

**ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL**

**FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA**

**MODELAMIENTO Y SIMULACIÓN DEL FLUJO DE DESCARGA  
DE SILOS MEDIANTE EL MÉTODO DEL ELEMENTO  
DISCRETO**

**PROYECTO PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE  
INGENIERO MECÁNICO**

**RIVERA TAPIA EDGAR DAVID**

davo.rivera@aol.com

**VERGARA ROBLES LUIS JAVIER**

j-a-v-i-23@hotmail.com

**DIRECTOR: CARLOS ÁVILA**

cavila67@caltech.edu

**Quito, septiembre 2013**

## DECLARACIÓN

Nosotros Edgar David Rivera Tapia y Luis Javier Vergara Robles, juramos que el trabajo aquí descrito es de nuestra autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y, que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

La Escuela Politécnica Nacional, puede hacer uso de los derechos correspondientes a este trabajo, según lo establecido por la ley de Propiedad Intelectual, por su Reglamento y por la normatividad institucional vigente.

---

Edgar David Rivera Tapia

---

Luis Javier Vergara Robles

## CERTIFICACIÓN

Certifico que el presente trabajo fue desarrollado por Edgar David Rivera Tapia y Luis Javier Vergara Robles bajo mi supervisión.

\_\_\_\_\_  
Ph. D Carlos Ávila

**DIRECTOR DEL PROYECTO**

\_\_\_\_\_  
Ph. D Victor Cárdenas

**CO-DIRECTOR DEL PROYECTO**

## AGRADECIMIENTOS

Al culminar este trabajo quiero agradecer a todas las personas que de una u otra manera han contribuido a la consecución del presente proyecto. Principalmente a mi asesor el Ph. D Carlos Ávila, quien con sus conocimientos colaboró en la ejecución del proyecto.

A mis maestros escolares, colegiales y universitarios que sin su abnegada dedicación no hubiese podido llegar hasta este punto de mi vida.

A mis amigos que me acompañaron en los momentos más difíciles de mi vida estudiantil.

A todos ellos quiero decirles:

GRACIAS

Davo

Agradezco a todos quienes han aportado con un pequeño grano de arena en la consecución de grandes y pequeños logros dentro de mi vida estudiantil, los que han estado en cada peldaño ayudándome a levantar de las caídas y tropiezos. Maestros que desde mi infancia hasta hoy me han impartido sus conocimientos, sin olvidar su misión de formar nuevas mentes procreadoras de desarrollo en el país. Amigos y compañeros que forman parte de mi vida. Gracias a todos.

Javier

## DEDICATORIA

A mi familia,

Por estar conmigo desde mis primeros años de vida hasta este momento.

Davo

El presente proyecto quiero y debo dedicarlo a las personas más importantes en mi vida que están en todo momento conmigo, siendo el pilar fundamental en mi formación dándome las pautas necesarias para llegar a estas instancias. Mi querida familia esto es para ustedes.

Javier

# Índice general

<b>Índice</b>	<b>XI</b>
<b>Índice de figuras</b>	<b>XVIII</b>
<b>Índice de tablas</b>	<b>XX</b>
<b>Resumen</b>	<b>XXI</b>
<b>Abstract</b>	<b>XXIV</b>
<b>1. GENERALIDADES</b>	<b>1</b>
1.1. OBJETIVOS . . . . .	1
1.1.1. OBJETIVO GENERAL . . . . .	1
1.1.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS . . . . .	1
1.2. ALCANCES . . . . .	1
1.3. JUSTIFICACIÓN . . . . .	2
1.4. METODOLOGÍA . . . . .	3
1.4.1. ACTIVIDAD 1: REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA . . . . .	3
1.4.2. ACTIVIDAD 2: GENERACIÓN DE ENSAMBLES DE PARTÍCULAS . . . . .	4
1.4.3. ACTIVIDAD 3: MODELAMIENTO Y SIMULACIÓN . . . . .	5
1.4.4. ACTIVIDAD 4: ANÁLISIS DE RESULTADOS . . . . .	5
<b>2. MATERIAL GRANULAR GENERALIDADES</b>	<b>6</b>
2.1. INTRODUCCIÓN . . . . .	6
2.2. MÉTODO DEL ELEMENTO DISCRETO (DEM) . . . . .	8

2.2.1.	ECUACIÓN DE MOVIMIENTO . . . . .	8
2.2.2.	PLANTEAMIENTO NUMÉRICO DEL DEM . . . . .	9
2.2.3.	INTEGRACIÓN DE VERLET . . . . .	10
2.2.4.	INCREMENTO DE TIEMPO . . . . .	11
2.2.4.1.	Incremento de tiempo a partir de la transferencia de energía Rayleigh . . . . .	12
2.2.4.2.	Incremento de tiempo en base a la teoría de con- tacto de Hertz . . . . .	13
2.2.5.	CONTACTO ENTRE PARTÍCULAS . . . . .	14
2.2.5.1.	Esfera rígida . . . . .	14
2.2.5.2.	Esfera suave . . . . .	14
2.2.6.	CONDICIONES DE FRONTERA DEL ELEMENTO DISCRE- TO (DEM) . . . . .	19
2.2.6.1.	Pared Rígida . . . . .	19
2.2.6.2.	Fronteras periódicas . . . . .	19
2.2.7.	CARACTERIZACIÓN DEL CONGLOMERADO . . . . .	20
2.2.7.1.	Fricción . . . . .	21
2.2.7.2.	Ángulo de reposo . . . . .	22
2.2.7.3.	Dilatancia . . . . .	23
2.2.7.4.	Segregación . . . . .	23
2.2.7.5.	Coeficiente de restitución . . . . .	23
2.2.7.6.	Densidad del conglomerado (Bulk density) . . . . .	24
2.2.8.	CARACTERIZACIÓN DE LA PARTÍCULA . . . . .	24
2.2.8.1.	Densidad de la partícula . . . . .	24
2.2.8.2.	Módulo de Young . . . . .	24
2.2.8.3.	Relación de Poisson . . . . .	25
2.2.9.	ENSAMBLES DE PARTÍCULAS . . . . .	25
2.2.9.1.	Ensamble monodisperso . . . . .	25
2.2.9.2.	Ensamble polidisperso . . . . .	25
2.3.	EVALUACIÓN DE DEFORMACIONES . . . . .	27
2.3.1.	INVARIANTES DEL TENSOR DEFORMACIÓN . . . . .	27

2.3.2. INVARIANTES DEL TENSOR DESVIADOR DE DEFORMACIÓN . . . . .	29
2.4. FLUJO DE DESCARGA . . . . .	30
2.4.1. FLUJO MÁSSICO (“MASS FLOW”) . . . . .	30
2.4.2. FLUJO CONCENTRADO (“FUNNEL FLOW”) . . . . .	31
2.5. ATASCOS . . . . .	31
2.5.1. ARCOS . . . . .	31
2.5.2. CADENAS DE FUERZA . . . . .	32
2.6. ESTRUCTURA DE UN PROGRAMA DEM . . . . .	32
2.6.1. PREPROCESAMIENTO . . . . .	33
2.6.1.1. PROCESAMIENTO . . . . .	34
2.6.1.2. POSTPROCESAMIENTO . . . . .	34
<b>3. MODELAMIENTO CONTINUO DE SILOS</b>	<b>36</b>
3.1. INTRODUCCIÓN . . . . .	36
3.2. PREPROCESAMIENTO . . . . .	37
3.2.1. CONDICIONES DE FRONTERA . . . . .	37
3.2.1.1. Geometrías . . . . .	38
3.2.1.2. Generación de la malla de cálculo . . . . .	38
3.2.2. CARACTERIZACIÓN DEL MATERIAL . . . . .	39
3.2.3. LLENADO DEL SILO . . . . .	40
3.2.4. CARGAS . . . . .	40
3.3. PROCESAMIENTO . . . . .	40
3.3.1. INTEGRACIÓN IMPLÍCITA . . . . .	41
3.3.2. INTEGRACIÓN EXPLÍCITA . . . . .	41
3.3.3. MODELOS CONSTITUTIVOS . . . . .	42
3.3.3.1. Criterio de falla de Mohr Coulumb . . . . .	42
3.3.3.2. Criterio de fluencia de Druker-Prager . . . . .	43
3.3.3.3. Consideraciones de fricción y esfuerzo cortante . . . . .	44
3.4. POSTPROCESAMIENTO . . . . .	44
3.5. VENTAJAS Y DESVENTAJAS DE MODELAMIENTO CONTINUO	44



<b>4. MODELAMIENTO DISCRETO DE SILOS</b>	<b>47</b>
4.1. INTRODUCCIÓN . . . . .	47
4.2. GEOMETRÍA DEL SILO . . . . .	48
4.2.1. SILO DE FONDO PLANO . . . . .	48
4.2.2. SILO CON TOLVA DE DESCARGA . . . . .	48
4.3. PROPIEDADES DEL MATERIAL . . . . .	50
4.3.1. PROPIEDADES DEL SILO . . . . .	50
4.3.2. PROPIEDADES DE LA PARTÍCULA . . . . .	50
4.3.2.1. Maíz . . . . .	50
4.3.2.2. Pellets de hierro (iron ore pellets) . . . . .	50
4.3.2.3. Forma de la partícula . . . . .	52
4.3.3. CONDICIONES DE FRONTERA . . . . .	53
4.3.4. GRANULOMETRÍA . . . . .	53
4.3.4.1. Granulometría del maíz . . . . .	53
4.3.4.2. Granulometría de los pellets de hierro . . . . .	54
4.4. ESTABILIDAD E INCREMENTO DE TIEMPO . . . . .	54
4.4.1. TRANSFERENCIA DE ENERGÍA RAYLEIGH . . . . .	55
4.4.2. TIME STEP . . . . .	56
4.5. SCRIPT CARACTERÍSTICO . . . . .	56
<b>5. ANÁLISIS DE RESULTADOS</b>	<b>60</b>
5.1. INTRODUCCIÓN . . . . .	60
5.2. GEOMETRÍA . . . . .	61
5.2.1. ÁNGULO DE REPOSO . . . . .	61
5.2.1.1. Pellets de hierro . . . . .	61
5.2.1.2. Maíz . . . . .	63
5.2.2. AGUJERO DE DESCARGA . . . . .	63
5.2.2.1. Llenado del silo . . . . .	65
5.2.2.2. Pellets de hierro . . . . .	65
5.2.2.3. Maíz . . . . .	66
5.3. PELLETS DE HIERRO . . . . .	66
5.3.1. AGUJERO DE DESCARGA D=35 mm . . . . .	66

5.3.1.1.	Velocidad de descarga . . . . .	66
5.3.1.2.	Esfuerzos en las paredes del silo . . . . .	68
5.3.1.3.	Cadenas de fuerza . . . . .	71
5.3.1.4.	Deformaciones promedio . . . . .	72
5.3.2.	AGUJERO DE DESCARGA D=40 mm . . . . .	75
5.3.2.1.	Velocidad de descarga . . . . .	75
5.3.2.2.	Esfuerzos en las paredes del silo . . . . .	77
5.3.2.3.	Cadenas de fuerza . . . . .	78
5.3.2.4.	Deformaciones promedio . . . . .	79
5.4.	MAÍZ . . . . .	84
5.4.1.	VELOCIDAD DE DESCARGA . . . . .	84
5.4.2.	ESFUERZOS EN LAS PAREDES DEL SILO . . . . .	87
5.4.3.	CADENAS DE FUERZA . . . . .	88
5.4.4.	DEFORMACIONES PROMEDIO . . . . .	91
5.5.	PATRÓN DE ESFUERZOS, DEFORMACIONES PROMEDIO Y CADENAS DE FUERZA EN FUNCIÓN DEL ÁNGULO DE LA TOLVA DEL SILO . . . . .	95
5.5.1.	DEFORMACIONES . . . . .	99
5.5.2.	ESFUERZOS EN LAS PAREDES . . . . .	101
5.5.3.	CADENAS DE FUERZA . . . . .	103
<b>6.</b>	<b>CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES</b>	<b>158</b>
6.1.	CONCLUSIONES . . . . .	158
6.2.	RECOMENDACIONES . . . . .	162
6.3.	TRABAJO A FUTURO . . . . .	163
	Referencias . . . . .	164
	<b>Bibliografía</b>	<b>169</b>
	<b>Apéndice</b>	<b>170</b>
<b>A.</b>	<b>MODELO DEM</b>	<b>170</b>
A.1.	PROPIEDADES DEL MATERIAL . . . . .	170

A.2. DIÁMETRO DE LA PARTÍCULA . . . . .	170
A.3. MASA . . . . .	171
A.4. RIGIDEZ DURANTE LA COLISIÓN . . . . .	171
A.5. RIGIDEZ ENTRE LAS PAREDES Y LA PARTÍCULA . . . . .	171
A.6. AMORTIGUAMIENTO . . . . .	171
A.7. DEFINICIÓN DE LA GEOMETRÍA . . . . .	171
A.8. MALLADO . . . . .	172
A.9. Celdas . . . . .	172
A.10.GRAVEDAD . . . . .	172
A.11.NÚMERO DE PARTÍCULAS POR FILA . . . . .	172
A.12.VELOCIDADES . . . . .	173
A.13.IDENTIFICAR CONSTANTES . . . . .	174
A.14.COMANDO CEIL . . . . .	174
A.15.PARTÍCULAS ALMACENADAS . . . . .	174
A.16.TIMESTEP . . . . .	174
A.17.VELOCIDAD MÁXIMA DE LA PARTÍCULA . . . . .	175
A.18.INTEGRACIÓN DE NEWTON-FEYNMAN . . . . .	175
A.19.CONTACTO ENTRE PARTÍCULAS . . . . .	177
A.20.TRAYECTORIAS . . . . .	179
A.21.Velocidad . . . . .	179
A.22.Posición . . . . .	179
<b>B. INSTALACIÓN SOFTWARE</b>	<b>181</b>
B.1. LIGGGHTS . . . . .	181
B.1.1. INSTALACIÓN . . . . .	181
B.1.2. COMANDOS BÁSICOS . . . . .	182
B.1.2.1. atom style . . . . .	182
B.1.2.2. atom modify . . . . .	182
B.1.2.3. boundary . . . . .	182
B.1.2.4. units . . . . .	182
B.1.2.5. region . . . . .	182
B.1.2.6. create box . . . . .	183

B.1.2.7. neighbor . . . . .	183
B.1.2.8. fix . . . . .	183
B.1.2.9. timestep . . . . .	183
B.2. DUMP2FORCE . . . . .	183
B.2.1. INSTALACIÓN . . . . .	183
B.2.2. COMANDO BÁSICO . . . . .	185
B.3. PIZZA . . . . .	185
B.3.1. INSTALACIÓN . . . . .	185
B.3.2. COMANDOS BÁSICOS . . . . .	186
B.4. PARAVIEW . . . . .	186
<b>C. SCRIPTS DESARROLLADOS</b>	<b>189</b>
C.1. GENERACIÓN DE PARTÍCULAS . . . . .	189
C.1.1. PELLETS DE HIERRO . . . . .	189
C.1.2. MAÍZ . . . . .	191
C.2. DESCARGA DEL SILO . . . . .	193
C.2.1. PELLETS DE HIERRO . . . . .	193
C.2.2. MAÍZ . . . . .	194
<b>D. ENSAYOS GRANULOMÉTRICOS</b>	<b>197</b>
<b>E. PLANOS DE LAS GEOMETRÍAS DE SILOS</b>	<b>199</b>

## Índice de figuras

2.1. Modelo esfera rígida . . . . .	15
2.2. Modelo esfera suave . . . . .	16
2.3. Contacto entre partículas . . . . .	16
2.4. Cálculo de contactos mediante DEM . . . . .	18
2.5. Pared Rígida . . . . .	20
2.6. Fronteras periódicas . . . . .	20
2.7. Caracterización a nivel conglomerado . . . . .	21
2.8. Ángulo de reposo . . . . .	22
2.9. Dilatancia del material granular . . . . .	23
2.10. Caracterización de la partícula . . . . .	24
2.11. Ensamble granular monodisperso . . . . .	26
2.12. Ensamble granular polidisperso . . . . .	26
2.13. Volumen de control delimitado por Convex Hull y discretización de Delaunay . . . . .	28
2.14. Flujo másico . . . . .	30
2.15. Flujo concentrado . . . . .	31
2.16. Arco en la descarga de silos . . . . .	32
2.17. Cadenas de fuerza . . . . .	33
2.18. Etapas de procesamiento . . . . .	35
3.1. Silo con tolva de descarga . . . . .	39
3.2. Distribución lineal de cargas . . . . .	41
3.3. Comparación del criterio de Mohr Coulomb y criterio de Druker Praker . . . . .	43

3.4. Formulación FEM . . . . .	46
4.1. Silo de fondo plano . . . . .	49
4.2. Silo con tolva de descarga . . . . .	49
4.3. Forma considerada de las partículas de maíz . . . . .	52
4.4. Forma considerada de las partículas de pellets de hierro . . . . .	53
4.5. Condición de pared rígida . . . . .	54
4.6. Granulometría de los pellets de hierro . . . . .	55
5.1. Obtención del ángulo de reposo . . . . .	62
5.2. Ángulo de reposo de los pellets de hierro . . . . .	62
5.3. Ángulo de reposo del maíz . . . . .	63
5.4. Agujeros de descarga de diferentes diámetros . . . . .	64
5.5. Llenado del silo . . . . .	65
5.6. Velocidad promedio vs Ángulo de la tolva en silos con agujero de descarga de 35 mm de diámetro con partículas que representan a los pellets de hierro . . . . .	68
5.7. Esfuerzos cortantes medios en las paredes del silo de 35 mm de diámetro con partículas de pellets de hierro . . . . .	69
5.8. Presión promedio en las paredes del silo de 35 mm de diámetro con partículas de pellets de hierro . . . . .	70
5.9. Cadenas de fuerza vs ángulo de la tolva en silos de 35 mm de diámetro con partículas de pellets de hierro . . . . .	72
5.10. Invariante hidrostática entre partículas de pellets de hierro silo de 35 mm de diámetro . . . . .	73
5.11. Invariante desviadora ( $J_2$ ) entre partículas de pellets de hierro silo de 35 mm de diámetro . . . . .	75
5.12. Velocidad promedio vs Ángulo de la tolva en silos con agujero de descarga de 40 mm de diámetro con partículas que representan a los pellets de hierro . . . . .	76
5.13. Esfuerzos cortantes máximos vs Ángulo de la tolva en silo de 40 mm de diámetro . . . . .	78

5.14. Presión máxima promedio vs Ángulo de la tolva en silo de 40 mm de diámetro . . . . .	79
5.15. Cadenas de fuerzas en silo de 40 mm de diámetro con partículas de pellets de hierro . . . . .	80
5.16. Deformaciones en función del ángulo de reposo del material granular	82
5.17. Invariante hidrostática $I_1$ entre partículas de pellets de hierro silo de 40 mm de diámetro . . . . .	82
5.18. Invariante desviadora $J_2$ entre partículas de pellets de hierro silo de 40 mm de diámetro . . . . .	84
5.19. Velocidad promedio al inicio de la descarga vs Ángulo de la tolva en silos con agujero de descarga de 30 mm de diámetro con partículas que representan al maíz . . . . .	86
5.20. Velocidad promedio a 10 s de iniciada la descarga vs Ángulo de la tolva en silos con agujero de descarga de 30 mm de diámetro con partículas que representan al maíz . . . . .	87
5.21. Esfuerzos cortantes en las paredes del silo de 30 mm de diámetro con partículas de maíz . . . . .	89
5.22. Presión en las paredes del silo de 30 mm de diámetro con partículas de maíz . . . . .	90
5.23. Cadenas de fuerzas en silo de 30 mm de diámetro con partículas de maíz . . . . .	91
5.24. Invariante hidrostática ( $I_1$ ) de pellets de hierro silo de 30 mm de diámetro . . . . .	94
5.25. Invariante desviadora ( $J_2$ ) de pellets de hierro silo de 30 mm de diámetro . . . . .	94
5.26. Diagrama de cuerpo de partículas en silo plano . . . . .	97
5.27. Diagramas de cuerpo libre para partículas contenidas dentro de un silo con tolva de descarga . . . . .	98
5.28. Deformación vs Ángulo de la tolva . . . . .	100
5.29. Presión vs Ángulo de la tolva teórico . . . . .	102
5.30. Esfuerzo cortante teórico vs Ángulo de la tolva . . . . .	103
5.31. Fuerza teórica entre partículas vs Ángulo de la tolva . . . . .	104

5.32. Determinación del agujero crítico de descarga de los pellets de hierro	105
5.33. Determinación del agujero crítico de descarga del maíz . . . . .	106
5.34. Proceso de atascamiento en silo de fondo plano y agujero de 17.5 mm . . . . .	107
5.35. Proceso de atascamiento en silo de 15 grados . . . . .	108
5.36. Proceso de atascamiento en silo de 20 grados de tolva y agujero de 35 mm de diámetro con partículas de pellets de hierro . . . . .	109
5.37. Proceso de atascamiento en silo de 26 grados de tolva y agujero de 35 mm de radio con partículas de pellets de hierro . . . . .	110
5.38. Proceso de atascamiento en silo de 30 grados y agujero de 35 mm de diámetro con partículas de pellets de hierro . . . . .	111
5.39. Proceso de atascamiento en silo de 35 grados de tolva y agujero de 35 mm de diámetro con partículas de pellets de hierro . . . . .	112
5.40. Velocidad media de descarga de pellets de hierro en silos de agu- jero de 35 mm . . . . .	113
5.41. Velocidad media de descarga de pellets de hierro en silos de agu- jero de 40 mm . . . . .	114
5.42. Patrones de velocidad de un silo de fondo plano de diámetro 40 mm que almacena pellets de hierro . . . . .	115
5.43. Patrones de velocidad de un silo con tolva de 15 grados y diámetro de 40 mm que almacena pellets de hierro . . . . .	116
5.44. Patrones de velocidad de un silo con tolva de 20 grados y diámetro de 40 mm que almacena pellets de hierro . . . . .	117
5.45. Patrones de velocidad de un silo con tolva de 26 grados y diámetro de 40 mm que almacena pellets de hierro . . . . .	118
5.46. Patrones de velocidad de un silo con tolva de 30 grados y diámetro de 40 mm que almacena pellets de hierro . . . . .	119
5.47. Patrones de velocidad de un silo con tolva de 35 grados y diámetro de 40 mm que almacena pellets de hierro . . . . .	120
5.48. Patrones de velocidad en silo plano con partículas de maíz . . . . .	121
5.49. Patrones de velocidad de un silo con tolva de 15 grados que con- tiene partículas de maíz . . . . .	122



5.50. Patrones de velocidad de un silo con tolva de 20 grados que contiene partículas de maíz . . . . .	123
5.51. Patrones de velocidad de un silo con tolva de 28 grados que contiene partículas de maíz . . . . .	124
5.52. Patrones de velocidad de un silo con tolva de 30 grados que contiene partículas de maíz . . . . .	125
5.53. Velocidad media al inicio de la descarga de maíz . . . . .	126
5.54. Velocidad media de descarga en el maíz . . . . .	127
5.55. Esfuerzos cortantes en las paredes de silos de fondo plano y tolva de descarga lleno de pellets . . . . .	128
5.56. Esfuerzos cortantes durante la descarga de material granular en un silo con tolva de 30 grados de pendiente lleno de pellets de hierro	129
5.57. Esfuerzos cortantes en silos con diámetro de agujero de descarga de 35 mm con pellets de hierro . . . . .	130
5.58. Presión en las paredes del silo de diámetro 35 mm que contiene partículas que representan a los pellets de hierro . . . . .	131
5.59. Esfuerzos cortantes en silos con diámetro de agujero de descarga de 40 mm con pellets de hierro . . . . .	132
5.60. Presión en las paredes del silo de diámetro 40 mm que contiene partículas que representan a los pellets de hierro . . . . .	133
5.61. Comparación de esfuerzos cortantes en las paredes del silo vs ángulo de la tolva de descarga para el maíz y pellets de hierro . .	134
5.62. Esfuerzos cortantes en las paredes de silos de fondo plano y tolva de descarga lleno de maíz . . . . .	135
5.63. Presiones en las paredes del silo de 30 mm de diámetro que contiene partículas de maíz . . . . .	136
5.64. Cadenas de fuerza entre partículas en silo plano con diámetro . .	137
5.65. Cadenas de fuerza entre partículas en silo de diámetro 35 mm y tolva de 15 grados . . . . .	138
5.66. Cadenas de fuerza entre partículas en silo de diámetro 35 mm y tolva de 20 grados . . . . .	139

5.67. Cadenas de fuerza entre partículas en silo de diámetro 35 mm y tolva de 26 grados . . . . .	140
5.68. Cadenas de fuerza entre partículas en silo de diámetro 35 mm y tolva de 30 grados . . . . .	141
5.69. Cadenas de fuerza entre partículas en silo de diámetro 35 y tolva de 35 grados . . . . .	142
5.70. Arco formado en un silo de 35 grados de tolva y diámetro 35 mm .	143
5.71. Cadenas de fuerza entre partículas en silo plano de diámetro 40 mm	144
5.72. Cadenas de fuerza entre en silo de diámetro 40 mm y tolva de 15 grados . . . . .	145
5.73. Cadenas de fuerza entre partículas en silo de diámetro 40 mm y tolva de 20 grados . . . . .	146
5.74. Cadenas de fuerza entre partículas en silo de diámetro 40 mm y tolva de 26 grados . . . . .	147
5.75. Cadenas de fuerza entre partículas en silo de diámetro 40 mm y tolva de 30 grados . . . . .	148
5.76. Cadenas de fuerza entre partículas en silo de diámetro 40 mm y tolva de 35 grados . . . . .	149
5.77. Fuerzas entre partículas para las diferentes distribuciones de silos	150
5.78. Fuerzas entre partículas de maíz en silo plano y agujero de descarga de diámetro 30 mm . . . . .	151
5.79. Fuerzas entre partículas de maíz en silo con tolva de 15 grados y agujero de descarga de diámetro 30 mm . . . . .	152
5.80. Fuerzas entre partículas de maíz en silo con tolva de 20 grados y agujero de descarga de diámetro 30 mm . . . . .	153
5.81. Fuerzas entre partículas de maíz en silo con tolva de 28 grados y agujero de descarga de diámetro 30 mm . . . . .	154
5.82. Fuerzas entre partículas de maíz en silo con tolva de 30 grados y agujero de descarga de diámetro 30 mm . . . . .	155
5.83. Fuerzas entre partículas de maíz en silo con tolva de 35 grados y agujero de descarga de diámetro 30 mm . . . . .	156

5.84. Arco formado por la transmisión de cadenas de fuerzas en silo de 35 grados de tolva y agujero de descarga 30 mm de diámetro . . .	157
B.1. Terminal de Linux . . . . .	181
B.2. Ejecución de Dump2force . . . . .	185
B.3. Instalación ParaView . . . . .	186
B.4. Flujograma de instalación de Liggths . . . . .	187
B.5. Flujograma de instalación de dump2force . . . . .	188
D.1. Ensayo granulométrico realizado en el Departamento de Metalurgia Extractiva de la EPN . . . . .	198

## Índice de tablas

4.1. Propiedades del silo de concreto consideradas para el ensamble de partículas granulares . . . . .	50
4.2. Propiedades del maíz . . . . .	51
4.3. Propiedades de los pellets de hierro consideradas para el ensamble de partículas . . . . .	51
4.4. Granulometría del maíz . . . . .	55
5.1. Velocidad media en el inicio de la descarga (ver figura 5.40) de pellets de hierro en silos con diámetro del agujero de descarga de 35 mm . . . . .	67
5.2. Esfuerzos cortantes máximos en silos con diámetro del agujero de descarga igual a 35 mm, material atascado . . . . .	69
5.3. Presión promedio en silos de radio del agujero de 17.5 mm con pellets de hierro, en los cuales se produjo atascos . . . . .	70
5.4. Fuerza normal máxima promedio entre partículas en la descarga de silos con radio del agujero de 17.5 mm . . . . .	71
5.5. Deformaciones promedio entre partículas de pellets de hierro en silo con agujero de descarga de diámetro 35 mm . . . . .	74
5.6. Velocidad media en silos con radio del agujero de 40 mm de diámetro	76
5.7. Esfuerzos cortantes máximos en silos con radio del agujero de 20 mm sin atasco, que contienen pellets de hierro . . . . .	77
5.8. Presiones en silos con radio del agujero de 20 mm sin atasco . . . . .	78
5.9. Fuerza máxima promedio en la descarga de silos con radio del agujero de 20 mm . . . . .	80

5.10. Deformaciones promedio entre partículas de pellets de hierro en silo con agujero de descarga de diámetro 40 mm . . . . .	83
5.11. Velocidad media al inicio de la descarga de maíz . . . . .	85
5.12. Velocidad media pasado 10 segundos de iniciada la descarga de maíz . . . . .	86
5.13. Esfuerzos cortantes promedio en las paredes del silo de 30 mm de agujero de descarga con partículas que representan al maíz . . . . .	88
5.14. Presión en las paredes del silo de 30 mm de agujero de descarga con partículas que representan al maíz . . . . .	89
5.15. Cadenas de fuerza entre partículas de maíz contenidas en silos de 30 mm de diámetro. . . . .	91
5.16. Deformaciones promedio entre partículas de maíz . . . . .	93
5.17. Fuerzas entre partículas . . . . .	99
5.18. Deformaciones entre partículas . . . . .	100
5.19. Esfuerzos en las paredes del silo . . . . .	102
5.20. Fuerzas entre partículas . . . . .	104
D.1. Granulometría del maíz . . . . .	197

## Resumen

Los silos son estructuras utilizadas para almacenar material granular. Su estudio, por lo general, se lo realiza con la mecánica del medio continuo. Esto implica limitaciones desde el punto de vista micro-mecánico, efectos como el flujo de descarga, la interacción partícula-partícula no se los considera. La necesidad de conocer estas características del material granular ocasionó la formulación del siguiente objetivo general: “Estudiar desde una perspectiva micro-mecánica el flujo de descarga de material granular en silos de almacenamiento”. Para alcanzar este propósito global se empleó el Método del Elemento Discreto (DEM). Para fortalecer la estructura de este documento se adoptó como objetivos específicos los siguientes:

- Describir los conceptos fundamentales del elemento discreto.
- Generar ensambles de partículas (tamaño, distribución granulométrica), para representar al material granular almacenado en silos.
- Modelar y simular el proceso de descarga de material granular en silos mediante el método del elemento discreto.
- Evaluar valores promedio de esfuerzos, deformaciones, cinemática y fuerzas de contacto entre partículas durante el proceso de descarga.
- Estudiar la influencia de la geometría en el proceso de descarga.

Para alcanzar los propósitos planteados se elaboró una metodología que constó de procedimientos científicos que facilitaron el desarrollo de los objetivos generales y específicos. Se realizó la revisión bibliográfica de múltiples autores que contribuyeron en la formulación del marco teórico de esta monografía. Se generó en-

sambles de partículas para los materiales granulares maíz y pellets de hierro. Los conjuntos de partículas creados permitieron obtener resultados que posteriormente fueron analizados. Estos procedimientos aplicados se los detalla en el capítulo 1.

Las generalidades que conlleva el estudio del material granular se aclaran en el capítulo 2. La formulación del Método del Elemento Discreto (DEM), entre otras cosas, se compone de la ecuación de movimiento que cuantifica los efectos translacionales, rotacionales y fuerzas externas e internas en el ensamble de partículas. Al final todos estos argumentos se los relaciona y estudia mediante el modelo de Cundall y Strack (1979). Otro aspecto que debe considerarse y se especificó en esta parte del texto son las propiedades mecánicas y físicas del material granular que se las emplea para modelar las partículas representativas de maíz y pellets de hierro. Esta revisión teórica permitió identificar los conceptos necesarios para modelar al material granular con DEM y poder ejecutar sus respectivas simulaciones.

Para sustentar la utilización del DEM como herramienta de análisis del flujo granular en silos, en el capítulo 3 se incluye una revisión teórica del modelamiento continuo utilizado en el estudio de silos. El Método del Elemento Finito (FEM) es la base teórica que permite formular modelos que representan al material granular. Como todo problema planteado por FEM debe tomarse en cuenta los procedimientos de preprocesamiento, procesamiento y postprocesamiento para generar resultados. Las condiciones de frontera, las propiedades del material granular y las cargas que actúan se las define en el preprocesamiento. Los modelos de Druker-Prager y Mohr-Coulomb se los emplea en el procesamiento, para producir resultados de esfuerzos y deformaciones en las paredes del silo. Al final de este capítulo se propone varias semejanzas y diferencias entre los modelos DEM y FEM.

En el capítulo 4 se describe el modelamiento y la formulación DEM en las partículas que representan al maíz y pellets de hierro. En esta sección se especifica la granulometría, propiedades físicas y mecánicas del conglomerado de material granular, y geometrías empleadas. Cada una de los parámetros que caracterizan al material permitieron formular un script de procesamiento. El script es un

bloque de comandos en donde no solo se especifica las propiedades del material, sino también condiciones relevantes para la simulación como condiciones de cohesión, gravedad, etc. Al ejecutar este archivo de órdenes se genera ensambles de partículas en los cuales se cuantifica la interacción partícula-partícula y partícula-pared del silo. Los datos de post-procesamiento obtenidos son de posición, y velocidad de cada partícula en el ensamble granular. El procesamiento de los scripts de datos se realiza con el programa LIGGGHTS.

El análisis de resultados se lo realiza a partir de los archivos generados por el software de procesamiento. Su estudio parte de la selección de un volumen de control (VC) adecuado. En este caso se optó por un VC localizado en la región de la boca de descarga del silo, sección en la cual se distingue el flujo concentrado ("Funnel Flow"). En el capítulo 5 se presenta el análisis de resultados. La influencia de la geometría del silo, la inclinación de la tolva y diámetro del agujero de descarga en perfiles de velocidad, esfuerzos en las paredes del silo, cadenas de fuerza y deformaciones se cuantifican en este capítulo. Para facilitar la comprensión de los resultados se ha dispuesto de varios gráficos que relacionan los resultados en función del ángulo de la tolva. Esto ha ocasionado comprender el efecto del ángulo de reposo del material granular en perfiles de velocidad, esfuerzos en las paredes, etc.

En el capítulo 6 se especificó las conclusiones y recomendaciones del proyecto. Entre los más destacado se puede decir que el ángulo de reposo del material granular influyó en los distintos resultados adquiridos de las simulaciones. En el caso de perfiles de velocidad, cuando el ángulo de la tolva va de  $15^\circ$  al ángulo de reposo la magnitud de la velocidad disminuye. Pero si la tolva es mayor a  $26^\circ$ , la velocidad de descarga se incrementa. Por otro lado el esfuerzo en las paredes, cadenas de fuerza y deformaciones aumentan cuando la inclinación de la tolva se acerca en pendiente al ángulo de reposo del material granular (maíz, pellets de hierro). Pero cuando la tolva es mayor al ángulo de reposo los resultados de velocidad, esfuerzos y deformaciones disminuyen de magnitud.



## Abstract

Silos are structures that have been used for a long time in industry. The study of these storage systems has been developed for years with continuum methods. The interaction among particles and granular flow are not considered by this mathematical system. The main purpose of this project is to study from a micro-mechanic approach the flow discharge in silos. In order to reach this goal, the Distinct Element Method (DEM) was regarded.

To strengthen the content of this project the next specific objectives have been proposed and reached:

- To describe the fundamental concepts of Distinct Element Method.
- To generate particle assemblies (size and granulometry) to represent granular material in silos.
- To model and run simulations of granular material during silo's discharge.
- To examine values of stresses and average strains, force chains among particles and velocity patterns during the silo's discharge.
- To study the geometry influence during granular material discharge.

This project has been set in several chapters, each one with specific information about the modelling and formulation of particle assemblies with DEM to reach the objectives. In the first part, the essential theory which take part in the development of discrete models is considered. The influence of granulometry, the basic physical and mechanical properties used in DEM are described so as to understand their importance in micro-mechanics.

Afterwards, a revision of continuum methods has been done in order to compare them with DEM features. In this section, the classical considerations made by The Finite Element Method (FEM) such as boundary conditions, loads distribution, the filling and discharge of silos are reviewed to clarify the FEM formulation. At the end of this chapter, a contrast between DEM and FEM were formulated to recognize the similarities and differences in these numerical models. DEM considers each particle in a set of granular material, while FEM regards all the grain components of an assembly as a unique material, this was the most important difference found out in this section.

The DEM modelling, which considers the physical, mechanical properties, granulometry, simulation time steps, and silo's geometries, is described in the chapter 4 of this document. The parameters that describe a particle assembly are useful during the development of a script. The script is a set of steps that are followed sequentially as a string as long as a simulation is running. After the simulation, position and velocity data are displayed in a post processing file. To process the scripts and run simulations the LIGGGHTS software has been selected to generate the post-processing information.

The analysis results are described in the chapter 5. In this section, the connection between the silo's hopper, diameter of outlet, and the granular material is checked. In order to study these effects in the silo, a control volume (CV) is selected in the section where the granular flow is concentrated, near to the diameter of outlet. This region was chosen because of the sort of flow which is "Funnel Flow". With a CV specified, the influence of the silo's hopper is analysed. It affects the behaviour in velocities patterns, strains, stresses and force chains. Another important parameter, which was modified, was the diameter of outlet. This modify the speed of flow during the discharge in all the silos.

All the steps followed in the development of this project have made possible several conclusions. The angle in the hopper at the time of silo's discharge displayed a trend in the results. Some of them such as velocity magnitude show a decrease when the chute is less than the repose angle of the granular material. On the other hand, when the hopper's angle is more sloped than the repose angle, the value of the velocity increases. In the case of strains, shear stresses and force

chains, their magnitudes increased when the hopper's slope was not as leaned as the repose angle. Otherwise, as long as the chute angle was higher than the material repose angle, the strains, shear stresses and force chains magnitudes had reduced.

# CAPÍTULO 1

## GENERALIDADES

### 1.1. OBJETIVOS

#### 1.1.1. OBJETIVO GENERAL

Estudiar desde una perspectiva micro-mecánica el proceso de descarga de material granular en silos de almacenamiento.

#### 1.1.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Describir los conceptos fundamentales del elemento discreto.
2. Generar ensambles de partículas (tamaño, distribución granulométrica), para representar al material granular almacenado en silos.
3. Modelar y simular el proceso de descarga de material granular en silos mediante el método del elemento discreto.
4. Evaluar valores promedio de esfuerzos, deformaciones, cinemática y fuerzas de contacto entre partículas durante el proceso de descarga.
5. Estudiar la influencia de la geometría en el proceso de descarga.

### 1.2. ALCANCES

1. Este es un estudio a nivel micro-mecánico. Para la etapa de modelamiento y simulación de la descarga se usará software libre basado en el método

del elemento discreto.

2. El proyecto analizará geometrías de silo diferentes, en un intento por divisar su influencia en el proceso de descarga.
3. El proyecto se enfocará en el análisis de fuerzas de contacto entre partículas, esfuerzos y deformaciones promedio en el silo durante la descarga.
4. La demanda computacional de este tipo de simulación impone exigencias de procesamiento en paralelo. Este estudio se limitará al uso de computadores con capacidad de procesamiento serial únicamente.
5. La etapa de modelamiento se limitará al uso de ensambles esféricos poli-dispersos para representar al material granular.

### 1.3. JUSTIFICACIÓN

El objetivo fundamental de este estudio es analizar el proceso de descarga en silos de almacenamiento de material granular considerando al grano como componente fundamental en la cual se codifica la respuesta macro-estructural de este tipo de materiales. Con este objetivo en mente, se propone modelar y simular el proceso de descarga usando el método del elemento discreto, herramienta numérica que representa el estado del arte en materia de modelación de materiales granulares. Todo esfuerzo por modelar y simular materiales granulares a nivel continuo debe estar guiado por el hecho de que la mecánica de fuerzas de contacto entre partículas es la que gobierna la respuesta estructural global del conglomerado granular. Este trabajo se enmarca en este contexto y pretende divisar la influencia de la geometría del silo y de ciertas propiedades del material granular en la micro-mecánica del proceso de descarga de un silo de almacenamiento.

El costo computacional que implica el uso del elemento discreto limita este estudio a una propuesta de modelos a escala en lo que se refiere al tamaño del silo a modelar y por consiguiente el número de partículas que se representarán. Sin embargo, es importante mencionar que este hecho no se contrapone con los

objetivos de este estudio ,esto es, entender la mecánica que se generan a nivel granular durante la descarga y su relación con la respuesta del conglomerado granular como un todo.

Este proyecto pretende dar respuesta a las siguiente preguntas fundamentales:

1. ¿Cuál es la influencia de la geometría del silo en la cinemática de las partículas durante la descarga?
2. ¿Cuál es la influencia de la geometría del silo en el estado de esfuerzos y deformaciones en la zona de descarga?.

El responder a estas preguntas fundamentales podría impactar el estado actual de entendimiento del proceso de descarga en silos de almacenamiento y permitiría divisar estrategias para mejorar las relaciones constitutivas usadas a nivel continuo para representar macroscópicamente este problema. En la parte aplicativa, esta investigación aportará un mejor entendimiento de la relación geometría-respuesta estructural, y por tanto podría en un determinado momento dar luces en la optimización del diseño de la geometría de silos de almacenamiento. Este trabajo se enmarca dentro de los esfuerzos de la Facultad de Ingeniería Mecánica en fortalecer líneas de investigación en el área de materiales, y tiene el potencial de mejorar prácticas ingenieriles en materia de diseño de sistemas industriales en donde la presencia de materiales granulares es determinante.

## **1.4. METODOLOGÍA**

### **1.4.1. ACTIVIDAD 1: REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA**

Para sustentar el contenido del marco teórico expuesto en este proyecto de titulación, se ha consultado diferentes artículos técnicos, libros especializados y fuentes electrónicas que contienen información sobre materiales granulares.

Se puede destacar libros especializados como el de Sullivan (2010) “Particulate Discrete Element Modelling” que da una visión general sobre las consideraciones del modelamiento de material granular con el Método del Elemento Discreto (DEM). El artículo escrito por Cundall y Strack (1979) “A discrete numerical model

for granular assemblies” presenta los primeros estudios realizados con material granular mediante DEM.

Poschel y Schwager (2011) “Computational Granular Dynamics” y Sullivan (2010) describen los parámetros considerados en el modelamiento DEM para material granular. Dichos documentos citan varios programas computacionales (LAMMPS, LIGGGHTS y el PFC3D) que permiten modelar al material granular.

Por otra parte se hace necesario una revisión de publicaciones previas respecto al estudio de silos mediante el Método del Elemento Finito (FEM). Entre la documentación investigada para el modelamiento continuo está: Brown (2007) “Numerical analysis of silo discharge”, Ayuga, Moya, Guaita (2002) “Mechanical properties of granular agricultural materials considered in silos design”, Vásquez (2006), “Simulación de empujes del material almacenado en silos con modelos de comportamiento del material no elásticos”.

#### **1.4.2. ACTIVIDAD 2: GENERACIÓN DE ENSAMBLES DE PARTÍCULAS**

La forma y granulometría del material granular permite modelar numéricamente ensambles de partículas. En el proyecto se considera a las partículas del sistema esféricas, debido a la limitación tecnológica de modelar formas irregulares.

El tamaño de los pellets de hierro está especificado en el documento de Brown (2007) “Numerical analysis of silo discharge”. La granulometría del maíz se la obtuvo experimentalmente en el Laboratorio de Extracción de Suelos de la Escuela Politécnica Nacional.

La herramienta informática que se empleará en este proyecto es el software de distribución libre LIGGGHTS. La descripción secuencial para generar el ensamble de partículas se encuentra en el Anexo 3.

### **1.4.3. ACTIVIDAD 3: MODELAMIENTO Y SIMULACIÓN**

La etapa de modelamiento radica en caracterizar numéricamente las propiedades físicas y mecánicas de la interacción silo-partícula y partícula-partícula. La relación entre partículas se describe en base al modelo de contacto de Hertz.

La granulometría, las propiedades físicas y mecánicas del material definen el tamaño y el comportamiento de las partículas para crear flujo granular que llenará el silo. Con el silo lleno se procede a modelar la descarga manteniendo las condiciones iniciales del ensamble de partículas, modificando únicamente la geometría del silo. La descarga a través del agujero se da por acción de la gravedad.

La simulación de la descarga se realiza por DEM.

### **1.4.4. ACTIVIDAD 4: ANÁLISIS DE RESULTADOS**

El análisis de resultados presenta observaciones de datos numéricos en base a:

1. Tipo de material granular.
2. Geometría del silo.

Los resultados recolectados son de posiciones, velocidades, fuerzas entre partículas y esfuerzos en las paredes del silo. A partir de estos parámetros se obtiene perfiles de velocidad y deformaciones promedio. Su estudio clarificará la interacción entre partículas y la relación de estas con el recipiente que las contiene.



# CAPÍTULO 2

## MATERIAL GRANULAR

### GENERALIDADES

#### 2.1. INTRODUCCIÓN

“Material granular” es un término general, utilizado para detallar a conjuntos de partículas, cuyas propiedades a nivel conglomerado son diferentes que a nivel individual.

El estudio del material granular es de gran importancia en la ingeniería debido a sus múltiples aplicaciones en la industria. Un análisis del comportamiento del material granular evitaría futuros problemas en industrias como la construcción o la farmacéutica.

La necesidad de almacenar al material granular en sitios frescos y seguros llevó, al desarrollo de tanques de almacenamiento cuya denominación ulterior es “Silo”. El objetivo principal del silo es almacenar el material durante un tiempo, para luego descargarlo para una determinada aplicación.

Uno de los principales problemas durante la descarga de material en el silo son los denominados atascos. El atasco puede ser definido como el corte de flujo granular durante la descarga de un recipiente de almacenamiento de material. Industrialmente los atascos se dan al descargar material (maíz, píldoras farmacéuticas, pellets, etc) de un silo provocando pérdidas de tiempo, y retrasando procesos productivos.

Los problemas que generan los atascos en ciertos procesos industriales, hacen

necesario un estudio científico de los medios granulares. Los primeros estudios sobre el comportamiento del material granular los presentaron Goodman y Cowe (1972), Savage (1979) y McTigue (1982) postulando que un gran conjunto de partículas sólidas se comportan como un fluido (Elaskar y Godoy, 2001; Babié, 1988).

El Método del Elemento Discreto DEM, es el marco teórico a emplearse en el presente estudio. El DEM es un método numérico de simulación que permite modelar material granular como la arena, maíz, soya, etc. (Cundall y Strack, 1979; O' Sullivan, 2010; Baba Ahmend, Nsom, Allal, y Ghomari, 2010). El modelamiento de material granular mediante DEM, permite representar las propiedades que caracterizan tanto a la partícula como al conglomerado granular. Entendiendo también las relaciones de contacto entre partículas, y el tipo de respuesta que se da en el material al existir contacto entre partículas. (Baba Ahmend y cols., 2010; Babié, 1988).

El DEM se presenta como una alternativa a la utilización de métodos convencionales como el Método del Elemento Finito (FEM). El FEM considera al conglomerado granular como material continuo, por lo que, los movimientos relativos traslacionales y rotacionales de la partícula no son considerados. (O' Sullivan, 2010; Baba Ahmend y cols., 2010)

La solución de las ecuaciones diferenciales que gobiernan el fenómeno requiere la utilización de métodos numéricos y su implementación en herramientas informáticas que permitan simular la descarga de material granular. Ejecutada la simulación se puede generar conclusiones sobre la influencia de diferentes parámetros que van a ser variables durante el estudio, como la geometría del silo, tamaño de los granos, homogeneidad, etc.

El modelo DEM formulado en este trabajo es una representación a escala del problema, debido al alto costo computacional que implica manejar gran cantidad de partículas.

## 2.2. MÉTODO DEL ELEMENTO DISCRETO (DEM)

El Método del Elemento Discreto ha ido ganando aceptación en el estudio micro-mecánico de sistemas granulares. Su aplicabilidad toma sentido en materiales complejos que no pueden analizarse con precisión mediante el modelamiento continuo.

El modelamiento discreto considera para su análisis a un sistema de partículas que interactúan entre sí. Cada partícula componente de este ensamble granular se la identifica de manera separada considerando sus propiedades individuales como son su masa o densidad. Además se considera también características de la partícula a nivel conglomerado. (Sykut, Molenda, y Horabik, 2007)

### 2.2.1. ECUACIÓN DE MOVIMIENTO

La ecuación general que representa el movimiento traslacional de partículas y su interacción (O' Sullivan, 2010; Zhu, Zhou, Yang, y Yu, 2007), se la expresa en la ecuación 2.1:

$$m_p \ddot{\mathbf{u}}_p = \sum_{c=1}^{N_{c,p}} \mathbf{F}_{pc}^{con} + \sum_{j=1}^{N_{nc,p}} \mathbf{F}_{pj}^{non-con} + \mathbf{F}_p^f + \mathbf{F}_p^g + \mathbf{F}_p^{app} \quad (2.1)$$

Donde:

$\ddot{\mathbf{u}}_p$  es el vector aceleración para la partícula p.

$\mathbf{F}_{pc}^{con}$  son las fuerzas de contacto entre partículas y bordes definidos.

$\mathbf{F}_{pj}^{non-con}$  representan las fuerzas que no están presentes en el contacto entre partículas.

$\mathbf{F}_p^f$  es la fuerza debida a la interacción de una partícula con un fluido.

$\mathbf{F}_p^g$  es la fuerza gravitacional.

$\mathbf{F}_p^{app}$  fuerza externa aplicada sobre una partícula.

El DEM implementa una solución numérica a la ecuación 2.1, que considera parámetros adicionales no estimados en la ecuación de equilibrio de Newton.

### 2.2.2. PLANTEAMIENTO NUMÉRICO DEL DEM

En un problema de modelamiento basado en DEM generalmente se hacen varias suposiciones que facilitan su resolución. Las consideraciones se listan a continuación: (O' Sullivan, 2010)

1. Las partículas son rígidas, es decir, poseen su propia masa e inercia.
2. Las partículas se mueven independientemente una de otra. Se considera para cada partícula el movimiento rotacional y traslacional, tomado en cuenta su posición y velocidad.
3. El software identifica automáticamente el contacto entre partículas.
4. El contacto entre partículas se da en una superficie infinitesimal de contacto, y este se produce únicamente entre dos partículas. Se considera un modelo de masa resorte para representar el contacto entre partículas.
5. El traslape entre dos partículas se da en el punto de contacto durante la colisión.
6. La fuerza compresiva de interacción entre partículas se la puede obtener a partir de la magnitud de traslape.
7. En los puntos de contacto, es posible que se transmita las fuerzas de compresión y tensión en las direcciones normales de contacto, así como las fuerzas tangenciales de contacto son perpendiculares a las fuerzas de contacto normales.
8. Las fuerzas de contacto entre partículas se las calcula considerando la distancia de separación entre dos partículas. Una vez la fuerza de contacto supere el valor máximo de tensión en ese instante, las partículas se alejan una de otra y el contacto pasa a ser nulo. Posteriormente este contacto cero no se lo considera para el cálculo de fuerzas normales de contacto.
9. El incremento de tiempo ( $\Delta t$ ) debe ser lo suficientemente pequeño para que el movimiento de una partícula en base a un timestep sea lo suficien-

temente pequeño para influenciar únicamente a las partículas cercanas en el conglomerado.

10. Un conjunto de partículas puede ser usado para representar a un sistema de mayor tamaño, el movimiento relativo entre las partículas componentes del conglomerado pueden causar deformación en el ensamble granular.

### 2.2.3. INTEGRACIÓN DE VERLET

La integración de Verlet es un método numérico que permite resolver la ecuación 2.1 de movimiento de Newton. Mediante el algoritmo de Verlet se determina las trayectorias de las partículas en un ensamble granular, manteniendo estabilidad en los resultados. El incremento de tiempo (time step) se obtiene de conceptos como la transferencia de energía de Rayleigh, y la teoría de contacto de Hertz. (Sadus, 2002; Verlet, 1967; Kloss, 2010; Sykut y cols., 2007)

En base a la ecuación de movimiento 2.1, se escoge primero un time step ( $\Delta t > 0$ ), que sirve como punto de inicio del muestreo hasta que  $t_n = n\Delta t$ .

$$m_p \ddot{\mathbf{x}}_p = \sum_{c=1}^{N_{c,p}} \mathbf{F}_{pc}^{con} + \sum_{j=1}^{N_{nc,p}} \mathbf{F}_{pj}^{non-con} + \mathbf{F}_p^f + \mathbf{F}_p^g + \mathbf{F}_p^{app}$$

El método de Verlet busca construir una secuencia de puntos  $\vec{x}_n$ , que sigan estrechamente a los puntos de la trayectoria que corresponden a la solución exacta  $\vec{x}(t_n)$ . (Sadus, 2002; Verlet, 1967)

La integración de Verlet es una aproximación de la segunda derivada de la ecuación de movimiento, ecuación 2.2.

$$\frac{\Delta^2 \vec{x}_n}{\Delta t^2} = \frac{\frac{\vec{x}_{n+1} - \vec{x}_n}{\Delta t} - \frac{\vec{x}_n - \vec{x}_{n-1}}{\Delta t}}{\Delta t} = \frac{\vec{x}_{n+1} - 2\vec{x}_n + \vec{x}_{n-1}}{\Delta t^2} = \vec{a}_n = A(\vec{x}_m) \quad (2.2)$$

Donde:

$\vec{a}_n = A(\vec{x}_n)$ : es la aceleración de la partícula  $i$  en un determinado tiempo.

Mediante la ecuación 2.3 se puede obtener la posición subsecuente de una partícula; a partir de los valores previos (Método de Stormer).

$$\vec{x}_{n+1} = 2\vec{x}_n - \vec{x}_{n-1} + \vec{a}_n \Delta t^2 \quad (2.3)$$

La simetría inherente del tiempo especificada en este método reduce los errores dados por la discretización de tiempo ocurrida por la reducción de grados de libertad. Para cuantificar el valor de los errores por la discretización del tiempo, se utiliza las expansiones de Taylor. Las posiciones de la partículas en los momentos posterior, anterior y en ese instante  $\vec{x}(t_{n-1}), \vec{x}(t_n), \vec{x}(t_{n+1})$  se los incluye en la serie de Taylor, ecuación 2.4 y 2.5.

$$\vec{x}(t + \Delta t) = \vec{x}(t) + \vec{v}(t)\Delta t + \frac{\vec{a}(t)\Delta t^2}{2} + \frac{\vec{b}(t)\Delta t^3}{6} + \Theta(\Delta t^4) \quad (2.4)$$

$$\vec{x}(t - \Delta t) = \vec{x}(t) - \vec{v}(t)\Delta t + \frac{\vec{a}(t)\Delta t^2}{2} - \frac{\vec{b}(t)\Delta t^3}{6} + \Theta(\Delta t^4) \quad (2.5)$$

Donde:

$\vec{x}$  es la posición.

$\vec{v}$  es la velocidad.

$\vec{b}$  es la tercera derivada de la posición respecto al tiempo "jerk".

Al sumar las ecuaciones 2.4 y 2.5 se obtiene la ecuación 2.6:

$$\vec{x}(t + \Delta t) = 2\vec{x}(t) - \vec{x}(t - \Delta t) + \vec{a}(t)\Delta t^2 + \Theta(\Delta t^4) \quad (2.6)$$

En la ecuación 2.6 debe considerarse que la aceleración en este caso se obtiene a partir de la solución exacta  $\vec{a}(t) = A(\vec{x}(t))$ . En el caso de la iteración, la aceleración se obtiene en el punto central del método  $\vec{a}_n = A(\vec{x}_n)$ . Estas diferencias en la apreciación del desplazamiento generan un error global durante la integración  $\Theta(\Delta t^4)$ .

#### 2.2.4. INCREMENTO DE TIEMPO

El incremento de tiempo para el modelamiento DEM puede ser obtenido por dos métodos diferentes:

- Energía de transferencia de Rayleigh.
- Teoría de contacto de Hertz.

Para seleccionar un incremento de tiempo adecuado, debe considerarse:(Kloss, 2010)

1. Con un time step demasiado grande, la velocidad de transferencia de energía en el sistema es incorrecta.
2. El traslape  $\delta$  no debe exceder el límite ( $0.5\% d_p$ ). La superposición entre partículas representa la energía almacenada durante la deformación de la partícula.

La transmisión de energía en materiales granulares se da de tres formas:

1. 67% Ondas Rayleigh
2. 26% Ondas-s (Ondas de propagación transversales.)
3. 7% Ondas-p (Ondas de propagación longitudinales.)

La velocidad de propagación de las ondas Rayleigh es mayor a la propagación por Ondas-s y Ondas-p, por lo tanto, se considera que toda la energía se transmite por medio de ondas Rayleigh. (Sykut y cols., 2007; Kloss, 2010; Baars, 1995)

#### 2.2.4.1. Incremento de tiempo a partir de la transferencia de energía Rayleigh

Durante el movimiento de las partículas en un sistema granular las perturbaciones se propagan en forma de ondas Rayleigh a lo largo de la superficie sólida. Las ondas Rayleigh son ondas superficiales que viajan cerca de las superficie de las partículas sólidas. (Baars, 1995; Sykut y cols., 2007; Kloss, 2010)

Matemáticamente la transferencia de energía de Rayleigh se la expresa en la ecuación 2.7.

$$T_R = \pi R \frac{\left(\frac{\rho}{G}\right)^{\frac{1}{2}}}{(0,1632\nu + 0,8766)} \quad (2.7)$$

Donde:

R: radio de la partícula.

$\rho$ : Densidad de la partícula.

G: Módulo de corte, cuya definición se muestra en la ecuación 2.8.

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2.8)$$

$\nu$ : Relación de Poisson.

El valor de  $\Delta t$  a utilizarse en el modelamiento discreto debe estar en el rango mostrado en la ecuación 2.9.

$$\Delta t < (0,1T_R - 0,3T_R) \quad (2.9)$$

#### 2.2.4.2. Incremento de tiempo en base a la teoría de contacto de Hertz

El tiempo que dura el contacto entre partículas se define en base a la Teoría de contacto de Hertz. El concepto toma en cuenta la velocidad relativa entre partículas, masa de la partícula, coeficiente de Poisson y módulo de Young. (Kloss, 2010)

El tiempo de contacto de Hertz se define en la ecuación 2.10.

$$T_{CH} = 2,87 \left( \frac{m^{*2}}{r^* Y^{*2} v_{max}} \right) \quad (2.10)$$

Donde:

$m^*$ : Masa efectiva.

$r^*$ : Radio efectivo.

$Y^*$ : Módulo de Young efectivo.

$v_{max}$ : Velocidad relativa máxima.

La masa efectiva se la define en la ecuación 2.11.

$$m^* = \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \quad (2.11)$$

El radio efectivo queda definido en la ecuación 2.12.

$$r^* = \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (2.12)$$

El módulo efectivo de Young se expresa en la ecuación 2.13.

$$Y^* = \left( \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right)^{-1} \quad (2.13)$$



## 2.2.5. CONTACTO ENTRE PARTÍCULAS

Para resolver un sistema discreto existen dos consideraciones que pueden aplicarse para definir la estructura de la partícula, la primera es la esfera suave (“soft sphere”) y la segunda es la de esfera rígida (“hard sphere”). (O’ Sullivan, 2010; Babié, 1988)

### 2.2.5.1. Esfera rígida

En el modelo esfera rígida, las partículas al colisionar presentan un comportamiento totalmente elástico, es decir, sin deformaciones y superposiciones entre las partículas interactuantes. (O’ Sullivan, 2010; Babié, 1988) Ver figura 2.1.

Este tipo de modelo es usado generalmente en problemas de comportamiento de flujos.

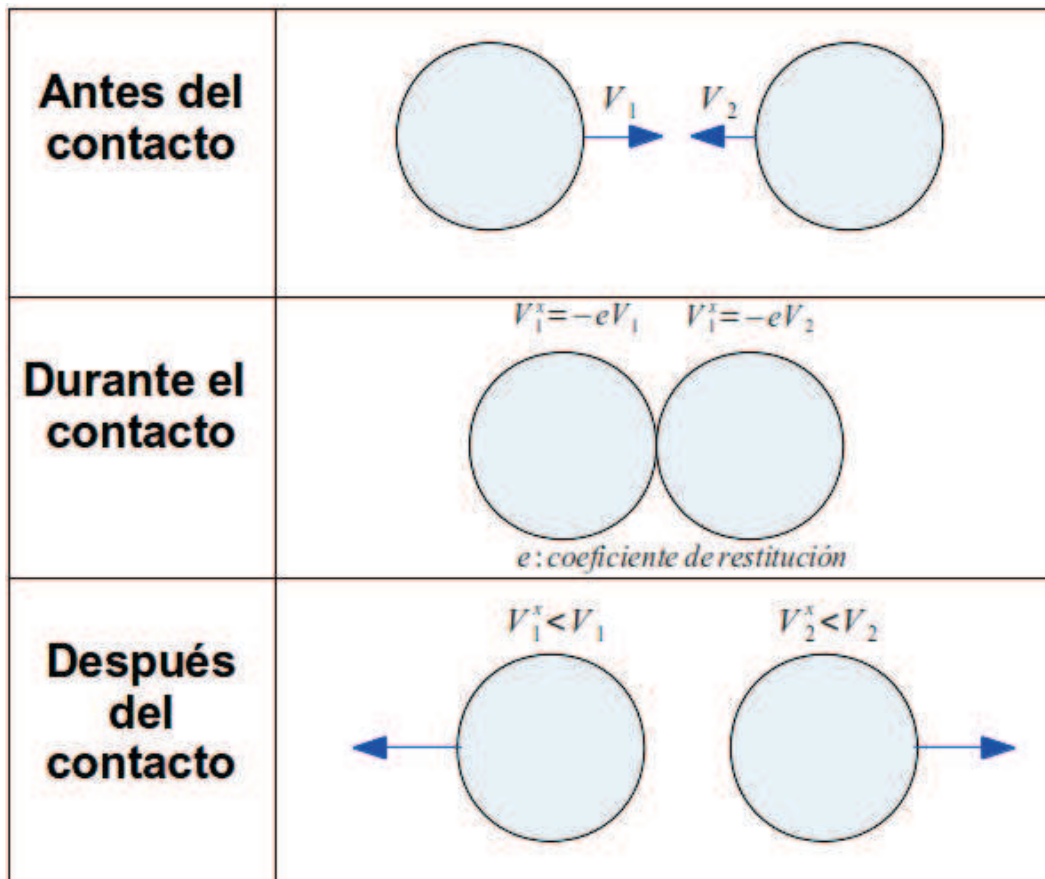
### 2.2.5.2. Esfera suave

El modelo de esfera suave considera que las partículas al colisionar se superponen (aparece un traslape), esta superposición se la entiende como la deformación sufrida durante el choque (O’ Sullivan, 2010; Babié, 1988). En la figura 2.2 se presenta el concepto de este modelo.

El modelo empleado por el software seleccionado para las simulaciones considera el modelo de esfera suave.

Durante un análisis DEM debe considerarse que la interacción entre partículas es del tipo dinámico y transitorio, por lo que, al tratar de resolver un problema mediante DEM debe idealizarse un sistema de partículas que se mueven en el transcurso del tiempo.

En la figura 2.3 se muestra una representación del modelo teórico de contacto usado en este proyecto (esfera suave). El resorte ubicado tangencialmente al contacto entre partículas se lo utiliza para almacenar energía que se da por el movimiento tangencial relativo, esto representa la deformación elástica tangencial de la superficie de las partículas en contacto. El modelo constitutivo implementado para relacionar el contacto entre partículas es del tipo no lineal. (Kloss,



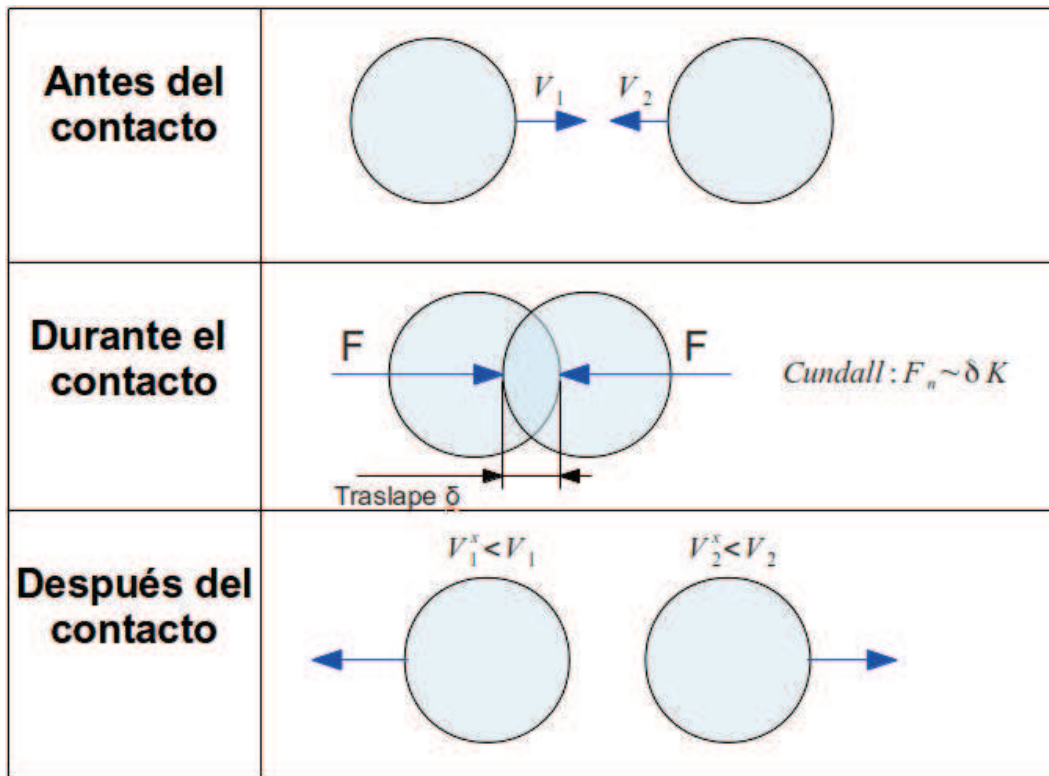
**Figura 2.1:** Modelo esfera rígida.- en la figura puede observarse un choque totalmente elástico entre las dos partículas interactuantes del sistema.

