ejemplo cuando L=1, en el electrodo a de la tabla se entiende que este electrodo está formado por 48 segmentos (12 segmentos por lado colineales entre sí) de conductor, y cuando L=12 el electrodo está formado por 4 segmentos de conductor de 12m cada uno.

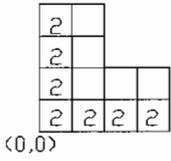
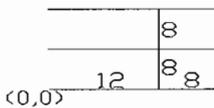
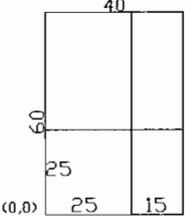
En cuanto a los voltajes se observa que es un poco más sensible a la longitud del segmento, por ejemplo en el electrodo b de la tabla anterior se observa un incremento del 5.23% del valor máximo en Vc, cuando se considera una longitud de segmentación de 6m y el valor mínimo cuando se considera una segmentación de 1m.

En la tabla 4.8 se puede apreciar los resultados obtenidos para otros electrodos. Los datos utilizados en este caso son los mismos de los de la tabla 4.7.

El potencial en la superficie Vc ha sido tomado en el punto (6,6) al igual que el voltaje de toque Vt, mientras que el voltaje de paso Vp, ha sido tomado desde el punto (6,6) en dirección a la superficie directa sobre el origen de coordenadas referenciales del electrodo (punto (0,0)).

En esta tabla se confirma lo afirmado anteriormente en el sentido que la resistencia y potenciales varían muy poco en relación con la longitud de los segmentos que forman el electrodo, incluso para una malla relativamente grande como la c de la tabla que varía en 0.62% en la resistencia, mientras que el potencial en el punto (6,6) varía en 0.69%.

Tabla 4.8 Variación de resistencia y potenciales con la longitud de segmentación para los electrodos indicados

Electrodo	L* [m]	R [Ω -m]	Vc* [V]	Vt* [V]	Vp* [V]
a. 	2*	58.8726	36.6863	22.1863	5.5228
	4	59.1064	36.7439	22.3625	5.6463
	4 y 8	59.3403	36.0267	23.3136	5.4346
b. 	2	33.9060	21.7206	12.1854	1.5832
	8 y 20	34.3884	21.9511	12.4373	1.8357
c. 	5	11.3991	7.0196	4.3795	0.0780
	40 y 60	11.4700	6.9712	4.4988	0.0679

* Vc voltaje en el punto central de la malla

* Vt voltaje de toque en el punto central de la malla

* Vp voltaje de paso en el punto central de la malla

*En caso de L, por ejemplo cuando L=2, en el electrodo a de la tabla se entiende que este electrodo está formado por 32 segmentos de conductor, y cuando L=4 el electrodo está formado por 16 segmentos de conductor de 4m cada uno.

Los potenciales de toque y paso dependen de los potenciales en la superficie y del valor del potencial de malla, como este tiende a crecer por aumento de la resistencia, a medida que la longitud de los segmentos aumenta, provoca un

aumento en los potenciales de toque y paso excepto en electrodo c de la tabla anterior donde debido a que la malla es relativamente grande y al elegir segmentos relativamente grandes no se considera una adecuada distribución de corriente a lo largo del electrodo por esto los potenciales en la superficie se ven afectados y por tanto los potenciales de toque y de paso, es importante señalar que a pesar de esto los cambios no son significativos.

CAPÍTULO V

ANÁLISIS DE ELECTRODOS DE PUESTA A TIERRA COMPLEJOS

En lo que sigue se entiende como “electrodo de tierra complejo” a aquel que pueda considerarse formado por un número finito de segmentos lineales de conductor, así por ejemplo una malla cuadrada es un electrodo complejo ya que está formada por cuatro conductores lineales, inclusive un solo electrodo lineal se puede considerar como electrodo complejo si se considera formado por varios conductores lineales colineales.

5.1 ESTUDIO DE SENSIBILIDAD PARA UN ELECTRODO DE PUESTA A TIERRA DE FORMA CUADRADA

Para evaluar el comportamiento de un electrodo de puesta a tierra se debe considerar la variación de sus parámetros tales como, resistencia de puesta a tierra, voltajes en la superficie, voltaje de malla etc.

El número de parámetros involucrados en este tipo de estudio es muy amplio (resistividad, profundidad de enterramiento, espesor de las capas si se trata de un suelo estratificado, tamaño del conductor número de retículas, etc.), se ha escogido un electrodo de forma cuadrada con una sola retícula como referencia para realizar el estudio (ver figura 5.1), con el fin de reducir el número de parámetros involucrados a considerar.

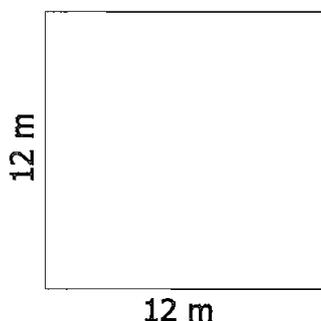


Figura 5.1 Malla de 12m por lado

A continuación se describe brevemente como afecta al comportamiento del electrodo de la figura 5.1, la variación de parámetros tales como resistividad profundidad del enterramiento, estratificación, etc.

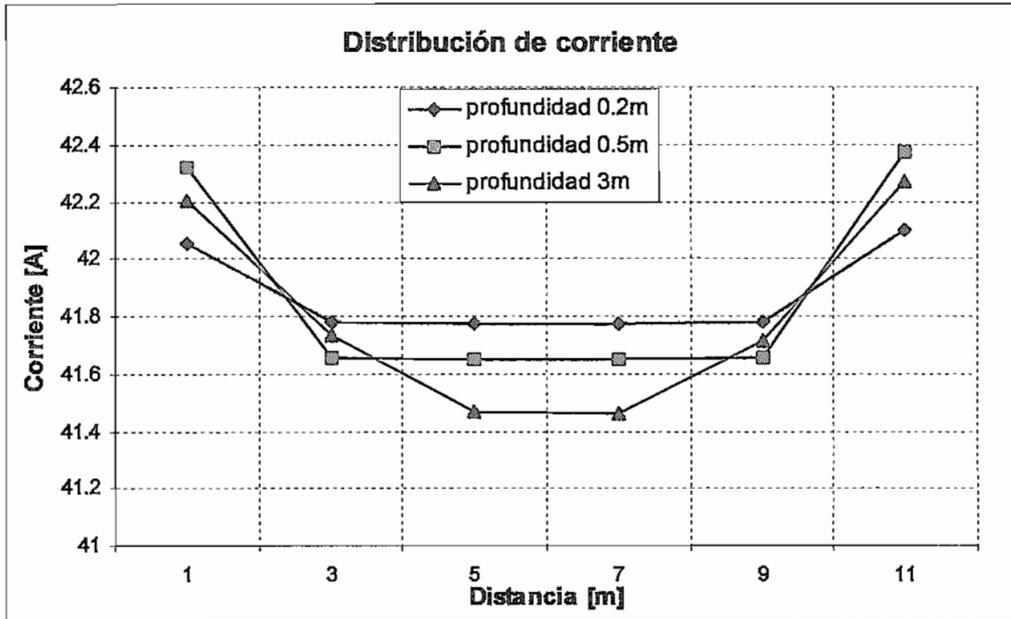
5.1.1 SUELO HOMOGÉNEO

5.1.1.1 Distribución de corriente

En la figura 5.2 se puede apreciar la distribución de corriente en función de la profundidad del enterramiento para el segmento y las profundidades de enterramiento indicadas, correspondientes al electrodo de la figura 5.1.

Los datos utilizados son los siguientes:

- diámetro del conductor 14 mm
- resistividad 100 Ω -m
- corriente para descargar por tierra $I_{cc} = 1000A$



A lo largo de un segmento del electrodo



Figura 5.2 Distribución de corriente en un segmento del electrodo de la figura 5.1

La corriente no es descargada a tierra uniformemente, en general hay la tendencia de que los extremos de los conductores descarguen más corriente que las porciones centrales, además se observa que a mayor profundidad mayor es esta tendencia, esto se debe a que al disminuir la profundidad del enterramiento disminuye la corriente hacia arriba del electrodo, mientras que al aumentar la profundidad del enterramiento la corriente hacia arriba del electrodo aumenta, esto hace que la distribución de corriente en el conductor sea, más o menos uniforme de acuerdo con la profundidad del enterramiento.

5.1.1.2 Resistencia

En la figura 5.3 se grafica, la resistencia en función de la profundidad del enterramiento para el electrodo indicado en la figura 5.1, considerando diferentes valores de resistividad del suelo.

A medida que aumenta la profundidad del enterramiento la resistencia del electrodo muestra un decrecimiento gradual, pero este decrecimiento no es ilimitado, con la profundidad el valor de la resistencia se aproxima a un valor que tendría si el electrodo estuviera sumergido en un medio que se prolonga indefinidamente en todas direcciones (significa que el efecto de la imagen del electrodo sobre la superficie es despreciable). Este valor está dado aproximadamente por la mitad del valor de la resistencia del electrodo cuando este se encuentra en la superficie, es decir para una profundidad de enterramiento igual a cero.

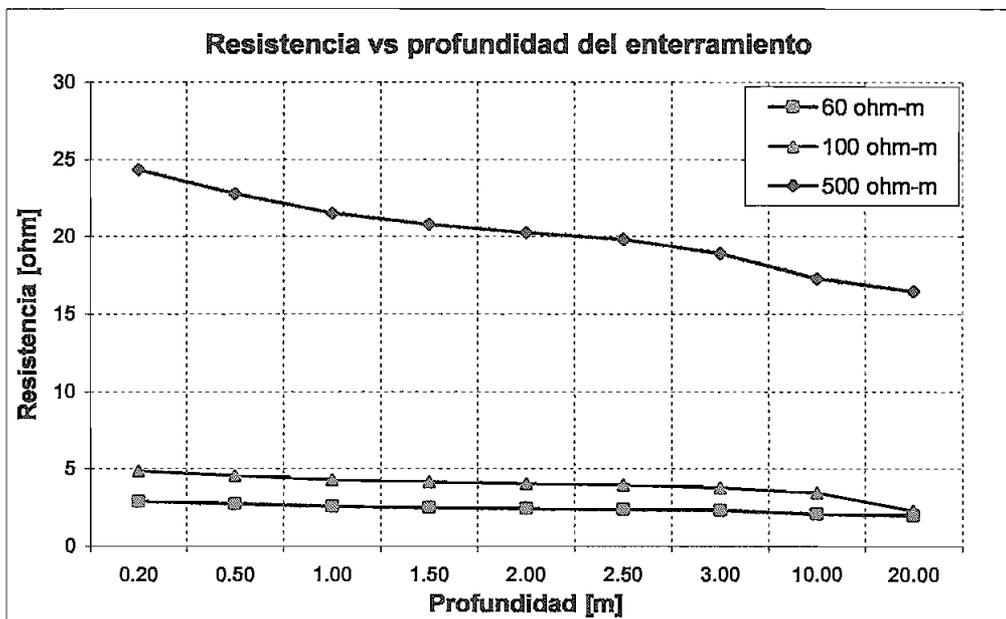


Figura 5.3 Variación de la resistencia en función de la profundidad para el electrodo de la figura 5.1

Una implicación de que la resistencia del electrodo presente un límite es que el potencial de malla GPR también tiene un límite.

En la figura 5.4 se grafica la resistencia en función del área que ocupa el electrodo. Para esto se va a considerar varios electrodos cuadrados de 12m hasta 36m por lado, donde cada uno de estos electrodos representa una área, como datos se tiene que estos electrodos están formados por conductores de 14mm de

diámetro, sumergido a una profundidad de 0.5 m y con una resistividad del suelo igual a $100 \Omega \cdot \text{m}$.

De la figura 5.4 se observa una disminución de la resistencia a medida que el área aumenta, esta disminución es menor a medida que el área crece. Por ejemplo cuando el lado del electrodo aumenta de 12m (área de 144m^2) a 16m (área de 256m^2) la resistencia se reduce en 21.96% de su valor, mientras que al pasar de 32m (área de 1024m^2) a 36m (área de 1296m^2) por lado la resistencia se reduce un 9.77%.

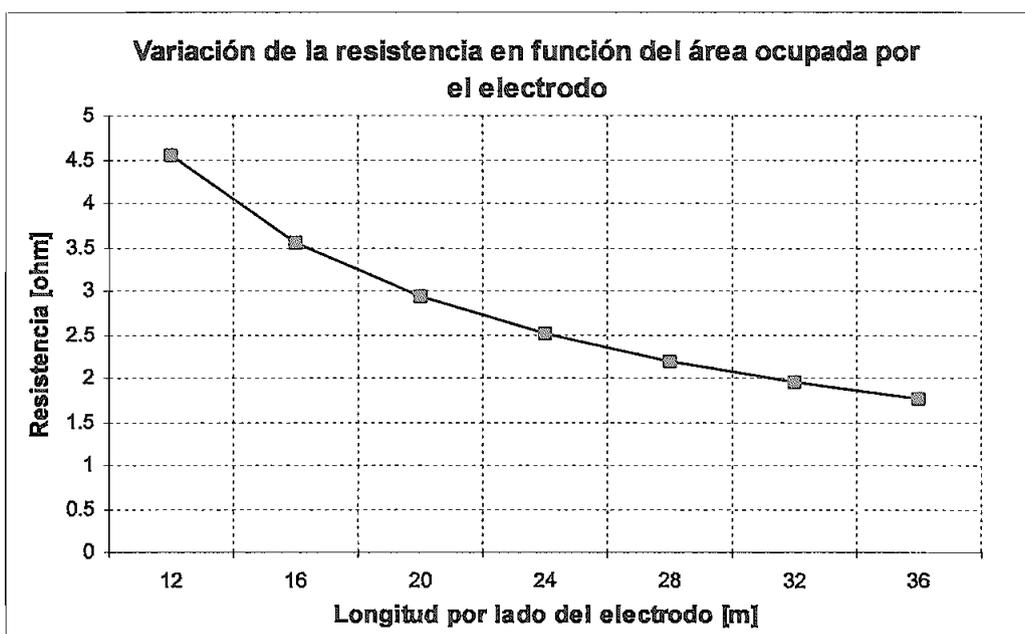


Figura 5.4 Variación de la resistencia en función del área ocupada por el electrodo

5.1.1.3 Potenciales

En las figuras 5.6 y 5.7 se representa la variación de los voltajes de toque y de paso para el electrodo de la figura 5.1, en función de la profundidad del enterramiento. El potencial de Toque se lo ha calculado en el centro de la malla, y el de paso se lo ha calculado considerando un paso desde el centro de la malla hacia el diagonal del cuadrado, como se indica en la figura 5.5.

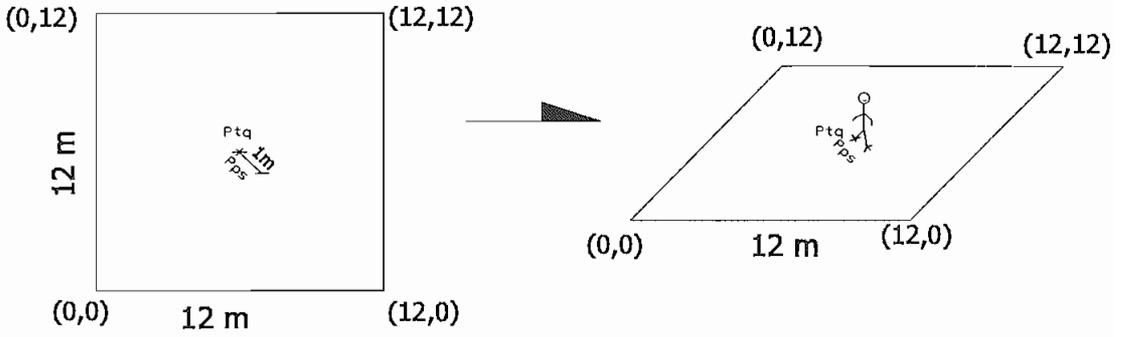
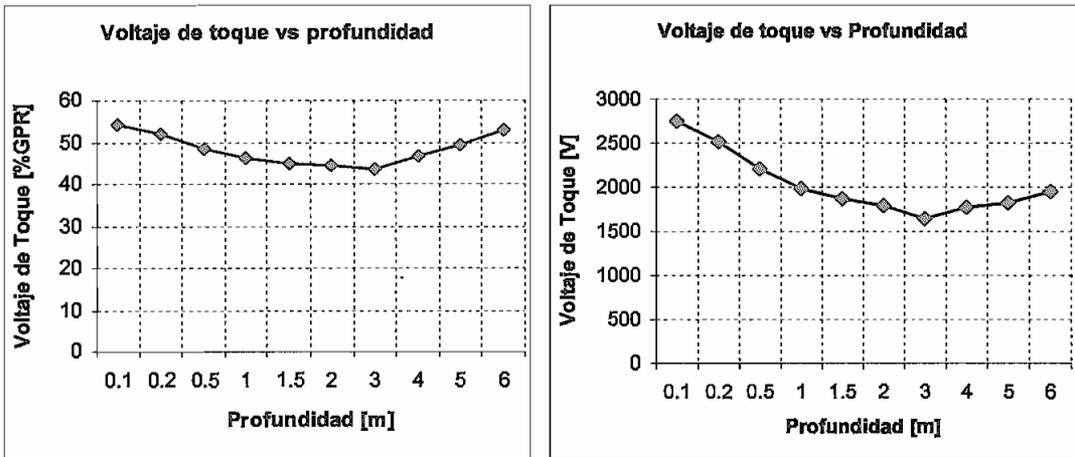


Figura 5.5 Puntos indicativos donde se calcula los potenciales de toque y paso para las figuras 5.6 y 5.7



a) En Porcentaje del GPR

b) En Voltios

Figura 5.6 Voltajes de toque vs. profundidad de enterramiento para el electrodo de la figura 5.5

De la figura anterior se observa que a medida que la profundidad de enterramiento aumenta hasta cierto valor el potencial de toque disminuye, esto se atribuye a que el GPR disminuye por disminución de resistencia, al igual que el potencial en la superficie por efecto de distancia. Luego de este valor el potencial de toque empieza a aumentar debido a que el potencial en la superficie decrece de forma muy marcada mientras que el GPR no debido a que tiene un límite ya que la resistencia tiene un límite.

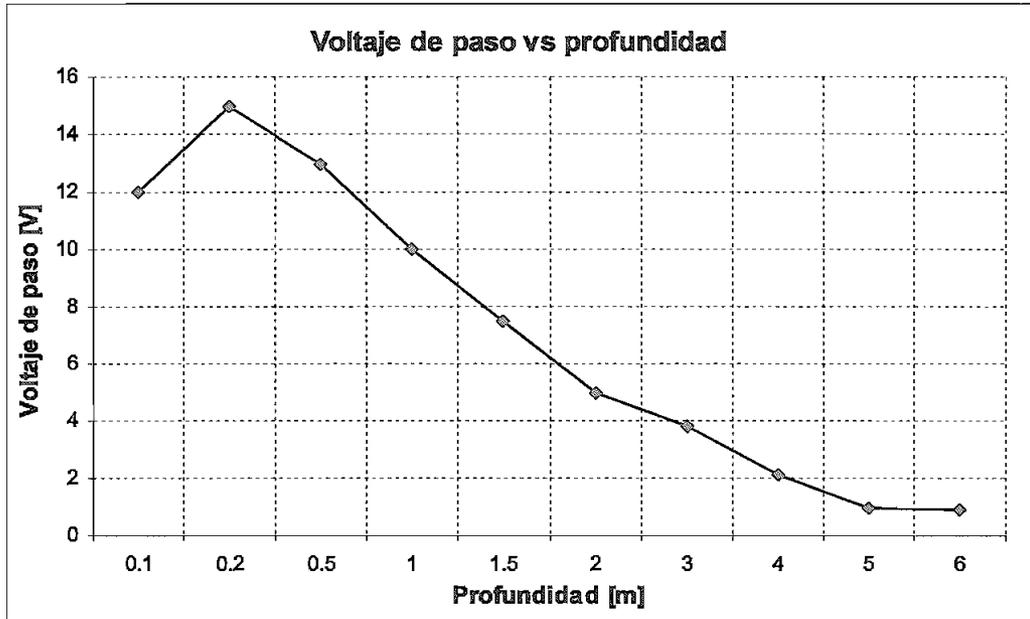


Figura 5.7 Voltajes de paso vs. profundidad de enterramiento para el electrodo de la figura 5.5

En la primera parte de la curva se observa un incremento hasta un valor pequeño, esto debido a la cercanía del electrodo a la superficie, luego de esto a medida que la profundidad aumenta la curva decrece y tiende a apianarse hasta valores muy pequeños.

Los potenciales de paso son función de los potenciales en la superficie, en la figura 5.8 se indica las curvas de estos potenciales para diferentes profundidades, de aquí se observa que las pendientes de estas curvas se suavizan lo que provoca una disminución en los potenciales de paso, esto debido al efecto de la distancia entre el electrodo y la superficie.

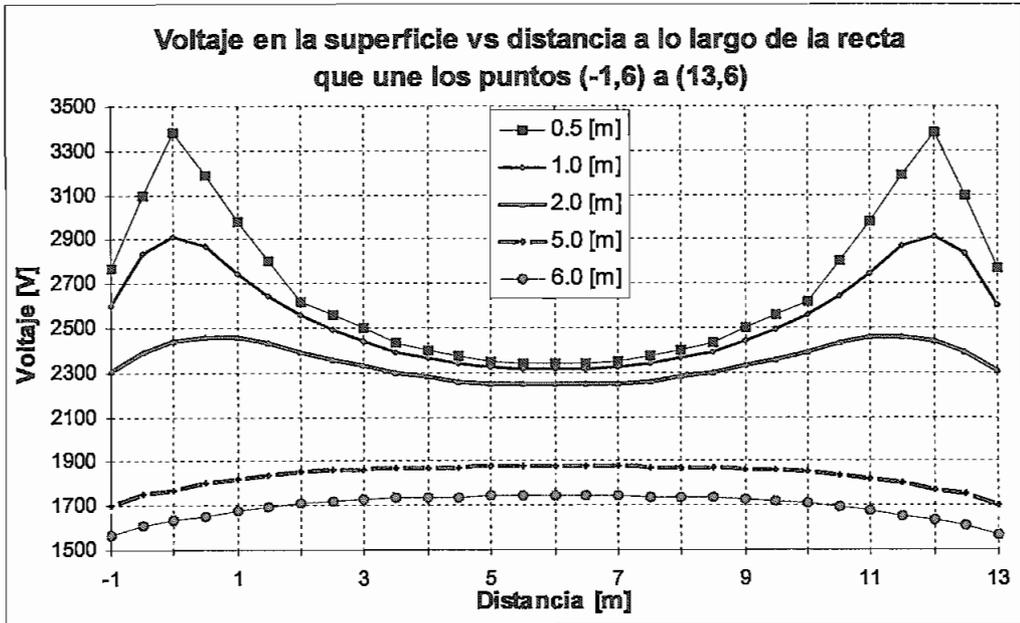


Figura 5.8 Perfiles de voltajes a lo largo del punto (-1,6) a (13,6), (ver figura 5.5)

De la figura anterior se observa que, en los puntos que están ubicados directamente encima de los conductores, los potenciales presentan un mayor decrecimiento, esto indica que a medida que la profundidad aumenta el electrodo se comporta de una manera más uniforme.

5.1.2 SUELO NO HOMOGÉNEO

A continuación se va a simular el comportamiento del electrodo de la figura 5.1 para diferentes condiciones en un suelo no homogéneo.

5.1.2.1 Suelo de dos capas

Primero considere un suelo de dos capas con el electrodo enterrado íntegramente en la primera como se indica en la figura 5.9.

