

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL
=====

FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA
=====

LA RESISTENCIA NEGATIVA COMO ELEMENTO CIRCUITAL

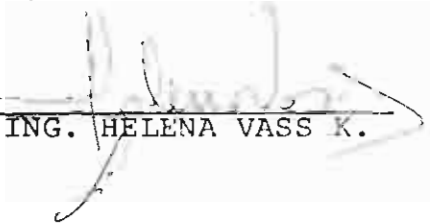
POR

WALTER E. GUSTAVO BRITO P.

TESIS PREVIA A LA OBTENCION DEL TITULO DE INGENIERO ELECTRICO
EN LA ESPECIALIZACION POTENCIA

QUITO - DICIEMBRE DE 1979

CERTIFICO QUE LA PRESENTE TESIS
HA SIDO ELABORADA POR EL SENOR
WALTER E.GUSTAVO BRITO PERUGACHI



ING. HELENA VASS K.

QUITO - DICIEMBRE DE 1979

AGRADECIMIENTO

A todos los Profesores de la Facultad por su ayuda en mi formación profesional; en especial, a la Ing. Helena Vass Directora de esta tesis; al Ing. Douglas Moya, a los compañeros del Area de Circuitos Eléctricos, a la Srta. Alicia Reynoso, por su valiosa colaboración.

INDICE

Pag. N^o

CAPITULO PRIMERO

- | | | |
|------|---------------------|---|
| 1.1. | Introducción | 1 |
| 1.2. | Alcance y Objetivos | 3 |

CAPITULO SEGUNDO

CONCEPTO Y CLASIFICACION DE RESISTENCIAS NEGATIVAS

- | | | |
|-----------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 2.1. | Resistencia negativa ideal | 6 |
| 2.2. | Resistencia negativa no ideal | 7 |
| 2.3. | Diferencias características de los dos tipos de resistencia negativa | 13 |
| 2.3.1. | Forma de la curva | 13 |
| 2.3.2. | Condiciones de estabilidad | 15 |
| 2.3.3. | Condiciones para excitación en un circuito sintonizado y de oscilación de señales sinusoidales degeneradas | 16 |
| 2.3.4. a) | Efecto de la resistencia positiva añadida | 17 |
| b) | Efecto del retraso de tiempo entre la causa y el efecto | 18 |
| 2.4. | Características convenientes de una resistencia negativa | 20 |

CAPITULO TERCERO

APARATOS DE RESISTENCIA NEGATIVA Y SUS APLICACIONES

3.1.	Clasificación de los aparatos de resistencia negativa	24
3.2.	Aparatos de resistencia negativa simple	25
	a) Arco o descarga de encendido	26
	b) Dinatron	26
	c) Tipo de campo amortiguado	27
	d) Tipo de rejilla de carga espacial	27
	e) Tipo de ión positivo	28
	f) Magnetrón de ánodo partido	28
3.3.	Aparatos de resistencia negativa de acoplamiento directo	29
	a) El negatrón	37
	b) Tubos de campo retardado	37
	c) Tipo emisión secundaria	38
	d) Métodos de tiempo de tránsito del electrón	39
	e) Tubos de electrón controlado magnéticamente	39
3.4.	Aparatos acoplados de fase reversa	40
3.5.	Aplicaciones de la resistencia negativa y de la transconductancia negativa	40
3.5.1.	Aplicaciones generales	40

CAPITULO CUARTO

SINTESIS DE REDES CON RESISTENCIAS NEGATIVAS

4.1.	Introducción a las técnicas de redes con resistencias negativas	44
------	-----------------------------------------------------------------	----

4.2.	Representación de redes patológicas de re <u>sistencias</u> negativas	46
4.3.	Síntesis con un restringido número de re <u>sistencias</u>	72
4.4.	Funciones de inmitancia de excitación ge <u>nerales</u>	81
4.5.	Síntesis de n puertas con resistencias po <u>sitivas</u> y n resistencias negativas	90
4.6.	Transformador ideal con resistencias nega <u>tivas</u>	97

CAPITULO QUINTO

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

5.1.	Conclusiones	101
5.2.	Recomendaciones	103

APENDICE I

Matriz de dispersion	105
----------------------	-----

APENDICE II

Transformacion de una matriz [A, B]	118
---------------------------------------	-----

APENDICE III

Potencia compleja	124
-------------------	-----

APENDICE IV

Remocion de polos límites de una matriz inmitancia	126
----------------------------------------------------	-----

BIBLIOGRAFIA

CAPITULO PRIMERO

1.1.- INTRODUCCION

Debido a que el estudio de circuitos y redes eléctricas es la base para comprender con mayor facilidad cualquier campo de la ingeniería eléctrica, es importante conocer en forma profunda sus principios fundamentales y en lo posible reforzarlos con estudios e investigaciones más amplios y modernos, para de esta manera, ir acordes con los adelantos tecnológicos del mundo actual.

En nuestro medio a más de conocer los criterios básicos y algo profundos en materia de redes pasivas, no se ha hecho un estudio en lo que se refiere al giro que las redes eléctricas están tomando, debido al desarrollo de una gran cantidad de elementos de estado sólido tales como los diodos de capacidad variable, diodos tunnel y muchos otros, que estimulan a considerar las redes activas y dentro de éstas a sus componentes, como por ejemplo la resistencia negativa como un elemento circuital básico.

Dado que el concepto de resistencia negativa data desde 1911 y que es uno de los elementos activos ideales más simples, es el primero que debe ser con

siderado y al cual se enfocará el presente trabajo.

El concepto de resistencia negativa, como queda in
dicado, nace por el año de 1911. En sus primeros -
años no se desarrolla más que en ciertos aspectos -
de definición y no en sus características, y recién
por 1926 Barkhausen |1| fue uno de los primeros in
investigadores que analiza las características de -
ciertos efectos y dispositivos, los clasifica y es
tablece las diferencias entre los grupos encontra -
dos. En 1931 Crisson |2| demostró por primera vez
la validez que en este tipo de elementos tiene el
control y las formas que éste puede tomar. Poster-
riormente varios grupos de personas auspiciados por
compañías dedicadas a la elaboración de equipos e
lectrónicos, se dedicaron a investigar y resumir lo
que hasta entonces se había publicado, y en 1935 un
grupo de los mencionados publica un artículo con el
título de "Resistencia Negativa y Aparatos para su
obtención"|3|. En los años siguientes, se trata de
aplicar la síntesis general de redes para el tipo -
de elemento que se está analizando y por el año de
1960 H.C. Carlin y D.C. Youla aplican dicha síntes -
is expresamente a resistencia negativa |4|. De -
aquí los estudios realizados han estado enfocados -
a encontrar las posibles aplicaciones que la resisis-

tencia negativa pueda tener y la influencia de este elemento en una red determinada.

1.2. ALCANCE Y OBJETIVOS

El presente trabajo en primer lugar, trata de definir la resistencia negativa de acuerdo a sus características voltaje-corriente, para de esta manera introducirle dentro de una red determinada. Con este conocimiento, se clasificará a dicho elemento de acuerdo al tipo de control con el que actúe, y se darán algunas características de las clases de resistencia negativa, poniendo énfasis en las diferencias que entre ellas existan.

Se presenta luego, dentro de cierta clasificación, algunos aparatos que demuestran tener característica de resistencia negativa. No se trata en este punto de analizar cada uno de los aparatos mencionados, sino simplemente nombrarlos, anotar ciertas características y la razón por la que presentan resistencia negativa.

Para que el análisis de algún elemento tenga validez, es necesario que sea aplicable, de aquí que se presentarán algunas aplicaciones generales primeramente, y luego otra aplicación particular como el

transformador ideal con resistencias negativas.

A continuación se demostrará mediante síntesis, si la resistencia negativa es añadida al grupo pasivo de elementos, se tendrá una red que represente cualquier relación lineal entre n pares de voltajes y corrientes, descritos en términos de funciones racionales de la frecuencia compleja variable; esto conduce a la síntesis de nuevos circuitos patológicos, que no tienen representaciones de sus funciones inmitancia ni transferencia, tales como los dipolos que son simultáneamente un circuito abierto y un cortocircuito ($v=i=0$ el "Nulador"), y la red en la cual los voltajes y corrientes en sus terminales son completamente arbitrarios (el "Norador" el único dipolo lineal no recíproco). Estos elementos son los indicados a constituir el bloque de circuitos lineales. Por último se considerará la síntesis, en el dominio de la frecuencia, a la matriz admitancia real, racional $n \times n$ en la cual la localización de un polo o múltiples polos es totalmente arbitraria. Esto demuestra que tal matriz puede siempre ser realizada con elementos sin pérdidas y cuando más n resistencias positivas y n resistencias negativas.

No se trata de profundizar dentro del estudio de re

des activas en general, sino más bien de abrir un ca
mino con ciertos criterios básicos, para iniciar pri
meramente el análisis de los elementos activos y pos
teriormente de las redes formadas con dichos elemento
s en forma global.

Como otro objetivo, se persigue considerar las aplica
ciones que estos elementos y redes tengan para vi
sualizar las posibilidades de emplearlos en ciertos-
circuitos prácticos.