**Fuente:** (Kloss, 2010)

2010)

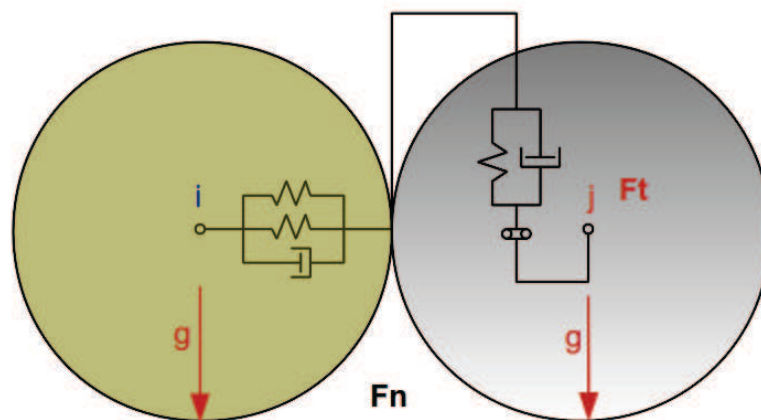
En la figura 2.4 (a) se observa como se modela el contacto entre partículas desde un instante  $t_0$ . En el instante  $t_0$  existe contacto entre partículas y contacto entre partículas y paredes, pero no existe fuerzas de contacto. (Cundall y Strack, 1979). En el intervalo que va de  $t_0$  a  $t_0 + \Delta t$  se mantiene la posición de las partículas y comienzan a desplazarse las paredes como se observa en la figura 2.4 (b). Los puntos  $A_D$  y  $A_W$  pertenecen tanto a la partícula como a la pared. El punto A se lo considera como el punto medio de la distancia comprendida entre  $A_D$  y  $A_W$ . Los desplazamientos relativos  $(\Delta n_{(A)})_{t_1} = v\Delta t$  se utilizan para determinar las fuerzas de contacto al instante  $t_1 = t_0 + \Delta t$ .

Aplicando la ley del incremento de fuerzas debido al desplazamiento se puede



**Figura 2.2:** Modelo esfera suave.- en la figura puede observarse que las partículas al colisionar se superponen en la posición 2, mostrando las características de una esfera blanda.

**Fuente:** (Kloss, 2010)



**Figura 2.3:** Contacto entre partículas.- en la figura se observa la aproximación del contacto entre partículas a un sistema masa-resorte-amortiguador.

formular la ecuación 2.14.

$$\Delta F_n = k_n(\Delta n)_{t1} = k_n v \Delta t \quad (2.14)$$

Donde:

$k_n$ : Rigidez normal.

$\Delta F_n$ : Incremento de la fuerza normal debida al contacto entre partículas.

La rigidez normal se la puede definir en base al contacto de hertz mediante la ecuación 2.15:

$$k_n = \frac{4}{3} Y^* \sqrt{r^* \delta_n} \quad (2.15)$$

Donde:

$Y^*$ : Módulo efectivo de Young, definido en la ecuación 2.13.

$r^*$ : Radio efectivo especificado en la ecuación 2.12.

$\delta_n$ : Traslape entre dos partículas.

Para definir la dirección de las fuerzas se asume que la dirección 1 (dirección de x a y) es positiva. A partir de esta suposición se plantea las ecuaciones 2.16,2.17,2.18,2.19 al instante  $t_1$ :

$$F_{(x1)} = k_n(\Delta n)_{t1} \quad (2.16)$$

$$F_{(y1)} = -k_n(\Delta n)_{t1} \quad (2.17)$$

En base a la segunda ley de Newton se formula lo siguiente:

$$\ddot{x}_1 = \frac{F_{(x1)}}{m_{(x)}} \quad (2.18)$$

$$\ddot{y}_1 = \frac{F_{(y1)}}{m_{(y)}} \quad (2.19)$$

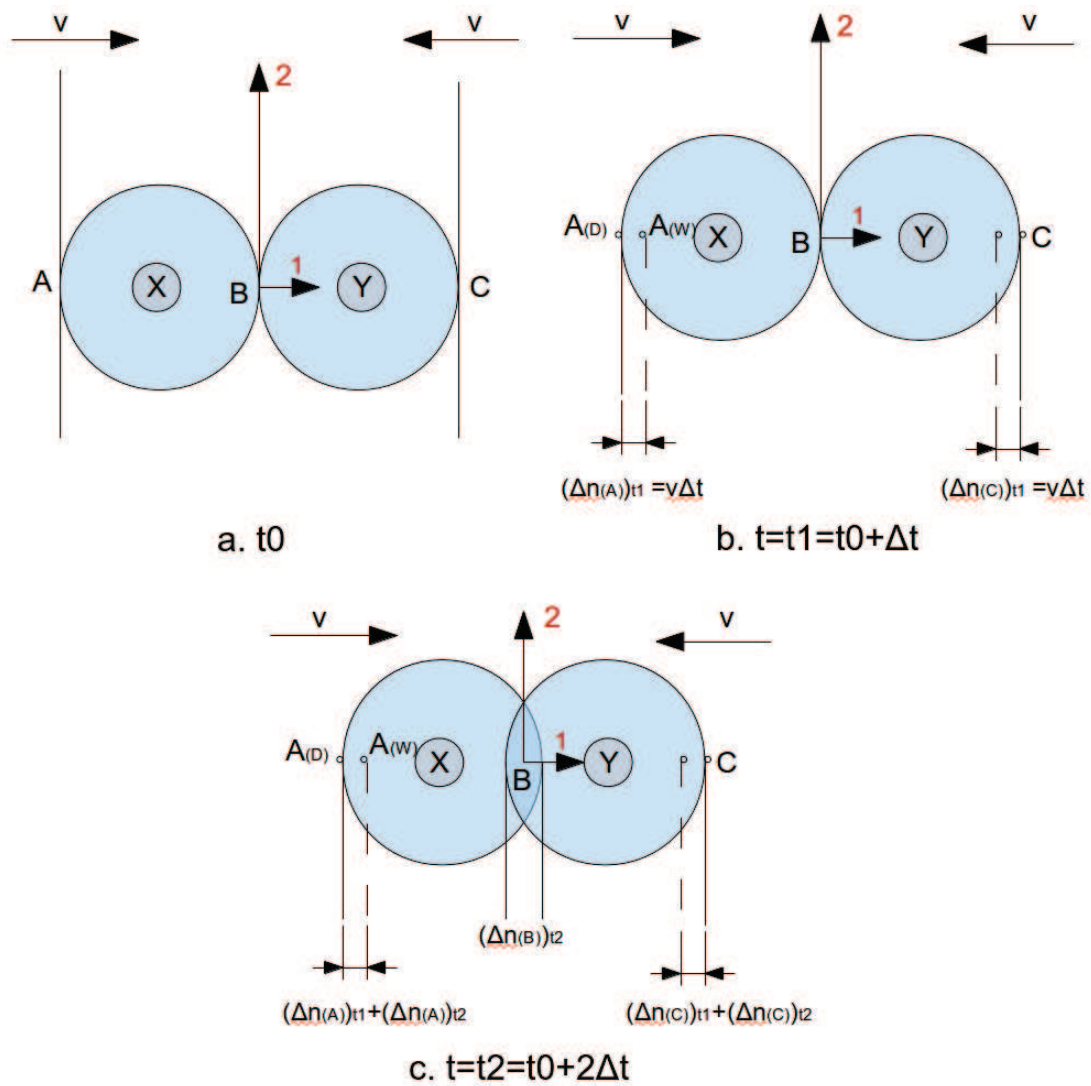
Donde:

$\ddot{x}_1$ : Aceleración de la partícula x.

$\ddot{y}_2$ : Aceleración de la partícula y.

Estas aceleraciones se las considera constantes en el intervalo de  $t_1 = t + \Delta t$  a  $t_2 = t + 2\Delta t$ . Para obtener las velocidades se procede a la integración de las aceleraciones citadas en las ecuaciones 2.18 y 2.19, obteniendo la expresión 2.20 y 2.21.

$$[\dot{x}_1]_{t2} = \left[ \frac{F_{(x1)}}{m_{(x)}} \Delta t \right] \quad (2.20)$$



**Figura 2.4:** Cálculo de contactos mediante DEM

**Fuente:** (Cundall y Strack, 1979)

$$[\dot{y}_1]_{t_2} = \left[ \frac{F_{(y1)}}{m_{(y)}} \Delta t \right] \quad (2.21)$$

Los desplazamientos relativos en los puntos de contacto A, B y C vienen dados por la ecuaciones 2.22, 2.23, 2.24.

$$(\Delta n_{(A)})_{t_2} = \left( v - \left[ \frac{F_{(x1)}}{m_{(x)}} \right] \Delta t \right) \Delta t \quad (2.22)$$

$$(\Delta n_{(B)})_{t_2} = \left( \left[ \frac{F_{(x1)}}{m_{(x)}} \right] \Delta t - \left[ \frac{F_{(y1)}}{m_{(y)}} \right] \Delta t \right) \Delta t \quad (2.23)$$

$$(\Delta n_{(C)})_{t2} = \left( \left[ \frac{F_{(y1)}}{m_{(y)}} \right] \Delta t - (-v) \right) \Delta t \quad (2.24)$$

## 2.2.6. CONDICIONES DE FRONTERA DEL ELEMENTO DISCRETO (DEM)

Para el modelamiento de un problema mediante el Método del Elemento Discreto es necesario la formulación de condiciones de frontera, dichas consideraciones se listan a continuación:

1. Pared rígida.
2. Fronteras periódicas.
3. Geometría de celda periódica.

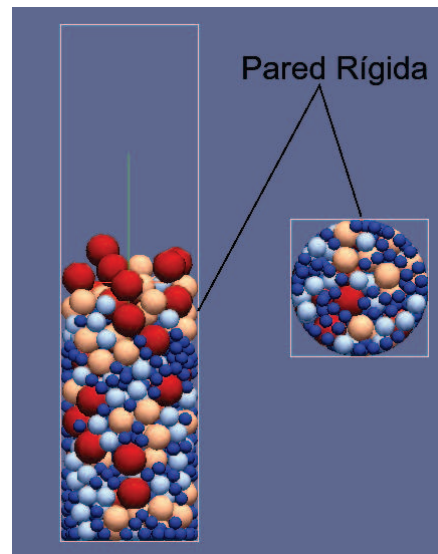
### 2.2.6.1. Pared Rígida

La condición de pared rígida delimita una región en el espacio en el cual el problema de DEM será resuelto. Las partículas componentes del ensamble interactúan con los límites, ocasionando que se cumpla la ley de acción y reacción entre las partículas y la pared rígida. (O' Sullivan, 2010; Poschel y Schwager, 2011)

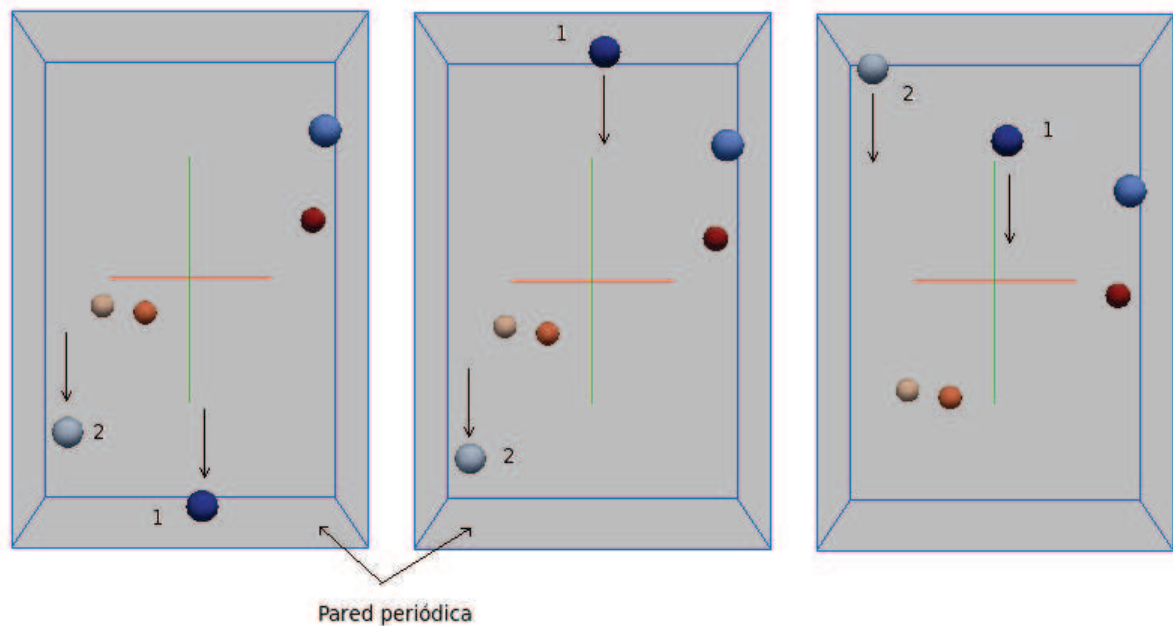
Al definir una pared rígida se puede utilizar geometrías planas o curvas sin afectar los resultados a obtenerse en la simulación. En la figura 2.5 se observa la condición de frontera rígida.

### 2.2.6.2. Fronteras periódicas

Esta condición es comúnmente utilizada en ensambles con gran número de partículas (O' Sullivan, 2010). La frontera periódica establece que las partículas componentes del ensamble al sobrepasar los límites establecidos durante el modelamiento, son reingresadas a la caja de simulación manteniendo sus posiciones relativas. El flujo de átomos se lo puede considerar como infinito. (O' Sullivan, 2010; Poschel y Schwager, 2011) Verse en la figura 2.6.



**Figura 2.5:** Pared rígida.- en la figura puede observarse como las partículas no sobrepasan el límite de la pared cilíndrica quedando delimitadas en la caja de simulación.



**Figura 2.6:** Fronteras periódicas.- las partículas al llegar a la frontera periódica son nuevamente reingresadas en el extremo opuesto de la caja de simulación con la misma velocidad.

### 2.2.7. CARACTERIZACIÓN DEL CONGLOMERADO

En la figura 2.7 puede observarse las propiedades consideradas en la caracterización del conglomerado de partículas.



**Figura 2.7:** Caracterización del conglomerado.- en la figura puede observarse las propiedades del ensamble de partículas

### 2.2.7.1. Fricción

Cuando dos cuerpos se encuentran en contacto se produce una fuerza relativa debido a las irregularidades superficiales a nivel microscópico presentes en todo cuerpo. En el material granular esta fuerza se presenta por la interacción entre partículas y por la interacción de las partículas con las paredes del recipiente que las contiene.(Ballaz, 2005)

La fricción puede ser de dos clases:

- a. Dinámica
- b. Estática

#### **Fricción dinámica**

Esta denominación se la da cuando existe movimiento relativo entre las partículas en contacto.(Ballaz, 2005)

#### **Fricción estática**

Esta denominación se la da cuando no existe movimiento relativo entre los cuerpos en contacto.(Ballaz, 2005) La fricción estática es la implementada en LIGGGHTS.

#### **Ley de Coulomb**

El enunciado general de la ley de Coulomb se lo expresa así:

“La fuerza de rozamiento máxima ( $F_{max}$ ) que puede existir entre dos cuerpos en contacto es directamente proporcional al valor de la fuerza normal (N) de



contacto entre ellos".(Tipler, 2003)

$$F_{max} = \mu N \quad (2.25)$$

De la ecuación 2.25 se deduce lo siguiente:

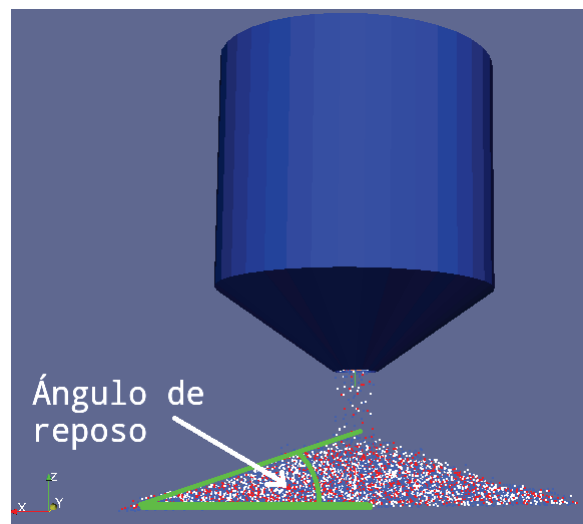
- ✱ La fuerza de fricción es independiente del área de contacto.
- ✱ La fuerza de fricción presenta resistencia al desplazamiento relativo.

### 2.2.7.2. Ángulo de reposo

Se denomina ángulo de reposo, al ángulo máximo mediante el cual un conglomerado de partículas puede permanecer en reposo sin sufrir deslizamientos de material.(Botz, Loudon, Barger, Olafsen, y Steeples, 2003)

La variación de este ángulo depende de propiedades como la cohesión, la fricción, y la dilatancia, cada uno de estos factores intervienen en el comportamiento estático del material.(Botz y cols., 2003)

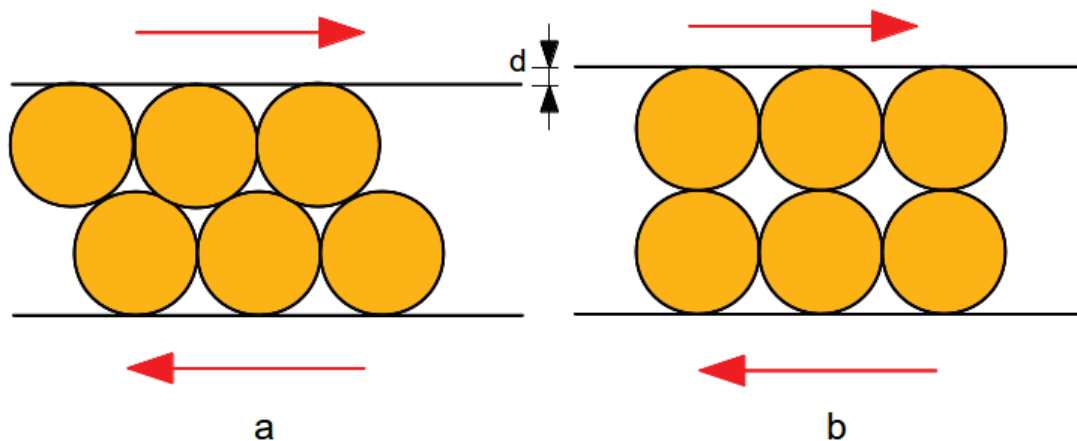
En la figura 2.8, se observa el ángulo de reposo formado por material durante la descarga de un silo.



**Figura 2.8:** Ángulo de reposo.- en la figura se observa el ángulo de reposo formado por la acumulación de material, durante la descarga del silo mostrado.

### 2.2.7.3. Dilatancia

Dilatancia es la propiedad del material granular para cambiar su volumen debido al reordenamiento de las partículas que componen el conglomerado, bajo acciones de corte. Este efecto es observable en la figura 2.9. (Allen, Jackson, y McDowell, 1970)



**Figura 2.9:** Dilatancia del material granular.- en la figura se observa que existe reordenamiento en las partículas e incremento de volumen (a-b).

### 2.2.7.4. Segregación

Segregación es un fenómeno que se da en ensambles de partículas polidispersos (partículas de diferente tamaño), que inicialmente se encuentran distribuidas homogéneamente y por alguna acción externa comienzan a redistribuirse por su tamaño, densidad, y rigidez. (Reis, 2004)

### 2.2.7.5. Coeficiente de restitución

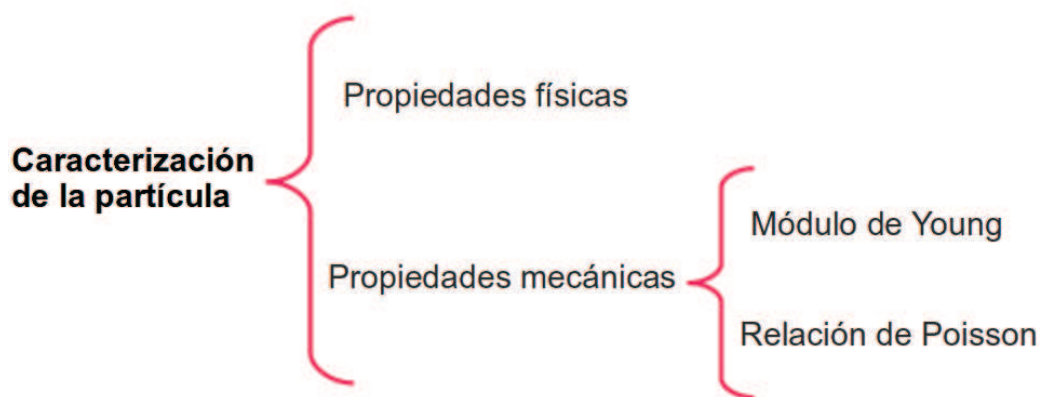
Coeficiente de restitución es la relación de velocidades post y pre impacto entre dos partículas. (Kurinaka y Hayakawa, 2004)

### 2.2.7.6. Densidad del conglomerado (Bulk density)

Propiedad que se presenta en el material granular, que relaciona la masa del ensamble de partículas por el volumen ocupado. (Buckman y Brady, 1960)

## 2.2.8. CARACTERIZACIÓN DE LA PARTÍCULA

En la figura 2.10 se describe sistemáticamente las propiedades que son consideradas para caracterizar a la partícula.



**Figura 2.10:** Caracterización de la partícula.- en la figura se observa las propiedades utilizadas para caracterizar física y mecánicamente a una partícula

### 2.2.8.1. Densidad de la partícula

La densidad de un cuerpo se define como la relación existente entre la masa y el volumen del mismo, para el caso de material granular depende de que tan compacto sea el sistema analizado. (Sfriso, 2004)

### 2.2.8.2. Módulo de Young

El módulo de elasticidad es una propiedad de los materiales elásticos para caracterizar la respuesta esfuerzo deformación de un cuerpo sometido a una carga. Este módulo es característico de cada material.(Askeland, 2011)

### **2.2.8.3. Relación de Poisson**

Cuando una barra está sometida a una carga de tracción simple se produce en ella un aumento de longitud en la dirección de la carga, así como una disminución de las dimensiones laterales perpendiculares. La relación entre la deformación en la dirección lateral y la de la dirección axial se define como relación de Poisson.(Askeland, 2011)

### **2.2.9. ENSAMBLES DE PARTÍCULAS**

En el modelamiento de material granular, es necesario considerar la granulometría de las partículas. La distribución granulométrica define el tamaño de las partículas.

Por el tamaño de las partículas, al ensamble (conjunto de partículas) se lo clasifica en:

1. Ensamble monodisperso.
2. Ensamble polidisperso.

#### **2.2.9.1. Ensamble monodisperso**

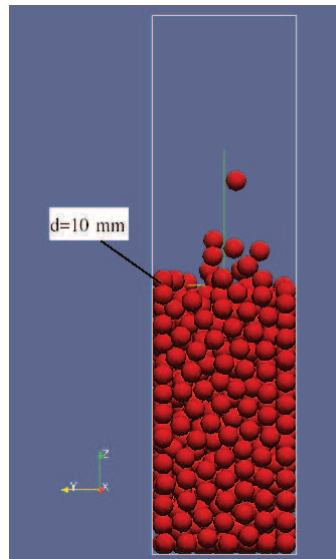
Ensamble monodisperso es un conglomerado compuesto por partículas del mismo diámetro. En la figura 2.11 se muestra un ensamble monodisperso.

En el presente proyecto se utilizarán ensambles monodispersos para representar a los pellets de hierro. Estas partículas no tienen granulometría definida, por lo tanto, se selecciona un tamaño aproximado en base a lo consultado en Brown (2007).

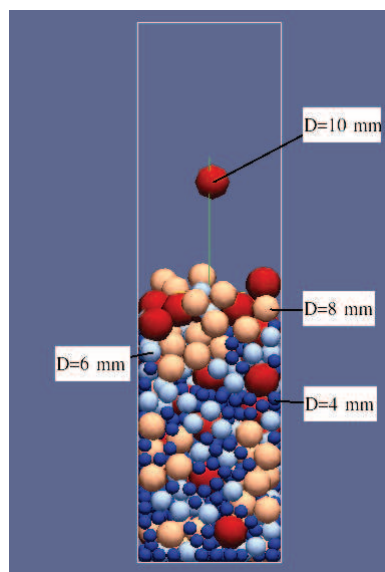
#### **2.2.9.2. Ensamble polidisperso**

Las partículas que componen el ensamble granular polidisperso son de diferentes diámetros. En la figura 2.12 se observa un ensamble polidisperso.

En el proyecto se utilizarán ensambles polidispersos para representar al maíz.



**Figura 2.11:** Ensamble granular monodisperso.- en la figura puede observarse como las partículas componentes de un ensamble monodisperso poseen un mismo diámetro.



**Figura 2.12:** Ensamble granular polidisperso.- en la figura puede observarse la distribución granulométrica de un ensamble polidisperso.

Para este material granular es posible determinar experimentalmente su granulometría.

## 2.3. EVALUACIÓN DE DEFORMACIONES

En un ensamble de partículas la evaluación de deformaciones promedio se realiza en las fronteras del sistema granular. Los límites de la región se establece por los procedimientos matemáticos “Convex Hull” y “Triangulación de Delaunay”. El “Convex Hull” determina las partículas que pertenecen a un volumen de control. La triangulación de Delaunay define las partículas en contacto en los límites definidos por el Convex Hull. (Andrade, Avila, Hall, Lenoir, y Viggiani, 2011; O’Sullivan, Butlanska, y Cheung, 2010)

En la figura 2.13 se presenta el Convex Hull y la triangulación de Delaunay para delimitar una región en la cual se determinará la deformación promedio entre partículas.

El cálculo de deformaciones promedio se realiza en base a la ecuación 2.26:

$$\bar{\varepsilon} = sym \left[ \frac{1}{V} \sum_{n=1}^N \mathbf{u}^n \otimes \mathbf{v}^n A^n \right] \quad (2.26)$$

Donde:

$\mathbf{u}^n = \frac{1}{3}(\mathbf{u}^{i,n} + \mathbf{u}^{j,n} + \mathbf{u}^{k,n})$  es el promedio de desplazamientos de las partículas i, j, k que definen un triángulo n.

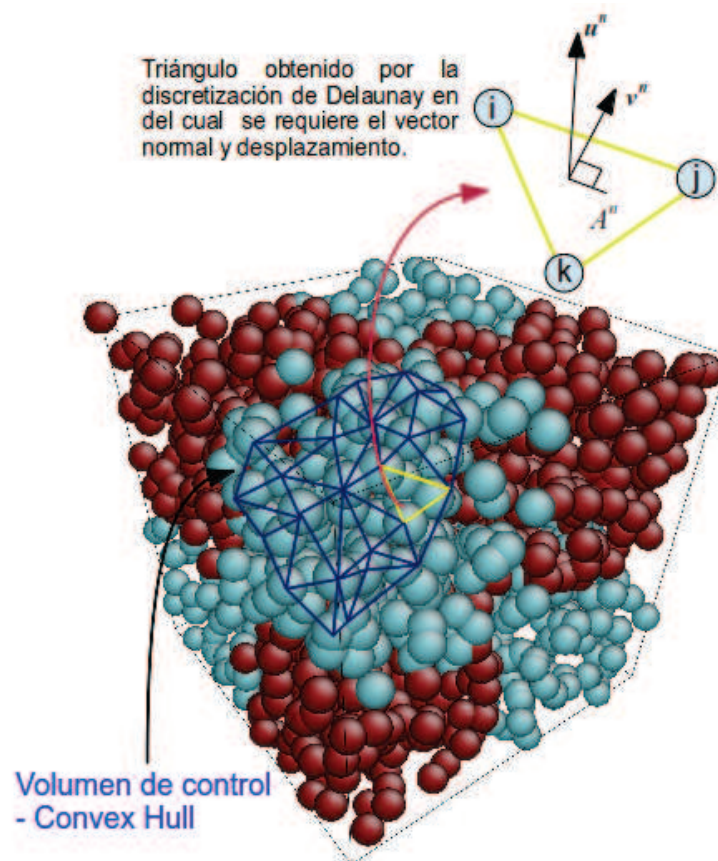
$\mathbf{v}^n$  es el vector normal a la superficie del triángulo n formado por las partículas i, j, k, ver figura 2.13.

$A^n$  es el área del triángulo i, j, k, ver figura 2.13.

De la ecuación 2.26 se obtiene un tensor que representa las deformaciones promedio del ensamble de partículas. Para cuantificar su efecto en el material granular se hace necesario el cálculo de sus invariantes y componentes desviadoras.

### 2.3.1. INVARIANTES DEL TENSOR DEFORMACIÓN

La invariante es un número característico de cada tensor que es independiente del sistema de coordenadas en el cual es evaluado. En la ecuación 2.27 se muestra un tensor simétrico de deformación del cual se obtendrá las invariantes



**Figura 2.13:** Volumen de control delimitado por Convex Hull y discretización de Delaunay.- en la figura se observa los triángulo formados por los procedimientos de Convex Hull y Delaunay. Cada uno de los triángulos formados están definidos por las partículas i, j, k y se tienen asignados un vector  $v^n$  normal a la superficie del triángulo y su respectiva área.

Fuente:(Andrade y cols., 2011)

del tensor. (Gubert, 2006)

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

Los términos de la diagonal principal del tensor de la ecuación 2.27 se denominan componentes volumétricas del tensor. Mientras que las componentes fuera de la diagonal se denominan componentes angulares.

La primera invariante  $I_1$  se la obtiene a partir de la diagonal principal del tensor, mediante la ecuación 2.28. Esta ecuación representa los cambios volumétricos

ocurridos en el ensamble de partículas.

$$I_1 = \varepsilon_{ii} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} \quad (2.28)$$

La segunda invariante  $I_2$  se cuantifica a partir de la ecuación 2.29.

$$I_2 = \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix} \quad (2.29)$$

Por su parte la tercera invariante  $I_3$  es igual a la determinante del tensor, ecuación 2.30.

$$I_3 = \det(\varepsilon) \quad (2.30)$$

### 2.3.2. INVARIANTES DEL TENSOR DESVIADOR DE DEFORMACIÓN

Este tensor representa las deformaciones angulares (cambios de forma) dados en el ensamble de partículas. (Gubert, 2006; Holzapfel, 2000)

Las invariantes que se consigue del tensor desviador son  $J_1$ ,  $J_2$  y  $J_3$ .

La invariante  $J_1$  es cero para el tensor simétrico de deformación, ecuación 2.31.

$$J_1 = 0 \quad (2.31)$$

El valor de la segunda invariante  $J_2$  es obtenido de la ecuación 2.32.

$$J_2 = I_2 - \frac{1}{3} * I_1^2 \quad (2.32)$$

Donde:

$I_1$  y  $I_2$ : son la primera y segunda invariantes del tensor deformación.

La tercera invariante  $J_3$  se la consigue con la ecuación 2.33.

$$J_3 = I_3 - \frac{I_2 * I_1}{3} + 2 * \frac{I_1^2}{27} \quad (2.33)$$

Donde:

$I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$ : son las invariantes del tensor deformación.



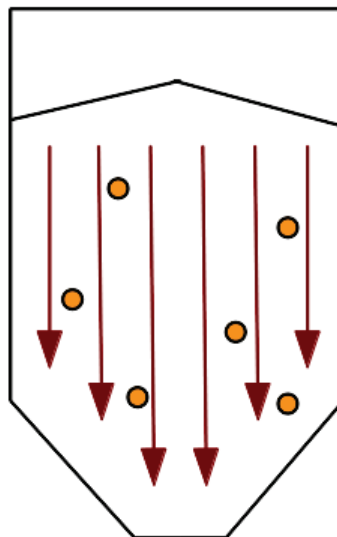
## 2.4. FLUJO DE DESCARGA

El proceso de descarga de material granular en el silo produce sobreesfuerzos en las paredes. La fluctuación de esfuerzos en las paredes del silo es producto del flujo de material durante la descarga. (Schulze, 2010; Ayuga, 1995; Brown, 2007) Existen dos tipos de flujo que son:

1. Flujo másico.
2. Flujo concentrado.

### 2.4.1. FLUJO MÁSIKO (“MASS FLOW”)

Toda la masa se mueve durante la descarga. El flujo másico es posible si las paredes del silo son lo suficientemente lisas y empujadas para que todas las partículas desciendan con la descarga del material. (Schulze, 2010; Ayuga, 1995; Brown, 2007) En la figura 2.14 se visualiza el efecto de flujo másico.

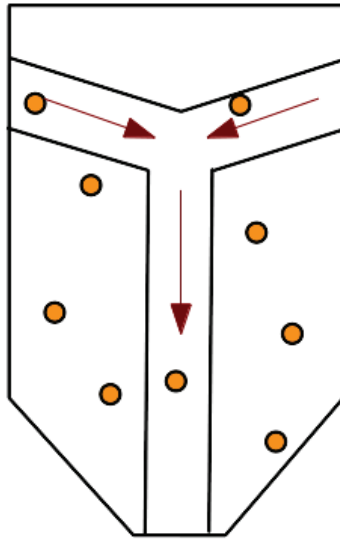


**Figura 2.14:** Flujo másico.- en la figura se observa el desplazamiento de material en caso de existir flujo másico.

**Fuente:** (Schulze, 2010).

### 2.4.2. FLUJO CONCENTRADO (“FUNNEL FLOW”)

En el flujo concentrado solo una porción del material se desplaza durante la descarga, mientras el resto de partículas permanecen inmóviles en las paredes. (Schulze, 2010; Brown, 2007) En la figura 2.15 se observa el efecto de flujo concentrado.



**Figura 2.15:** Flujo concentrado.- en la figura se observa el desplazamiento de material en caso de existir flujo concentrado.

**Fuente:** (Schulze, 2010).

## 2.5. ATASCOS

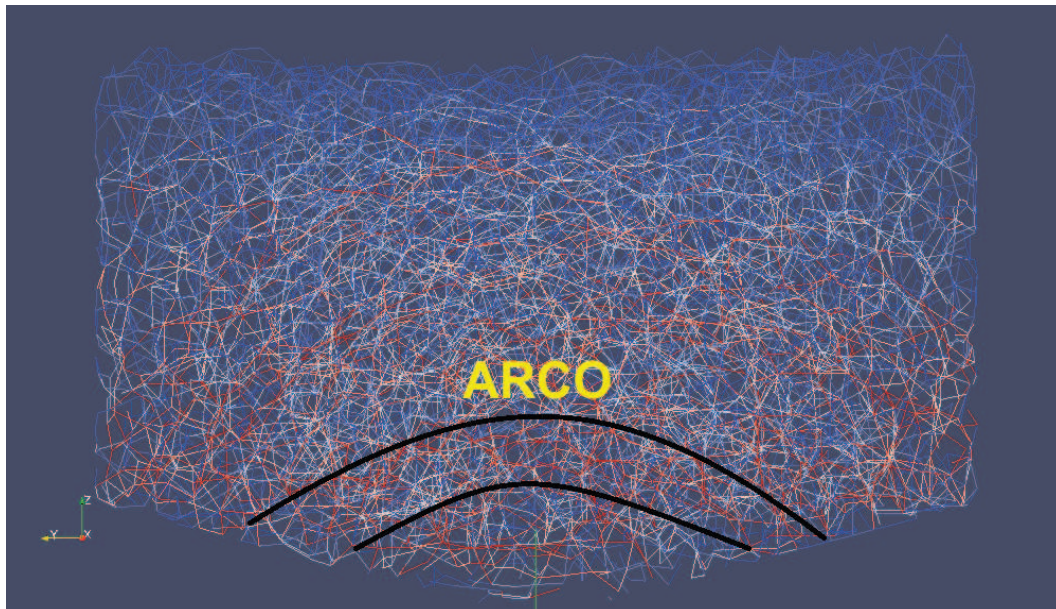
Un atasco se produce en el momento en que se forma un arco durante el flujo de material a través de un orificio. (Ballaz, 2005)

### 2.5.1. ARCOS

Arco es una estructura compleja formada durante la descarga de material por un agujero, que evita el libre flujo de las partículas evacuadas (Cheng y Zhang, 2003). Los arcos se forman por la capacidad que poseen las partículas de sostenerse entre sí (Ballaz, 2005).

A los arcos formados durante la descarga se les atribuyen problemas como la distribución no uniforme de esfuerzos y cambios de la fracción volumétrica durante la descarga del material (Maza, Pughaloni, y Pastor, 1992).

En la figura 2.16 se esquematiza un arco formado durante el atasco de un silo.



**Figura 2.16:** Arco en la descarga de silos

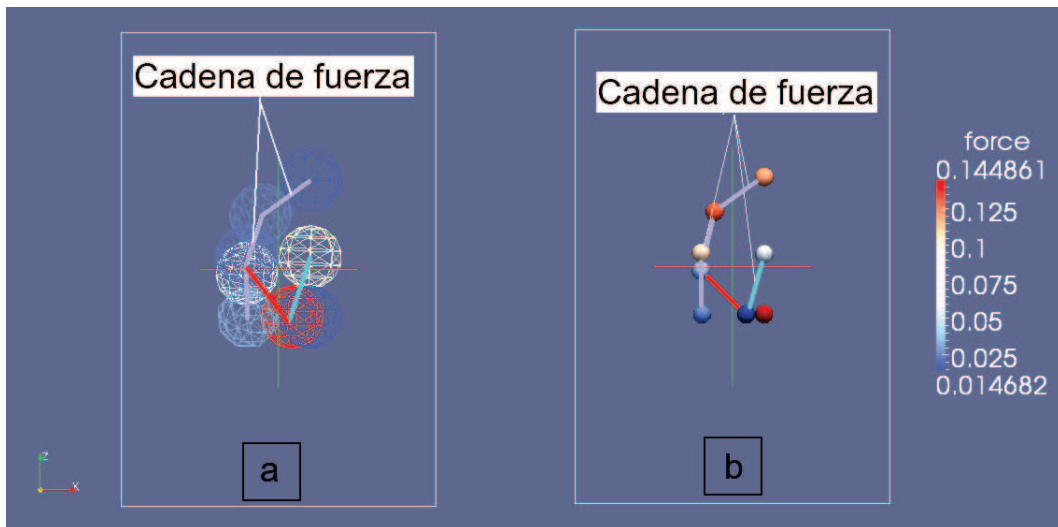
### 2.5.2. CADENAS DE FUERZA

Las cadenas de fuerza son las líneas a través de las cuales se transmite la presión en un medio granular cuando las partículas se encuentran en contacto. (Ballaz, 2005) Las cadenas de fuerza se las representa en forma de redes. En la figura 2.17 se observa las cadenas de fuerza de un conjunto de partículas.

## 2.6. ESTRUCTURA DE UN PROGRAMA DEM

La implementación del Método del Elemento Discreto en un computador demanda el cumplimiento de una secuencia de etapas, como son:

- a. Preprocesamiento
- b. Procesamiento



**Figura 2.17:** Cadenas de fuerza.- (a) partículas en contacto, (b) cadenas de fuerza durante el contacto entre partículas.

c. Postprocesamiento

### 2.6.1. PREPROCESAMIENTO

En esta etapa se especifica las propiedades de la partícula y del conglomerado. Definidas estas características se intenta representar, conjuntos de partículas reales en modelos numéricos, con la finalidad de generar resultados.

Generalmente los parámetros requeridos para modelar y simular un problema DEM son:

- ★ Definición del tipo de partícula
- ★ Condiciones de frontera
- ★ Unidades
- ★ Propiedades de las partículas componentes del ensamble
- ★ Tamaño de las partículas
- ★ Inserción de las partículas
- ★ Time step

### **2.6.1.1. PROCESAMIENTO**

En esta etapa se analiza los parámetros ingresados en el preprocesamiento, para estructurarlos y examinarlos mediante el uso de métodos numéricos. El método numérico relaciona los datos ingresados en preprocesamiento, para a partir de ellos generar resultados de posiciones, velocidades lineales y angulares, fuerzas promedio, etc.

En este proyecto se ha decidido emplear el software “LIGGGHTS” de distribución libre. En este programa está implementado como modelo para resolución de ecuaciones diferenciales, el Modelo de Contacto de Hertz, y la estructura de solución del sistema de ecuaciones propuesta por Cundall.

### **2.6.1.2. POSTPROCESAMIENTO**

La etapa de postprocesamiento consiste en la recolección de datos generados en el procesamiento, para estudiarlos y analizarlos.

El programa que permite visualizar los resultados suministrados por Liggghts es ParaView.

En la figura 2.18 se observa esquemáticamente el proceso seguido para modelar numéricamente un problema DEM.

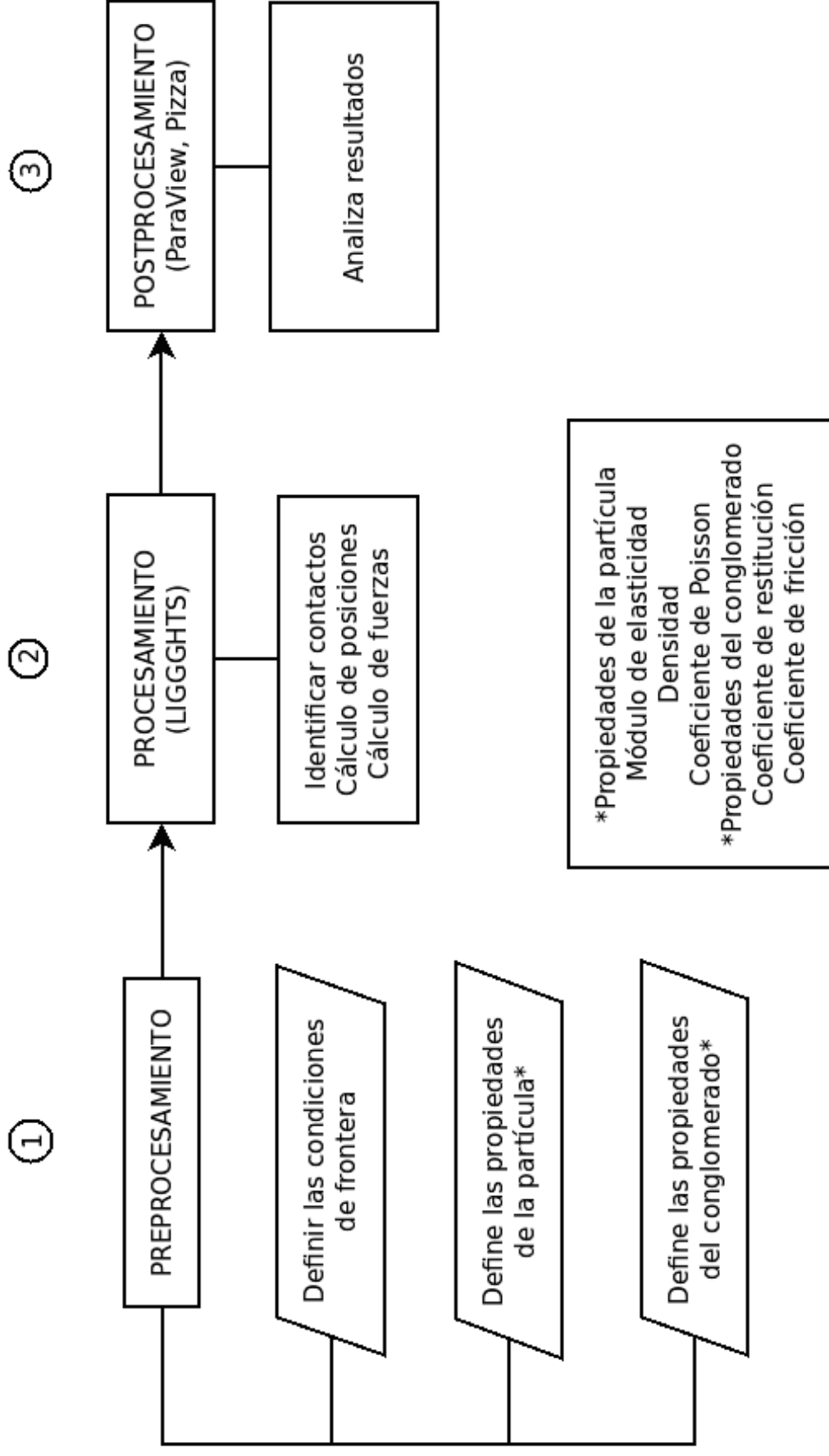


Figura 2.18: Etapas de procesamiento.- en la figura se muestran las etapas de procesamiento durante una simulación DEM

# CAPÍTULO 3

## MODELAMIENTO CONTINUO DE SILOS

### 3.1. INTRODUCCIÓN

En el presente capítulo se hace una revisión bibliográfica de estudios sobre el comportamiento de silos desde la óptica de la mecánica del medio continuo. Se ha considerado estudios realizados por Brown (2007) “Numerical analysis of silo discharge”, Vasquez (2006) “Simulación de empujes del material almacenado en silos con modelos de comportamiento del material no elásticos”, Ayuga (1995) “Los empujes del material almacenado en silos”, entre otros.

En el modelamiento continuo de silos se considera tres etapas de resolución: preprocesamiento, procesamiento y postprocesamiento. (Carnicero, 2001; Cheng y Zhang, 2003; Alauddin y Sohrabuddin, 1995; Brown, 2007; Vázquez, 2006; Ayuga, 1995).

En la etapa de preprocesamiento se especifica las condiciones iniciales necesarias para representar la descarga del silo. Como son: geometrías, condiciones de borde, tipos de carga, características del material, llenado del silo, etc.

En el procesamiento se resuelve la matriz global de rigidez generada en el preprocesamiento, utilizando los modelos constitutivos de Druker-Prager y Mohr Coulomb.

En la etapa de postprocesamiento, se analiza los resultados obtenidos utilizando la tecnología de elementos finitos.

Por último se plantearán ventajas y desventajas del uso del análisis FEM respecto al estudio DEM de silos.

## **3.2. PREPROCESAMIENTO**

En esta etapa se define las condiciones del problema, como son:

1. Definir el dominio geométrico del problema.
2. Definir las propiedades geométricas de los componentes del sistema analizado.
3. Definir el tipo de elemento a ser empleado.
4. Definir las propiedades de los elementos.
5. Definir las conectividades de los componentes.
6. Definir las restricciones físicas.
7. Definir las cargas actuantes del problema.

### **3.2.1. CONDICIONES DE FRONTERA**

Para la simulación, se usa un modelo de silo simétrico cuyos límites geométricos son las paredes del mismo. La paredes del silo son fijas.(Alauddin y Sohrabuddin, 1995)

Se considera solo una velocidad vertical de flujo de partículas, es decir, el material solo se desplaza en la dirección de la gravedad.(Vázquez, 2006) La línea vertical en el centro del modelo tendrá una velocidad prescrita de cero en un sistema de coordenadas cilíndricas.

A continuación se presentan la condiciones de frontera relevantes en el modelamiento continuo (Ayuga, 1995; Brown, 2007):

1. La presión del material almacenado en el silo es la misma a determinada altura.



2. El silo es un cilindro de pared delgada, en el cual existe un esfuerzo de tensión radial, despreciando momentos flectores y esfuerzos de corte.
3. La paredes del silo pueden expandirse hasta lo permisible del material.
4. El peso propio del material es considerado axisimétrico.
5. Presiones horizontales constantes en las superficies del silo.
6. El ángulo entre la pared y las partículas almacenadas es constante.
7. Peso específico del material uniforme.
8. Paredes del silo rígidas.
9. Densidad constante en toda la simulación.
10. La cohesión y deformación entre partículas no son consideradas en los programa de FEM.
11. Relación entre presiones horizontales y verticales es constante.

$$k = p_h/p_v \quad (3.1)$$

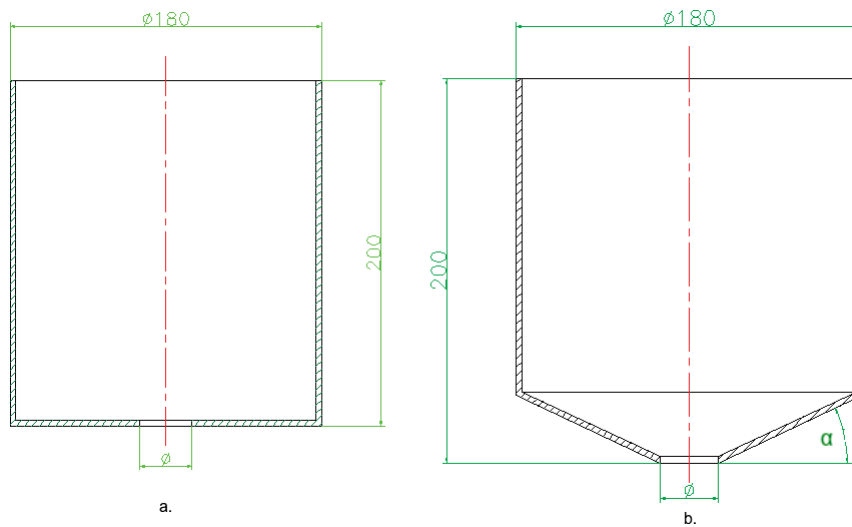
donde: k es la relación de presiones,  $p_h$  la presión horizontal y  $p_v$  la presión vertical en el silo.

### 3.2.1.1. Geometrías

Las geometrías comúnmente utilizadas en el análisis convencional de silos, Brown (2007), Vazquez (2006), Ayuga (1995), son: silo con fondo plano y silo con tolva de descarga. En la figura 3.1, se observa las geometrías convencionales empleadas en el estudio de silos.

### 3.2.1.2. Generación de la malla de cálculo

Para el cálculo de esfuerzos y deformaciones mediante el FEM se genera una malla que divide al material contenido en el silo en pequeños elementos.(Akin, 2005)



**Figura 3.1:** Silo con tolva de descarga.- en la figura (a) se observa un silo de fondo plano y (b) se muestra un silo con tolva de descarga

Brown (2007) define el mallado en base al método arbitrario de Lagrange y Euler (ALE). Al utilizar la formulación ALE, la malla dentro de un dominio definido del problema puede moverse arbitrariamente para optimizar el mallado de un elemento. En los bordes de la geometría el mallado se mueve junto al material para poder identificar la interacción de un sistema con diferentes materiales (Jianzheng, 2007). En base a lo expuesto, el sistema Lagrangiano es recomendable en la superficie del silo. Durante la descarga el sistema Euleriano es el indicado. Entendiéndose por sistema Lagrangiano un sistema móvil junto al flujo del material y un sistema euleriano por fijo.

Dentro del silo se considera que el material puede fluir en la malla generada sin ninguna restricción. (Brown, 2007)

### 3.2.2. CARACTERIZACIÓN DEL MATERIAL

Para caracterizar al material granular almacenado en un silo mediante el modelamiento continuo, (Vázquez, 2006; Brown, 2007; Elaskar y Godoy, 2001), se requieren propiedades como:

1. Coeficiente de fricción entre el grano y la pared.
2. Peso específico.

3. Módulo de elasticidad.
4. Coeficiente de Poisson.
5. Ángulo de rozamiento interno.
6. Cohesión.
7. Ángulo de dilatación.

### **3.2.3. LLENADO DEL SILO**

Existen tres procedimientos para establecer el llenado del silo:

1. Incremento gradual de la carga gravitatoria.(Vázquez, 2006; Brown, 2007)
2. Capas de material superpuestas con un determinado peso específico.(Vázquez, 2006; Brown, 2007)
3. Distribución lineal de cargas.(Elaskar y Godoy, 2001)

El modelo de distribución lineal de cargas se observa en la figura 3.2.

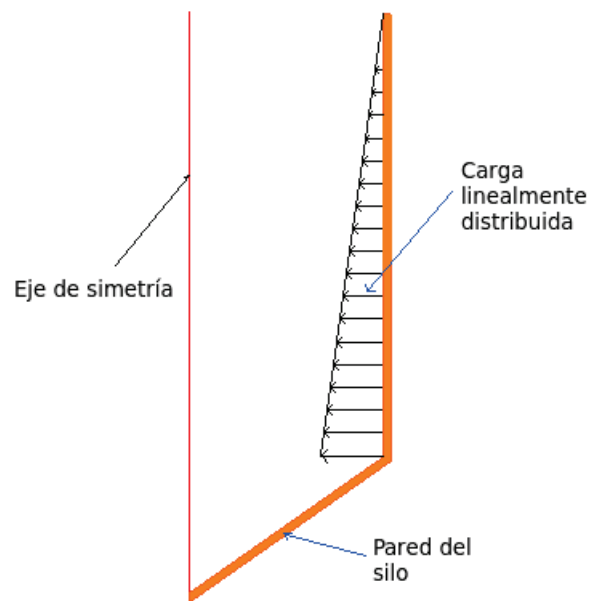
### **3.2.4. CARGAS**

Las cargas consideradas en un modelo FEM, son de dos tipos:

1. Carga gravitacional, que genera el compactamiento de material en la base del silo, provocando el incremento de esfuerzos en la zona de descarga.
2. Carga de fricción entre las paredes del silo y el material.

## **3.3. PROCESAMIENTO**

El procesamiento es la fase de resolución numérica. Se la realiza en base a métodos numéricos como la integración implícita y explícita que permiten resolver las ecuaciones de equilibrio. (Brown, 2007; Elaskar y Godoy, 2001)



**Figura 3.2:** Distribución lineal de cargas.- en la figura se observa una distribución lineal de cargas representando al material almacenado en el silo

Fuente: (Elaskar y Godoy, 2001)

### 3.3.1. INTEGRACIÓN IMPLÍCITA

Este método encuentra la solución de una ecuación diferencial relacionando el estado actual con el inmediatamente posterior. Este método de integración requiere un alto costo computacional y los tiempos de simulación son grandes. La estabilidad del método de integración permite que el time step requerido para cada simulación no este limitado.(Brown, 2007)

### 3.3.2. INTEGRACIÓN EXPLÍCITA

Este método es usado para calcular el estado de un sistema en un tiempo posterior al estado actual del mismo. No requiere resolver las ecuaciones diferenciales y matrices de rigidez y masa simultáneamente, por lo tanto es computacionalmente ligero.(Brown, 2007)

La estabilidad de resultados por este método está limitada por el tamaño del time

step, mientras menor sea, los resultados son más precisos.

### 3.3.3. MODELOS CONSTITUTIVOS

Ley constitutiva es la relación existente entre dos cantidades físicas propias de un material, que explican su comportamiento bajo acciones externas como fuerzas. Los modelos constitutivos relacionan dos parámetros físicos como esfuerzo y deformación.

Las relaciones constitutivas de los materiales granulares depende de los esfuerzos normales y las características de las superficies en contacto.

Habitualmente se utilizan los modelos de Mohr-Coulomb, Druker-Praker y fricción durante el procesamiento basado en tecnología del elemento finito.(Brown, 2007; Carnicero, 2001)

#### 3.3.3.1. Criterio de falla de Mohr Coulumb

El criterio de falla de Mohr Coulomb es una extensión del modelo de Mohr Coulomb. Este modelo es empleado para estudiar la respuesta de materiales frágiles sometidos a esfuerzos de corte y tensión.

El criterio de falla de Mohr Coulomb representa la envolvente lineal obtenida de la relación entre el esfuerzo cortante en función del esfuerzo normal aplicado, ver figura 3.3. La ecuación 3.2 representa lo expuesto anteriormente. (K. Amir, 2005)

$$|\tau| = \tau_0 + \mu\sigma \quad (3.2)$$

donde:

$|\tau|$  = esfuerzo cortante máximo.

$\tau_0$  = cohesión.

$\mu$  = coeficiente de rozamiento.

$\sigma$  = esfuerzo normal.

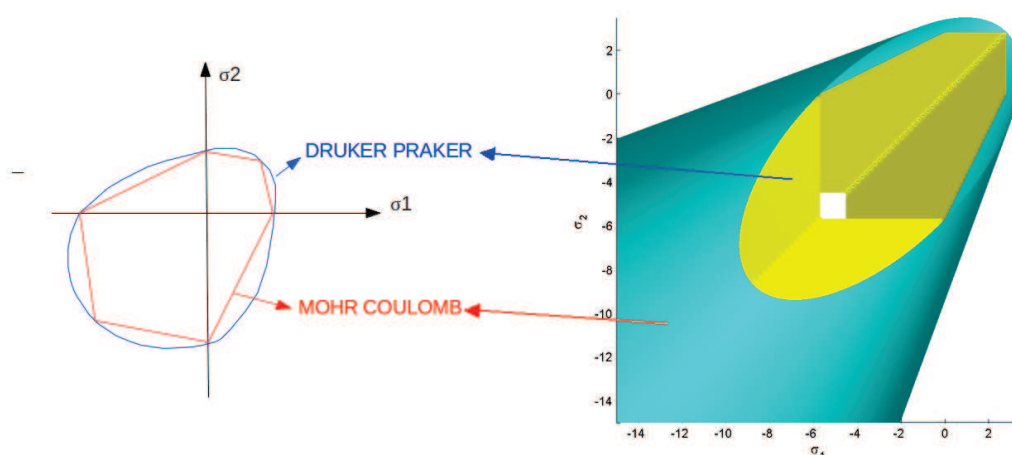
A partir de este criterio se puede determinar la carga con la que podría fallar el material, el ángulo de fractura y desplazamientos de fractura.(P. Amir, 2005).

### 3.3.3.2. Criterio de fluencia de Drucker-Prager

El criterio Drucker-Prager (DP) es considerado como la extensión del modelo Von Mises. La formulación es empleada para determinar si un material falla o si ha sobrepasado el límite de deformación plástica (Drucker y Prager, 1952). Fundamentalmente es utilizado para sistemas en los cuales la presión es la principal variable que ocasiona la variación de esfuerzos.

La formulación de DP modifica la función de fluencia Mohr-Coulomb para evitar singularidades asociadas a las esquinas del hexágono mostrado en la figura 3.3. Tanto el criterio de Mohr Coulomb (MC) y el de Drucker Prager dependen de la tensión media efectiva  $\sigma_m$ . La tensión media efectiva es el esfuerzo que permite la compactación de un congunto de partículas sólidas. A diferencia del modelo de Mohr Coulomb, el modelo de superficie de fluencia Drucker Prager es representado como un cono cilíndrico en el espacio de tensión principal (Doran, Koksal, Polat, y Karakoc, 1998; Kelly, 2008; Fine, 2010)

El criterio de DP implementada en el método del elemento finito se basa en el concepto de extensión triaxial. En otras palabras, la proyección de la superficie de fluencia dentro del plano desviatorio toca las esquinas interiores del hexágono de Mohr Coulomb (Fine, 2010). En la figura 3.3 se representa geoméricamente los modelos de Drucker-Prager y Mohr Coulomb.



**Figura 3.3:** Comparación de modelo de Morh Coulomb y criterio de Drucker Prager

### 3.3.3.3. Consideraciones de fricción y esfuerzo cortante

Para determinar el esfuerzo cortante máximo se toma en cuenta la presión y el coeficiente de fricción de acuerdo al criterio de rozamiento de Coulomb 3.3.

$$\sigma_c = \mu P \quad (3.3)$$

donde:

$\sigma_c$ = esfuerzo crítico

$\mu$ =coeficiente de rozamiento

$P$ = presión entre partículas

Si se analiza la ecuación 3.3 , se puede decir que en la parte inferior del silo se presentan los mayor esfuerzos cortantes debido a la presión.

De esta manera si el esfuerzo obtenido sobrepasa al esfuerzo crítico, las partículas se desplazarán relativamente una respecto a la otra.

## 3.4. POSTPROCESAMIENTO

En esta etapa se visualiza y evalúa los resultados obtenidos mediante el procesamiento. Se puede valorar resultados como:

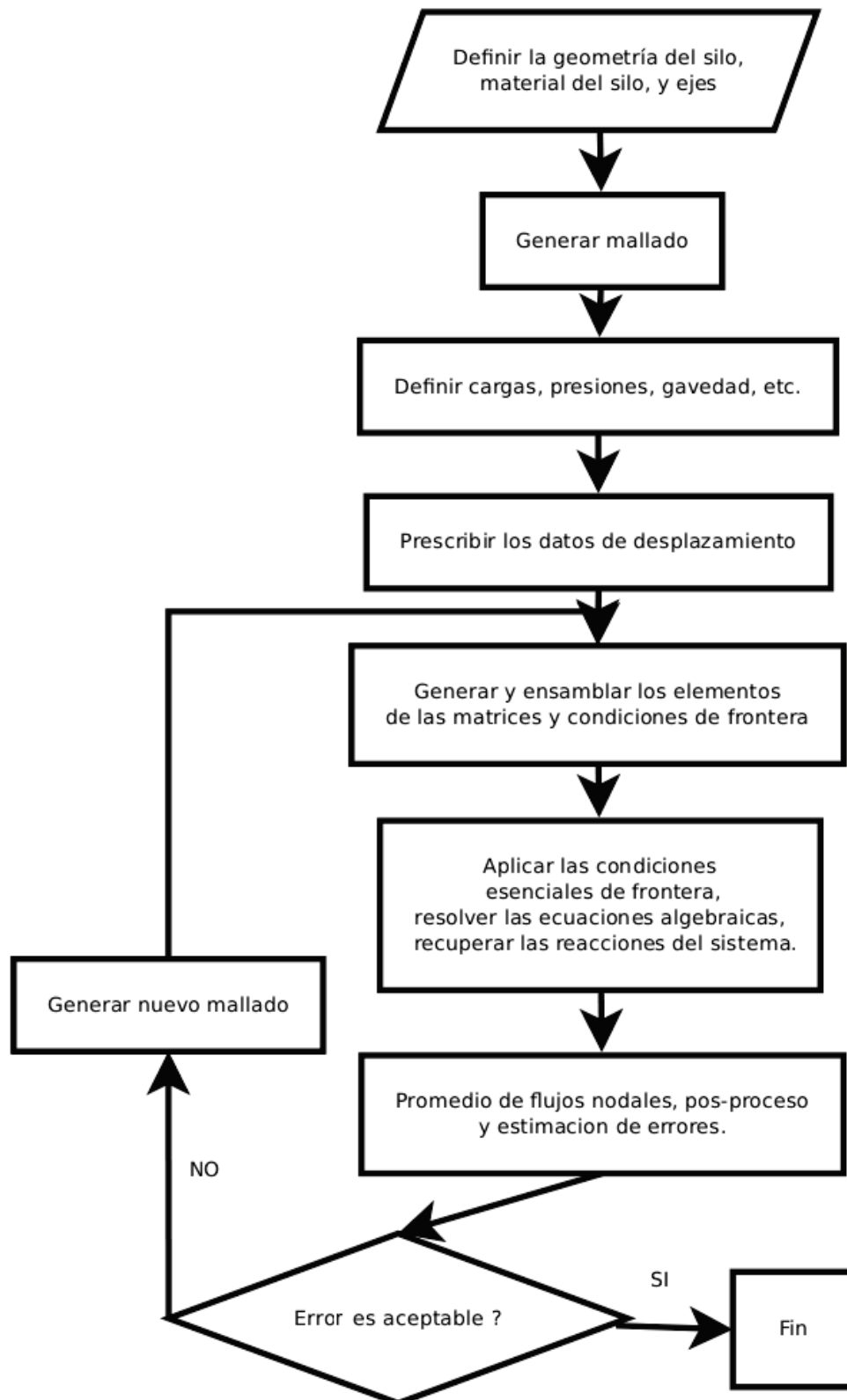
1. Esfuerzos en las paredes.
2. Desplazamientos.
3. Deformaciones.

## 3.5. VENTAJAS Y DESVENTAJAS DE MODELAMIENTO CONTINUO

1. El análisis de esfuerzos y deformaciones mediante FEM se lo realiza en un instante de tiempo (estudio en estado estable), por lo tanto, es una limitación respecto al DEM.(Brown, 2007)

2. El FEM considera únicamente la interacción entre la pared del silo y el material (Elaskar y Godoy, 2001).
3. En el modelamiento continuo una consideración comúnmente utilizada es asumir que el silo está lleno desde el inicio del análisis. Esto ocasiona errores durante el estudio de descarga del silo, ya que no se ha considerado la velocidad su llenado. El efecto de compactación dado por la velocidad de llenado podría incrementar la probabilidad del atasco (Vázquez, 2006).
4. Las cargas de mayor valor se las registra en la intersección entre la tolva y el silo. Esto sirve como pauta para determinar aproximadamente las regiones y las razones en las que se producen atascos.
5. Se considera una sola carga en el diseño de silos, el peso propio del material granular. Esta limitación reduce la eficacia de los resultados en el análisis FEM
6. En el estudio por medio del FEM no se toma en cuenta la incidencia de las cadenas de fuerza entre partículas del material contenido en el silo y su efecto en la descarga.
7. Los resultados obtenidos por FEM dependen en gran medida del tipo de malla seleccionada. A mayor número de elementos finitos los resultados se acercan más a a la realidad.
8. En el método del elemento finito se considera despreciable las colisiones entre partículas.
9. Para determinar el diámetro del agujero de descarga de un silo, se requiere ensayos experimentales (Ballaz, 2005). El diámetro del agujero crítico de descarga es 4.94 veces el diámetro de la partícula en base a ensayos de prueba y error.
10. Las velocidades del conglomerado granular en DEM son diferentes para cada partícula. En FEM se considera la velocidad de descarga uniforme.





**Figura 3.4:** Formulación FEM.- en la figura se observa de manera secuencial la formulación por FEM.

Fuente: (Akin, 2005)

# CAPÍTULO 4

## MODELAMIENTO DISCRETO DE SILOS

### 4.1. INTRODUCCIÓN

En el presente capítulo se considerará el Método del Elemento Discreto (DEM) para el modelamiento y simulación del proceso de descarga en silos. Este procedimiento permite considerar las propiedades individuales y en conglomerado de las partículas. Se modelará y simulará partículas que representan al maíz y pellets de hierro. La interacción de las partículas se dará en varios tipos de geometría con el propósito de estudiar el proceso de descarga del material granular. Considerando los estudios realizados por Brown (2007) “Numerical analysis of silo discharge” que emplea el modelamiento continuo y Ballaz (2005) “Flujo y atascos de un medio granular en la descarga de silos” que es un trabajo netamente experimental, los silos a utilizarse para analizar la descarga de material granular son: silo con fondo plano y silo con tolva de descarga.