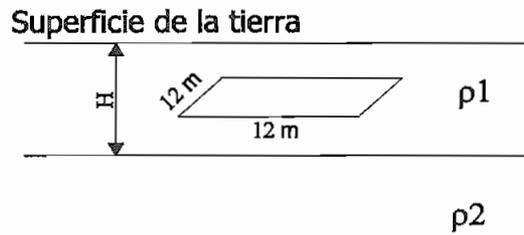


Figura 5.9 Tipo de estratificación para el electrodo de la figura 5.1

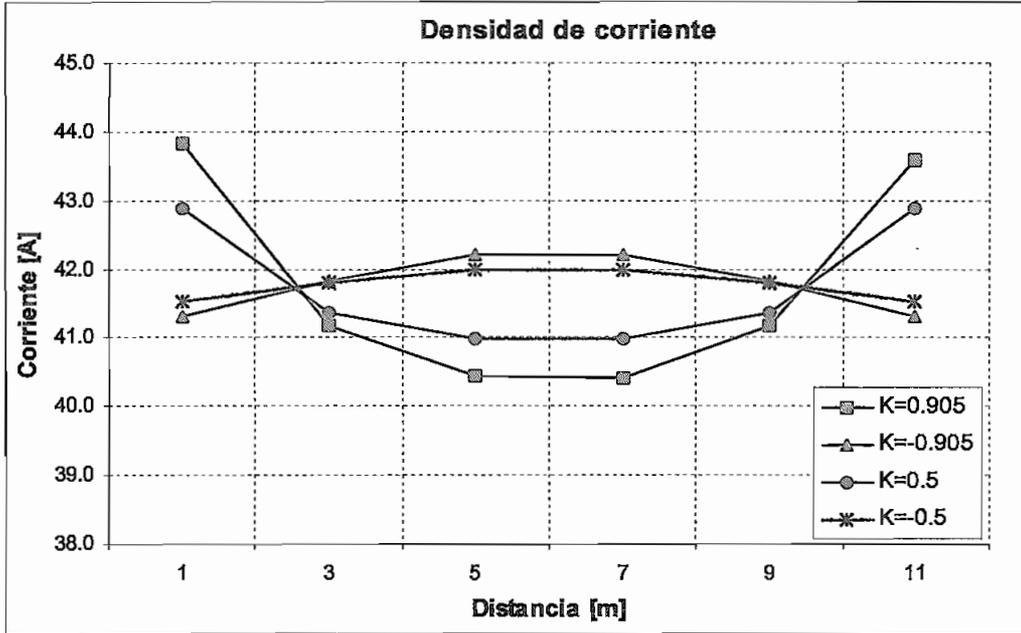
Los datos utilizados son los siguientes:

- diámetro del conductor 14 mm
- corriente para descargar por tierra $I_{cc} = 1000$ A
- la profundidad de la primera capa es de 5 m
- la profundidad del enterramiento del electrodo es de 0.5 m

5.1.2.1.1 Distribución de corriente

En la figura 5.10 se grafica la distribución de corriente, bajo diferentes condiciones de resistividad, en esta figura se puede observar que para valores positivos, es decir cuando la resistividad de la primera capa es menor que de la segunda, tiende a descargar más corriente por los extremos de los conductores que por sus regiones centrales, mientras que cuando la resistividad de la primera capa es mayor que la segunda descarga más por el centro que por los extremos.

El motivo del comportamiento señalado se justifica debido a que la corriente tiende a ir hacia el interior, es decir a la capa de menor resistividad cuando el coeficiente de reflexión es negativo, mientras que cuando el coeficiente de reflexión es positivo, trata de quedarse en la primera capa, en la capa más conductiva.



A lo largo de un segmento del electrodo



Figura 5.10 Distribución de Corriente para el electrodo de la figura 5.1 en suelo no homogéneo

5.1.2.1.2 Resistencia

En las figuras 5.11, y 5.12, se muestra como varía la resistencia en función del coeficiente de reflexión y espesor de la primera capa, los datos para estos coeficientes se encuentran en la tabla H.1 y H.2, del apéndice H, en el primer caso se considera que la resistividad en la primera capa es de $100 \Omega\text{-m}$, y en el segundo que la resistividad en la segunda capa es $100 \Omega\text{-m}$.

De este gráfico 5.11 se observa que, el valor de la resistencia aumenta a medida que aumenta el valor del coeficiente de reflexión, esto se debe a que disminuye la conductividad de la segunda capa.

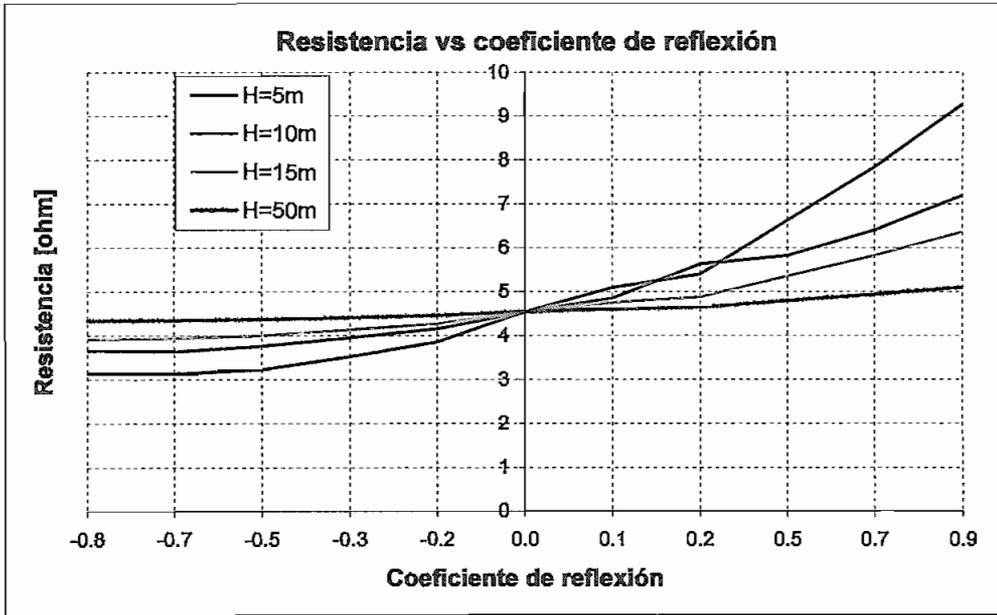


Figura 5.11 Variación de la resistencia en función del coeficiente de reflexión para los valores espesor de la primera capa indicados (H)

En la figura 5.12 se observa que la resistencia disminuye a medida que aumenta el coeficiente de reflexión, esto se explica debido a que la conductividad de la primera capa aumenta.

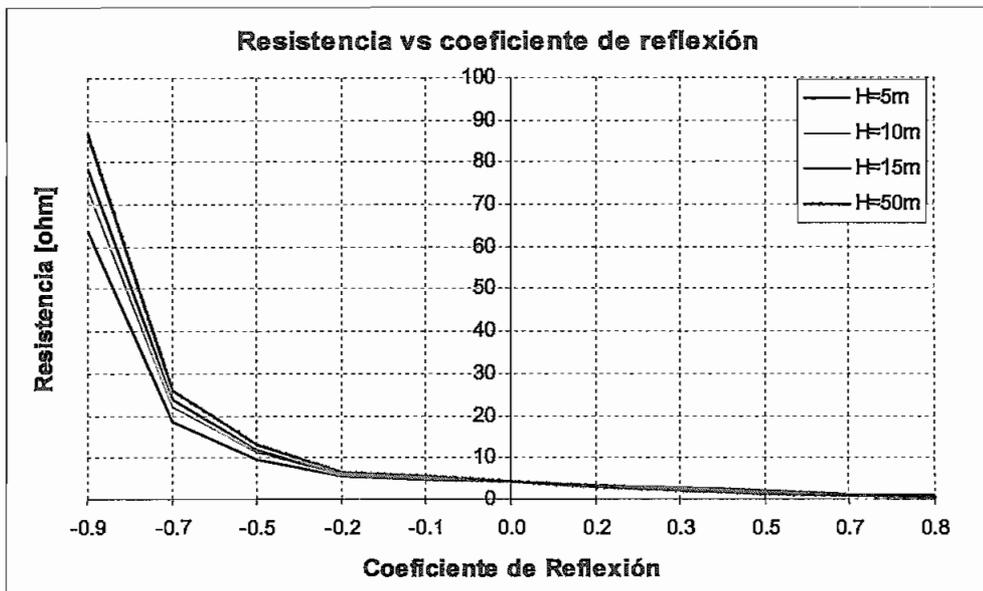


Figura 5.12 Variación de la resistencia en función del coeficiente de reflexión para los valores espesor de la primera capa indicados (H)

En general se puede decir que a medida que el espesor de la primera capa crece, el valor de la resistencia tiende al valor que tendría la malla para un suelo homogéneo de resistividad ρ_1 .

5.1.2.1.3 Potenciales

En las figuras 5.13 y 5.14 se indican los voltajes de toque para el electrodo de la figura 5.1 en función del coeficiente de reflexión, los datos para estos coeficientes se encuentra en la tabla H.3 y H.4 del apéndice H, en el primer caso se considera una resistividad de la primera capa de $100 \Omega\text{-m}$, y en el segundo caso se considera que la resistividad de la segunda capa es $100 \Omega\text{-m}$.

Estos voltajes pueden ser más grandes o pequeños que los correspondientes para suelo homogéneo.

En la figura 5.13 se observa que a medida que aumenta el coeficiente de reflexión los voltajes de toque disminuyen y luego aumentan pasando por cero (suelo homogéneo), y luego disminuye nuevamente, esto se debe a que el GPR y el voltaje en la superficie aumentan o disminuyen en diferentes proporciones.

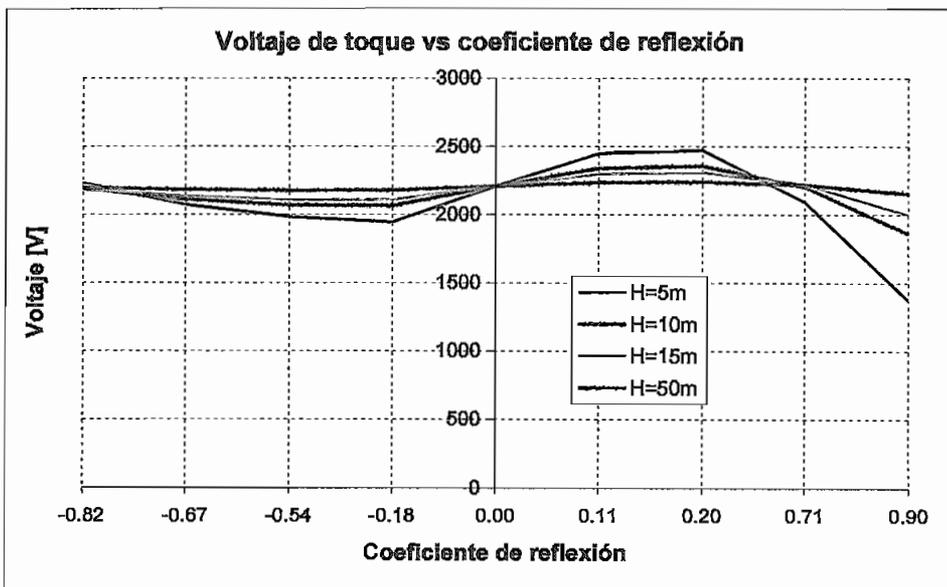


Figura 5.13 Voltajes de toque vs. coeficiente de reflexión para distintos valores de espesor de la primera capa (H), ($\rho_1 = 100 \Omega\text{-m}$)

En la figura 5.14 se observa que para valores positivos del coeficiente de reflexión se tiene valores más pequeños que los correspondientes a valores negativos, además se obtiene voltajes relativamente elevados esto se debe a que para valores de coeficiente de reflexión negativos la conductividad de la primera capa es pobre.

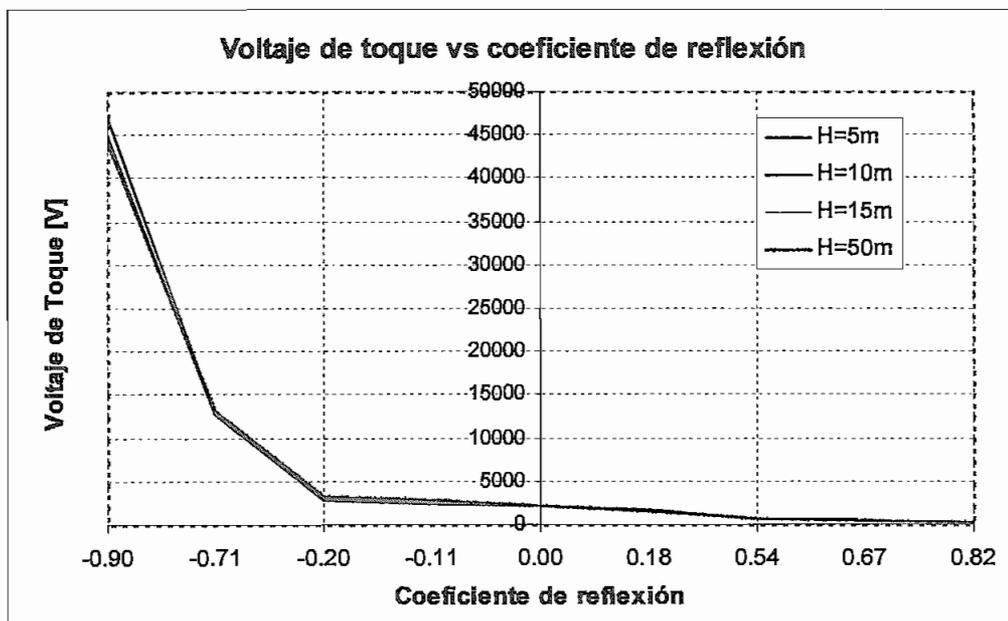


Figura 5.14 Voltajes de toque vs. coeficiente de reflexión para distintos valores de espesor de la primera capa (H) ($\rho_2 = 100 \Omega\text{-m}$)

El comportamiento de los voltajes de paso para el electrodo de la figura 5.1 se indica en las figuras 5.15 y 5.16 esto en función del coeficiente de reflexión, los datos para estos coeficientes se encuentra en la tabla H.5 y H.6 del apéndice H, en el primer caso se considera que la resistividad de la primera capa es de $100 \Omega\text{-m}$, y en el segundo caso que la resistividad de la segunda capa es $100 \Omega\text{-m}$.

En las figuras se aprecia que medida que el coeficiente de reflexión crece ya sea este positivo o negativo el voltaje de paso disminuye.

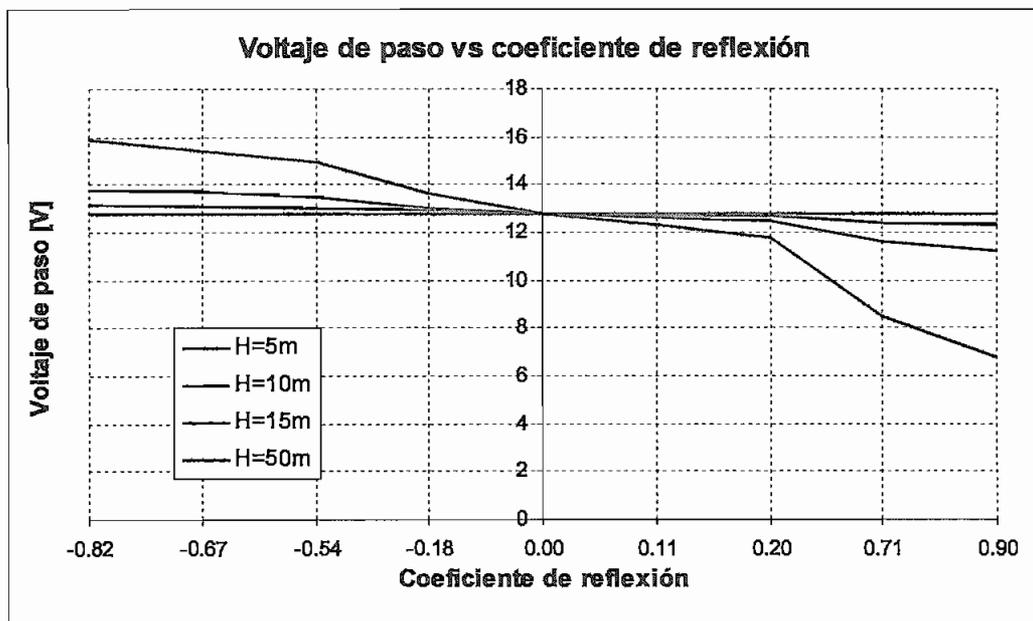


Figura 5.15 Voltajes de paso vs. coeficiente de reflexión para distintos valores de espesor de la primera capa (H), ($\rho_1 = 100 \Omega\text{-m}$)

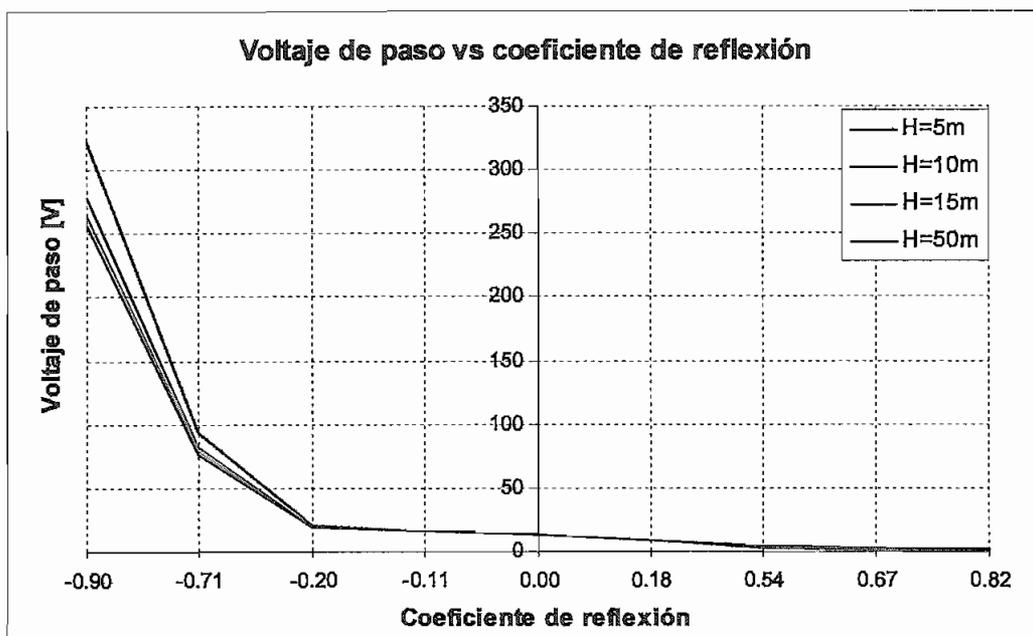


Figura 5.16 Voltajes de paso vs. coeficiente de reflexión para distintos valores de espesor de la primera capa (H), ($\rho_2 = 100 \Omega\text{-m}$)

En todos los casos a medida que la profundidad de la primera capa crece, el comportamiento tiende al valor que tendría la malla para un suelo homogéneo de resistividad ρ_1 .

De las figuras anteriores se puede decir que los voltajes dependen de las resistividades que dan valor al coeficiente de reflexión, por ejemplo, en el voltaje de toque, no es igual el comportamiento de un coeficiente de reflexión de -0.18 debido a un ρ_1 de $145 \Omega\text{-m}$ y un ρ_2 de $100 \Omega\text{-m}$ (voltaje de toque mayor que en caso de suelo homogéneo), que un coeficiente de reflexión de -0.18 debido a un ρ_1 de $100 \Omega\text{-m}$ y un ρ_2 de $70 \Omega\text{-m}$ (voltaje de toque menor que en caso de suelo homogéneo), esto sugiere la existencia de ciertas configuraciones de suelo y profundidad que podrían maximizar o minimizar el voltaje de toque.

Un aumento en la resistividad ρ_2 produce un incremento de voltajes de paso con respecto de un suelo homogéneo de resistividad ρ_1 , mientras que una disminución de ρ_2 respecto de ρ_1 produce una disminución en el voltaje de paso con respecto de un suelo homogéneo de resistividad ρ_1 .

A continuación se va a considerar un suelo de dos capas con el electrodo enterrado íntegramente en la segunda capa como se indica en la figura 5.19.

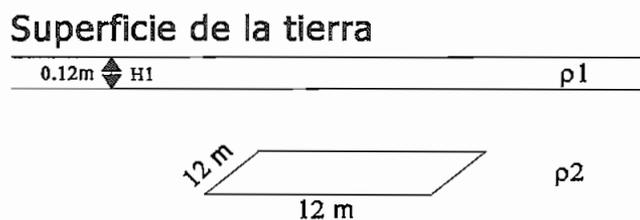


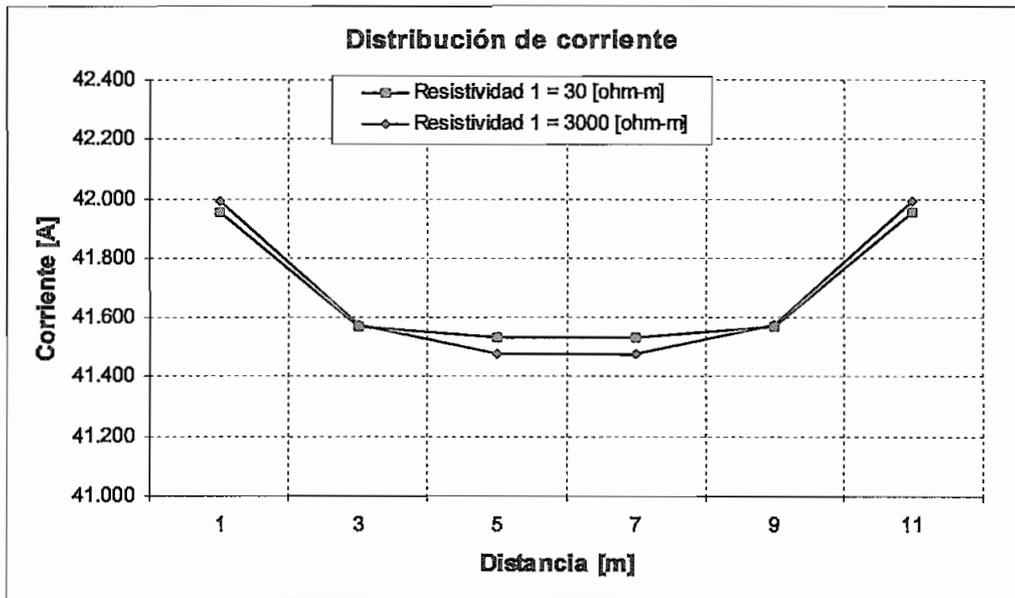
Figura 5.19 Tipo de estratificación para el electrodo de la figura 5.1

Los datos utilizados son los siguientes:

- diámetro del conductor 14 mm
- corriente para descargar por tierra $I_{cc} = 1000$ A.
- el espesor de la primera capa es de 0.12 m
- la profundidad de enterramiento del electrodo es de 0.5 m

5.1.2.1.4 Distribución de corriente

En la figura 5.20 se grafica la distribución de corriente, bajo diferentes condiciones de resistividad de la primera capa, de ésta figura se observa que, a medida que la resistividad aumenta la corriente tiende a despejarse más por los extremos, aunque el efecto es pequeño esto se debe fundamentalmente a que el espesor de la primera capa es pequeño, es decir la primera capa no hace mayor trabajo en despejar la corriente.



A lo largo de un segmento del electrodo



Figura 5.20 Distribución de Corriente para el electrodo de la figura 5.1 en suelo no homogéneo (resistividad 2 = 100 Ω -m)

5.1.2.1.5 Resistencia

En la figura 5.21 se indica como varia la resistencia del electrodo de tierra en función del valor de resistividad en la primera capa, para lo cual se considera una resistividad de la segunda capa de 100 Ω -m.

En la figura anterior se aprecia que la resistencia tiende a aumentar conforme aumenta la resistividad de la primera capa, hasta un cierto valor pero este crecimiento no es ilimitado, por ejemplo con un incremento de ρ_1 de 100 a 150 Ω -m, se obtiene un incremento del 20.4%, mientras que con un ρ_1 incremento de 1000 a 10000 Ω -m, se obtiene un incremento 9,0%.