CAPITULO SEGUNDO

CONCEPTO Y CLASIFICACION DE

RESISTENCIAS NEGATIVAS

CAPITULO SEGUNDOCONCEPTO Y CLASIFICACION DE RESISTENCIAS NEGATIVAS2.1. RESISTENCIA NEGATIVA IDEAL

Idealmente, la resistencia negativa es un elemento-recíproco de dos terminales caracterizado por la relación de voltaje-corriente dada por la expresión:

$$v(t) = - R i(t).$$

El modelo de dicha resistencia está representado en la figura 2.1. así como también su característica $v(t)$ vs. $i(t)$

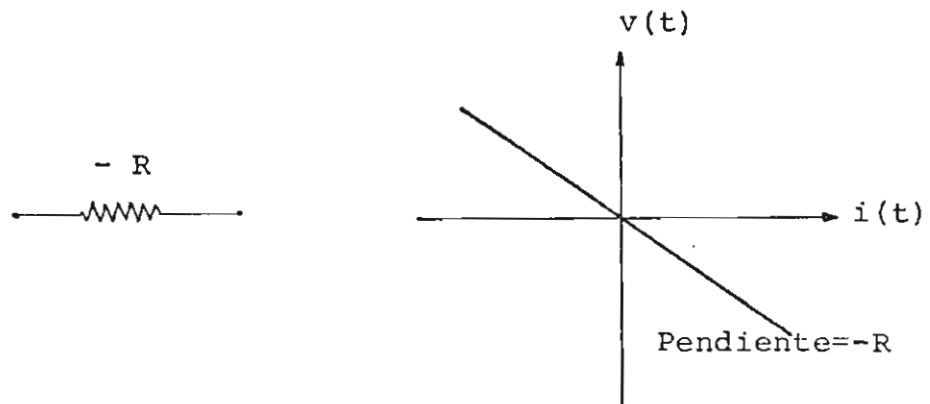


Fig.2.1. Modelo y característica de una resistencia negativa ideal

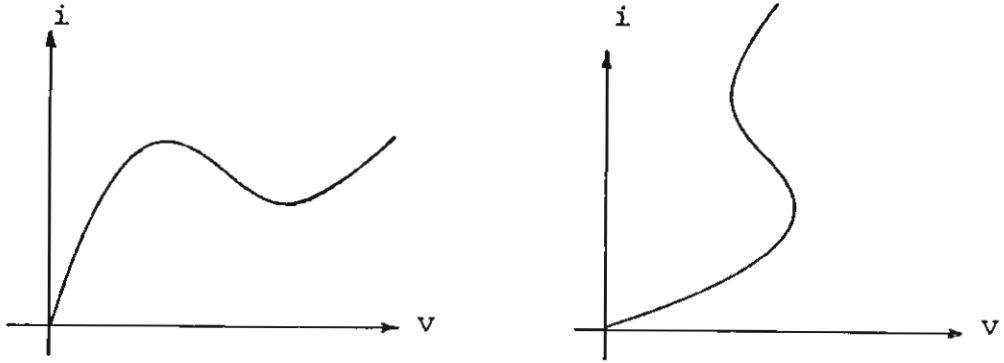
De acuerdo con los principios de la conservación de la energía, es evidente la imposibilidad física de obtener una resistencia negativa ideal, pero para señales pequeñas y a bajas frecuencias, el comportamiento de ciertos dispositivos físicos resultan una buena aproximación de la característica ideal de la resistencia negativa.

2.2. RESISTENCIA NEGATIVA NO IDEAL

Los dispositivos que presentan características de resistencia negativa son usualmente divididos en dos grupos, dependiendo de la forma de la curva de su característica voltaje-corriente, según se representa en la figura 2.2. a y b.

En las figuras 2.2.c. y 2.2.d. se observa que la resistencia incremental pasa a través de valores infinitos, en el un caso, mientras en el otro pasa por cero.

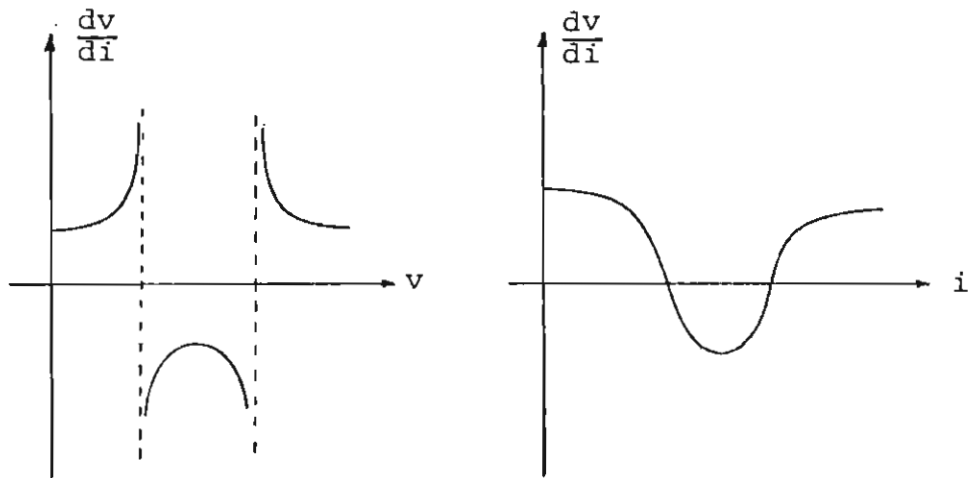
Se conoce como resistencia negativa tipo S a un elemento controlado por corriente y como resistencia negativa tipo N a un elemento controlado por voltaje.



a) Tipo N

b) Tipo S

Fig.2.2. Características de los dos tipos de resistencias negativas



c) Control por voltaje

d) Control por corriente.

Fig.2.2. Resistencia incremental

Una resistencia negativa físicamente realizable, no es el inverso de una resistencia positiva en la cual la relación corriente-voltaje es interdependiente, - sino que utiliza un fenómeno que depende exclusiva - mente del voltaje o exclusivamente de la corriente.

Conceptualmente, se entiende la resistencia negativa como un dispositivo de dos pares de terminales (cuadrípulo), que posee una fuente interna de energía, - la cual puede estar controlada por la tensión o por la corriente en esos terminales pero nunca por ambos.

La designación de resistencia negativa indica teóricamente lo contrario de resistencia positiva, los dispositivos que poseen esta propiedad tienen una limitación que es la energía que pueden entregar, de modo que tiene característica de resistencia negativa solamente en un determinado rango, una idea que ordinariamente no se asocia con la resistencia positiva.

Una resistencia positiva disipa energía proporcional al cuadrado de la corriente o del voltaje aplicado, - mientras que una resistencia negativa "genera" energía proporcional al cuadrado de la corriente o del voltaje aplicado.

Con el fin de poder "generar" energía proporcional a una señal eléctrica aplicada, la resistencia negativa debe tener una fuente de energía y algún medio de controlarla.

Para ilustrar la manera como la energía generada en un dispositivo de dos pares de terminales (cuadripolo) puede ser proporcional al cuadrado de la corriente o del voltaje aplicado, se representa un amplificador ideal tal como el de la figura 2.3; donde una fuente de voltaje o de corriente aplicada a los terminales de entrada 1 - 1', entrega una corriente o voltaje proporcional en los terminales 2-2' de salida.

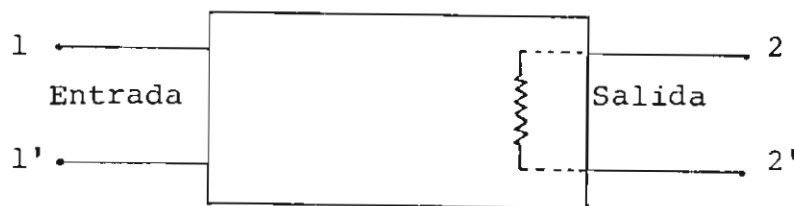


Fig.2.3. Amplificador ideal

Si los terminales de entrada se conectan a los terminales de salida como se indica en la figura 2.4, es ahora evidente que la salida del amplificador será proporcional al voltaje a través de los termi-

nales de salida.

Para obtener resistencia negativa, las conexiones deben hacerse de tal modo que la inestabilidad se elimine mediante la limitación del voltaje producido, lo que puede lograrse conectando una resistencia externa de bajo valor a través de los terminales.

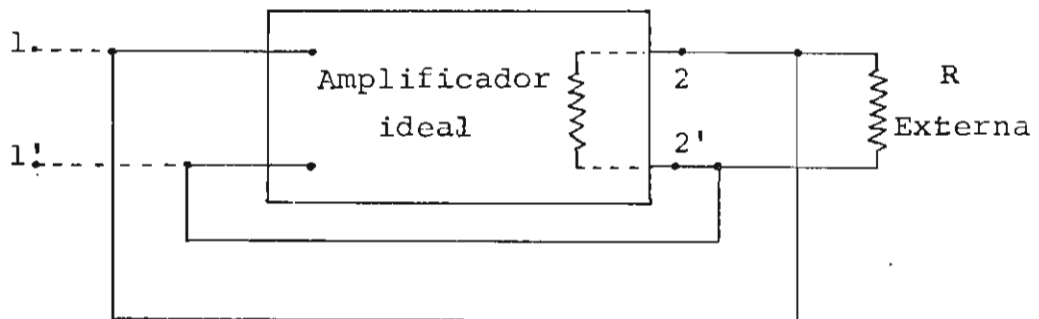


Fig.2.4.. Circuito controlado por voltaje

Cuando la resistencia externa se incrementa, el voltaje añadido a la señal original también se incrementa, hasta que la resistencia externa sea tan alta que el valor del producto $I.R$ en esa resistencia se vuelve más grande que el valor del voltaje controlador necesario para producir la corriente I . Esta condición ocurre cuando la resistencia externa es mayor que la resistencia negativa.

La resistencia negativa producida por el amplifica-

dor, está indicada por la razón entre el voltaje incrementado y la corriente incrementada a través de los terminales. Para este caso es deseable que la resistencia negativa sea de bajo valor.

Otra manera de producir resistencia negativa es conectando los terminales de entrada del amplificador a los terminales de salida, a través de una resis -tencia que se encuentra en serie con éstos, como se indica en la figura 2.5.