Las granulometrías que definen el tamaño del grano se las obtendrá experimentalmente para el maíz. En los pellets de hierro se usa los datos suministrados por Brown (2007).

Las propiedades del maíz se obtuvo de trabajos previos realizados . Moya, Ayuga y Guaita (2002) en su ensayo “Mechanical properties of granular agricultural materials considered in silos design”, proponen un coeficiente de fricción al maíz. La densidad del maíz se obtuvo de las normas ANSI/ASAE D241.4 (1998), los

módulos de Poisson y coeficiente de restitución se en el artículo de Fernández (2010) “Determinación de parámetros utilizados en las simulaciones DEM”.

Las propiedades físicas y mecánicas de los pellets de hierro como módulo de Young, coeficiente de fricción, coeficiente de Poisson, se las obtiene del artículo de Brown (2007).

El cálculo de time steps (incrementos de tiempo) se realiza con los conceptos de energía de transferencia de Rayleigh y energía de deformación plástica para cada material, formulados por Sullivan (2010) “Particulate discrete element modelling”, Cundall y Strike (1979) en “A discrete numerical model for granular assemblies” y Sykut, Molenda y Horabik (2007) en “Discrete element method (DEM) as a tool for investigating properties of granular materials”, y Kloss (2010) “Discrete Element Method”.

## **4.2. GEOMETRÍA DEL SILO**

La geometría del silo juega un papel fundamental en la descarga del material granular. Su disposición modifica la respuesta micromecánica de la interacción partícula-partícula y partícula-pared.

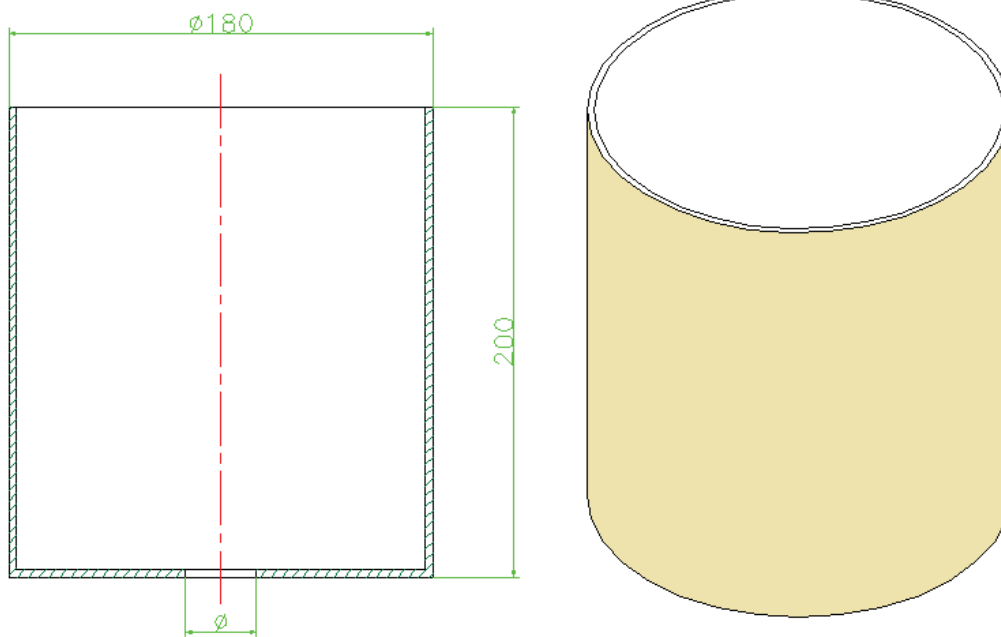
Los silos comúnmente utilizados en la industria para el almacenamiento de material granular son el silo de fondo plano, y el silo con tolva de descarga.

### **4.2.1. SILO DE FONDO PLANO**

En la figura 4.1 se muestra un silo de fondo plano que se modelará y simulará el proceso de descarga de material granular. Este tipo de silo no presenta tolva de descarga, lo que implica condiciones críticas en este estudio. Al comparar los resultados

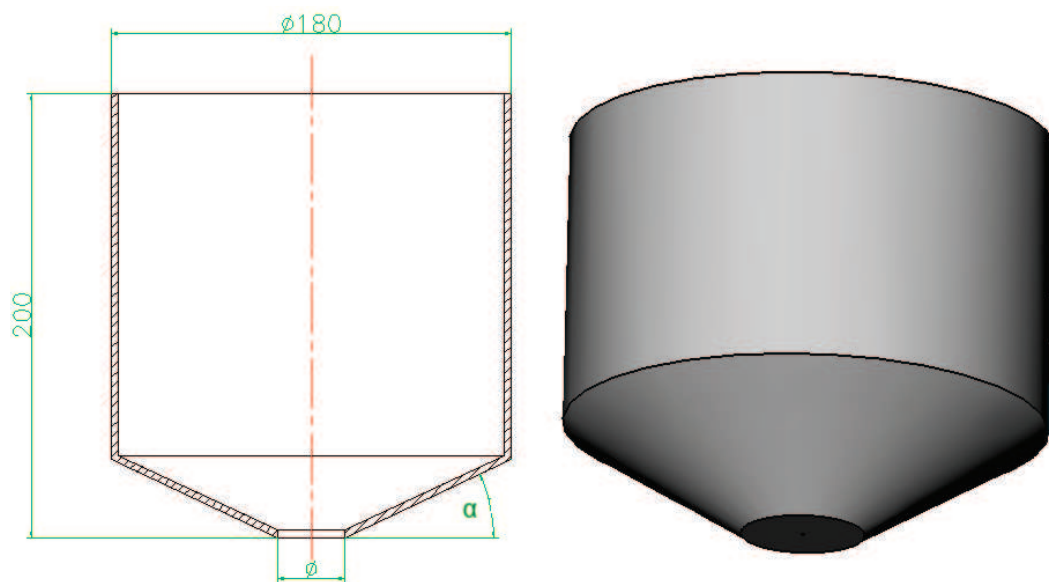
### **4.2.2. SILO CON TOLVA DE DESCARGA**

Al silo de fondo plano se incorpora una tolva para la descarga con un ángulo variable  $\alpha$ , que se modificará para comprobar si el ángulo de reposo del material almacenado es determinante en el diseño de silos. Este silo puede verse en la



**Figura 4.1:** Silo de fondo plano.- en la figura puede observarse las dimensiones consideradas en un silo de fondo plano.

figura 4.2.



**Figura 4.2:** Silo con tolva de descarga.- en la figura se observa las dimensiones consideradas en el silo con tolva de descarga.

## 4.3. PROPIEDADES DEL MATERIAL

### 4.3.1. PROPIEDADES DEL SILO

El material que se considerará en el diseño de las paredes del silo es el concreto, debido a que a macroescala los silos de gran tamaño son realizados de este material. las propiedades aplicadas se las detalla a continuación en la tabla 4.1.

**Tabla 4.1:** Propiedades del silo de concreto consideradas para el ensamble de partículas granulares

<b>Fricción maíz y pared del silo</b>	0.54
<b>Módulo de Young (Pa)</b>	50E09
<b>Coefficiente de restitución</b>	0.205
<b>Relación de Poisson</b>	0.2

Fuente: (Bamforth, Chrisholm, y Gibbs, 2012)

### 4.3.2. PROPIEDADES DE LA PARTÍCULA

A continuación se presenta las propiedades de cada material a estudiarse en la descarga de silos.

#### 4.3.2.1. Maíz

En la tabla 4.2 se especifican las propiedades del ensamble polidisperso compuesto por maíz.

#### 4.3.2.2. Pellets de hierro (iron ore pellets)

Son pequeñas esferas constituidas por un alto porcentaje de hierro utilizadas en la producción de acero.(Brown, 2007) Sus propiedades se listan en la tabla 4.3.

**Tabla 4.2:** Propiedades del maíz

<b>Fricción maíz y pared del silo</b>	0.52
<b>Fricción entre maíz</b>	0.51
<b>Módulo de Young (Pa)</b>	2.98E+008
<b>Coefficiente de restitución entre partículas</b>	0.205
<b>Coefficiente de restitución entre partículas y pared</b>	0.7
<b>Densidad (kg/m<sup>3</sup>)</b>	901
<b>Relación de Poisson</b>	0.3

**Fuente:** (Fernández, 2010), (Lira y Pina, 2011), (Moya y cols., 2002), (Ileleji y Zhou, 2008), (Boac, 2010)

**Tabla 4.3:** Propiedades de los pellets de hierro consideradas para el ensamble de partículas

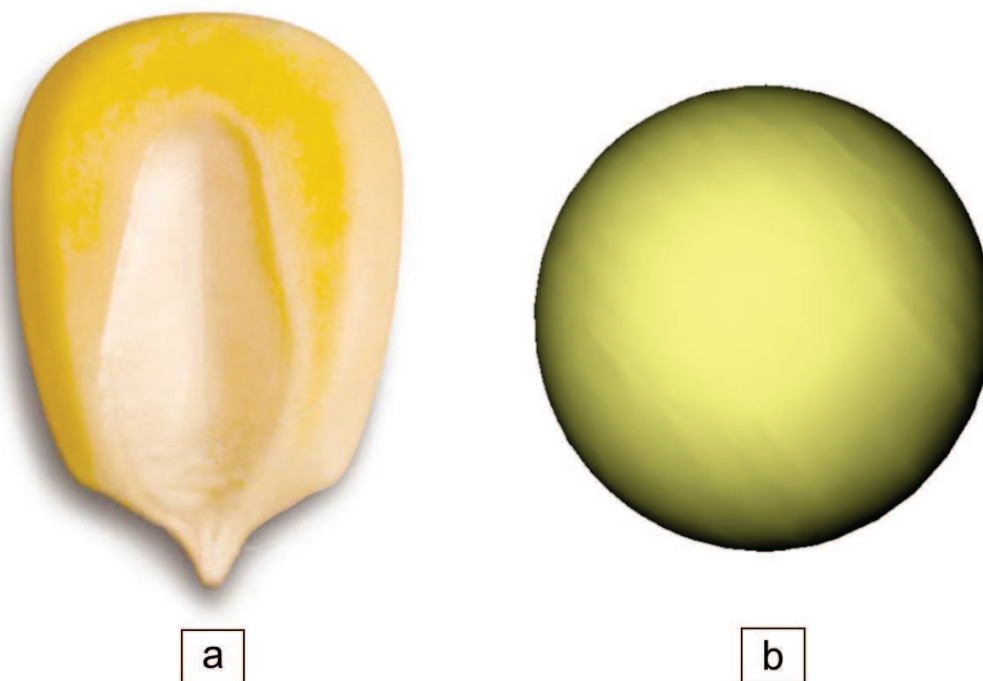
<b>Fricción pellets y pared del silo</b>	0.6
<b>Fricción entre pellets</b>	0.487
<b>Módulo de Young (Pa)</b>	2.40E+006
<b>Coefficiente de restitución entre partículas</b>	0.6
<b>Coefficiente de restitución entre partículas y pared</b>	0.4
<b>Densidad (kg/m<sup>3</sup>)</b>	2300
<b>Relación de Poisson</b>	0.4

**Fuente:** (Brown, 2007),(Purushothama, 2008),(Awrejcewicz, 2012)

### 4.3.2.3. Forma de la partícula

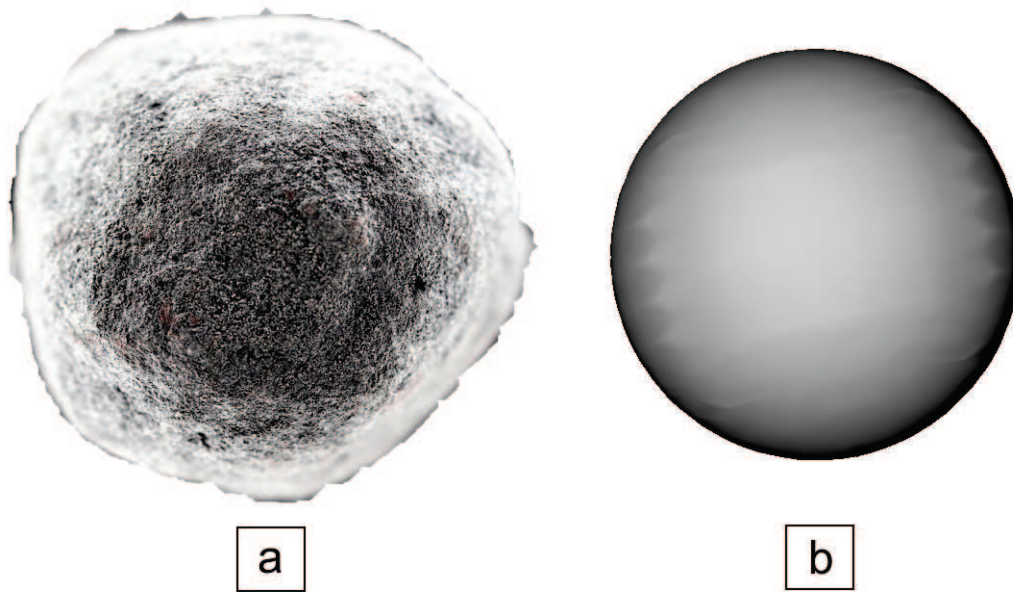
El modelamiento numérico de formas geométricas reales, provoca que el sistema de ecuaciones que define al ensamble granular sea complejo. Para su resolución se requiere alta capacidad de procesamiento y largos tiempos de simulación. (Andrade, Lim, Ávila, y Vlahinic, 2012) en su estudio “Granular element method for computational particle mechanics” consideraron formas reales de partículas para generar ensambles granulares, concluyendo que el número máximo de partículas que puede ser analizado es bajo (alrededor de 20). Con el propósito de incrementar la cantidad de elementos a analizarse se asume que la forma de las partículas sean esféricas.

En la figura 4.3 se presenta la comparación entre un grano de maíz y la partícula que lo representa en el modelamiento DEM.



**Figura 4.3:** Forma considerada de las partículas .- (a) grano de maíz, (b) esfera que representa al grano de maíz en el modelamiento por DEM.

En la figura 4.4 se muestra la comparación entre el pellet de hierro y la esfera que representa su forma real.



**Figura 4.4:** Forma considerada de las partículas pellets de hierro .- (a) pellet de hierro, (b) esfera que representa al pellet de hierro en el modelamiento por DEM.

**Fuente:** (Brown, 2007)

### 4.3.3. CONDICIONES DE FRONTERA

Se ha considerado una condición pared rígida para el modelamiento y simulación del problema. En la figura 4.5 se muestra esta condición, explicada en el capítulo 2 pero aplicada a silos de almacenamiento.

### 4.3.4. GRANULOMETRÍA

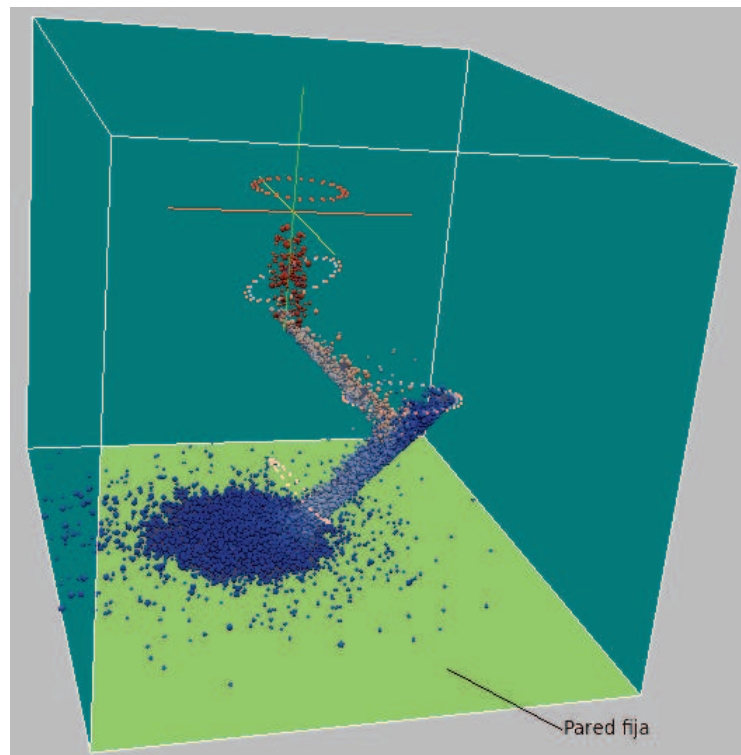
La granulometría es la denominación dada a la clasificación de partículas por su tamaño, luego de realizado un procedimiento de separación de partículas.

La manera convencional de realizar la clasificación granulométrica es mediante tamices con diferentes tamaños de malla en donde se filtran las partículas dependiendo del tamaño. (Lambe, 1997)

#### 4.3.4.1. Granulometría del maíz

Los valores granulométricos del maíz se obtuvieron experimentalmente.





**Figura 4.5:** Condición de pared rígida.- en la figura se observa como las partículas no sobrepasan la región delimitada por la pared rígida (verde claro) en la caja de simulación.

En la tabla 4.4 se muestran los resultados experimentales de la granulometría del maíz.

#### 4.3.4.2. Granulometría de los pellets de hierro

En la investigación de Brown (Brown, 2007) se especifica un diámetro promedio de los pellets de hierro de 10 mm. En la figura 4.6 se observa a los pellets de hierro.

## 4.4. ESTABILIDAD E INCREMENTO DE TIEMPO

La estabilidad y el incremento de tiempo (time step) del sistema quedan definidos por la transferencia de energía Rayleigh.

**Tabla 4.4:** Granulometría del maíz

Malla No	Abertura (micras)	Peso Retenido (g)	% Retenido
1/2	12700	0.00	0.00
3/8	9500	11.60	2.32
5/16	7940	186.35	37.27
4	4750	301.25	60.25
8	2360	0.80	0.16
<b>TOTAL</b>		500.00	100.00

**Fuente:** Laboratorio de Ensayos de Materiales y Mecánica de Suelos, EPN.



**Figura 4.6:** Granulometría de los pellets de hierro.- en la figura se observa la distribución volumétrica de los pellets de hierro.

**Fuente:** (Brown, 2007)

#### 4.4.1. TRANSFERENCIA DE ENERGÍA RAYLEIGH

La ecuación 2.13 permite obtener el incremento de tiempo en base al concepto de transferencia de energía de Rayleigh (ver capítulo 2). (Cundall y Strack, 1979; O' Sullivan, 2010; Sykut y cols., 2007):

$$T_R = \pi R \frac{\left(\frac{\rho}{G}\right)^{\frac{1}{2}}}{(0,1632\nu + 0,8766)}$$

Donde:

R: radio de la partícula.

$\rho$ : Densidad de la partícula.

$G$ : Módulo de corte.

$\nu$ : Relación de Poisson.

Para obtener  $T_R$  primero debe obtenerse el módulo de rigidez. Como ejemplo, se obtendrá el módulo de rigidez del maíz, considerándolo como material isotrópico.

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (4.1)$$

$$G = \frac{298MPa}{1 + 0,3} = 229,23MPa$$

Reemplazado el valor obtenido de módulo de corte en la ecuación 3.2 se obtiene lo siguiente:

$$T_R = \pi * (5 * 10^{-3}) \frac{\left(\frac{901kg/m^3}{229,23 * 10^6 Pa}\right)^{\frac{1}{2}}}{(0,1632(0,3) + 0,8766)}$$

$$T_R = 3,36 * 10^{-5}$$

#### 4.4.2. TIME STEP

El valor de  $\Delta t$  a utilizarse en el modelamiento discreto debe estar en el siguiente rango:

$$\Delta t < (0,1T_R - 0,3T_R)$$

$$\Delta t = 0,1 * T_R = 3,36 * 10^{-5} * 0,1 = 3,36 * 10^{-6}$$

El time step a utilizarse es  $1 * 10^{-6}$ .

### 4.5. SCRIPT CARACTERÍSTICO

Un script es un conjunto de comandos que se siguen secuencialmente al ser ejecutados (Velasco y Martín, 2008). En el desarrollo de este proyecto los scripts juegan un papel fundamental para la obtención de resultados durante la descarga del material granular.

A continuación se muestra el orden secuencial de un script, desarrollado para el ingreso de material granular en una región delimitada por el tamaño de la caja de simulación; este script se lo denomina “pour dev”.

**Script pour dev****#Particle insertion by pour dev**

```

atom_style      granular
atom_modify     map array
boundary        f f f
newton          off
echo           both
communicate     single vel yes
#processors     2 1 1
units          si
region          reg block -0.02 0.02 -0.02 0.02 0. 0.15 units box
create_box     1 reg
neighbor        0.002 bin
neigh_modify    delay 0

```

**#Material properties required for new pair styles**

```

fix    m1 all property/global youngsModulus peratomtype 5.e6
fix    m2 all property/global poissonsRatio peratomtype 0.45
fix    m3 all property/global coefficientRestitution peratomtypepair 1 0.3
fix    m4 all property/global coefficientFriction peratomtypepair 1 0.5

```

**#New pair style**

```

pair_style      gran/hertz/history 1 0 #Hertzian without cohesion
pair_coeff       * *
timestep        0.00001

fix    gravi all gravity 9.81 vector 0.0 0.0 -1.0
fix    zwalls all wall/gran/hertz/history 1 0 zplane 0.0 0.15 1
fix    xwalls all wall/gran/hertz/history 1 0 xplane -0.02 0.02 1
fix    ywalls all wall/gran/hertz/history 1 0 yplane -0.02 0.02 1
#fix    cylwalls all wall/gran/hertz/history 1 0 zcylinder 0.05 1

```

**#distributions for insertion**

```

fix    pts1 all particletemplate/sphere 1 atom.type 1 density constant 2500 ra-
dus constant 0.005

```

```
fix      pts2 all particletemplate/sphere 1 atom_type 1 density constant 2500 ra-
radius constant 0.003
```

```
fix      pts3 all particletemplate/sphere 1 atom_type 1 density constant 2500 ra-
radius constant 0.004
```

```
fix      pts4 all particletemplate/sphere 1 atom_type 1 density constant 2500 ra-
radius constant 0.002
```

```
fix      pdd1 all particledistribution/discrete 1. 4 pts1 0.25 pts2 0.25 pts3 0.25 pts4
0.25
```

### **#region and insertion**

```
group    nve_group region reg
```

```
region    bc cylinder z 0.0 0.0 0.015 0.05 0.12 units box
```

```
fix      ins nve_group pour/dev nparticles 1000 1 distributiontemplate pdd1 vol
0.25 200 massflowrate 0.1 vel uniform 0. 0. 0. 0. -1.0 region bc
```

```
compute   fc all pair/gran/local id pos force
```

### **#apply nve integration to all particles that are inserted as single particles**

```
fix      integr nve_group nve/sphere
```

### **#output settings, include total thermal energy**

```
compute   1 all erotate/sphere
```

```
thermo_style    custom step atoms ke c_1 vol
```

```
thermo    1000
```

```
thermo_modify    lost ignore norm no
```

```
compute_modify    thermo_temp dynamic yes
```

### **#insert the first particles so that dump is not empty**

```
run      1
```

```
#dump      dmp all custom 20 post/dump*.pour id type type x y z ix iy iz vx vy vz
fx fy fz omegax omegay omegaz radius
```

```
#insert particles
```

```
#dump      dmp1 all custom 100 post/dump.p id type type x y z ix iy iz vx vy vz
fx fy fz omegax omegay omegaz radius
```

```
dump      dmp1 all custom 500 post/dump.liggghts id type type x y z ix iy iz vx vy
vz fx fy fz omegax omegay omegaz radius
```

```
#dump      forcechain all local 500 post/dump.fc*.liggghts c_fc[1] c_fc[2] c_fc[3]
c_fc[4] c_fc[5] c_fc[6] c_fc[7] c_fc[8] c_fc[9] c_fc[10] c_fc[11] c_fc[12]
dump      dmp2 all custom 10000 post/dump*.bin id x y z vx vy vz radius mass
run       500000
unfix     ins
```

# CAPÍTULO 5

## ANÁLISIS DE RESULTADOS

### 5.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo se presenta los resultados obtenidos en las simulaciones por DEM del flujo de descarga de material granular en silos de almacenamiento. El análisis a realizarse es del tipo micro-mecánico en las partículas componentes del ensamble granular.

Se estudia la influencia de varios parámetros en el flujo de descarga. Su influencia afecta tanto el comportamiento del material en desfogue del silo como la disposición estructural del silo. Las variables que se considera en el estudio son:

1. Ángulo de reposo.
2. Diámetro del agujero de descarga.
3. Pendiente de la tolva de descarga.
4. Granulometría de las partículas.

La influencia de las características descritas anteriormente pueden cuantificarse en términos de:

1. Perfiles de velocidad de descarga.
2. Esfuerzos en las paredes del silo.
3. Fuerzas entre partículas.

#### 4. Deformaciones entre partículas.

Este análisis se realizó en partículas que representan a los materiales granulares maíz y pellets de hierro. Sus propiedades físicas, mecánicas y granulométricas se las citó en el capítulo 4.

## 5.2. GEOMETRÍA

Para establecer la geometría adecuada del silo se toma en cuenta el diámetro del agujero de descarga y la inclinación de la tolva. La pendiente del cono del silo tiene estrecha relación con el ángulo de reposo del material granular. Por otro lado, la granulometría sirve como referencia para determinar el tamaño del agujero de descarga.

### 5.2.1. ÁNGULO DE REPOSO

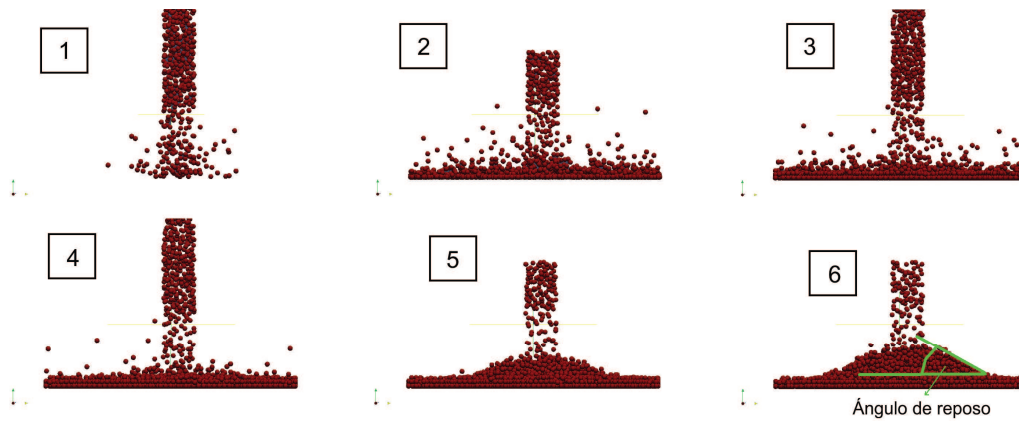
Para determinar el ángulo de reposo del material granular se hace fluir partículas sobre una superficie fija horizontal (condición definida en el capítulo 2). El aglomeramiento de partículas lleva a la formación del ángulo de reposo. Esta particularidad del ensamble granular es dependiente del coeficiente de fricción estático.

En la figura 5.1 se representa la secuencia seguida en la simulación para obtener el ángulo de reposo.

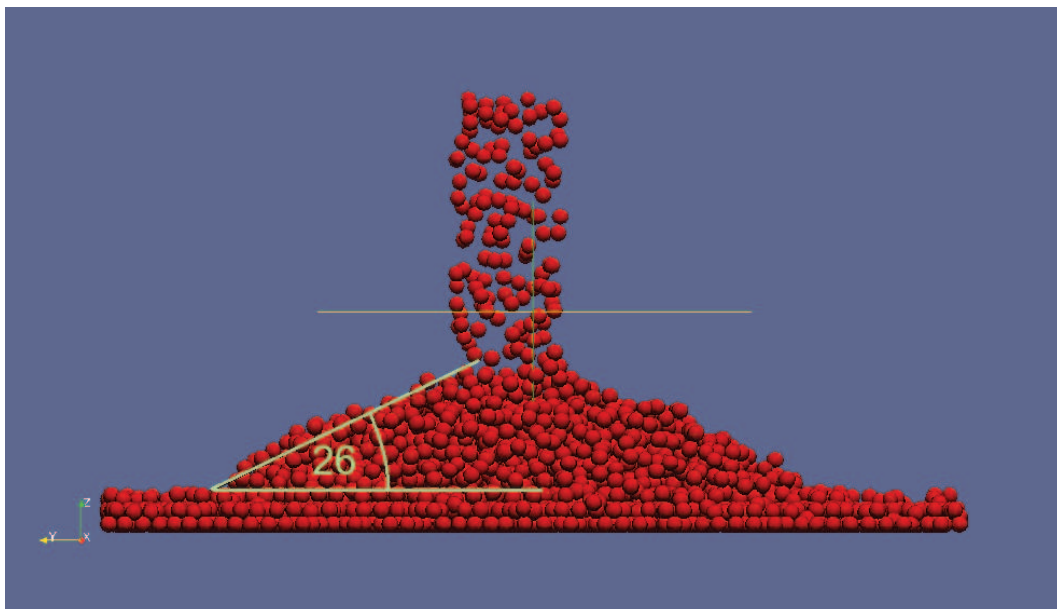
#### 5.2.1.1. Pellets de hierro

En la figura 5.2 se muestra el ángulo de reposo formado por los pellets de hierro luego de ser depositados en una superficie delimitada por una pared fija. El ángulo obtenido después de ejecutada la simulación es de  $26^\circ$ . El coeficiente estático obtenido es  $\mu = \tan(26) = 0,487$ . Este valor es coincidente con el definido teóricamente para pellets de hierro ( $\mu = \tan(26) = 0,487$ ) (Brown, 2007). Éste y los demás coeficientes que definen a las partículas pellets de hierro se especifican en el capítulo 4.





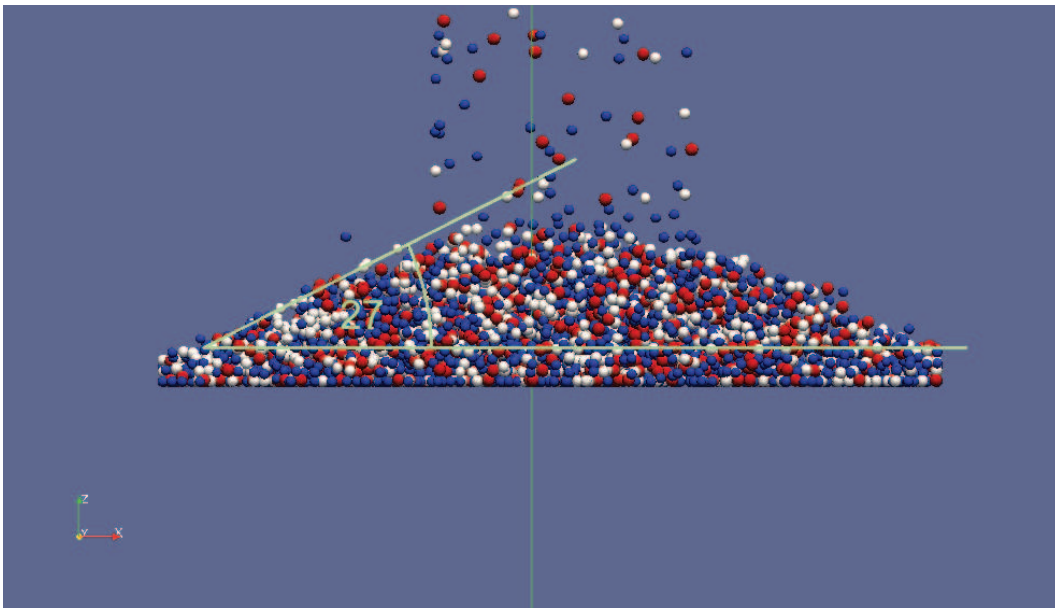
**Figura 5.1:** Obtención del ángulo de reposo.- La secuencia muestra la formación de un ensamble en el que su equilibrio estático está determinado por el ángulo de reposo.



**Figura 5.2:** Ángulo de reposo de los pellets de hierro.- la tangente del ángulo de reposo obtenido luego de corrida la simulación es cercano al coeficiente de fricción estático  $\mu_{estatica} = \tan(26) = 0,487$ .

### 5.2.1.2. Maíz

En la figura 5.3 se presenta el ángulo de reposo del maíz obtenido después de ejecutada la simulación. El ángulo obtenido es de  $27^\circ$ . Esta magnitud coincide con la definida experimentalmente  $\alpha = 27 \text{ grados}$  que deriva en un coeficiente de fricción estática de  $\mu_{estatica} = \tan(27) = 0,51$  (Fernández, 2010). Las propiedades del maíz y su distribución granulométrica se encuentran en el capítulo 4.



**Figura 5.3:** Ángulo de reposo del maíz.- en la figura se observa el ángulo de reposo del maíz formado luego de adquirir el equilibrio estático sobre una pared rígida.

### 5.2.2. AGUJERO DE DESCARGA

Para definir la geometría del silo, es necesario identificar un agujero crítico de descarga. Como punto de partida se considera el criterio de Ballaz (2005) que propone una abertura de 4.94 veces el diámetro de la partícula. En base a esta pauta planteada, se definen varias geometrías de silo con diferentes diámetros, ver figura 5.4.

Según Ballaz (2005) el orificio crítico de desfogue se lo fija con la ecuación 5.1.

$$\frac{D_{agujero}}{D_{particula}} = 4,94 \quad (5.1)$$

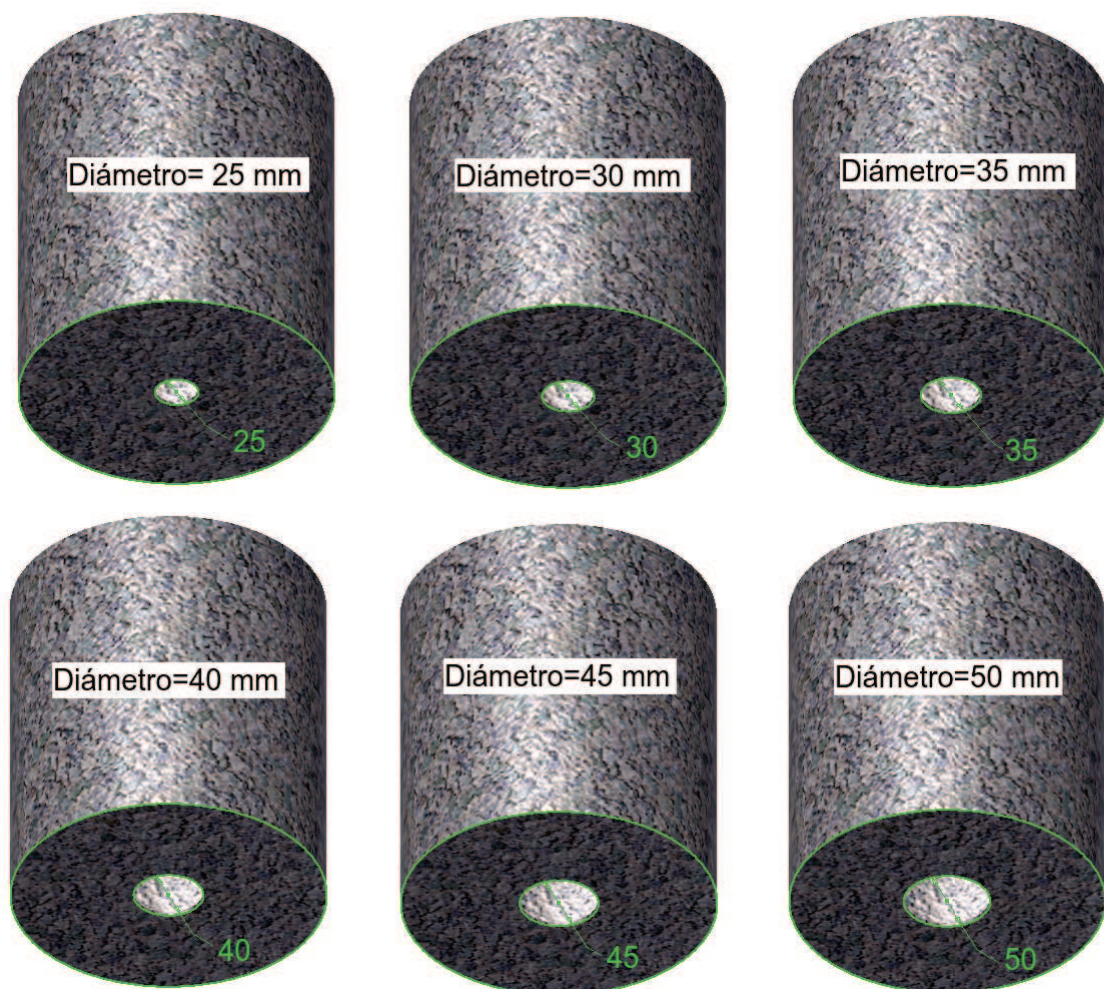
De la ecuación 5.1 se fija una abertura crítica aproximada, para posteriormente comprobar su validez.

$$D_{agujero} = 4,94 * 10mm = 49,4mm \cong 50mm$$

$$\frac{D_{agujero}}{D_{maiz}} = 4,94 \quad (5.2)$$

$$D_{agujero} = 4,94 * 9,5mm = 47mm$$

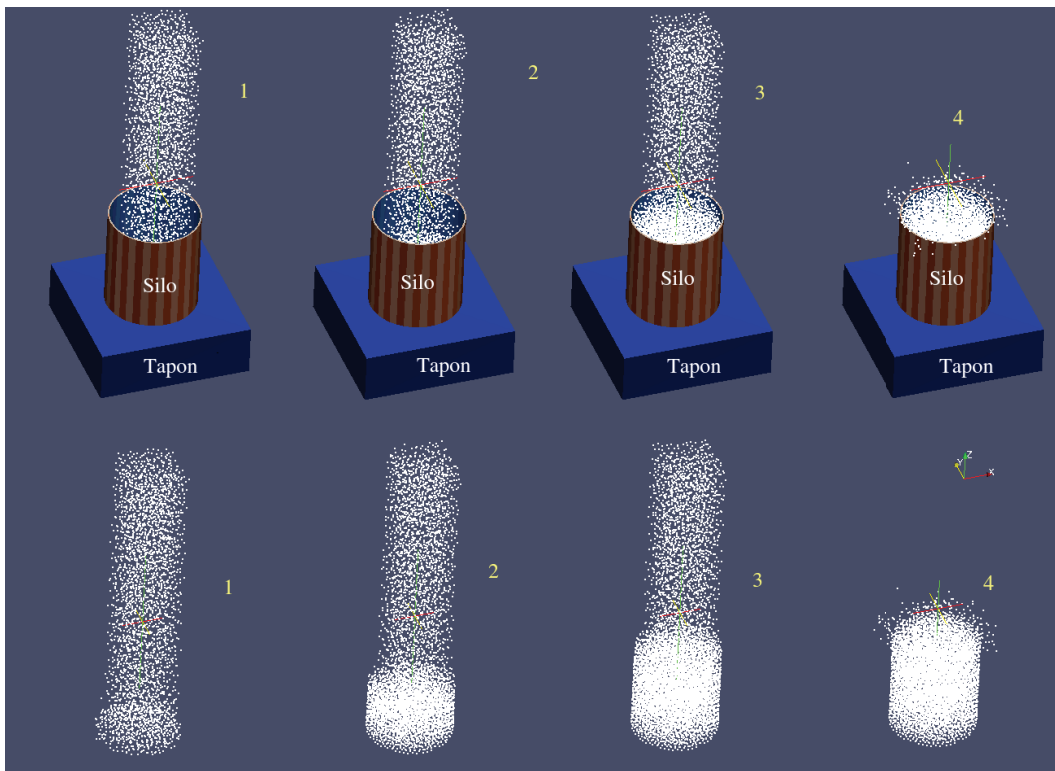
En base a este criterio se considera como punto de partida un orificio de 50 mm.



**Figura 5.4:** Agujeros de descarga de diferentes diámetros.- en la figura se observa los diámetros utilizados para determinar el diámetro crítico para la salida del material granular del silo.

### 5.2.2.1. Llenado del silo

En la figura 5.5 se muestra el llenado secuencial de un silo. El material es depositado dentro del silo, y para evitar que fluya a través de la boca de desfogue se utiliza una placa. Este procedimiento se realiza en el silo de fondo plano, debido a que su geometría presenta una condición crítica (ángulo de la tolva igual a cero).



**Figura 5.5:** Llenado del silo.- en la figura se observa el llenado progresivo de un silo de fondo plano, se visualiza también la placa inferior que impide el flujo de material granular (maíz) durante el llenado.

### 5.2.2.2. Pellets de hierro

En la figura 5.32 se encuentra representado la obtención del agujero crítico de descarga para el silo que contiene partículas de pellets de hierro. Se ha obtenido un diámetro de 40 mm. A partir de la ecuación 5.1 se formula la igualdad 5.3.

$$\frac{D_{agujero}}{D_{particula}} = \frac{40}{10} = 4 \quad (5.3)$$

La relación entre los diámetros de la partícula y el agujero de salida del material del silo es 4.

### 5.2.2.3. Maíz

En la figura 5.33 se observa la comparación empleada para definir una abertura crítica para el silo que contiene partículas que representan al maíz.

Como se observa en la figura 5.33 el orificio de desfogue ( $D_{agujero}$ ) es 30 mm. En base a este resultado se puede formular la siguiente relación entre el diámetro del agujero ( $D_{agujero}$ ) y el diámetro de la partícula ( $D_{particula}$ ), ecuación 5.1.

$$\frac{D_{agujero}}{D_{particula}} = \frac{30}{9,5} = 3,16 \quad (5.4)$$

Existe una relación de 3.16 entre el agujero de descarga y el diámetro de la partícula de mayor tamaño.

Considerando la relación obtenida con la ecuación 5.4 y la granulometría del material (pellets de hierro, maíz), se ha determinado que en los ensambles poli-dispersos se requiere diámetros menores para el desfogue del material.

## 5.3. PELLETS DE HIERRO

### 5.3.1. AGUJERO DE DESCARGA D=35 mm

#### 5.3.1.1. Velocidad de descarga

En las figuras 5.34 a 5.46 se representa gráficamente la velocidad de las partículas pellets de hierro en un volumen de control ubicado en la zona de descarga. Al comparar las velocidades de las partículas cercanas a las paredes del silo, con las cercanas al agujero de descarga, se observa mayor movimiento en las partículas próximas al agujero de desfogue de material del silo.

En este caso se presentaron atascos, figuras 5.34 a 5.40. El atasco inicia en las partículas cercanas a la tolva del silo. Propagándose hasta llegar a las pare-

des del silo. Al final los pellets de hierro adquieren un estado equilibrio estático, provocando el estancamiento del material en el interior del silo.

La distribución de velocidades durante la descarga del silo presenta un patrón en el cual se diferencia el flujo concentrado (“funnel flow”). Este fenómeno se da regularmente cuando el coeficiente de fricción entre las partículas y la pared del silo ( $\mu_{\text{pellets}} = 0,6$ ) es mayor al coeficiente de fricción entre partículas ( $\mu_{\text{pellets}} = 0,487$ ) (Schulze, 2010).

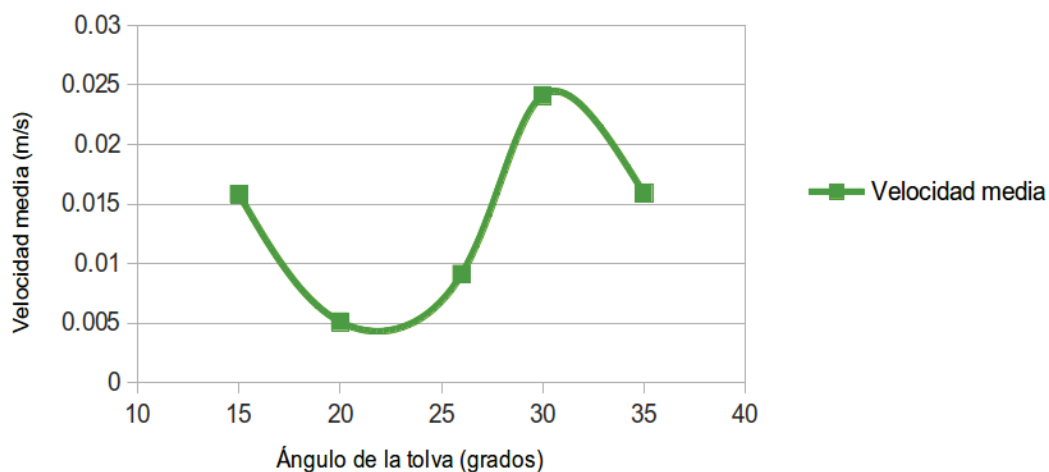
En la figura 5.40 se realiza una comparación de velocidades medias de descarga. Se puede distinguir que el silo de fondo plano presenta la menor velocidad media de descarga con una magnitud cercana a cero. Los silos cuya tolva es mayor al ángulo de reposo del material ( $> 26\text{grados}$ ) demoran más en atascarse, mientras los silos cuyo ángulo de reposo es menor a  $26^\circ$  tarda menor tiempo en taponarse. En la tabla 5.1, se muestra las velocidades medias promedio y se las ilustra gráficamente en la figura 5.40. Las magnitudes oscilan entre 0 y 0.02 (m/s). En base a los valores de la tabla 5.1, se diferencia que el silo de fondo plano es el que más rápidamente se atasca, presentando la menor velocidad media ( $v_{\text{media}} = 1,8866e - 04 \text{ m/s}$ ).

**Tabla 5.1:** Velocidad media en el inicio de la descarga (ver figura 5.40) de pellets de hierro en silos con diámetro del agujero de descarga de 35 mm

Velocidad media (m/s)	
<b>Silo plano</b>	1.8866e-04
<b>Tolva de 15 grados</b>	0.0158
<b>Tolva de 20 grados</b>	0.0051
<b>Tolva de 26 grados</b>	0.0091
<b>Tolva de 30 grados</b>	0.0241
<b>Tolva de 35 grados</b>	0.0159

En la figura 5.6 se puede observar la línea de tendencia obtenida al comparar la velocidad promedio de las partículas con la pendiente de la tolva.

## Velocidad media vs Inclinación de la tolva



**Figura 5.6:** Velocidad promedio vs Ángulo de la tolva en silos con agujero de descarga de 35 mm con partículas que representan a los pellets de hierro

### 5.3.1.2. Esfuerzos en las paredes del silo

En la figura 5.55 (b) a (f) se observa que los esfuerzos cortantes máximos se dan en la tolva de descarga. Esta sección soporta el peso acumulado de las partículas almacenadas en el silo. La concentración de densidad ocasiona el incremento de esfuerzos en la tolva del silo.

En la figura 5.56 se representa un silo de 30° de inclinación de la tolva y 35 mm de diámetro del agujero de descarga. Al inicio del vaciado del silo, el material fluye sin restricciones, ver figura 5.56 (a) a (c). Los esfuerzos cortantes en las paredes varían por cada incremento de tiempo. Los esfuerzos luego de ocurrido el atascamiento se muestran en la figura 5.56 (d) a (f). Sus magnitudes permanecen estables, presentando valores entre 481.89 Pa (silo con tolva de 20°) y 688.53 Pa (silo de fondo plano).

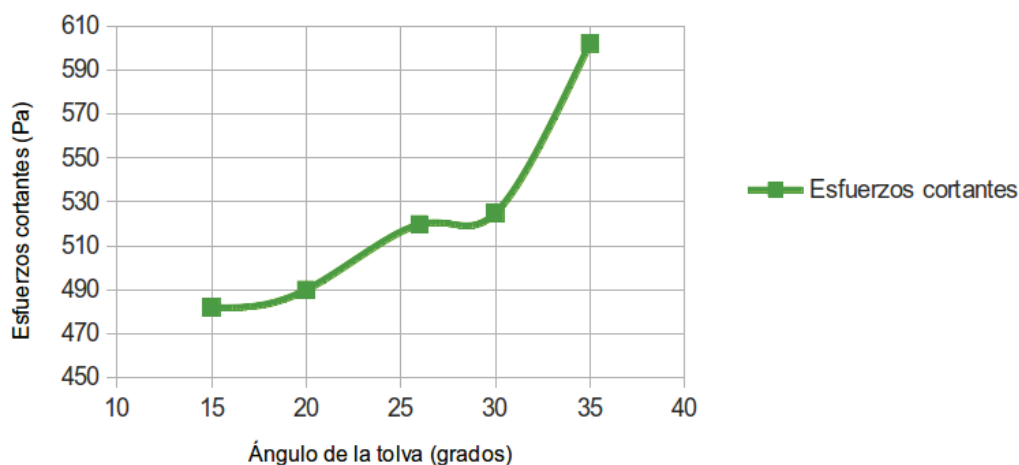
En la tabla 5.16, se presenta los esfuerzos cortantes medios en las paredes de silos. El máximo esfuerzo cortante se registra en el silo de fondo plano (688.53 Pa), mientras que el mínimo esfuerzo se presenta en el silo de 15° (481.89 Pa). Los esfuerzos en las paredes se incrementan con el aumento de inclinación en la tolva de descarga, ver figura 5.57.

**Tabla 5.2:** Esfuerzos cortantes máximos en silos con diametro del agujero de descarga igual a 35 mm, material atascado

<b>Esfuerzos cortantes máximos en las paredes (Pa)</b>	
<b>Silo plano</b>	688.53
<b>Tolva de 15 grados</b>	481.89
<b>Tolva de 20 grados</b>	489.81
<b>Tolva de 26 grados</b>	519.66
<b>Tolva de 30 grados</b>	524.78
<b>Tolva de 35 grados</b>	602.23

En la figura 5.7 se representa gráficamente los valores de la tabla 5.2. La línea de tendencia obtenida representa el incremento de la magnitud de esfuerzos cortantes con el aumento de la inclinación de la tolva.

### Esfuerzos cortantes máximos vs Inclinación de la tolva



**Figura 5.7:** Esfuerzos cortantes medios en la pared del silo de 35 mm de diámetro con partículas de pellets de hierro

En la figura 5.58 se presenta la distribución de presiones en las paredes de los silos. En la tabla 5.3 se resume los resultados de presión promedio. Puede observarse que la magnitud de presiones va decreciendo con el aumento de la pendiente de la tolva. Las máximas presiones se dan en el silo plano y en el silo



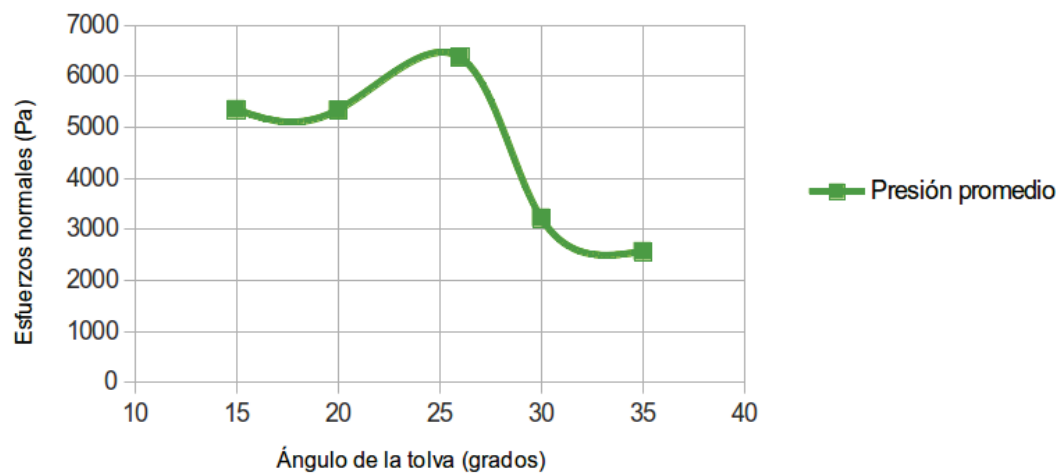
con tolva de  $26^\circ$ , con magnitudes de 5559.24 Pa y 6371.77 Pa respectivamente.

**Tabla 5.3:** Presión promedio en silos de radio del agujero de 17.5 mm con pellets de hierro, en los cuales se produjo atascos

Presiones máximas en las paredes (Pa)	
Silo plano	5559.24
Tolva de 15 grados	5345.42
Tolva de 20 grados	5335.77
Tolva de 26 grados	6371.77
Tolva de 30 grados	3219.7
Tolva de 35 grados	2564.87

En la figura 5.8 se muestra esquemáticamente el comportamiento de la presión interior en el silo respecto a la pendiente de la tolva.

### Presión máxima vs Inclinación en la tolva



**Figura 5.8:** Presión en las paredes del silo de 35 mm de diámetro con partículas de pellets de hierro

### 5.3.1.3. Cadenas de fuerza

En las figuras 5.64 a 5.69 se presenta silos en los cuales se produjo estancamiento en el flujo de material. El atasco es atribuido a los arcos formados durante la descarga del material granular almacenado en silos. El patrón en la distribución de cadenas de fuerza es función de la pendiente de la tolva del silo. La fuerza entre partículas aumenta hasta que la inclinación de la tolva iguale al ángulo de reposo del material ( $26^\circ$ ). En los silos de  $30^\circ$  y  $35^\circ$  de ángulo de tolva se distingue la disminución de intensidad en las cadenas de fuerza, en estos casos la pendiente de la tolva es mayor al ángulo de reposo de los pellets de hierro.

En la tabla 5.4 se muestra la fuerza normal de contacto promedio entre partículas. Las máximas fuerzas de contacto se dan en los silos cuyas tolvas tienen la pendiente menor o igual al ángulo del reposo del material ( $26^\circ$ ),  $20^\circ$ ,  $26^\circ$ ,  $30^\circ$ , y silo plano respectivamente. El máximo valor de fuerzas entre partículas obtenido es de 0.77 N en el silo plano. Las menores cadenas de fuerza se dan en los silos de 15 y 35 grados con 0.43 y 0.49 N.

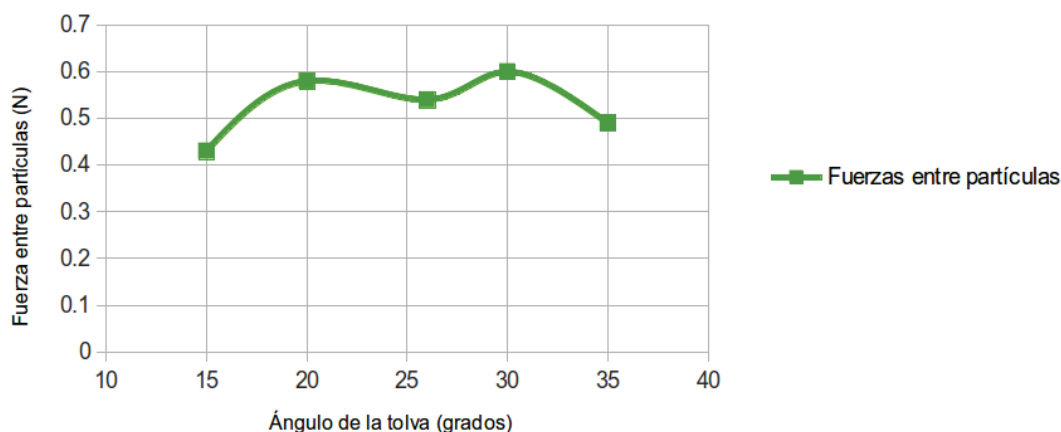
**Tabla 5.4:** Fuerza normal máxima promedio entre partículas en la descarga de silos con radio del agujero de 17.5 mm

<b>Fuerzas máximas promedio (N)</b>	
<b>Silo plano</b>	0.77
<b>Tolva de 15 grados</b>	0.43
<b>Tolva de 20 grados</b>	0.58
<b>Tolva de 26 grados</b>	0.54
<b>Tolva de 30 grados</b>	0.60
<b>Tolva de 35 grados</b>	0.49

En la figura 5.9 se esquematiza la línea de tendencia entre la fuerza entre partículas y la pendiente de la tolva.

La fuerza normal incide directamente en el incremento y descenso de magnitud en las cadenas de fuerza. La fuerza normal aumenta o disminuye su valor de acuerdo a la inclinación de la tolva, ver figura 5.16. Mientras mayor sea la fuerza

## Fuerzas normales entre partículas vs Inclinación de la tolva



**Figura 5.9:** Cadenas de fuerza vs ángulo de la tolva en silos de 35 mm de diámetro con partículas de pellets de hierro

normal mayor será la fuerza entre partículas, efecto de acción y reacción entre el grano de maíz o pellet de hierro con la pared del silo.

En la figura 5.70 se muestra en detalle el arco formado en el silo de la figura 5.69.

### 5.3.1.4. Deformaciones promedio

En la tabla 5.5 se presenta los tensores de deformación promedio y sus respectivas invariantes hidrostáticas ( $I_1$ ) y desviadoras ( $J_2$ ) dadas en los pellets de hierro en un silo de agujero de descarga de 35 mm. La invariante  $I_1$  representa las deformaciones volumétricas dadas en el silo. Por su parte la invariante desviadora  $J_2$  simboliza los cambios de forma en el conjunto de partículas.

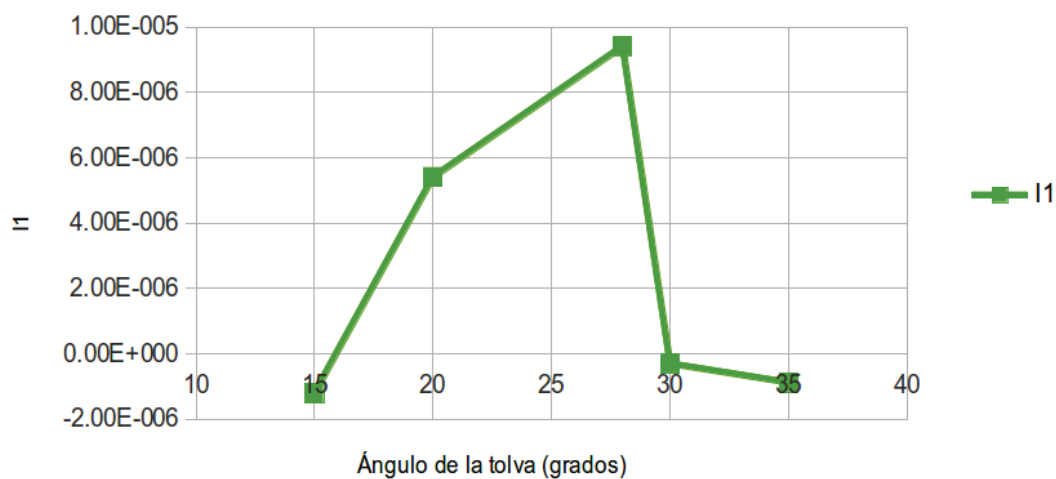
Al comparar las magnitudes de  $I_1$  y  $J_2$  se nota que las deformaciones más significativas son del tipo volumétricas. El máximo valor de la invariante hidrostática ( $I_1$ ) es  $5.21E-05$  en el silo de fondo plano. Mientras la magnitud máxima de  $J_2$  es  $-4.695E-10$ .

El ángulo de la tolva incide directamente en el grado de las deformaciones. Cuando la inclinación del cono de descarga es  $15^\circ$  se diferencia que la magnitud de la invariante  $I_1$  es  $-1.21E-06$ . El incremento de la pendiente de la tolva conlleva también un aumento de valor en  $I_1$ . A 20 y 28 grados de tolva, se registra valores

de  $I_1$  iguales a  $5.41E-06$  y  $9.42E-06$  respectivamente. Cuando el ángulo de la tolva es mayor al ángulo de reposo del material ( $\alpha > 26$ ) la magnitud de  $I_1$  decrece. Con  $30^\circ$  y  $35^\circ$  de tolva se obtuvo valores de  $-3E-07$  y  $-8.8E-07$ .

En la figura 5.10 se ilustra la relación entre la invariante hidrostática ( $I_1$ ) y el ángulo de pendiente de la tolva. Como se explicó, la deformación volumétrica promedio se incrementa con el aumento de la pendiente de la tolva. Cuando la pendiente de la tolva es mayor a  $26^\circ$  la magnitud de la deformación tiende a disminuir.

### Invariante 1 (I1) vs Inclinción de la tolva



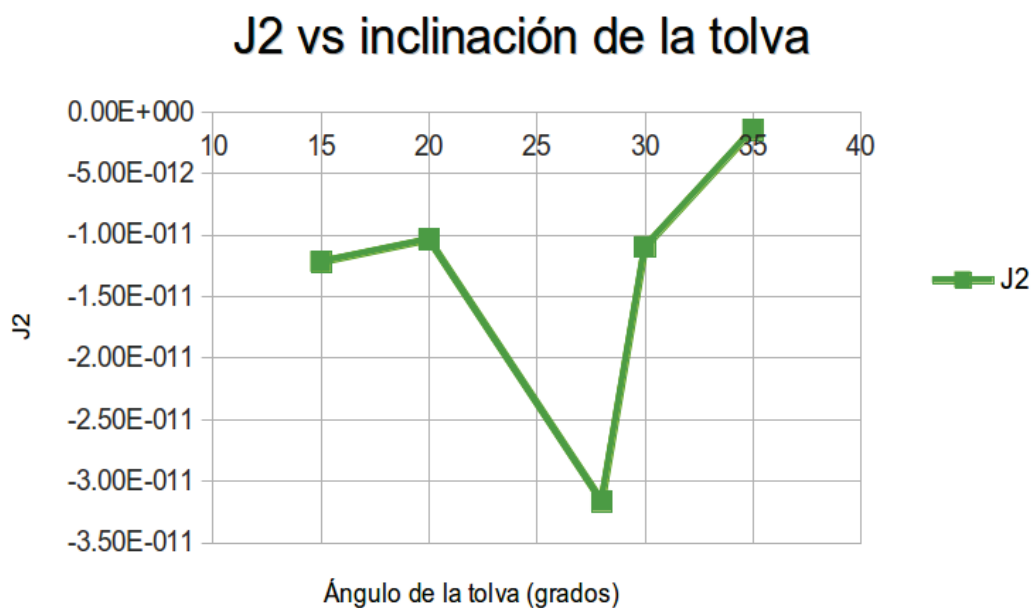
**Figura 5.10:** Invariante hidrostática entre partículas de pellets de hierro silo de 35 mm de diámetro

La invariante desviadora ( $J_2$ ) del tensor deformación se especifica en la tabla 5.5. El máximo valor de  $J_2$  se registra en el silo de fondo plano con  $-4.695E-10$ . De igual manera que en la invariante hidrostática, el ángulo de la tolva incide en la magnitud de  $J_2$ . Cuando la inclinación de la tolva es menor al ángulo de reposo ( $\alpha < 26$ ) se tiene valores de  $-1.217E-11$ ,  $-1.035E-11$  en silos de  $15^\circ$  y  $20^\circ$  de tolva. Cuando el cono de descarga es  $26^\circ$ ,  $J_2$  es  $-3.161E-11$ . Cuando la inclinación de la tolva supera el ángulo de reposo del material el módulo de  $J_2$  disminuye. A  $30^\circ$  y  $35^\circ$  de tolva se obtuvo valores de  $-1.097E-11$  y  $-1.432E-12$ .

En la figura 5.11 se presenta la relación entre la invariante desviadora  $J_2$  y el ángulo de la tolva del silo.

**Tabla 5.5:** Deformaciones promedio entre partículas de pellets de hierro en silo con agujero de descarga de diámetro 35 mm

<b>Silo de fondo plano</b>				
22.85E-06	20.00E-06	5.84E-06	$I_1$	5.21E-05
20.0E-06	17.06E-06	2.64E-06	$I_2$	435.25E-06
5.84E-06	2.64E-06	12.19E-06	$J_2$	-4.695E-10
<b>Silo con tolva de 15 grados</b>				
-2.66E-06	-0.18E-06	-2.02E-06	$I_1$	-1.21E-06
-0.18E-06	2.61E-06	0.83E-06	$I_2$	-11.68E-13
-2.02E-06	0.83E-06	-1.16E-06	$J_2$	-1.217E-11
<b>Silo con tolva de 20 grados</b>				
1.25E-06	1.56E-06	1.71E-06	$I_1$	5.41E-06
1.65E-06	1.93E-06	2.11E-06	$I_2$	-5.948E-13
1.71E-06	2.11E-06	2.23E-06	$J_2$	-1.035E-11
<b>Silo con tolva de 26 grados</b>				
1.29E-06	1.61E-06	2.91E-06	$I_1$	9.42E-06
1.61E-06	2.01E-06	3.70E-06	$I_2$	-2.035E-12
2.91E-06	3.71E-06	6.12E-06	$J_2$	-3.161E-11
<b>Silo con tolva de 30 grados</b>				
2.32E-06	0.03E-06	-0.16E-06	$I_1$	-3E-07
2.03E-06	0.17E-06	-0.49E-06	$I_2$	-1.094E-11
-0.16E-06	-0.49E-06	-2.79E-06	$J_2$	-1.097E-11
<b>Silo con tolva de 35 grados</b>				
0.25E-06	0.23E-06	-0.52E-06	$I_1$	-8.8E-07
0.23E-06	0.20E-06	-0.55E-06	$I_2$	-1.174E-12
-0.52E-06	-0.55E-06	-1.33E-06	$J_2$	-1.432E-12



**Figura 5.11:** Invariante desviadora ( $J_2$ ) entre partículas de pellets de hierro silo de 35 mm de diámetro

### 5.3.2. AGUJERO DE DESCARGA D=40 mm

#### 5.3.2.1. Velocidad de descarga

En las figuras 5.42 a 5.46 se expone las velocidades de descarga de pellets de hierro para silos de diferente inclinación de la tolva. De manera similar que en los silos de 35 mm de diámetro, se nota que el tipo de flujo es concentrado (“funnel flow”). Esto se cumple debido a que el coeficiente de fricción entre las partículas y la pared del silo ( $\mu_{\text{pellets}} = 0,6$ ) es mayor al coeficiente de fricción entre partículas ( $\mu_{\text{pellets}} = 0,487$ ) (Schulze, 2010).