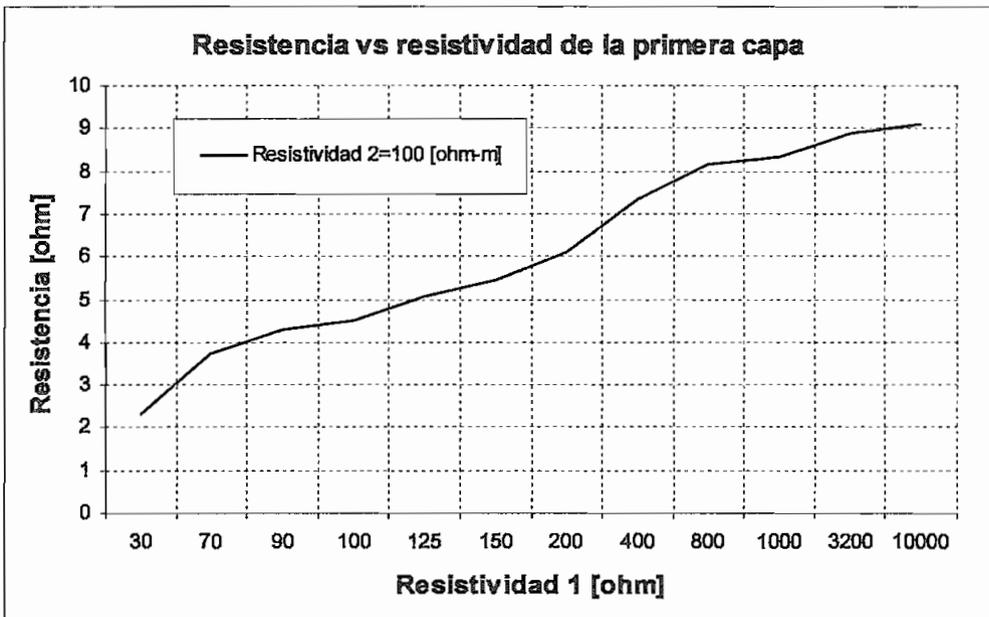


Figura 5.21 Variación de la resistencia en función de la resistividad de la primera capa considerando una resistividad de la segunda capa fija en 100 Ω -m.

5.1.2.1.6 Potenciales

En la figura 5.22 se indica como varía los voltajes de toque del electrodo de tierra en función del valor de resistividad en la primera capa.

En la figura 5.22 inicialmente se encuentra decrecimiento atribuible a que el valor de voltaje en la superficie es el más cercano al GPR, luego de esto el potencial de toque se incrementa debido a que los potenciales en la superficie disminuyen, mientras que el GPR aumenta por aumento de resistencia.

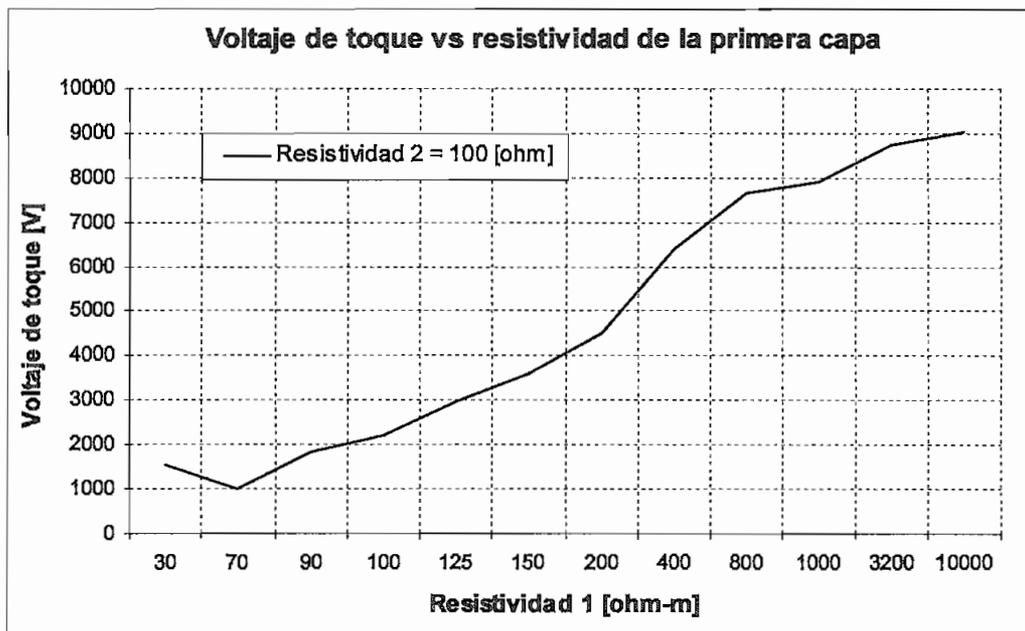


Figura 5.22 Voltajes de toque para el electrodo de la figura 5.1, vs. resistividad de la primera capa ($\rho_2 = 100 \Omega\text{-m}$)

En la figura 5.23 se observa que el potencial de paso decrece a medida que aumenta el valor de ρ_1 . Esto indica que el potencial en la superficie tiende a aplanarse en los puntos entre los cuales se determina este potencial.

En la figura 5.24 se ha trazado el potencial en la superficie para diferentes valores de ρ_1 con un $\rho_2 = 100 \Omega\text{-m}$.

En la figura 524 se puede apreciar que el potencial en la superficie disminuye a medida que aumenta la resistividad de la primera capa. Por ejemplo con un ρ_1 igual a $1000 \Omega\text{-m}$ se reduce el potencial aproximadamente a la quinta parte del valor con suelo homogéneo, mientras que con un ρ_1 igual a $50 \Omega\text{-m}$ el potencial aumenta en un tercio de su valor.

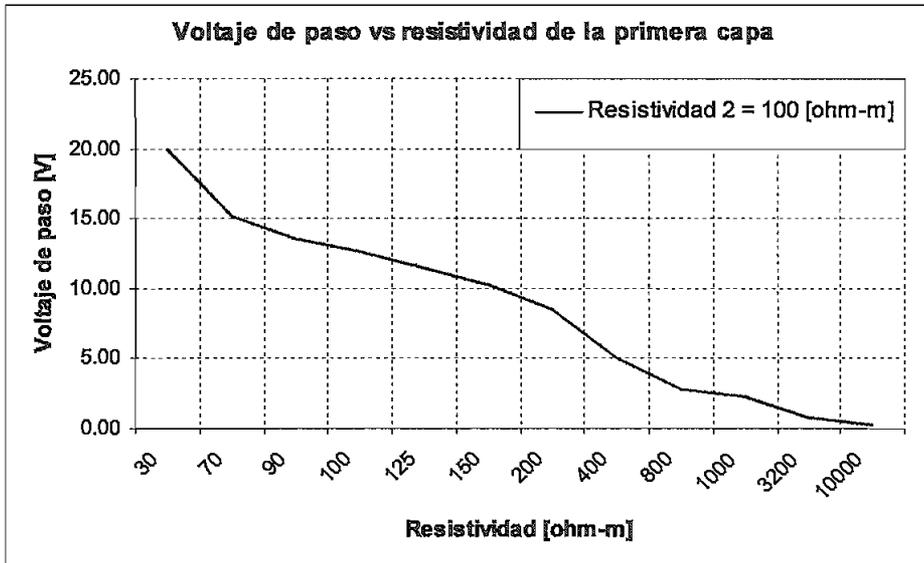
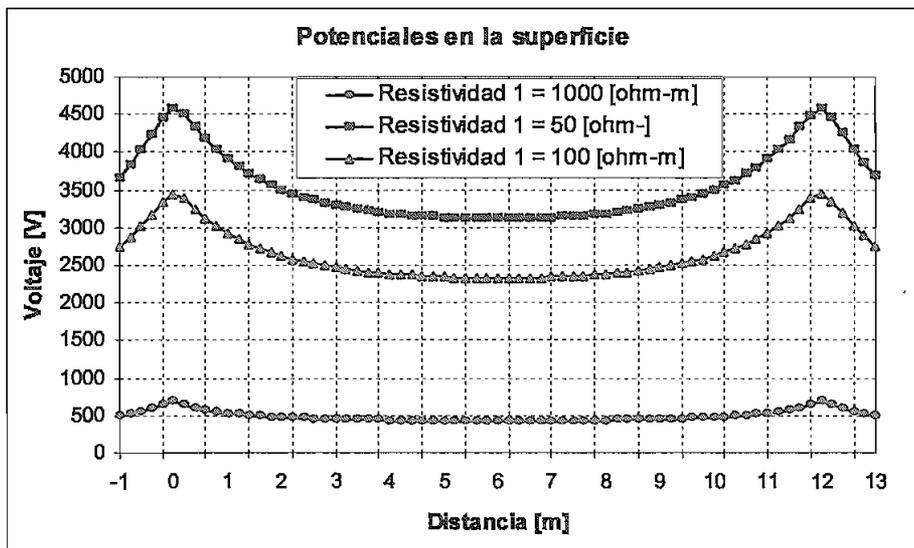


Figura 5.23 Voltajes de paso para el electrodo de la figura 5.1, vs. resistividad de la primera capa ($\rho_2 = 100 \Omega\text{-m}$)



Dirección [0,6,0],[12,6,0], (en esta figura se considera los potenciales en la superficie a lo largo de la trayectoria, como guía en la dirección observar la figura 5.5)

Figura 5.24 Voltajes en la superficie para el electrodo de la figura 5.1, vs. resistividad de la primera capa ($\rho_2 = 100 \Omega\text{-m}$)

5.1.2.2 Suelo de tres capas

A continuación considere un suelo de tres capas con el electrodo enterrado íntegramente en la segunda capa como se indica en la figura 5.25.

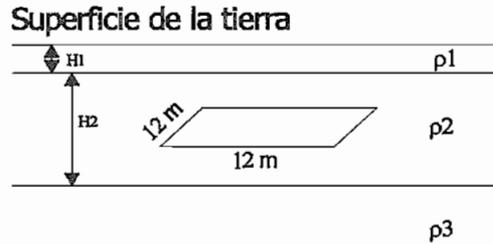


Figura 5.25 Tipo de estratificación para el electrodo de la figura 5.1

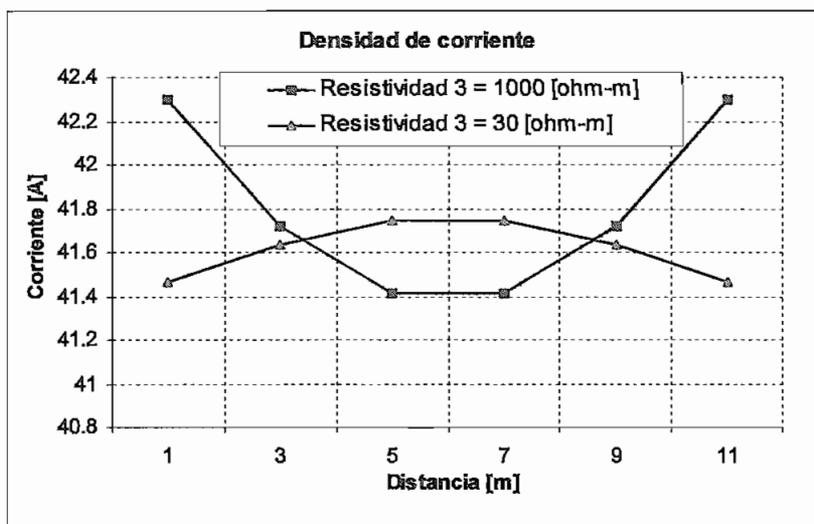
Los datos utilizados son los siguientes:

- diámetro del conductor 14 mm
- la profundidad de enterramiento del electrodo es de 0.5 m
- la corriente descargada por es electrodo es 1000 A

5.1.2.2.1 Distribución de corriente

En la figura 5.26 se grafica la distribución de corriente, bajo diferentes condiciones de resistividad de la tercera capa, el espesor de la primera capa es de 0.12 m y su resistividad es de 1000 Ω -m, mientras que en la segunda capa se considera una profundidad es de 20 m con una resistividad de 100 Ω -m

De la figura se observa que el comportamiento es similar al caso en que el electrodo se encuentra en la primera capa, en un suelo estratificado de dos capas esto debido a que la primera capa no hace mayor trabajo, es decir la corriente se despeja por la segunda y tercera capa.



A lo largo de un segmento del electrodo



Figura 5.26 Distribución de corriente para el electrodo de la figura 5.1 en suelo no homogéneo ($\rho_1=1000 \Omega\text{-m}$, $\rho_2=100 \Omega\text{-m}$)

5.1.2.2.2 Resistencia

En las tablas 5.1 y 5.2 se puede apreciar los resultados obtenidos para varios valores de resistividad en las diferentes capas. Para lo cual se considera una variación de cada una de ellas.

De los valores obtenidos en estas tablas se observa que la resistencia crece conforme crece la resistividad de cualquiera de las capas, además la mayor variación se tiene debido a la influencia de la segunda capa (donde se encuentra el electrodo), una influencia menor de la primera y ligeramente menor que esta es la influencia de la tercera capa, se debe señalar que esta influencia depende del espesor de los estratos. Para espesores del segundo estrato muy pequeños una influencia mayor en se tiene con ρ_3 que con ρ_1 . mientras que para espesores del segundo estrato relativamente mayores mayor influencia se tiene con ρ_1 que con ρ_3 .

Tabla 5.1 Variación de la resistencia con el espesor del segundo estrato y voltaje en la superficie sobre el centro de la malla de la figura 5.25

ρ_1 $\Omega\text{-m}$	ρ_2 $\Omega\text{-m}$	ρ_3 $\Omega\text{-m}$	H2* [m]	Resistencia [Ω]	Vc* [V]
3000	100	125	1	10.002	194.52
			2	9.759	190.04
			10	169.65	169.55
			20	163.88	163.88
			50	160.193	160.19

* H1 espesor de la primera capa, H1=0.12 m

* H2 espesor de la segunda capa

* Vc voltaje en el punto central de la malla

Tabla 5.2 Variación de la resistencia y potenciales en un punto en la superficie directa sobre el centro de la malla de la figura 5.25

Caso #	ρ_1 $\Omega\text{-m}$	ρ_2 $\Omega\text{-m}$	ρ_3 $\Omega\text{-m}$	Resistencia Ω	Vc* [V]	Vt* [V]	Vp* [V]
1	3000	100	30	7.3543	114.843	7239.5	1.1512
2	3000	100	60	7.9407	135.306	7805.4	1.1546
3	3000	100	90	8.5304	152.509	8377.9	1.1598
4	3000	100	120	9.1481	167.286	8980.8	1.1657
5	3000	100	170	9.7243	188.066	9536.2	1.1762
6	3000	100	500	11.9269	268.130	11659.0	1.2334
7	3000	100	1000	13.2738	319.4238	12.788.0	1.2788
8	3000	100	2000	14.2498	358.127	13892.0	1.3155
9	3000	100	4000	14.8494	3.8255	14467.0	1.3394
10	3000	30	1000	4.5196	38.6136	4481.0	0.2663
11	3000	70	1000	9.7747	172.283	9602.4	0.7745
12	3000	125	1000	15.9624	466.619	15496.0	1.7826
13	3000	500	1000	44.329	4234.1	40095.0	18.44
14	2000	100	500	11.7357	389.516	11346.0	1.5616
15	1500	100	500	11.5506	507.109	11044.0	1.8795
16	1000	100	500	11.1900	731.604	10466.0	2.4864
17	500	100	500	10.2547	1330.30	8924.4	4.1000
18	250	100	500	8.7736	2271.00	6502.6	6.6483
19	125	100	500	6.7988	3525.3	3237.6	10.04

* H1 espesor de la primera capa, H1=0.12m

* H2 espesor de la segunda capa, H2=10m

* Vc voltaje en el punto central de la malla

* Vt voltaje de toque en el punto central de la malla

* Vp voltaje de paso en el punto central de la malla

5.1.2.2.3 Potenciales

De la tabla anterior se observa que los potenciales disminuye conforme aumenta la resistividad de la primera capa, aumenta a medida que aumenta la resistividad de la segunda y tercera capa, además se observa que es más sensible a variaciones en la segunda capa, esto se debe a que el electrodo se encuentra inmerso en ésta capa. Además los voltajes de paso tienen un comportamiento igual que el de los potenciales en la superficie en cuanto a tendencia, es decir si el potencial en la superficie aumenta el voltaje de paso también, mientras que el voltaje de toque no debido a que el GPR tiene a crecer a medida que crece ρ_1 mientras que el potencial en la superficie decrece.

A continuación se considera un suelo de tres capas con el electrodo enterrado íntegramente en la tercera capa como se indica en la figura 5.27.

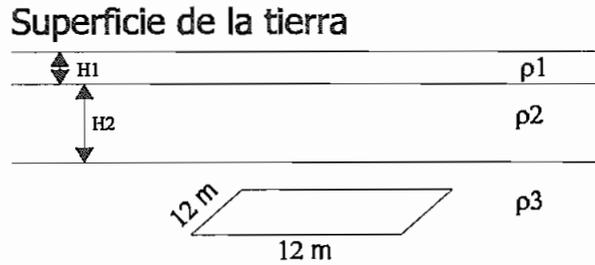


Figura 5.27 Tipo de estratificación para el electrodo de la figura 5.1

Tabla 5.3 Variación de la resistencia con el espesor del segundo estrato y voltaje en la superficie sobre el centro de la malla de la figura 5.27

ρ_1 $\Omega\text{-m}$	ρ_2 $\Omega\text{-m}$	ρ_3 $\Omega\text{-m}$	$H2^*$ [m]	Resistencia [Ω]	Vc^* [V]
3000	100	125	0.10	10.4445	19.6971
			0.20	10.4238	19.6844
			0.25	10.3862	19.6764
			0.30	10.3413	19.6600

* $H1$ espesor de la primera capa, $H1=0.12\text{m}$.

* $H2$ espesor de la segunda capa

* Vc voltaje en el punto central de la malla

5.1.2.2.4 Resistencia

De la tabla 5.3 se observa que para el caso planteado, a medida que aumenta el espesor de la segunda capa (ρ_2) la resistencia decrece, es decir a medida que aumenta de espesor la capa más conductiva, la resistencia disminuye.

5.1.2.2.5 Potenciales

De la tabla anterior también se observa que los potenciales disminuyen conforme aumenta el espesor de la segunda capa (ρ_2), esto se debe a que la capa donde se encuentra el electrodo (ρ_3), aumenta conforme disminuye el espesor de la segunda capa, y por tanto el efecto que produce la capa donde se encuentra inmerso el electrodo tiende a aumentar, este efecto es el de elevar el potencial a medida que aumenta la resistividad de esta capa ($\rho_3 > \rho_2$),

Tabla 5.4 Variación de la resistencia y potenciales en un punto en la superficie directa sobre el centro de la malla de la figura 5.27.

Caso #	ρ_1 $\Omega\text{-m}$	ρ_2 $\Omega\text{-m}$	ρ_3 $\Omega\text{-m}$	Resistencia Ω	Vc [V]	Vt [V]	Vp [V]
1	3000	100	30	2.875	14.88	2856.5	0.1150
2	3000	100	60	3.224	56.87	3167.7	0.4210
3	3000	100	90	6.217	127.78	6089.7	0.9426
4	3000	100	120	10.088	226.75	9861.1	1.6591
5	3000	100	170	12.960	453.19	12517.0	3.2952
6	3000	100	400	27.140	2370.08	21341.0	15.2477
7	3000	30	100	6.456	172.54	6284.0	1.8810
8	3000	70	100	8.079	161.977	7916.7	1.3152
9	3000	120	100	9.356	155.08	6150.0	1.0810
10	3000	400	100	12.390	154.73	10160.0	0.8944
11	2000	100	120	9.926	329.41	9596.7	2.1700
12	1000	100	120	9.470	618.70	8851.4	3.6439
13	500	100	120	8.670	1125.00	7547.1	6.2000
14	200	100	120	6.416	2238.00	4677.8	11.8401

* H1 espesor de la primera capa, H1=0.12m

* H2 espesor de la segunda capa, H2=0.3m

* Vc voltaje en el punto central de la malla

* Vt voltaje de toque en el punto central de la malla

* Vp voltaje de paso en el punto central de la malla

5.1.2.2.6 Resistencia

De la tabla anterior se observa que la resistencia aumenta a medida que aumenta el valor de resistividad de alguna de las capas, siendo la de mayor influencia ρ_3 , por ejemplo en el caso (1) la resistencia tiene un valor de 2.87Ω con un $\rho_3=30 \Omega\text{-m}$, y en el caso (4) se tiene un valor de 10.088Ω con un $\rho_3=120 \Omega\text{-m}$, mientras que en el caso (7) se tiene un valor de 6.456Ω con un $\rho_3=30 \Omega\text{-m}$, y en el caso (9) se tiene un valor de 9.356Ω con un $\rho_3=30 \Omega\text{-m}$, es decir al aumentar ρ_3 para los casos mencionados ((1) y (4)), la resistencia a aumentado en un 251.5%, mientras que al aumentar ρ_2 para los casos mencionados ((7) y (9)), la resistencia a aumentado en un 44.87 % de su valor.

5.1.2.2.7 Potenciales

En cuanto a los potenciales se observa que el voltaje en la superficie aumenta a medida que aumenta la resistividad tercera capa (ρ_3), y disminuye a medida que aumenta la resistividad de la primera capa y de la segunda capa (ρ_1 y ρ_2), siendo la capa donde está inmerso el electrodo la de mayor influencia

5.2 ESTUDIO DE SENSIBILIDAD PARA UN ELECTRODO DE PUESTA A TIERRA DE FORMA CUADRADA CON VARILLAS ENTERRADAS EN UN SUELO NO HOMOGÉNEO

A continuación considere un suelo de tres capas con el electrodo enterrado en la segunda y en la tercera capa como se indica en la figura 5.28.

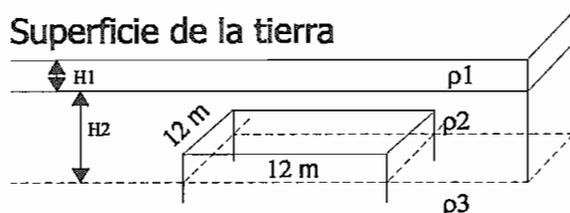


Figura 5.28 Electrodo enterrado en dos capas de un suelo estratificado.

Los datos utilizados son los siguientes:

- diámetro del conductor 14 mm
- la profundidad de enterramiento del cuadrado del electrodo es de 0.5 m
- la longitud de las varillas enterradas verticalmente es de 2 m
- la corriente descargada por el electrodo es 1000 A
- el espesor de la primera capa es de 0.12 m*

Tabla 5.6 Variación de la resistencia y potenciales en un punto en la superficie directa sobre el centro de la malla de la figura 5.28.

Caso #	ρ_1 $\Omega\text{-m}$	ρ_2 $\Omega\text{-m}$	ρ_3 $\Omega\text{-m}$	Resistencia Ω	V_c [V]	V_t [V]	V_p [V]
1	3000	100	60	4.4082	91.7183	4316.4	0.736
2	3000	100	90	6.3437	134.9865	6208.7	0.9034
3	3000	100	120	8.5748	175.91	8398.9	1.1036
4	3000	100	500	18.3852	538.1488	17847.0	1.7937
5	3000	100	2000	27.7998	937.4338	26862.0	2.1080
6	3000	30	100	4.6301	42.8387	4587.7	0.3289
7	3000	70	100	6.6750	104.0560	6570.9	0.6919
8	3000	500	100	13.2898	731.9169	12558.0	6.66
9	2000	100	120	8.4429	255.1123	8187.8	1.4318
10	1000	100	120	8.0710	478.597	7592.2	2.3611
11	200	100	120	7.4181	870.9812	6547.4	4.004

* H1 espesor de la primera capa, H1=0.12m

* H2 espesor de la segunda capa, H2=1.4m

* V_c voltaje en el punto central de la malla

* V_t voltaje de toque en el punto central de la malla

* V_p voltaje de paso en el punto central de la malla

De la tabla anterior se observa que el efecto de las capas sobre los parámetros del electrodo, tales como resistencia y potenciales es similar al caso de electrodo inmerso en la segunda capa de un suelo estratificado de tres capas, esto debido a que la mayor parte del electrodo se encuentra en la segunda capa, la diferencia radica en cuanto a los valores. En la tabla 5.7 se compara los valores para diferentes valores de espesor de la segunda capa.