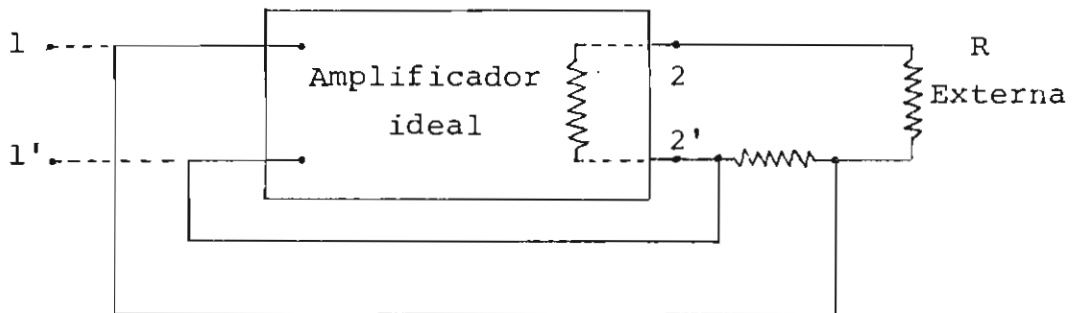


Fig.2.5.Circuito controlado por corriente

En este caso la entrada del amplificador y su sali -da son proporcionales a la "corriente" del circuito y no al voltaje, y su comportamiento es algo diferen -te.

Ahora resultará inestable el sistema cuando la re -sistencia externa sea lo suficientemente baja.

La acción, mediante la cual la señal aplicada es - como la corriente a través del circuito, ocasiona - que el voltaje de salida del amplificador se oponga a la caída de valor $I.R$ en la resistencia externa y hace que la corriente original se incremente por es te efecto. Cuando la resistencia externa disminuye, la corriente contrariamente aumenta hasta que la re sistencia externa sea tan baja que el efecto re gene rativo causa inestabilidad.

La condición inestable ocurre cuando la resistencia externa es menor que la resistencia negativa. El - valor de la resistencia negativa producida es nueva mente la razón de voltaje a corriente incrementados, pero en este caso como se usa corriente de control, un valor alto de resistencia negativa es lo deseado para que se genere un voltaje máximo para una co - rriente dada.

Lo descrito anteriormente sirve de ilustración del principio fundamental de cualquier dispositivo con característica de resistencia negativa.

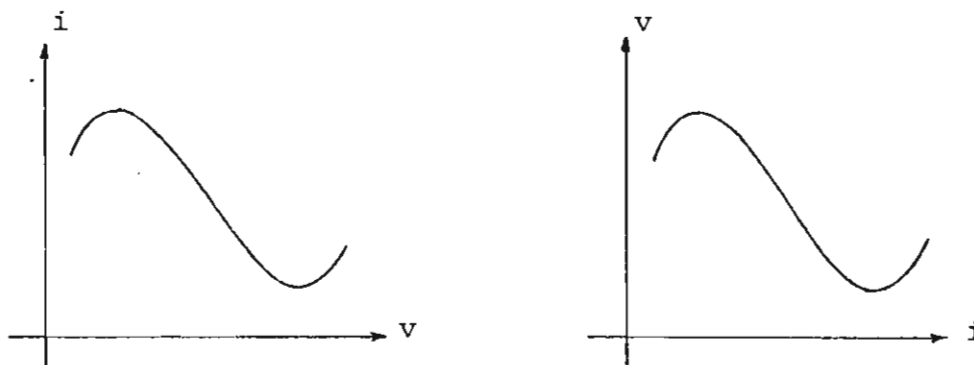
2.3. DIFERENCIAS CARACTERISTICAS DE LOS DOS TIPOS DE RESISTENCIA NEGATIVA.

2.3.1. FORMA DE LA CURVA

La característica Voltaje-Corriente de una resistencia negativa, obviamente tendrá pendiente negativa durante un rango apreciable. Esta región de pendiente negativa está fundamentalmente restringida por la limitación de la energía disponible de la fuente; una segunda limitación se impone por el elemento que controla la fuente de energía y que facilita la aparición de la pendiente negativa. En la característica del dispositivo controlado por voltaje (Figura 2.2.a); las limitaciones hacen que los terminales de la recta de pendiente negativa se incrementen pasando por infinito (Figura 2.2.c) y volviéndose luego positiva. Se ve claramente que esto es efecto del control por voltaje; puesto que hacia los terminales de la parte de pendiente negativa, un pequeño incremento de voltaje impide producir un cambio de corriente igual al que se produciría si el incremento fuese aplicado en el centro de la característica.

En la característica típica de un elemento de resistencia negativa controlado por corriente (Figura 2.2.b), las limitaciones causan una pequeña variación de voltaje para un incremento dado de corriente en los terminales de la parte recta, y la resistencia negativa en estos puntos pasa por cero y se vuelve positiva (Figura 2.2.d).

Se puede observar de estas características que el fenómeno observado en la resistencia del un caso, se observará idénticamente en la conductancia del otro, de manera que si intercambiamos los ejes de voltaje por corriente, en los dos casos, se observaría el mismo tipo de curva (Figura 2.6).



Resistencia negativa con
controlada por voltaje.

Resistencia negativa con
controlada por corriente.

Fig.2.6. Forma de la curva

Esta deducción es sumamente importante ya que permite inmediatamente convertir los fenómenos establecidos para un tipo de resistencia negativa, mediante dualidad, en fenómenos análogos para el otro tipo.

2.3.2. CONDICIONES DE ESTABILIDAD

Se considera como punto inestable de operación, a aquel en el cual una fluctuación infinitesimal de co

corriente o de voltaje es suficiente para desviar automáticamente a otro punto, el cual es usualmente estable.

La resistencia negativa controlada por voltaje, opera en un punto estable cuando la resistencia externa positiva es menor que la resistencia negativa del punto. Usando la analogía mencionada en la forma de la curva, entre resistencia y conductancia, podemos concluir que la resistencia negativa controlada por corriente, opera en un punto estable cuando la conductancia externa positiva es menor que la conductancia negativa del punto; por ejemplo, la resistencia positiva externa deberá ser mayor que la resistencia negativa del punto; de acuerdo con la figura 2.5.

2.3.3. CONDICIONES PARA EXCITACION DE OSCILACION EN UN CIRCUITO SINTONIZADO Y DE OSCILACION DE SEÑALES SINUSOIDALES DEGENERADAS.

Una resistencia negativa controlada por voltaje, es apropiada para excitar oscilaciones en un circuito en el cual exista una resistencia alta en resonancia; por ejemplo, en un circuito paralelo sintonizado de elementos R, L, C, la condición de oscilación se produce cuando la resistencia negativa es menor que $\frac{L}{CR}$.

Una resistencia negativa controlada por corriente, excitará similarmente a un circuito que posea una alta conductancia en resonancia; por ejemplo, un circuito sintonizado serie. La condición de oscilación se producirá cuando la resistencia negativa sea mayor que la resistencia positiva del circuito.

Si la capacitancia de un circuito paralelo sintonizado se hace despreciable y la resistencia del inductor es lo suficientemente baja, la conexión a una resistencia negativa controlada por voltaje con una inclinación negativa limitada (forma de la curva), puede convertirse en oscilaciones cuyos períodos dependen del tiempo de relajación.

Similarmente, si la inductancia de un circuito serie sintonizado, conectado a un arreglo controlado por corriente, se hace despreciable, pueden ocurrir oscilaciones de relajación.

En ambos casos la periodicidad de las oscilaciones es usualmente función del tiempo del circuito completo.

2.3.4.a) EFECTO DE LA RESISTENCIA POSITIVA AÑADIDA

Si una resistencia negativa controlada por voltaje

no es lo suficientemente pequeña para excitar un circuito sintonizado, la adición de resistencias positivas en serie hacen más bajo el valor de la resistencia negativa.

Razonamiento análogo indica que la resistencia positiva en paralelo a través de un dispositivo controlado por corriente, hará aumentar el valor de la resistencia negativa.

Las posibilidades de estos métodos se ven limitados por la inevitable auto-reactancia inherente a los dispositivos de resistencia negativa.

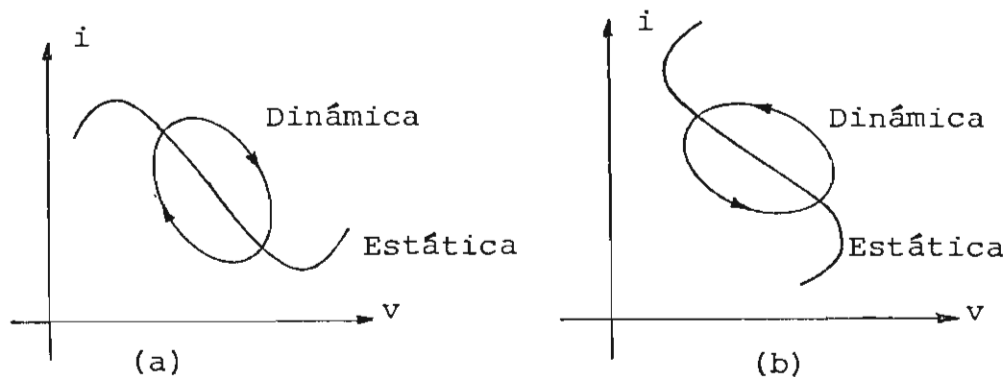
b) EFFECTO DEL RETRASO DE TIEMPO ENTRE LA CAUSA Y EL EFECTO.

En muchos arreglos de resistencia negativa, el mecanismo de control introduce un retraso inevitable entre la aparición del factor de control y de la salida resultante.

El efecto hace que la característica dinámica voltaje-corriente se transforme en un lazo notable que se desvía de la característica estática.

Para retrasos pequeños de tiempo, en el caso de

control por voltaje, el sentido de relación del lazo es horario y el efecto del circuito puede ser considerado como el resultado de una resistencia negativa sin retraso en paralelo con una capacitancia. Lo expresado está ilustrado en la figura 2.7.a.



Controlado por voltaje. Controlado por corriente taje.

Fig.2.7.Efecto del retraso de tiempo.