En la figura 5.41 se compara esquemáticamente las velocidades medias, luego de 10 segundos iniciada la descarga. Las velocidades oscilan entre 0.06 m/s y 0.12 m/s. A diferencia de la gráfica 5.40, las velocidades en ningún instante se acercan a cero. Esto implica que no existe tendencia al atasco en este tipo de silos.

En la tabla 5.6 se resume las velocidades promedio de desfogue del material granular en cada silo. Sus magnitudes varían entre 0.04 y 0.1 m/s. El incremento

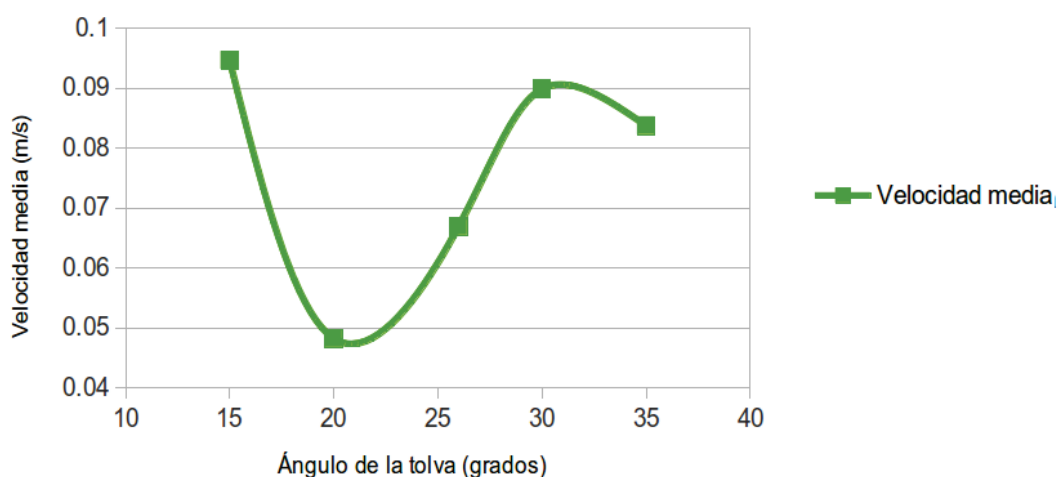
de la tolva produce reducción en la magnitud de velocidad desde 0.0946 m/s para el silo con tolva de 15° hasta 0.0669 m/s en el silo de 26° de tolva. Cuando la inclinación de la tolva supera el valor del ángulo de reposo del material ( $\alpha > 26^\circ$ ) el módulo de la velocidad media aumenta hasta un valor máximo de 0.0898 m/s en el silo de 30° de tolva.

**Tabla 5.6:** Velocidad media en silos con radio del agujero de 40 mm de diámetro

Velocidad media (m/s)	
Silo plano	0.0932
Tolva de 15 grados	0.0946
Tolva de 20 grados	0.0482
Tolva de 26 grados	0.0669
Tolva de 30 grados	0.0898
Tolva de 35 grados	0.0837

La relación entre la velocidad media y la inclinación de la tolva se expone en en la figura 5.12.

### Velocidad media vs Inclinación de la tolva



**Figura 5.12:** Velocidad promedio vs Ángulo de la tolva en silos con agujero de descarga de 40 mm con partículas que representan a los pellets de hierro

### 5.3.2.2. Esfuerzos en las paredes del silo

En la figura 5.59 se muestra la distribución de esfuerzos cortantes máximos en las paredes del silo. Como patrón observable se diferencia que la magnitud del esfuerzo aumenta con el incremento de la tolva. En el silo plano se registra una magnitud de 559.09 Pa mientras en el silo con tolva de 26° (tolva igual al ángulo de reposo del material) se estima un valor de 690 Pa. En los silos con 30 y 35° de pendiente de tolva la intensidad del esfuerzo cortante disminuye a magnitudes de 523.9 Pa y 487 Pa respectivamente. En la tabla 5.7 se tabula los resultados de esfuerzos cortantes.

**Tabla 5.7:** Esfuerzos cortantes máximos en silos con radio del agujero de 20 mm sin atasco, que contienen pellets de hierro

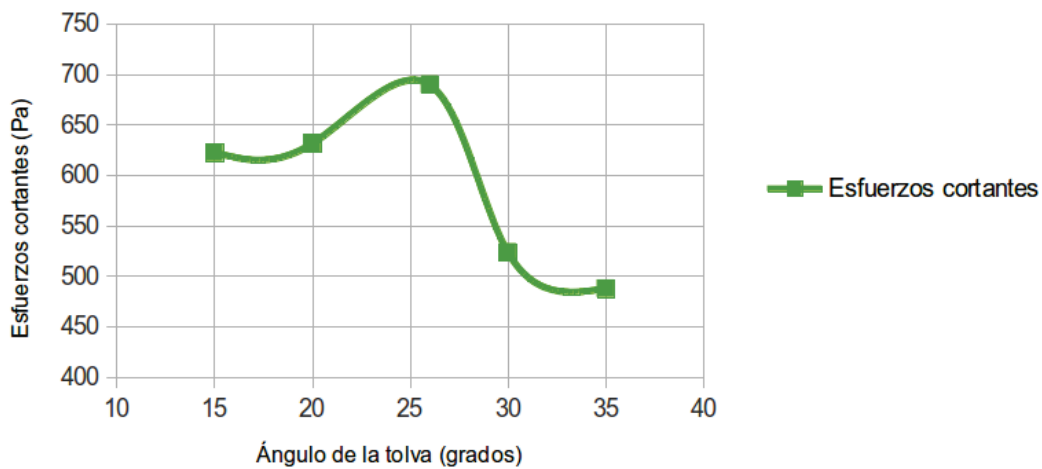
<b>Esfuerzos cortantes máximos en las paredes (Pa)</b>	
<b>Silo plano</b>	559.09
<b>Tolva de 15 grados</b>	622.76
<b>Tolva de 20 grados</b>	631.76
<b>Tolva de 26 grados</b>	690.05
<b>Tolva de 30 grados</b>	523.90
<b>Tolva de 35 grados</b>	487.94

Los valores de la tabla 5.7 se exhiben gráficamente en la figura 5.13. La imagen muestra el incremento de magnitud de esfuerzos hasta un ángulo de 26°. Los módulos de esfuerzos para 30° y 35° disminuyen. El ascenso y descenso de magnitud de esfuerzos cortantes se ve afectado por el ángulo de reposo del material (pellets de hierro). Conforme se incrementa la pendiente de la tolva, las partículas sobre esta superficie requieren mayor fuerza de fricción para permanecer en reposo, ver figura 5.61.

En la figura 5.60 se presenta la distribución de presiones en las paredes del silo. La magnitud de presiones disminuye desde un valor máximo en el silo de fondo plano de 7979.06 Pa, hasta un valor mínimo de 2898 Pa en el silo de tolva de 35°. En base a los datos de la tabla 5.8 se nota que las presiones en las paredes



## Esfuerzos cortantes máximos vs inclinación de la tolva



**Figura 5.13:** Esfuerzos cortantes máximos vs Ángulo de la tolva en silo de 40 mm de diámetro

silo disminuyen con el incremento del ángulo de inclinación de la tolva del silo.

**Tabla 5.8:** Presiones en silos con radio del agujero de 20 mm sin atasco

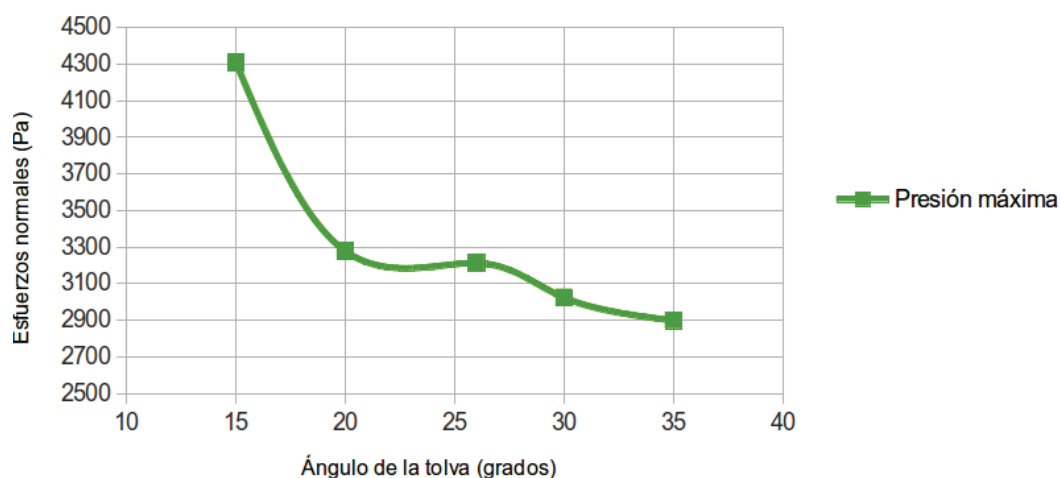
Presiones máximas en las paredes (Pa)	
Silo plano	7979.06
Tolva de 15 grados	4308.37
Tolva de 20 grados	3277
Tolva de 26 grados	3211.5
Tolva de 30 grados	3023.2
Tolva de 35 grados	2898

La figura 5.14 exhibe la interacción obtenida entre presiones en las paredes y ángulo de la tolva.

### 5.3.2.3. Cadenas de fuerza

En las figuras 5.70 a 5.75 se muestra las cadenas de fuerza normales máximas adquiridas de ejecutadas las simulaciones DEM. La fuerza entre partículas se

## Presión máxima vs Inclinación de la tolva



**Figura 5.14:** Presión máxima promedio vs Ángulo de la tolva en silo de 40 mm de diámetro

incrementa con el aumento de inclinación de la tolva, hasta que esta alcance el valor del ángulo de reposo del material granular (ángulo de reposo de los pellets de hierro  $26^\circ$ ). Una vez el ángulo de la tolva sea mayor a  $26^\circ$  (ángulo de la tolva) la fuerza entre partículas comienza a disminuir. Este comportamiento se asemeja al presentado en los silos atascados antes estudiados, ver figura 5.9 y tabla 5.4. En la tabla 5.9 se presenta las máximas fuerzas entre partículas obtenidas. La fuerza máxima se presentó en el silo con inclinación de cono de tolva de  $20^\circ$ , con una magnitud de 0.83 N. La mínima se produjo en los silos plano y con tolva de  $35^\circ$ , con valores de 0.37 N y 0.55 N respectivamente.

En la figura 5.15 se esquematiza la relación de las fuerzas entre partículas con la pendiente de la tolva.

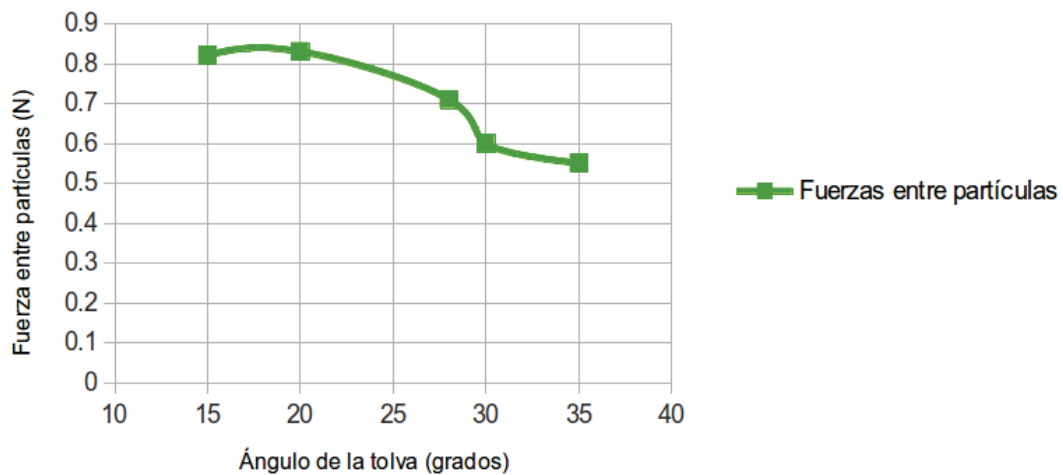
### 5.3.2.4. Deformaciones promedio

En la tabla 5.10 se resume los resultados de deformaciones obtenidos de las simulaciones para pellets de hierro almacenados en silos con diámetro de agujero de descarga de 40 mm. Las deformaciones se encuentran representadas en forma de tensores e invariantes. La invariante hidrostática ( $I_1$ ) cuantifica los cambios de volumen en la boca de descarga del silo. Por su parte, la invariante

**Tabla 5.9:** Fuerza máxima promedio en la descarga de silos con radio del agujero de 20 mm

Fuerzas máximas promedio (N)	
Silo plano	0.37
Tolva de 15 grados	0.82
Tolva de 20 grados	0.83
Tolva de 26 grados	0.71
Tolva de 30 grados	0.60
Tolva de 35 grados	0.55

### Fuerzas entre partículas vs Inclinación de la tolva



**Figura 5.15:** Cadenas de fuerzas en silo de 40 mm de diámetro con partículas de pellets de hierro

desviadora ( $J_2$ ) evalúa el cambio de forma en el conjunto de partículas.

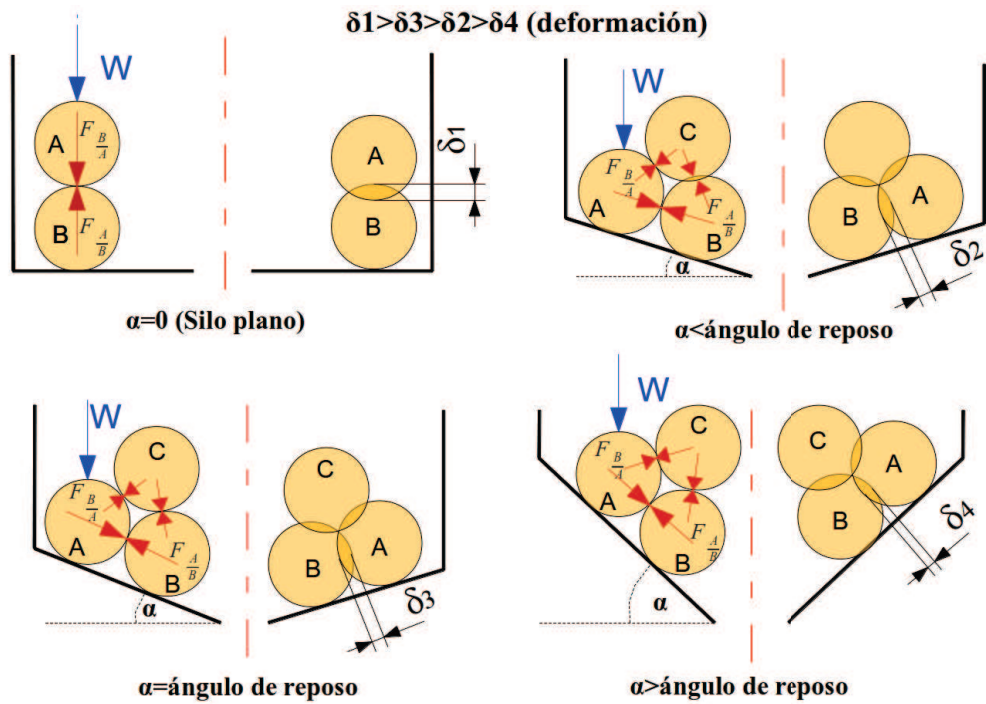
Al comparar las cantidades de  $I_1$  y  $J_2$ , se diferencia que la deformación volumétrica es mucho mayor a la deformación dada por el cambio de forma de las partículas.

La mayor deformación volumétrica se registra en el silo de fondo plano con una invariante  $I_1$  igual a  $7.87E-05$ . Las menores magnitudes de  $I_1$  se localizaron en los silos cuyas tolvas son de  $15^\circ$  y  $35^\circ$ . Los valores obtenidos son  $-5.1E-07$  en el silo de  $15^\circ$  de tolva y  $9.33E-06$  para el silo con tolva de  $35^\circ$ . Al incrementar la pendiente del cono de descarga de  $15^\circ$  a  $26^\circ$ , la magnitud de la invariante hidrostática aumenta de  $-5.1E-07$  a  $6.15E-05$  a  $26^\circ$  de tolva (ángulo de reposo de los pellets de hierro). A  $26^\circ$  de pendiente de tolva se obtiene un módulo de  $6.15E-05$ , que es el valor máximo de  $I_1$  en silos con cono de descarga. Con ángulos de tolva mayor a  $26^\circ$  la magnitud de  $I_1$  decrece, mostrando valores de  $1.64E-05$  a  $30^\circ$  y  $9.33E-06$  a  $35^\circ$ .

En la figura 5.16 se representa un esquema que explica el patrón de deformaciones en función del ángulo de reposo del material.

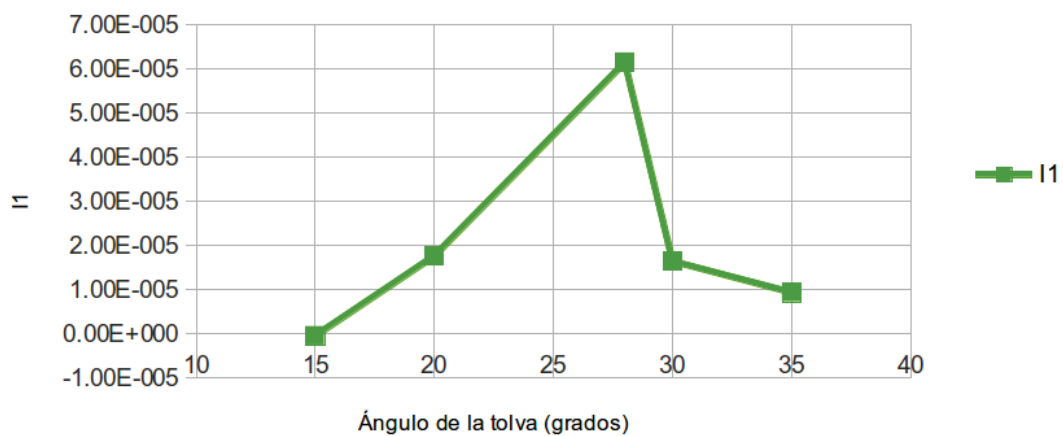
En la figura 5.17 se presenta gráficamente la relación entre la invariante hidrostática de deformación promedio entre partículas y el ángulo de pendiente de la tolva.

En el caso de la invariante desviadora ( $J_2$ ) que representa el cambio de forma del ensamble de partículas, se presentaron las mayores magnitudes en el silo de fondo plano con  $-2.98E-09$  y en el silo de tolva de  $26^\circ$  con  $-2.716E-09$ . Como se observa en la figura 5.18, a  $26^\circ$  se localiza un punto de inflexión que marca el ascenso y el descenso de la magnitud de  $J_2$ . Los módulos de  $J_2$  se incrementan con el aumento de la pendiente de la tolva, a  $15^\circ$  la invariante desviadora es  $-1.42E-10$  mientras que a  $20^\circ$  se obtiene un valor de  $-1.13E-10$  y a  $26^\circ$   $J_2$  es  $-2.716E-09$ . A partir de  $26^\circ$ ,  $J_2$  disminuye con valores de  $-1.17E-10$  a  $30^\circ$  y  $-2.48E-10$  a  $35^\circ$ .



**Figura 5.16:** Deformaciones en función del ángulo de reposo del material granular (maíz, pellets de hierro)

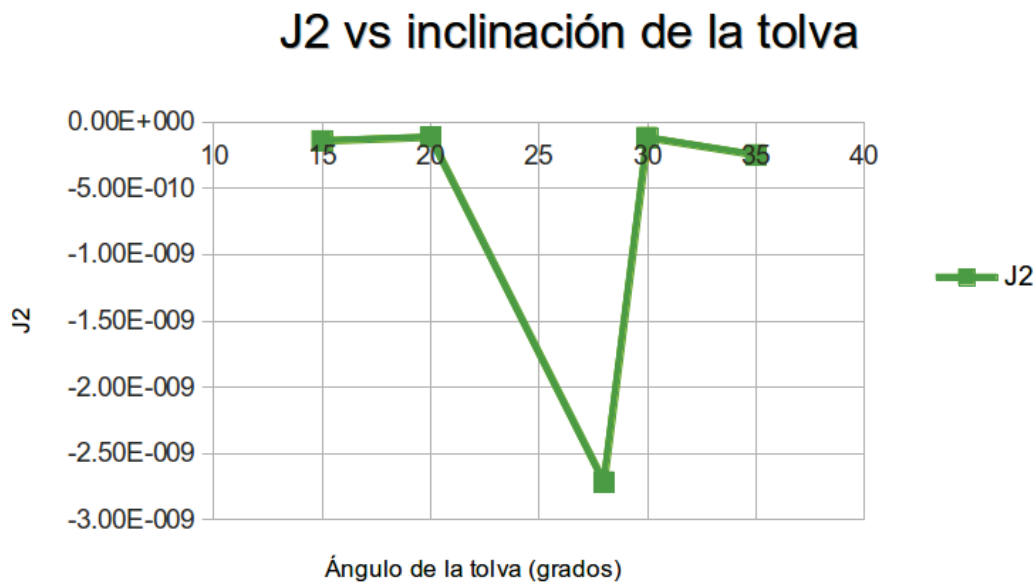
### Invariante 1 ( $I_1$ ) vs Inclinación de la tolva



**Figura 5.17:** Invariante hidrostática  $I_1$  entre partículas de pellets de hierro silo de 40 mm de diámetro

**Tabla 5.10:** Deformaciones promedio entre partículas de pellets de hierro en silo con agujero de descarga de diámetro 40 mm

<b>Silo de fondo plano</b>				
-6.04E-06	-3.48E-06	-1.02E-06	$I_1$	7.87E-05
-3.48E-06	-2.80E-06	-12.18E-06	$I_2$	-9.187E-10
-1.02E-06	-12.18E-06	87.57E-06	$J_2$	-2.985E-09
<b>Silo con tolva de 15 grados</b>				
4.67E-06	5.84E-06	0.37E-06	$I_1$	-5.1E-07
5.84E-06	6.52E-06	-2.64E-06	$I_2$	-1.42E-10
0.37E-06	-2.64E-06	-11.70E-06	$J_2$	-1.42E-10
<b>Silo con tolva de 20 grados</b>				
0.30E-06	1.38E-06	3.14E-06	$I_1$	1.76E-05
1.38E-06	4.47E-06	7.80E-06	$I_2$	-9.921E-12
3.14E-06	7.80E-06	12.86E-06	$J_2$	-1.135E-10
<b>Silo con tolva de 26 grados</b>				
-6.78E-06	-6.01E-06	11.27E-06	$I_1$	6.15E-05
-6.01E-06	-3.10E-06	24.69E-06	$I_2$	-1.456E-09
11.27E-06	24.68E-06	71.35E-06	$J_2$	-2.716E-09
<b>Silo con tolva de 30 grados</b>				
-0.23E-06	-1.05E-06	1.62E-06	$I_1$	1.64E-05
-1.05E-06	1.73E-06	6.75E-06	$I_2$	-2.732E-11
1.62E-06	6.75E-06	14.91E-06	$J_2$	-1.171E-10
<b>Silo con tolva de 35 grados</b>				
-6.04E-06	-3.48E-06	1.03E-06	$I_1$	9.33E-06
-3.48E-06	2.80E-06	12.18E-06	$I_2$	-2.19E-10
1.02E-06	12.18E-06	12.57E-06	$J_2$	-2.481E-10



**Figura 5.18:** Invariante desviadora  $J_2$  entre partículas de pellets de hierro silo de 40 mm de diámetro

## 5.4. MAÍZ

Para el estudio del comportamiento de partículas de maíz se ha empleado silos con diámetro de agujero de descarga igual a 30 mm.

### 5.4.1. VELOCIDAD DE DESCARGA

En las figuras 5.48 a 5.52 se observa los vectores que representan las velocidades de cada partícula (grano de maíz) para diferentes incrementos de tiempo. Bajo las condiciones del maíz descritas en el capítulo 4, no se produjo atascamiento de flujo granular en la descarga de silos.

La dirección de la velocidad de las partículas expulsadas de la tolva tienen una inclinación similar al de la tolva del silo.

Puede notarse que el mayor movimiento de partículas se da en la región al agujero de descarga (tolva del silo ver figura 5.51). La menor velocidad con la que se desplazan las partículas se da en las proximidades a las paredes del silo, ver figura 5.50.

Las velocidades medias al inicio de la descarga (ver figura 5.53) se presentan en

la tabla 5.11. La mayor velocidad se da en el silo de fondo plano, con un valor de 0.0375 m/s. La menor velocidad media se presenta en el silo con tolva de 20 grados, con un valor de 0.0299 m/s.

En la figura 5.53 se presenta la comparación de velocidades medias al inicio de la descarga de material granular. Hasta el instante 1.2 s, los silos aumentan su velocidad media desde cero hasta un valor cercano a 0.06 m/s. A partir de esta magnitud la velocidad disminuye hasta permanecer estable a una velocidad promedio de 0.05 m/s.

La velocidad media se reduce con el incremento de inclinación de la tolva, hasta alcanzar el valor del ángulo de reposo del material ( $28^\circ$ ). A partir de 28 grados (pendiente de la tolva) la velocidad media nuevamente disminuye.

**Tabla 5.11:** Velocidad media al inicio de la descarga de maíz

<b>Velocidad media inicio de la descarga (m/s)</b>	
<b>Silo plano</b>	-0.0363
<b>Tolva de 20 grados</b>	-0.0299
<b>Tolva de 28 grados</b>	-0.0375
<b>Tolva de 30 grados</b>	-0.0308
<b>Tolva de 35 grados</b>	-0.0354

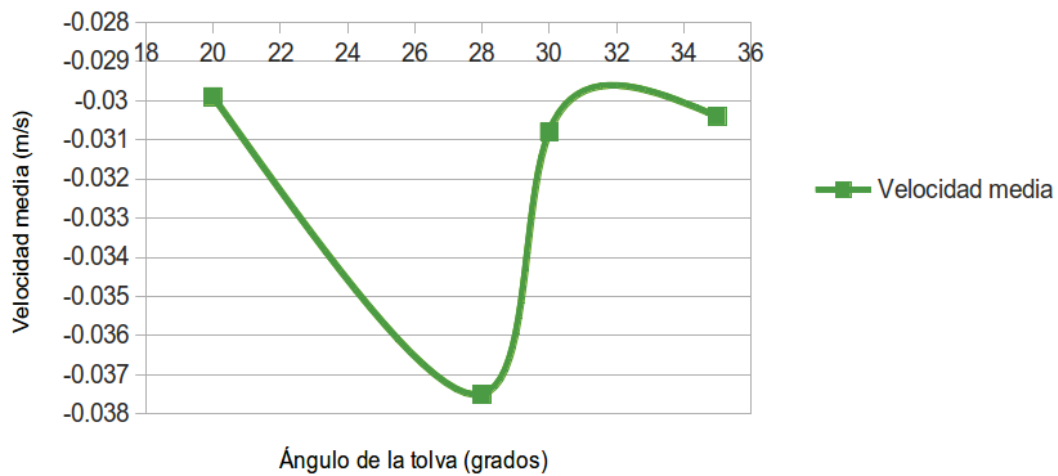
En la figura 5.19 se muestra la curva que representa la velocidad media al inicio de la descarga de partículas.

En la tabla 5.12, se muestra las velocidades medias de descarga luego 10 segundos de iniciada la misma. La mayor velocidad se da en el silo de fondo plano y en el silo de  $28^\circ$  de tolva, con una velocidad media de 0.0582 m/s y 0.0528 m/s respectivamente. La menor velocidad media se presentó en los silo de 15, 20, 35 grados con valores de 0.0477 m/s, 0.0462 m/s y 0.048 m/s respectivamente.

En base a lo mostrado en las tablas 5.11 y 5.12, el ángulo de la tolva modifica la magnitud de la velocidad media de descarga. La velocidad se incrementa gradualmente desde el silo con tolva de  $15^\circ$  de pendiente hasta el silo de  $28^\circ$ . A partir de  $28^\circ$  la magnitud de la velocidad disminuye.



## Velocidad media vs Inclinación de la tolva



**Figura 5.19:** Velocidad promedio al inicio de la descarga vs Ángulo de la tolva en silos con agujero de descarga de 30 mm con partículas que representan al maíz

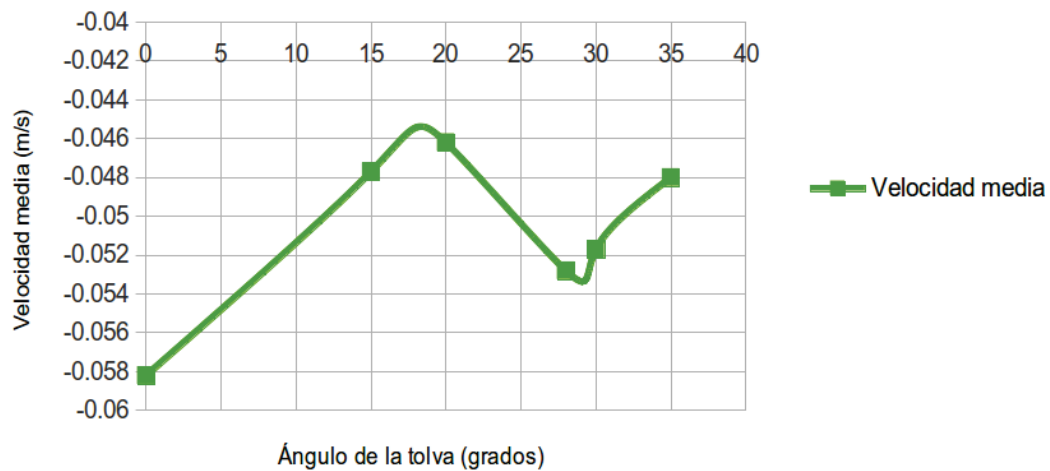
En la figura 5.54 se compara las velocidades medias en cada geometría de silo. La magnitud de velocidades se encuentra entre 0.04 y 0.065 m/s.

**Tabla 5.12:** Velocidad media pasado 10 segundos de iniciada la descarga de maíz

Velocidad media (m/s)	
<b>Silo plano</b>	-0.0582
<b>Tolva de 15 grados</b>	-0.0477
<b>Tolva de 20 grados</b>	-0.0462
<b>Tolva de 28 grados</b>	-0.0528
<b>Tolva de 30 grados</b>	-0.0517
<b>Tolva de 35 grados</b>	-0.048

En la figura 5.20 se relaciona la velocidad media luego de 10 s iniciada la descarga de las partículas de maíz.

## Velocidad media vs Inclinación de la tolva



**Figura 5.20:** Velocidad promedio a 10 s de iniciada la descarga vs Ángulo de la tolva en silos con agujero de descarga de 30 mm con partículas que representan al maíz

### 5.4.2. ESFUERZOS EN LAS PAREDES DEL SILO

En la figura 5.62 se observa la distribución de esfuerzos cortantes máximos en las paredes de los silos que contienen las partículas que representan al maíz. Puede notarse que los mayores esfuerzos cortantes se dan en la tolva de descarga.

En la figura 5.62, se compara los esfuerzos cortantes en las paredes del silo en función del ángulo de inclinación de la tolva de descarga. Los esfuerzos se incrementan con el aumento de pendiente en la tolva.

En la tabla 5.13 se muestra los esfuerzos cortantes promedio en las paredes del silo. Los menores se presentan en el silo de fondo plano 187.3 Pa, debido a que las partículas que mayor movimiento presentan son las ubicadas en la zona del agujero de descarga. Al considerar como referencia el ángulo de reposo del maíz ( $27^\circ$ ), se diferencia que los esfuerzos cortantes máximos en silos con  $15^\circ$  (230.88 Pa),  $20^\circ$  (264.77 Pa) son de mayor magnitud, mientras que en los silos de  $28^\circ$  (238.33 Pa),  $30^\circ$  (238.17 Pa), y  $35^\circ$  (232.7 Pa) de tolva los esfuerzos disminuyen.

En este caso se puede diferenciar que los esfuerzos cortantes en las paredes del

silos aumentan con el incremento del ángulo de la tolva, hasta cuando la pendiente de la tolva del silo es cercana al ángulo de reposo del material ( $27^\circ$ ). Después de  $27^\circ$  de inclinación de la tolva los esfuerzos disminuyen, ver figura 5.61. Este efecto se atribuye al incremento de la fuerza de contacto entre las partículas y la pared del silo por la tendencia del material granular a permanecer en reposo.

**Tabla 5.13:** Esfuerzos cortantes promedio en las paredes del silo de 30 mm de agujero de descarga con partículas que representan al maíz

<b>Esfuerzos en las paredes del silo (Pa)</b>	
<b>Silo plano</b>	187.3
<b>Tolva de 15 grados</b>	230.88
<b>Tolva de 20 grados</b>	264.77
<b>Tolva de 28 grados</b>	226.33
<b>Tolva de 30 grados</b>	238.17
<b>Tolva de 35 grados</b>	232.70

En la figura 5.21 se representa gráficamente el comportamiento de los esfuerzos cortantes en función del ángulo de la tolva.

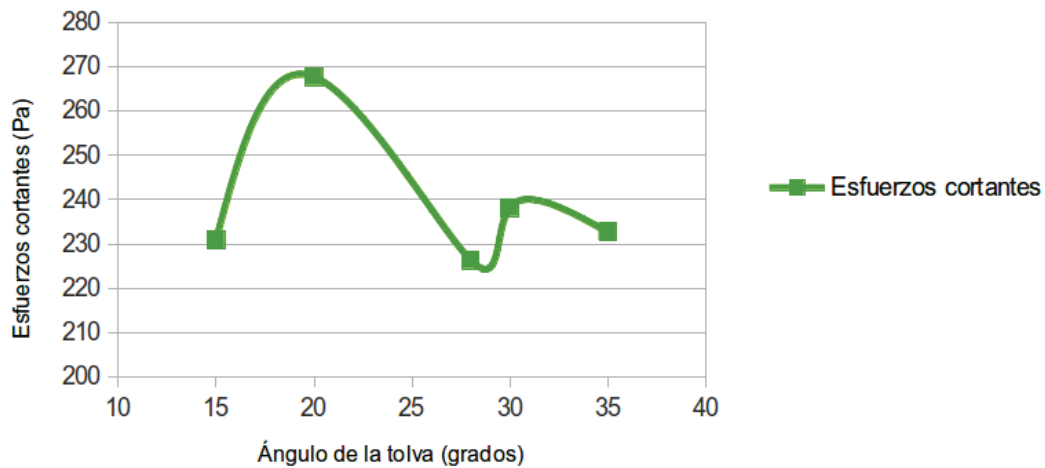
En la figura 5.63 se presenta las presiones generadas dentro del silo. Puede observarse que disminuyen con el aumento de pendiente de la tolva. La máxima presión se presenta en el silo de fondo plano con una magnitud de 1435.86 Pa. La mínima presión estimable se da en el silo con tolva de  $35^\circ$  de pendiente con un valor de 957.53 Pa. En la tabla 5.14 se resume la presión promedio en las paredes del silo.

En la figura 5.22 se muestra esquemáticamente el comportamiento de la presión interior en el silo respecto a la pendiente de la tolva.

### 5.4.3. CADENAS DE FUERZA

En la figura 5.77 se compara las fuerzas entre partículas para cada silo, en el instante inicial de descarga. Observando cada geometría representada en la figura 5.77 se percibe un patrón en las cadenas de fuerza. Con el incremento de la

## Esfuerzos cortantes máximos vs Inclinación de la tolva

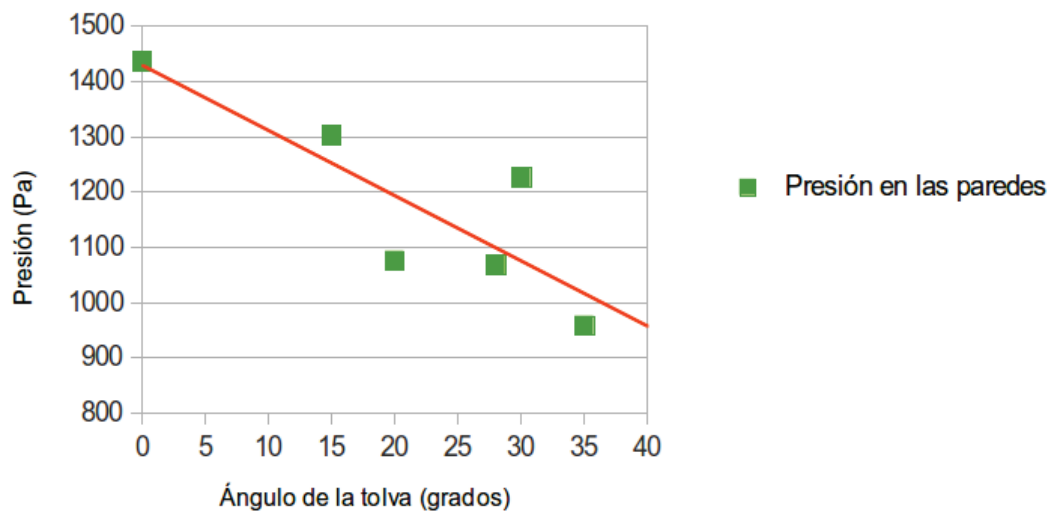


**Figura 5.21:** Esfuerzos cortantes en las paredes del silo de 30 mm de diámetro con partículas de maíz

**Tabla 5.14:** Presión en las paredes del silo de 30 mm de agujero de descarga con partículas que representan al maíz

Presión en las paredes del silo (Pa)	
Silo plano	1435.86
Tolva de 15 grados	1302.14
Tolva de 20 grados	1075.01
Tolva de 28 grados	1067.81
Tolva de 30 grados	1225.81
Tolva de 35 grados	957.53

## Presión en las paredes vs inclinación de la tolva



**Figura 5.22:** Presión en las paredes del silo de 30 mm de diámetro con partículas de maíz

pendiente del silo, se nota la disminución del valor de las fuerzas entre partículas. Las mayores cadenas de fuerza se dan en el silo de 15° y 28° de tolva de descarga, mientras que las menores se dan en el silo con tolva de 35 grados de pendiente. En las figuras 5.79 a 5.83 se presentan las cadenas de fuerza obtenidas en cada silo.

En la tabla 5.15, se presenta la fuerza máxima entre partículas en función del ángulo de reposo del silo. El incremento de inclinación de la tolva afecta la magnitud de las cadenas de fuerza normales. Cuando el cono de descarga del silo es 15° se registra una fuerza de 0.123 N. Cuando la tolva alcanza una inclinación igual al ángulo de reposo del maíz (28°) se diferencia el máximo valor de fuerza entre partículas que es de 0.1518 N. Para los ángulos de 30° y 35° de tolva la intensidad de la cadena de fuerza disminuye con valores de 0.1097 N y 0.0882 N.

El incremento y reducción de magnitud en cadenas de fuerza es debido al cambio en la fuerza normal (partícula pared) por su dependencia con el ángulo de la tolva, ver figura 5.16.

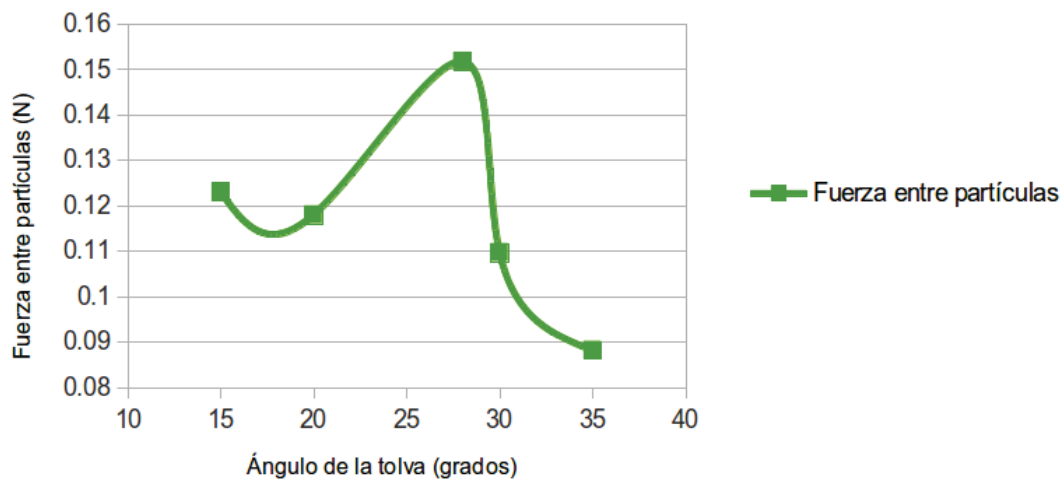
En la figura 5.23 se esquematiza la relación de las fuerzas entre partículas con

**Tabla 5.15:** Cadenas de fuerza entre partículas de maíz contenidas en silos de 30 mm de diámetro.

Fuerzas entre partículas (N)	
Silo plano	0.115
Tolva de 15 grados	0.123
Tolva de 20 grados	0.118
Tolva de 28 grados	0.1518
Tolva de 30 grados	0.1097
Tolva de 35 grados	0.0882

la pendiente de la tolva.

### Fuerza entre partículas vs inclinación de la tolva



**Figura 5.23:** Cadenas de fuerzas en silo de 30 mm de diámetro con partículas de maíz

#### 5.4.4. DEFORMACIONES PROMEDIO

En la tabla 5.16 se presenta las deformaciones promedio e invariantes principales dadas en el ensamble granular de partículas de maíz durante su descarga. El cambio de longitud ( $I_1$ ) del volumen de control ubicado en la boca de descarga del silo, son las mayores deformaciones dadas en el silo. Las deformaciones de

cambio de forma ( $J_2$ ) por su parte son casi insignificantes.

Las deformaciones volumétricas ( $I_1$ ) muestran mayor deformación en el silo de 30 mm de diámetro y 28 grados de tolva (ángulo de reposo del material). La invariante hidrostática es  $2.87E-04$ . En el caso de la invariante desviadora, que representa el cambio de forma, el máximo  $J_2$  es  $-4.335E-08$  en silo de  $28^\circ$  de tolva.

Al considerar como parámetro de comparación el ángulo de la tolva del silo, se nota que al incrementar la pendiente de ésta hasta  $26^\circ$  los valores de  $I_1$  van aumentando. Las magnitudes se incrementan de  $5.73E-05$  a  $15^\circ$  hasta  $2.87E-04$  a  $28^\circ$ . Cuando la tolva es mayor a  $28^\circ$  los módulos de  $I_1$  esta vez disminuyen, registrando magnitudes  $1.75E-05$  a  $30^\circ$  y  $1.56E-04$  a  $35^\circ$ .

Las deformaciones disminuyen con el incremento de la pendiente de la tolva de descarga, considerando como parámetro de comparación el ángulo de reposo del material. En el caso del maíz el ángulo de reposo es de 28 grados. Las deformaciones a 28 grados de tolva son las máximas alcanzadas. En los silos de 30 y 35 grados de tolva las deformaciones disminuyen.

Considerando la distribución de deformaciones en cada silo, existe mayor probabilidad de atascamiento en silos planos y en silos con tolva igual al ángulo de reposo del material ( $28^\circ$ ).

En la figura 5.24 se presenta gráficamente la relación entre la invariante hidrostática ( $I_1$ ) y el ángulo de pendiente de la tolva.

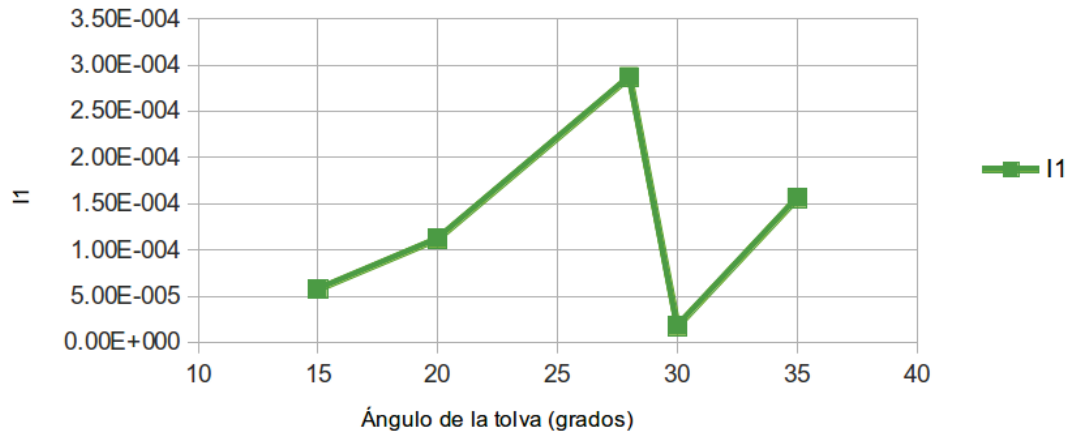
La invariante desviadora  $J_2$ , cuantifica los cambios de forma de las partículas localizadas en el volumen de control, ver figura 5.25. Como puede observarse, a  $28^\circ$  existe un punto de inflexión que representa el máximo cambio de forma con  $-4.335E-08$ . De manera similar que las deformaciones volumétricas, el incremento de pendiente en la tolva del silo provoca aumento en las deformaciones para conos de descarga menores a  $28^\circ$ . Los valores que se obtuvo fueron de  $-2.045E-09$  a  $15^\circ$  y  $-3.26E-09$  a  $20^\circ$ . Al contrario cuando la inclinación de la tolva es mayor a  $28^\circ$  las deformaciones disminuyen. Los valores obtenidos son  $-9.332E-10$  a  $30^\circ$  y  $-1.177E-08$  a  $35^\circ$ .

**Tabla 5.16:** Deformaciones promedio entre partículas de maíz

<b>Silo de fondo plano</b>				
-4.56E-06	-6.55E-06	66.85E-06	$I_1$	2.51E-04
-6.55E-06	1.017E-06	107.29E-06	$I_2$	-1.693E-08
66.85E-06	107.29E-06	254.3E-06	$J_2$	-3.788E-08
<b>Silo con tolva de 15 grados</b>				
-5.114E-06	-3.412E-06	10.61E-6	$I_1$	5.73E-05
-3.412E-06	0.829E-06	23.66E-06	$I_2$	-9.517E-10
10.61E-6	23.66E-06	61.54E-06	$J_2$	-2.045E-09
<b>Silo con tolva de 20 grados</b>				
0.58E-06	3.433E-06	2.647E-06	$I_1$	1.12E-04
3.433E-06	8.617E-06	4.42E-06	$I_2$	9.105E-10
2.647E-06	4.42E-06	102.62E-06	$J_2$	-3.26E-09
<b>Silo con tolva de 28 grados</b>				
0.159E-06	-2.41E-06	9.8E-06	$I_1$	2.87E-04
-2.41E-06	-6.34E-06	118.4E-06	$I_2$	-1.593E-09
9.8E-06	118.4E-06	293E-06	$J_2$	-4.335E-08
<b>Silo con tolva de 30 grados</b>				
-2.82E-06	-2.071E-06	13.71E-06	$I_1$	1.75E-05
-2.071E-06	-3.084E-06	22.57E-06	$I_2$	-8.311E-10
13.71E-06	22.57E-06	23.4E-06	$J_2$	-9.332E-10
<b>Silo con tolva de 35 grados</b>				
-0.42E-06	-0.592E-06	25.94E-06	$I_1$	1.56E-04
-0.592E-06	-1.086E-06	51.92E-06	$I_2$	-3.606E-09
25.94E-06	51.92E-06	158E-06	$J_2$	-1.177E-08



### Invariante 1 ( $I_1$ ) vs Inclinación de la tolva



**Figura 5.24:** Invariante hidrostática ( $I_1$ ) de pellets de hierro silo de 30 mm de diámetro

### $J_2$ vs inclinación de la tolva



**Figura 5.25:** Invariante desviadora ( $J_2$ ) de pellets de hierro silo de 30 mm de diámetro

## 5.5. PATRÓN DE ESFUERZOS, DEFORMACIONES PROMEDIO Y CADENAS DE FUERZA EN FUNCIÓN DEL ÁNGULO DE LA TOLVA DEL SILO

En esta sección se presenta un análisis teórico del patrón de esfuerzos, deformaciones, y cadenas de fuerza y su relación con el ángulo de la tolva de descarga. Para realizar este estudio se ha utilizado las definiciones propuestas por (Kloss, 2010; Cundall y Strack, 1979).

En la figura 5.16 se presenta una comparación de las fuerzas entre partículas en base al ángulo de reposo del material. Las partículas estudiadas se las ha considerado esféricas. Con esta suposición se puede determinar la masa de partícula a partir de su densidad y volumen. Como ejemplo de cálculo se estima la masa de una partícula representativa de pellets de hierro, a partir de la ecuación 5.1.

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (5.5)$$

Siendo:

$\rho$ : Densidad ( $2300 \frac{kg}{m^3}$ ).

m: Masa (kg).

V: Volumen ( $m^3$ ).

Como la partícula se supone esférica, su volumen se lo calcula a partir de la ecuación:

$$V = \frac{4}{3}\phi * r^3 \quad (5.6)$$

$$V = \frac{4}{3}\phi * 0,005^3 = 5,236E - 07m^3$$

Reemplazando V en la ecuación 5.5 se obtiene lo siguiente:

$$m = \rho * V = 2300 \frac{kg}{m^3} * 5,236E - 07m^3 = 1,2E - 03 \quad kg.$$

En función de la ecuación 2.16 se determina el coeficiente elástico entre las partículas.

$$k_n = \frac{4}{3} Y^* \sqrt{r^* \delta_n}$$

Kloss (2010) sugiere un traslape máximo de  $\delta_n = 0.5\%$   $d_p = 0.005$  m.

$$\frac{1}{r^*} = \frac{1}{r_1}$$

$$r^* = r_1 = 0,005 \text{ m}$$

$$\frac{1}{Y^*} = \frac{1 - \nu^2}{Y_1}$$

$$Y^* = \frac{2,4E + 06Pa}{1 - (0,4)^2} = 2,86E + 06Pa.$$

$$k_n = \frac{4}{3} * 2,86E + 06Pa * \sqrt{0,005m * 0,005m} = 19066,67 \frac{N}{m}$$

Además se supone que la dilatación en el conglomerado de partículas es nula.

### DIAGRAMA CUERPO LIBRE SILO DE FONDO PLANO

En la figura 5.26 se muestra el diagrama de cuerpo libre entre las partículas A y B, en un silo plano.

$$+ \uparrow \Sigma F_y = 0$$

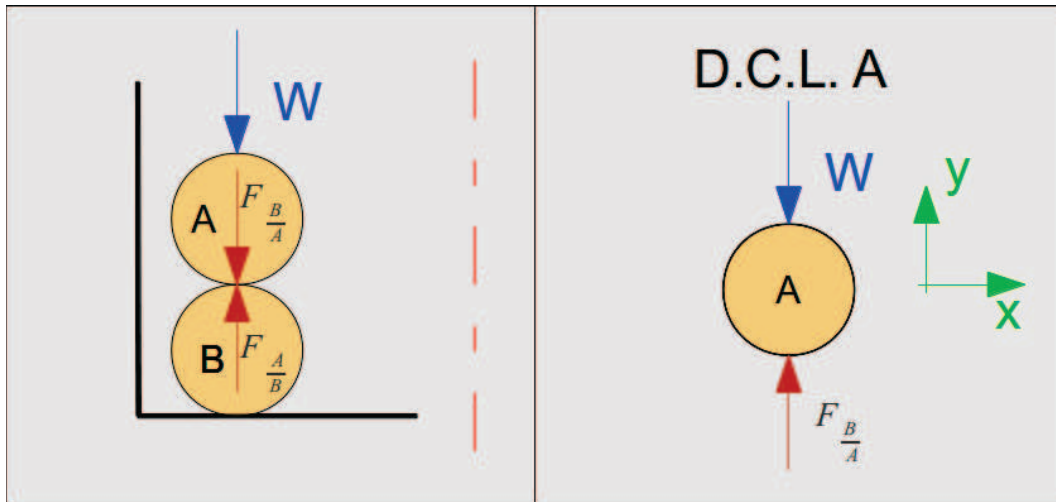
$$F_{\frac{B}{A}} - W = 0$$

$$F_{\frac{B}{A}} = W = m * g = 1,2E - 03kg * 9,8 \frac{m}{s^2} = 0,0117N$$

### DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE EN SILOS CON TOLVA DE DESCARGA

En la figura 5.27 se presenta el diagrama de cuerpo libre de partículas almacenadas en un silo con tolva de descarga.

#### Diagrama de cuerpo libre de la partícula A



**Figura 5.26:** Diagrama de cuerpo libre de partículas en silo plano

En la figura 5.27 (b) se ilustra el diagrama de fuerzas de la partícula A. La expresión que relaciona las fuerzas de presentes en la gráfica se presenta en la ecuación 5.7.

$$(F_3 - F_2)(\mu \times \cos(30) + \text{sen}(30)) = -W \times \text{sen}(\alpha) \quad (5.7)$$

Donde:

$\mu$ : Coeficiente de fricción estático entre partículas, es dependiente del ángulo de inclinación de la tolva ( $\mu = \tan(\alpha)$ ).  $\alpha$  es máximo cuando la pendiente de la tolva ha alcanzado el ángulo de reposo del material granular.

W: peso de la partícula.

$F_3$ : Fuerza de interacción entre las partícula A y B.

$F_2$ : Fuerza de interacción entre las partículas A y C.

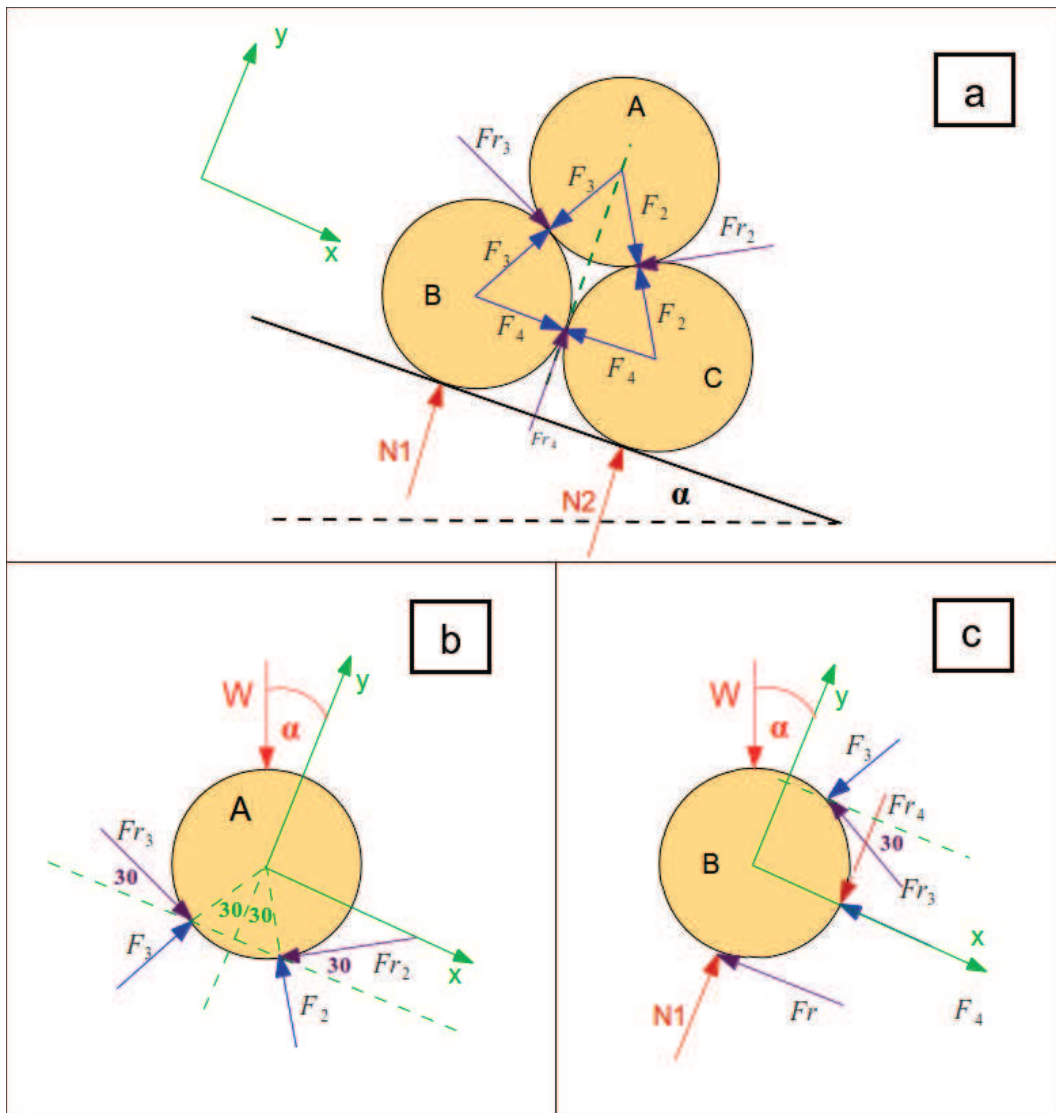
#### **Diagrama de cuerpo libre de la partícula B**

La figura 5.27 exhibe el diagrama de sistema aislado de la partícula B. La ecuación 5.8 presenta la relación de fuerzas externas que inciden sobre las partículas.

$$F_3(\text{sen}(30) + \mu \times \cos(30)) + F_4 + \tan(\mu) \times N = W \times \text{sen}(\alpha) \quad (5.8)$$

Donde:

$\mu$ : Coeficiente de fricción estático entre partículas, es dependiente del ángulo de inclinación de la tolva ( $\mu = \tan(\alpha)$ ).  $\alpha$  es máximo cuando la pendiente de la tolva



**Figura 5.27:** Diagramas de cuerpo libre para partículas contenidas dentro de un silo con tolva de descarga.- (a) D. C. L del sistema, (b) D. C. L de la partícula A, (c) D. C. L de la partícula B

ha alcanzado el ángulo de reposo del material granular.

W: peso de la partícula.

N: es la fuerza normal de contacto entre la partícula y el plano inclinado que representa la tolva del silo.

$F_3$ : Fuerza de interacción entre las partícula A y B.

$F_4$ : Fuerza de interacción entre las partícula B y C.

Al relacionar las ecuaciones 5.7 y 5.8 se obtiene las fuerzas que actúan en el sistema compuesto por las partículas A, B y C mostrado en la figura 5.27. Su magnitud se encuentra registrada en la tabla 5.17.

**Tabla 5.17:** Fuerzas entre partículas

	<b>F3 (N)</b>	<b>F2 (N)</b>	<b>F4 (N)</b>	<b>N (N)</b>	<b>Fr (n)</b>
<b>Silo plano</b>	N/A	N/A	0.0117	N/A	N/A
$\alpha=15$	0.00565	0.00978	-0.00489	0.0141	0.00378
$\alpha=20$	0.00558	0.0105	-0.00524	0.0129	0.00470
$\alpha=26$	0.00567	0.0112	-0.00561	0.0113	0.00551
$\alpha=30$	0.00497	0.0113	-0.0042	0.0112	0.00546
$\alpha=35$	0.00406	0.0113	-0.00238	0.0109	0.00532
$\alpha$ =ángulo de la tolva					

### 5.5.1. DEFORMACIONES

La deformación entre partículas se la puede obtener de la ecuación 5.9. Esta expresión matemática relaciona, el coeficiente elástico del material ( $k_n$ ) con la fuerza de contacto entre partículas ( $F_n$ ).

$$F_n = k_n * \delta \quad (5.9)$$

Reemplazando los valores  $F_{\frac{B}{A}} = F_n$  se obtiene la siguiente deformación para el silo de fondo plano:

$$\delta = \frac{0,0117N}{19066,67} = 6,13E - 07m = 0,613\mu m$$

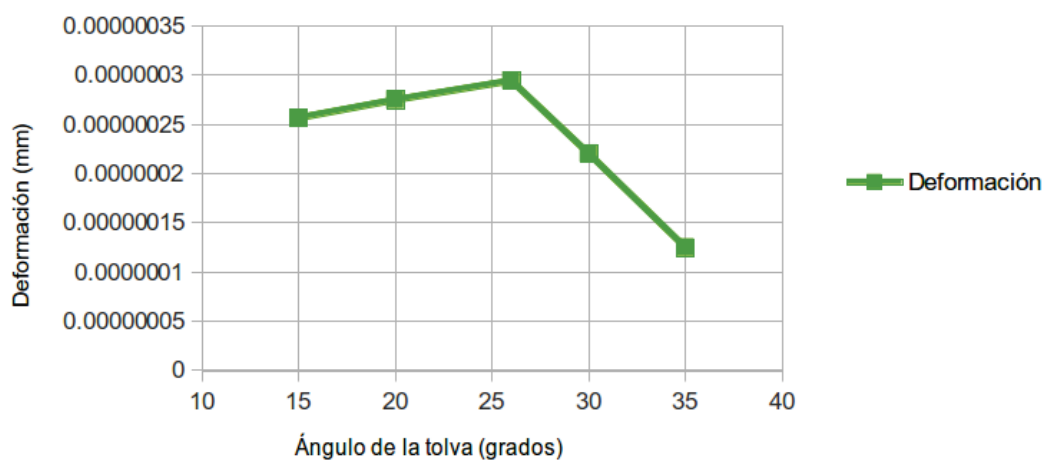
Considerando las ecuaciones 5.7, 5.8 se obtiene los valores de deformación que se presentan en la tabla 5.18, para cada uno de los silos estudiados.

**Tabla 5.18:** Deformaciones entre partículas

	<b>F3 (N)</b>	<b>F2 (N)</b>	<b>F4 (N)</b>	<b>N (N)</b>	<b>Deformación (mm)</b>
<b>Silo plano</b>	N/A	N/A	0.0117	N/A	6.13E-007
$\alpha=15$	0.00565	0.00978	-0.00489	0.0141	2.564E-007
$\alpha=20$	0.00558	0.0105	-0.00524	0.0129	2.748E-007
$\alpha=26$	0.00567	0.0112	-0.00561	0.0113	2.942E-007
$\alpha=30$	0.00497	0.0113	-0.0042	0.0112	2.203E-007
$\alpha=35$	0.00406	0.0113	-0.00238	0.0109	1.248E-007
$k_n=19066.67 \text{ N/m}$					
$\alpha=\text{ángulo de la tolva}$					

En la figura 5.28 se presenta la relación obtenida entre la deformación de la partícula y el ángulo de inclinación de la tolva del silo. En la figura 5.28 se diferencia que la deformación aumenta con el incremento de la tolva de descarga. La máxima deformación

## Deformación vs Ángulo de la tolva



**Figura 5.28:** Deformación vs Ángulo de la tolva

### 5.5.2. ESFUERZOS EN LAS PAREDES

Los esfuerzos en las paredes que se han obtenido en las diferentes simulaciones son de dos tipos, esfuerzos cortantes y presiones en la pared. La presión en las paredes del silo se debe a las fuerzas normales de contacto existente entre las partículas y la pared del silo. Los esfuerzos cortantes se deben a la fuerza de fricción entre las paredes del silo y las partículas.

Los esfuerzos en las paredes del silo pueden ser evaluados a partir de la ecuación 5.10:

$$\sigma = \frac{F_p}{A} \quad (5.10)$$

Donde:

$F_p$  es la fuerza de interacción entre las partículas y la pared del silo.

A es el área de contacto.

Considerando las ecuaciones 5.7, 5.8 se obtiene la de fuerza de contacto entre las partículas y las paredes del silo. En la tabla 5.19 se muestra la relación de esfuerzos en las paredes del silo respecto a la pendiente de la tolva.

El ángulo de la tolva modifica la magnitud de presiones y esfuerzos normales en un silo. El incremento de la pendiente de la tolva produce la disminución de presiones dentro del silo, desde un valor máximo en el silo plano hasta una magnitud inferior en el silo con ángulo de tolva  $35^\circ$ . Los esfuerzos cortantes por su parte aumentan su magnitud con el incremento de la tolva, hasta cuando la inclinación de la tolva es igual al ángulo de reposo del material. Si la pendiente de la tolva es mayor al ángulo de reposo del material, la magnitud de esfuerzos cortantes disminuye. La comparación de esfuerzos en base a la inclinación de la tolva puede observarse en la tabla 5.19.

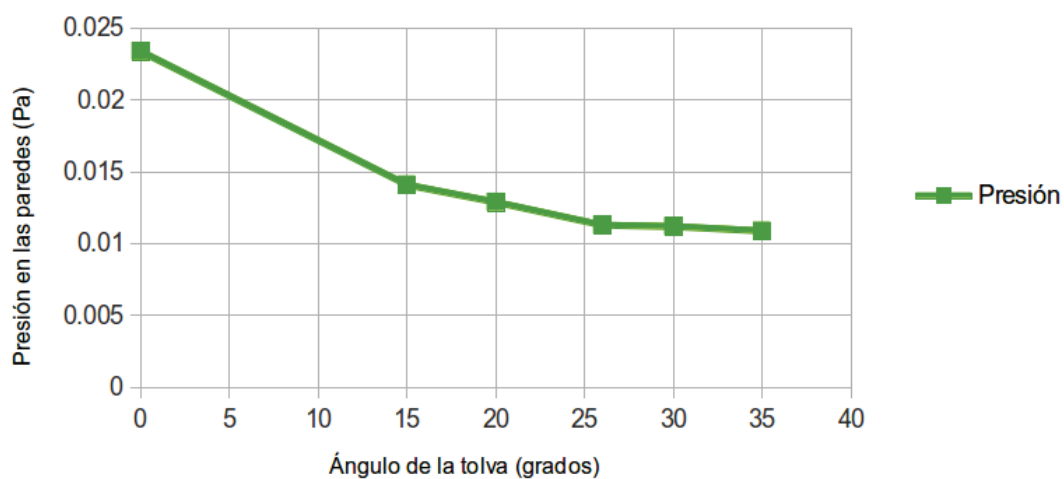
En la figura 5.29 se presenta la relación entre la presión teórica dentro del silo y la pendiente de la tolva. Puede observarse que la magnitud de la presión disminuye con el incremento de la tolva. La mínima presión obtenida se registra en el silo de  $35^\circ$  de tolva con  $0.0109/A$  Pa. La máxima presión por su parte es igual a  $0.0234/A$  Pa en el caso del silo plano. Este resultado obtenido teóricamente es consistente con los resultados generados en las simulaciones por LIGGGHTS.