Tabla 5.7 Variación de la resistencia y potenciales en un punto en la superficie directa sobre el centro de la malla de la figura 5.28 para diferentes valores de espesor de la segunda capa

Caso #	ρ_1 $\Omega\text{-m}$	ρ_2 $\Omega\text{-m}$	ρ_3 $\Omega\text{-m}$	H2*=1.4 m		H2*=2.3 m	
				Resistencia Ω	Vc *[V]	Resistencia Ω	Vc* [V]
1	3000	100	60	4.4082	91.7183	5.2222	97.0541
2	3000	100	90	6.3437	134.9865	6.6970	136.4890
3	3000	100	120	8.5748	175.91	8.3961	172.5489
4	3000	100	500	18.3852	538.1488	15.9086	462.2438
5	3000	100	2000	27.7998	937.4338	22.8203	757.2311
6	3000	30	100	4.6301	42.8387	4.1192	37.7709
7	3000	70	100	6.6750	104.0560	6.4136	100.2583
8	3000	500	100	13.2898	731.9169	17.8677	866.1906
9	2000	100	120	9.4429	255.1123	8.2672	250.2128
10	1000	100	120	8.0710	478.597	7.9037	469.3621
11	200	100	120	7.4181	870.9812	5.8553	1706.1

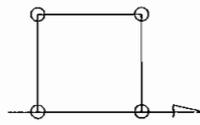
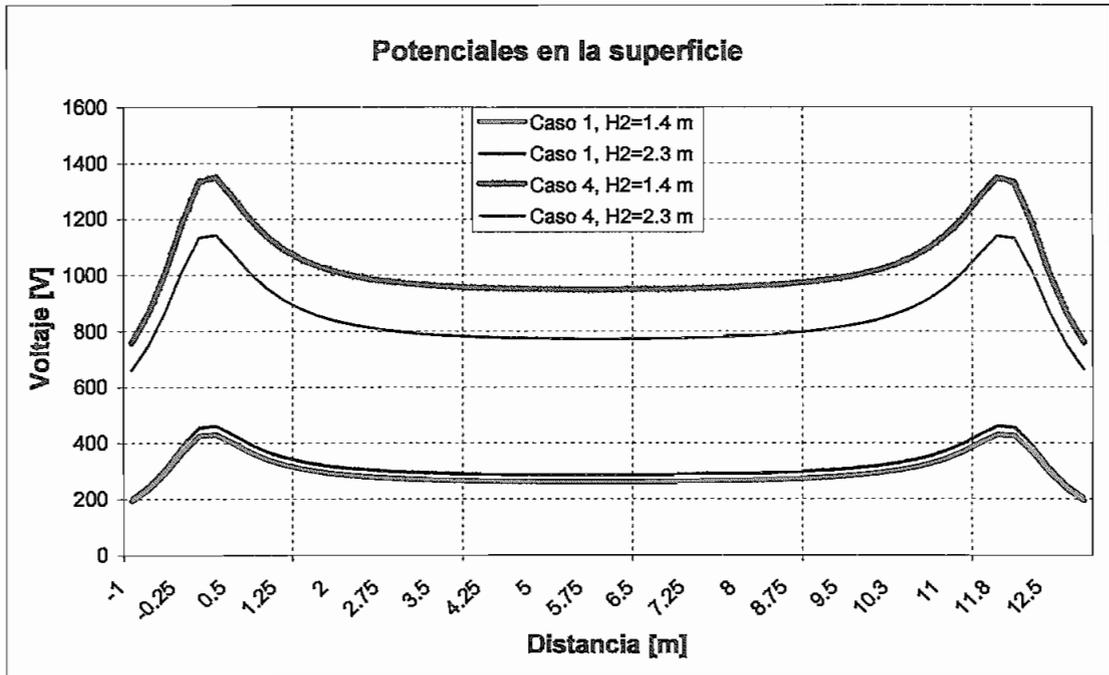
* H1 espesor de la primera capa, H1 =0.12 m

* H2 espesor de la segunda capa

* Vc voltaje en el punto central de la malla

De la tabla 5.7 se observa que a medida que disminuye el espesor de la segunda capa, es decir aumenta el contacto del electrodo con la tercera capa el efecto de esta tiende a ser mayor. Por ejemplo en el caso (5) la resistencia así como el voltaje en la superficie (sobre el centro de la malla) disminuyen a medida que aumenta el espesor de la segunda capa es decir a medida que aumenta el contacto del electrodo sobre la capa más conductiva ($1/\rho_2 > 1/\rho_3$), mientras que en el caso (1), tanto la resistencia como el potencial aumentan a medida que aumenta el espesor de la segunda capa es decir a medida que aumenta el contacto del electrodo con la capa más resistiva ($\rho_2 > \rho_3$).

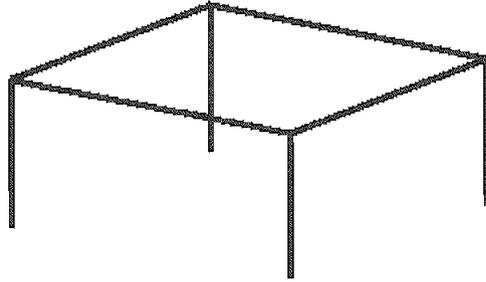
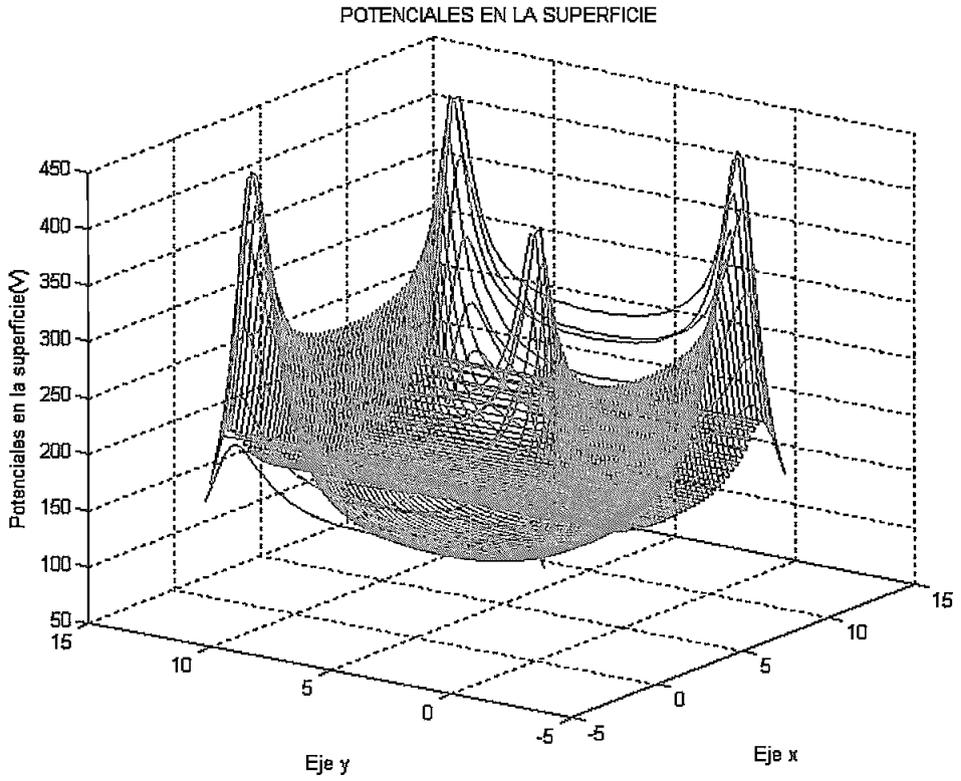
En la figura 5.29 se ha trazado el potencial en la superficie a lo largo de uno de los lados del cuadrado que forma del electrodo, para diferentes casos de la tabla 5.7.



○ varilla enterrada verticalmente

Figura 5.29 Potenciales en la superficie para el electrodo de la figura 5.28, a lo largo de la superficie directa sobre uno de uno de los ejes del cuadrado que forma parte del electrodo (datos caso 1, tabla 5.7).

En la figura 5.30 se ha trazado el potencial en la superficie para el caso 1 de la tabla 5.6



electrodo (figura 5.28)

Figura 5.30 Potenciales en la superficie para el electrodo de la figura 5.28, considerando el área superficial total que abarca el electrodo. (datos del caso 1, tabla 5.6)

5.3 ESTUDIO DE SENSIBILIDAD PARA UNA MALLA CON VARILLAS ENTERRADAS EN UN SUELO NO HOMOGÉNEO

A continuación se considera un suelo de tres capas con el electrodo enterrado en la segunda y en la tercera capa (ver figura 5.31)

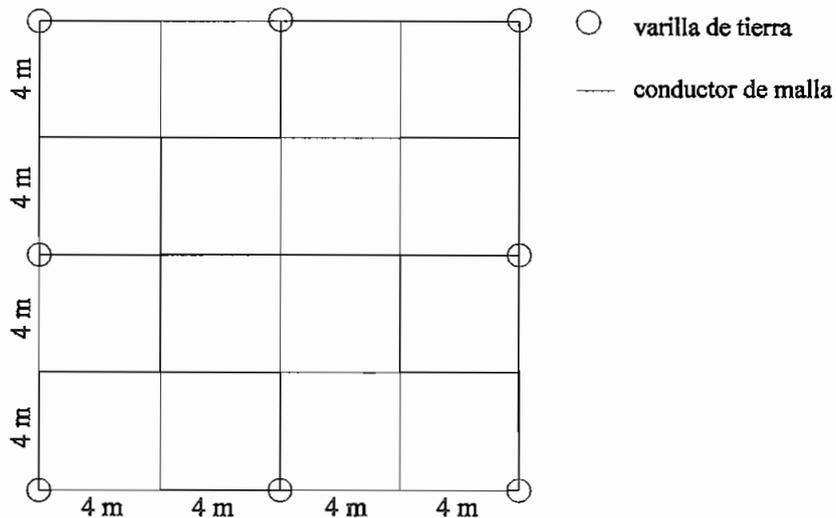


Figura 5.31 Malla uniforme con varillas enterradas en un suelo estratificado

Los datos utilizados son los siguientes:

- diámetro del conductor 14 mm
- la profundidad de enterramiento de malla es de 0.6 m
- la longitud de las varillas enterradas verticalmente es de 2 m
- la corriente descargada por es electrodo es de 1000 A
- el espesor de la primera capa es de 0.12 m (H1)
- el espesor de la segunda capa es de 1.68 m (H2)

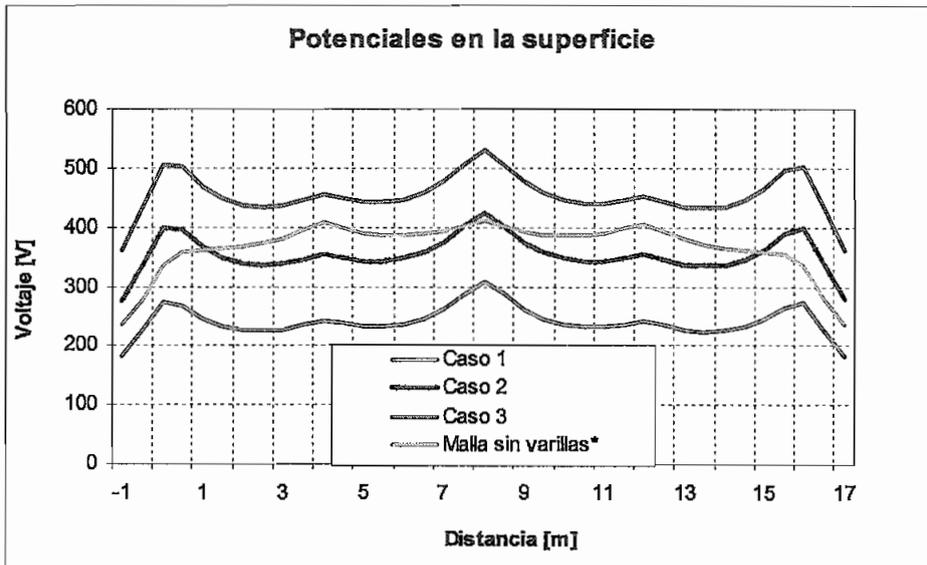
Tabla 5.8 Variación de la resistencia y potenciales en un punto en la superficie directa sobre el centro de la malla de la figura 5.31

Caso #	ρ_1 $\Omega\text{-m}$	ρ_2 $\Omega\text{-m}$	ρ_3 $\Omega\text{-m}$	Resistencia Ω	V_c^* [V]	V_t^* [V]	V_p^* [V]
1	1500	100	60	2.155	273.50	1882.4	36.62
2	1500	100	100	4.897	369.04	4528.9	35.81
3	1500	100	140	6.149	461.07	5687.3	36.87

- * H1 espesor de la primera capa, H1=0.12m
- * H2 espesor de la segunda capa, H2=1.68m
- * V_c voltaje en el punto central de la malla
- * V_t voltaje de toque en el punto central de la malla
- * V_p voltaje de paso en el punto central de la malla

De la tabla anterior se observa que la resistencia aumenta conforme aumenta la resistividad de la tercera capa.

En la figura 5.32 se ha trazado el potencial en la superficie a lo largo de uno de los lados de la malla que forma del electrodo, para los casos de la tabla 5.8



- * Malla sin varillas corresponde a la curva de potenciales a lo largo de uno de los lados de la malla de la figura 5.31, sin considerar las varillas enterradas, y se emplea los datos de resistividad del caso 2 de la tabla 5.8

Figura 5.32 Potenciales en la superficie para la malla de la figura 5.31, a lo largo de uno de los lados sobre la superficie directa de la malla que forma parte del electrodo (casos de la tabla 5.8).

De la figura anterior se observa que los potenciales en la superficie decrecen a medida que decrece la resistividad de la tercera capa.

En la figura 5.33 se ha trazado el potencial en la superficie para el caso 1 de la tabla 5.8

Del grafico 5.33 se aprecia que la mayor elevación de los potenciales en la superficie, se obtiene en los lugares que se encuentran directamente sobre las varillas enterradas

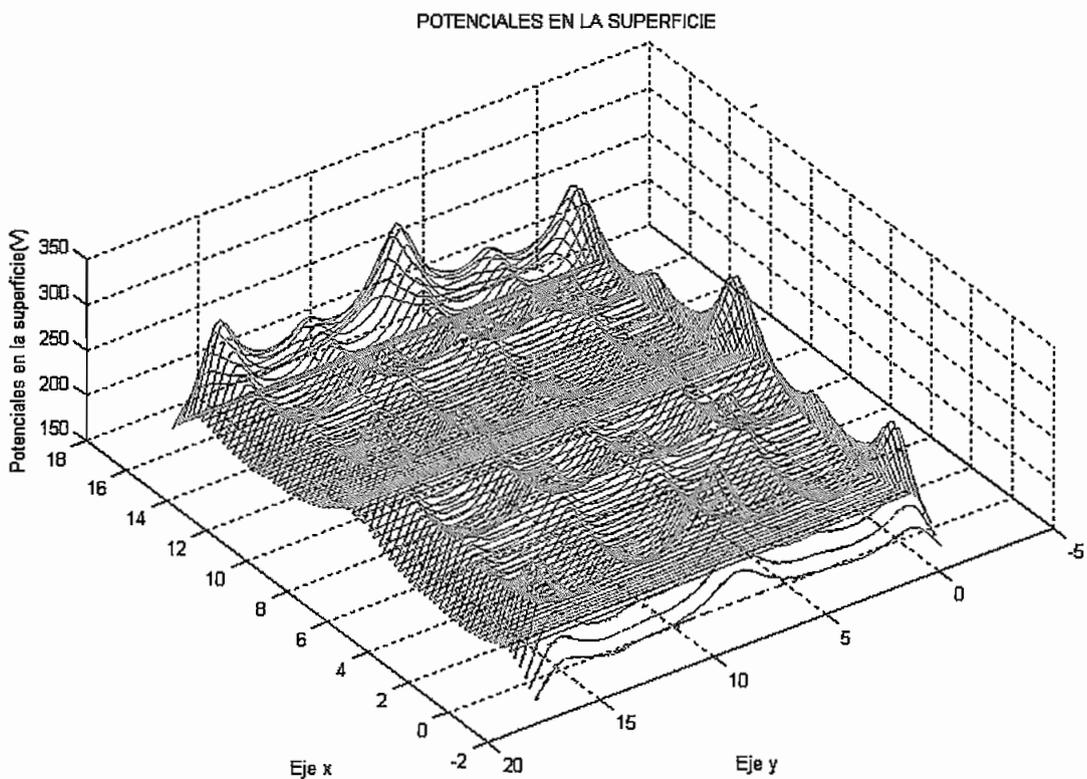


Figura 5.33 Potenciales en la superficie para el electrodo de la figura 5.31, considerando el área superficial total que abarca el electrodo. (datos del caso 1, tabla 5.8)

5.4 ESTUDIO DE SENSIBILIDAD PARA UN ELECTRODO EN FORMA DE ANILLO EN UN SUELO NO HOMOGÉNEO

A continuación se considera un suelo de tres capas con el electrodo enterrado en la segunda capa (ver figura 5.34).

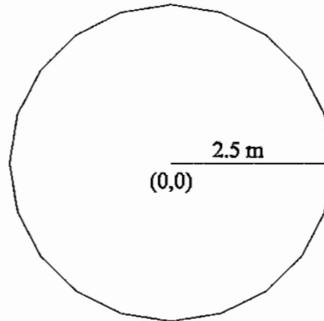
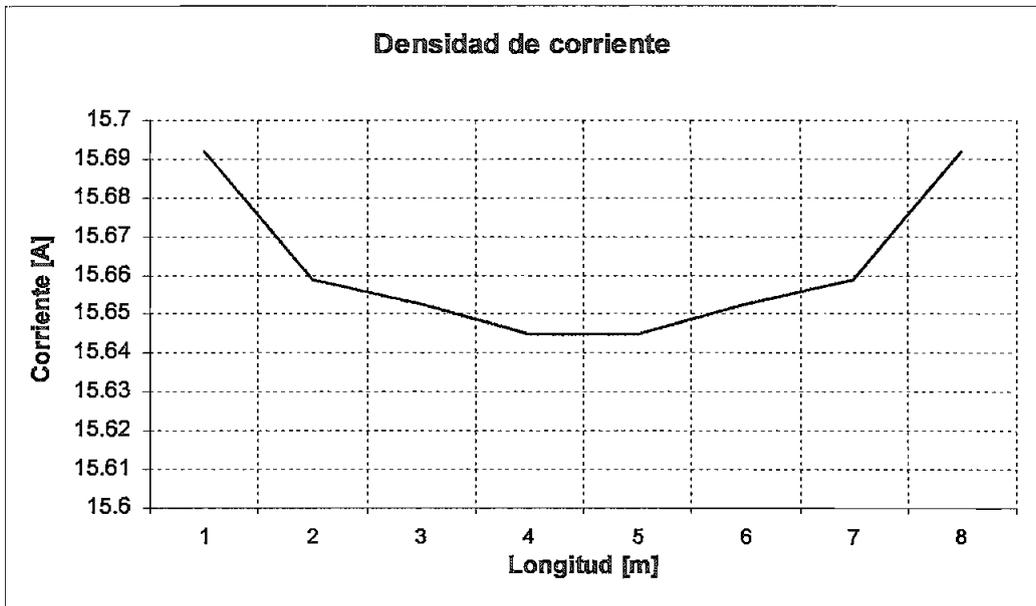


Figura 5.34 Electrodo en forma de anillo en un suelo estratificado

Debido a que el programa AEPT solo trabaja con segmentos rectos la simulación del comportamiento del anillo se lo ha realizado mediante un octágono inscrito en una circunferencia de 5 metros de diámetro.

- diámetro del conductor 14 mm
- la profundidad de enterramiento de malla es de 0.6 m
- la corriente descargada por el electrodo es 1000 A
- el espesor de la primera capa es de 0.12 m (H1)
- el espesor de la segunda capa es de 2 m (H2)



A lo largo de uno de los lados del octágono que me representa al anillo

Figura 5.35 Distribución de corriente para el electrodo de la figura 5.34

En la figura 5.35 se grafica la densidad de corriente para una porción del anillo (en uno de los lados del octágono que lo representa), en esta figura se aprecia que la distribución de corriente es bastante uniforme.

Tabla 5.9 Variación de la resistencia y potenciales en un punto en la superficie directa sobre el centro del electrodo de la figura 5.34

Caso #	ρ_1 $\Omega\text{-m}$	ρ_2 $\Omega\text{-m}$	ρ_3 $\Omega\text{-m}$	Resistencia Ω	V_c^* [V]	V_t^* [V]	V_p^* [V]
1	1500	100	60	15.50	674.65	14833.1	68.26
2	1500	100	100	19.73	883.43	18852.0	69.74
3	1500	100	140	21.85	1058.00	20798.0	71.35

H1 espesor de la primera capa, H1=0.12m

H2 espesor de la segunda capa, H2=2m

* V_c voltaje en el punto central de la malla

* V_t voltaje de toque en el punto central de la malla

* V_p voltaje de paso en el punto central de la malla

De la tabla anterior se observa que la resistencia aumenta conforme aumenta la resistividad de la tercera capa.

En la figura 5.36 se ha trazado el potencial en la superficie a lo largo de una recta que cruza por el centro del electrodo, para los casos de la tabla 5.9

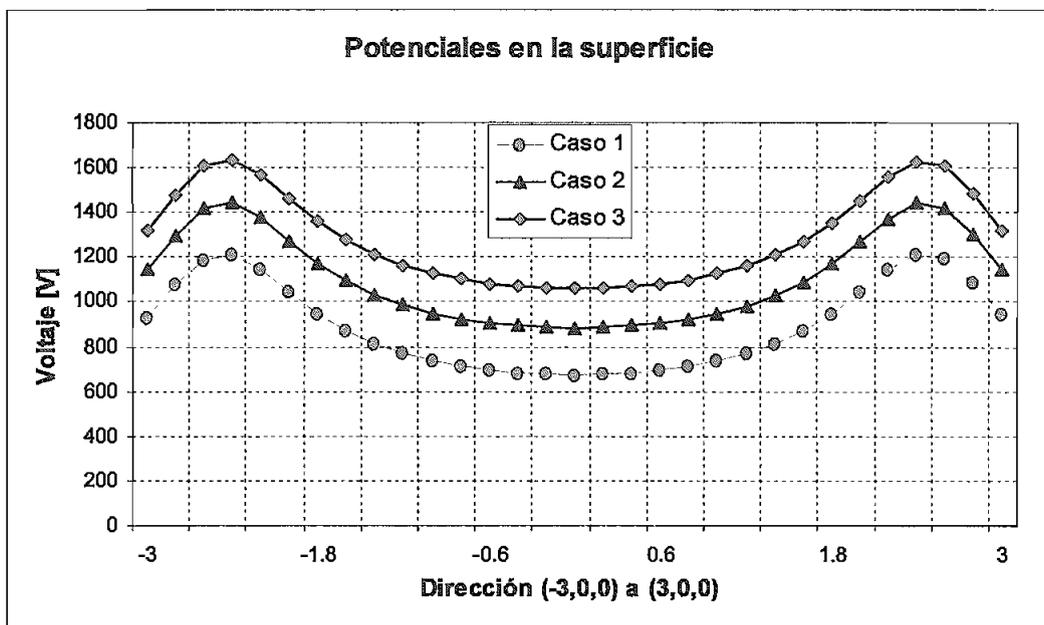


Figura 5.36 Potenciales en la superficie para el electrodo de la figura 5.34, a lo largo de cualquier recta que cruza por el centro del anillo. (para los casos de la tabla 5.9)

De la figura anterior se observa que los potenciales en la superficie decrecen a medida que decrece la resistividad de la tercera capa.

En la figura 5.37 se ha trazado el potencial en superficie para el caso 1 (tabla 5.9).