En el caso de control por corriente, el lazo tiene un sentido de relación antihorario de modo que el efecto del circuito es tal como el de una resistencia negativa sin retraso de tiempo en serie con una inductancia. Una ilustración del efecto en el caso de control por corriente se muestra en la figura 2.7.b. Como los valores de la capacitancia efectiva introducida en el uno y la inductancia efectiva en el otro caso son funciones de la frecuencia.

cuencia, los efectos no se pueden eliminar y el comportamiento debe ser considerado como una función de la frecuencia.

2.4. CARACTERISTICAS CONVENIENTES DE UNA RESISTENCIA NEGATIVA.

Las características principales de una resistencia negativa, como también ocurre en el caso de cualquier amplificador, dependen del uso que se ha de dar al dispositivo.

Para los usos más generales, una resistencia negativa puede ser conveniente y simple de usar, y suele tener buena eficiencia transformando la potencia suministrada en potencia utilizada.

La habilidad de producir resistencia negativa controlada por voltaje o resistencia negativa controlada por corriente mediante conexiones diferentes, la poseen ciertos arreglos circuitales, y es ventajosa para una utilidad general. Cualitativamente, se puede establecer que en un dispositivo controlado por voltaje, es más conveniente una resistencia negativa baja; esto da una gran variación de corriente para un valor de voltaje controlador dado.

En el caso de control por corriente, se produce una gran variación de voltaje para un valor de la corriente de control y en este caso será más conveniente una alta resistencia negativa.

Se presentarán ahora algunas consideraciones referentes a la inherente auto-reactancia de estos dispositivos. Para mayor utilidad, es evidente que la inevitable auto-capacitancia o la auto -inductancia de una resistencia negativa deberá hacerse lo más pequeña posible. La capacitancia o la inductancia que se consideran incluyen la capacitancia y la inductancia efectivas introducidas -por el retraso del tiempo.

Es sumamente difícil evaluar cuantitativamente el efecto de la reactancia sin antes haber efectuado -consideraciones sobre las aplicaciones particulares de la resistencia negativa.

La parte reactiva de la impedancia de una resistencia negativa controlada por voltaje, casi siempre toma la forma de una capacitancia en paralelo. Si una resistencia negativa controlada por voltaje, - R_V , y una capacitancia en paralelo C_V , son consideradas, la relación de la reactancia a la resistencia para una frecuencia angular ω , es $\omega C_V R_V$. En -

muchas aplicaciones es fundamental que $\omega C_V R_V$ sea un factor de deficiencia. Su recíproco $1/\omega C_V R_V$, por lo tanto, será una figura de mérito. En estas aplicaciones, dos aparatos de voltaje controlado en paralelo, no son mejores que uno, excepto en lo que respecta a la potencia disponible.

En el caso de control por corriente, la reactancia presente puede ser considerada en la forma de inductancia L_C , en serie con la resistencia negativa R_C , con una capacitancia adicional en paralelo que complica en algunos casos. Si no se considera esta capacitancia por el momento, un razonamiento análogo al usado en el caso de control por voltaje, permite considerar a la relación de reactancia a resistencia $\omega L_C/R_C$, como un factor de deficiencia, la representación de mérito sería por consiguiente el inverso. La capacitancia que está en paralelo con la totalidad, como ya se indicó, puede producir oscilaciones de relajación si está presente una alta resistencia externa, y por consiguiente deberá ser muy baja. Preferiblemente, $\omega C R_C$ deberá ser menor que la unidad para altas frecuencias, para que pueda existir resistencia negativa. Casos particulares pueden ser cuantitativamente analizados considerando esta capacitancia.

El análisis muestra que la adición de resistencias positivas en serie con la resistencia negativa controlada por voltaje, disminuye la resistencia negativa disminuyendo la relación de mérito $1/\omega C_V R_V$. Es fácilmente demostrable que reduciendo la resistencia negativa R_V , por este medio a un valor R_V/m , se incrementará la capacitancia de la combinación a $m^2 C_V$. Análogamente en el caso de control por corriente, la resistencia positiva en paralelo incrementa la resistencia negativa pero disminuye la figura de mérito $R_C/\omega L_C$. En este caso, aumentando la resistencia negativa a mR_C se incrementa la inductancia efectiva a $m^2 L_C$.

CAPITULO TERCERO

APARATOS DE RESISTENCIA

NEGATIVA Y SSS APLICACIONES

CAPITULO TERCEROAPARATOS DE RESISTENCIA NEGATIVA Y SUS APLICACIONES3.1. CLASIFICACION DE LOS APARATOS DE RESISTENCIA
NEGATIVA

Todos los métodos de producir resistencia negativa pueden estar localizados, de acuerdo al principio de operación, dentro de tres clases. La primera incluye las resistencias negativas simples, o sea aquellas en las cuales el elemento con resistencia negativa controlada también el fenómeno interno, haciendo posible la inclinación negativa; un ejemplo muy conocido es el DINATRON. El voltaje en el ánodo $|5|$ de control se produce por emisión secundaria y en consecuencia su corriente.

La segunda clase puede llamarse el grupo de resistencias negativas acopladas directamente, y comprende aquellos aparatos en los cuales el elemento que controla el fenómeno interno, está directamente conectado al circuito o al elemento controlador antes de que aparezca la resistencia negativa. Como ejemplo se puede mencionar al NEGATRON en el cual un incremento de potencial del elemento de control causa

una disminución de corriente en un ánodo. Se obtiene resistencia negativa si los dos están directamente conectados.

La tercera clase es el grupo de resistencias negativas de fase reversa, ya que dentro de estas se encuentran aquellos aparatos en los cuales el elemento de control es nuevamente separado del elemento controlado, pero debe ser acoplado a éste a través de un medio de inversión de fase, antes que se obtenga la resistencia negativa. El tubo de vacío convencional es un ejemplo común.

Si bien las resistencias negativas simples son usualmente ya sea de corriente controlada o de voltaje controlado, pero no de ambos, los aparatos en los dos grupos de resistencia negativa acopladas pueden usarse ya sea en un arreglo de corriente controlada o de voltaje controlado, dependiendo de la manera como el elemento de control vaya conectado. Esto se visualizará por el tratamiento detallado de una subdivisión del grupo acoplado directamente que se dará posteriormente.

3.2. APARATOS DE RESISTENCIA NEGATIVA SIMPLE

De los muchos aparatos que están incluidos bajo es

te encabezonamiento, se nombrarán solamente unos pocos debido a su mayor aplicación:

a) ARCO O DESCARGA DE ENCENDIDO (CORRIENTE CONTROLADA).

Una corriente en aumento en un arco o en una descarga de encendido causa tal incremento en la ionización que se requiere un potencial más pequeño para mantener la descarga. Aparatos de este tipo no son confiables por razón de los cambios en los electrodos y en la presión del gas. Debido a la baja movilidad iónica, se presenta un retraso de tiempo considerable que no permite una operación con éxito a altas frecuencias. La conveniencia y simplicidad de la descarga de encendido del cátodo frío ha permitido su uso en circuitos de oscilación-relajación [6] a bajas frecuencias.

b) DINATRON (VOLTAJE CONTROLADO) [7].

Un incremento de voltaje en un electrodo de un tubo de emisión de electrodos a alto vacío, causa tal incremento en la emisión secundaria, que la corriente al electrodo cae. Es necesario un electrodo colector para los electrones secundarios localizado a un alto potencial fijo. Si bien se obtienen valores -

bajos de resistencia negativa solamente con altas - corrientes y voltajes, el dinatrón se utiliza en - una amplia variedad de aplicaciones.

c) TIPO DE CAMPO AMORTIGUADO (CORRIENTE CONTROLADA).

Este es un método menos conocido de la utilización de la emisión secundaria para obtener resistencia negativa, en el cual una resistencia conectada en tre la rejilla y la placa de un triodo, permite al voltaje de rejilla crecer tan alto con el choque de la emisión secundaria, que el voltaje total de pla-ca a cátodo necesario para mantener una corriente, - decrece en tanto que la corriente sube. Se cree - que este aparato es inferior al Dinatrón en rehabi-litación pero es de sumo interés por ser de corriente controlada.

d) TIPO DE REJILLA DE CARGA | 8 | (VOLTAJE CONTROLADO) .
ESPACIAL.

Un aumento de potencial en una rejilla de carga es pacial causa una corriente de ánodo incrementada, - de tal forma que si la corriente de cátodo es sufi-cientemente limitada, la corriente de la rejilla de carga espacial cae. La emisión limitada necesaria - se ha obtenido en el pasado primeramente por reduc-ción de la temperatura del filamento, conduciendo -

a una operación incierta e insatisfactoria.

e) TIPO ION POSITIVO (VOLTAJE CONTROLADO).

En un triodo que contiene gas a baja presión, un incremento en el voltaje de rejilla aumenta la corriente de placa y de allí la corriente de ión positivo a la rejilla negativa, por eso se obtiene resistencia negativa en el circuito de la rejilla. Este método es incierto, tiene un considerable tiempo de retraso, y produce solamente valores altos de resistencia negativa, pero se ha usado con mucha ventaja en amplificadores de corriente directa.

f) MAGNETRON DE ANODO PARTIDO (VOLTAJE CONTROLADO) | 9 |.

Si en un magnetrón cilíndrico el ánodo es dividido diametralmente en dos partes, y se aplica un campo magnético adecuado, una diferencia de potencial entre los dos segmentos del ánodo causa una corriente disminuida al elemento más positivo y un incremento de corriente al menos positivo. El tubo por lo tanto, presenta una característica de resistencia negativa. Si bien el método es confiable, su uso es algo inconveniente debido al campo magnético requerido. Ha encontrado buenas aplicaciones en trabajos a altas frecuencias donde es ventajosa una capaci -

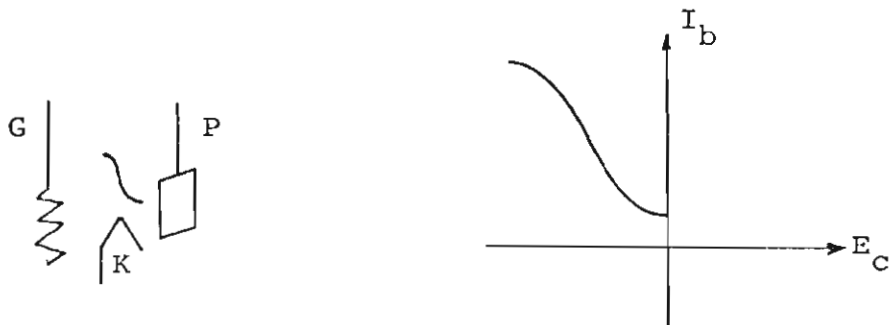
tancia interna muy baja.