**Tabla 5.19:** Esfuerzos en las paredes del silo

Tipo de silos	Esfuerzos en las paredes			
	Fuerza normal	Fuerza de fricción	Presión	Esfuerzo cortante
	F1 (N)	Fr (N)	$\sigma$ (Pa)	$\tau$ (Pa)
<b>Silo plano</b>	0.0234	N/A	0.0234/A	N/A
$\alpha=15$	0.0141	0.00378	0.0141/A	0.00378/A
$\alpha=20$	0.0129	0.00470	0.0129/A	0.0047/A
$\alpha=26$	0.0113	0.00551	0.0113/A	0.00551/A
$\alpha=30$	0.0112	0.00546	0.0112/A	0.00546/A
$\alpha=35$	0.0109	0.00532	0.0109/A	0.00532/A
$\alpha$ =ángulo de la tolva				

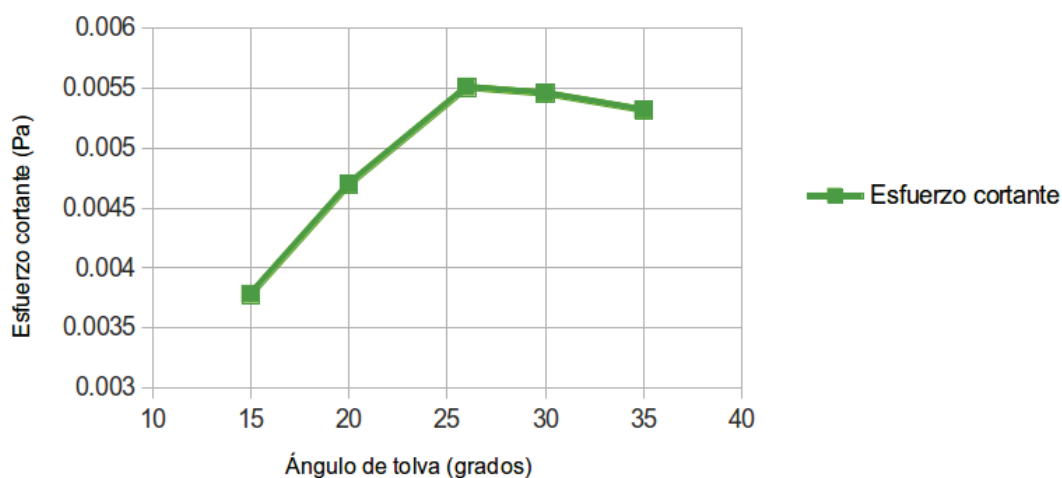
### Presión vs inclinación de la tolva



**Figura 5.29:** Presión vs Ángulo de la tolva teórico

En la figura 5.30 se muestra la relación entre el esfuerzo cortante y el ángulo de la tolva del silo. El acrecentamiento en la inclinación del cono de descarga incrementa la magnitud del esfuerzo cortante de 0.00378/A Pa a 0.00551/A Pa. 0.00551/A es el máximo esfuerzo cortante y se produce cuando la inclinación de la tolva es 26°. Para 30° y 35° su magnitud disminuye, efecto observable en la figura 5.30.

### Esfuerzo cortante vs inclinación de la tolva



**Figura 5.30:** Esfuerzo cortante teórico vs Ángulo de la tolva

### 5.5.3. CADENAS DE FUERZA

A partir de las ecuaciones 5.7, 5.8 se puede determinar la fuerza de contacto entre partículas. En la tabla 5.20 se muestra la fuerza de contacto entre partículas y su variación en función del ángulo de la tolva. Las cadenas de fuerza aumentan su magnitud con el incremento de la tolva, hasta cuando la inclinación de la tolva es igual al ángulo de reposo del material. En el caso de pendientes mayores al ángulo de reposo del material se puede observar menor magnitud en las cadenas de fuerza.

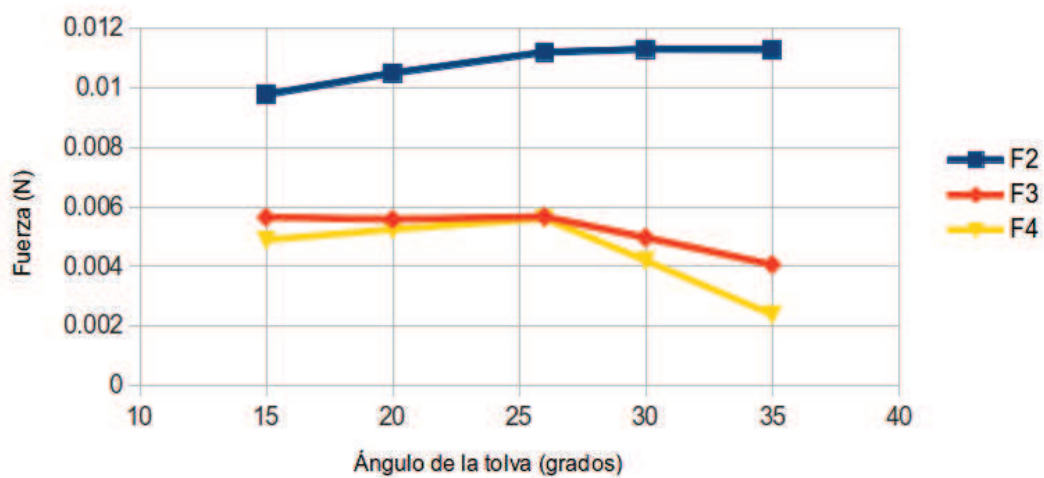
En la figura 5.31 se observa la tendencia obtenida al relacionar la fuerza entre partículas con el ángulo de la tolva. La fuerza se incrementa con el aumento de inclinación del plano. El máximo valor se registra cuando la pendiente de la tolva

**Tabla 5.20:** Fuerzas entre partículas

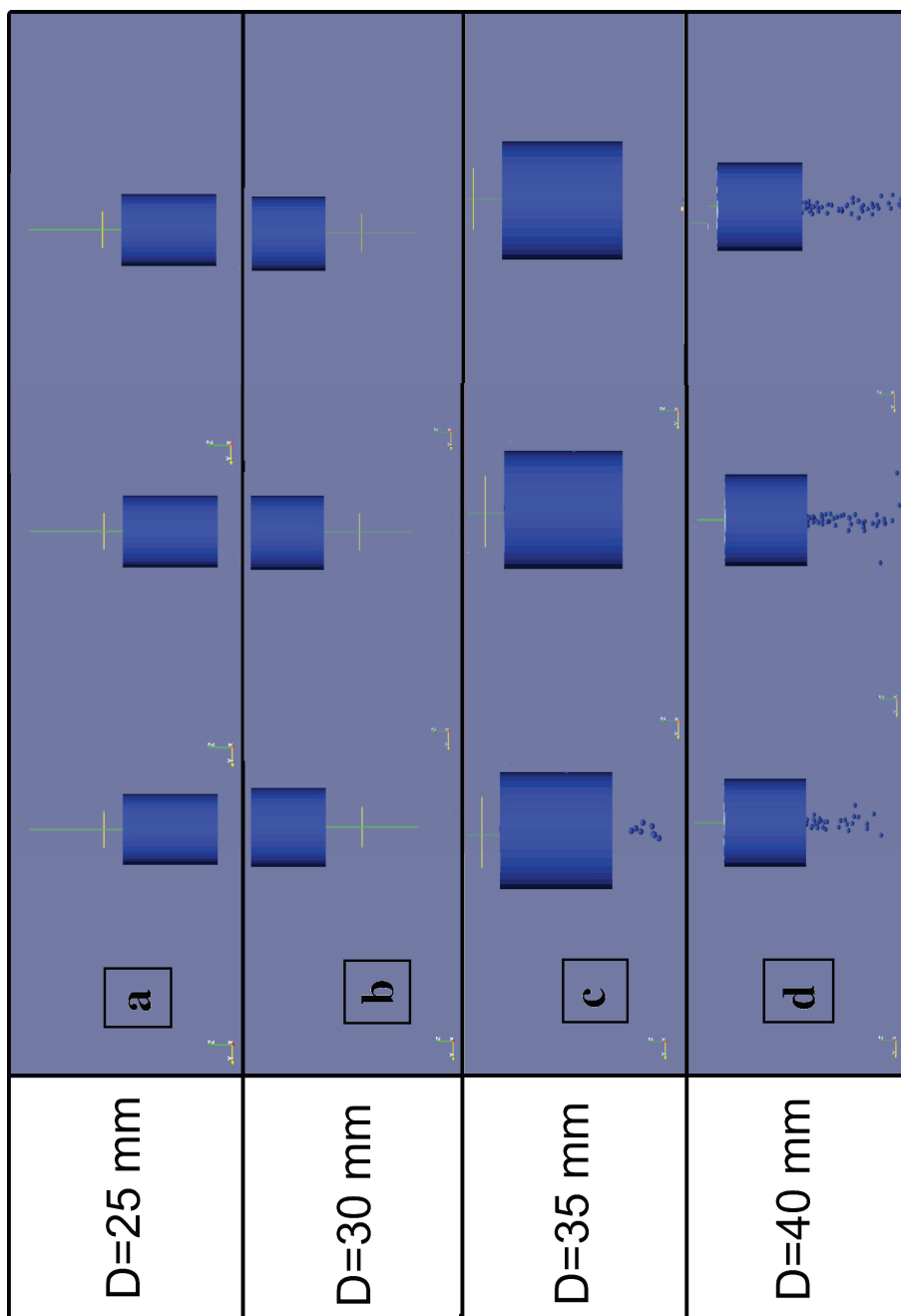
	F3 (N)	F2 (N)	F4 (N)
<b>Silo plano</b>	N/A	N/A	0.0117
$\alpha=15$	0.00565	0.00978	-0.00489
$\alpha=20$	0.00558	0.0105	-0.00524
$\alpha=26$	0.00567	0.0112	-0.00561
$\alpha=30$	0.00497	0.0113	-0.0042
$\alpha=35$	0.00406	0.0113	-0.00238
$\alpha$ =ángulo de la tolva			

es 26°. A 30°y 35°la intensidad en la cadena disminuye.

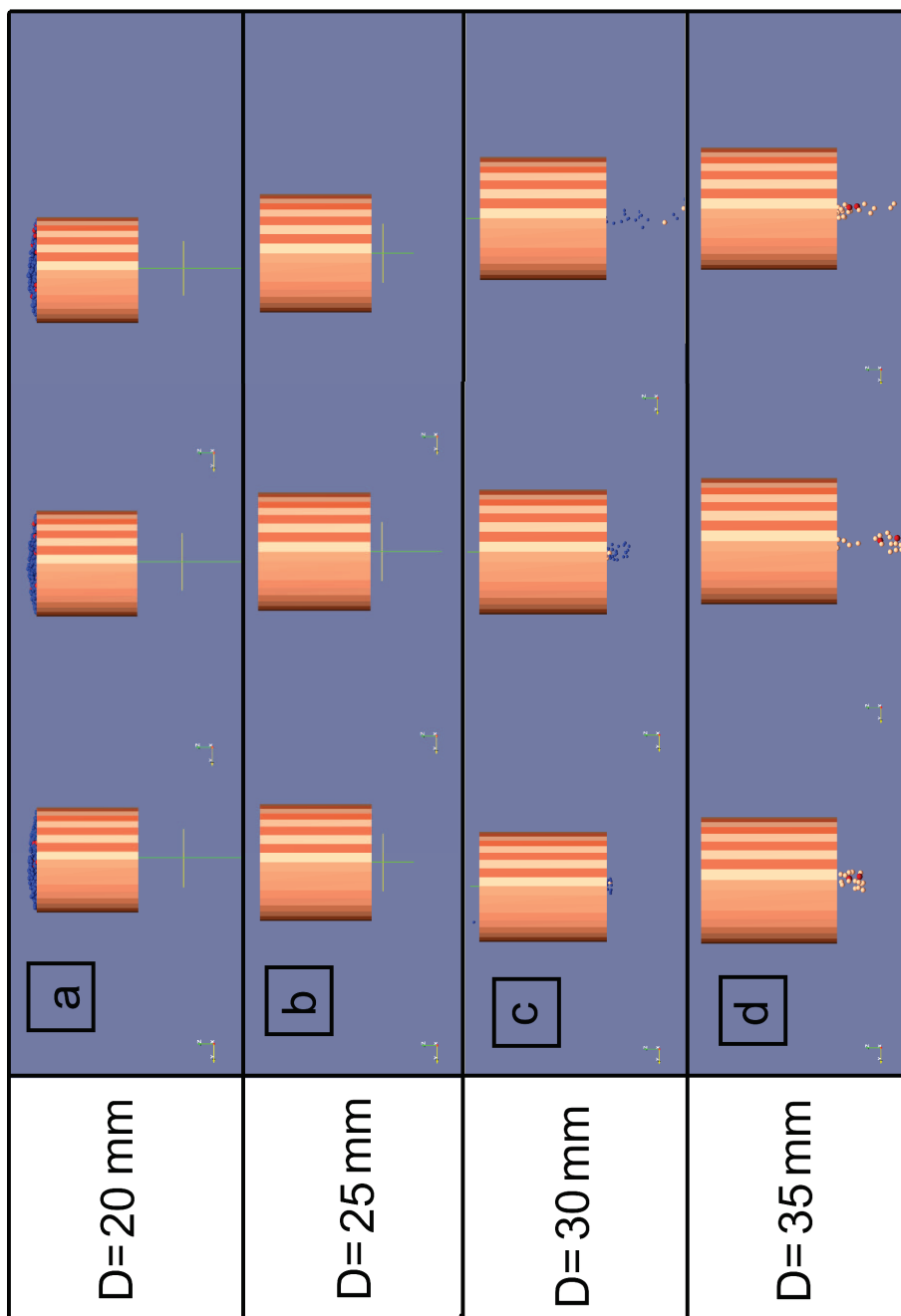
### Cadenas de fuerza vs Inclinación de la tolva



**Figura 5.31:** Fuerza teórica entre partículas vs Ángulo de la tolva



**Figura 5.32:** Determinación del agujero crítico de descarga de los pellets de hierro- en la figura se observa el procedimiento seguido para determinar el agujero de descarga del maíz (a) Diámetro de 20 mm, (b) Diámetro de 25 mm, (c) Diámetro de 30 mm, (d) Diámetro de 35 mm



**Figura 5.33:** Determinación del agujero crítico de descarga del maíz.- en la figura se observa el procedimiento seguido para determinar el agujero de descarga del maíz (a) Diámetro de 20 mm, (b) Diámetro de 25 mm, (c) Diámetro de 30 mm, (d) Diámetro de 35 mm

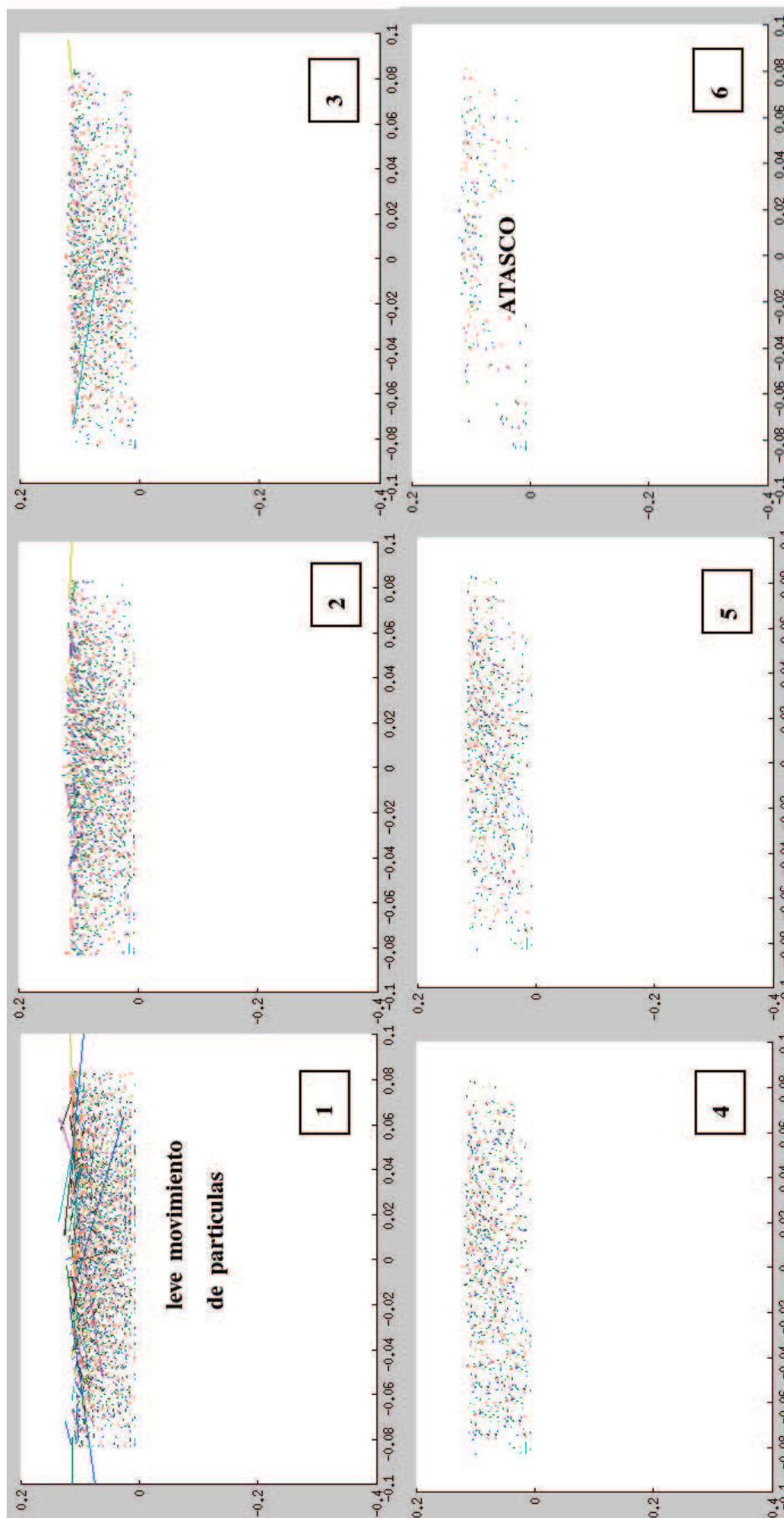


Figura 5.34: Proceso de atascamiento en silo de fondo plano y agujero de 17.5 mm de radio

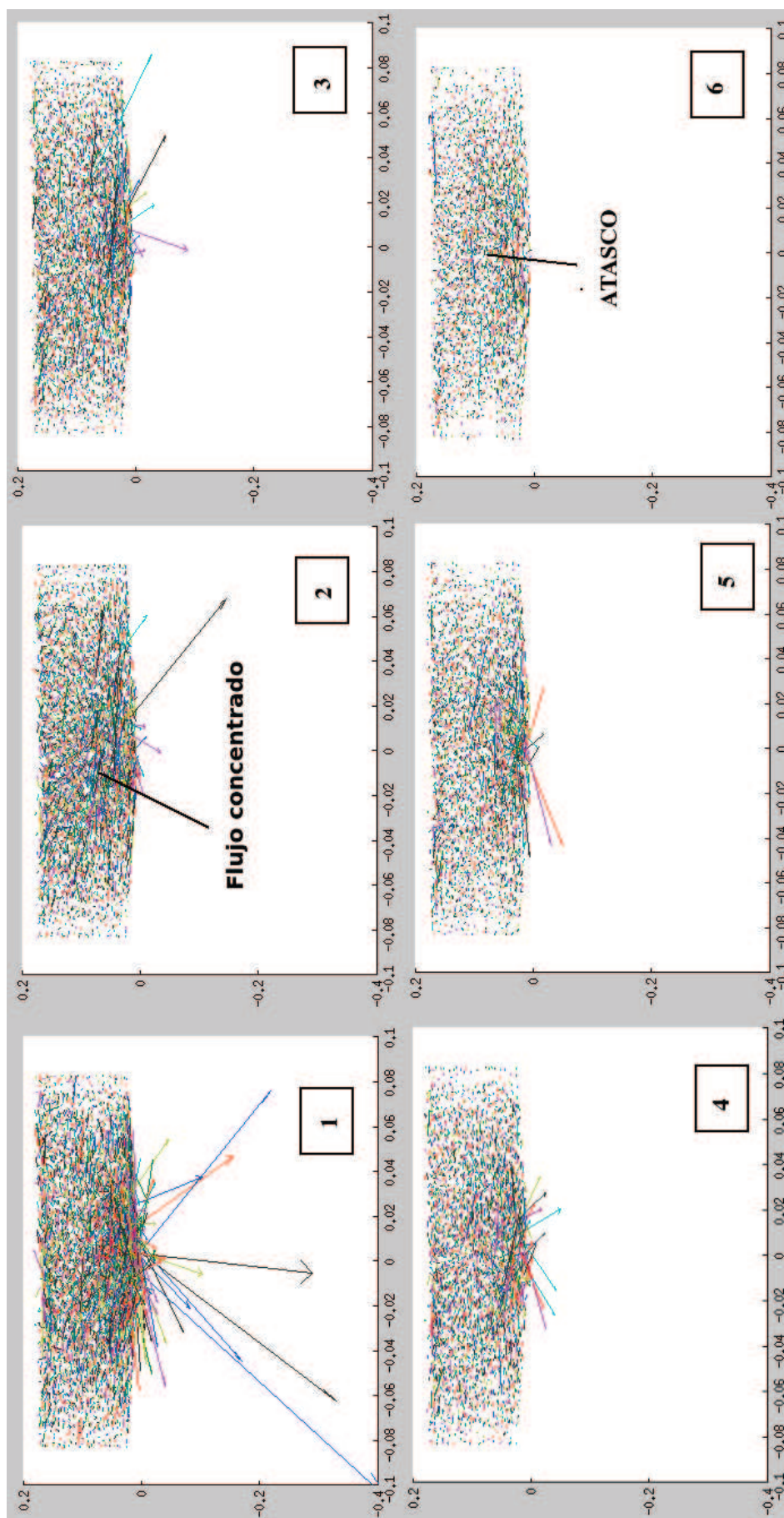
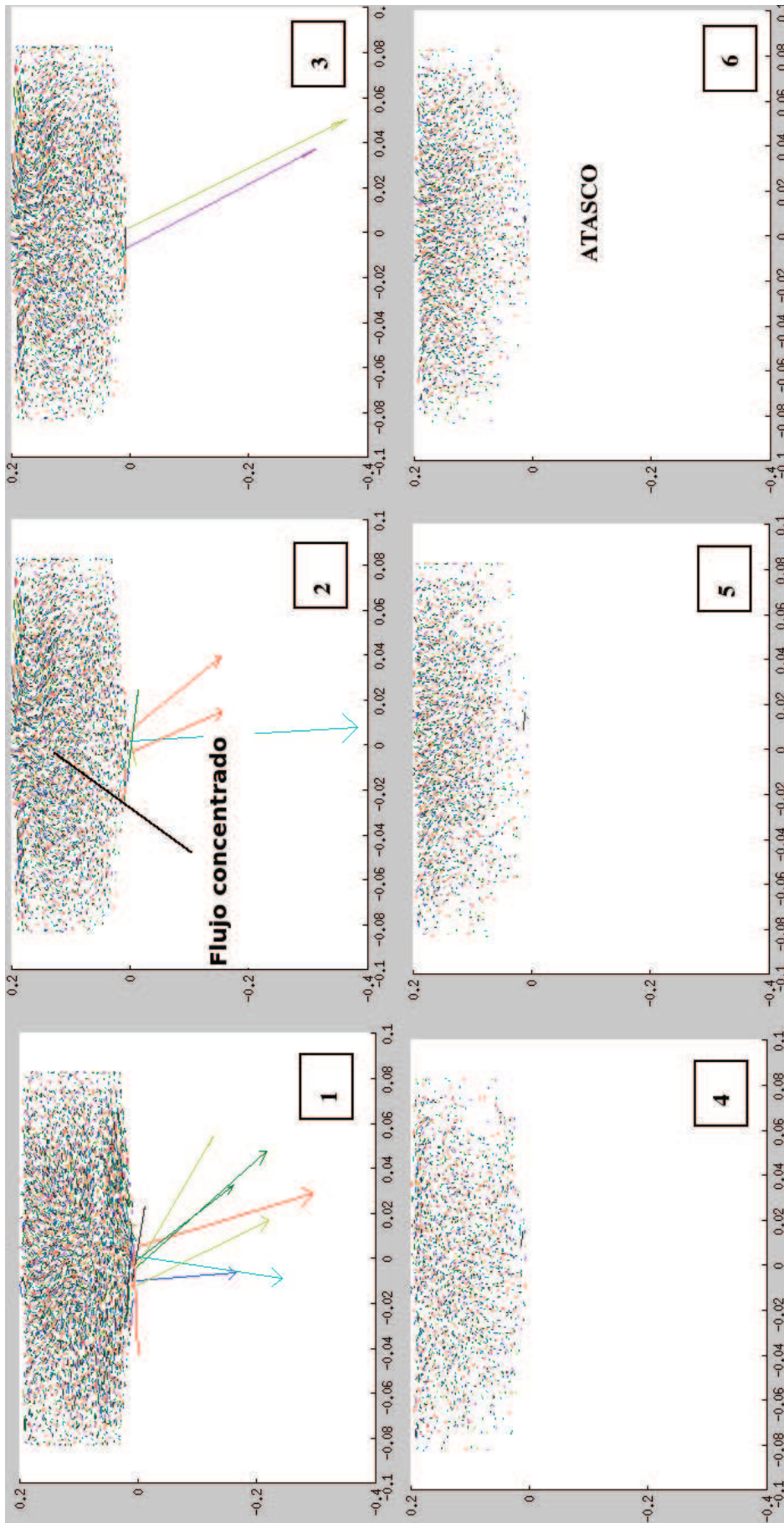


Figura 5.35: Proceso de atascamiento en silo de 15 grados de tolva y agujero de 17.5 mm de radio



**Figura 5.36:** Proceso de atascamiento en silo de 20 grados de tolva y agujero de 35 mm de diámetro con partículas de pellets de hierro



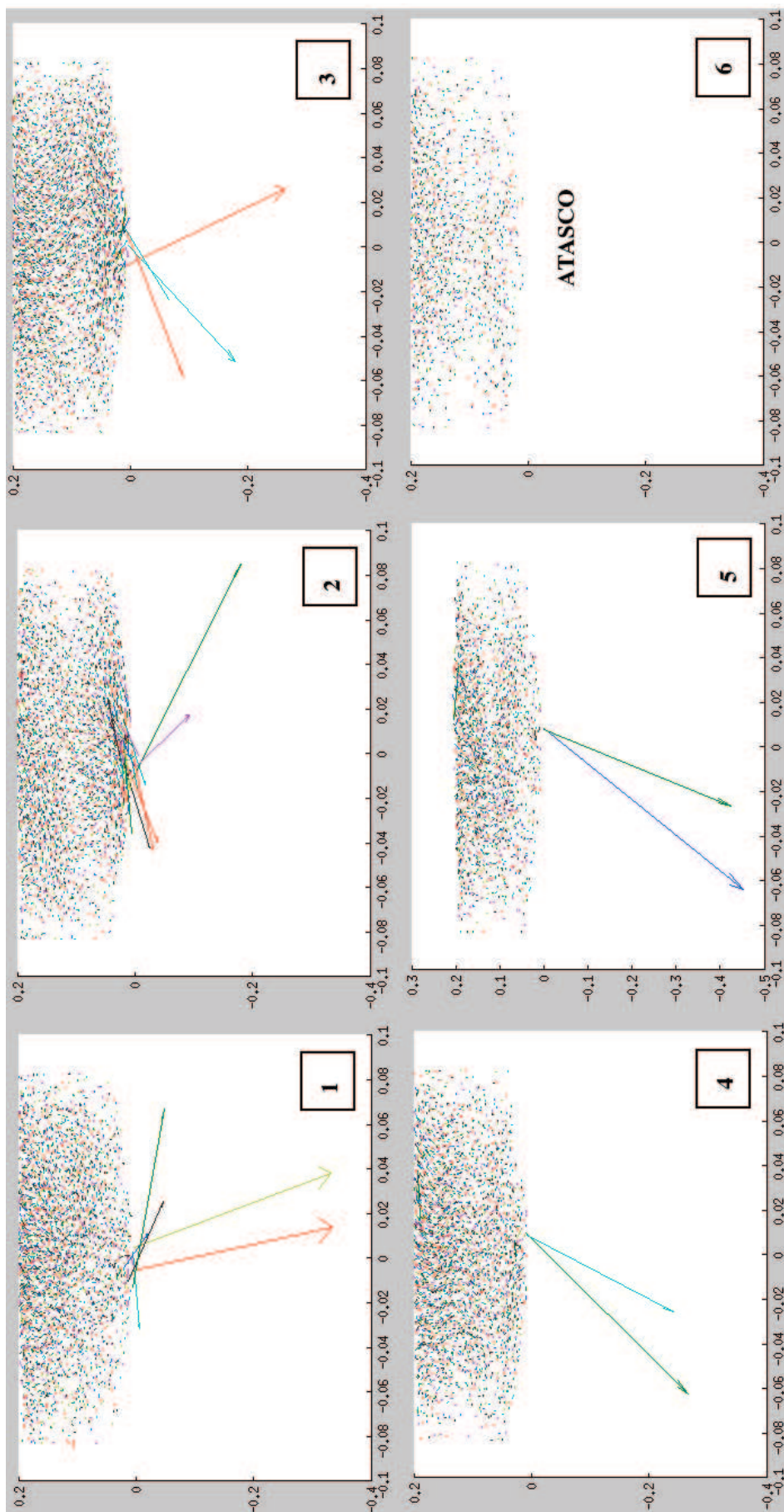
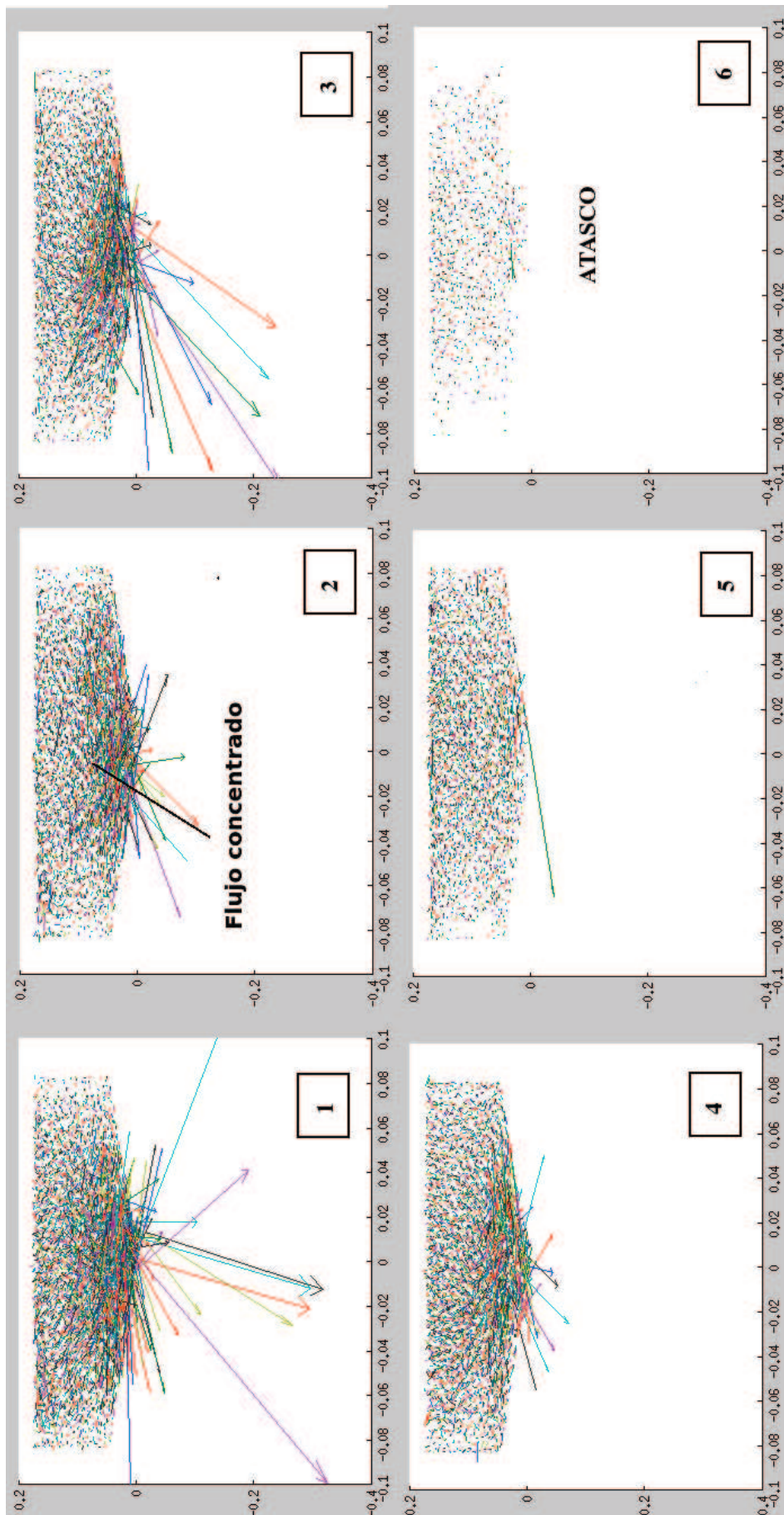


Figura 5.37: Proceso de atascamiento en silo de 26 grados de tolva y agujero de 35 mm de radio con partículas de pellets de hierro



**Figura 5.38:** Proceso de atascamiento en silo de 30 grados de tolva y agujero de 35 mm de diámetro con partículas de pellets de hierro

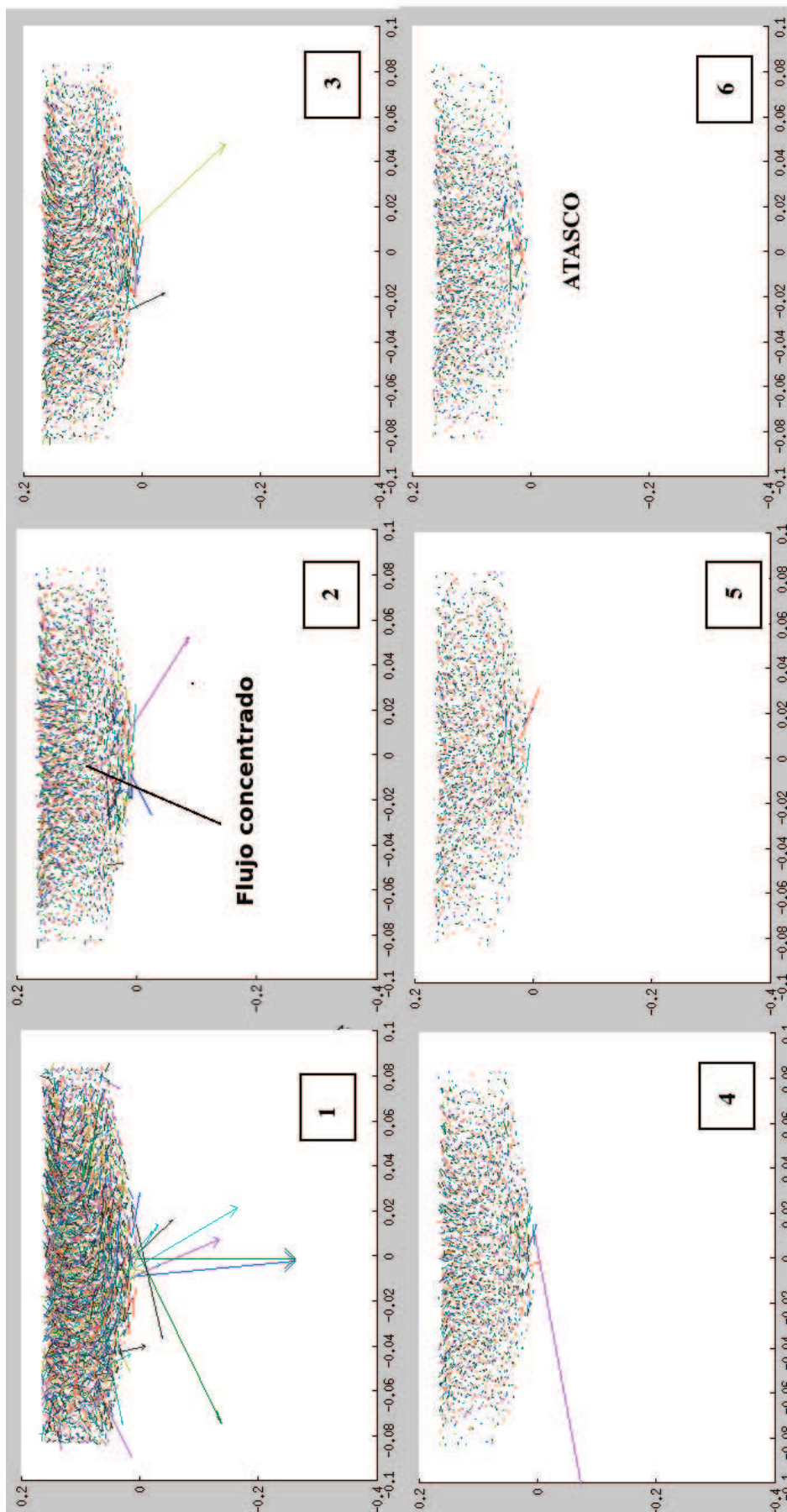


Figura 5.39: Proceso de atascamiento en silo de 35 grados de tolva y agujero de 35 mm de diámetro con partículas de pellets de hierro

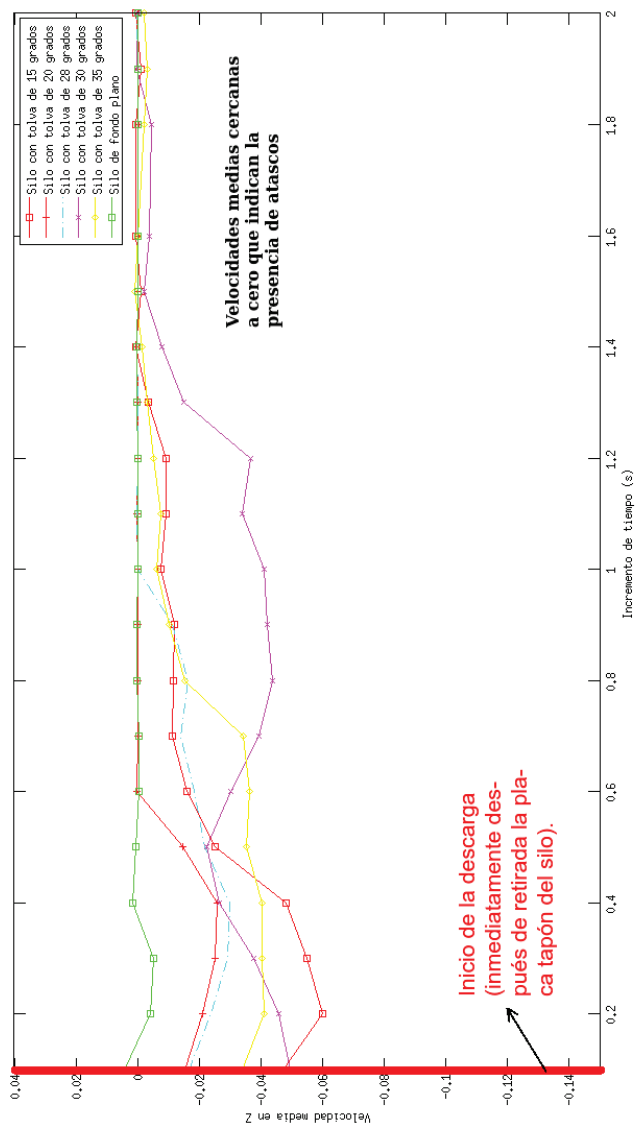


Figura 5.40: Velocidad media de descarga de pellets de hierro en silos de agujero de 35 mm

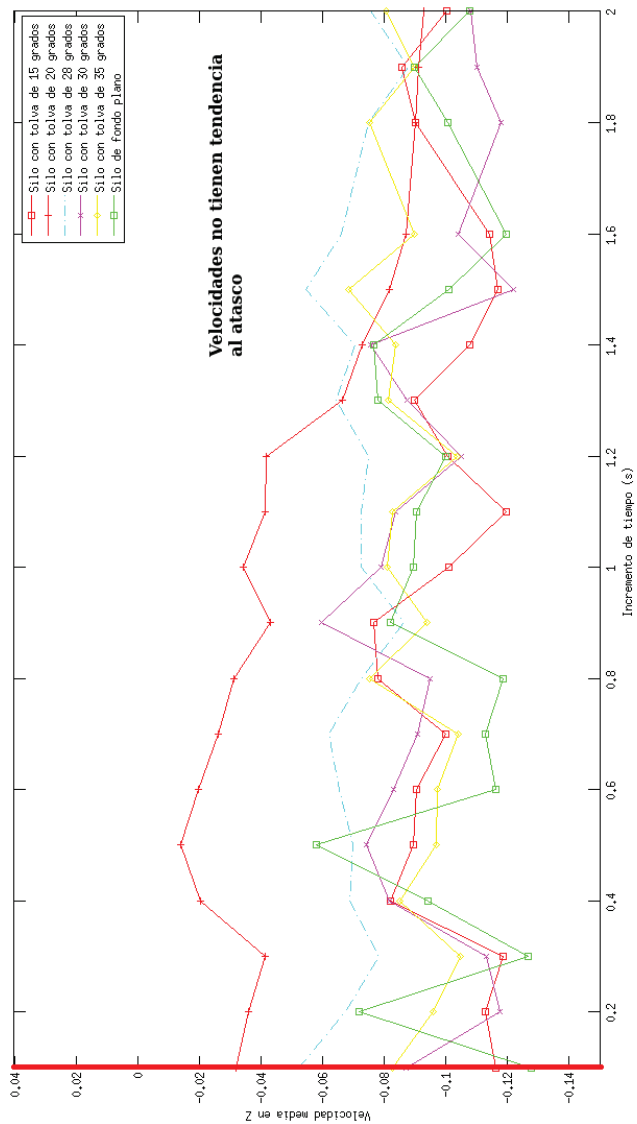


Figura 5.41: Velocidad media de descarga de pellets de hierro en silos de agujero de 40 mm

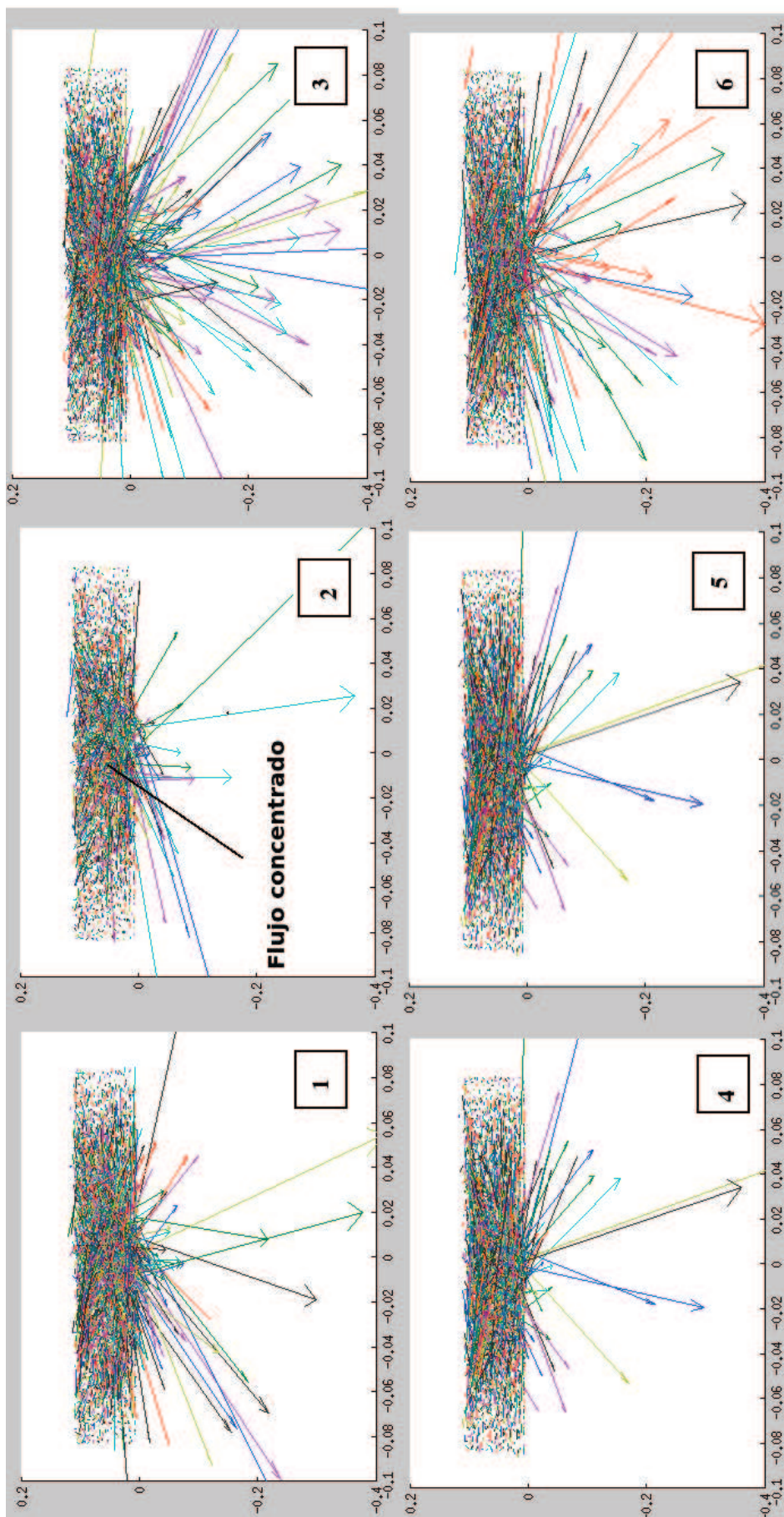


Figura 5.42: Patrones de velocidad de un silo de fondo plano de diámetro 40 mm que almacena pellets de hierro

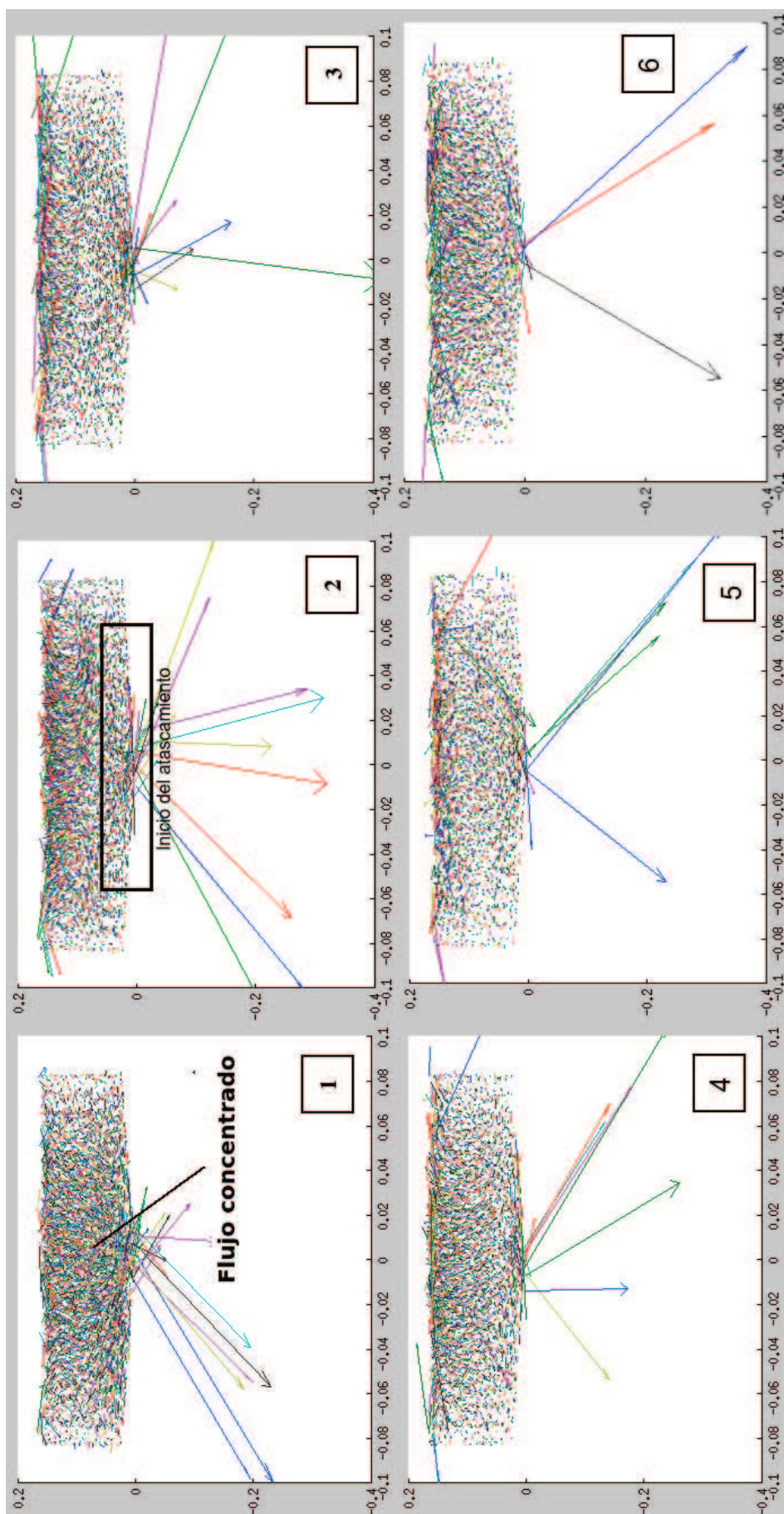
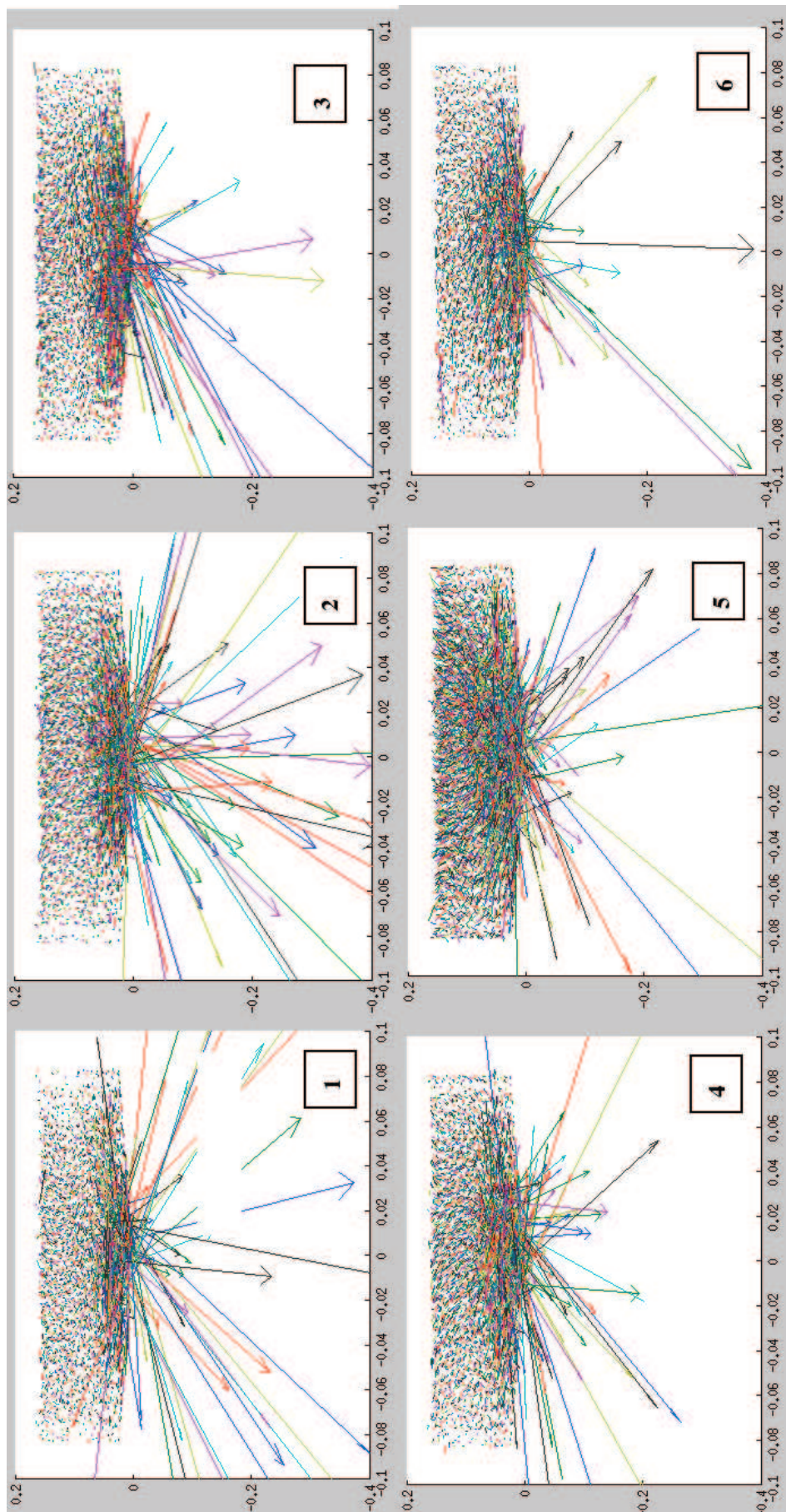
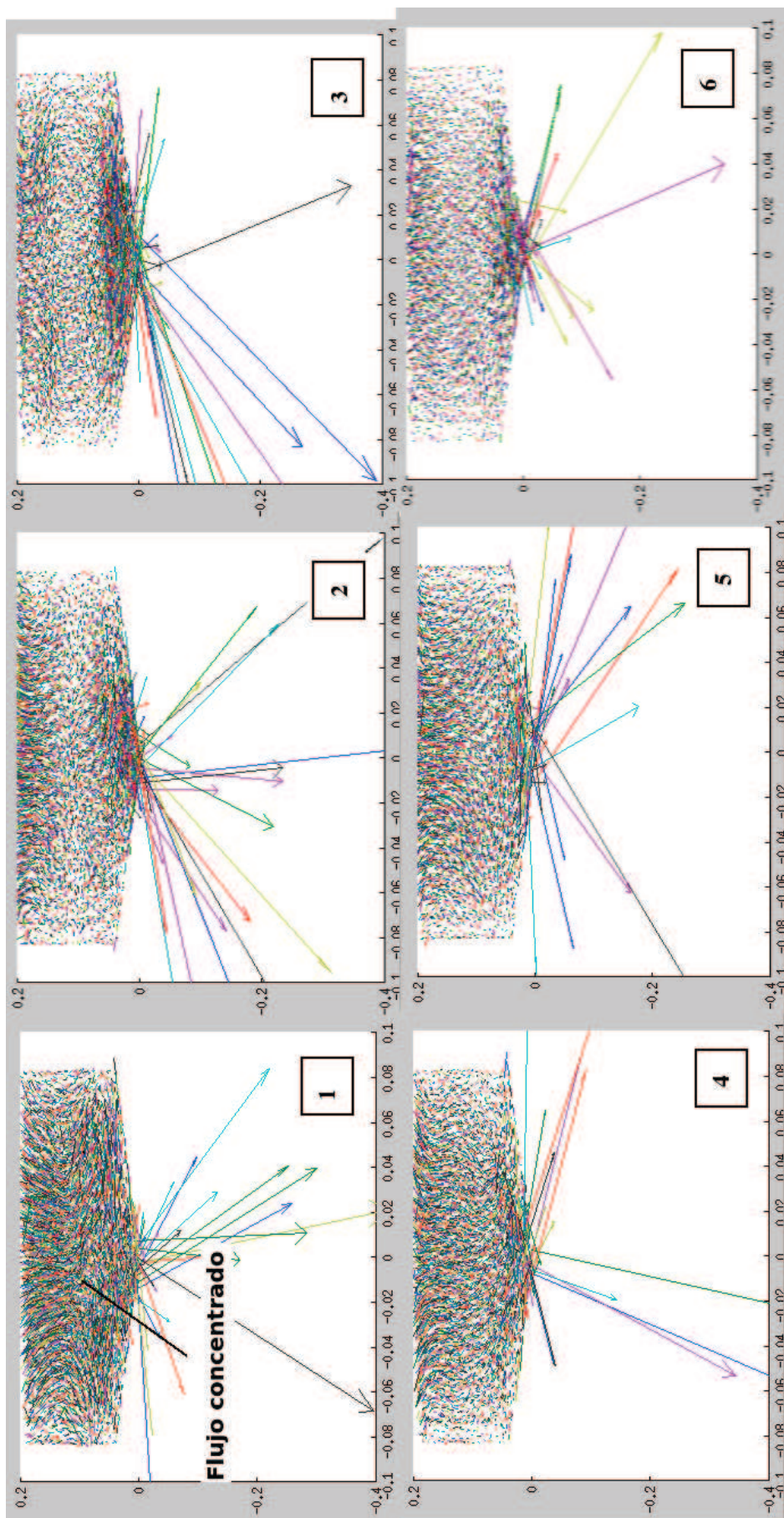


Figura 5.43: Patrones de velocidad de un silo con tolva de 15 grados y diámetro de 40 mm que almacena pellets de hierro

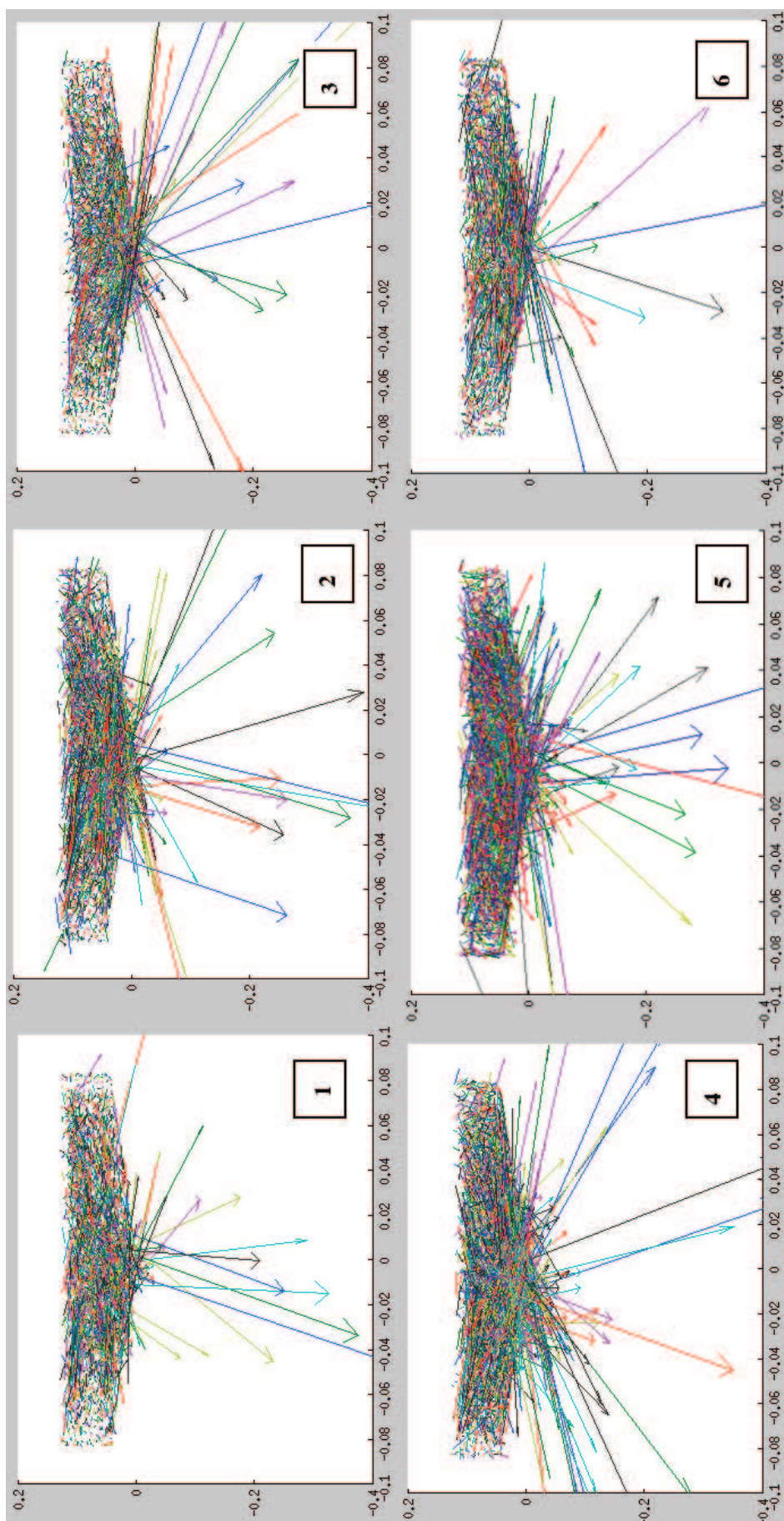


**Figura 5.44:** Patrones de velocidad de un silo con tolva de 20 grados y diámetro de 40 mm que almacena pellets de hierro

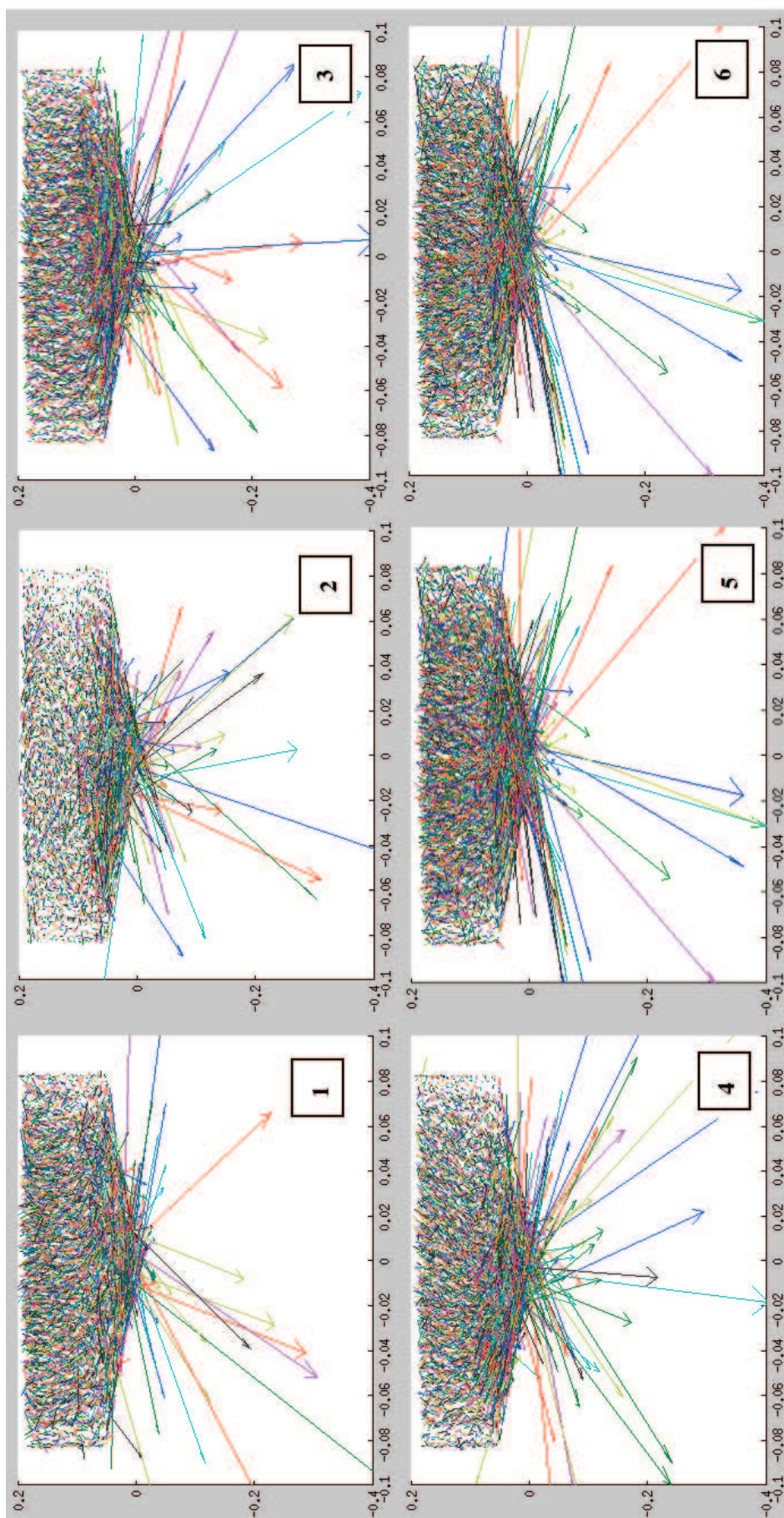




**Figura 5.45:** Patrones de velocidad de un silo con tolva de 26 grados y diámetro de 40 mm que almacena pellets de hierro



**Figura 5.46:** Patrones de velocidad de un silo con tolva de 30 grados y diámetro de 40 mm que almacena pellets de hierro



**Figura 5.47:** Patrones de velocidad de un silo con tolva de 35 grados y diámetro de 40 mm que almacena pellets de hierro