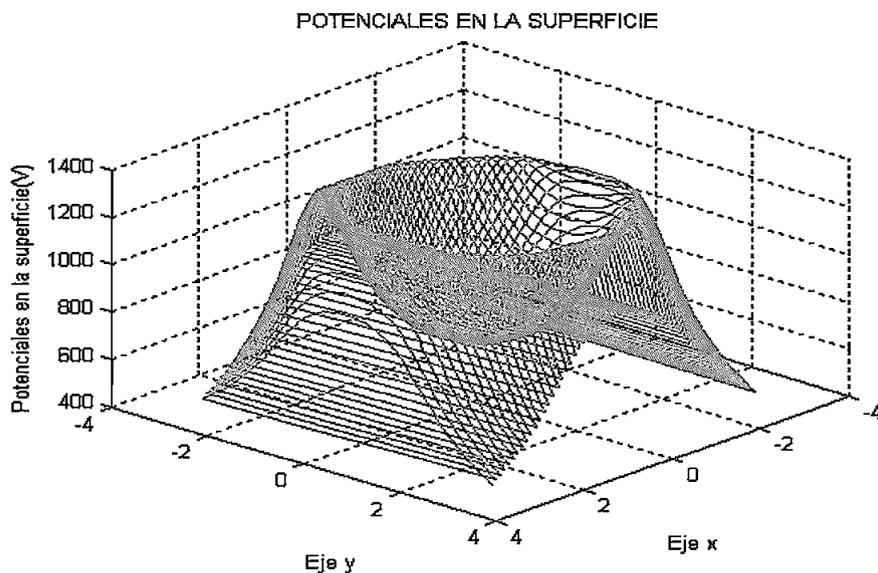


Figura 5.37 Potenciales en la superficie para el electrodo de la figura 5.31, considerando el área superficial total que abarca el electrodo (datos del caso 1, tabla 5.9).

CAPÍTULO VI

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En el presente trabajo se ha desarrollado un modelo matemático para simular el comportamiento de electrodos de puesta a tierra en un suelo no homogéneo de tres capas y se ha elaborado un programa computacional basado en dicho modelo.

El método de las imágenes utilizado para determinar el voltaje debido a la corriente que abandona un electrodo puntual (considerando a este como una fuente puntual de corriente), es una forma sencilla de resolver la cuestión, teniendo claro que cada interfaz representa un cuasi-espejo.

La aplicación del método de los momentos (segmentación del electrodo) es una aproximación válida para evaluar el comportamiento de los electrodos. Y de las simulaciones realizadas se concluye que la segmentación del electrodo (cuya finalidad principal es conocer la distribución de corriente) no tiene mayor influencia en la resistencia de puesta a tierra, mientras que en los potenciales sí influye pero no constituye una influencia significativa.

Las expresiones para evaluar el comportamiento de electrodos de puesta a tierra de este trabajo tienen la ventaja de que la orientación de los segmentos que forman el electrodo pueden estar en cualquier posición relativa lo que facilita la simulación de electrodos no convencionales, por ejemplo el electrodo en forma de anillo planteado en el punto 5.34.

En general se puede decir que para un sistema de suelo uniforme y para un suelo de dos capas cuando la resistividad de la primera capa es menor que de la segunda, tiende a descargar más corriente por los extremos de los conductores, mientras que con una resistividad en la primera capa mayor que la de la segunda

la densidad de corriente tiende a descargar más por las regiones centrales, esto sugiere que para este caso deben existir valores de resistividad de las capas con el que se tenga una densidad de corriente uniforme. El comportamiento de la distribución de corriente en un suelo estratificado se asemeja al del el electrodo en dos capas debido a que el espesor de la primera capa es pequeño y su resistividad es alta, es decir no hace mayor trabajo en despejar la corriente.

El efecto de la profundidad en el enterramiento del electrodo proporciona una reducción marginal en la resistencia y en el voltaje en la superficie, pero esto a un costo relativamente alto, de modo que esta opción no se debe considerar para profundidades superiores a 0.70 m.

La resistencia aumenta siempre que aumenta la resistividad de una de las capas del suelo.

Para un suelo estratificado de tres capas se observa que el potencial en la superficie disminuye a medida que aumenta la resistividad de la primera capa (capa artificial de protección colocada sobre el suelo original). Esto implica que con el deterioro de esta capa (cuando la resistividad baja) se elevan los potenciales en condiciones de falla, por tanto el mantenimiento de esta capa en las condiciones adecuadas es muy beneficioso para la seguridad de las personas.

Los potenciales de paso tienen un comportamiento similar al de los potenciales en la superficie, cuando varía las resistividades de las capas de un suelo estratificado, por ejemplo en caso de un suelo de tres capas el voltaje de paso disminuye a medida que la resistividad de la primera capa aumenta, y crece a medida que la resistividad donde se encuentra aumenta, además, por lo general los puntos donde se tienen los mayores voltajes de paso son en la superficie directa sobre el conductor que forma la malla o electrodo de puesta a tierra.

Para un electrodo inmerso en dos estratos de un suelo no homogéneo se observa que a medida que se tiene el contacto del electrodo con uno u otro estrato el

efecto de estos tiende a ser mayor o menor (sí el electrodo está más inmerso en la segunda capa el efecto de esta es mayor que el de la tercera, y viceversa).

Las puestas a tierra con varillas enterradas tienen el inconveniente de que en la superficie directa sobre estas, el potencial se eleva, lo cual puede ser peligroso en caso de cámaras de transformación para las personas que se encuentren en los alrededores, ya que pueden estar sometidos a fuerte tensiones de paso y de contacto si tocan alguna estructura que está conectada a tierra lejana.

El programa AEPT se ha elaborado en MATLAB y ha sido escogido debido a su facilidad con la operación de matrices y gráficos, pero tiene inconveniente en el tiempo de ejecución del programa es lento en comparación con el código equivalente desarrollado en C/C++ o Fortran, por tanto se recomienda para trabajos posteriores del tema utilizar alguna herramienta computacional como las señaladas.

APÉNDICE A

DESARROLLO DE LAS EXPRESIONES DE VOLTAJE EN UN PUNTO DEBIDO A LA CORRIENTE QUE ABANDONA UN ELECTRODO PUNTUAL EN SUELOS ESTRATIFICADOS

A.1 SUELO DE DOS CAPAS

A continuación se considera el sistema de referencia XYZ donde el plano XY coincide con la superficie de la tierra y el eje Z está dirigido hacia el interior de la tierra (ver figura A.1).

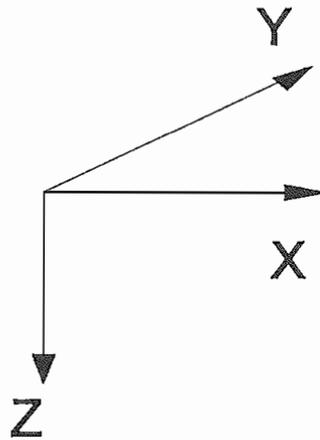


Figura A.1 Sistema de referencia XYZ

Las coordenadas del electrodo j ubicado en la capa de resistividad ρ_1 respecto del sistema de referencia son (X_j, Y_j, Z_j) , se desea determinar el potencial en el punto P de coordenadas (X_o, Y_o, Z_o) ubicado en la capa de resistividad ρ_1 producido por el electrodo puntual.

El electrodo j y su imagen son reflejados en la interfaz entre las dos capas del suelo como si electrodos adicionales (imágenes) inyectaran corrientes de KI amperios.

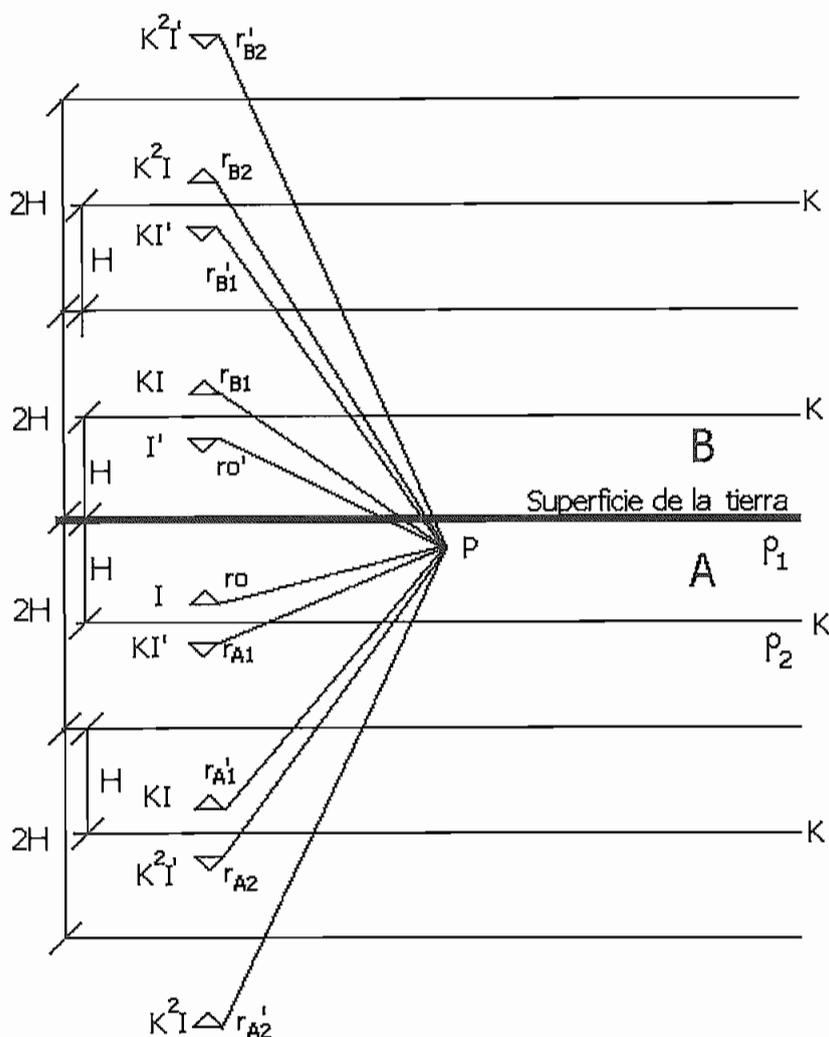


Figura A.2 Sistema equivalente de imágenes para la determinación de potencial en un punto debido a la corriente que sale por un electrodo puntual, ambos están inmersos en la primera capa de un suelo estratificado de dos capas

Continuando con el proceso de imágenes sucesivas y con base a la ecuación de potencial para un electrodo puntual debajo de la superficie de la tierra, se obtiene:

$$V(P) = \frac{\rho_1 I}{4\pi} \left(\frac{1}{r_o} + \frac{1}{r_o'} + \frac{K}{r_A} + \frac{K}{r_A'} + \frac{K}{r_B} + \frac{K}{r_B'} + \frac{K^2}{r_{A2}} + \frac{K^2}{r_{A2}'} + \frac{K^2}{r_{B2}} + \frac{K^2}{r_{B2}'} + \dots \right) \quad (\text{A.1})$$

La expresión anterior puede ser escrita como:

$$V(P) = \frac{\rho_1 I}{4 \cdot \pi} \left\{ \left(\frac{1}{r_o} + \frac{1}{r_o'} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} K^n \left(\frac{1}{r_{An}} + \frac{1}{r_{An}'} + \frac{1}{r_{Bn}} + \frac{1}{r_{Bn}'} \right) \right\} \quad (\text{A.2})$$

donde:

$$r_o = \sqrt{(X_j - X_o)^2 + (Y_j - Y_o)^2 + (Z_j - Z_o)^2} \quad (\text{A.3})$$

$$r_o' = \sqrt{(X_j - X_o)^2 + (Y_j - Y_o)^2 + (Z_j + Z_o)^2} \quad (\text{A.4})$$

$$r_{An} = \sqrt{(X_j - X_o)^2 + (Y_j - Y_o)^2 + ((Z_j + Z_o) - 2nH)^2} \quad (\text{A.5})$$

$$r_{An}' = \sqrt{(X_j - X_o)^2 + (Y_j - Y_o)^2 + ((Z_j - Z_o) + 2nH)^2} \quad (\text{A.6})$$

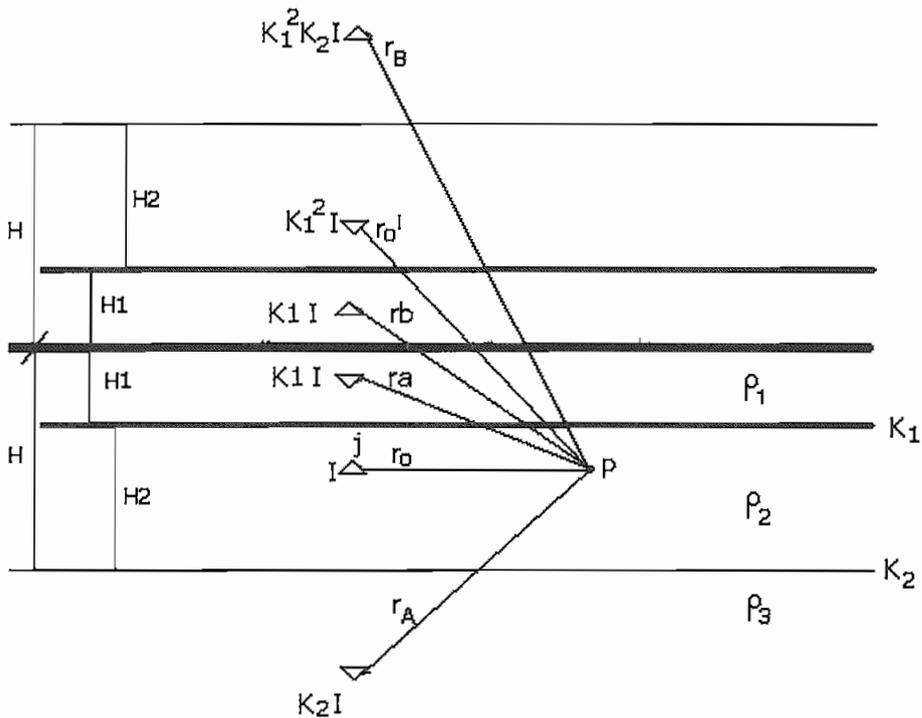
$$r_{Bn} = \sqrt{(X_j - X_o)^2 + (Y_j - Y_o)^2 + ((Z_j - Z_o) - 2nH)^2} \quad (\text{A.7})$$

$$r_{Bn}' = \sqrt{(X_j - X_o)^2 + (Y_j - Y_o)^2 + ((Z_j + Z_o) + 2nH)^2} \quad (\text{A.8})$$

A.2 SUELO DE TRES CAPAS

A continuación se considera el sistema de referencia XYZ donde el plano XY coincide con la superficie de la tierra y el eje Z está dirigido hacia el interior de la tierra (ver figura A.1).

Las coordenadas del electrodo j ubicado en la capa de resistividad ρ_2 respecto de este sistema son (X_j, Y_j, Z_j) , se desea determinar el potencial en el punto P de coordenadas (X_o, Y_o, Z_o) ubicado en la capa de resistividad ρ_2 producido por el electrodo puntual.



(a) Sistema equivalente de imágenes; considerando bi-imágenes (imagen de la imagen),

Continuando con el proceso de imágenes sucesivas y con base a la ecuación de potencial para un electrodo puntual en un suelo estratificado, se obtiene[6]:

$$V(P) = \frac{\rho_2 I}{4\pi} \left(\frac{1}{r_o} + \frac{K_1^2}{r_d} + \frac{K_2}{r_A} + \frac{K_2}{r_A'} + \frac{K_1^2 K_2}{r_B} + \frac{K_1^2 K_2}{r_B'} + \frac{K_2}{r_{A2}} + \frac{K_1^2 K_2^2}{r_{A2}'} + \frac{K_1^2 K_2^2}{r_{B2}} + \frac{K_1^4 K_2^2}{r_{B2}'} + \right. \\ \left. + \frac{K_1}{r_a} + \frac{K_2}{r_a'} + \frac{K_1}{r_b} + \frac{K_1^2 K_2}{r_b'} + \frac{K_2}{r_{a2}} + \frac{K_1 K_2^2}{r_{a2}'} + \frac{K_1^2 K_2}{r_{b2}} + \frac{K_1^3 K_2^2}{r_{b2}'} + \dots \right) \quad (\text{A.9})$$

expresión que puede ser escrita como:

$$V(P) = \frac{\rho_2 I}{4 \cdot \pi} \left\{ \left(\frac{1}{r_o} + \frac{K_1^2}{r_o'} \right) + \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} K_2^n \left(\frac{K_1^{n-1}}{r_{An}} + \frac{K_1^{n-1}}{r_{An}'} + \frac{K_1^{n+1}}{r_{Bn}} + \frac{K_1^{n+1}}{r_{Bn}'} \right) + \right. \\ \left. + \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} K_2^n \left(\frac{K_1^{n-2}}{r_{An}} + \frac{K_1^n}{r_{An}'} + \frac{K_1^n}{r_{Bn}} + \frac{K_1^{n+2}}{r_{Bn}'} \right) + \right. \\ \left. + \sum_{n=1,2,3,\dots}^{\infty} \left(\frac{K_1^{|n-2|} K_2^{n-1}}{r_{an}} + \frac{K_1^{n-1} K_2^n}{r_{an}'} + \frac{K_1^n K_2^{n-1}}{r_{bn}} + \frac{K_1^{n+1} K_2^n}{r_{bn}'} \right) \right\} \quad (\text{A.10})$$

donde:

$$r_o = \sqrt{(X_j - X_o)^2 + (Y_j - Y_o)^2 + (Z_j - Z_o)^2} \quad (\text{A.11})$$

$$r_o' = \sqrt{(X_j - X_o)^2 + (Y_j - Y_o)^2 + (Z_j + Z_o)^2} \quad (\text{A.12})$$

$$r_{an} = \sqrt{(X_j - X_o)^2 + (Y_j - Y_o)^2 + ((Z_j + Z_o) - 2(H_1 + (n-1)H))^2} \quad (\text{A.13})$$

$$r_{an}' = \sqrt{(X_j - X_o)^2 + (Y_j - Y_o)^2 + ((Z_j - Z_o) + 2(H_2 + (n-1)H))^2} \quad (\text{A.14})$$

$$r_{bn} = \sqrt{(X_j - X_o)^2 + (Y_j - Y_o)^2 + ((Z_j - Z_o) - 2(H_1 + (n-1)H))^2} \quad (\text{A.15})$$

$$r_{bn}' = \sqrt{(Xj - Xo)^2 + (Yj - Yo)^2 + ((Zj + Zo) + 2(H2 + (n-1)H))^2} \quad (\text{A.16})$$

$$r_{An} = \sqrt{(Xj - Xo)^2 + (Yj - Yo)^2 + ((Zj + Zo) - 2nH)^2} \quad (\text{A.17})$$

$$r_{An}' = \sqrt{(Xj - Xo)^2 + (Yj - Yo)^2 + ((Zj - Zo) + 2nH)^2} \quad (\text{A.18})$$

$$r_{Bn} = \sqrt{(Xj - Xo)^2 + (Yj - Yo)^2 + ((Zj - Zo) - 2nH)^2} \quad (\text{A.19})$$

$$r_{Bn}' = \sqrt{(Xj - Xo)^2 + (Yj - Yo)^2 + ((Zj + Zo) + 2nH)^2} \quad (\text{A.20})$$

y

$$H = H1 + H2 \quad (\text{A.21})$$

De manera análoga se puede determinar las expresiones cuando el electrodo y el punto donde se requiere el potencial, se encuentran en las diferentes capas del suelo estratificado.

APÉNDICE B

VALORES DE CONSTANTES DE LA EXPRESIÓN 2.27

Expresión (2.27):

$$\begin{aligned}
 dV(P) = i \cdot cte_{rsis} & \left\{ \left(\frac{cte_{KO}}{ro} + \frac{cte_{KO'}}{ro'} \right) + \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \left(\frac{cte_{K11}}{r_{An}} + \frac{cte_{K12}}{r_{An}'} + \frac{cte_{K13}}{r_{Bn}} + \frac{cte_{K14}}{r_{Bn}'} \right) \right\} \cdot dl + \\
 & + i \cdot cte_{rsis} \left\{ \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \left(\frac{cte_{K21}}{r_{An}} + \frac{cte_{K22}}{r_{An}'} + \frac{cte_{K23}}{r_{Bn}} + \frac{cte_{K24}}{r_{Bn}'} \right) \right\} \cdot dl + \\
 & + i \cdot cte_{rsis} \left\{ \sum_{n=1,2,3,\dots}^{\infty} \left(\frac{cte_{K31}}{r_{an}} + \frac{cte_{K32}}{r_{an}'} + \frac{cte_{K33}}{r_{bn}} + \frac{cte_{K34}}{r_{bn}'} \right) \right\} \cdot dl
 \end{aligned}
 \tag{2.27}$$

Los valores de las constantes de la expresión 2.27 dependen del estrato en el que está el punto donde se requiera el potencial, así como el electrodo por donde abandona la corriente, en las tablas de a continuación se presentan las constantes para los diferentes casos que se pueden dar.

Tabla B.1 Punto en la capa de resistividad ρ_2 y electrodo en la capa de resistividad ρ_2

$cte_{rsis} = \frac{\rho_2}{4 \cdot \pi}$	$cte_{KO} = 1$	$cte_{KO'} = K_1^2$
$cte_{K11} = K_1^{n-1} K_2^n$	$cte_{K21} = K_1^{n-2} K_2^n$	$cte_{K31} = K_1^{ n-2 } K_2^{n-1}$
$cte_{K12} = K_1^{n-1} K_2^n$	$cte_{K22} = K_1^n \cdot K_2^n$	$cte_{K32} = K_1^{n-1} K_2^n$
$cte_{K13} = K_1^{n+1} K_2^n$	$cte_{K23} = K_1^n \cdot K_2^n$	$cte_{K33} = K_1^n K_2^{n-1}$
$cte_{K14} = K_1^{n+1} K_2^n$	$cte_{K24} = K_1^{n+2} K_2^n$	$cte_{K34} = K_1^{n+1} K_2^n$

Tabla B.2 Punto en la capa de resistividad ρ_3 y electrodo en la capa de resistividad ρ_3

$cte_{rsis} = \frac{\rho_3}{4\pi}$	$cte_{KO} = I$	$cte_{KO'} = (K_1 K_2)^2$
$cte_{K11} = K_1^{n-1} K_2^{ n-2 }$	$cte_{K21} = (K_1 K_2)^{n-2}$	$cte_{K31} = (K_1 K_2)^{ n-2 }$
$cte_{K12} = K_1^{n-1} K_2^n$	$cte_{K22} = (K_1 K_2)^n$	$cte_{K32} = (K_1 K_2)^{n-1}$
$cte_{K13} = K_1^{n+1} K_2^n$	$cte_{K23} = (K_1 K_2)^n$	$cte_{K33} = (K_1 K_2)^n$
$cte_{K14} = K_1^{n+1} K_2^{n+2}$	$cte_{K24} = (K_1 K_2)^{n+2}$	$cte_{K34} = (K_1 K_2)^{n+1}$

Tabla B.3 Punto en la capa de resistividad ρ_1 y electrodo en la capa de resistividad ρ_2

$cte_{rsis} = \frac{\rho_2}{4 \cdot \pi}$	$cte_{KO} = K_1$	$cte_{KO'} = K_1$
$cte_{K11} = K_1^n K_2^n$	$cte_{K21} = K_1^{n-1} K_2^n$	$cte_{K31} = (K_1 K_2)^{n-1}$
$cte_{K12} = K_1^n K_2^n$	$cte_{K22} = K_1^{n+1} K_2^n$	$cte_{K32} = (K_1 K_2)^n$
$cte_{K13} = K_1^n K_2^n$	$cte_{K23} = K_1^{n-1} K_2^n$	$cte_{K33} = (K_1 K_2)^{n-1}$
$cte_{K14} = K_1^n K_2^n$	$cte_{K24} = K_1^{n+1} K_2^n$	$cte_{K34} = (K_1 K_2)^n$

Tabla B.4 Punto en la capa de resistividad ρ_1 y electrodo en la capa de resistividad ρ_3

$cte_{rsis} = \frac{\rho_3}{4\pi}$	$cte_{KO} = K_1 K_2$	$cte_{KO'} = K_1 K_2$
$cte_{K11} = K_1^n K_2^{n-1}$	$cte_{K21} = (K_1 K_2)^{n-1}$	$cte_{K31} = (-K_1 K_2)^{n-1}$
$cte_{K12} = K_1^n K_2^{n-1}$	$cte_{K22} = (K_1 K_2)^{n-1}$	$cte_{K32} = (-K_1 K_2)^n$
$cte_{K13} = K_1^n K_2^{n+1}$	$cte_{K23} = (K_1 K_2)^{n+1}$	$cte_{K33} = (-K_1 K_2)^{n-1}$
$cte_{K14} = K_1^n K_2^{n+1}$	$cte_{K24} = (K_1 K_2)^{n+1}$	$cte_{K34} = (-K_1 K_2)^n$

Tabla B.5 Punto en la capa de resistividad ρ_2 y electrodo en la capa de resistividad ρ_3

$cte_{rsis} = \frac{\rho_3}{4\pi}$	$cte_{KO} = K_2$	$cte_{KO'} = K_1^2 K_2$
$cte_{K11} = (K_1 K_2)^{n-1}$	$cte_{K21} = K_1^{n-2} K_2^{n-1}$	$cte_{K31} = K_1^{ n-2 } (-K_2)^{n-1}$
$cte_{K12} = K_1^{n-1} K_2^{n+1}$	$cte_{K22} = K_1^n K_2^{n+1}$	$cte_{K32} = K_1^{n-1} (-K_2)^n$
$cte_{K13} = K_1^{n+1} K_2^{n-1}$	$cte_{K23} = K_1^n K_2^{n-1}$	$cte_{K33} = K_1^n (-K_2)^{n-1}$
$cte_{K14} = (K_1 K_2)^{n+1}$	$cte_{K24} = K_1^{n+2} K_2^{n+1}$	$cte_{K34} = K_1^{n+1} (-K_2)^n$

Tabla B.6 Punto en la capa de resistividad ρ_3 y electrodo en la capa de resistividad ρ_2

$cte_{rsis} = \frac{\rho_2}{4 \cdot \pi}$	$cte_{KO} = K_2$	$cte_{KO'} = K_1^2 K_2$
$cte_{K11} = (K_1 K_2)^{n-1}$	$cte_{K21} = K_1^{n-2} K_2^{n-1}$	$cte_{K31} = (K_1 K_2)^{ n-2 }$
$cte_{K12} = (K_1 K_2)^{n-1}$	$cte_{K22} = K_1^n K_2^{n-1}$	$cte_{K32} = (K_1 K_2)^{n-1}$
$cte_{K13} = (K_1 K_2)^{n+1}$	$cte_{K23} = K_1^n K_2^{n+1}$	$cte_{K33} = (K_1 K_2)^n$
$cte_{K14} = (K_1 K_2)^{n+1}$	$cte_{K24} = K_1^{n+2} K_2^{n+1}$	$cte_{K34} = (K_1 K_2)^{n+1}$

APÉNDICE C

TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS

Sea el punto P de coordenadas X, Y, Z en el sistema de referencia XYZ . Se determina las coordenadas de dicho punto en el sistema de referencia UVW , el cual ha sido trasladado al punto O' de coordenadas X_1, Y_1, Z_1 , y rotado respecto del sistema original (ver figura C.1).