3.3. APARATOS DE RESISTENCIA NEGATIVA DE ACOPLAMIENTO DIRECTO.

Los aparatos de más interés en este grupo son aquellos arreglos de tubos de vacío en los cuales, un incremento de potencial en un elemento, causa una disminución de corriente al otro elemento. Ya que la operación de todos los tubos de este tipo es similar, si bien las causas internas son diferentes, vale la pena examinar los aspectos generales de la producción de resistencia negativa por este medio, antes de nombrar algunos de éstos aparatos.

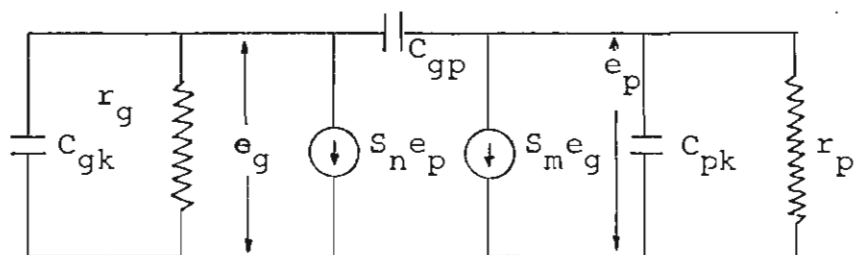
Para entrar en este grupo, un tubo de vacío debería tener transconductancia $|10|$ negativa entre dos de sus elementos. Las partes esenciales son: un elemento de control y un electrodo ánodo de salida, cualquier otro electrodo presente, si bien necesario para la operación, juegan poco papel o ninguno en la operación del circuito externo. El tubo puede considerarse como un triodo con transconductancia negativa; el factor de amplificación puede ser positivo o negativo dependiendo ya sea de la resistencia negativa o positiva del ánodo. En la figura 3.1.a. se muestra el símbolo del triodo modificado-

convenientemente para trabajar como un tubo de transconductancia negativa. Una característica típica de transferencia de tal tubo se muestra en la figura 3.1.b. El circuito equivalente es, por supuesto, el mismo como el del triódo usual y se muestra en la figura 3.1.c., donde S_m denota la transconductancia del elemento de control normal al ánodo y S_n denota, el inverso, o transconductancia de ánodo a elemento de control. Si bien en el análisis solamente se consideran efectos de primer orden, si S_m, S_n, r_g y r_p no se consideran constantes sino como una función de la amplitud, las conclusiones son igualmente válidas. Ordinariamente, en los casos más usuales, el electrodo de control está polarizado negativamente y así, no lleva corriente. La transconductancia S_n , es entonces cero. Por motivo de generalizar, no obstante, se ha incluido en el análisis.



a) Símbolo simplificado b) Característica típica de transferencia

Fig.3.1. Símbolo y características del tubo de transconductancia negativa.

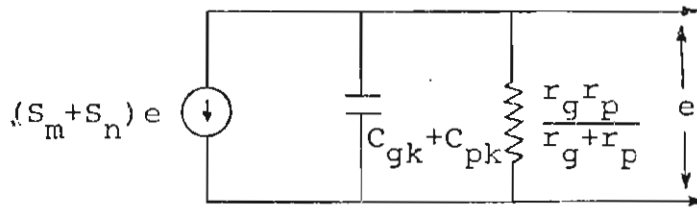
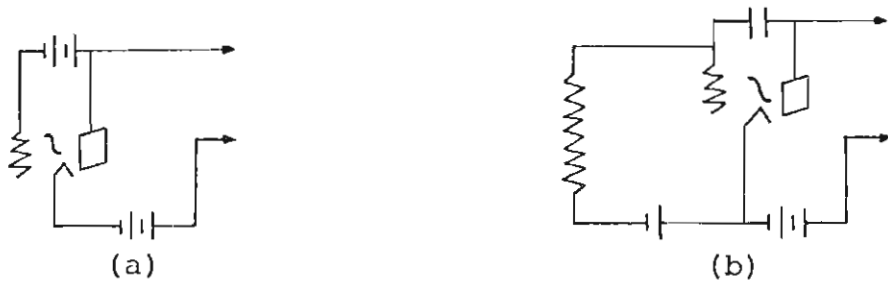


c) Circuito equivalente simplificado [11]

Fig.3.1. Tubo de Transconductancia negativa

Las conexiones que pueden hacerse en un tubo de transconductancia negativa para obtener resistencia negativa, se muestran en las figuras 3.2.a. y 3.2.b. En el circuito formado, se conecta una batería adecuada entre el ánodo y el elemento de control. Un incremento en el potencial del ánodo causa un crecimiento igual en el potencial del elemento de control, tal que, si los parámetros del tubo son de valores adecuados, la corriente total cae.

Un circuito equivalente y más exitoso para el fenómeno de la corriente alterna, se muestra en el segundo circuito en el cual el elemento de control y el ánodo están conectados a través de un gran condensador y el elemento de control se polariza a través de una alta-resistencia.



c) Circuito equivalente del caso de voltaje controlado

Fig.3.2. Producción de resistencia negativa de voltaje controlado.

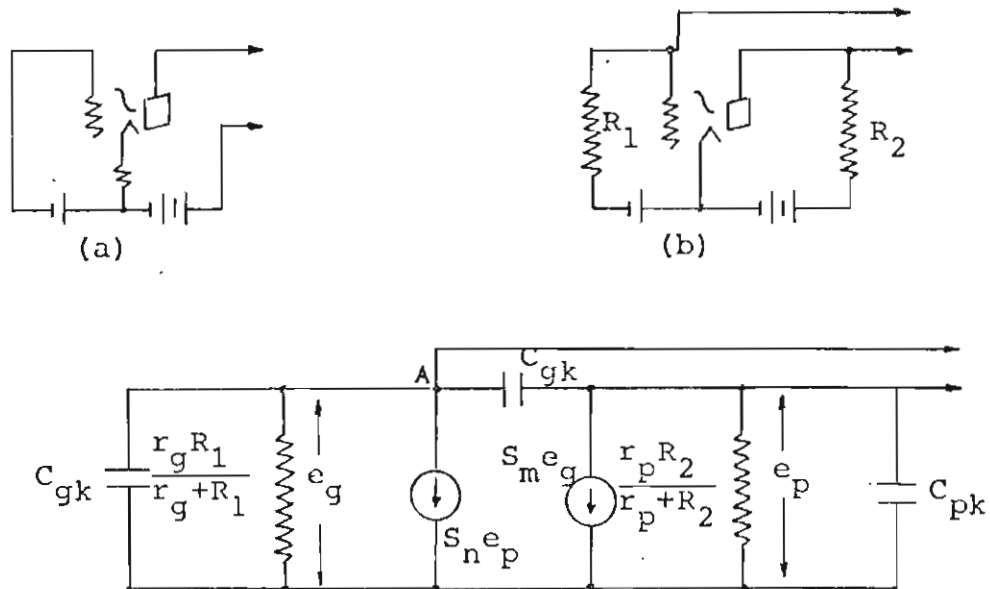
El circuito equivalente del primero y segundo arreglo, para una capacitancia muy alta y para un alto elemento de control (resistencia externa), se muestra en la figura 3.2.c. Una ligera inspección indica que el arreglo es equivalente a la resistencia:

$$R_v = \frac{1}{S_m + S_n + \frac{1}{r_g} + \frac{1}{r_p}} \quad (3.1.)$$

punteado por una capacitancia $C_v = C_{gk} + C_{pk}$

Si r_g y r_p son positivos, $S_m + S_n$ debe ser negativo y de mayor magnitud que $1/r_g + 1/r_p$ para que exista resistencia negativa. Es por esto deseable que r_g , r_p , y

S_m sean altas. Se notará que este circuito, al igual que otras resistencias negativas de voltaje controlado, pueden considerarse como una capacitancia y una resistencia en paralelo.



c) Circuito equivalente del caso de corriente controlada.

Fig.3.3. Producción de resistencia negativa de corriente controlada.

Dos circuitos adecuados para la producción de resistencia negativa de corriente controlada, se muestran en las figuras 3.3.a. y 3.3.b. En estos circuitos el potencial del elemento de control es proporcional, negativamente, a la corriente en el circuito. Un aumento en la corriente, ocasiona una disminución en el potencial del elemento de control, de tal manera que, si los parámetros del tubo son adecuados, la corriente

te de ánodo crece y el voltaje de ánodo cae. Así, la corriente de ánodo incrementada viene acompañada por una caída de voltaje, y resulta una resistencia negativa de corriente controlada. Un análisis del circuito equivalente del tubo y las condiciones mostradas - en la figura 3.3.c. indican que el circuito comprende una resistencia en serie con una inductancia efectiva, con el conjunto puentado por una capacitancia C_{gp} . - La impedancia existente en los terminales, despreciando C_{gp} , es:

donde:

$$Z_c = \frac{Z_g + Z_p + Z_g Z_p (S_m + S_n)}{1 - S_m S_n Z_g Z_p} \quad (3.2.)$$

$$\frac{1}{Z_g} = \frac{1}{r_g} + \frac{1}{R_1} + j\omega C_{gk} \quad (3.3.)$$

$$\frac{1}{Z_p} = \frac{1}{r_p} + \frac{1}{R_2} + j\omega C_{pk} \quad (3.4.)$$

El significado de estas expresiones se entiende mejor quizás por la simplificación que ocurre cuando la frecuencia es suficientemente baja, de tal forma que el ángulo de fase entre Z_g y Z_p es muy pequeño, $r_g \gg R_1$, $r_p \gg R_2$, y la transconductancia inversa es despreciada. En este caso el arreglo aparece como una resistencia:

$$R_c = R_1 R_2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + S_m \right) \quad (3.5.)$$

en serie con una inductancia:

$$L_c = - |C_{gk} R_1^2 (S_m R_2 + 1) + C_{pk} R_2^2 (S_m R_1 + 1)| \quad (3.6.)$$

el conjunto en paralelo con la capacitancia C_{gp} . Nuevamente se puede ver que es deseable un valor alto para S_m .