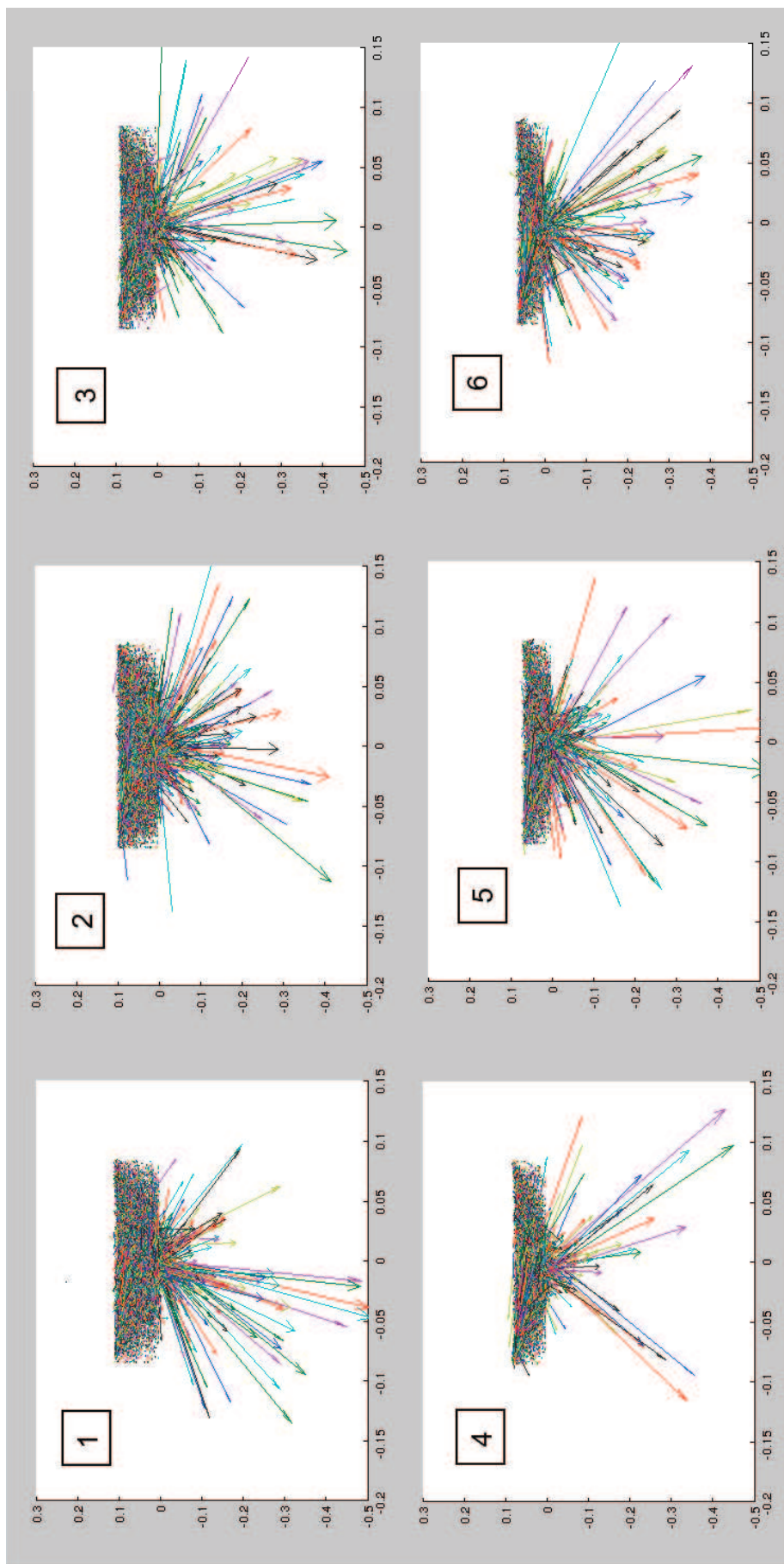


Figura 5.48: Patrones de velocidad en silo plano con partículas de maíz

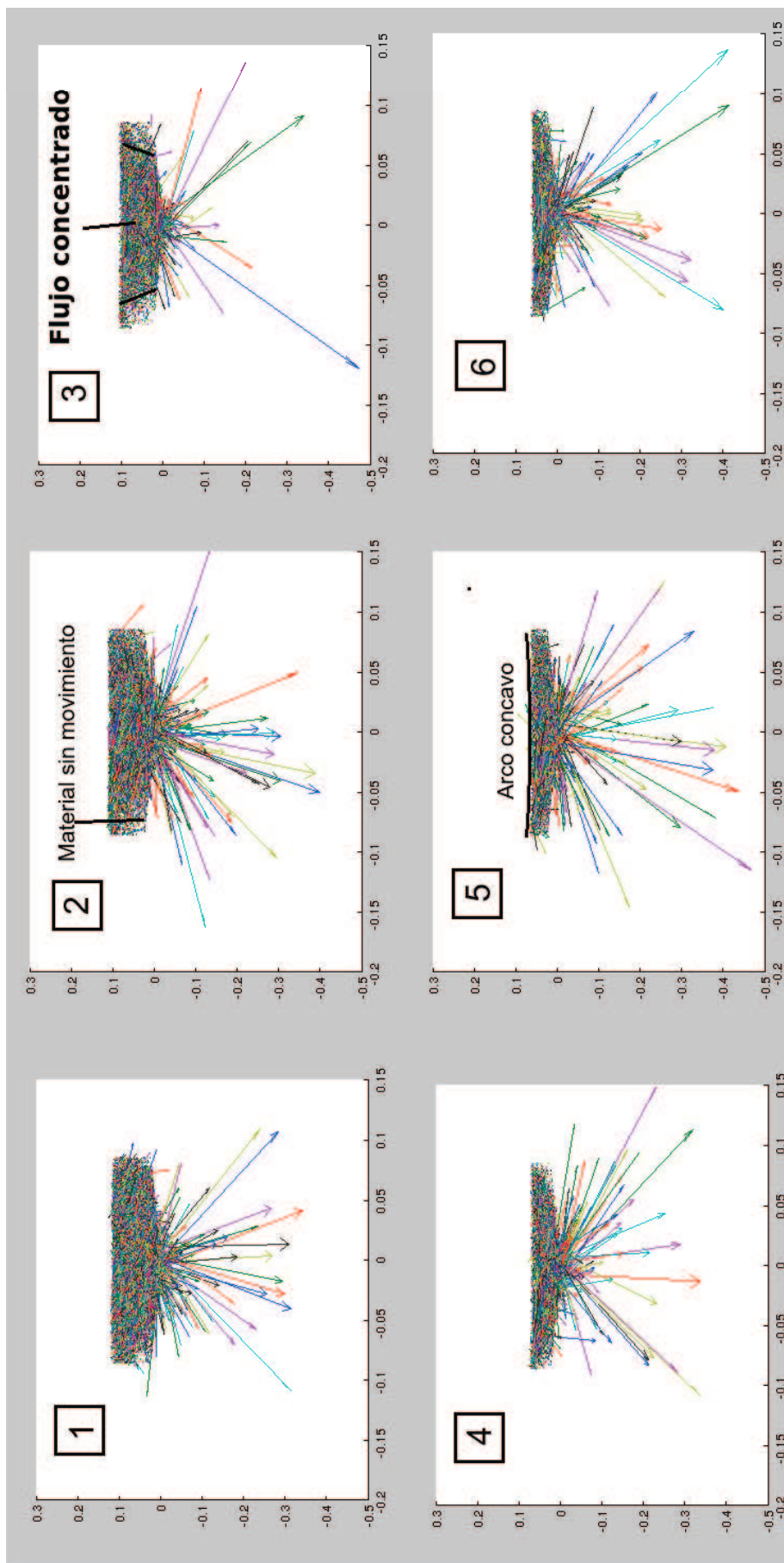


Figura 5.49: Patrones de velocidad de un silo con tolva de 15 grados que contiene partículas de maíz

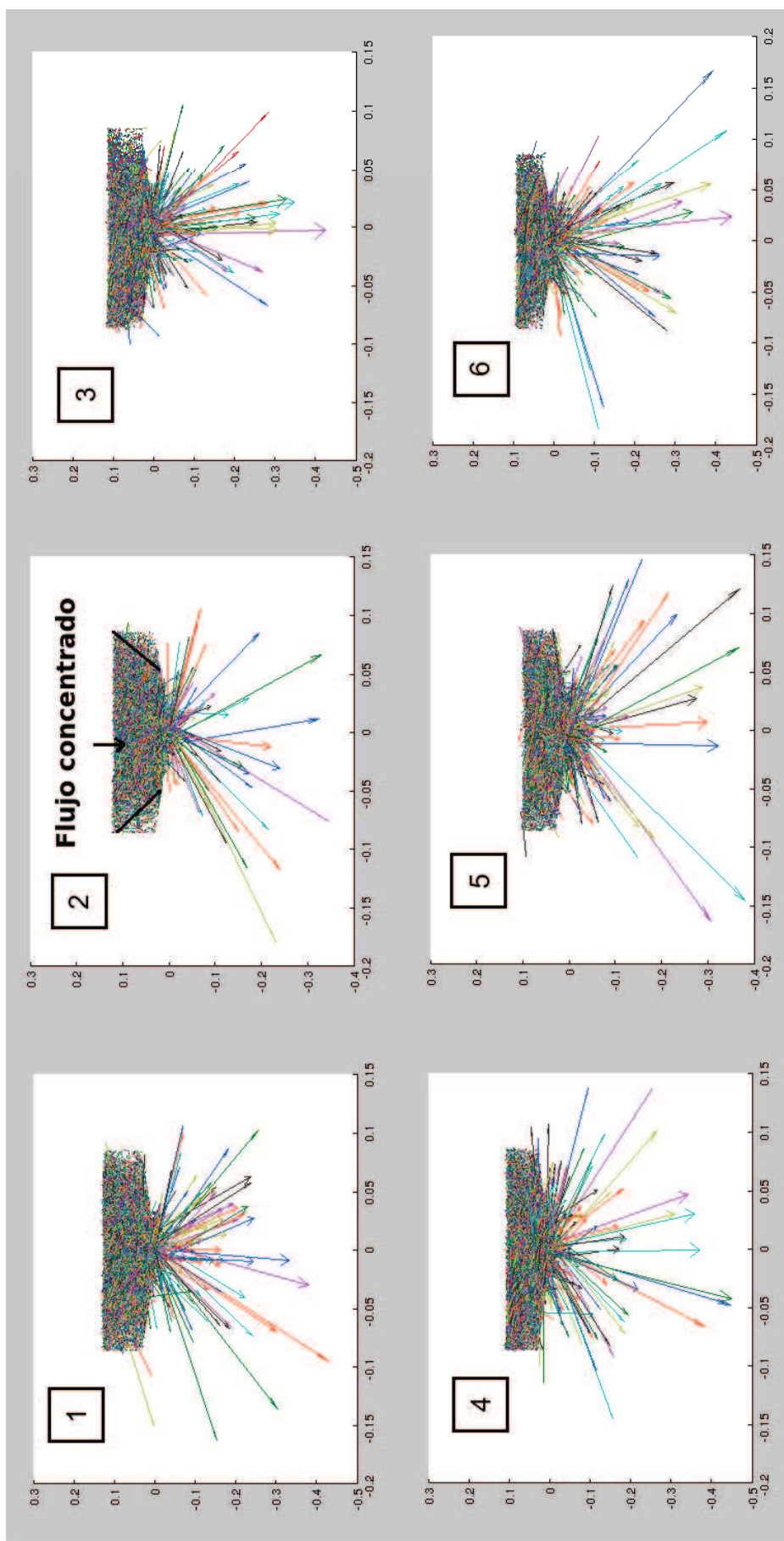


Figura 5.50: Patrones de velocidad de un silo con tolva de 20 grados que contiene partículas de maíz

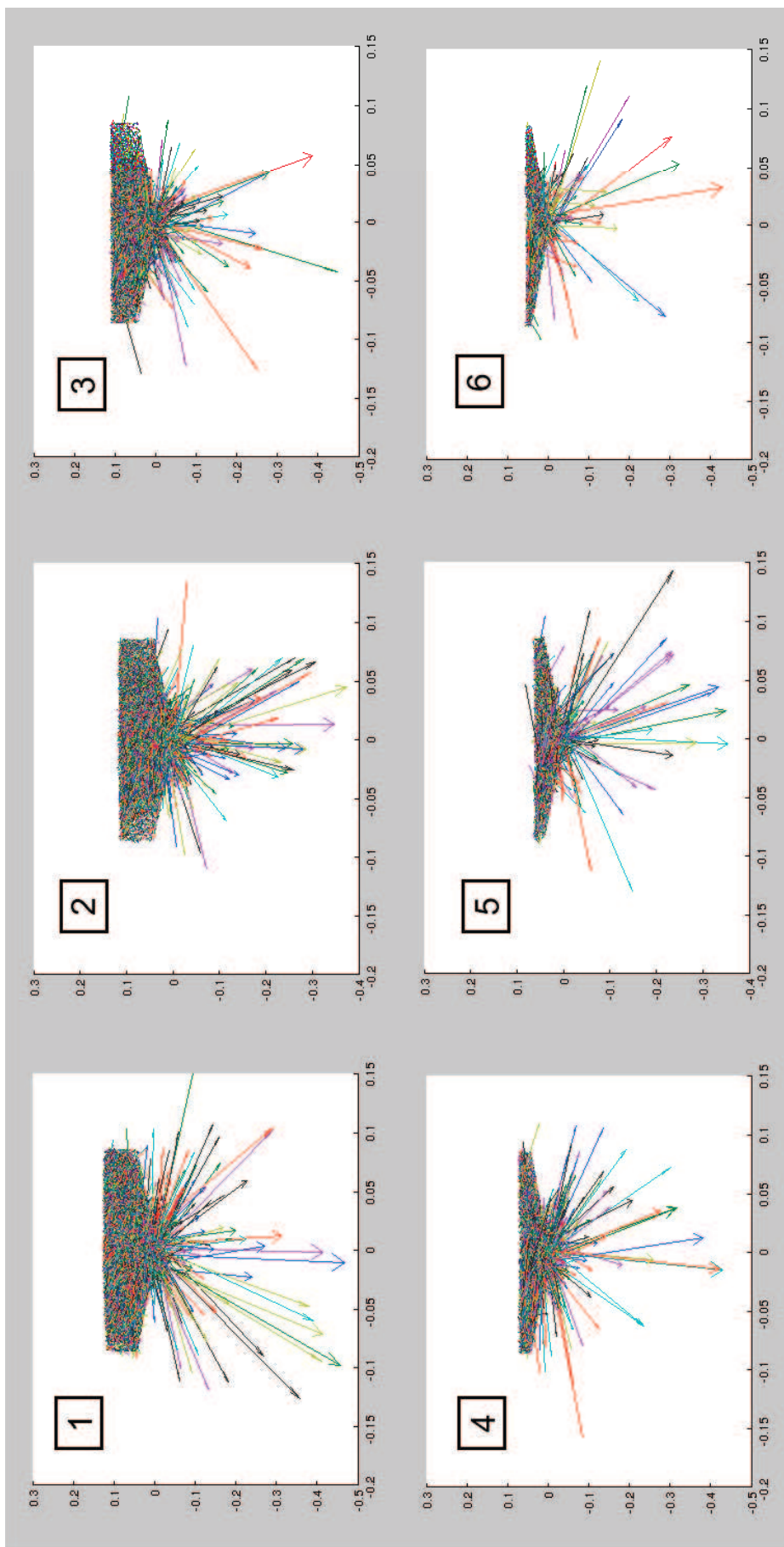


Figura 5.51 : Patrones de velocidad de un silo con tolva de 28 grados que contiene partículas de maíz

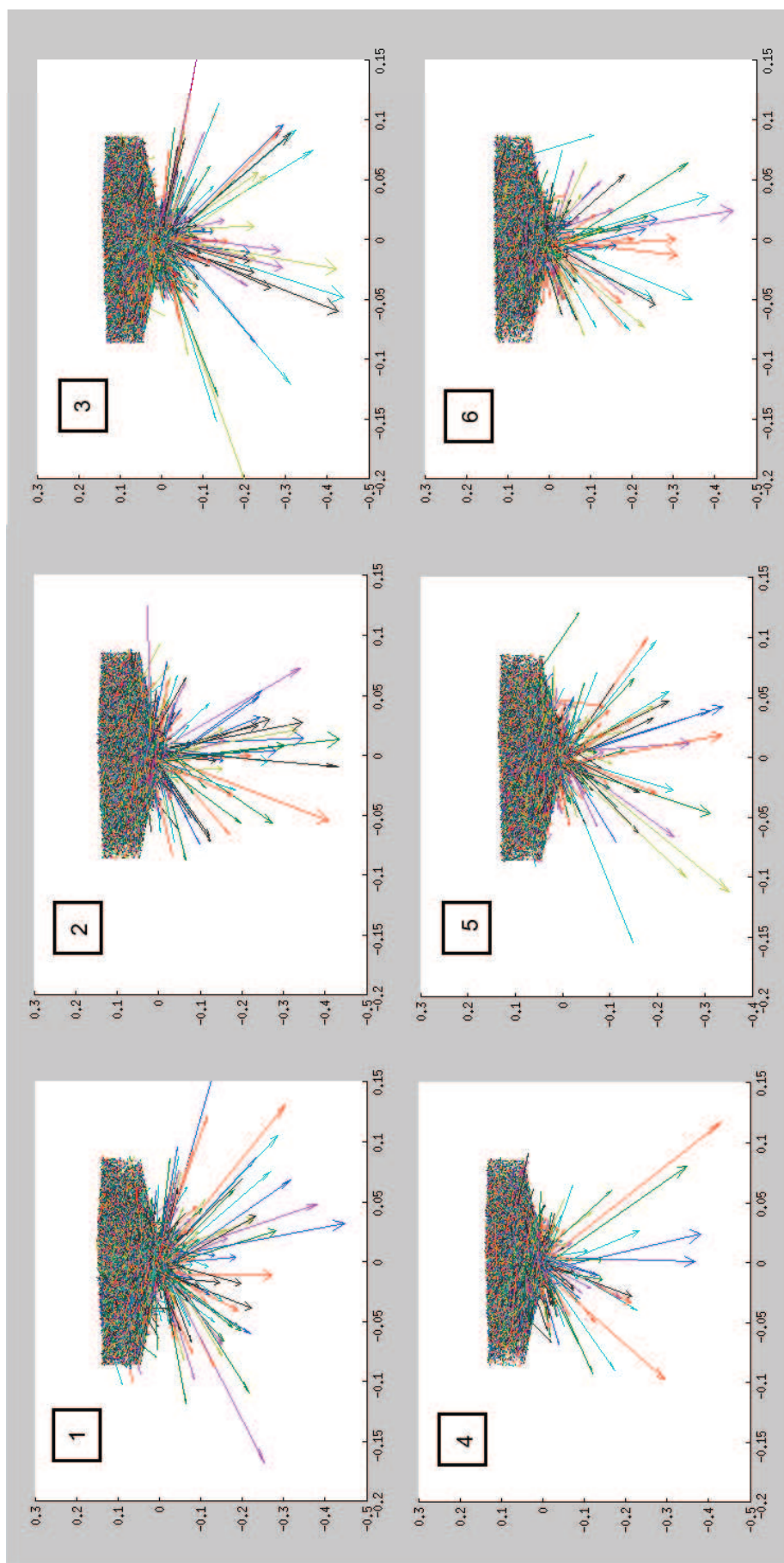


Figura 5.52: Patrones de velocidad de un silo con tolva de 30 grados que contiene partículas de maíz



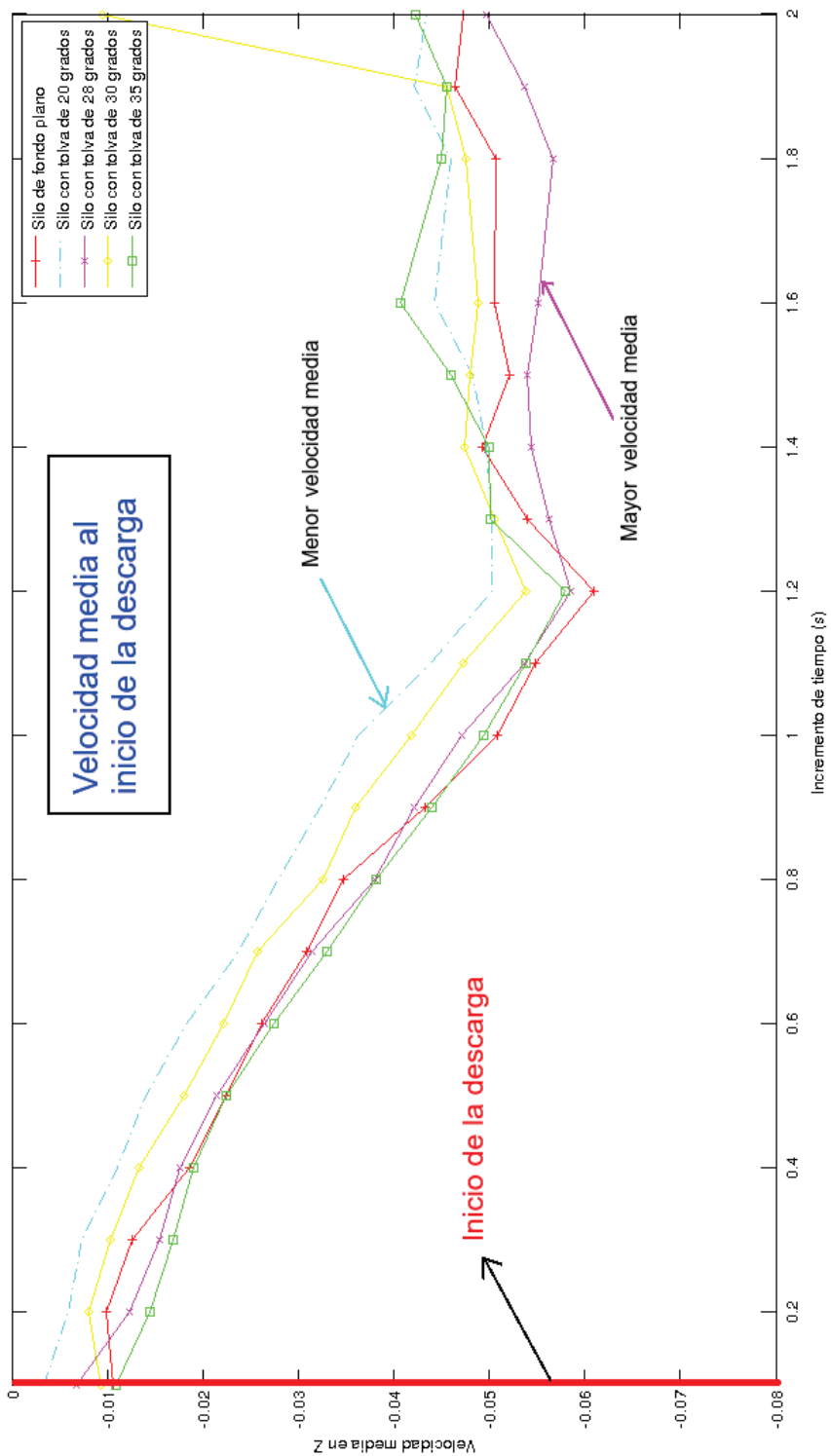


Figura 5.53: Velocidad media al inicio de la descarga de maíz

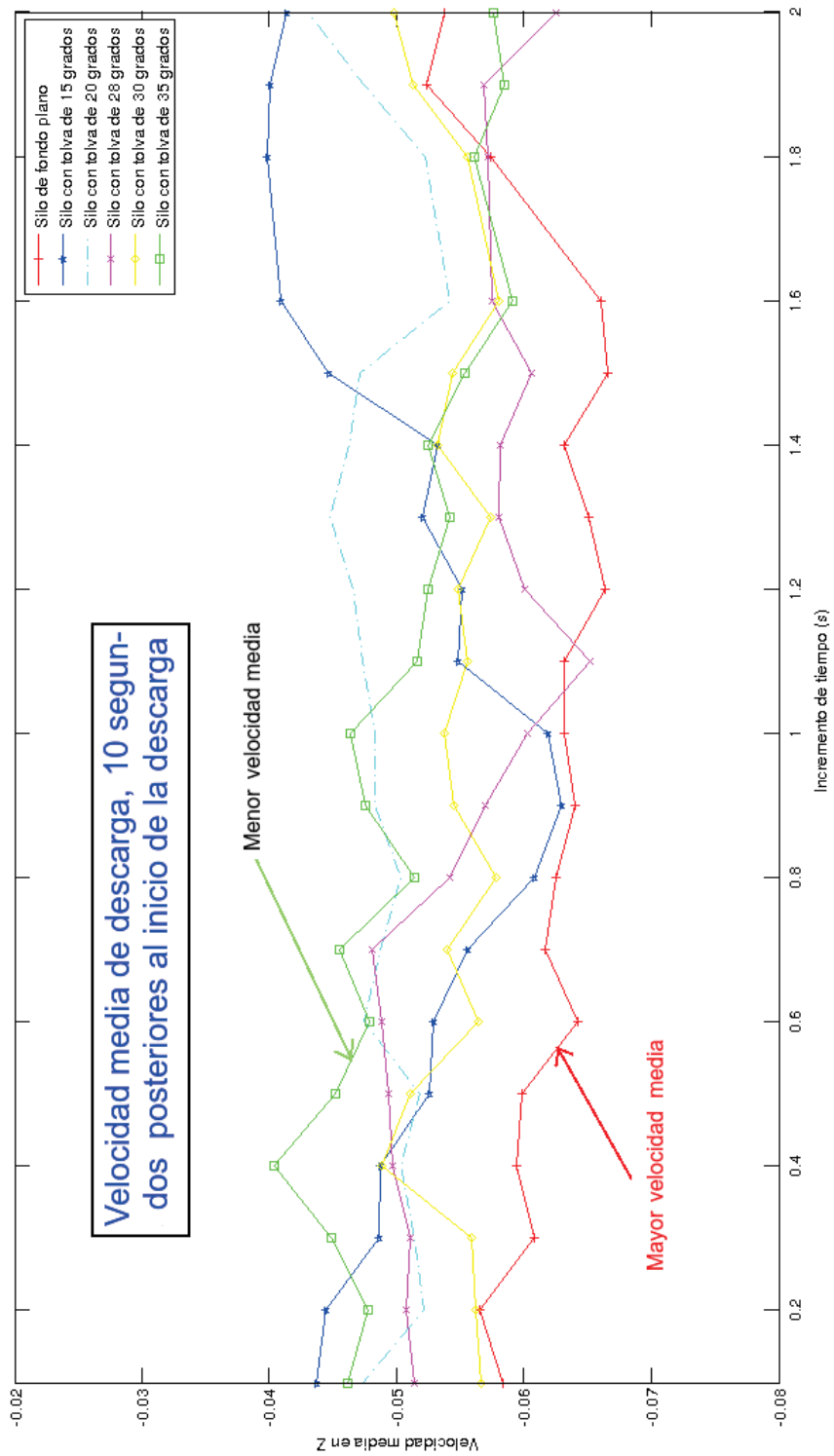
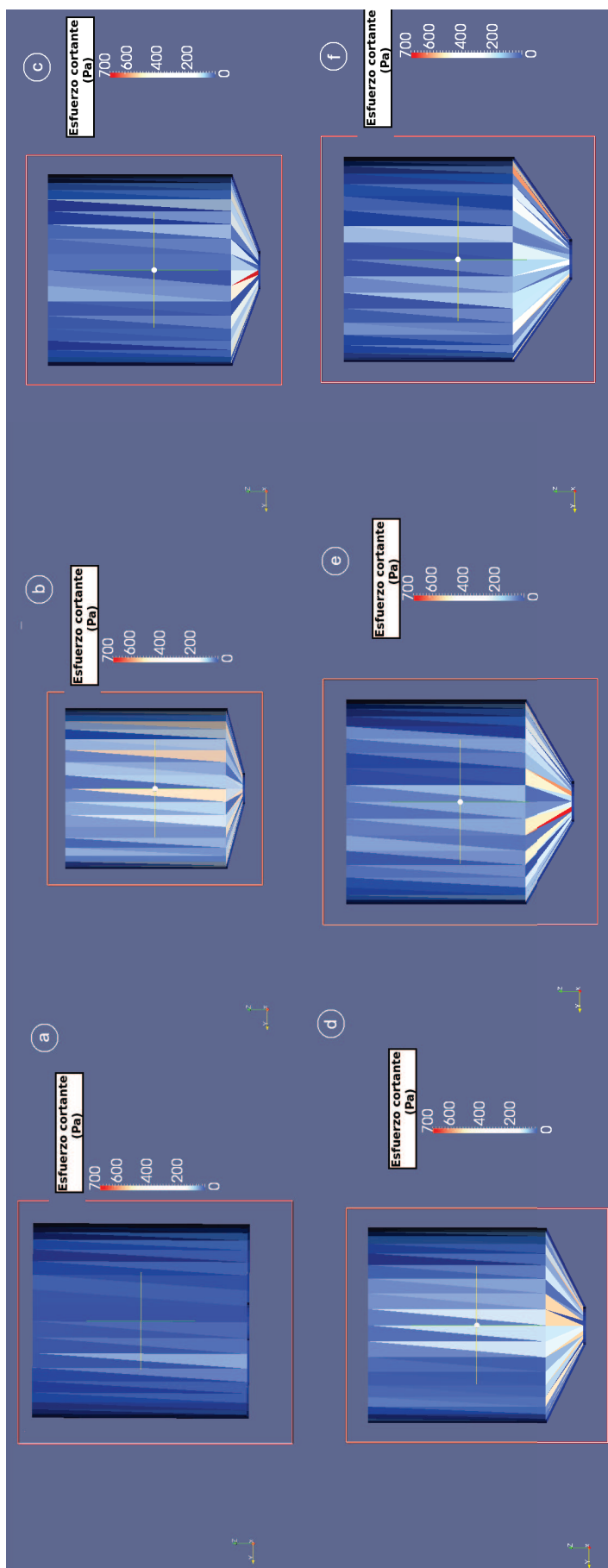
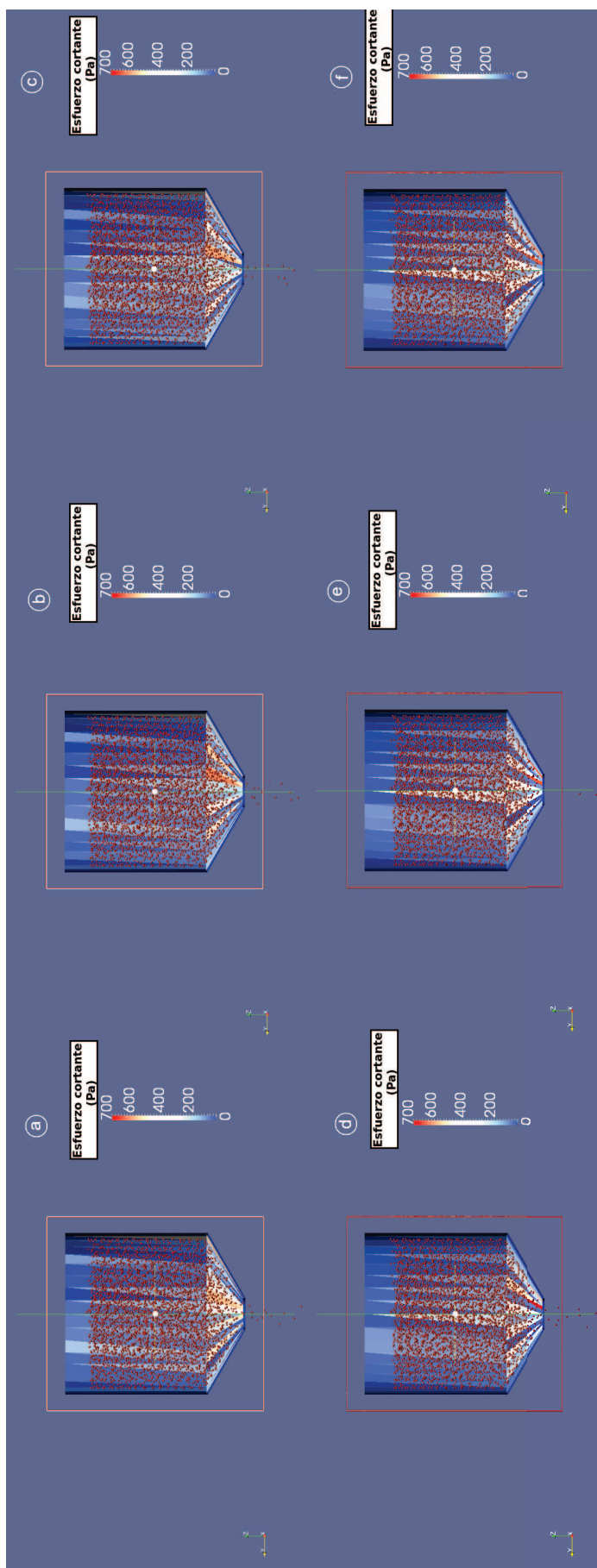


Figura 5.54: Velocidad media de descarga en el maíz



**Figura 5.55:** Esfuerzos cortantes en las paredes de silos de fondo plano y tolva de descarga lleno de pellets.- (a) Silo de fondo plano, (b) Tolva de 15°, (c) Tolva de 20°, (d) Tolva de 26°, (e) Tolva de 30°, (f) Tolva de 35°.



**Figura 5.56:** Esfuerzos cortantes durante la descarga de material granular en un silo con tolva de pendiente lleno de pellets de hierro.- (a)(b)(c) descarga sin atascamiento (d)(e)(f) material atascado.

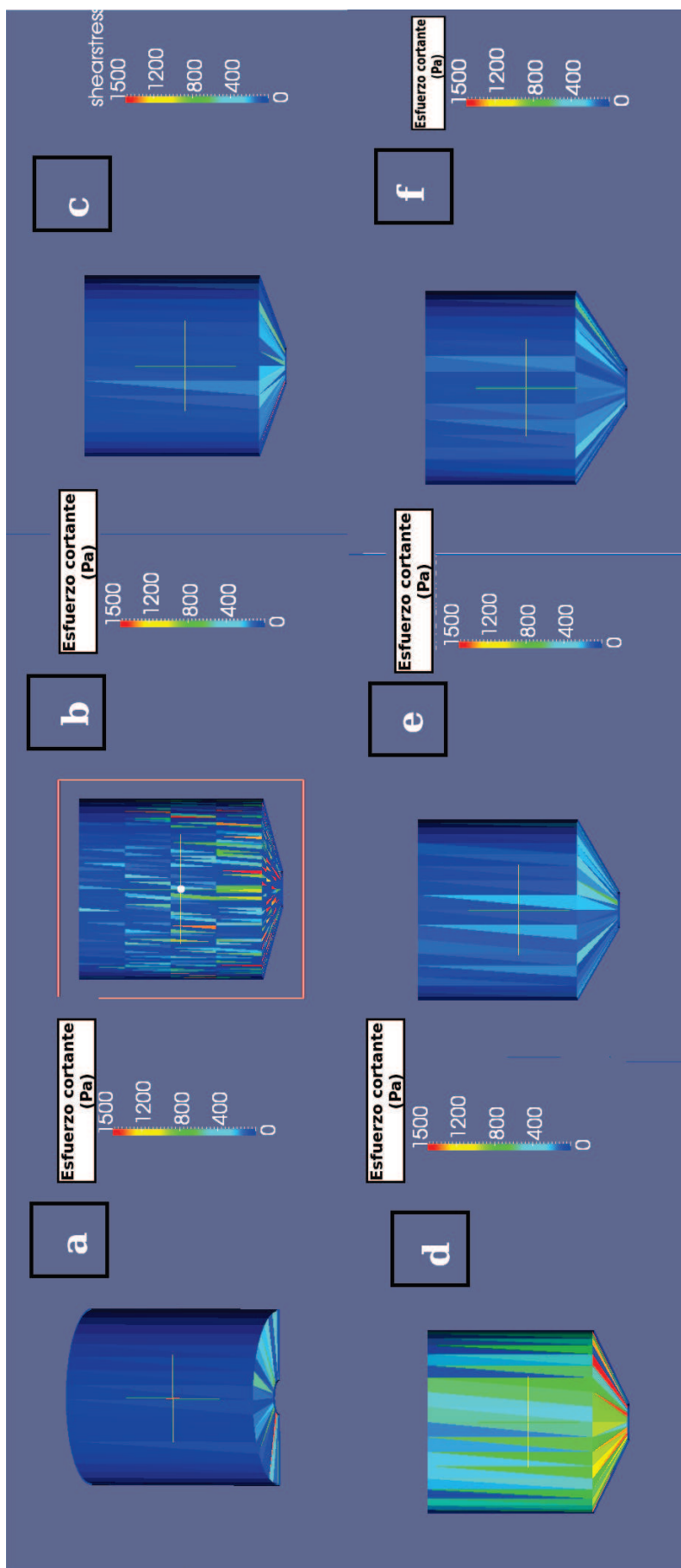
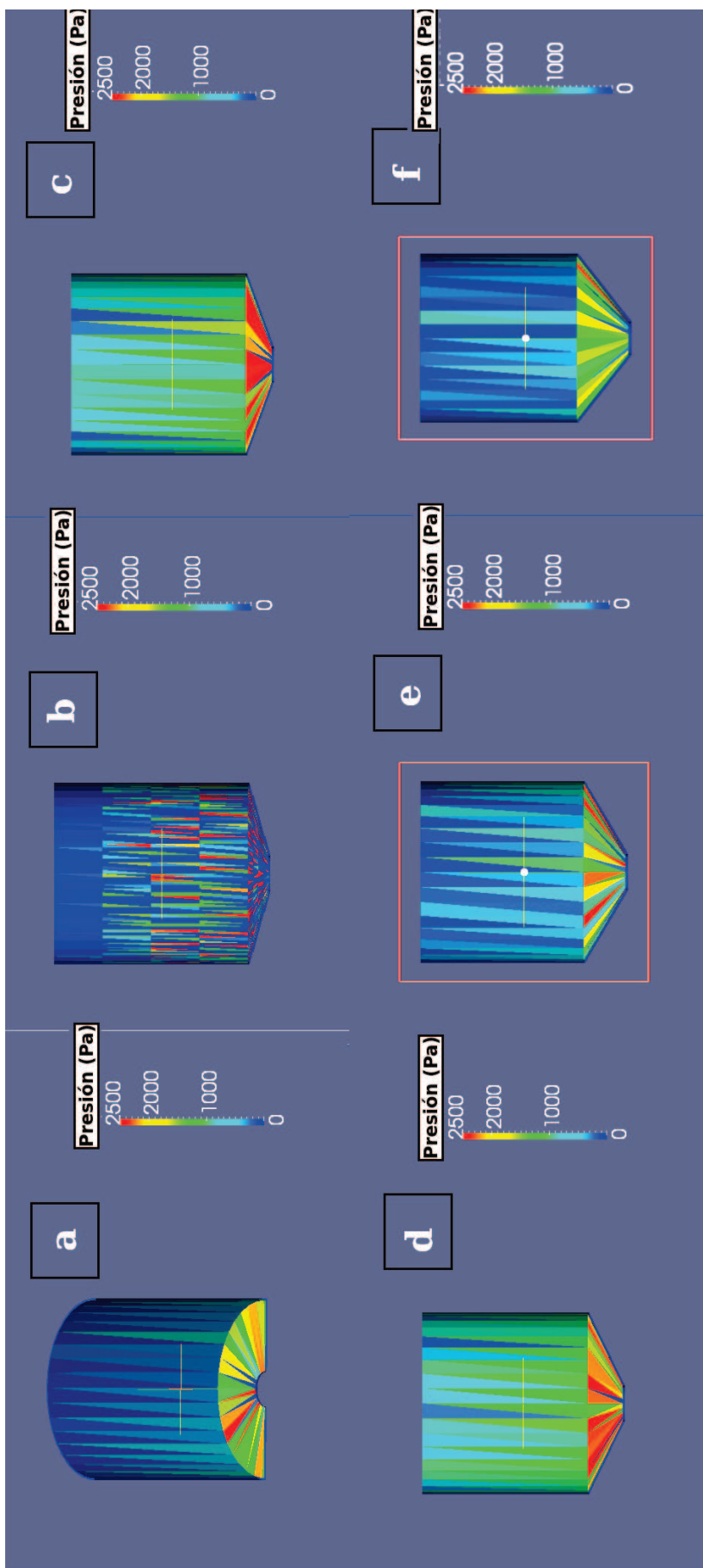
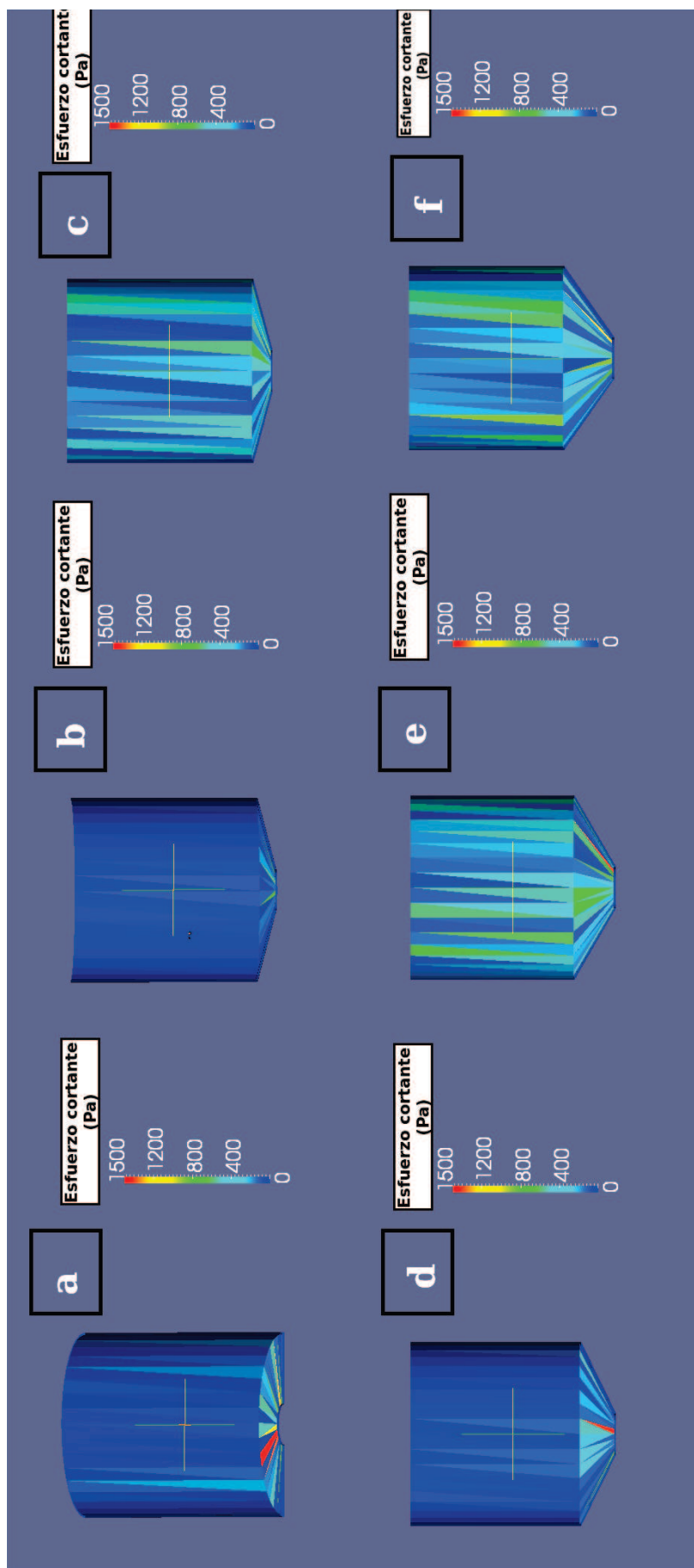


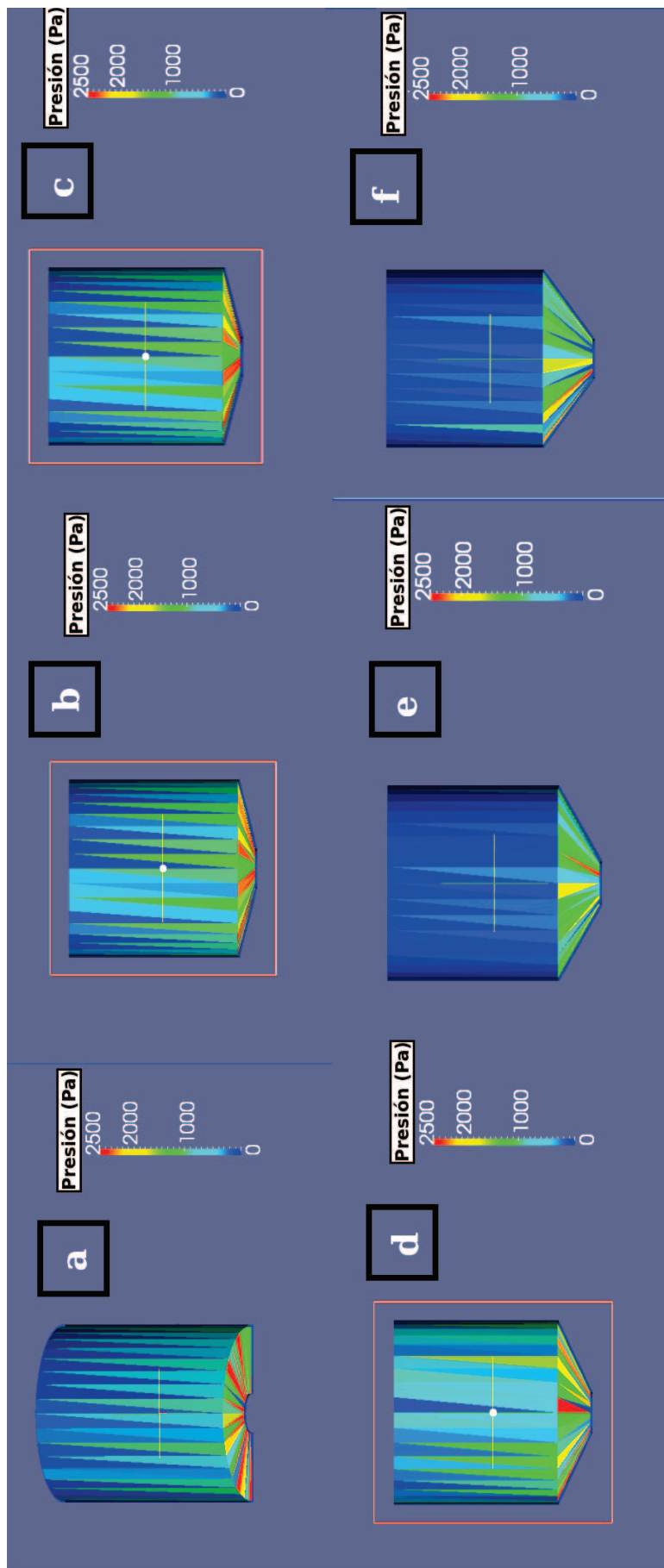
Figura 5.57: Esfuerzos cortantes en silos con diámetro de agujero de descarga de 35 mm con pellets de hierro



**Figura 5.58:** Presión en las paredes del silo de diámetro 35 mm que contiene partículas que representan a los pellets de hierro.- (a) Silo de fondo plano, (b) Tolva de 15°, (c) Tolva de 20°, (d) Tolva de 20°, (e) Tolva de 26°, (e) Tolva de 30°, (f) Tolva de 35°.



**Figura 5.59:** Esfuerzos cortantes en silos con diámetro de agujero de descarga de 40 mm con pellets de hierro



**Figura 5.60:** Presión en las paredes del silo de diámetro 40 mm que contiene partículas que representan a los pellets de hierro.- (a) Silo de fondo plano, (b) Tolva de 15°, (c) Tolva de 20°, (d) Tolva de 26°, (e) Tolva de 30°, (f) Tolva de 35°.



## Esfuerzos vs Ángulo de tolva

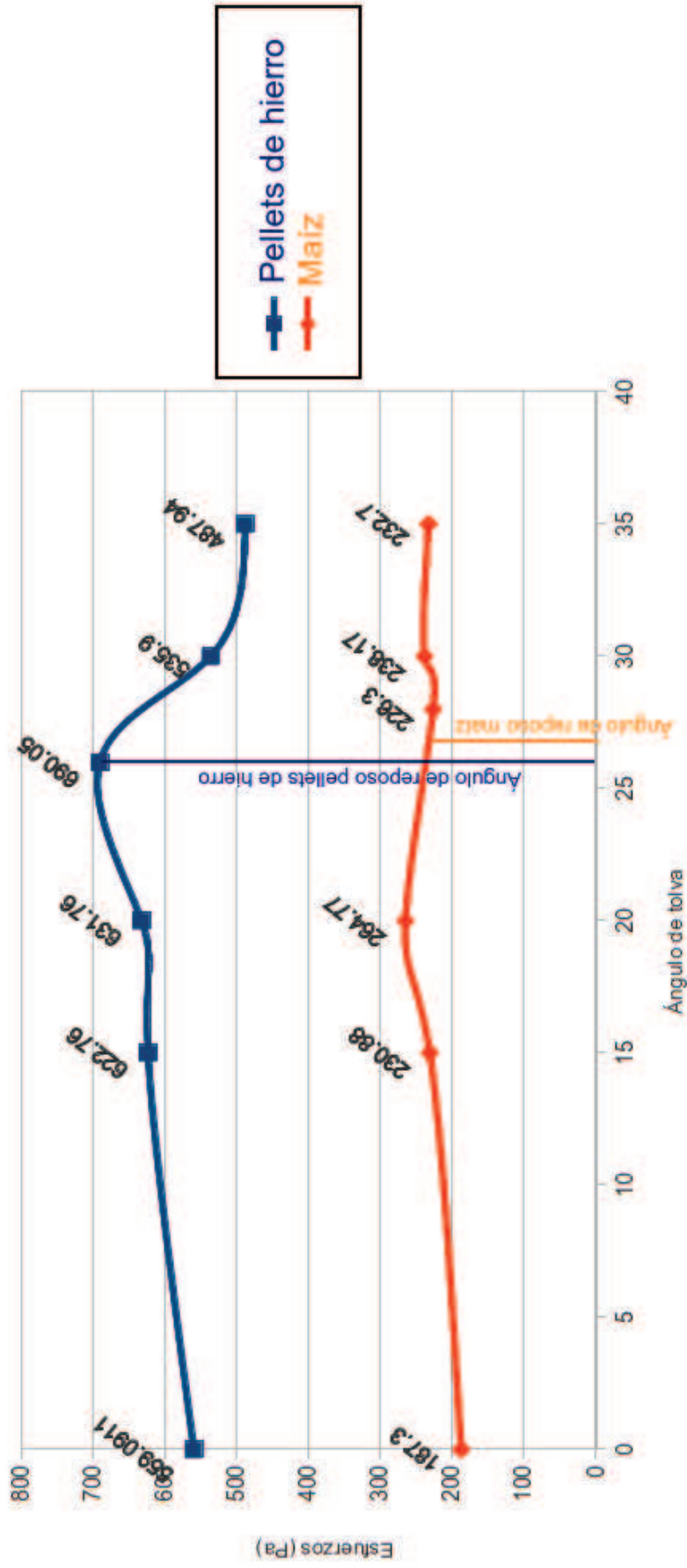
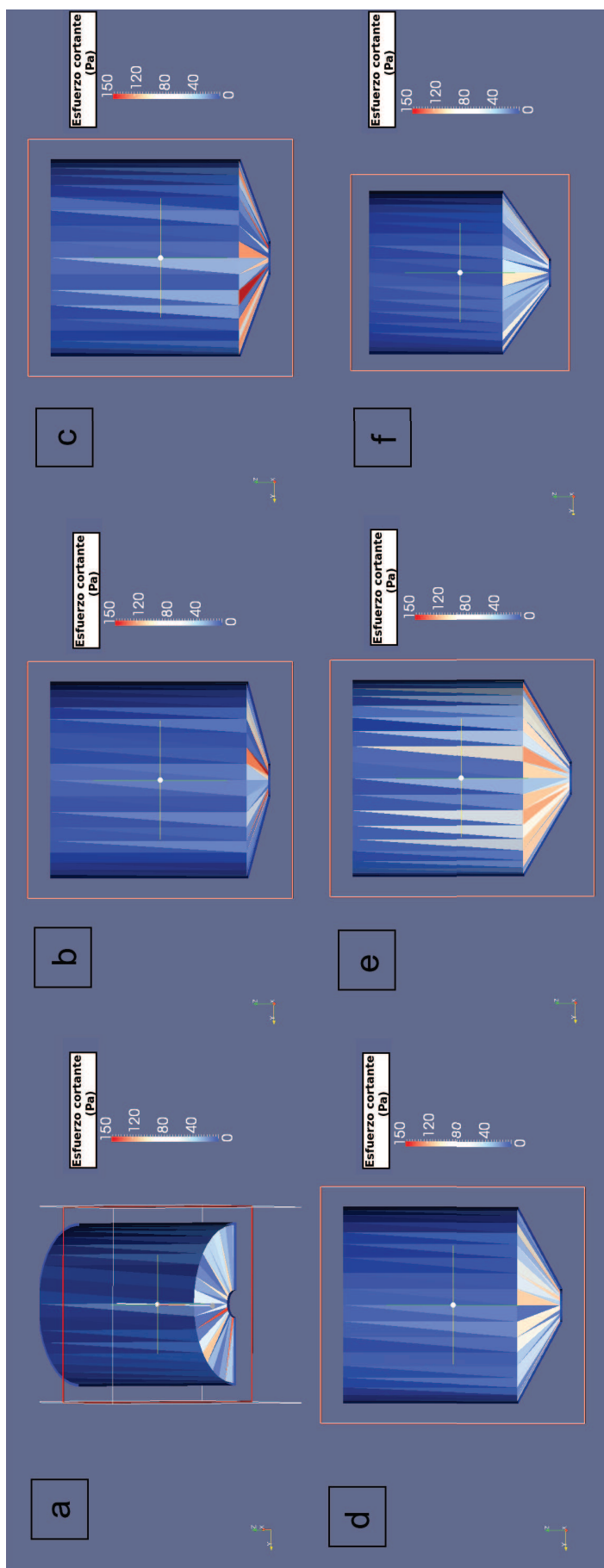
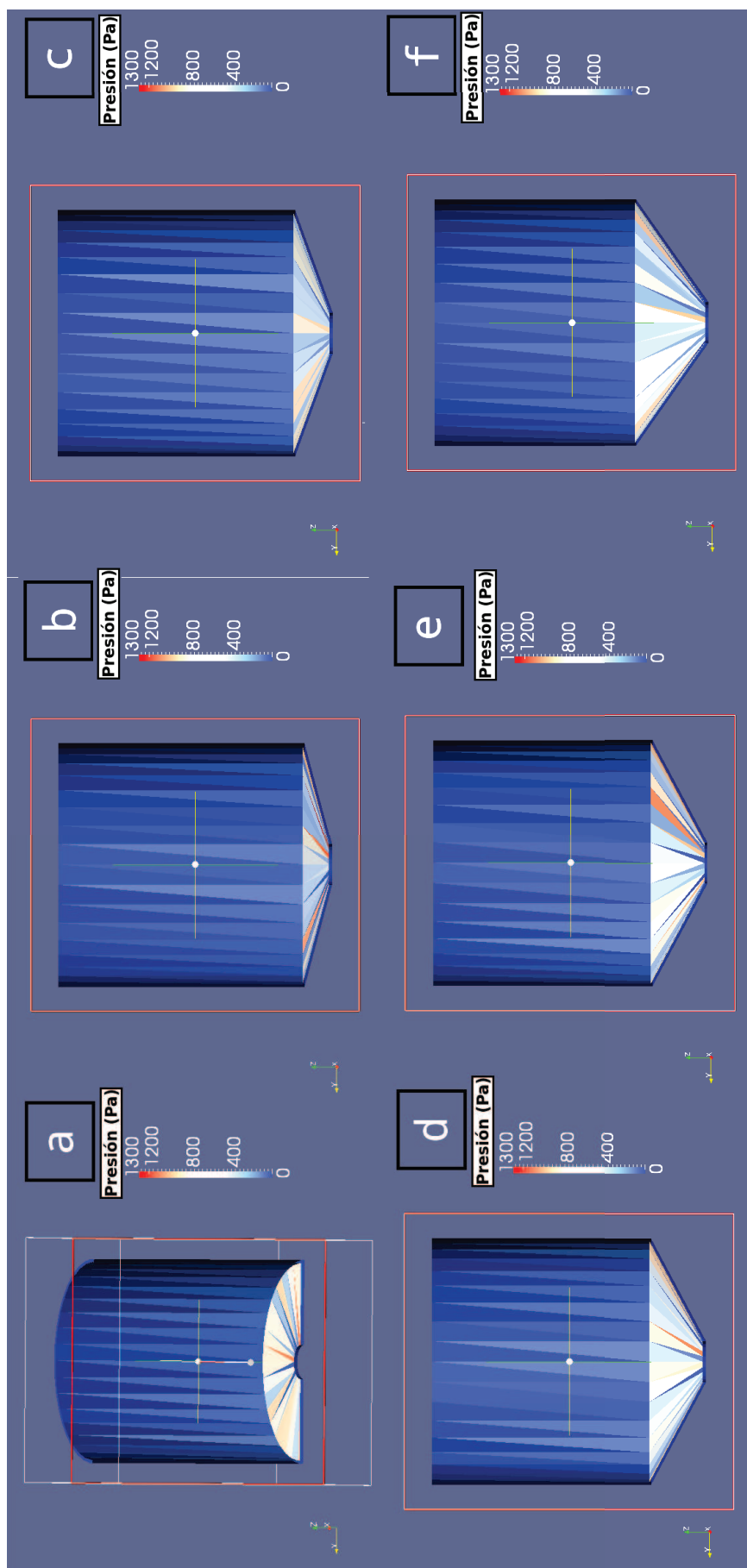


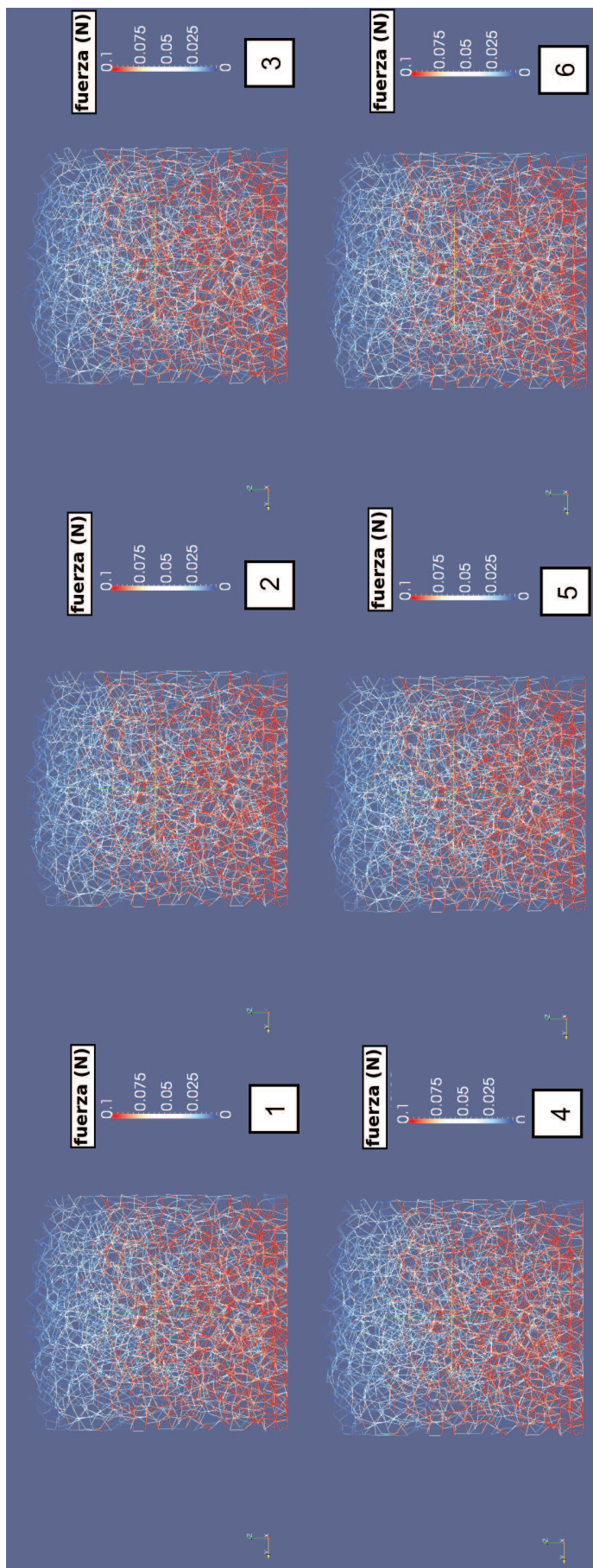
Figura 5.61: Comparación de esfuerzos en las paredes del silo vs ángulo de la tolva de descarga para el maíz y pellets de hierro



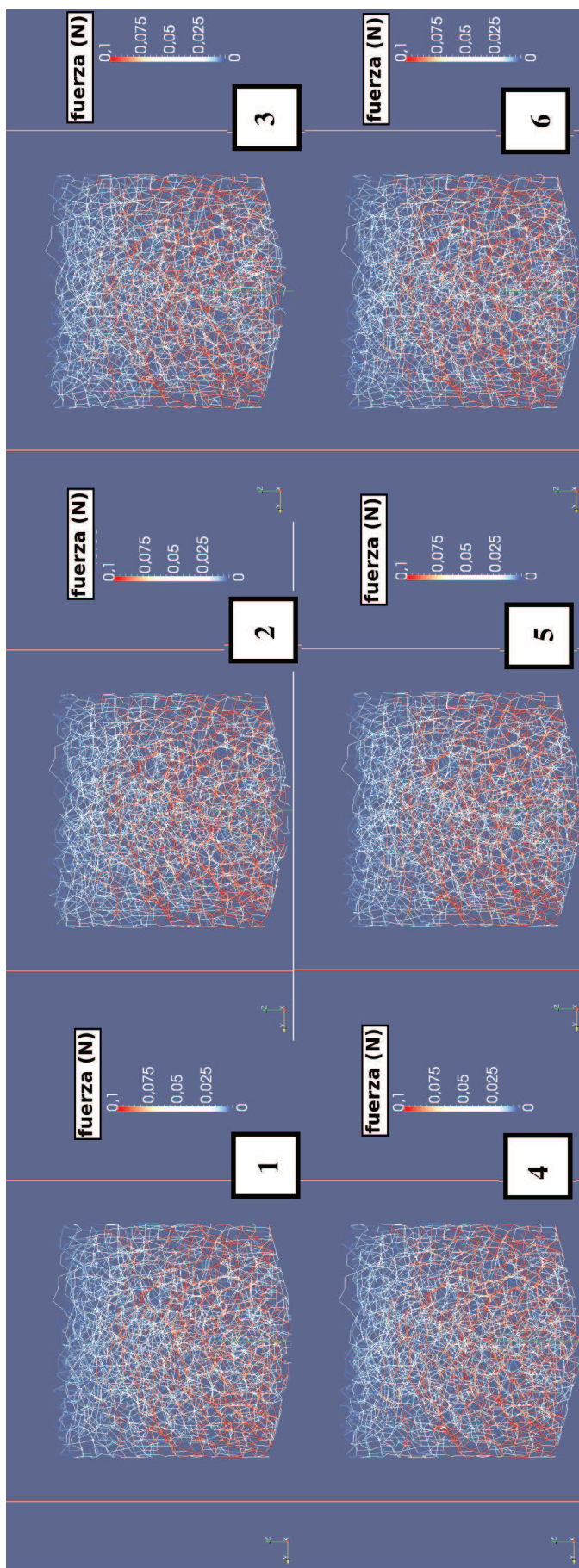
**Figura 5.62:** Esfuerzos en las paredes de silos de fondo plano y tolva de descarga lleno de maíz con diámetro de 30 mm.- (a) Silo de fondo plano, (b) Tolva de 15°, (c) Tolva de 20°, (d) Tolva de 28°, (e) Tolva de 30°, (f) Tolva de 35°.



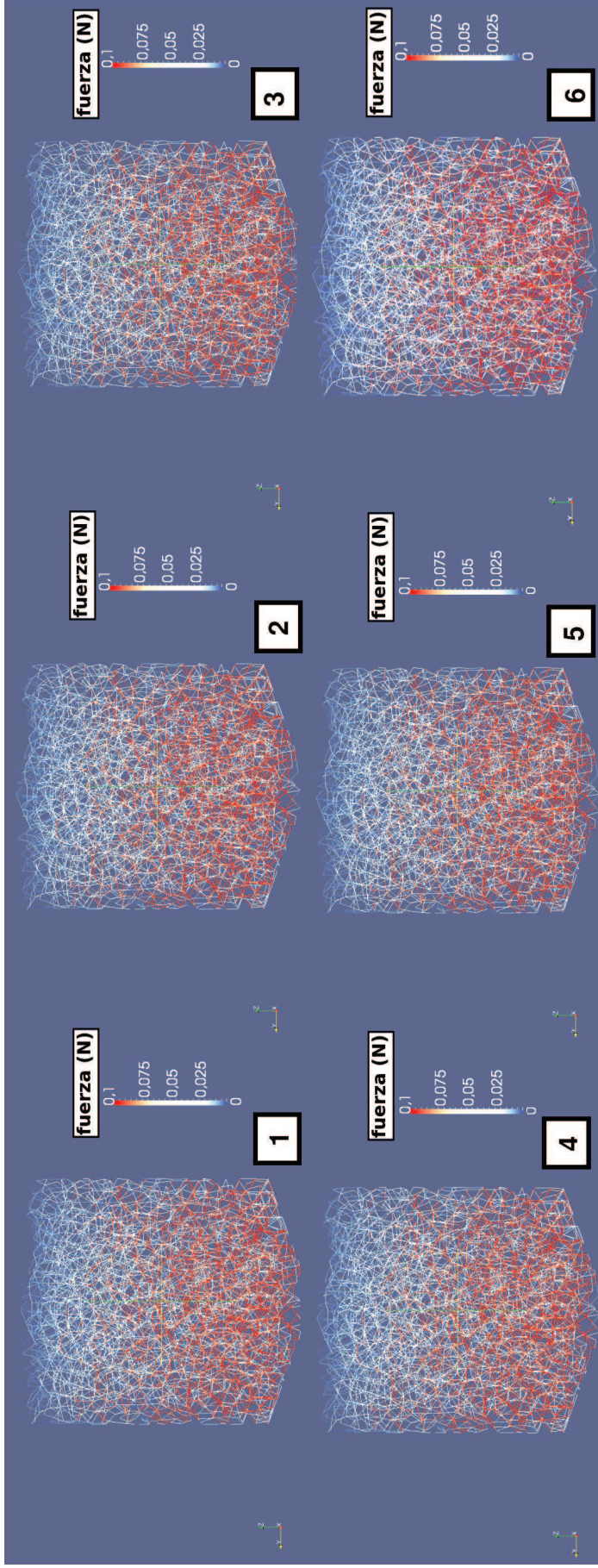
**Figura 5.63:** Presiones en las paredes del silo de 30 mm de diámetro que contiene partículas de maíz.- (a) Silo de fondo plano, (b) Tolva de 15°, (c) Tolva de 20°, (d) Tolva de 26°, (e) Tolva de 30°, (f) Tolva de 35°.