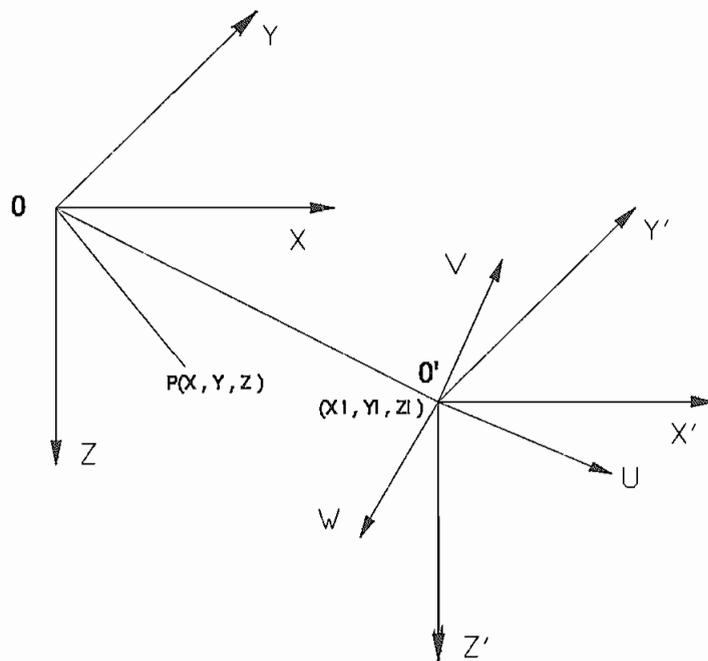


Figura C.1 Sistema de referencia

El sistema de referencia $X'Y'Z'$ es paralelo al sistema XYZ pero trasladado al nuevo origen. En este sistema las coordenadas del punto P son $X', Y',$ y Z'

Por efecto de la traslación se cumple:

$$X = X' + X_1 \quad Y = Y' + Y_1 \quad Z = Z' + Z_1 \quad (\text{C.1})$$

Se establece como notación lo siguiente:

$\alpha_1 \beta_1 \gamma_1$ los ángulos directores de **U** respecto a **XYZ** o **X'Y'Z'**

$\alpha_2 \beta_2 \gamma_2$ los ángulos directores de **V** respecto a **XYZ** o **X'Y'Z'**

$\alpha_3 \beta_3 \gamma_3$ los ángulos directores de **W** respecto a **XYZ** o **X'Y'Z'**

De la notación anterior se deduce que:

$\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ los ángulos directores de **X** o **X'** respecto a **UVW**

$\beta_1 \beta_2 \beta_3$ los ángulos directores de **Y** o **Y'** respecto a **UVW**

$\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$ los ángulos directores de **Z** o **Z'** respecto a **UVW**

La forma normal de la ecuación del planos es:

$$A \cos \varpi_1 + B \cos \varpi_2 + C \cos \varpi_3 - D = 0 \quad (\text{C.2})$$

donde D es la longitud de la normal trazada por el origen al plano, ϖ_1 , ϖ_2 y ϖ_3 son los ángulos directores de dicha normal dirigida del origen hacia el plano y A , B y C son las coordenadas de un punto cualquiera que pertenezca al plano.

Con la consideración anterior a continuación se escribe las ecuaciones de los planos **Y'Z'**, **X'Z'** y **X'Y'** en su forma normal respecto del sistema **UVW**

La ecuación del plano **Y'Z'** en el sistema de referencia **UVW** es:

$$U \cos \alpha_1 + V \cos \alpha_2 + W \cos \alpha_3 - X' = 0' \quad (\text{C.3})$$

La ecuación del plano **X'Z'** en el sistema **UVW** es:

$$U \cos \beta_1 + V \cos \beta_2 + W \cos \beta_3 - Y' = 0' \quad (\text{C.4})$$

La ecuación del plano $X'Y'$ en el sistema UVW es:

$$U \cos \gamma_1 + V \cos \gamma_2 + W \cos \gamma_3 - Z' = 0' \quad (\text{C.5})$$

Las expresiones B3, B4 y B5 pueden ser escritas en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \alpha_2 & \cos \alpha_3 \\ \cos \beta_1 & \cos \beta_2 & \cos \beta_3 \\ \cos \gamma_1 & \cos \gamma_2 & \cos \gamma_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} \quad (\text{C.6})$$

Reemplazando la ecuación B1 en B6 se obtiene finalmente la ecuación para pasar del sistema UVW al XYZ .

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \alpha_2 & \cos \alpha_3 \\ \cos \beta_1 & \cos \beta_2 & \cos \beta_3 \\ \cos \gamma_1 & \cos \gamma_2 & \cos \gamma_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix} \quad (\text{C.7})$$

De forma análoga se obtiene la ecuación para pasar del sistema XYZ al UVW

$$\begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \beta_1 & \cos \gamma_1 \\ \cos \alpha_2 & \cos \beta_2 & \cos \gamma_2 \\ \cos \alpha_3 & \cos \beta_3 & \cos \gamma_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X - X_i \\ Y - Y_i \\ Z - Z_i \end{bmatrix} \quad (\text{C.8})$$

Los cósenos directores de los ejes del sistema UVW respecto del sistema XYZ satisfacen las siguientes relaciones.

$$\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \beta_1 + \cos^2 \gamma_1 = 1 \quad (\text{a})$$

$$\cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \beta_2 + \cos^2 \gamma_2 = 1 \quad (\text{b})$$

$$\cos^2 \alpha_3 + \cos^2 \beta_3 + \cos^2 \gamma_3 = 1 \quad (\text{c})$$

(C.9)

Además, como los nuevos ejes UVW son perpendiculares entre sí, también se verifica:

$$\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 = 0 \quad (\text{a})$$

$$\cos \alpha_1 \cos \alpha_3 + \cos \beta_1 \cos \beta_3 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_3 = 0 \quad (b)$$

$$\cos \alpha_2 \cos \alpha_3 + \cos \beta_2 \cos \beta_3 + \cos \gamma_2 \cos \gamma_3 = 0 \quad (c)$$

(C.10)

Puesto que en las expresiones B7 y B8 se tienen nueve cósenos directores y solo se tiene seis relaciones entre ellos indicadas en las ecuaciones B9 y B10. Para poder determinar sus valores se tiene que definir la rotación del sistema UVW de tal manera que el eje V del nuevo sistema permanezca sobre el plano X'Y' como se indica en la figura C.2.

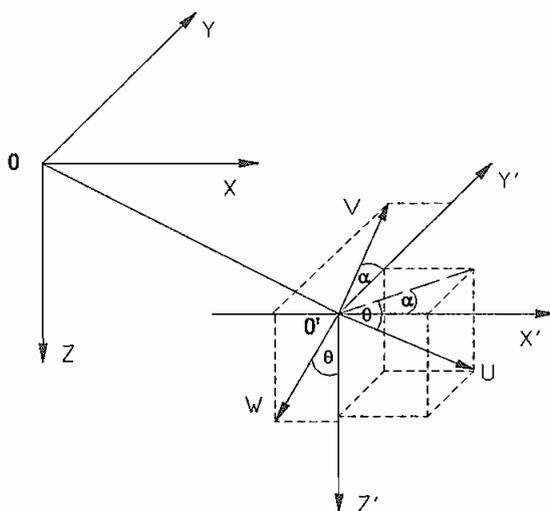


Figura C.2 Definición de la rotación del sistema UVW

Sobre la base de esta definición se puede concluir que:

$$\alpha_2 = \alpha + \frac{\pi}{2} \quad \beta_2 = \alpha \quad \gamma_2 = \frac{\pi}{2} \quad \gamma_3 = \theta$$

(C.11)

donde α es el ángulo que forma la proyección del eje U en el plano X'Y' con el eje X' y θ es el ángulo que forma el eje U conductor con el plano X'Y'.

Remplazando las expresiones B.11 en B.9 y en B.10 y resolviendo se obtiene:

$$\cos \alpha_1 = \cos \theta \cos \alpha \quad \cos \alpha_2 = -\sin \alpha \quad \cos \alpha_3 = -\sin \theta \cos \alpha$$

$$\cos \beta_1 = \cos \theta \sin \alpha \quad \cos \beta_2 = \cos \alpha \quad \cos \beta_3 = -\sin \theta \sin \alpha$$

$$\cos \gamma_1 = \sin \theta \quad \cos \gamma_2 = 0 \quad \cos \gamma_3 = \cos \theta$$

(C.12)

Finalmente las ecuaciones de transformación toman la forma:

Para pasar del sistema **XYZ** al sistema **UVW**

$$\begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \alpha & \cos \theta \cdot \sin \alpha & \sin \theta \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ -\sin \theta \cos \alpha & -\sin \theta \cdot \sin \alpha & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X - X_i \\ Y - Y_i \\ Z - Z_i \end{bmatrix} \quad (\text{C.13})$$

Para pasar del sistema **UVW** al sistema **XYZ**

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cdot \cos \alpha & -\sin \alpha & -\sin \theta \cdot \cos \alpha \\ \cos \theta \cdot \sin \alpha & \cos \alpha & -\sin \theta \cdot \sin \alpha \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix} \quad (\text{C.14})$$

APÉNDICE D

INTEGRACIÓN DE LA EXPRESIÓN PARA DETERMINAR EL POTENCIAL QUE INDUCE UN CONDUCTOR LINEAL EN UN PUNTO

La expresión para determinar el potencial que un conductor lineal induce sobre un punto es:

$$\begin{aligned}
 V(P) = i \cdot cte_{rsis} \int_0^{U_f} & \left\{ \left(\frac{cte_{KO}}{ro} + \frac{cte_{KO'}}{ro'} \right) + \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \left(\frac{cte_{K11}}{r_{An}} + \frac{cte_{K12}}{r_{An'}} + \frac{cte_{K13}}{r_{Bn}} + \frac{cte_{K14}}{r_{Bn'}} \right) \right\} \cdot dU + \\
 & + i \cdot cte_{rsis} \int_0^{U_f} \left\{ \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \left(\frac{cte_{K21}}{r_{An}} + \frac{cte_{K22}}{r_{An'}} + \frac{cte_{K23}}{r_{Bn}} + \frac{cte_{K24}}{r_{Bn'}} \right) \right\} \cdot dU + \\
 & + i \cdot cte_{rsis} \int_0^{U_f} \left\{ \sum_{n=1,2,3,\dots}^{\infty} \left(\frac{cte_{K31}}{r_{an}} + \frac{cte_{K32}}{r_{an'}} + \frac{cte_{K33}}{r_{bn}} + \frac{cte_{K34}}{r_{bn'}} \right) \right\} \cdot dU
 \end{aligned}
 \tag{2.45}$$

De una manera general se puede decir que los términos a integrar tienen la forma:

$$\int_0^{U_f} \frac{1}{\left[(U_j - a)^2 + b + c \right]^{\frac{1}{2}}} \cdot dU_j
 \tag{D.1}$$

donde a, b y c dependen de cada término en particular de la ecuación 2.45

Mediante sustitución:

$$U_j - a = \left[b^2 + c^2 \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \tan \phi
 \tag{D.2}$$

Se obtiene:

$$\int_0^{U_f} \frac{1}{[(U_j - a)^2 + b^2 + c^2]^{\frac{1}{2}}} \cdot dU_j = \ln \left[\frac{U_f - a + [(U_f - a)^2 + b^2 + c^2]^{\frac{1}{2}}}{-a + [a^2 + b^2 + c^2]^{\frac{1}{2}}} \right] \quad (D.3)$$

La expresión anterior puede re-escribirse cómo se indica a continuación:

$$\ln \left[\frac{U_f - a + [(U_f - a)^2 + b^2 + c^2]^{\frac{1}{2}}}{-a + [a^2 + b^2 + c^2]^{\frac{1}{2}}} \right] = a \sinh \left[\frac{U_f - a}{[b^2 + c^2]^{\frac{1}{2}}} \right] + a \sinh \left[\frac{a}{[b^2 + c^2]^{\frac{1}{2}}} \right] \quad (D4)$$

Remplazando los valores correspondientes en la expresión anterior se obtiene la expresión del potencial inducido en un punto debido a la corriente que abandona un conductor lineal (expresión 2.46).

APÉNDICE E

DETALLES DE LA EXPRESIÓN 2.46

Expresión del potencial inducido en un punto debido a la corriente que abandona un conductor lineal:

$$\begin{aligned}
 V(P) = i \cdot cte_{rsis} \left\{ cte_{KO} \cdot fo + cte_{KO'} \cdot fo' + \sum_{n=1,3,..}^{\infty} cte_{K11} \cdot f_{An} + cte_{K12} \cdot f_{An'} + cte_{K13} \cdot f_{Bn'} + \right. \\
 \left. + cte_{K14} \cdot f_{Bn'} + \sum_{n=2,4,..}^{\infty} cte_{K21} \cdot f_{An} + cte_{K22} \cdot f_{An'} + cte_{K23} \cdot f_{Bn'} + cte_{K24} \cdot f_{Bn'} + \right. \\
 \left. + \sum_{n=1,2,3,..}^{\infty} cte_{K31} \cdot f_{an} + cte_{K32} \cdot f_{an'} + cte_{K33} \cdot f_{bn'} + cte_{K34} \cdot f_{bn'} \right\}
 \end{aligned} \tag{2.46}$$

donde:

$$fo = a \sinh \left(\frac{L - Uo}{[Vo^2 + Wo^2]^{\frac{1}{2}}} \right) + a \sinh \left(\frac{Uo}{[Vo^2 + Wo^2]^{\frac{1}{2}}} \right) \tag{E.1}$$

$$\begin{aligned}
 fo' = a \sinh \left(\frac{L - (Uo \cos 2\theta - Wo \cdot \sin 2\theta - 2Zi \cdot \sin \theta)}{[Vo^2 + (Uo \cdot \sin 2\theta + Wo \cos 2\theta + 2Zi \cos \theta)^2]^{\frac{1}{2}}} \right) + \\
 + a \sinh \left(\frac{(Uo \cos 2\theta - Wo \cdot \sin 2\theta - 2Zi \cdot \sin \theta)}{[Vo^2 + (Uo \cdot \sin 2\theta + Wo \cos 2\theta + 2Zi \cos \theta)^2]^{\frac{1}{2}}} \right)
 \end{aligned} \tag{E.2}$$

$$\begin{aligned}
 f_{An} = a \sinh \left(\frac{L - (Uo \cos 2\theta - Wo \cdot \sin 2\theta - (2Zi - 2nH) \cdot \sin \theta)}{[Vo^2 + (Uo \cdot \sin 2\theta + Wo \cos 2\theta + (2Zi - 2nH) \cos \theta)^2]^{\frac{1}{2}}} \right) + \\
 + a \sinh \left(\frac{(Uo \cos 2\theta - Wo \cdot \sin 2\theta - (2Zi - 2nH) \cdot \sin \theta)}{[Vo^2 + (Uo \cdot \sin 2\theta + Wo \cos 2\theta + (2Zi - 2nH) \cos \theta)^2]^{\frac{1}{2}}} \right)
 \end{aligned} \tag{E.3}$$

$$f_{An'} = a \sinh \left(\frac{L - (Uo - 2nH \cdot \sin \theta)}{[Vo^2 + (Wo - 2nH \cos \theta)^2]^{\frac{1}{2}}} \right) + a \sinh \left(\frac{Uo - 2nH \cdot \sin \theta}{[Vo^2 + (Wo - 2nH \cos \theta)^2]^{\frac{1}{2}}} \right) \quad (E.4)$$

$$f_{Bn} = a \sinh \left(\frac{L - (Uo + 2nH \cdot \sin \theta)}{[Vo^2 + (Wo + 2nH \cos \theta)^2]^{\frac{1}{2}}} \right) + a \sinh \left(\frac{Uo + 2nH \cdot \sin \theta}{[Vo^2 + (Wo + 2nH \cos \theta)^2]^{\frac{1}{2}}} \right) \quad (E.5)$$

$$f_{Bn'} = a \sinh \left(\frac{L - (Uo \cos 2\theta - Wo \cdot \sin 2\theta - (2Zi + 2nH) \cdot \sin \theta)}{[Vo^2 + (Uo \cdot \sin 2\theta + Wo \cos 2\theta + (2Zi + 2nH) \cos \theta)^2]^{\frac{1}{2}}} \right) +$$

$$+ a \sinh \left(\frac{(Uo \cos 2\theta - Wo \cdot \sin 2\theta - (2Zi + 2nH) \cdot \sin \theta)}{[Vo^2 + (Uo \cdot \sin 2\theta + Wo \cos 2\theta + (2Zi + 2nH) \cos \theta)^2]^{\frac{1}{2}}} \right) \quad (E.6)$$

$$f_{an} = a \sinh \left(\frac{L - (Uo \cos 2\theta - Wo \cdot \sin 2\theta - (2Zi - 2(H1 + (n-1)H)) \cdot \sin \theta)}{[Vo^2 + (Uo \cdot \sin 2\theta + Wo \cos 2\theta + (2Zi - 2(H1 + (n-1)H)) \cos \theta)^2]^{\frac{1}{2}}} \right) +$$

$$+ a \sinh \left(\frac{(Uo \cos 2\theta - Wo \cdot \sin 2\theta - (2Zi - 2(H1 + (n-1)H)) \cdot \sin \theta)}{[Vo^2 + (Uo \cdot \sin 2\theta + Wo \cos 2\theta + (2Zi - 2(H1 + (n-1)H)) \cos \theta)^2]^{\frac{1}{2}}} \right) \quad (E.7)$$

$$f_{an'} = a \sinh \left(\frac{L - (Uo - 2(H2 + (n-1)H) \cdot \sin \theta)}{[Vo^2 + (Wo - 2(H2 + (n-1)H) \cos \theta)^2]^{\frac{1}{2}}} \right) +$$

$$+ a \sinh \left(\frac{Uo - 2(H2 + (n-1)H) \cdot \sin \theta}{[Vo^2 + (Wo - 2(H2 + (n-1)H) \cos \theta)^2]^{\frac{1}{2}}} \right) \quad (E.8)$$

$$f_{bn} = a \sinh \left(\frac{L - (Uo + 2(H1 + (n-1)H) \cdot \sin \theta)}{[Vo^2 + (Wo + 2(H1 + (n-1)H) \cos \theta)^2]^{\frac{1}{2}}} \right) +$$

$$+ a \sinh \left(\frac{Uo + 2(H1 + (n-1)H) \cdot \sin \theta}{[Vo^2 + (Wo + 2(H1 + (n-1)H) \cos \theta)^2]^{\frac{1}{2}}} \right) \quad (E.9)$$

$$\begin{aligned}
 f_{bn'} = a \sinh & \left(\frac{L - (U_o \cos 2\theta - W_o \cdot \sin 2\theta - (2Zi + 2(H2 + (n-1)H)) \cdot \sin \theta)}{\left[V_o^2 + (U_o \cdot \sin 2\theta + W_o \cos 2\theta + (2Zi + 2(H2 + (n-1)H)) \cos \theta)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \right) + \\
 & + a \sinh \left(\frac{(U_o \cos 2\theta - W_o \cdot \sin 2\theta - (2Zi + 2(H2 + (n-1)H)) \cdot \sin \theta)}{\left[V_o^2 + (U_o \cdot \sin 2\theta + W_o \cos 2\theta + (2Zi + 2(H2 + (n-1)H)) \cos \theta)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \right) \quad (\text{E.10})
 \end{aligned}$$

APÉNDICE F

DETERMINACIÓN DE COORDENADAS PARA UN SEGMENTO EN EL PUNTO EN LA INTERFAZ DE DOS CAPAS

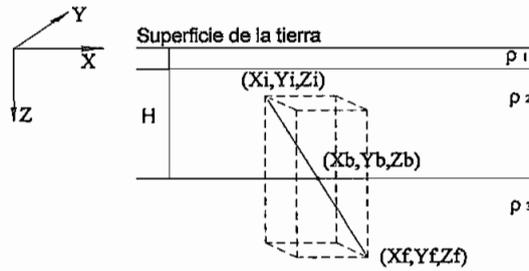


Figura F.1 Segmento inmerso en las capas de resistividad ρ_2 y ρ_3

En la figura F.1 se muestra un segmento inmerso en dos capas de un suelo estratificado de tres capas, se considera que las coordenadas iniciales del segmento como (X_i, Y_i, Z_i) , a las coordenadas finales como (X_f, Y_f, Z_f) , y a las coordenadas del segmento en el punto de interfaz se las designa como (X_b, Y_b, Z_b) , además se designa a H como la distancia de espesor desde la superficie hasta la interfaz de la capa de resistividad ρ_2 y ρ_3

En la figura F.2 se considera la proyección del segmento en el plano XY.