Como ya se mencionó, la presencia de C_{gp} ofrece la posibilidad de oscilación cuando el circuito externo tiene una resistencia muy alta. La condición para la oscilación es fácilmente derivada por medio de la aplicación de las leyes de Kirchhoff al circuito de la figura 3.3. Es conveniente considerar a R_1 , como una resistencia combinada de las resistencias interna y externa del elemento de control en paralelo y considerar a R_2 incluyendo la resistencia del ánodo. Si se considera esto, la corriente total que entra en el conductor inferior de la figura 3.3. es:

$$e_g \left(\frac{1}{R_1} + j\omega C_{gk} + S_m \right) - e_p \left(\frac{1}{R_2} + j\omega C_{pk} + S_n \right) = 0 \quad (3.7.)$$

La corriente total dirigida al punto A en la misma figura es:

$$e_g \left(\frac{1}{R_1} + j\omega C_{gk} \right) - S_n e_p + j\omega C_{gp} (e_g + e_p) = 0 \quad (3.8.)$$

La cual puede ser escrita:

$$e_g \left(\frac{1}{R_1} + j\omega C_{gk} + j\omega C_{gp} \right) + e_p (j\omega C_{gp} - S_n) = 0 \quad (3.9.)$$

Las únicas soluciones para esta ecuación son:

$$e_g = e_p = 0$$

o también:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{R_1} + j\omega C_{gk} + S_m\right) & -\left(\frac{1}{R_2} + j\omega C_{pk} + S_n\right) \\ \left(\frac{1}{R_1} + j\omega C_{gk} + j\omega C_{gp}\right) & (j\omega C_{gp} - S_n) \end{bmatrix} = 0 \quad (3.10)$$

Esto último, por supuesto, da la condición de auto-oscilación. Igualando las partes reales e imaginarias a cero da:

$$C_{gp} = -\frac{C_{gk}R_1 + C_{pk}R_2}{R_1 + R_2 + (S_m + S_n)R_1R_2} = -\frac{C_{gk}R_1 + C_{pk}R_2}{R_c}$$

$$\omega^2 = \frac{1}{R_1R_2C(C_{gk}C_{gp} + C_{pk}C_{gp} + C_{gk}C_{pk})} - \frac{S_m S_n}{C_{gk}C_{gp} + C_{pk}C_{gp} + C_{gk}C_{pk}}$$

Para que la oscilación no exista con un circuito abierto a los terminales del circuito de resistencia negativa de corriente controlada, C_{gp} debe ser menor que el valor dado anteriormente. Esto indica claramente que, para que un tubo sea capaz de producir resistencia negativa alta del tipo de corriente controlada, C_{gp} debe ser mucho más pequeña que las otras capacidades del tubo.

El resultado de todas las consideraciones indica que un tubo de buena transconductancia negativa debería tener: alta transconductancia, alta resistencia de ánodo, alta

resistencia del elemento de control y bajas capacitancias; en particular, la capacitancia del elemento de control al ánodo, si la resistencia negativa de corriente controlada ha de ser aplicable.

a) EL NEGATRON

En este tubo, la corriente en el filamento de un cátodo es desviada del uno al otro ánodo del lado opuesto del filamento por el potencial aplicado a una rejilla interpuesta entre el filamento y uno de los ánodos. Un incremento del potencial de la rejilla reduce la corriente del ánodo opuesto, tomando en cuenta que el filamento está operando a una temperatura suficientemente baja para mantener saturada la emisión. Los requerimientos más recientes hacen al Negatrón inadecuado e inconveniente ya que con él solamente se obtiene transconductancia baja.

b) TUBOS DEL CAMPO RETARDADO

En un tubo con un cátodo rodeado por una rejilla positiva, seguida por un elemento o grupo de elementos de bajo potencial, un incremento en el potencial de lo último, causa una disminución en la corriente de la rejilla al rededor del cátodo. En el caso de un tríodo con una rejilla positivamente alta y potencial ce-

ro o bajo en la placa, la transconductancia negativa-resultante no es plenamente aprovechable, a causa de la potencia consumida en la placa del elemento de control. Un arreglo muy probado es el tubo ordinario de rejilla de carga espacial en el cual una segunda rejilla polarizada negativamente y con ánodo polarizado positivamente son sustituidos por la placa del triodo. Se ha establecido que en tal tubo un incremento en el potencial de la segunda rejilla reduce la corriente por la rejilla que está más internamente, y que la transconductancia negativa puede ser todavía alta. Sin embargo, la resistencia de la primera rejilla es ordinariamente más baja, a menos que la temperatura del cátodo se reduzca. Esto no obstante conduce a una falta de confiabilidad.

c) TIPO EMISION SECUNDARIA

En un tetrodo usado como un dinatrón en la región en la cual la corriente en el dínodo es negativa, la primera transconductancia rejilla a dínodo es negativa. En este caso la resistencia del ánodo del tubo es negativa, mientras que en los dos grupos anteriores es, en general, positiva. La transconductancia negativa no es ordinariamente mayor a menos que la emisibilidad secundaria sea alta, pero el efecto ha sido usado para aumentar la resistencia negativa del dínodo en

un circuito de voltaje controlado acoplando la prime -
ra rejilla al dínodo. El método de alcanzar la resis -
tencia negativa, en este caso tiene desventajas simi -
lares a los otros aparatos que hacen uso de la emisión
secundaria.

d) METODOS DE TIEMPO DE TRANSITO DEL ELECTRON

Cuando se considera el tiempo de tránsito del electrón,
se encuentra que en ciertas bandas de ultra alta fre -
cuencia, la característica del tubo viene a invertirse.
La operación en tal banda es equivalente a invertir el
signo de la transconductancia (también una reducción-
en su amplitud), y un tubo de transconductancia positiva
ordinario usado en tal banda, puede producir una resis -
tencia negativa por acoplamiento directo de salida a -
entrada.

e) TUBOS DE ELECTRON CONTROLADO MAGNETICAMENTE

El magnetrón (no el del tipo de ánodo partido), puede -
usarse en circuitos de acoplamiento directo para alcan
zar resistencia negativa ya sea de tipo de corriente o
voltaje controlado. La auto-inductancia y el inconve -
niente devanado de campo, hacen de este medio de conse
guir resistencia negativa poco aplicable.

3.4. APARATOS ACOPLADOS DE FASE REVERSA

En este grupo están incluidos los arreglos comunes - de sistemas de amplificación, acoplando salida y entrada a través de un sistema o un circuito de inversión de fase. Un ejemplo que ilustra esta manera de obtener resistencia negativa en el tubo de vacío convencional con retroalimentación.

3.5. APLICACIONES DE LA RESISTENCIA NEGATIVA Y DE LA TRANSCONDUCTANCIA NEGATIVA.

3.5.1. APLICACIONES GENERALES

Una resistencia negativa puede estar conectada con otros elementos del circuito para la excitación de oscilaciones. Tales circuitos tienen la ventaja de la simplicidad y de una buena estabilidad de frecuencia. Una resistencia negativa de voltaje controlado puede usarse en paralelo con un circuito antiresonante, para producir oscilaciones a una frecuencia cercana a la de resonancia. Un aparato de control por corriente, de igual forma, puede usarse en un circuito serie para el mismo propósito. Las oscilaciones de relajación, son posibles con cualquier resistencia negativa, a condición de que el circuito externo sea adecuado.

Como un elemento de circuito en estado estable, contrastando con el estado oscilatorio, una resisten-cia negativa tiene muchos usos. La neutralización de resistencias positivas es factible teóricamente, pero solamente puede realizarse en forma experimen-tal y para una limitada extensión por razón de la inestabilidad.

Una clase de circuito que utiliza la resistencia ne-gativa es aquel que incluye las redes con capacitan-cia negativa o inductancia negativa o la combinación de ellas.

Para medir el trabajo tanto en bajas como en altas-frecuencias, se ha encontrado que son aplicables los arreglos de resistencia negativa. El comienzo de la oscilación, lo cual implica resistencia del cir-cuito nula, puede ser fácil y exactamente detecta-da, ya que, si es conocido el valor de la resisten-cia negativa en este punto, es también conocida la resistencia externa del circuito. Las resistencias negativas asociadas con circuitos calibrados en es-tado de oscilación, han sido frecuentemente utiliza-das como medidores de frecuencia-heterodina como ge-neradores de señal. La simplicidad y constancia de la frecuencia de los circuitos los hacen ventajosos.