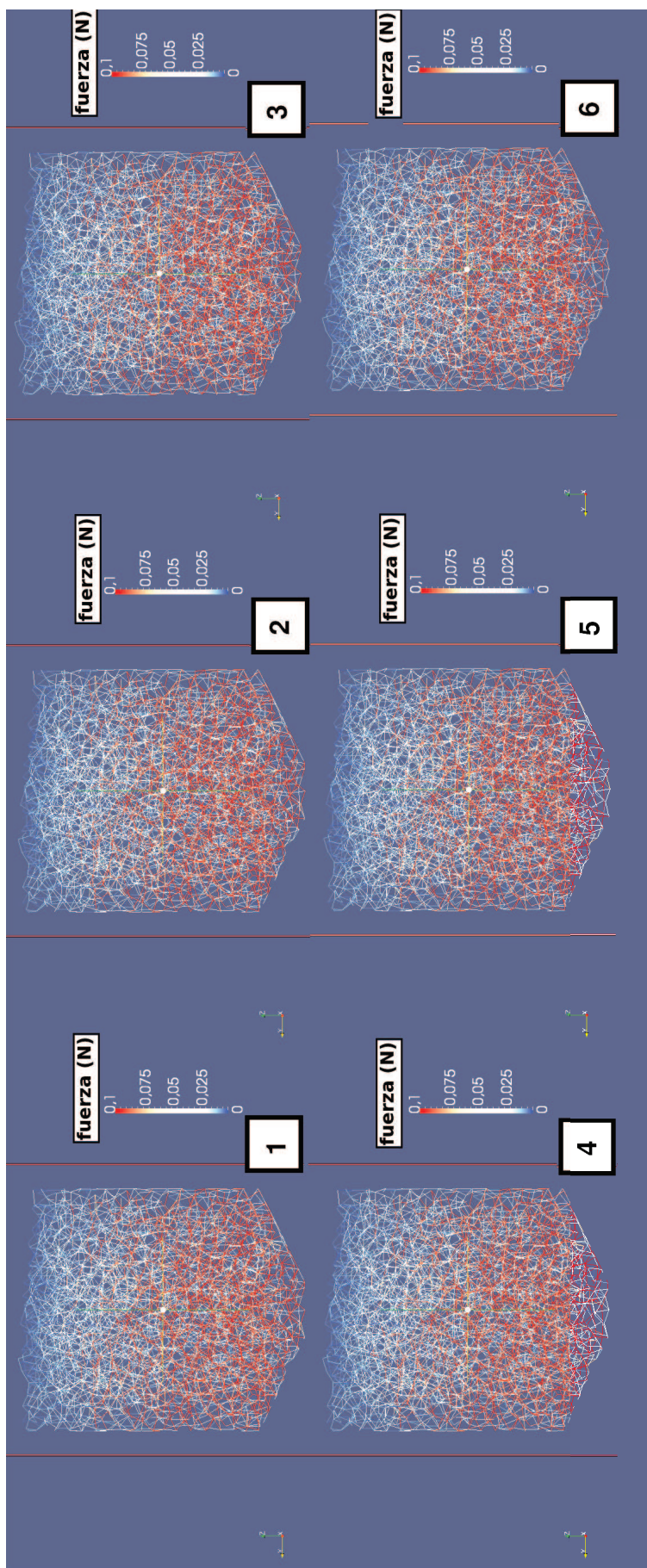
**Figura 5.64:** Silo descargando pellets de hierro con atasco.- silo de fondo plano radio 17.5 cm



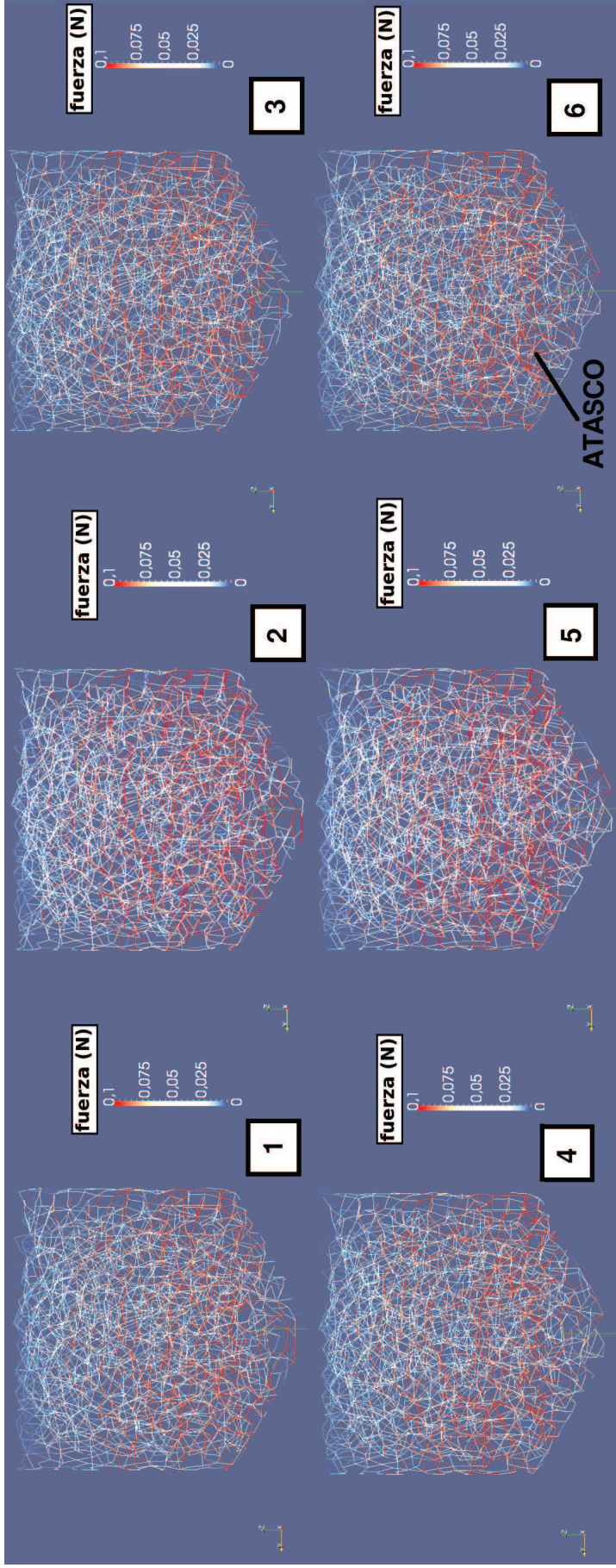
**Figura 5.65:** Silo descargando pellets de hierro con atasco.- silo con tolva de descarga de ángulo 15 grados y agujero de descarga de radio 17.5 cm



**Figura 5.66:** Silo descargando pellets de hierro con atasco.Silo con tolva de descarga de ángulo 20 grados y agujero de descarga de radio 17.5 cm

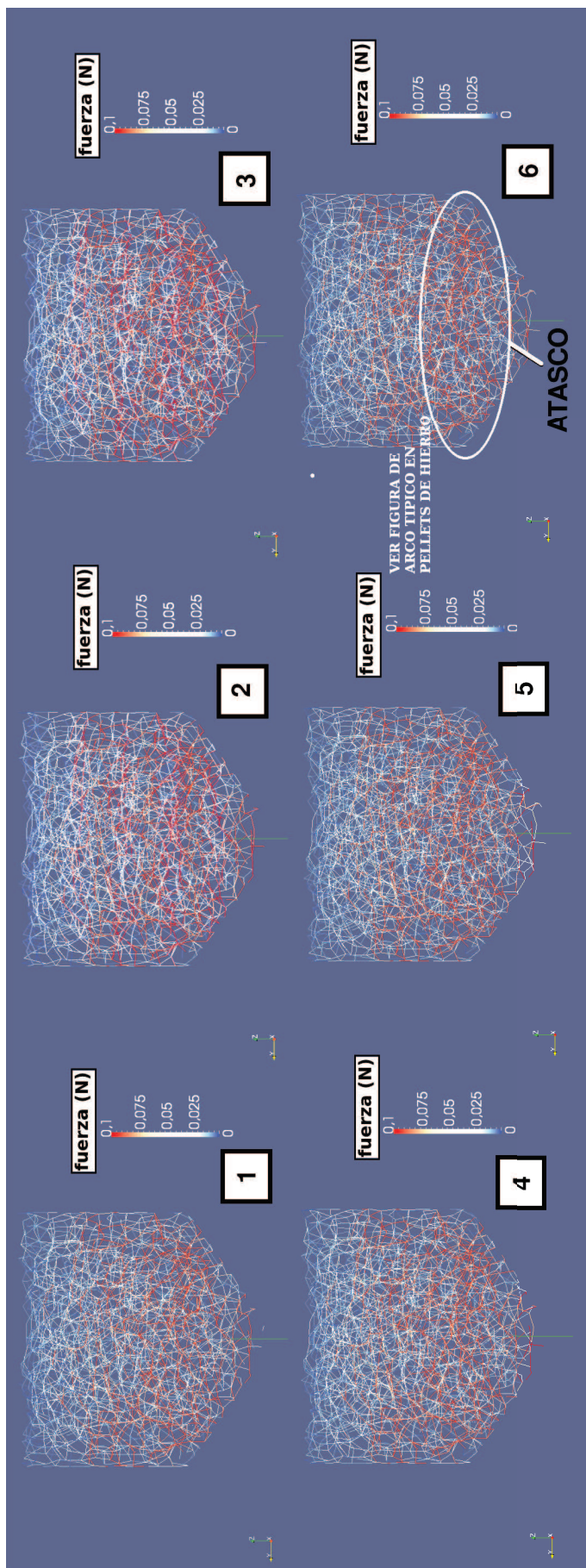


**Figura 5.67:** Silo descargando pellets de hierro con atasco. Silo con tolva de descarga de ángulo 26 grados y agujero de descarga de radio 17.5 cm



**Figura 5.68:** Silo descargando pellets de hierro con atasco. Silo con tolva de descarga de ángulo 30 grados y agujero de descarga de radio 17.5 cm





**Figura 5.69:** Silo descargando pellets de hierro con atasco. Silo con tova de descarga de ángulo 35 grados y agujero de descarga de radio 17.5 cm

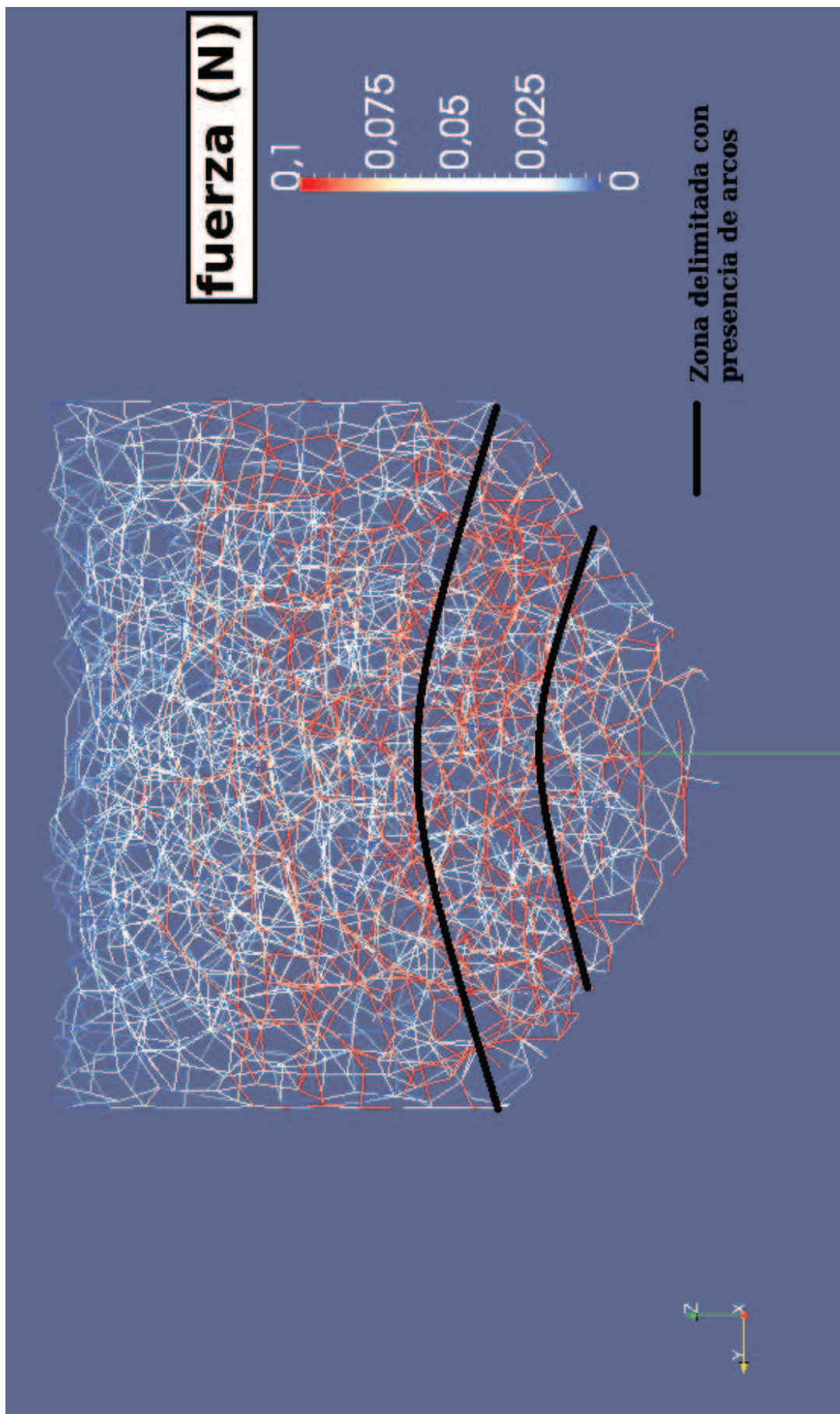
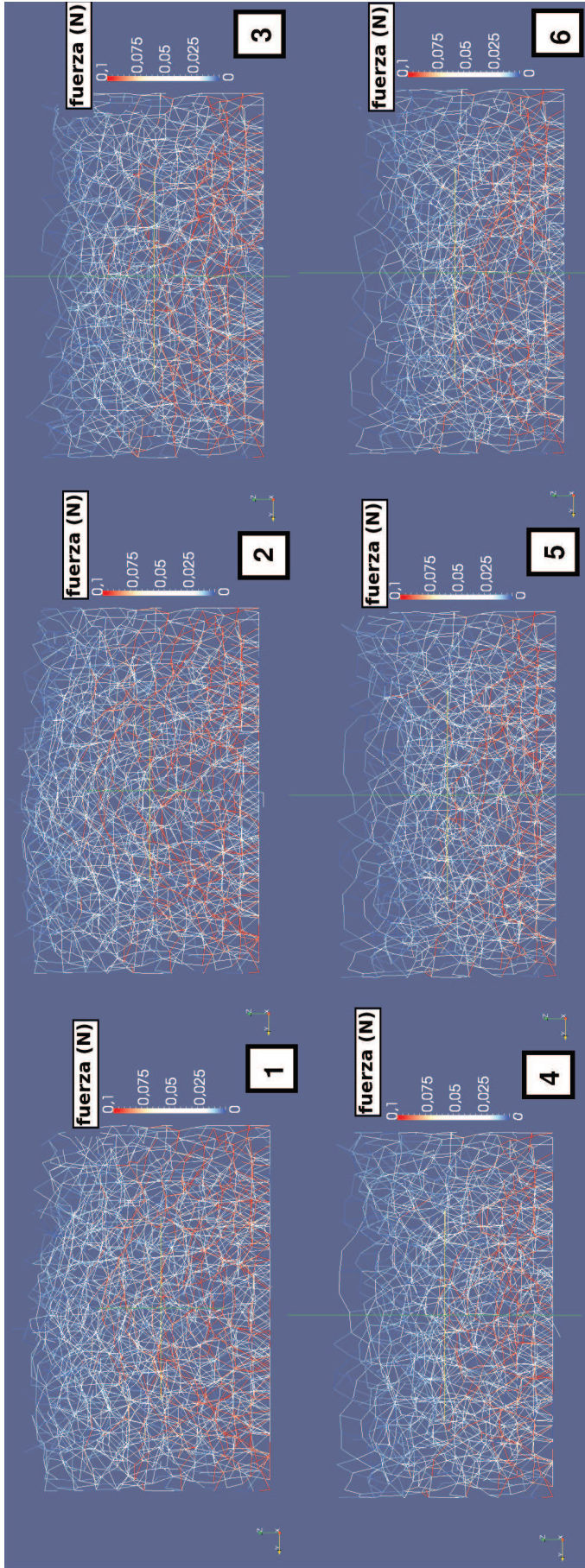
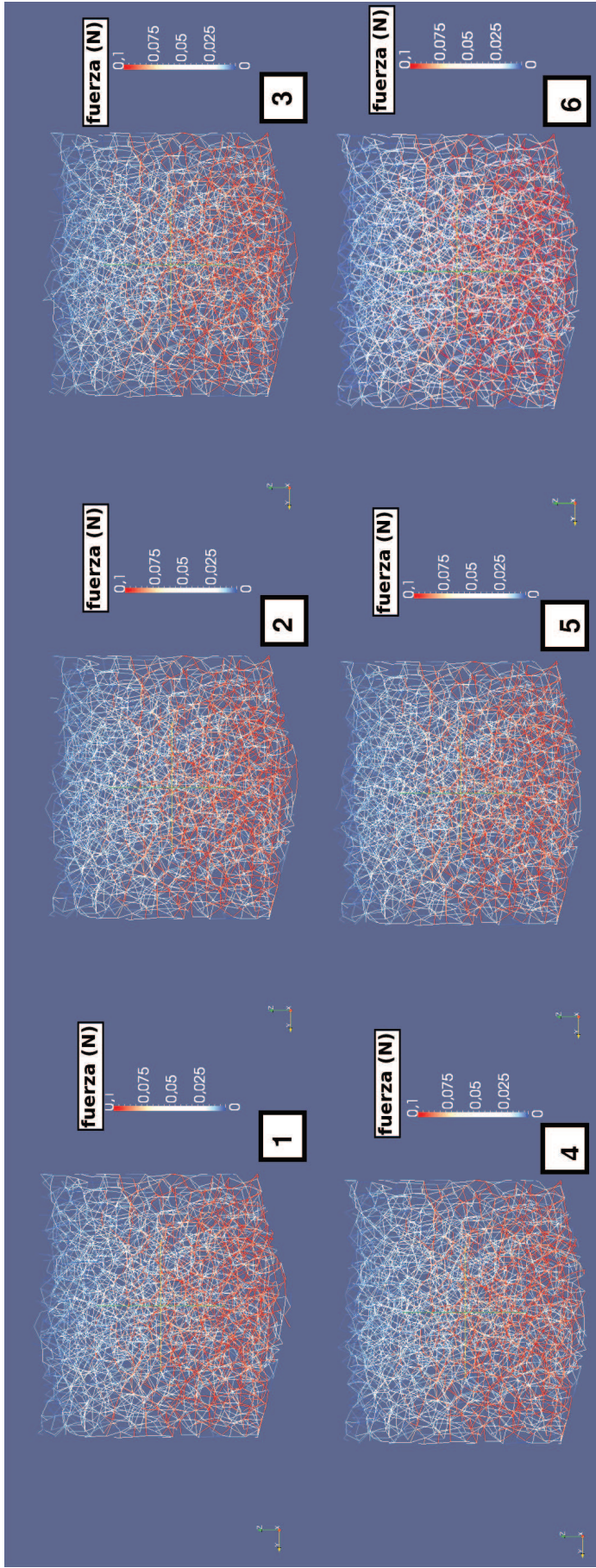


Figura 5.70: Cadenas de fuerza típicas en un atasco de pellets de hierro

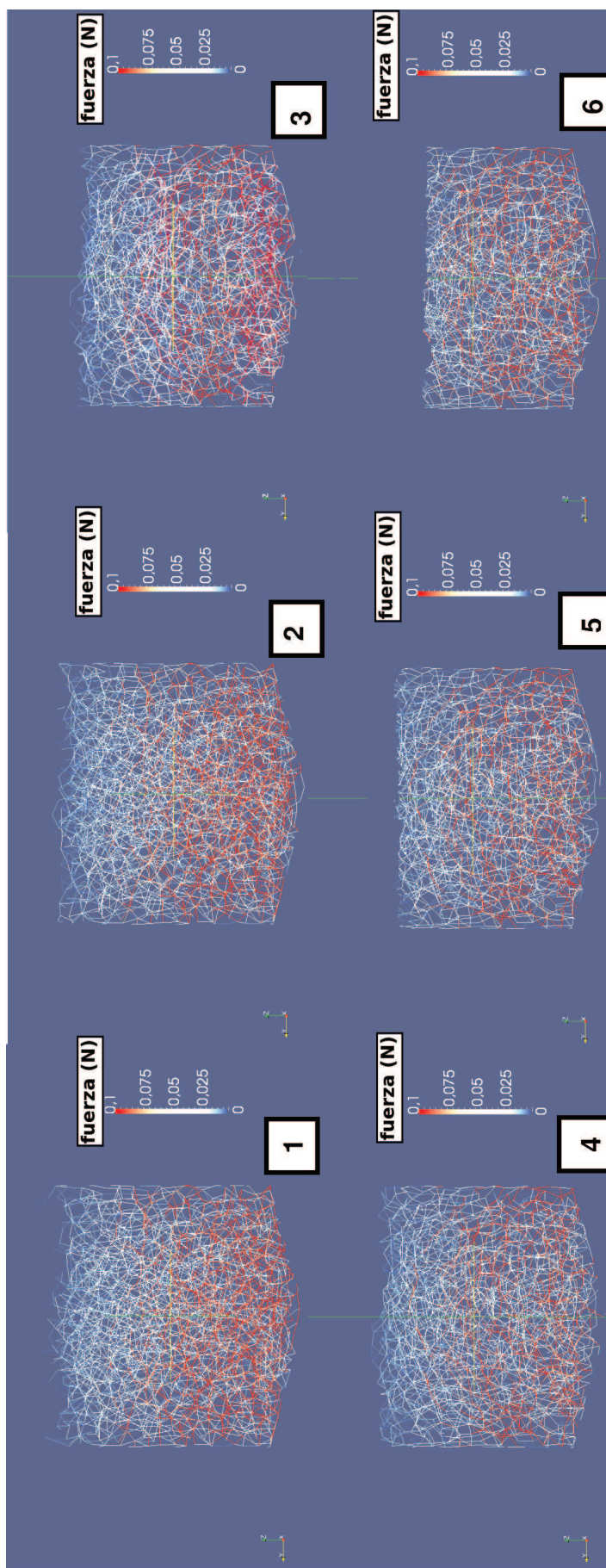


**Figura 5.71:** Silo descargando pellets de hierro sin atasco. Silo de fondo plano radio 20 cm

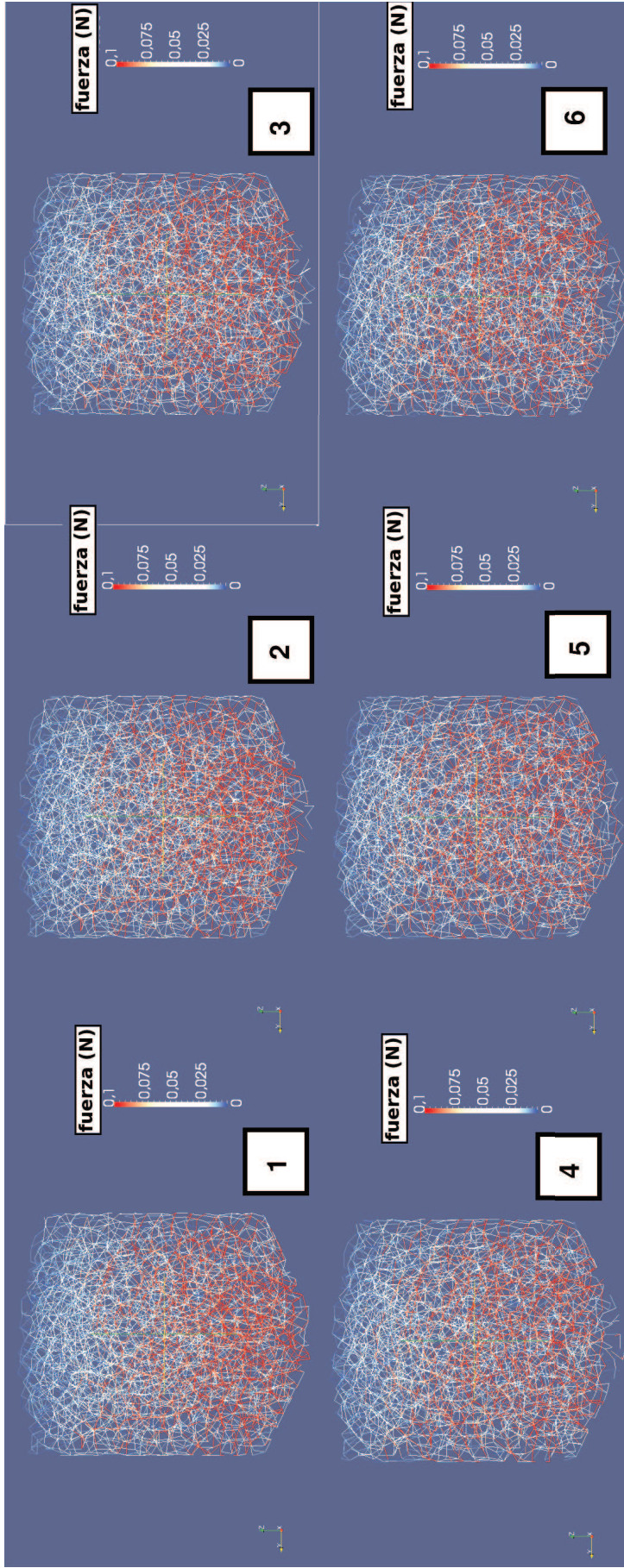


**Figura 5.72:** Silo descargando pellets de hierro sin atasco. Silo con tolva de descarga de ángulo 15 grados y agujero de descarga de radio 20

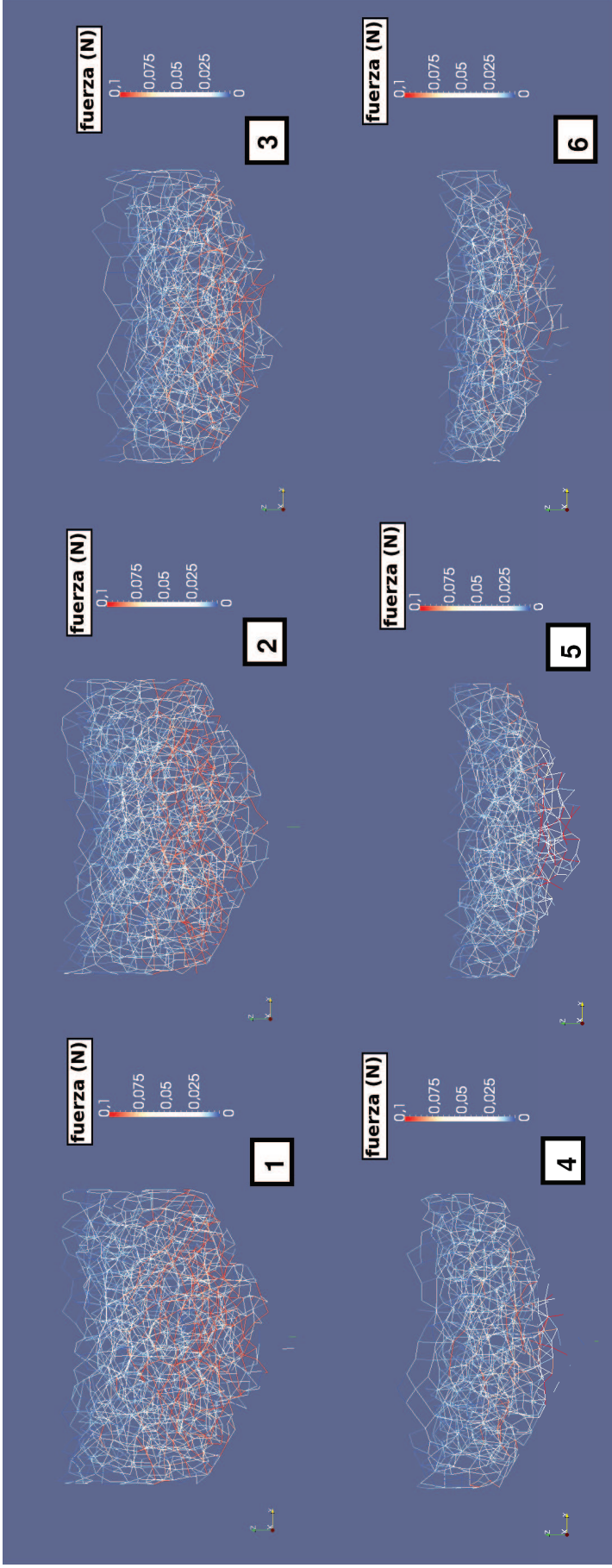
cm



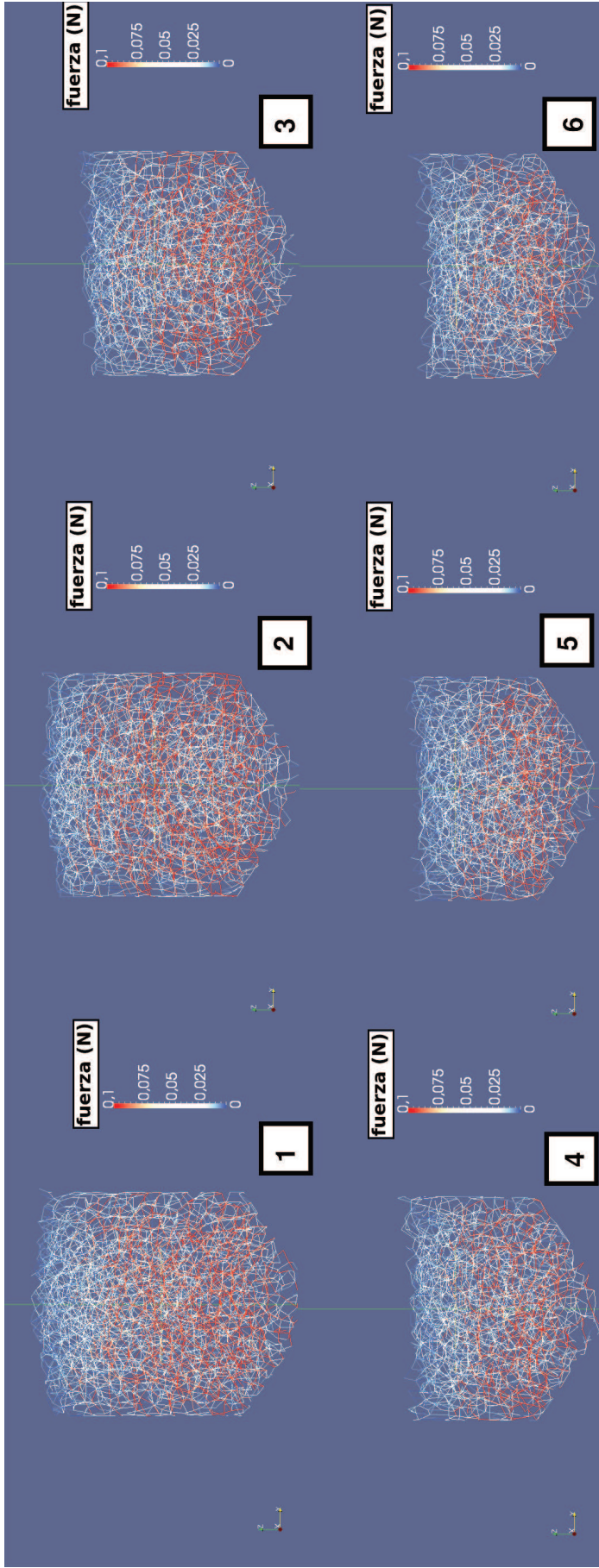
**Figura 5.73:** Silo descargando pellets de hierro sin atasco. Silo con tolva de descarga de ángulo 20 grados y agujero de descarga de radio 20 cm



**Figura 5.74:** Silo descargando pellets de hierro sin atasco. Silo con tolva de descarga de ángulo 26 grados y agujero de descarga de radio 20 cm

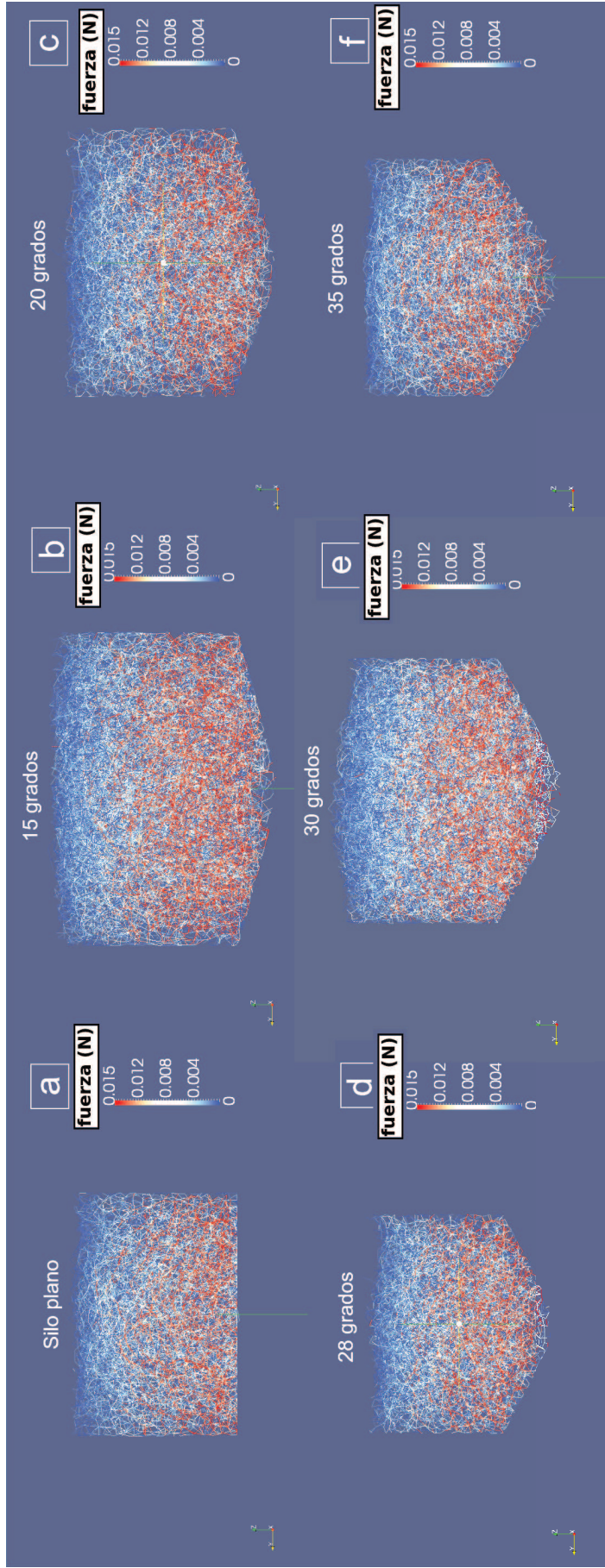


**Figura 5.75:** Silo descargando pellets de hierro sin atasco. Silo con tolva de descarga de ángulo 30 grados y agujero de descarga de radio 20 cm



**Figura 5.76:** Silo descargando pellets de hierro sin atasco. Silo con tolva de descarga de ángulo 35 grados y agujero de descarga de radio 20 cm





**Figura 5.77:** Fuerzas entre partículas para las diferentes distribuciones de silos.- (a) Silo de fondo plano, (b) Tolva de 15°, (c) Tolva de 20°, (d) Tolva de 28°, (e) Tolva de 30°, (f) Tolva de 35°.

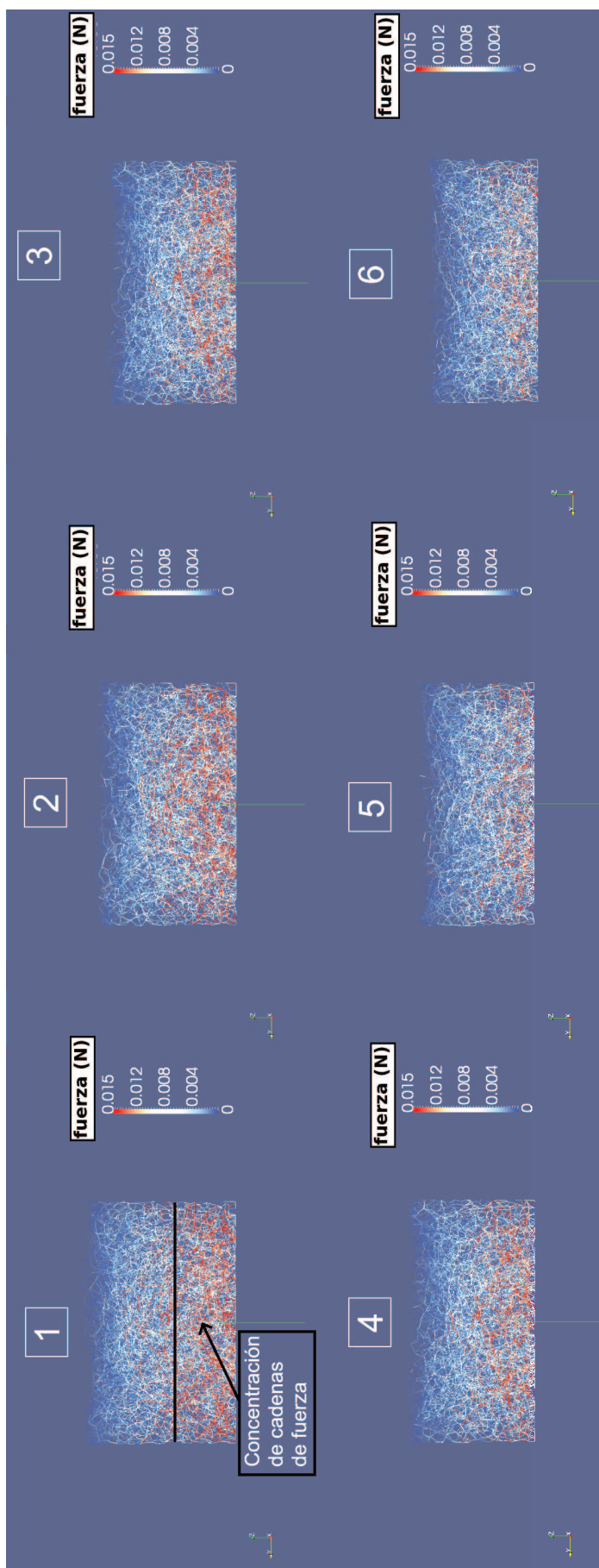


Figura 5.78: Fuerzas entre partículas de maíz en silo plano y agujero de descarga de diámetro 30 mm

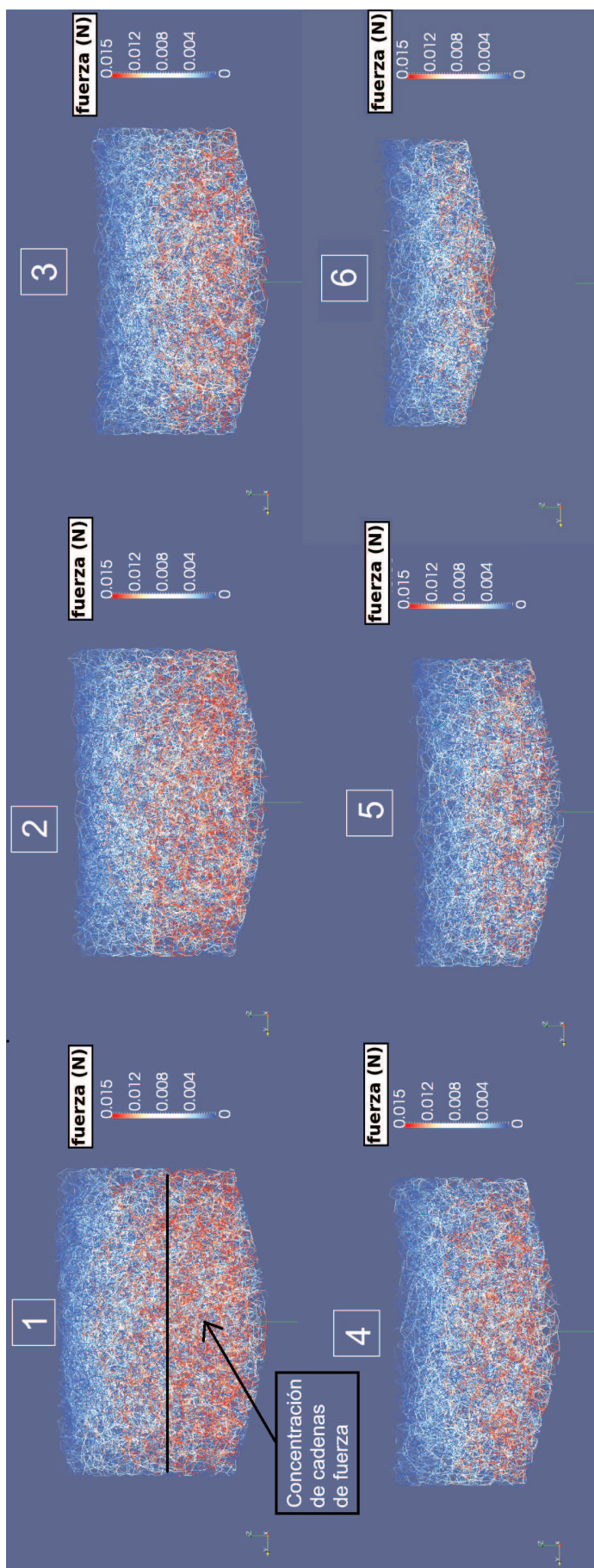


Figura 5.79: Fuerzas entre partículas de maíz en silo con tolva de 15 grados y agujero de descarga de diámetro 30 mm

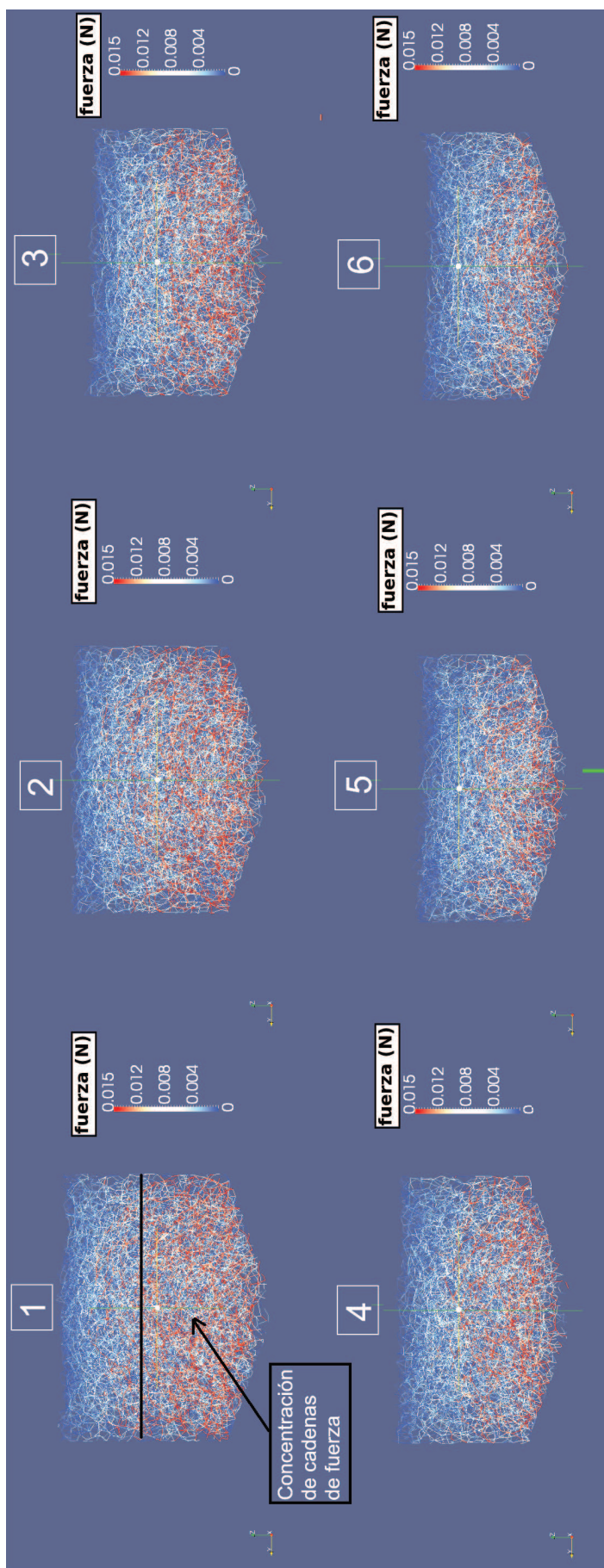


Figura 5.80: Fuerzas entre partículas de maíz en silo con tolva de 20 grados y agujero de descarga de diámetro 30 mm

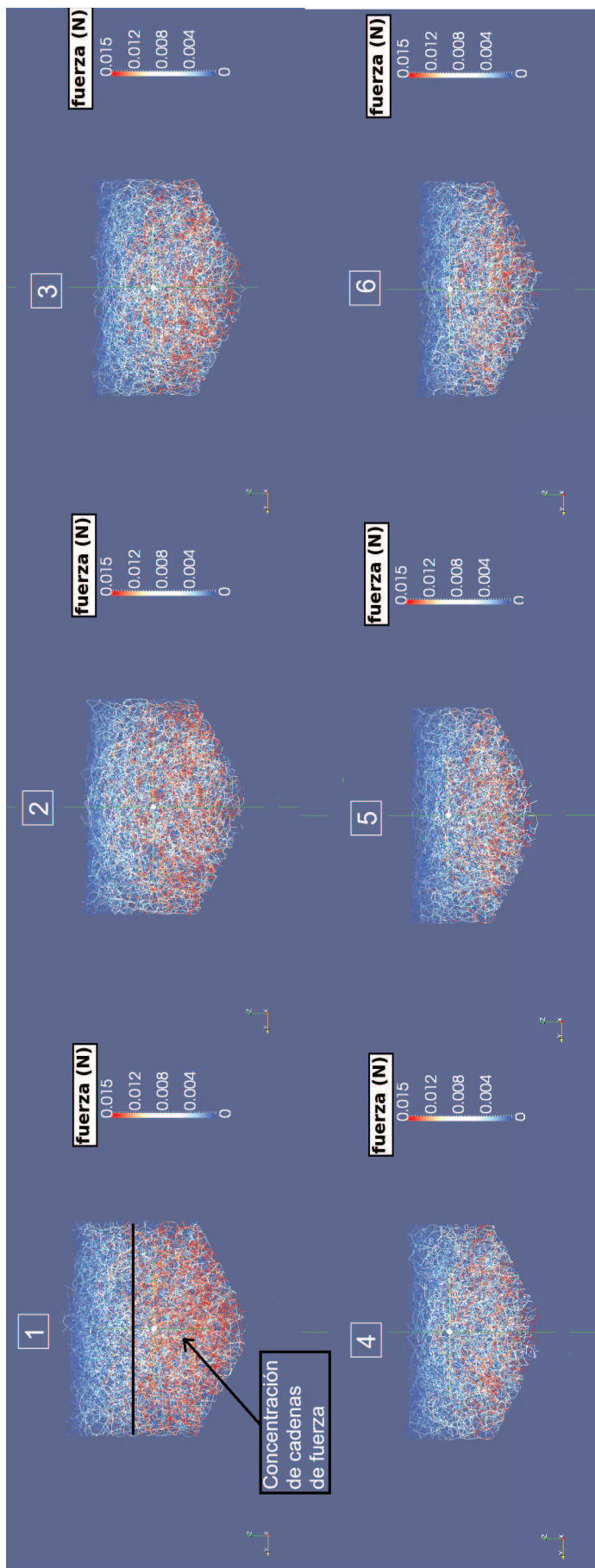


Figura 5.81: Fuerzas entre partículas de maíz en silo con tolva de 28 grados y agujero de descarga de diámetro 30 mm

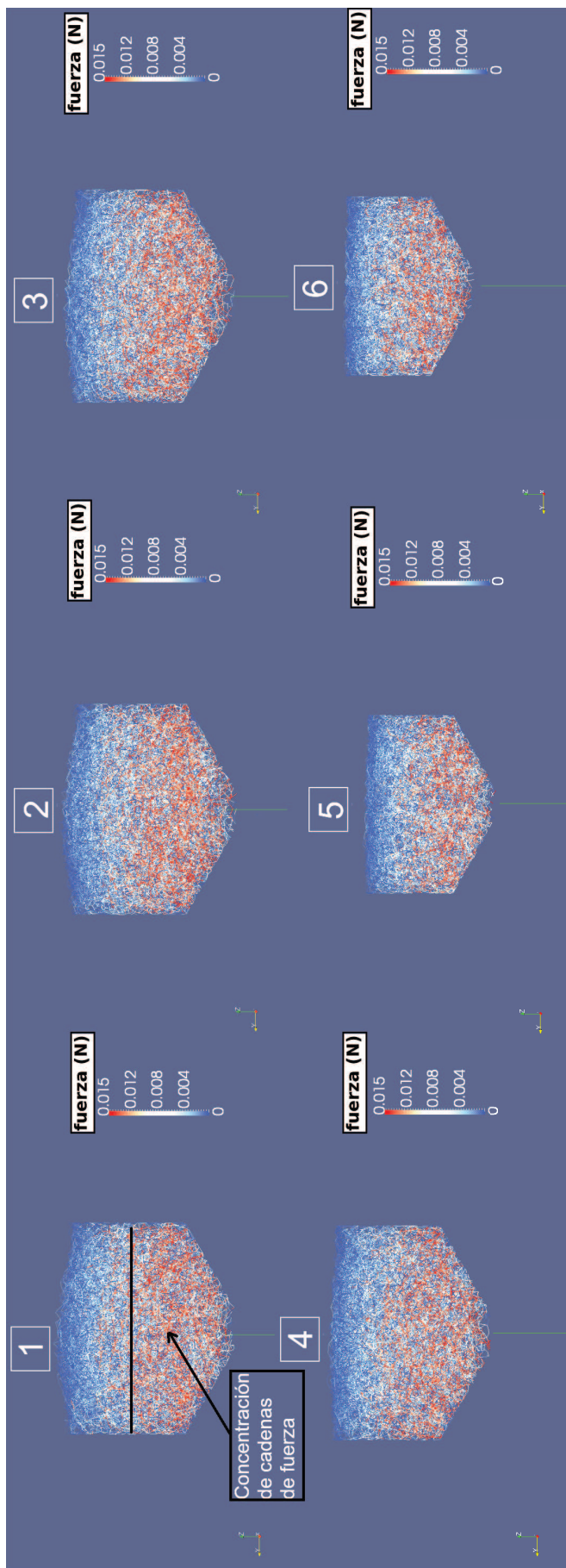
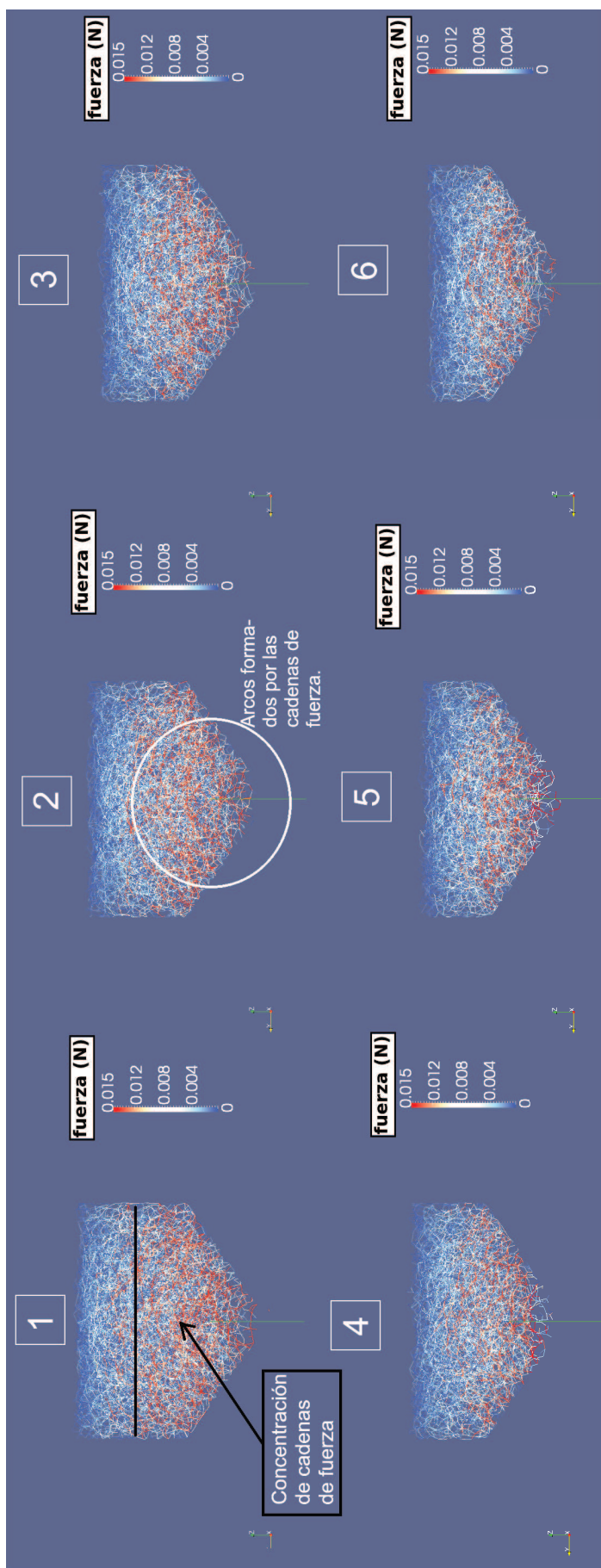
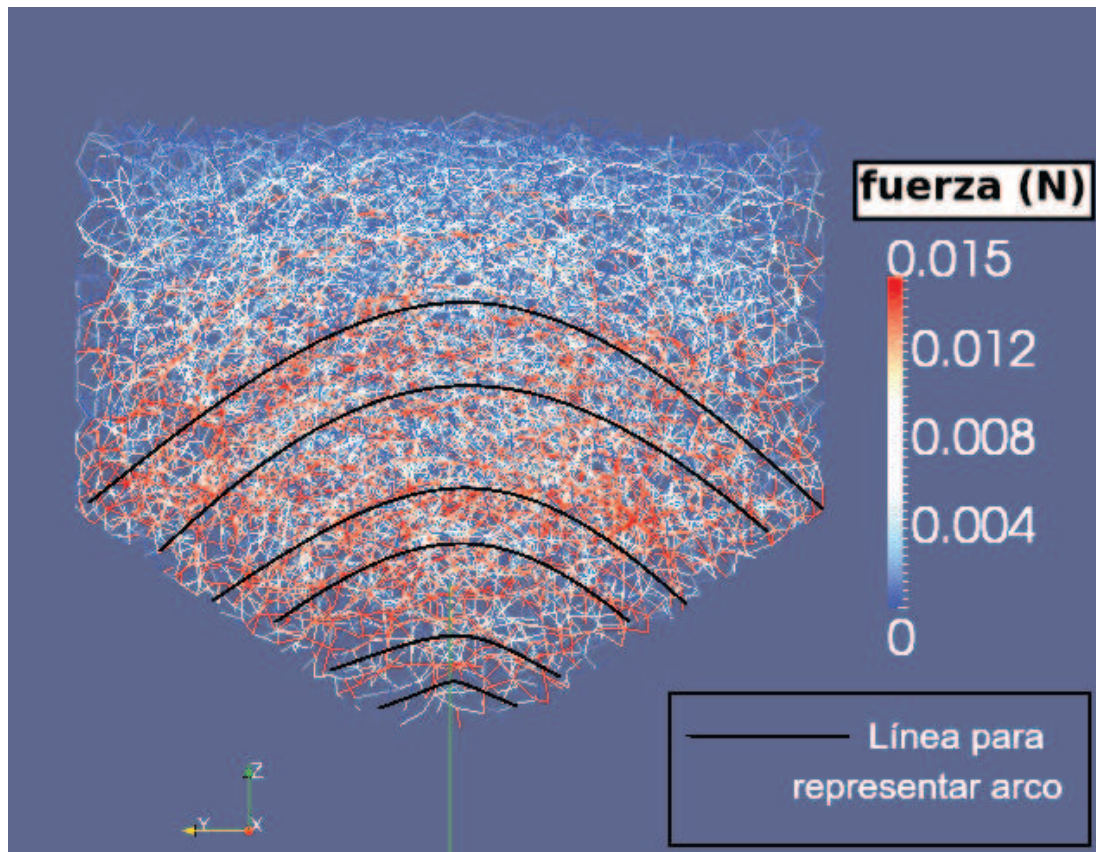


Figura 5.82: Fuerzas entre partículas de maíz en silo con tolva de 30 grados y agujero de descarga de diámetro 30 mm



**Figura 5.83:** Fuerzas entre partículas de maíz en silo con tolva de 35 grados y agujero de descarga de diámetro 30 mm



**Figura 5.84:** Arco formado por la transmisión de cadenas de fuerzas en silo de 35 grados de tolva y agujero de descarga 30 mm de diámetro



# CAPÍTULO 6

## CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

### 6.1. CONCLUSIONES

A continuación se presenta las conclusiones relevantes obtenidas del Modelamiento y simulación del flujo de descarga de material granular en silos. Se consiguió formular resultados que posibilitan responder los objetivos planteados al inicio del proyecto. Los resultados obtenidos se los alcanzó luego de ejecutadas simulaciones a nivel micro-mecánico modificando los parámetros descritos en el capítulo 5.

1. El objetivo general que consiste en modelar y simular desde una perspectiva micro-mecánica el material granular almacenado en silos fue alcanzado en este proyecto. Su solución fue planteada a partir de conceptos fundamentales del modelamiento discreto.
2. La teoría que describe las generalidades del material granular se ha descrito en detalle en el capítulo 2. Este desarrollo conceptual ha ocasionado responder lo planteado en el objetivo describir los conceptos fundamentales del Método del Elemento Discreto.
  - a) El Método del Elemento Discreto considera cada una de las partículas componentes de un sistema, para analizar su mutua interacción y su efecto en un ensamble granular.

- b) Existen diversas propiedades que definen tanto la estructura individual como el comportamiento en conglomerado de las partículas.
  - c) La granulometría que define la distribución y tamaño de las partículas, puede ser representada en un ensamble granular mediante el Método del Elemento Discreto.
3. Conjuntamente a la granulometría, los parámetros físicos y mecánicos del material, permitieron la formulación de ensambles de partículas. Se generó modelos discretos para representar las partículas de pellets de hierro y maíz. Esta acción ha suscitado alcanzar el objetivo generar ensambles de partículas.
  4. El análisis discreto de silos es del tipo transitorio. Es decir, el estado del sistema varía con el paso del tiempo. En el caso de silos los resultados concernientes a velocidades y posiciones de partículas varían en cada instante. Esta característica intrínseca del Método del Elemento Discreto lo diferencia de otros métodos convencionales como el FEM, particularmente en el estudio de silos. Además, la interacción partícula-partícula no puede ser cuantificada en régimen estacionario. En el capítulo 3, se especifica las consideraciones realizadas para analizar silos por medio de métodos continuos.
  5. Para mantener la estabilidad del tiempo en las simulaciones por DEM, el incremento que se especifica es de magnitud baja de alrededor  $10^{-6}$ s. Para su selección debe considerarse el tipo de modelo que se empleará durante el modelamiento, ya sea Hertz o Rayleigh. Además, propiedades mecánicas como el módulo de elasticidad de la partícula modifican la estimación del incremento de tiempo.
  6. El tamaño del agujero de descarga que se obtuvo por DEM es menor al tamaño recomendado por Ballaz (2005). El valor determinado por Ballaz fue de 4.94 veces el diámetro de la partícula. La proporción determinada en este estudio fue de 4 veces el tamaño de la partícula, para ensambles monodispersos. En sistemas polidispersos se halló una relación de 3.16 veces

el diámetro de la partícula de mayor tamaño. En base a lo expuesto se puede decir que un ensamble monodisperso requiere un agujero de descarga mayor que un sistema polidisperso. Al comparar dos partículas de pellets de hierro del mismo diámetro y dos de maíz con diferentes diámetros, se diferencia que el diámetro del agujero de descarga para las partículas de pellets de hierro es mayor.

7. La forma de las partículas queda limitada a únicamente esféricas, debido al alto costo computacional que requiere la simulación de formas reales del material granular. Esta limitación responde al estado del arte en DEM.
8. El ángulo de reposo del material granular está definido teóricamente por su coeficiente de fricción estático. En este proyecto se estudió la formación del ángulo de reposo de partículas sobre una superficie fija a través del Método del Elemento Discreto. Se adquirió los siguientes resultados:
  - a) Según Brown (2007) el ángulo de reposo de los pellets de hierro es  $26^\circ$  ( $\mu_{estatico} = 0,487$ ). Ejecutada la simulación por DEM se obtuvo un ángulo del material depositado igual a  $26^\circ$ . Al comparar el valor teórico con el determinado numéricamente se nota que el ángulo es  $26^\circ$  para cada caso.
  - b) En el caso del maíz se cumple también lo descrito anteriormente. Tanto el valor tabulado por Moya (2002)  $27^\circ$  como el generado por la simulación ( $\alpha = 27$ ) se asemejan.
9. El ángulo de la tolva es un factor esencial que afecta la magnitud de fuerzas, velocidades, presiones, esfuerzos cortantes y deformaciones promedio en el silo. Como se expuso en el capítulo 5, estos resultados tenían un comportamiento variante dentro del silo. A continuación se resume los efectos hallados de la interacción de partículas con el silo:
  - a) La fuerza, esfuerzos cortantes y deformaciones promedio se incrementan con el aumento de inclinación de la tolva hasta que el cono del silo alcanza una pendiente igual al ángulo de reposo del material. Luego de superar este límite las magnitudes disminuyen.

- b) La presión en las paredes originada por las partículas almacenadas dentro del silo disminuye con el incremento de la pendiente de la tolva. En este caso particular no se observó efecto producido por el ángulo de reposo del material.
  - c) La velocidad presenta una tendencia diferente a la que presentan los esfuerzos cortantes, deformaciones promedio y fuerza entre partículas. Su valor decrece con el aumento de inclinación de la tolva. Este efecto permanece hasta que la pendiente de la tolva alcanza el ángulo de reposo del material. Superado este límite (ángulo de reposo) las partículas comienzan a fluir más rápidamente fuera del silo.
  - d) La dirección de la velocidad de las partículas inmediatamente después de salir del silo, está determinada por el ángulo de inclinación de la tolva.
10. Al incrementar la pendiente de la tolva respecto al ángulo de reposo del material se mejora el flujo granular. Esto fue comprobado en las simulaciones realizadas con pellets de hierro. El atascamiento ocurre más rápido si el ángulo de la tolva es menor al ángulo de reposo. El silo con tolva de 35 ° de inclinación tardó 1.4 s en atascarse, mientras el silo de fondo plano se atascó en 0.4 s.
11. Para el maíz y los pellets de hierro el tipo de flujo que se da durante su descarga es del tipo flujo concentrado ("Funnel Flow"). Las partículas en las paredes del silo permanecen quietas durante la descarga de material. Teóricamente el flujo concentrado se da cuando el coeficiente de fricción entre partículas y pared es bajo en relación al coeficiente de fricción entre partículas.
12. Durante la descarga del material granular del silo, se puede observar la formación de arcos. Cuando la intensidad del arco es mayor a la fuerza de empuje de las partículas durante el desalojo de material, se producen los atascos. Este efecto fue observado en las distintas simulaciones realizadas en este trabajo. La probabilidad de estancamiento de material durante la

descarga de aumenta cuando la inclinación de la tolva del silo es menor al ángulo de reposo del material granular almacenado.