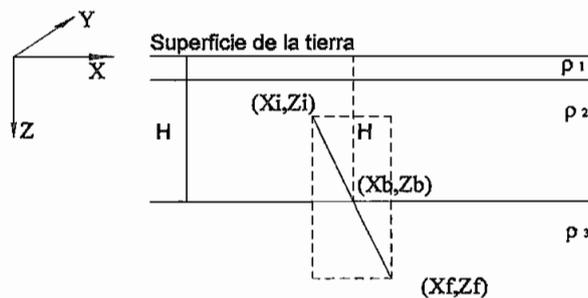


Figura F.2 Proyección en el plano XY, del segmento inmerso en las capas de resistividad ρ_2 y ρ_3

De la figura anterior se observa que, H es paralelo al eje Z del sistema de referencia, y además limita a las capas de resistividad ρ_2 y ρ_3 , por tanto:

$$H = Zb \quad (\text{F.1})$$

A continuación se considera que el segmento en su proyección de longitud r está dividido en dos segmentos de longitud r_1 y r_2 como se indica en la figura F.3, la longitud de estos segmentos viene dada por:

$$r = r_1 + r_2 \quad (\text{F.2})$$

$$r_1 = \sqrt{(Xb - Xi)^2 + (H - Zi)^2} \quad (\text{F.3})$$

$$r_2 = \sqrt{(Xf - Xb)^2 + (Zf - H)^2} \quad (\text{F.4})$$

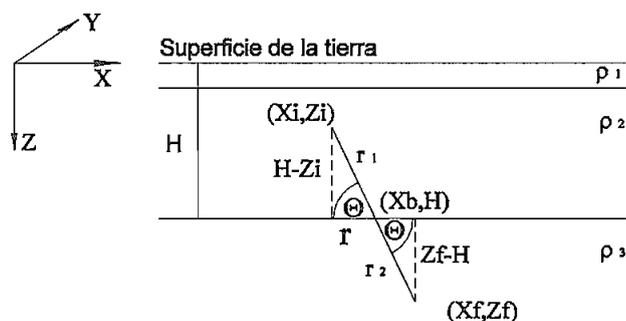


Figura F.3 Proyección en el plano XY , del segmento inmerso en las capas de resistividad ρ_2 y ρ_3 .

De la figura anterior se observa considerando ángulo formado por el segmento y el límite de la interfaz se tiene:

$$\sin \Theta = \frac{H - Zi}{r_1} = \frac{Zf - H}{r_2} \quad (\text{F.5})$$

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{H - Zi}{Zf - H} \quad (\text{F.6})$$

reemplazando r_1 considerando la ecuación F.4

$$\frac{r - r_2}{r_2} = \frac{H - Zi}{Zf - H} \quad (\text{F.7})$$

$$r - r_2 = \left(\frac{H - Zi}{Zf - H} \right) \cdot r_2 \quad (\text{F.8})$$

$$r_2 = \frac{r}{\left(\frac{H - Zi}{Zf - H} \right) + 1} \quad (\text{F.9})$$

$$r_2^2 = \frac{r^2}{\left(\left(\frac{H - Zi}{Zf - H} \right) + 1 \right)^2} \quad (\text{F.10})$$

Reduciendo términos del denominador de la ecuación, y reemplazando r y r_2 se tiene:

$$(Xf - Xb)^2 + (Zf - H)^2 = \frac{(Xf - Xi)^2 + (Zf - Zi)^2}{\left(\frac{Zf - Zi}{Zf - H} \right)^2} \quad (\text{F.11})$$

$$(Xf - Xb)^2 = \left(\frac{(Xf - Xi)^2 + (Zf - Zi)^2}{(Zf - Zi)^2} \right) \cdot (Zf - H)^2 - (Zf - H)^2 \quad (\text{F.12})$$

$$(Xf - Xb)^2 = \left[\left(\frac{(Xf - Xi)^2 + (Zf - Zi)^2}{(Zf - Zi)^2} \right) - 1 \right] \cdot (Zf - H)^2 \quad (\text{F.13})$$

$$(X_f - X_b)^2 = \left(\frac{(X_f - X_i)^2}{(Z_f - Z_i)^2} \right) \cdot (Z_f - H)^2 \quad (\text{F.14})$$

finalmente despejando X_b se tiene:

$$X_b = X_f - (Z_f - H) \cdot \left(\frac{(X_f - X_i)}{(Z_f - Z_i)} \right) \quad (\text{F.15})$$

Para encontrar Y_b se sigue un proceso análogo considerando la proyección del segmento en el plano YZ y se obtiene:

$$Y_b = Y_f - (Z_f - H) \left(\frac{Y_f - Y_i}{Z_f - Z_i} \right) \quad (\text{F.16})$$

APÉNDICE G

DETALLES DE LA EXPRESIÓN 2.54

$$\begin{aligned}
 V_{jk} = i \cdot cte_{rsis} \left\{ cte_{KO} \cdot ffo + cte_{KO'} \cdot ffo' + \sum_{n=1,3,..}^{\infty} cte_{K11} \cdot ff_{An} + cte_{K12} \cdot ff_{An'} + cte_{K13} \cdot ff_{Bn'} + \right. \\
 + cte_{K14} \cdot ff_{Bn'} + \sum_{n=2,4,..}^{\infty} cte_{K21} \cdot ff_{An} + cte_{K22} \cdot ff_{An'} + cte_{K23} \cdot ff_{Bn'} + cte_{K24} \cdot ff_{Bn'} + \\
 \left. + \sum_{n=1,2,3,..}^{\infty} cte_{K31} \cdot ff_{an} + cte_{K32} \cdot ff_{an'} + cte_{K33} \cdot ff_{bn'} + cte_{K34} \cdot ff_{bn'} \right\}
 \end{aligned}
 \tag{2.54}$$

donde los valores de cte_{rsis} , cte_{KO} , $cte_{KO'}$, cte_{K11} , cte_{K12} , cte_{K13} , cte_{K14} , cte_{K21} , cte_{K22} , cte_{K23} , cte_{K24} , cte_{K31} , cte_{K32} , cte_{K33} y cte_{K34} están expresadas en el APÉNDICE B y:

$$ffo = a \sinh \left(\frac{L_j - (a' \lambda_k + b')}{\left[(a'' \lambda_k + b'')^2 + (a''' \lambda_k + b''')^2 \right]^{1/2}} \right) + a \sinh \left(\frac{(a' \lambda_k + b')}{\left[(a'' \lambda_k + b'')^2 + (a''' \lambda_k + b''')^2 \right]^{1/2}} \right)
 \tag{G.1}$$

$$\begin{aligned}
 ffo' = a \sinh \left(\frac{L_j - ((a' \lambda_k + b') \cos 2\theta - (a''' \lambda_k + b''') \sin 2\theta - 2Z_i \sin \theta)}{\left[(a'' \lambda_k + b'')^2 + ((a' \lambda_k + b') \sin 2\theta + (a''' \lambda_k + b''') \cos 2\theta + 2Z_i \cos \theta)^2 \right]^{1/2}} \right) + \\
 + a \sinh \left(\frac{((a' \lambda_k + b') \cos 2\theta - (a''' \lambda_k + b''') \sin 2\theta - 2Z_i \sin \theta)}{\left[(a'' \lambda_k + b'')^2 + ((a' \lambda_k + b') \sin 2\theta + (a''' \lambda_k + b''') \cos 2\theta + 2Z_i \cos \theta)^2 \right]^{1/2}} \right)
 \end{aligned}
 \tag{G.2}$$

$$\begin{aligned}
ff_{An} = & a \sinh \left(\frac{L_j - ((a' \lambda_k + b') \cos 2\theta - (a''' \lambda_k + b''') \sin 2\theta - 2(Z_i - nH) \sin \theta)}{\left[(a'' \lambda_k + b'')^2 + ((a' \lambda_k + b') \sin 2\theta + (a''' \lambda_k + b''') \cos 2\theta + 2(Z_i - nH) \cos \theta \right)^2 \right]^{1/2}} \right) + \\
& + a \sinh \left(\frac{(a' \lambda_k + b') \cos 2\theta - (a''' \lambda_k + b''') \sin 2\theta - 2(Z_i - nH) \sin \theta}{\left[(a'' \lambda_k + b'')^2 + ((a' \lambda_k + b') \sin 2\theta + (a''' \lambda_k + b''') \cos 2\theta + 2(Z_i - nH) \cos \theta \right)^2 \right]^{1/2}} \right)
\end{aligned} \tag{G.3}$$

$$\begin{aligned}
ff_{An'} = & a \sinh \left(\frac{L_j - (a' \lambda_k + b' - 2nH \sin \theta)}{\left[(a'' \lambda_k + b'')^2 + (a''' \lambda_k + b''' - 2nH \cos \theta)^2 \right]^{1/2}} \right) + \\
& + a \sinh \left(\frac{a' \lambda_k + b' - 2nH \sin \theta}{\left[(a'' \lambda_k + b'')^2 + (a''' \lambda_k + b''' - 2nH \cos \theta)^2 \right]^{1/2}} \right)
\end{aligned} \tag{G.4}$$

$$\begin{aligned}
ff_{Bn} = & a \sinh \left(\frac{L_j - (a' \lambda_k + b' + 2nH \sin \theta)}{\left[(a'' \lambda_k + b'')^2 + (a''' \lambda_k + b''' + 2nH \cos \theta)^2 \right]^{1/2}} \right) + \\
& + a \sinh \left(\frac{a' \lambda_k + b' + 2nH \sin \theta}{\left[(a'' \lambda_k + b'')^2 + (a''' \lambda_k + b''' + 2nH \cos \theta)^2 \right]^{1/2}} \right)
\end{aligned} \tag{G.5}$$

$$\begin{aligned}
ff_{Bn'} = & a \sinh \left(\frac{L_j - ((a' \lambda_k + b') \cos 2\theta - (a''' \lambda_k + b''') \sin 2\theta - 2(Z_i + nH) \sin \theta)}{\left[(a'' \lambda_k + b'')^2 + ((a' \lambda_k + b') \sin 2\theta + (a''' \lambda_k + b''') \cos 2\theta + 2(Z_i + nH) \cos \theta \right)^2 \right]^{1/2}} \right) + \\
& + a \sinh \left(\frac{(a' \lambda_k + b') \cos 2\theta - (a''' \lambda_k + b''') \sin 2\theta - 2(Z_i + nH) \sin \theta}{\left[(a'' \lambda_k + b'')^2 + ((a' \lambda_k + b') \sin 2\theta + (a''' \lambda_k + b''') \cos 2\theta + 2(Z_i + nH) \cos \theta \right)^2 \right]^{1/2}} \right)
\end{aligned} \tag{G.6}$$

$$\begin{aligned}
ff_{an} = & a \sinh \left(\frac{L_j - ((a' \lambda_k + b') \cos 2\theta - (a''' \lambda_k + b''') \sin 2\theta - 2(Z_i - (H1 + (n-1)H)) \sin \theta)}{\left[(a'' \lambda_k + b'')^2 + ((a' \lambda_k + b') \sin 2\theta + (a''' \lambda_k + b''') \cos 2\theta + 2(Z_i - (H1 + (n-1)H)) \cos \theta \right)^2 \right]^{1/2}} \right) + \\
& + a \sinh \left(\frac{(a' \lambda_k + b') \cos 2\theta - (a''' \lambda_k + b''') \sin 2\theta - 2(Z_i - (H1 + (n-1)H)) \sin \theta}{\left[(a'' \lambda_k + b'')^2 + ((a' \lambda_k + b') \sin 2\theta + (a''' \lambda_k + b''') \cos 2\theta + 2(Z_i - (H1 + (n-1)H)) \cos \theta \right)^2 \right]^{1/2}} \right)
\end{aligned} \tag{G.7}$$

$$\begin{aligned}
ff_{an} = & a \sinh \left(\frac{L_j - (a' \lambda_k + b' - 2(H2 + (n-1)H) \sin \theta)}{\left[(a'' \lambda_k + b'')^2 + (a''' \lambda_k + b''' - 2(H2 + (n-1)H) \cos \theta)^2 \right]^{1/2}} \right) + \\
& + a \sinh \left(\frac{a' \lambda_k + b' - 2(H2 + (n-1)H) \sin \theta}{\left[(a'' \lambda_k + b'')^2 + (a''' \lambda_k + b''' - 2(H2 + (n-1)H) \cos \theta)^2 \right]^{1/2}} \right)
\end{aligned}
\tag{G.8}$$

$$\begin{aligned}
ff_{bn} = & a \sinh \left(\frac{L_j - (a' \lambda_k + b' + 2(H1 + (n-1)H) \sin \theta)}{\left[(a'' \lambda_k + b'')^2 + (a''' \lambda_k + b''' + 2(H1 + (n-1)H) \cos \theta)^2 \right]^{1/2}} \right) + \\
& + a \sinh \left(\frac{a' \lambda_k + b' + 2(H1 + (n-1)H) \sin \theta}{\left[(a'' \lambda_k + b'')^2 + (a''' \lambda_k + b''' + 2(H1 + (n-1)H) \cos \theta)^2 \right]^{1/2}} \right)
\end{aligned}
\tag{G.9}$$

$$\begin{aligned}
ff_{bn} = & a \sinh \left(\frac{L_j - ((a' \lambda_k + b') \cos 2\theta - (a'' \lambda_k + b'') \sin 2\theta - 2(Z_i + (H2 + (n-1)H) \sin \theta))}{\left[(a'' \lambda_k + b'')^2 + ((a' \lambda_k + b') \sin 2\theta + (a''' \lambda_k + b''') \cos 2\theta + 2(Z_i + (H2 + (n-1)H) \cos \theta)^2 \right]^{1/2}} \right) + \\
& + a \sinh \left(\frac{(a' \lambda_k + b') \cos 2\theta - (a'' \lambda_k + b'') \sin 2\theta - 2(Z_i + (H2 + (n-1)H) \sin \theta)}{\left[(a'' \lambda_k + b'')^2 + ((a' \lambda_k + b') \sin 2\theta + (a''' \lambda_k + b''') \cos 2\theta + 2(Z_i + (H2 + (n-1)H) \cos \theta)^2 \right]^{1/2}} \right)
\end{aligned}
\tag{G.10}$$

APÉNDICE H

(Tablas de resultados de simulación para una malla cuadrada)

Tabla H.1 Valores de resistencia para el electrodo de la figura 5.9 para los valores de espesor de la primera capa H, y Coeficiente de reflexión K, indicados

ρ_1 $\Omega\text{-m.}$	ρ_2 $\Omega\text{-m.}$	k	RESISTENCIA [Ω]			
			H=5m	H=10m	H=15m	H=50m
100	10	-0.8	3.13419	3.66577	3.92048	4.34458
100	20	-0.7	3.13336	3.6418	3.94344	4.35318
100	30	-0.5	3.2283	3.7625	3.99634	4.37054
100	50	-0.3	3.52344	3.9517	4.13158	4.4136
100	70	-0.2	3.8553	4.15257	4.27287	4.458
100	100	0.0	4.54071	4.54072	4.5473	4.5473
100	125	0.1	5.0913	4.8474	4.75126	4.605
100	150	0.2	5.39993	5.62626	4.87478	4.64378
100	300	0.5	6.62749	5.82551	5.3591	4.79361
100	600	0.7	7.83555	6.40087	5.82237	4.93615
100	2000	0.9	9.27502	7.19102	6.36229	5.10156

Tabla H.2 Valores de resistencia para el electrodo de la figura 5.9 para los valores de espesor de la primera capa H, y Coeficiente de reflexión K, indicados

ρ_1 $\Omega\text{-m.}$	ρ_2 $\Omega\text{-m.}$	k	RESISTENCIA [Ω]			
			H=5m	H=10m	H=15m	H=50m
2000	100	-0.9	64.049	73.7275	78.6187	86.9357
600	100	-0.7	18.7145	22.0539	23.5869	26.0937
300	100	-0.5	9.81356	11.3742	12.0518	13.1318
150	100	-0.2	5.69894	6.17866	6.37415	6.67599
125	100	-0.1	5.03248	5.31661	5.42902	5.59995
100	100	0.0	4.54071	4.54072	4.5473	4.5473
70	100	0.2	3.72214	3.4845	3.38921	3.24347
50	100	0.3	2.94868	2.65571	2.5364	2.35257

30	100	0.5	2.04564	1.7502	1.62998	1.44494
20	100	0.7	1.50693	1.2468	1.1416	0.98021
10	100	0.8	0.85699	0.6805	0.6099	0.50210

Tabla H.3 Valores de voltaje de toque para el electrodo de la figura 5.9 para los valores de espesor de la primera capa H, y Coeficiente de reflexión K, indicados

ρ_1 $\Omega\text{-m.}$	ρ_2 $\Omega\text{-m.}$	K	Voltaje de toque [V]			
			H=5m	H=10m	H=15m	H=50m
100	10	-0.82	2230.2	2188.7	2181.5	2196.4
100	20	-0.67	2070.6	2110.9	2131.8	2182.2
100	30	-0.54	1984.6	2070	2107	2175.4
100	70	-0.18	1945.1	2064.8	2109.2	2178.2
100	100	0.00	2209.3	2209.3	2209.3	2209.3
100	125	0.11	2448.2	2338.3	2297.9	2236.6
100	150	0.20	2473.8	2356.8	2312.1	2241.5
100	600	0.71	2093.9	2204.9	2223	2218.5
100	2000	0.90	1374.9	1862.3	1999.7	2153

Tabla H.4 Valores de voltaje de toque para el electrodo de la figura 5.9 para los valores de espesor de la primera capa H, y Coeficiente de reflexión K, indicados

ρ_1 $\Omega\text{-m.}$	ρ_2 $\Omega\text{-m.}$	K	Voltaje de toque [V]			
			H=5m	H=10m	H=15m	H=50m
2000	100	-0.90	46934.2	44930.6	44380.3	44144
600	100	-0.71	12684.1	12790.7	12870	13115.5
150	100	-0.20	2909.4	3091.4	3159.3	3265.7
125	100	-0.11	2461	2600.1	2650.8	2727.5
100	100	0.00	2209.03	2209.03	2209.03	2209.03
70	100	0.18	1728.6	1647.2	1616.4	1568.3
30	100	0.54	710.8	698.5	690.3	672.2
20	100	0.67	438.9	450.2	450.5	445.4
10	100	0.82	177.7	205.6	212.6	219

Tabla H.5 Valores de voltaje de paso para el electrodo de la figura 5.9 para los valores de espesor de la primera capa H, y Coeficiente de reflexión K, indicados

ρ_1 $\Omega\text{-m.}$	ρ_2 $\Omega\text{-m.}$	K	Voltaje de paso [V]			
			H=5m	H=10m	H=15m	H=50m
100	10	-0.82	15.9	13.8	13.2	12.800
100	20	-0.67	15.4	13.7	13.1	12.800
100	30	-0.54	15	13.5	13	12.800
100	70	-0.18	13.6	13	12.9	12.800
100	100	0.00	12.8	12.8	12.8	12.800
100	125	0.11	12.3	12.6	12.7	12.800
100	150	0.20	11.8	12.5	12.7	12.800
100	600	0.71	8.5	11.6	12.4	12.800
100	2000	0.90	6.8	11.2	12.3	12.800

Tabla H.6 Valores de voltaje de paso para el electrodo de la figura 5.9 para los valores de espesor de la primera capa H, y Coeficiente de reflexión K, indicados

ρ_1 $\Omega\text{-m.}$	ρ_2 $\Omega\text{-m.}$	K	Voltaje de paso [V]			
			H=5m	H=10m	H=15m	H=50m
2000	100	-0.90	322.3	278.4	264.1	256.1
600	100	-0.71	93.3	82.2	78.7	76.8
150	100	-0.20	20.5	19.6	19.3	19.2
125	100	-0.11	16.6	16.2	16.1	16
100	100	0.00	12.8	12.8	12.8	12.8
70	100	0.18	8.3	8.8	8.9	9
30	100	0.54	2.9	3.6	3.7	3.8
20	100	0.67	1.8	2.3	2.5	2.6
10	100	0.82	0.8	1.1	1.2	1.3

APÉNDICE I

(Manual de usuario del programa AEPT)

I.1 INTRODUCCIÓN

AEPT "*Análisis de Electroodos de Puesta a Tierra*" es un programa que tiene por objetivo, encontrar la resistencia, distribución de corriente y potenciales de interés (potencial de toque, potencial de paso, potencial en la superficie) en una puesta a tierra.

El programa está diseñado para evaluar el comportamiento de los electrodos de puesta a tierra para modelos de suelo homogéneo y no homogéneo, en este ultimo caso se puede trabajar con una modelación de dos o tres capas con el electrodo enterrado íntegramente en la segunda, o tercera, o en ambas capas del suelo estratificado*.

I.2 REQUERIMIENTOS DE HARDWARE Y SOFTWARE

El programa AEPT es un programa realizado enteramente en MATLAB Ver 6.5 por lo que el sistema debe cumplir los requerimientos mínimos exigidos por este programa.

I.3 INSTALACIÓN

Los archivos del programa se encuentran en la carpeta de nombre AEPT esta carpeta debe ser grabada en algún lugar dentro del directorio local del MATLAB (dentro de una carpeta o subcarpeta del MATLAB). A continuación en el menú File del Matlab se procede a escoger la opción Set Path, finalmente se añade la carpeta al search path como se muestra en la figura I.1 con esto la carpeta se convierte en un directorio del set path.

* La primera capa es la de protección y es añadida al suelo original. En esta capa no se instala la malla (o electrodo)

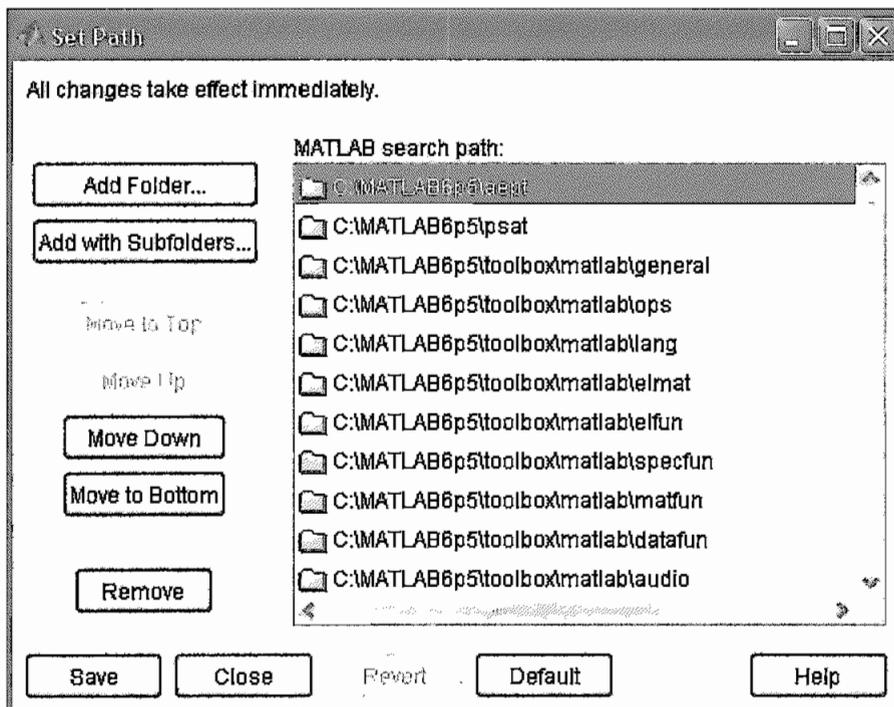


Figura I.1 Aspecto de ventana del Set Path

I.4 INICIO y SALIDA

Para iniciar el programa se debe digitar AEPT con letras mayúsculas o minúscula en la pantalla de comando del MATLAB (Figura I.2), y pulsar Enter.

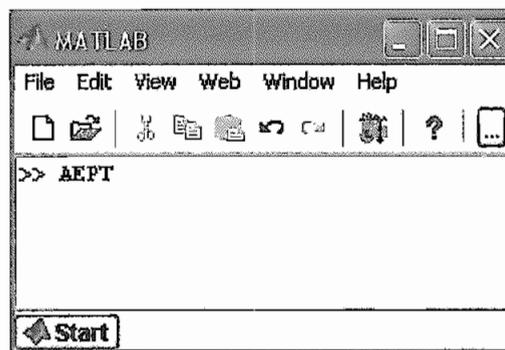


Figura I.2 Ventana de pantalla de comandos del Matlab

Para salir del programa se lo hace mediante formas usuales del sistema, es decir pulsando ALT + F4, pulsando X en la ventana que se desea cerrar, o cerrando el MATLAB mediante sus comandos.