En adición a las aplicaciones anteriores, algunos a rreglos particularmente de transconductancia negati va, tienen otras aplicaciones tanto como una resis tencia negativa. Por ejemplo, se puede usar un tu bo de transconductancia negativa como un amplifica dor, de la misma manera que el tubo de transconducta ncia positiva usual. La impedancia de salida en un tubo de transconductancia negativa que resulta - al realimentar a través de la capacitancia rejillaplaca, es aún diferente de aquella del tubo de transcon ductancia positiva, dando amplificación equiva - lente. En el caso usual de una carga del ánodo re sistiva resulta un aumento hacia la capacitancia - de entrada equivalente más alta, mientras que, con un tubo de transconductancia negativa, la capacitan cia de entrada equivalente se reduce por realimenta ción. Una inversión del signo de la conductancia - de entrada equivalente, también se encuentra en el tubo de transconductancia negativa, comparado con - el positivo, cuando se usan cargas reactivas al añ do. Otra aplicación posible como amplificador con ciertos tipos de tubos de transconductancia negati va, es aquel amplificador en el cual se toma la sa lida de dos ánodos de manera opuesta, en un elemen to de control común que tiene transconductancia po sitiva a un ánodo y negativa al otro, como ejemplo se tiene el tubo de tipo campo retardado. El tubo-

de transconductancia negativa es por supuesto, adecuado como un modulador o detector cuando opera en partes no lineales. Un gran número de arreglos circuitales que usan regeneración con simples resistencias son también posibles con tubos de transconductancia negativa, y especialmente con los tubos de campo re-tardado.

C A P I T U L O C U A R T O

S I N T E S I S D E R E D E S C O N

R E S I S T E N C I A S N E G A T I V A S

CAPITULO CUARTO

SINTESIS DE REDES CON RESISTENCIAS NEGATIVAS

4.1. INTRODUCCION A LAS TECNICAS DE REDES CON RESISTENCIAS NEGATIVAS

Este capítulo trata de las síntesis y propiedades de las redes lineales las cuales contienen una o más de las seis clases diferentes de elementos idealizados. Los elementos son: inductor positivo, capacitor positivo, resistencia positiva, transformador ideal, girador ideal y resistencia negativa. La inclusión de los dos últimos elementos anteriores significa que el análisis debe abarcar redes lineales no recíprocas y redes activas.

Es necesario considerar dos aspectos estrechamente relacionados. El primero es un método general para describir las propiedades de los terminales de una red, lo cual es válido aún cuando no existan los formalismos usuales de inmitancias y dispersiones. Estos formalismos generales son necesarios en el dominio activo, pero existen circuitos patológicos que no concuerdan con el alcance más general de la teoría de redes pasivas. Como resultado final de la primera sección en representación, se obtiene una téc

nica para operar apropiadamente en la descripción de una red, tal que los circuitos patológicos se desplacen y se obtenga una matriz inmitancia o dispersión— aún cuando ninguna de éstas exista inicialmente. Este método, por ejemplo, puede conducir a un circuito equivalente por la red degenerada, el cual muestra — simultáneamente las propiedades de un circuito abierto y de un cortocircuito a los terminales de entrada. La técnica es aplicable si los parámetros de la red son constantes o funciones racionales de la frecuencia. En efecto, esta primera parte del capítulo de muestra que cualquier relación lineal entre voltajes y corrientes en n puertas, puede construirse como — una red gráfica conteniendo el grupo de elementos pasivos y resistencias negativas. Esto se lleva en el dominio de la frecuencia compleja en términos de funciones racionales con coeficientes reales.

La segunda sección discute la síntesis de las redes— cuando una inmitancia puede hacerse aprovechable por los métodos de la primera sección. El análisis se — lleva desde redes de un par de terminales (una puerta), hasta redes de n pares de terminales (n puertas); técnicas de síntesis que utilizan un mínimo número — de resistencias positivas y negativas, lo cual de — muestra que una red de n puertas para su síntesis requiere no más de n resistencias positivas y n resis-

tencias negativas.

4.2. REPRESENTACION DE REDES PATOLOGICAS DE RESISTENCIAS NEGATIVAS (NULADOR, NORADOR)

El formalismo de redes escogido aquí para describir las relaciones lineales V-I en los terminales accesibles, es aplicable a todas las redes que tengan una representación gráfica. En esta descripción, las relaciones lineales entre voltajes y corrientes en los terminales de una red de n puertos son descritas como:

$$AV = BI \quad (4.1.a.)$$

o a su vez:

$$\begin{bmatrix} A, & -B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ I \end{bmatrix} = 0 \quad (4.1.b.)$$

Donde A y B son matrices cuadradas nxn, y V e I son matrices columna de n elementos, que representan voltajes y corrientes en las n puertos accesibles. Primeramente se indicará como (4.1.b.) puede definir representaciones de inmitancia o de dispersión.

Claramente se concluye que una inmitancia puede obtenerse de (4.1.) si A y B son no singulares. Luego:

$$Z = A^{-1}B \quad (A \text{ no singular}) \quad (4.1.c.)$$

$$Y = B^{-1} A \quad (B \text{ no singular}) \quad (4.1.d.)$$

Si los terminales de la red son series aumentadas - (ejemplo, elementos añadidos en serie con los terminales) con resistencias r_1, r_2, \dots, r_n , los - vectores voltaje y corriente V', I' en los nuevos - terminales tras las resistencias conectadas en serie, están relacionados con las variables originales V, I por:

$$I = I'$$

$$V = V' - RI'$$

donde R es una matriz diagonal (r_1, r_2, \dots, r_n)

Sustituyendo en (4.1.):

$$A[V' - RI'] = BI'$$

$$AV' - ARI' = BI'$$

$$AV' = [AR + B] I' \quad (4.2.)$$

Entonces si R puede ser realizada tal que $[AR + B]$ - sea no singular, la admitancia de la red aumentada es:

$$Y_A = [AR + B]^{-1} A \quad (4.3.a.)$$

Similarmente, aumentando conductancias en paralelo,

$G = \text{diagonal } (g_1, g_2, \dots, g_n)$ resulta:

$$Z_A = [A + BG]^{-1} B \quad (4.3.b.)$$

si $[A + BG]$ es no singular. Si se aplica (4.3.), se puede obtener una matriz de dispersión (Apendice I)

$$S = E_n - 2R^{1/2} Y_A R^{1/2} \quad (4.4.a.)$$

$$S = E_n - 2G^{1/2} Z_A G^{1/2} \quad (4.4.b.)$$

donde E_n es una matriz identidad $n \times n$, $R^{1/2} = \text{diagonal } (\sqrt{r_1}, \sqrt{r_2}, \dots, \sqrt{r_n})$ y similarmente para $G^{1/2}$.

Se tratará ahora de demostrar que la representación (4.1.b.), que contiene elementos reales, racionales, en función de la frecuencia compleja variable, siempre lleva a una red gráfica que contiene los seis elementos básicos mencionados anteriormente, en esta parte del capítulo no se intenta demostrar una síntesis mínima, sino solamente demostrar que dicha representación de red siempre existe. Para el efecto se planteará un primer teorema que presenta la condición bajo la cual es posible tener una síntesis, pero solamente añadiendo resistencias en los terminales de las n puertas desconocidas, para producir una matriz Z o Y las cuales son directamente responsables de la representación de la red. Siguiendo -

con esto, se tiene un procedimiento más general para el caso donde las resistencias aumentadas en serie no pueden inducir a una síntesis. Entonces se plantea un segundo teorema que considera el caso donde las matrices A y B son cuadradas y $[A, B]$ es de rango n . Finalmente un tercer teorema demuestra que cualquier matriz $[A, B]_{m \times 2n}$ de funciones racionales con coeficientes reales, puede sintetizarse como un sistema de n puertas con elementos pasivos concentrados y resistencias negativas, no importando que $[A, B]$ sea o no de rango n y se cumpla o no que A y B sean cuadradas, esto quiere decir que en el dominio de la frecuencia compleja, cualquier descripción lineal, racional, con coeficientes reales, de n puertas puede realizarse con el grupo de los seis elementos concentrados básicos. Se debe recalcar que este teorema general conduce a la síntesis de circuitos extremadamente patológicos y redes nuevas.

Uno de estos circuitos es aquel de una puerta el cual es simultáneamente un cortocircuito y un circuito abierto ($v=i=0$), o aquel de una puerta en el cual v e i son arbitrarios. Si bien la explicación de tales redes "raras" entra en el campo filosófico, no podemos negar su existencia.

Se procederá ahora al caso en el cual los formalismos de inmitancia o de dispersión usuales no existen.

Si los números de normalización [12] r_k o g_k de R o G en (4.4.) son unitarios, S existirá si $[A+B]$ es no singular. En general, esto siempre será cierto si la red es pasiva, pero esto no es necesariamente cierto si la red es activa, en este caso, A , B , $[A+B]$ pueden ser simultáneamente singulares, y además puede no ser posible encontrar una serie de números $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$ tal que $[AR+B]$ sea no singular. Entonces una posible degeneración que puede ocurrir con circuitos de resistencia negativa, es una descripción de red para la cual no exista ninguna Z , Y , o S . Como un ejemplo de tal situación se tiene:

$$AV=BI= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \quad (4.5.)$$

Si se puede formar una serie de números que definan R tal que $[AR+B]$ sea no singular ($[A+BG]$ no se considerará separadamente ya que los dos casos son exactamente duales), entonces Y_A puede formarse de acuerdo con (4.3.a.) y la red N correspondiente a $[A, -B]$ puede construirse por síntesis de Y_A y luego

aumentando $-R$ en serie con la estructura resultante se puede obtener N . Adicionalmente, si todas las r_k son positivas, se puede formar una S con números de normalización y la red N sintetizarse de esta S . En efecto las condiciones bajo las cuales R puede ser determinada tal que se pueda construir una matriz no singular $[AR+B]$ se analizará a continuación. Es aparente que si una tal R existe, todos sus elementos pueden escogerse positivos tal que la síntesis de Y_A o S pueda resultar de una serie de restricciones idénticas que para A y B .