## 6.2. RECOMENDACIONES

- Para estudiar las deformaciones promedio, velocidades de descarga es necesario establecer un volumen de control que permita la comparación de resultados. El volumen de control debe ser ubicado en la región donde se produce el mayor movimiento de partículas. En el caso de silos la región idónea para la ubicación del sistema de control es en la zona correspondiente al agujero de descarga. Esta selección se realizó debido al tipo de flujo que se presentó en las simulaciones, el denominado “Funnel Flow”.
- En base al criterio de Rayleigh para determinar el incremento de tiempo (time step) en una simulación por DEM, debe considerarse la magnitud del módulo de Elasticidad para mantener estabilidad en los tiempos de simulación. Mientras mayor sea el módulo de elasticidad menor será el incremento de tiempo requerido para el procesamiento de resultados.
- El uso del modelamiento y simulaciones discretas es recomendable para problemas ingenieriles en los cuales la interacción de las partículas componentes del ensamble granular interactúan en cada instante de tiempo.
- Para seleccionar el tamaño de grano adecuado es recomendable la realización de ensayos granulométricos que permitan determinar los parámetros adecuados para el modelamiento de material granular en el silo.
- El Método del Elemento Discreto es una herramienta computacional que estudia la interacción en conjunto e individual de un ensamble de partículas. Su uso es recomendable en problemas ingenieriles como:
  - La compactación de suelos, la remoción de tierra puede ser estudiada y optimizada mediante la formulación de modelos discretos.
  - Efectos climáticos como la nieve y el granizo, y su acción sobre el techo de una determinada estructura.

- La selección de un incremento de tiempo adecuado depende de los modelos de contacto de Hertz y la teoría de energía de Rayleigh. Para correr una simulación de DEM se debe considerar estas teorías para seleccionar un tiempo de simulación correcto y evitar problemas de estabilidad durante la ejecución del script o durante el análisis de resultados.

### 6.3. TRABAJO A FUTURO

Este proyecto de titulación sirve como punto de partida en la realización de análisis a nivel micro-mecánico en el estudio de silos.

Para complementar lo expuesto en la investigación sobre el flujo de descarga de material granular en silos, puede establecerse varias condiciones que modifiquen los resultados obtenidos. Entre las consideraciones que pueden afectar lo obtenido en este trabajo se puede citar lo siguiente:

1. Considerar la forma real de las partículas.
2. Modificar las propiedades físicas y mecánicas de la partícula, para estudiar su influencia en la descarga de silos.
3. Estudiar la distribución de densidades en el silo.
4. Modificar la geometría del silo para mejorar la descarga del material granular.
5. Utilizar computadores con capacidad de procesamiento en paralelo, para aumentar el tamaño del silo y por ende el número de partículas que pueden ser almacenadas.
6. Modificar parámetros estructurales del silo que permitan mejorar su dimensionamiento a nivel macroescala.

## Referencias

- Akin, J. (2005). *Finite Element Analysis with error estimators* (1.<sup>a</sup> ed.; E. Butterworth-Heinemann, Ed.). London: Elsevier Butterworth-Heinemann.
- Alauddin, M., y Sohrabuddin, A. (1995). Design forces and moments in circular silos based on finite element analysis. *Journal of the Civil Engineering Division, CE23*(1), 59–89.
- Allen, J., Jackson, J., y McDowell, D. (1970). *Osborne Reynolds and Engineering Science Today* (1.<sup>a</sup> ed.). London: Manchester University Press.
- Amir, K. (2005). *Computational Plasticity in Powder Forming Processes* (1.<sup>a</sup> ed.). Amsterdam: Elsevier. Descargado de [http://en.wikipedia.org/wiki/Mohr%E2%80%93Coulomb\\_theory](http://en.wikipedia.org/wiki/Mohr%E2%80%93Coulomb_theory)
- Amir, P. (2005). *Mohr Coulomb Theory*. Descargado de [http://en.wikipedia.org/wiki/Mohr\0T1\textendashCoulomb\\_theory](http://en.wikipedia.org/wiki/Mohr\0T1\textendashCoulomb_theory)
- Andrade, J., Avila, C., Hall, S., Lenoir, N., y Viggiani, G. (2011, febrero). Multiscale modeling and characterization of granular matter: From grain kinematics to continuum mechanics. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 59*(2), 237–250. Descargado de <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0022509610002243> doi: 10.1016/j.jmps.2010.10.009
- Andrade, J., Lim, K., Ávila, C., y Vlahinic, I. (2012). Granular elemento method for computational particle mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 241-244*, 262–274.
- ANSI/ASAE, D. (1998). *Density, Specific Gravity, and Mass-Moisture Relationships of grain for storage* (Inf. Téc.). New York: American National Standards Institute USA. Descargado de <http://webcache.googleusercontent.com/search?q=cache:47i0sgMfnuQJ:140.112.94.11/~dsfon/graindrying/ASAE/501.pdf+&hl=es-419&gl=ec>
- Askeland, D. (2011). *The Science and Engineering of Materials* (6.<sup>a</sup> ed.; C. learning, Ed.). Stamford.
- Awrejcewicz, J. (2012). *Advances in Mechanics and Mathematics: Classical Mechanics: Dynamics* (1.<sup>a</sup> ed.; Springer, Ed.). Lodz:

- Springer. Descargado de <http://books.google.com.ec/books?id=EGOREVe4F1MC&pg=PA258&dq=restitution+coefficient+iron+iron&hl=es&sa=X&ei=5-1UK3hBKaz0QGX34GIDA&ved=0CE4Q6AEwBg#v=onepage&q=restitutioncoefficientironiron&f=false>
- Ayuga, F. (1995). Los empujes del material almacenado en silos. *Informes de la Construcción*, 46(436), 27–34. Descargado de <http://informesdelaconstruccion.revistas.csic.es/index.php/informesdelaconstruccion/article/viewArticle/1082>
- Baars, S. V. (1995). *Discrete element modelling of granular materials* (Inf. Téc.). Delft: Delft University of Technology.
- Baba Ahmend, I., Nsom, B., Allal, A., y Ghomari, F. (2010). Stress distribution during a silo filling or a discharging process. *Nature & Technology*, 3, 29–36. Descargado de [http://193.194.82.199/RevueNatec/Art\\_03\\_04.pdf](http://193.194.82.199/RevueNatec/Art_03_04.pdf)
- Babié, M. (1988). *Discrete Particle Numerical Simulation of Granular Material Behavior*. Tesis Doctoral no publicada, Clarkson University, New York.
- Ballaz, I. (2005). *Flujo y atascos de un medio granular en la descarga de silos*. Tesis Doctoral no publicada, Universidad de Navarra. Descargado de <http://fisica.unav.es/publicaciones/Tesis/Zuriguel.pdf>
- Bamforth, P., Chrisholm, D., y Gibbs, J. (2012). *Properties of concrete*. Descargado de [http://en.wikipedia.org/wiki/Properties\\_of\\_concrete](http://en.wikipedia.org/wiki/Properties_of_concrete)
- Boac, J. M. (2010). *Quality changes, dust generation, and commingling during grain elevator handling*. Tesis Doctoral no publicada, Kansas state university.
- Botz, J., Loudon, C., Barger, B., Olafsen, J., y Steeples, D. (2003). *Ángulo de reposo*. Descargado de [http://en.wikipedia.org/wiki/Angle\\_of\\_repose](http://en.wikipedia.org/wiki/Angle_of_repose)
- Brown, J. (2007). *Numerical analysis of silo discharge*. Tesis Doctoral no publicada, LUND University. Descargado de <http://www.byggmek.lth.se/fileadmin/byggnadsmekanik/publications/tvsm5000/web5151.pdf>
- Buckman, H., y Brady, N. (1960). *Bulk density*. Descargado de [http://en.wikipedia.org/wiki/Bulk\\_density](http://en.wikipedia.org/wiki/Bulk_density)
- Carnicero, A. (2001). *Introducción al Método de los Elementos Finitos*. Buenos Aires.



- Cheng, X., y Zhang, Q. (2003). An Arch-Based Model for Predicting Dynamic Pressure during Silo Discharge. *ASABE*, 52(6), 14.
- Cundall, P., y Strack, D. (1979). A discrete numerical model for granular assemblies. *Géotechnique*, 29(1), 20.
- Doran, B., Koksai, H., Polat, Z., y Karakoc, C. (1998). *The Use of "Drucker-Prager Criterion in the Analysis of Reinforced Concrete Members by Finite Elements*. Cluj-Napoca: Facultatea de constructii.
- Drucker, D., y Prager, W. (1952). Soil mechanics and plastic analysis for limit design. *Quarterly of Applied Mathematics*, 10(2), 157–165. Descargado de [http://en.wikipedia.org/wiki/Drucker\0T1\textendashPrager\\_yield\\_criterion](http://en.wikipedia.org/wiki/Drucker\0T1\textendashPrager_yield_criterion)
- Elaskar, S., y Godoy, L. (2001). Simulación numérica del flujo de materiales granulares usando el concepto de estado crítico. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para cálculo y diseño en ingeniería*, 17(1), 19–36. Descargado de <http://upcommons.upc.edu/handle/2099/3382>
- Fernández, D. (2010). *Determinación de parámetros utilizados en las simulaciones d.e.m.* Tesis Doctoral no publicada, Universidad Politécnica de Madrid.
- Fine. (2010). *Drucker-Prager*. Descargado de <http://www.finesoftware.es/software-geotecnico/ayuda/mef/drucker-prager/>
- Goodman, M. A., y Cowin, S. C. (1972). A continuum theory for granular materials. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 44(4), 249–266. Descargado de <http://dx.doi.org/10.1007/BF00284326>
- Gubert, X. A. (2006). *Mecánica del medio continuo en la ingeniería* (Primera ed.). Barcelona: Ediciones UPC.
- Holzapfel, G. (2000). *Nonlinear Solid Mechanics: A Continuum Approach for Engineering* (1.<sup>a</sup> ed.). Austria: Wiley John and Sons.
- Ileleji, K., y Zhou, B. (2008, octubre). The angle of repose of bulk corn stover particles. *Powder Technology*, 187(2), 110–118. Descargado de <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S003259100800082X> doi: 10.1016/j.powtec.2008.01.029
- Jianzheng, Z. (2007). *Arbitrary Lagrangian-Eulerian Method*. Descargado de [http://www.me.sc.edu/research/jzuo/Contents/ALE/ALE\\_1.htm](http://www.me.sc.edu/research/jzuo/Contents/ALE/ALE_1.htm)

- Kelly, P. (2008). 8.3 Yield Criteria in Three Dimensional Plasticity. En *Solid mechanics* (4.<sup>a</sup> ed., pp. 259–279). Dublin.
- Kloss, C. (2010). Discrete Element Method. En (pp. 1–30).
- Kurinaka, H., y Hayakawa, H. (2004). *Coeficiente de restitución*. Descargado de [http://en.wikipedia.org/wiki/Coefficient\\_of\\_restitution](http://en.wikipedia.org/wiki/Coefficient_of_restitution)
- Lambe, W. (1997). *Clasificación granulométrica*. Descargado de [http://es.wikipedia.org/wiki/Clasificaci\\_penalty@M\hskip\z@skip\unhbox\voidb@x\bgroup\let\unhbox\voidb@x\setbox\@tempboxa\hbox{o\global\mathchardef\accent@spacefactor\spacefactor}\accent19o\egroup\spacefactor\accent@spacefactor\penalty\@M\hskip\z@skip\setbox\@tempboxa\hbox{o\global\mathchardef\accent@spacefactor\spacefactor}\spacefactor\accent@spacefactorn-granulom\penalty\@M\hskip\z@skip\unhbox\voidb@x\bgroup\let\unhbox\voidb@x\setbox\@tempboxa\hbox{e\global\mathchardef\accent@spacefactor\spacefactor}\accent19e\egroup\spacefactor\accent@spacefactor\penalty\@M\hskip\z@skip\setbox\@tempboxa\hbox{e\global\mathchardef\accent@spacefactor\spacefactor}\spacefactor\accent@spacefactor\trica](http://es.wikipedia.org/wiki/Clasificaci_penalty@M\hskip\z@skip\unhbox\voidb@x\bgroup\let\unhbox\voidb@x\setbox\@tempboxa\hbox{o\global\mathchardef\accent@spacefactor\spacefactor}\accent19o\egroup\spacefactor\accent@spacefactor\penalty\@M\hskip\z@skip\setbox\@tempboxa\hbox{o\global\mathchardef\accent@spacefactor\spacefactor}\spacefactor\accent@spacefactorn-granulom\penalty\@M\hskip\z@skip\unhbox\voidb@x\bgroup\let\unhbox\voidb@x\setbox\@tempboxa\hbox{e\global\mathchardef\accent@spacefactor\spacefactor}\accent19e\egroup\spacefactor\accent@spacefactor\penalty\@M\hskip\z@skip\setbox\@tempboxa\hbox{e\global\mathchardef\accent@spacefactor\spacefactor}\spacefactor\accent@spacefactor\trica)
- Lira, C., y Pina, P. (2011). Granulometry on classified images of sand grains. *Journal of Coastal Research*, 1(64), 1697–1701. Descargado de [http://www.ics2011.pl/artic/SP64\\_1697-1701\\_C,Lira.pdf](http://www.ics2011.pl/artic/SP64_1697-1701_C,Lira.pdf)
- Maza, D., Pugnaroni, L. A., y Pastor, J. M. (1992). Jamming during the discharge of granular matter from a silo. *The American Physical Society*, 71(5), 1–25.
- McTigue, D. (1982). A non linear constitutive model to granular materials: application to gravity flow. *Journal of Applied Mechanics*, 49(2), 291–296.
- Moya, M., Ayuga, F., Guaita, M., y Aguado, P. (2002). Mechanical properties of granular agricultural materials considered in silos design. *ASCE*, 49(2), 479–489.
- O' Sullivan, C. (2010). *Particulate Discrete Element Modelling* (1.<sup>a</sup> ed.). New York: Spon Press.
- O'Sullivan, C., Butlanska, J., y Cheung, G. (2010, junio). Calculating strain in 3D DEM simulations. *IOP Conference Se-*

- ries: Materials Science and Engineering*, 10(012076), 1–10. Descargado de <http://stacks.iop.org/1757-899X/10/i=1/a=012076?key=crossref.77f0933dbea69e66c4df0d9b62231ff5> doi: 10.1088/1757-899X/10/1/012076
- Poschel, T., y Schwager, T. (2011). *Computational Granular Dynamics* (1.<sup>a</sup> ed.). Berlin: Springer.
- Purushothama, R. (2008). *Soil Mechanics & Foundation Engineering* (Primera ed.). Delhi: Pearson Education. Descargado de [http://books.google.com.ec/books?id=j9MhMcsGc0UC&pg=PA578&dq=restitution+coefficient+concrete+and+iron&hl=es&sa=X&ei=N-\\_lUPPvI-Lu0gHBsIDAAg&ved=0CDAQ6AEwAA#v=onepage&q=restitutioncoefficientconcreteandiron&f=false](http://books.google.com.ec/books?id=j9MhMcsGc0UC&pg=PA578&dq=restitution+coefficient+concrete+and+iron&hl=es&sa=X&ei=N-_lUPPvI-Lu0gHBsIDAAg&ved=0CDAQ6AEwAA#v=onepage&q=restitutioncoefficientconcreteandiron&f=false)
- Reis, P. M. (2004). *Dynamics of granular segregation in driven binary monolayers*. Tesis Doctoral no publicada, University of Manchester. Descargado de [http://webcache.googleusercontent.com/search?q=cache:6H6\\_XL75eIEJ:gibbs.engr.ccnycuny.edu/people/reis/publications/Thesis.pdf+%&cd=6&hl=es&ct=clnk&gl=ec](http://webcache.googleusercontent.com/search?q=cache:6H6_XL75eIEJ:gibbs.engr.ccnycuny.edu/people/reis/publications/Thesis.pdf+%&cd=6&hl=es&ct=clnk&gl=ec)
- Sadus, R. (2002). *Molecular Simulation of Fluids: Theory, Algorithms and Object-Oriented* (2.<sup>a</sup> ed.). Amsterdam: Elsevier.
- Savage, S. (1979). Gravity flow of cohesionless granular materials in chutes and channels. *Journal of Fluid Mechanics*, 92(1), 53–96.
- Schulze, D. (2010). *Flow Properties of Powders and Bulk Solids and Silo Design for Flow* (Vol. 1; Inf. Téc. n.º figure 3). Berlin: Schwedde + Schulze. Descargado de [https://docs.google.com/viewer?a=v&q=cache:a0cggHZREAwJ:www.dietmar-schulze.de/powtve.pdf+%&hl=es&gl=ec&pid=bl&srcid=ADGEESh804vFdHBNqZnkU26uy0nkT\\_2KE7h8CG4\\_yXnLprLzs-pF1VJXf9c9qVLVNYuXx2D\\_z7AbpqpXx4iMiZ-GR-FI0wqnL7YumitjQHL0D9P2iEqghr5TFejoyi0faYJXQdxM6aoA&sig=AHIEtbqKruGwLrwMEedDawXCRBQpw9D-uQ](https://docs.google.com/viewer?a=v&q=cache:a0cggHZREAwJ:www.dietmar-schulze.de/powtve.pdf+%&hl=es&gl=ec&pid=bl&srcid=ADGEESh804vFdHBNqZnkU26uy0nkT_2KE7h8CG4_yXnLprLzs-pF1VJXf9c9qVLVNYuXx2D_z7AbpqpXx4iMiZ-GR-FI0wqnL7YumitjQHL0D9P2iEqghr5TFejoyi0faYJXQdxM6aoA&sig=AHIEtbqKruGwLrwMEedDawXCRBQpw9D-uQ)
- Sfriso, A. (2004). *Caracterización Mecánica de Materiales Constituidos por partículas*. Tesis Doctoral no publicada, Universidad de Buenos Aires. Descargado de <http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/cbdv>

- .200490137/abstract
- Sykut, J., Molenda, M., y Horabik, J. (2007). Discrete element method (DEM) as a tool for investigating properties of granular materials. *Polish journal of food and nutrition sciences*, 57(2), 169–173.
- Tipler, M. (2003). *Coeficiente de rozamiento*. Descargado de <http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/dinamica/rozamiento/general/rozamiento.htm>
- Vázquez, E. G. (2006). *Simulación de empujes del material almacenado en silos con modelos de comportamiento del material no elásticos*. Tesis Doctoral no publicada, Universidad Politécnica de Madrid. Descargado de <http://dialnet.unirioja.es/servlet/tesis?codigo=2776>
- Velasco, S., y Martín, A. (2008). *Creación de scripts en Linux*. Madrid. Descargado de <https://docs.google.com/viewer?a=v&q=cache:0Svk35BygsUJ:www.ucm.es/info/aulasun/archivos/SCRIPTS.pdf+&hl=es&gl=ec&pid=bl&srcid=ADGEEShFi913fW9psLjkI4NjNDj9FehLp2CDhMQMSbe5Md7eXaZGmFrOxYVuG1pjGKnDVVPekY1HF6-o08a16bZBtT32wV7q0ReH9Z9GB6&sig=AHIEtbQZwOL41yxsnAgs-IqfbQMvUBELcQ>
- Verlet, L. (1967). *Verlet integration*. Descargado de [http://en.wikipedia.org/wiki/Verlet\\_integration#Applications](http://en.wikipedia.org/wiki/Verlet_integration#Applications)
- Zhu, H., Zhou, Z., Yang, R., y Yu, A. (2007). Discrete particle simulation of particles systems: Theoretical developments. *Chemical Engineering Science*, 62, 3378–3396.

# APÉNDICE A

## MODELO DEM

A continuación se describirá un código para el modelamiento DEM utilizando el software MatLab, en el cual se especifican las propiedades del material granular, condiciones de frontera, tipo de pared, etc.

El código a describirse consta de dos partes, la primera en la que se especifican las propiedades de las partículas y la otra en la que se especifica el comportamiento a nivel de conglomerado.

Para ingresar las propiedades a nivel de partícula se utiliza las siguientes líneas de código.

### A.1. PROPIEDADES DEL MATERIAL

$E=72 \cdot 10^9 / (ef^2)$ ;      Módulo de elasticidad

$G=29.8 \cdot 10^9 / (ef^2)$ ;      Módulo de corte

$\nu=(E-2 \cdot G)/(2 \cdot G)$ ;      Relación de Poisson

$\rho=2500 / (ef^3)$ ;       $kg/m^3$  DENSIDAD

$\alpha_{tsuji}=0.05$ ;      Parámetro de amortiguamiento

### A.2. DIÁMETRO DE LA PARTÍCULA

$d=0.0025 \cdot ef$ ;      diámetro

Como  $ef$  es igual a 1 el diámetro es igual a 0.0025 unidades de longitud.

### A.3. MASA

$$m = \pi/6 \cdot d^3 \cdot \rho; \quad \text{masa} = V \cdot \text{densidad}$$

La masa obtenida es de  $2,045 \cdot 10^{-5}$  unidades de masa.

### A.4. RIGIDEZ DURANTE LA COLISIÓN

$$k_p = \sqrt{d}/3 \cdot E / (1 - \nu^2); \quad \text{Rigidez}$$

El valor obtenido de  $k_p$  es  $1.25 \cdot 10^9$

### A.5. RIGIDEZ ENTRE LAS PAREDES Y LA PARTÍCULA

$$k_w = 2 \cdot \sqrt{d/2} / 3 \cdot E / (1 - \nu^2);$$

Se obtiene el siguiente valor de  $k_w$   $1.7738e+0.009$

### A.6. AMORTIGUAMIENTO

Para obtener la energía disipada se consideran los valores de la rigidez antes calculados, y el coeficiente de amortiguamiento.  $\eta_{Np.d} = \alpha_{tsuji} \cdot \sqrt{m \cdot k_p}$ ;  
Energía disipada por la partícula  $\eta_{Nw.d} = \alpha_{tsuji} \cdot \sqrt{m \cdot k_w}$ ;      Energía disipada en la pared

### A.7. DEFINICIÓN DE LA GEOMETRÍA

Se define la geometría como un cuadrilátero en dos dimensiones xy:

$$y_{\min} = 0 \cdot e_f; \quad \text{Fondo } y=0$$

$$y_{\max} = 1 \cdot e_f; \quad \text{tapa (top)}$$

$$x_{\min} = 0 \cdot e_f; \quad \text{izquierda}$$

$$x_{\max} = 1 \cdot e_f; \quad \text{Derecha}$$

## A.8. MALLADO

Debido a que la malla es de longitud 1 en x y 1 en y se divide esta longitud en 250 partes en las cuales se analizará al problema

$\Delta X = 1/250 \cdot \epsilon_f$ ;      250 divisiones en x

$\Delta Y = 1/250 \cdot \epsilon_f$ ;      250 divisiones en y

$\Delta X = 0.004$

$\Delta Y = 0.004$

Mediante estas divisiones se establece el mallado en la geometría.

## A.9. Celdas

Para poder determinar el valor de celdas en las dos direcciones se divide la longitud de los lados en x e y con el siguiente código:

$n_{cellX} = (x_{max} - x_{min}) / \Delta X$ ;      Celdas en x

$n_{cellY} = (y_{max} - y_{min}) / \Delta Y$ ;      Celdas en y

Hay 250 divisiones en cada dirección.

## A.10. GRAVEDAD

Posteriormente se define la aceleración de la gravitacional igual a  $9.8 \text{ m/s}^2$

$g_y = -9.81 \cdot \epsilon_f$ ;      Gravedad en la dirección y.

$g_x = 0$ ;      Gravedad en la dirección.

## A.11. NÚMERO DE PARTÍCULAS POR FILA

Con el siguiente código se define el número de partículas en el fondo de la geometría:

$n_P = 25 \cdot 100$ ;      Número de partículas

$n_{Rows} = 100$ ;      Número de filas

Hay 2500 partículas en el fondo de la geometría.

Ahora se considera la posición inicial de las partículas y su posición después de ser sometida a un determinado trabajo.

```
xi=[d:2*d:((nP/nRows-0.5)*2*d)]
```

```
x=xi+rand()*d/5;
```

```
for i=2:nRows,
```

```
    x=[x xi+rand()*d/5];
```

```
end
```

```
rowLen=length(x)/nRows;
```

Con esta parte de código se obtiene 250 posiciones iniciales y 250 posiciones finales aleatorias en la dirección x. Para obtener las posiciones en y se usa la siguiente parte del código la cual consiste en crear una matriz de 1\*2500 en la cual se van almacenando los valores de posición obtenido para cada partícula en su determinada columna.

```
y=zeros(1,nP)+(nRows+1)*d;
```

```
for i=0:nRows-1,
```

```
    y((rowLen*i+1):((1+i)*rowLen))=y((rowLen*i+1):((i+1)*rowLen))-1*d;
```

```
end
```

## A.12. VELOCIDADES

Las velocidades en la dirección x son cero y en la dirección y es igual a -4.4294

```
vX0=zeros(1,nP);
```

```
vY0=-sqrt(2*9.81*1)*ones(1,nP);
```

```
hidefig=1;
```

```
savefig=1;
```

```
savemat=1;
```

```
close all;
```

```
clear;
```

```
clc;
```



### A.13. IDENTIFICAR CONSTANTES

Para leer las constantes dentro del programa es requerido primero guardar al primer script como INIT\_DEM.m El código init sirve para llamar a algún valor previamente almacenado.

```
INIT_DEM;
```

### A.14. COMANDO CEIL

Este comando devuelve el valor entero más aproximado a un número decimal. Por medio de este comando (ceil) se determina el número máximo de partículas en una celda considerando al  $\Delta x$  y  $\Delta y$  que corresponde a la longitud de lado de cada celda y al diámetro de la partícula.

```
maxPCell=ceil(deltaX/d+2)*ceil(deltaY/d+2);
```

### A.15. PARTÍCULAS ALMACENADAS

Para identificar las partículas en una celda se crea una matriz de ceros en la cual se almacenan las partículas considerando el número de celdas tanto en x como en y y el número máximo de partículas que pueden ser almacenadas en una celda.

```
p_cell_list=zeros(ncellX,ncellY,maxPCell)
```

### A.16. TIMESTEP

Este parámetro es fundamental en la resolución de problemas que involucren material granular ya que mientras menor sea el tamaño de este parámetro mayor será la exactitud de los resultados requeridos.

```
tau=1.2*10(-60); tau=0.0000012
```

También se define en que instante termina la solución de este problema por medio de la siguiente línea de comando.

```
tEnd=0.06;
```

## A.17. VELOCIDAD MÁXIMA DE LA PARTÍCULA

Para determinar la velocidad máxima que la partícula adquiere por acción de la gravedad se toma en cuenta la siguiente ecuación:

$$v_f^2 = v_o^2 + 2 * a * d \quad (\text{A.1})$$

La velocidad inicial es cero y la aceleración es la gravitacional.

$$v_f^2 = 2 * g * h \quad (\text{A.2})$$

$$v_f = \sqrt{2 * g * h}$$

$v_{\text{max}} = \sqrt{2 * \sqrt{g_y^2 + g_x^2} * y_{\text{max}}}$ ;

Para determinar el tiempo que dura cada contacto entre partículas se considera la rigidez, velocidad, y la masa de las partículas.

$t_n = 3.21 * (m/kp)^{2/5} * v_{\text{max}}^{-1/5}$ ;

## A.18. INTEGRACIÓN DE NEWTON-FEYNMAN

Este método es utilizado cuando existen complicaciones por la presencia de la resistencia del aire o la variación de la altura por acción de la gravedad, ya que con el método de Newton-Feynman se obtiene resultados más confiables que con la integración de Euler.

Este método consiste en calcular la aceleración a la mitad del timestep para calcular la velocidad requerida a la final del time step.

$a_x = g_x * \text{ones}(1, nP)$ ;      aceleración en x

$a_y = g_y * \text{ones}(1, nP)$ ;      aceleración en y

$v_x = v_{x0} + a_x * \tau / 2$ ;      velocidad en x

$v_y = v_{y0} + a_y * \tau / 2$ ;      velocidad en y

Los resultados serán presentados en 1000 figuras que representan 1000 gráficas de resultados obtenidos. Los resultados que se obtendrán están dentro del rango comprendido entre tau y tEnd que son el primer timestep y el tiempo final de la

simulación, después de terminado un intervalo de tiempo se ubican las partículas en una determinada posición en una celda.

```
for t=tau:tau:tEnd,
```

```
    p_cell_list=zeros(ncellX,ncellY,maxPCell);
```

Establecido el límite de tiempo en el cual se almacenan las posiciones de la partícula.

Se evalúa después el contacto de cada partícula y se lo almacena en una matriz for p=1:nP;

```
    a_checked=zeros(1,nP);
```

Se definen los índices de contacto i e j los cuales representan la ubicación de la celda, se usa el comando ceil para obtener un número entero que representará a una determinada partícula.

Se utiliza el condicional if para identificar la posición de la partícula en las direcciones x e y.

```
i=ceil(x(p)/deltaX);j=ceil(y(p)/deltaY);
```

```
i2=i;i3=i;j2=j;j3=j;
```

```
if ((x(p)-(i-1)*deltaX)<d/2), i2=i-1.0;
```

```
elseif ((i*deltaX-x(p))<d/2), i3=i+1.0;
```

```
end;
```

```
if ((y(p)-(j-1)*deltaY)<d/2), j2=j-1.0;
```

```
elseif ((j*deltaY-y(p))<d/2), j3=j+1.0;
```

```
end;
```

Para determinar el contacto entre las partículas y la pared de la celda se define la posición de la partícula en las direcciones x e y, los condicionales if sirven para evaluar la ubicación de la partícula.

```
if x(p)<xmin+d/2, partícula choca con la pared izquierda
```

```
deltaN=xmin-x(p)+d/2;
```

```
Spring+Damper; nX=normal vector to the wall=eX
```

```
aX(p)=aX(p)+(kw*(deltaN)^(1.5)-(etaNw_d*deltaN^(0.25))*(vX(p)))/m;
```

```
i2=1;
```

```
elseif x(p)>xmax-d/2, partícula choca con la pared derecha
```

```
deltaN=x(p)-xmax+d/2;
```

```

aX(p)=aX(p)-(kw*(deltaN)^(1.5)+(etaNw_d*deltaN^(0.25))*(vX(p)))/m;
Spring+Damper;
i3=ncellX;
end;
if y(p)<ymin+d/2, partícula choca con el fondo de la celda
deltaN=ymin-y(p)+d/2;
aY(p)=aY(p)+(kw*(deltaN)^(1.5)-(etaNw_d*deltaN^(0.25))*(vY(p)))/m;
Spring+Damper;
j2=1;
elseif y(p)>ymin+d/2, partícula choca con la tapa de la celda
deltaN=y(p)-ymin+d/2;
aY(p)=aY(p)-(kw*(deltaN)^(1.5)+(etaNw_d*deltaN^(0.25))*(vY(p)))/m;
Spring+Damper;
j3=ncelly;
end

```

Los contactos entre la pared y la partícula son almacenados en ncellX y ncellY.

## A.19. CONTACTO ENTRE PARTÍCULAS

El contacto entre partículas consiste en evaluar una partícula en una determinada posición para luego compararla con otra en otra posición, para después almacenar los resultados obtenidos en la lista de contacto de partículas.

Para comparar que partículas están en contacto se utiliza el comparador while el cual compara el número de partículas almacenadas en cada celda con un comparador q=1 el cual va variando para determinar las partículas en contacto.

El comparador q sirve como un valor inicial que al cumplir una determinada condición almacena o no las propiedades de la matriz tanto como velocidad, fuerza, aceleración o posición.

```

for ii=i2:i3,
for jj=j2:j3,
q=1;
while(p_cell_list(ii,jj,q)≠0)&&q<maxCell,

```

```
p2=p_cell_list(ii,jj,q);
```

```
if a_checked(p2)≠0,
```

```
  a_temp=1;
```

```
else
```

```
  a_checked(p2)=1;
```

```
  dist=sqrt((x(p)-x(p2))^2+(y(p)-y(p2))^2);
```

Dentro del condicional if se coloca la siguiente línea  $dist < d$ , la cual especifica una distancia que servirá para determinar el traslape, si existe traslape se puede determinar la aceleración y fuerza entre las partículas en contacto.

```
if dist < d, Traslape
```

```
  deltaN=d-dist;
```

```
  etaNp=etaNp_d*deltaN^(0.25);
```

```
  nX=(x(p)-x(p2))/dist;
```

```
  nY=(y(p)-y(p2))/dist;
```

Fuerza de amortiguamiento, componente x

```
fX=kp*deltaN^(1.5)*nX-etaNp*(vX(p)-vX(p2))*nX^2;
```

Fuerza de amortiguamiento, componente y

```
fY=kp*deltaN^(1.5)*nY-etaNp*(vY(p)-vY(p2))*nY^2;
```

La siguiente línea de código sirve para determinar las aceleraciones de las partículas en contacto después de un determinado intervalo de tiempo en base a las fuerzas calculadas.

La aceleración  $aX(p)$  parte desde 0 hasta alcanzar un nuevo valor en cada intervalo de tiempo, de la misma manera  $aX(p2)$ ,  $aX(p)$  y  $aX(p2)$  representan la aceleración de cada una de las partículas en contacto.

```
aX(p)=aX(p)+fX/m;
```

```
aX(p2)=aX(p2)-fX/m;
```

```
aY(p)=aY(p)+fY/m;
```

```
aY(p2)=aY(p2)-fY/m;
```

```
end;
```

```
end;
```

```
q=q+1; Comparador q para determinar traslape
```

```
end;
```

```
end;
end
end;
```

## A.20. TRAYECTORIAS

Para determinar las trayectorias de las partículas se utiliza el método de integración de Leapfrog el cual consiste en usar un  $t - \Delta t$  para predecir la posición en un tiempo  $t + \Delta t$ , donde  $\Delta t$  es un intervalo de tiempo.

La mayor ventaja de este método numérico sobre métodos como el de Euler es que requiere menor capacidad de almacenamiento, con lo que se reduce el tiempo de integración.

Lo primero que se realiza es determinar las velocidades y posiciones por cada intervalo de tiempo (time step)

## A.21. Velocidad

$$\vec{v} = \vec{v} + \vec{a} * t \quad (\text{A.3})$$

## A.22. Posición

$$\vec{r} = \vec{r} + \vec{v} * t \quad (\text{A.4})$$

```
vX=vX+aX*tau;
```

```
vY=vY+aY*tau;
```

```
x=x+vX*tau;
```

```
y=y+vY*tau;
```

La última parte del código muestra como se presentan los resultados en gráficos que varían la posición de la partícula en función del tiempo, y se almacenan en una carpeta denominada video, se obtienen 1000 figuras, que varían cada

intervalo de tiempo (timestep) que presentan el ordenamiento de las partículas dentro de cada celda en la matriz p\_list.

```

if (mod(t,500*tau)==0),
figure;
if hidefig,
set(gcf,'Visible','off');
end;
for rr=1:nRows,
if mod(rr,2)==0,
plot(x(1+(rr-1)*rowLen:rr*rowLen),y(1+(rr-1)*rowLen:rr*rowLen),'.r',[-.05*ef,1.05*ef],[-.05*ef,1.05*ef]);
else
plot(x(1+(rr-1)*rowLen:rr*rowLen),y(1+(rr-1)*rowLen:rr*rowLen),'.b',[-.05*ef,1.05*ef],[-.05*ef,1.05*ef]);
end;
title(strcat('t=',num2str(t),'s'));
hold on;
end
axis equal;
if savefig,
saveas(gcf, strcat('video',num2str(picnr),'_t=',num2str(t,8),'.jpg'), 'jpg');
end;
delete(gcf);
picnr=picnr+1;
end;

```

# APÉNDICE B

## INSTALACIÓN SOFTWARE

En la figura B.4 se presenta un diagrama que resume la instalación de los programas utilizados en este proyecto.

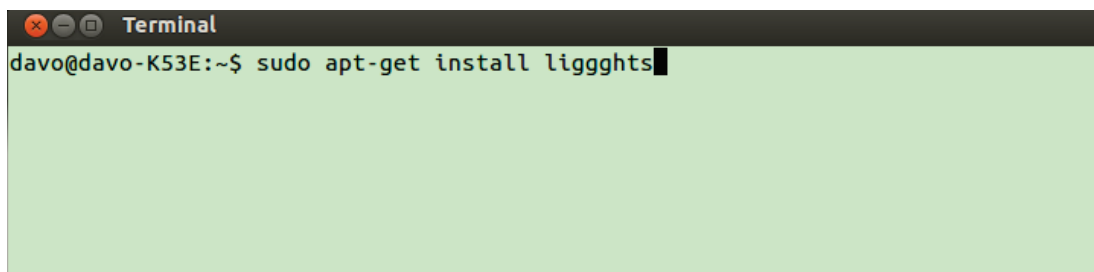
### B.1. LIGGGHTS

#### B.1.1. INSTALACIÓN

En la terminal de LINUX (Ctrl+Alt+T) se ingresa el siguiente código:

1. `sudo add-apt-repository ppa:liggghts-dev/ppa`
2. `sudo apt-get update`
3. `sudo apt-get install liggghts`

En la figura B.1 se presenta el ingreso de un comando en la terminal de Linux.



```
Terminal
davo@davo-K53E:~$ sudo apt-get install liggghts
```

**Figura B.1:** Terminal de Linux



## **B.1.2. COMANDOS BÁSICOS**

### **B.1.2.1. atom style**

Se define el tipo de partícula y forma que se utilizará durante la resolución de un problema.

Para el presente trabajo se empleará el tipo de partícula granular a la que le corresponde los siguientes atributos:

1. Diámetro
2. Densidad
3. Velocidad angular

### **B.1.2.2. atom modify**

Establece la cantidad de partículas a ser analizadas en un determinado núcleo de procesamiento en un computador, este comando es mas utilizado en clusters.

Para computador con procesamiento serial se utiliza el siguiente comando:

```
atom_modify map array
```

### **B.1.2.3. boundary**

Define las fronteras de la caja de simulación, las cuales pueden ser fijas o móviles. En el proyecto se definen fronteras fijas.

### **B.1.2.4. units**

Define el sistema de unidades que se empleará en la simulación, para el presente trabajo se usa el SI.

### **B.1.2.5. region**

Define el tamaño de la caja de simulación.

### **B.1.2.6. create box**

Crea la caja de simulación definida con el comando region.

### **B.1.2.7. neighbor**

Clasifica los contactos entre partículas.

### **B.1.2.8. fix**

Con este comando se define las propiedades componentes del material, se importa geometrías de programas tipo CAD, además se pueden definir propiedades como la gravedad, velocidad e la partícula,etc.

### **B.1.2.9. timestep**

Se especifica el tiempo de ejecución de cada simulación.

## **B.2. DUMP2FORCE**

En la figura B.5 se presenta un diagrama de flujo que resume la instalación del software que genera las cadenas de fuerza.

### **B.2.1. INSTALACIÓN**

Para visualizar cadenas de fuerza se requiere la instalación de varios complementos del sistema, que permitan generar imágenes de post procesamiento. La instalación de cada suplemento requerido se lista a continuación:

1. Fortran Compiler.
  - a) `sudo apt-get update`
  - b) `sudo apt-get install gfortran`
2. python-dev
  - a) `sudo apt-get install python-dev`

### 3. Numpy

- a) Descargar tarball de <http://www.scipy.org/Download>
- b) `cd <directorio descargado>`
- c) `tar xvzf numpy-1.3.0.tar.gz`
- d) `cd numpy-1.3.0`
- e) `python setup.py build`
- f) `python setup.py install`

### 4. Cython

- a) Descargar el tarball de <http://www.cython.org/#download>
- b) `cd <Directorio de descarga>`
- c) `tar xvzf Cython-0.16.tar.gz`
- d) `python setup.py install`

### 5. Evtk

- a) Descargar el tarball de <https://bitbucket.org/pauloh/pyevtk>
- b) `cd <Directorio de descarga>`
- c) `tar xvzf pauloh-pyevtk-0d26e31ddc8d.tar.gz`
- d) `python setup.py install`
- e) `python setup.py build --debug install --prefix=./tmp`
- f) `export PYTHONPATH=./tmp/lib/python2.7/site-packages/:  
$PYTHONPATH`

### 6. Dump2force

- a) Se lo descarga de <https://docs.google.com/file/d/0ByjsLm3KW1CBMmJWNWZMM3FTOGVNRFIhWjF1d1B6dw/edit#>
- b) Este código debe ser pegado en el directorio /src donde se ubica el software Pizza.

## B.2.2. COMANDO BÁSICO

Para arrancar el programa, es necesario ingresar a la carpeta que contiene el archivo de de fuerzas entre partículas. Posteriormente se ejecuta el comando siguiente en la terminal:

```
python -i /home/user/mylpp/src/dump2force.py dump.<Nombre del archivo generado en Liggghs>
```

En la figura B.2 se observa los directorios y el bloque empleado para elaborar cadenas de fuerza.

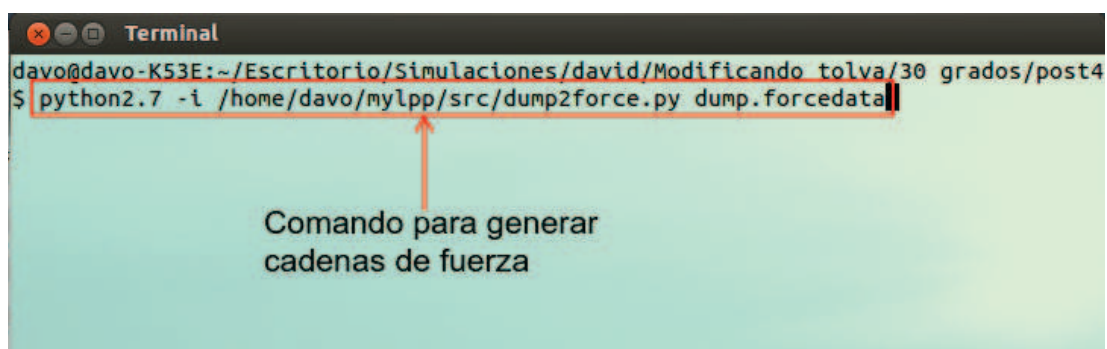


Figura B.2: Ejecución de Dump2force

## B.3. PIZZA

### B.3.1. INSTALACIÓN

El siguiente procedimiento debe ser seguido para instalar pizza.py en linux.

1. Descargar el archiva .tar de <http://www.liggghs.com/>
2. Trasladar el archivo descargado, de la carpeta Downloads a Home.
3. Mediante el siguiente comando en la terminal se ejecuta pizza.

```
python -i /home/user(nombre definido por el usuario)/pizza/src/python.py
```

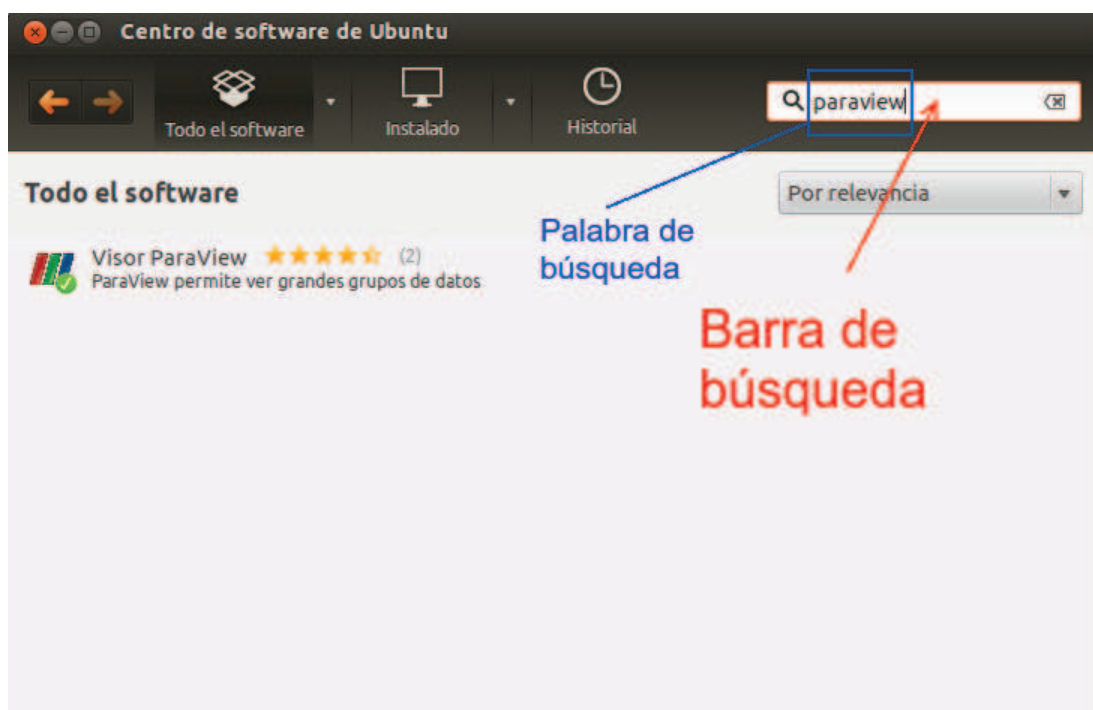
### B.3.2. COMANDOS BÁSICOS

Para generar los archivos .vtk, se ingresa los comandos siguientes de manera secuencial:

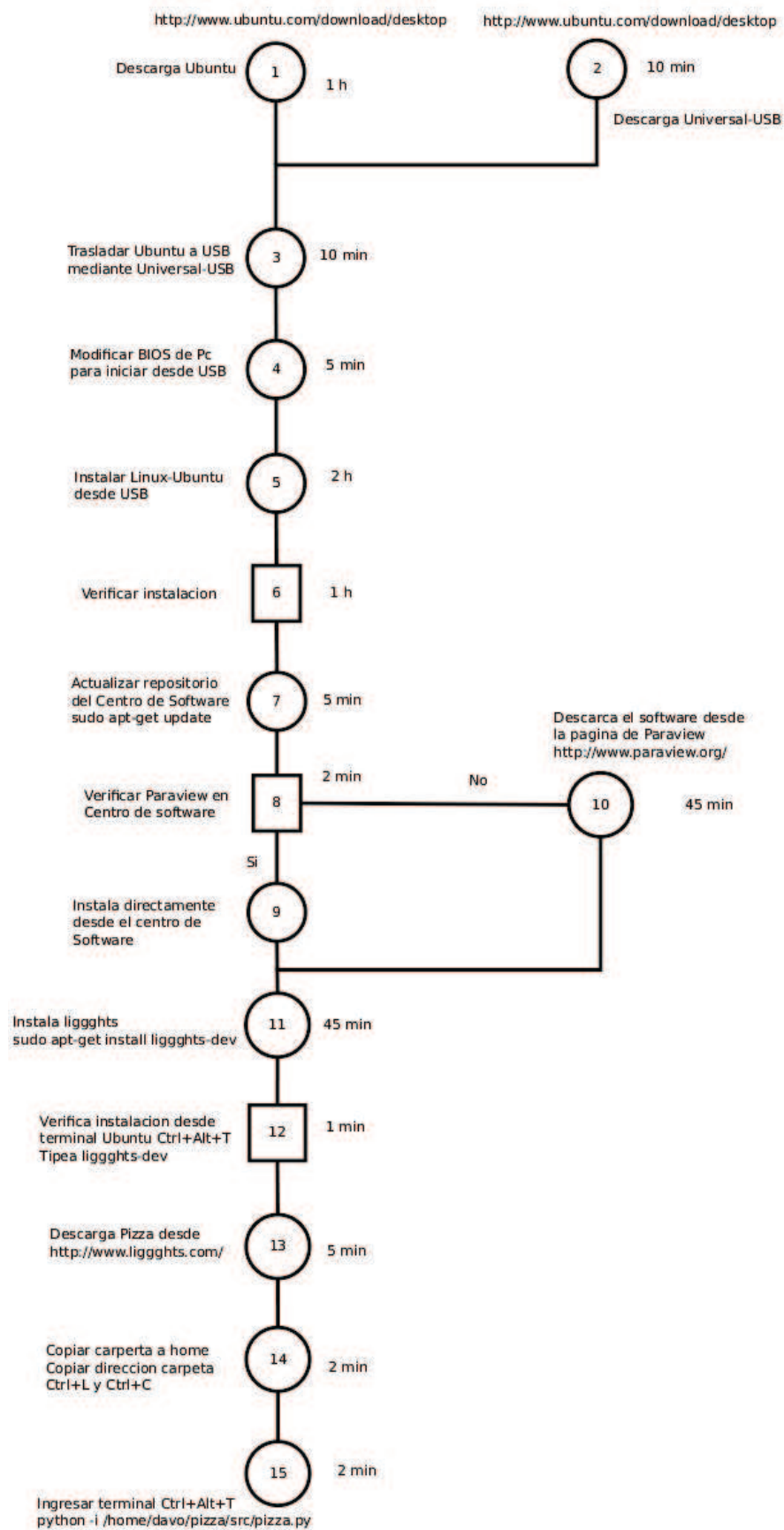
1. `d=dump("dump.(nombre del archivo generado por liggghts)")`
2. `d.scale()`
3. `v=vtk(d)`
4. `v.manyGran()`

### B.4. PARAVIEW

Se ingresa al centro de software (aplicación disponible en todas las distribuciones de linux), ver figura B.3. En la barra de búsqueda se especifica el nombre del programa y se selecciona instalar.



**Figura B.3:** Instalación de ParaView



**Figura B.4:** Flujograma de instalación de Liggghts

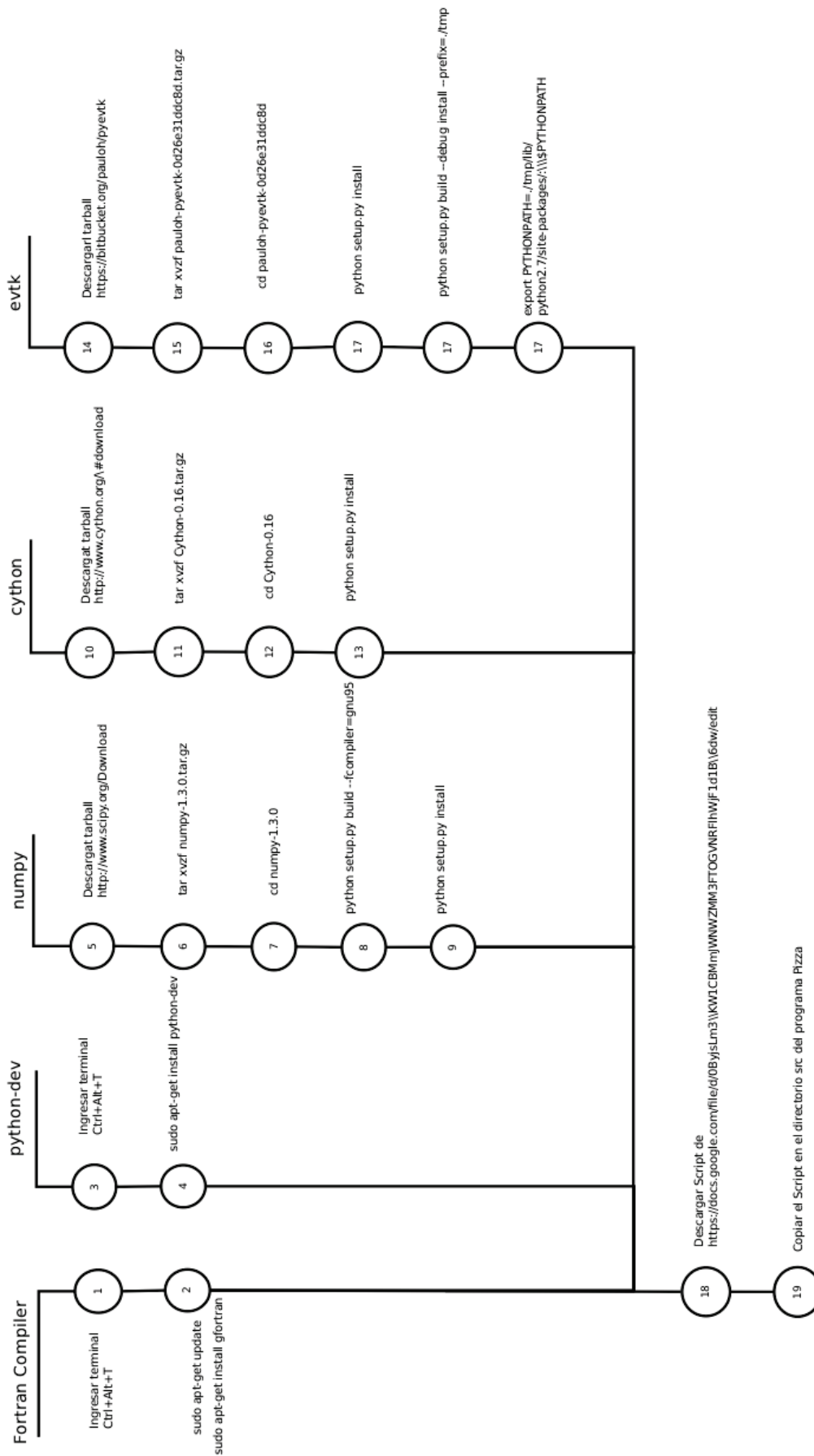


Figura B.5: Flujoograma de instalación de dump2force

## APÉNDICE C

### SCRIPTS DESARROLLADOS

#### C.1. GENERACIÓN DE PARTÍCULAS

##### C.1.1. PELLETS DE HIERRO

```

atom_style      granular
atom_modify     map array
boundary        f f f
newton          off
echo           both
communicate     single vel yes
processors      2 2 1
units          si
region         reg block -0.1 0.1 -0.10 0.10 -0.4 2 units box
create_box     2 reg
neighbor       0.002 bin
neigh_modify   delay 0

```

##### **Propiedades de las partículas pellets de hierro**

```

fix      m1 all property/global youngsModulus peratomtype 2.4e6 50e9
fix      m2 all property/global poissonsRatio peratomtype 0.4 0.2
fix      m3 all property/global coefficientRestitution peratomtypepair 2 0.6 0.4 0.4
0
fix      m4 all property/global coefficientFriction peratomtypepair 2 0.487 0.6 0.6

```



```

0
pair_style      gran/hertz/history 1 0
pair_coeff * *
timestep       0.000001
fix           1 all nve/sphere
fix           gravi all gravity 9.81 vector 0.0 0.0 -1.0

```

### **Geometría del silo**

```

fix          cad all mesh/gran 15.stl 2 0.001 -90. 0. -90. 270. 180. 0.
fix          cad2 all mesh/gran Placadwg.stl 1 0.001 -15. -15. -10. 0. 0. 0.
fix          inface all mesh/gran insertion_face2.stl 1 1 0.03 0.015 0.3 0. 0. 0.
fix          granwalls all wall/gran/hertz/history 1 0 mesh/gran 2 cad cad2
fix          zwalls all wall/gran/hertz/history 1 0 zplane -0.4 0.7 1
fix          xwalls all wall/gran/hertz/history 1 0 xplane -0.10 0.10 1
fix          ywalls all wall/gran/hertz/history 1 0 yplane -0.1 0.1 1

```

### **Granulometría de los pellets de hierro**

```

fix          pts1 all particletemplate/sphere 1 atom_type 1 density constant 2300 ra-
radius constant 0.005
fix          pts2 all particletemplate/sphere 1 atom_type 1 density constant 2300 ra-
radius constant 0.005
fix          pdd1 all particledistribution/discrete 7000 2 pts1 0.5 pts2 0.5
group        nve_group region reg
fix ins all insert/stream seed 7000 distributiontemplate pdd1 &
            nparticles 4000 massrate 40 insert_every 20000 overlapcheck yes all_in no
vel constant 0.0 0.0 -3.0 &
            insertion_face inface
fix          ts all check/timestep/gran 1000 0.1 0.1
compute      1 all erotate/sphere
thermo_style custom step atoms ke c_1 vol
thermo       1000
thermo_modify lost ignore norm no
compute_modify thermo_temp dynamic yes
run          1

```

```

dump      dmp2 all custom 10000 post/dump*.bin id x y z vx vy vz radius mass
dump      dumpstl all mesh/gran/VTK 1000 post/dump*.vtk id cad cad2
dump      dmp1 all custom 10000 post/dump.liggghts id type type x y z ix iy iz vx
vy vz fx fy fz omegax omegay omegaz radius
run       400000

```

### C.1.2. MAÍZ

```

atom_style      granular
atom_modify     map array
boundary        f f f
newton          off
echo            both
communicate     single vel yes
processors      2 2 1
units           si
region          reg block -0.1 0.1 -0.10 0.10 -0.4 2 units box
create_box     2 reg
neighbor        0.002 bin
neigh_modify    delay 0

```

#### **Propiedades de las partículas que representan al maíz**

```

fix      m1 all property/global youngsModulus peratomtype 298e6 50e9
fix      m2 all property/global poissonsRatio peratomtype 0.3 0.2
fix      m3 all property/global coefficientRestitution peratomtypepair 2 0.205 0.7
0.7 0
fix      m4 all property/global coefficientFriction peratomtypepair 2 0.51 0.52 0.52
0
pair_style      gran/hertz/history 1 0
pair_coeff       * *
timestep        0.000001
fix            1 all nve/sphere
fix            gravi all gravity 9.81 vector 0.0 0.0 -1.0

```

**Geometría del silo**

```

fix      cad all mesh/gran 15.stl 2 0.001 -90. 0. -90. 270. 180. 0.
fix      cad2 all mesh/gran Placadwg.stl 1 0.001 -15. -15. -10. 0. 0. 0.
fix      inface all mesh/gran insertion_face2.stl 1 1 0.03 0.015 0.3 0. 0. 0.
fix      granwalls all wall/gran/hertz/history 1 0 mesh/gran 2 cad cad2
fix      zwalls all wall/gran/hertz/history 1 0 zplane -0.4 0.7 1
fix      xwalls all wall/gran/hertz/history 1 0 xplane -0.10 0.10 1
fix      ywalls all wall/gran/hertz/history 1 0 yplane -0.1 0.1 1

```

**Granulometría del maíz**

```

fix      pts1 all particletemplate/sphere 1 atom_type 1 density constant 901 radius
constant 0.00475
fix      pts2 all particletemplate/sphere 1 atom_type 1 density constant 901 radius
constant 0.004
fix      pts3 all particletemplate/sphere 1 atom_type 1 density constant 901 radius
constant 0.0024
fix      pdd1 all particledistribution/discrete 7000 3 pts1 0.0231 pts2 0.372 pts3
0.602
group    nve_group region reg
fix ins all insert/stream seed 7000 distributiontemplate pdd1 &
        nparticles 4000 massrate 40 insert_every 20000 overlapcheck yes all_in no
vel constant 0.0 0.0 -3.0 &
        insertion_face inface
fix      ts all check/timestep/gran 1000 0.1 0.1
compute  1 all erotate/sphere
thermo_style    custom step atoms ke c_1 vol
thermo         1000
thermo_modify   lost ignore norm no
compute_modify  thermo_temp dynamic yes
run            1
dump          dmp2 all custom 10000 post/dump*.bin id x y z vx vy vz radius mass
dump          dumpstl all mesh/gran/VTK 1000 post/dump*.vtk id cad cad2

```

```

dump      dmp1 all custom 10000 post/dump.liggghts id type type x y z ix iy iz vx
vy vz fx fy fz omegax omegay omegaz radius
run      400000

```

## C.2. DESCARGA DEL SILO

### C.2.1. PELLETS DE HIERRO

```

atom_style      granular
atom_modify     map array
boundary        f f f
newton         off
echo           both
communicate     single vel yes
processors      2 2 1
read_data      data.dem32
region         reg block -0.1 0.1 -0.10 0.10 -0.4 2 units box
neighbor       0.002 bin
neigh_modify   delay 0

```

#### **Propiedades de las partículas pellets de hierro**

```

fix      m1 all property/global youngsModulus peratomtype 2.4e6 50e9
fix      m2 all property/global poissonsRatio peratomtype 0.4 0.2
fix      m3 all property/global coefficientRestitution peratomtypepair 2 0.6 0.4 0.4
0
fix      m4 all property/global coefficientFriction peratomtypepair 2 0.487 0.6 0.6
0
pair_style      gran/hertz/history 1 0
pair_coeff * *
timestep       0.000001
fix           1 all nve/sphere
fix          gravi all gravity 9.81 vector 0.0 0.0 -1.0

```

#### **Geometría del silo**

```

fix      cad all mesh/gran 15.stl 2 0.001 -90. 0. -90. 270. 180. 0.
fix      granwalls all wall/gran/hertz/history 1 0 mesh/gran 1 cad
fix      zwalls all wall/gran/hertz/history 1 0 zplane -0.4 0.7 1
fix      xwalls all wall/gran/hertz/history 1 0 xplane -0.10 0.10 1
fix      ywalls all wall/gran/hertz/history 1 0 yplane -0.1 0.1 1

```

### **Comando que calcula las fuerzas entre partículas**

```
compute      fc all pair/gran/local id pos force
```

```
group     nve_group region reg
```

```
fix      ts all check/timestep/gran 1000 0.1 0.1
```

```
compute      1 all erotate/sphere
```

```
thermo_style    custom step atoms ke c_1 vol
```

```
thermo      1000
```

```
thermo_modify    lost ignore norm no
```

```
compute_modify    thermo_temp dynamic yes
```

```
run      1
```

### **Generación de archivos de post procesamiento que contiene esfuerzos en las paredes del silo**

```
dump      dumpstl all mesh/gran/VTK 10000 post/dump*.vtk stress
```

```
dump      dmp1 all custom 10000 post/dump.liggghts id type type x y z ix iy iz vx
```

```
vy vz fx fy fz omegax omegay omegaz radius
```

### **Generación de archivos que contienen las cadenas de fuerza**

```
dump      forcechain all local 10000 post3/dump*.forcedata c_fc[1] c_fc[2] c_fc[3]
```

```
c_fc[4] c_fc[5] c_fc[6] c_fc[7] c_fc[8] c_fc[9] c_fc[10] c_fc[11] c_fc[12]
```

```
run      400000
```

## **C.2.2. MAÍZ**

```
atom_style    granular
```

```
atom_modify    map array
```

```
boundary      f f f
```

```
newton      off
```

```
echo      both
```

```

communicate      single vel yes
processors       2 2 1
read_data        data.dem32
region           reg block -0.1 0.1 -0.10 0.10 -0.4 2 units box
neighbor         0.002 bin
neigh_modify     delay 0

```

### **Propiedades de las partículas de maíz**

```

fix      m1 all property/global youngsModulus peratomtype 298e6 50e9
fix      m2 all property/global poissonsRatio peratomtype 0.3 0.2
fix      m3 all property/global coefficientRestitution peratomtypepair 2 0.205 0.7
0.7 0
fix      m4 all property/global coefficientFriction peratomtypepair 2 0.51 0.52 0.52
0
pair_style     gran/hertz/history 1 0
pair_coeff * *
timestep      0.000001
fix          1 all nve/sphere
fix          gravi all gravity 9.81 vector 0.0 0.0 -1.0

```

### **Cálculo de esfuerzos en las paredes del silo**

```

fix      cad all mesh/gran/stressanalysis 30.stl 2 0.001 -90. 0. -90. 270. 180.
0.
fix      granwalls all wall/gran/hertz/history 1 0 mesh/gran 1 cad
fix      zwalls all wall/gran/hertz/history 1 0 zplane -0.4 0.7 1
fix      xwalls all wall/gran/hertz/history 1 0 xplane -0.10 0.10 1
fix      ywalls all wall/gran/hertz/history 1 0 yplane -0.1 0.1 1

```

### **Comando que calcula las fuerzas entre partículas**

```

compute      fc all pair/gran/local id pos force
group      nve_group region reg
fix        ts all check/timestep/gran 1000 0.1 0.1
compute    1 all erotate/sphere
thermo_style     custom step atoms ke c_1 vol
thermo          1000

```

```
thermo_modify    lost ignore norm no
compute_modify   thermo_temp dynamic yes
run             1
```

```
dump            dmp2 all custom 10000 post/dump*.bin id x y z vx vy vz radius mass
```

### **Generación de archivos de post procesamiento que contiene esfuerzos en las paredes del silo**

```
dump            dumpstl all mesh/gran/VTK 10000 post/dump*.vtk stress
```

```
dump            dmp1 all custom 10000 post/dump.liggghts id type type x y z ix iy iz vx
vy vz fx fy fz omegax omegay omegaz radius
```

### **Generación de archivos que contienen las cadenas de fuerza**

```
dump            forcechain all local 10000 post3/dump*.forcedata c_fc[1] c_fc[2] c_fc[3]
c_fc[4] c_fc[5] c_fc[6] c_fc[7] c_fc[8] c_fc[9] c_fc[10] c_fc[11] c_fc[12]
run             400000
```

## APÉNDICE D

### ENSAYOS GRANULOMÉTRICOS

En la tabla D.1 se presenta el ensayo granulométrico realizado en el laboratorio de Ensayos de Materiales y Mecánica de Suelos de la Escuela Politécnica Nacional. Estos datos se los realizó a muestras de maíz directamente cosechados de la mazorca.

**Tabla D.1:** Granulometría del maíz

<b>Malla No</b>	<b>Abertura (micras)</b>	<b>Peso Retenido (g)</b>	<b>% Retenido</b>
1/2	12700	0.00	0.00
3/8	9500	11.60	2.32
5/16	7940	186.35	37.27
4	4750	301.25	60.25
8	2360	0.80	0.16
<b>TOTAL</b>		500.00	100.00

**Fuente:** Laboratorio de Ensayos de Materiales y Mecánica de Suelos, EPN.





**ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL  
DEPARTAMENTO DE METALURGIA EXTRACTIVA**



**Resultado de Análisis**

**Solicitante** : Edgar Rivera / Luis Vergara  
**No. Referencia** : RM-7267  
**Fecha** : 18 - 01 - 2013  
**Muestras recibidas** : Una muestra sólida

**Resultados Análisis Granulométrico Muestra de Maíz**

Malla No.	Abertura (micras)	Peso Retenido (g)	%Retenido	%Retenido acumulado	% Pasante acumulado
3/8"	9500	23,5	9,4	9,4	90,6
3	6680	219,4	87,8	97,2	2,8
<3		7,1	2,8	100,0	0,0
TOTAL		250,0	100,0		

*Alicia Guevara*  
 Ing. Alicia Guevara  
 Jefe de Departamento



*Ernesto de la Torre*  
 Ing. Ernesto de la Torre  
 Jefe de Laboratorio

**Figura D.1:** Ensayo granulométrico realizado en el Departamento de Metalurgia Extractiva de la EPN

**APÉNDICE E**

**PLANOS DE LAS GEOMETRÍAS DE**

**SILOS**