I.5 DESCRIPCIÓN DE PANTALLAS

I.5.1 PANTALLA DE PRESENTACIÓN

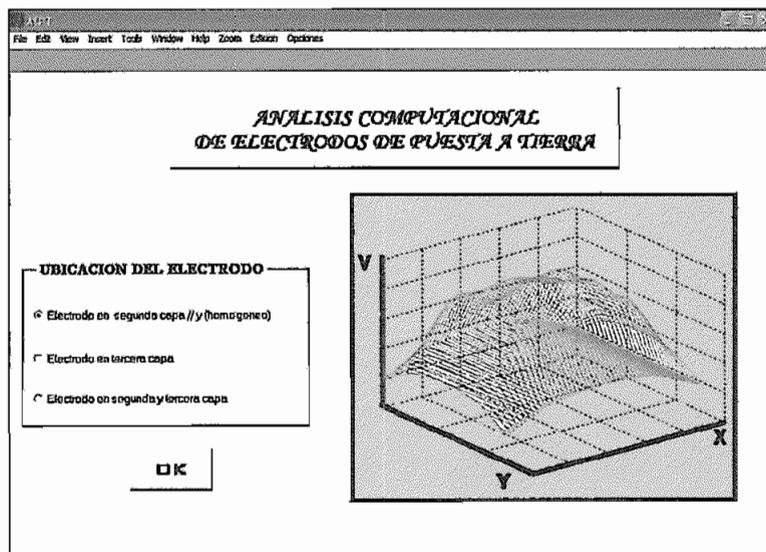


Figura I.3 Pantalla de presentación del programa AEPT

En la figura I.3 se aprecia la pantalla de presentación de uso del programa, en esta se escoge donde está el electrodo dentro del suelo estratificado (en que capa está inmerso), si se desea analizar un suelo homogéneo se puede optar por escoger cualquiera de las tres opciones.

I.5.2 PANTALLA DE INGRESO DE GEOMETRÍA DEL ELECTRODO

El ingreso de la geometría del electrodo se la hace mediante segmentos rectos utilizando la coordenada inicial del segmento y la coordenada final de este, para esto se utiliza una archivo de EXCEL con nombre de "Coordenadas de los electrodos" que se encuentra en el directorio AEPT, este archivo consta de dos hojas de cálculo, en la una se ingresa las coordenadas iniciales y en la otra las coordenadas finales. Las Columnas A, B, C corresponden a las coordenadas X, Y, Z del electrodo, es decir en la columna A van las coordenadas correspondientes a X, en B las coordenadas correspondientes a Y y en C las coordenadas correspondientes a Z (ver figura I.4).

Figure 1.4 shows two Microsoft Excel spreadsheets. The left spreadsheet, titled 'Microsoft Excel - Coordenada...', shows a table with columns A, B, and C. The data is as follows:

	A	B	C
1	0	0	0.5
2	0	0	0.5
3	0	0	0.5
4			
5			
6			

The right spreadsheet, also titled 'Microsoft Excel - Coordenada...', shows the same table but with updated values for segments 1, 2, and 3:

	A	B	C
1	0	0	0.5
2	-1.73	-1	0.5
3	1.73	-1	0.5
4			
5			
6			

a) Coordenadas iniciales del segmento b) Coordenadas finales del segmento

Figura I.4 Archivo de EXCEL para el ingreso de coordenadas de los segmentos que forman el electrodo

I.5.3 PANTALLA DE INGRESO DE DATOS DEL SUELO, DIÁMETRO DEL CONDUCTOR, CORRIENTE DE DISEÑO Y COORDENADAS SOBRE LA SUPERFICIE PARA EL CÁLCULO DE ELECTRODOS

El ingreso de datos del suelo se da luego de pulsar OK en la pantalla principal para las opciones de ubicación del electrodo.

The screenshot shows a software interface with two main panels: 'INGRESO DE DATOS' (Data Entry) and 'RESUMEN DE RESULTADOS' (Results Summary).
INGRESO DE DATOS:
 - **Suelo (Soil):** Resistividad 1: 100, Resistividad 2: 100, Resistividad 3: 100. Espesor H1: 0.12, Espesor H2: 2.
 - **Electrodo (Electrode):** Diámetro (mm): 14, I₀ (A): 100.
 - **Coordenadas (Coordinates):** Coordenada Inicial (Initial Coordinate) X: 2, Y: 2; Coordenada Final (Final Coordinate) X: 2, Y: 2. Intervalo: 0.2.
 - An **OK** button is present.
RESUMEN DE RESULTADOS:
 - **RESISTENCIA (RESISTANCE):** [] [ohm]
 - **POTENCIAL DE TOQUE MAX (MAX TOUCH POTENTIAL):** [] [V]
 - **POTENCIAL DE PISO MAX (MAX FLOOR POTENTIAL):** [] [V]
 - **POTENCIAL DE MALLA (GPR) (MESH POTENTIAL):** [] [V]

Figura I.5 Pantalla para cálculo de parámetros cuando el electrodo se encuentra en la segunda capa del suelo estratificado

Figura I.6 Pantalla para cálculo de parámetros cuando el electrodo se encuentra en la tercera capa del suelo estratificado

Figura I.7 Pantalla para cálculo de parámetros cuando el electrodo se encuentra en la segunda y tercera capa del suelo estratificado

En esta ventana se procede a ingresar los siguientes datos:

- Espesor de la primera capa (H1), en metros

- Espesor de la segunda capa (H_2), en metros.
- Resistividad 1, en ohmios - metro. Esta corresponde a la resistividad de la primera capa (en la práctica se trata de una delgada capa de gravilla colocada sobre la superficie del suelo de 10 a 15 centímetros).
- Resistividad 2, en ohmios - metro. Esta corresponde a la resistividad de la segunda capa (en esta capa por lo general se encuentra el electrodo).
- Resistividad 3, en ohmios - metro. Esta corresponde a la resistividad de la tercera capa (en esta capa también puede encontrarse el electrodo).
- Corriente de diseño (corriente que se despejara por el electrodo), (I_{cc}), en amperios.
- Diámetro del conductor en milímetros.
- Coordenadas iniciales (X,Y) para el cálculo de potenciales.
- Coordenadas finales (X,Y) para cálculo de potenciales.
- Intervalo, corresponde al intervalo entre puntos donde se calcula los potenciales en la superficie para ser presentados mediante un gráfico (ver figura 1.8).

En esta ventana además se presenta un resumen de resultados que son:

- **Resistencia** de puesta a tierra del electrodo en ohmios.
- **Potencial de toque** máximo para el tramo entre la coordenada inicial y la coordenada final indicada, en voltios.

- **Potencial de paso** máximo para el tramo entre la coordenada inicial y coordenada final indicada, en **voltios**.
- **Potencial de malla (GPR)**, en **voltios**.

Si se desea el calcular los parámetros para condiciones de suelo homogéneo se debe colocar el mismo valor de resistividad en las tres capas del electrodo (es valido para cualquiera de las ventanas de las figuras 1.5, 1.6, y 1.7).

1.6 CORRIDA Y REPORTES

Para hallar los resultados obtenidos del cálculo del programa se debe pulsar el botón OK de la ventana que está siendo utilizada. Cuando el programa haya terminado de realizar los cálculos se despliega en la ventana de comandos del MATLAB un reporte con los resultados obtenidos, y el grafico de potenciales en la superficie entre los puntos seleccionados (coordenada inicial y final para cálculo de potenciales)

A continuación se representa el aspecto de un reporte típico

```
*****
```

RESULTADOS

```
*****
```

```
Resistividad de la primera capa [ohm-m]: 500
Resistividad de la segunda capa [ohm-m]: 100
Resistividad de la tercera capa [ohm-m]: 90
Corriente de corto circuito [A]: 100
```

```
GPR [V]: 4686.04
Distancia entre puntos [m]: 1
```

```
*****
```

```
EL VALOR DE RESISTENCIA DEL ELECTRODO DE P/T [ohm]:
46.8604
```

```
*****
```

EL VALOR DE CORRIENTE POR ELECTRODO EN [pu]

Coordenada inicial		Coordenada final		Corriente(pu)	
-2.0000	0 0.6000	-1.7500	0 0.6000	0.0017	[caso 1]
-1.7500	0 0.6000	-1.5000	0 0.6000	0.0014	
-1.5000	0 0.6000	-1.2500	0 0.6000	0.0013	
-1.2500	0 0.6000	-1.0000	0 0.6000	0.0013	
-1.0000	0 0.6000	-0.7500	0 0.6000	0.0013	
-0.7500	0 0.6000	-0.5000	0 0.6000	0.0012	
-0.5000	0 0.6000	-0.2500	0 0.6000	0.0012	
-0.2500	0 0.6000	0	0 0.6000	0.0012	
0	0 0.6000	0.2500	0 0.6000	0.0012	
0.2500	0 0.6000	0.5000	0 0.6000	0.0012	
0.5000	0 0.6000	0.7500	0 0.6000	0.0012	
0.7500	0 0.6000	1.0000	0 0.6000	0.0013	
1.0000	0 0.6000	1.2500	0 0.6000	0.0013	
1.2500	0 0.6000	1.5000	0 0.6000	0.0013	
1.5000	0 0.6000	1.7500	0 0.6000	0.0014	
1.7500	0 0.6000	2.0000	0 0.6000	0.0017	

VOLTAJE DE TOQUE[V] (x,y)

EJEX EJY VOLTAJE DE TOQUE [V]

1.0e+003 *

0.0000	-0.0030	4.5217	[caso 2]
0.0000	-0.0020	4.4521	
0.0000	-0.0010	4.3015	
0.0000	0	4.0474	
0.0000	0.0010	4.3012	
0.0000	0.0020	4.4520	
0.0000	0.0030	4.5216	

VOLTAJE DE TOQUE MAXIMO [V,] (xo,yo)-(x1,y1)

4.5217e+003

VOLTAJE DE PASO[V]

Coordenada inicial Coordenada final VOLTAJE DE PASO[V]

0.0100	-3.0000	0.0100	-2.0000	69.5769	[caso 3]
0.0100	-2.0000	0.0100	-1.0000	150.6042	
0.0100	-1.0000	0.0100	0	254.0900	
0.0100	0	0.0100	1.0000	253.8145	
0.0100	1.0000	0.0100	2.0000	150.7640	
0.0100	2.0000	0.0100	3.0000	69.6325	

VOLTAJE DE PASO MÁXIMO [V]

254.0900

A continuación se indican ciertos detalles a tomar en cuenta:

La corriente aparece en pu, si se desea su valor en amperios se debe aplicar la expresión correspondiente de la tabla I.1.

Los voltajes de toque y los voltajes de paso han sido calculados sobre la recta ingresada mediante las coordenadas inicial y final para el cálculo de potenciales.

Si se desea obtener los valores de potenciales de toque o potenciales de paso en porcentaje del GPR se deben usar las expresiones correspondientes de la tabla I.1.

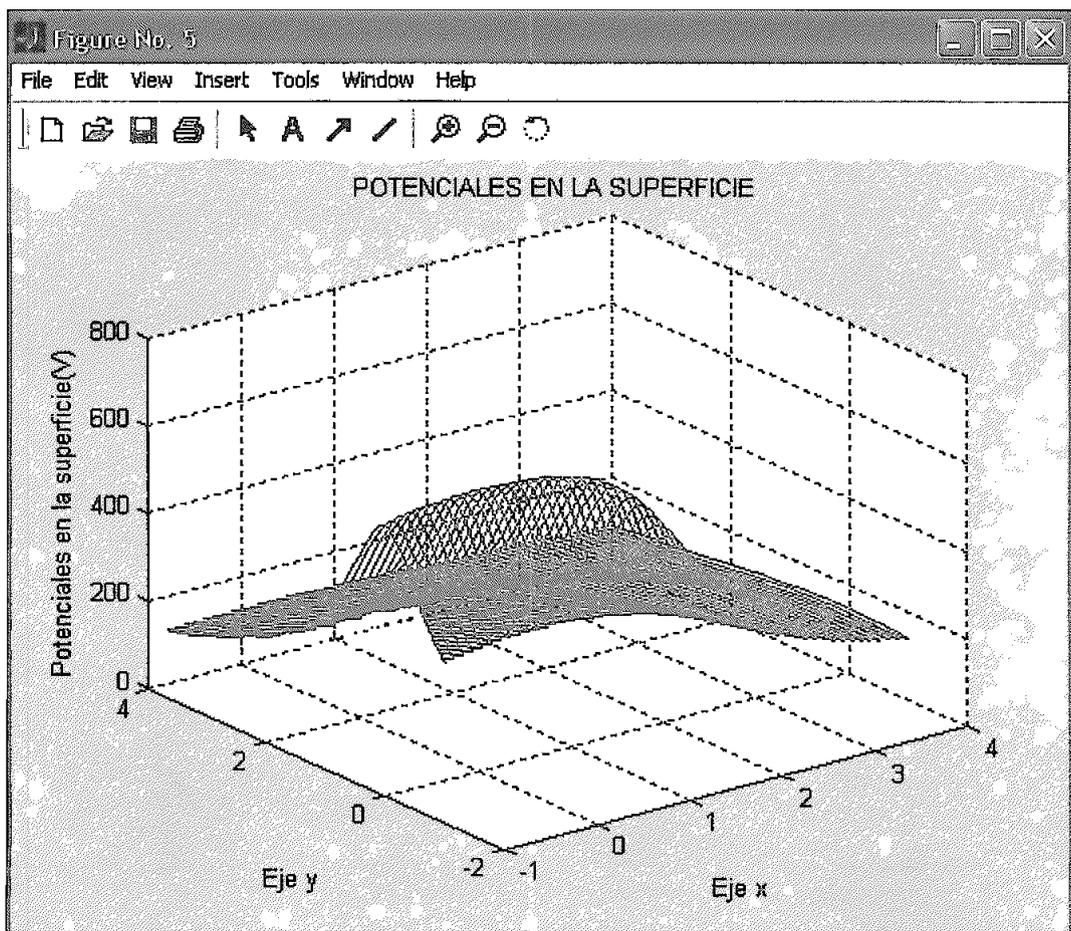


Figura I.8 Gráfico de potenciales en la superficie dado por el programa AEPT, en este grafico se aprecia la superficie dada por los ejes de referencia X, Y y los potenciales sobre la superficie dados en Voltios

I.7 INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

Los siguientes valores corresponden a los datos de entrada que se ingresa por las ventanas indicadas en las figuras I.5, I.6, I.7:

Resistividad de la primera capa [ohm-m]: 500
 Resistividad de la segunda capa [ohm-m]: 100
 Resistividad de la tercera capa [ohm-m]: 90
 Corriente de corto circuito [A]: 100

Los valores calculados son:

el valor de la **resistencia** en ohmios,

el valor del **GPR**, en Voltios,

la **densidad de corriente** (EL VALOR DE CORRIENTE POR ELECTRODO EN [pu]) se presenta el valor de la coordenada inicial, y el valor de coordenada final de cada uno de los segmentos que forman el electrodo, Por ejemplo en el **caso 1**, se tiene un segmento que va desde:

Coordenada inicial			Coordenada final			Corriente(pu)
-2.0000	0	0.6000	-1.7500	0	0.6000	0.0017 [caso 1]

X	Y	Z	Hacia	X	Y	Z
-2.0000	0	0.6000		-1.7500	0	0.6000

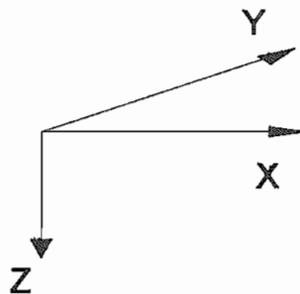


Figura I.9 Sistema de referencia XYZ

Donde el eje X, y el eje Y corresponden al plano que representa la superficie del suelo y el eje Z está dirigido hacia el interior de la tierra,

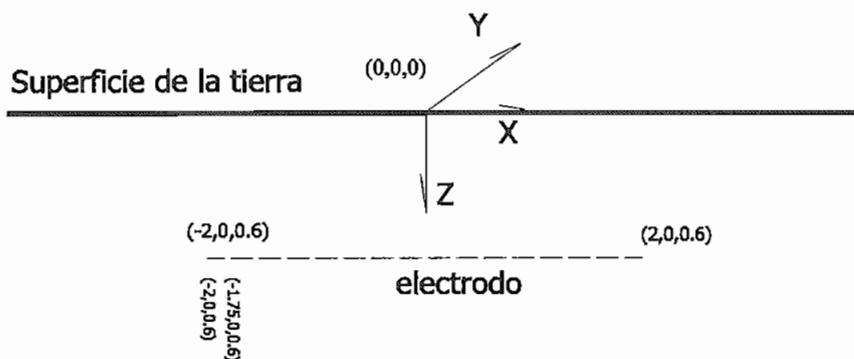


Figura I.10 Gráfico ilustrativo de posición relativa del electrodo para el caso 1 de análisis de interpretación de resultados presentado en el reporte

En este segmento que forma el electrodo la corriente está en pu (por unidad) y su valor es de 0.0017, para el caso 1 de análisis, además para encontrar su valor en amperios se puede recurrir a la tabla I.1.

A continuación en el caso 2 se va a interpretar el potencial de toque (VOLTAJE DE TOQUE[V] (x,y)), los valores de eje X y eje Y corresponden a una coordenada sobre la superficie del suelo (coordenadas XYZ de la figura I.9)

EJEX	EJEY	VOLTAJE DE TOQUE [V]
1.0e+003 *		
0.0000	-0.0030	4.5217 [caso 2]

X	Y	VOLTAJE DE TOQUE [V]
0.0000	-3	4.5217

[caso 2]

y VOLTAJE DE TOQUE, corresponde al valor en voltios que se obtiene de voltaje de toque en ese punto (punto de coordenadas XY indicados, sobre la superficie).

En el caso 3 se va a interpretar un valor de voltaje de paso (VOLTAJE DE PASO[V]), la coordenada inicial, y la coordenada final corresponden a las coordenadas en X, Y respectivamente que indican un punto sobre la superficie de la tierra.

Coordenada inicial		Coordenada final		VOLTAJE DE PASO[V]	
0.0100	-3.0000	0.0100	-2.0000	69.5769	[caso 3]

En otras palabras para el caso 3, se tiene que se considera un paso desde

X	Y		X	Y	VOLTAJE DE PASO [V]
0.0000	-3	Hacia	0.0000	-2	69.57

[caso 3]

y VOLTAJE DE PASO, corresponde al valor en voltios que se obtiene de voltaje de paso cuando se considera un paso entre los puntos señalados (punto de coordenadas XY indicados, sobre la superficie).

1.8 LÍMITES DEL PROGRAMA

En lo que respecta a la cantidad de segmentos que pueden ser ingresados; dado que estos se ingresa mediante un archivo de EXCEL no existe control de limite, estos pueden crecer mientras el sistema lo permite.

En cuanto al número de puntos que se puede especificar para el cálculo de potenciales puede ser variado.

El tiempo de ejecución del programa es relativamente alto para configuraciones de electrodos extremadamente complicadas y en áreas relativamente extensas, esto se debe a la gran cantidad de cálculos que realiza el programa.

Se recomienda que cuando el electrodo se encuentra inmerso en la segunda y tercera capa, la altura mínima de la segunda capa debe ser de 1 metro, esto se debe a que, por lo general el electrodo se encuentra de 50 a 70 centímetros bajo la superficie de la tierra, para espesores de la segunda capa pequeñas de 10 a 50 centímetros se puede optar por utilizar la ventana de electrodo en la tercera capa del suelo estratificado.

Tabla I.1 Relaciones para obtener la corriente en amperios y los potenciales en porcentaje y en porcentaje del GPR

$I(\text{amperios}) = I_{pu} \cdot GPR(\text{voltios})$
$V_{toque}(\%) = \frac{V_{toque}(\text{voltios}) \cdot 100}{V_{toquetolerable}(\text{voltios})}$
$V_{paso}(\%) = \frac{V_{paso}(\text{voltios}) \cdot 100}{V_{pasotolerable}(\text{voltios})}$
$V_{toque}(\%GPR) = \frac{V_{toque}(\%) \cdot V_{toquetolerable}(\text{voltios})}{GPR(\text{voltios})}$
$V_{paso}(\%GPR) = \frac{V_{paso}(\%) \cdot V_{pasotolerable}(\text{voltios})}{GPR(\text{voltios})}$

Para el voltaje de toque y paso en porcentaje únicamente se considera el voltaje tolerable (que será un valor determinado por el usuario del programa no por el programa)

- * **Microsof Windows XP** marca registrada de **Microsof Corporation**
- ** **Matlab** marca registrada de **The Math Works, Inc**

BIBLIOGRAFÍA

- [1] NAGAR R. P., Velásquez R. Review of analytical methods for calculating the performance of large grounding electrodes Part I Theoretical considerations, IEEE Transactions on power Apparatus and systems, Vol PAS-104 No 11, pp 3124 - 3133, November 1985
- [2] SUNDE Erling, Earth Conduction Effects in transmission Systems, Dover New York 1968.
- [3] ANSI/IEEE Std 80-1986, IEEE Guide for safety in AC Substation Grounding, Fourth Printing, September 1992
- [4] Seely Samuel, Introduction to electromagnetic fields, 1958
- [5] REITZ John R, MILFORD Frederick J, CHRISTY Robert W, Fundamentos de la teoría electromagnética, Tercera edición 1984
- [6] Dawalibi Farid, Mukhedkar Dinkar, Optimum Desing of substation Grounding in a two layer Earth Structure, Part I-Analytical Study, IEEE Transactions on power Apparatus and Systems, VOL PAS-94, No 2, pp 252-261, March /April 1975
- [7] DAWALIBI Farid, MUKHEDKAR Dinkar, Resistance Calculation of Interconnected Grounding Electrodes, IEEE Transactions on power Apparatus and Systems, VOL PAS-96, No 1, pp 59-64, January / February 1977
- [8] MARSDEN J., Tromba A., Cálculo Vectorial, San Francisco California, E.U.A. 1976.
- [9] HEPE J. Robert, Computation of Potential at Surface Above an Energized Grid or Other Electrode, Allowing for Non-Uniform Current Distribution,

IEEE Transactions on power Apparatus and Systems VOL PAS-98, No 6, pp 1978-1989, Nov / Dec 1979

- [10] HARRINGTON Roger, Matrix Methods for field problems, Proceedings of the IEEE, VOL 55, No2, pp136-149, February 1967
- [11] BERGEN Arthur, Power Systems Analysis, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1986.
- [12] LEHMANN Charles, Geometría Analítica, Unión Tipográfica, Editorial Hispano Americana, México 1978.
- [13] DAWALIBI Farid, MUKHEDKAR Dinkar, Optimum Design of substation Grounding in a two layer Earth Structure, Part I-Analytical Study, IEEE Transactions on power Apparatus and Systems, VOL PAS-95, No 2, pp 113-119, January / February 1976.
- [14] PEREIRA Natercio, Programa de Cálculo de Parámetros de Malhas de Terra_e Dos Efeitos de correntes a Terra MTER, Boletín CIER, Año XVIII, No 146, Septiembre 1982.
- [15] KOUTEYNIKOFF Pierre, Numerical Computation of the grounding Resistance of Substations and Towers, IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol Pas-99, No 3, pp 957-965, May/June 1980
- [16] IEEE Std 142 – 1991, IEEE Recommended Practice for Grounding at Industrial and Commercial Power systems, First printing, June 1992.
- [17] NAVARRETE, Jofre. Evaluación del comportamiento de los electrodos de puesta a tierra mediante el uso del computador personal. Tesis, Escuela Politécnica Nacional. Quito. Abril 1996.
- [18] [http:// www.procobreecuador.org](http://www.procobreecuador.org) Sistemas de Puesta a Tierra

- [19] [http:// www.mtas.es/insht/legislation/RD/itc_bt_18.htm](http://www.mtas.es/insht/legislation/RD/itc_bt_18.htm) Resistencia de las Tomas de Tierra
- [20] IÑIGUEZ, Javier. Estudio del potencial de acoplamiento entre electrodos de puesta a tierra cercanos. Tesis, Escuela Politécnica Nacional. Quito. Abril 1997.
- [21] AYORA Paúl, Apuntes de Alto Voltaje, Escuela Politécnica Nacional. Quito, 1995.
- [22] HARPER Enríquez, Elementos de Diseño de Subestaciones Eléctricas, editorial Limusa, México 1983.
- [23] MARTINES Juan, TOLEDANO José, Puesta a tierra en edificios e instalaciones Eléctricas, Paraninfo, 2004
- [24] GRAINGER John, Análisis de Sistemas de Potencia, McGraw-hill, México, 1996
- [25] <http://www.schneiderelectric.es> Cuaderno Técnico nº 172
Esquemas de conexión a tierra