Considerando la siguiente ecuación:

$$[AR+B] = [A, B] \begin{bmatrix} R \\ E_n \end{bmatrix}$$

Es claro aquí que:

$$\begin{bmatrix} R \\ E_n \end{bmatrix}$$

es de rango n , entonces por la regla del rango que establece que si $[AR+B]$ resulta ser no singular, necesariamente $[A, B]$ es de rango n . Esta condición sin embargo, no es suficiente y se deben establecer los requerimientos bajo los cuales el menor de una columna n de $[AR+B]$ no desaparezca. Para hacer esto, se aplica el teorema de B. - Cauchy [13] para -

obtener el determinante del producto de dos matrices rectangulares. Aquí, dichas matrices son de orden $n \times 2n$ y $2n \times n$ respectivamente. Este producto es igual a la suma de los productos de los menores formados de cada una. Cada término de esta suma es el producto del menor de la columna n -ésima de la primera matriz $[A, B]$, por el correspondiente menor de la n -ésima fila de

$$\begin{bmatrix} R \\ E \end{bmatrix}$$

Se ve claramente, que al menos uno de estos productos debe ser diferente de cero para que $[AR+B]$ sea no singular. Si más de un término es diferente de cero, los elementos positivos r_k pueden ajustarse de tal manera que la suma de dos o más términos diferentes de cero no se anulen entre sí. Para que por lo menos uno de los términos no desaparezca, un menor no nulo de la n -ésima fila de

$$\begin{bmatrix} R \\ E \end{bmatrix}$$

debe emparejarse con un menor no nulo de la n -ésima columna similar de $[A, B]$. Pero todos los menores de la n -ésima fila de

$$\begin{bmatrix} R \\ E \end{bmatrix}$$

formados de filas de R y filas no correspondientememente ordenadas de E son diferentes de cero, todos los otros menores son cero. De esta forma, si $n=3$ los siguientes menores no desaparecen: filas 1,2,3 de R; filas 1, 2 de R, 3 de E; fila 1 de R, 2, 3 de E; fila 1, 3 de R, 2 de E; etc. Cuando los menores se escogen de esta forma, serán llamados "menores complementarios de la enésima fila de"

$$\begin{bmatrix} R \\ E \end{bmatrix}$$

y se forman de filas complementarias de R y E. Se puede entonces formular como regla para que el determinante de $[AR+B]$ sea diferente de cero: Un menor complementario de la enésima columna de $[A, B]$ debe ser diferente de cero. (Este menor está formado por columnas complementarias de A y B). Tomando esto como verdadero, este menor será automáticamente emparejado con un menor complementario (por lo tanto no nulo) de la n-fila de la matriz

$$\begin{bmatrix} R \\ E \end{bmatrix}$$

Con estas consideraciones se puede plantear lo enfocado hasta este punto en forma de un teorema.

TEOREMA 1

Es condición necesaria y suficiente para que:

- 1.- Se construya una matriz inmitancia desde la matriz $n \times 2n$ $[A, B]$, definida con elementos que deben ser funciones reales y racionales, añadiendo resistencias positivas r_k a las n -puertas de la red; 0
- 2.- Se construya una matriz de dispersión real y racional con números de normalización r_k de puerta positiva desde la matriz $[A, B]$

Que $[A, B]$ contenga un menor de la n -columna distinto de cero, el cual está formado por columnas complementarias de A y B .

Como ejemplo consideremos las ecuaciones definidas por:

$$V_1 + V_2 = 0$$

$$I_1 + I_2 = 0$$

o a su vez:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ I \end{bmatrix} = 0$$

Hay que anotar que A , B y $[A+B]$ son singulares, -

(esta no es una red pasiva) sin embargo, el menor - complementario de $[A, B]$ formado de la primera coluna de A y la segunda de B ,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

no desaparece. De aquí que se puede encontrar una R apropiada, entonces:

$$[AR + B] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

y cualquier $r_1 \neq r_2$, ambos positivos, producirán una $[AR + B]$ no singular.

El caso más general que se considera a continuación, transformando la descripción de red $[A, B]$ para obtener una inmitancia o una representación de dispersión, es aquel en el cual $[A, B]$ no tiene menores - complementarias de la n -columna diferentes a cero, - pero todavía conserva el rango n .

Consideremos el siguiente desarrollo:

$$[A, B] \begin{bmatrix} V \\ I \end{bmatrix} = [A, B] \begin{bmatrix} P & P^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ I \end{bmatrix}.$$

$$= [A', B'] \begin{bmatrix} V' \\ I' \end{bmatrix} \quad (4.7.)$$

P es una matriz no singular de $2n \times 2n$ la cual realiza la operación elemental de intercambiar las columnas de $[A, B]$ y como tal es su propia inversa.- Así obtenemos:

$$[A, B]P = [A', B']$$

$$[A, B]P \cdot P = [A, B]$$

$$P \cdot P = 1$$

$$P^{-1} = P \quad (4.8)$$

$$[A', B'] = [A, B]P \quad (4.9.a.)$$

$$\begin{bmatrix} V' \\ I' \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} V \\ I \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V \\ I \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} V' \\ I' \end{bmatrix} \quad (4.9.b.)$$

Se demostrará ahora que si $[A, B]$ es de rango n , P- siempre puede escogerse de tal manera que A' en $[A', B']$ sea siempre no singular, entonces la matriz impedancia definida por (4.1.c.) existe; luego $[A', B']$ puede sintetizarse de esta descripción de impedancia. Finalmente, la síntesis de $[A, B]$ se puede obtener si se interpreta la operación descrita en (4.9.b.). Esto se hace, construyendo una red de $2n$ puertos que corresponda a P, n de las cuales se conectan a la red $[A', B']$ con V, I definidos en las n puertos sobrantes. Entonces las cantidades termi

nales V' , I' se transforman a V , I .

La primera parte de esta demostración es simple. - $[A, B]$ es de rango n , entonces tiene n columnas in dependientes. La matriz P de permutación de colu nas se escoge de tal forma que las n columnas de $[A, B]$, las mismas que forman un determinante que no desaparece, sean arregladas en tal posición que se encuentren con las primeras n columnas de $[A', B']$. De aquí, A' es de rango n y por (4.1.c.), la red correspondiente a $[A', B']$ tiene una matríz impe dancia $Z' = (A')^{-1}B'$. La red $[A', B']$ puede por con siguiente sintetizarse de Z' si $[A, B]$ contiene - elementos racionales |14|.

Queda por demostrarse que la transformación efectua da por P tiene una representación física. La ma - tríz P en (4.9.b.) es una matriz impedancia de - transferencia de constantes entre las puertas de sa lida

$$\begin{bmatrix} V' \\ I' \end{bmatrix}$$

con las puertas de entrada

$$\begin{bmatrix} V \\ I \end{bmatrix}$$

Como se indica en la figura 4.1, y está demostrado - en el apéndice II que la red de $2n$ puertas asociada

con P en esa figura tiene una representación $[A, B]$ la cual satisface el teorema 1.

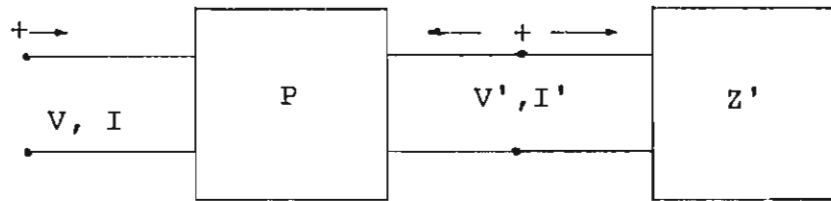


Fig.4.1. Transformación de una matriz impedancia

Donde P es realizable. De lo expuesto podemos concluir en el siguiente teorema:

TEOREMA 2

Una condición suficiente para que una matriz $[A, B]$ - $n \times 2n$ de funciones racionales con coeficientes reales sea representada como una red de n puertas (contenido $L, C, \pm R$, giradores y transformadores) es que $[A, B]$ contenga funciones reales, racionales y sea de rango n .

Como en el Teorema 1, las operaciones sobre A y B , que son matrices independientes de elementos constantes, son de la misma forma que las que se pueden hacer sobre $[A, B]$, de aquí, aún si $[A, B]$ tiene por elementos funciones reales, racionales, el proceso de transformación todavía puede ser efectuado como se establece en el Teorema 2.

Como un ejemplo de la técnica descrita, consideramos (4.5.) si ésta es expandida, obtenemos ecuaciones que definen una red de dos puertas.

$$v_1 = 0, \quad i_1 = 0 \quad (4.10)$$

$$v_2, \quad i_2 \text{ arbitrarios}$$

Los cuadripolos extraños así descritos se desempeñan simultáneamente como un corto-circuito y como un circuito abierto en la puerta uno.

La matriz $[A, B]$ es:

$$[A, B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Si se intercambian las columnas 2 y 3, la matriz resultante es $[A', B']$, la cual tiene una descripción de impedancia.

Entonces la (4.9.a.)

$$[A', B'] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [A, B] P$$

$$= [A, B] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [A, B] P$$

y por (4.1.c.)

$$Z' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Este es un elemento de dos puertas que consiste de dos corto-circuitos aislados. La matriz $[A, B]$ correspondiente a P , tal como fue anotado en el ejemplo anterior, puede escribirse a partir de la (II.2.b) del apéndice II

$$[A_P, B_P] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Las columnas 2, 3, 5 y 8 forman un menor complementario que no desaparece. Ahora se puede aumentar la red correspondiente a $[A, B]P$ con resistencias para obtener una representación admitancia, y además introducir el negativo de estas resistencias en serie con los terminales para obtener una realización de $2n$ puertas para P . En este caso es conveniente, aunque no necesario, escoger algunos valores negativos para las resistencias aumentadas.

Entonces para una R como en (4.2.), se podría escoger:

$$R = \text{diag} (-1, 1, -1, -1)$$

Resultando de aquí la matriz aumentada Y_A , por (4.3.a)

$$Y_A = [A_P R + B_P]^{-1} A_P$$

$$Y_A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Con esta admitancia se puede, por síntesis, obtener la red y las resistencias dadas por $-R$ se localizan en serie con las cuatro puertas, para dar la representación de P , y los dos corto-circuitos que corresponden a Z' localizados a través de las puertas 3 y 4, para realizar la matriz $[A, B]$ originalmente especificada en las puertas 1 y 2. (Fig. 4.2.)

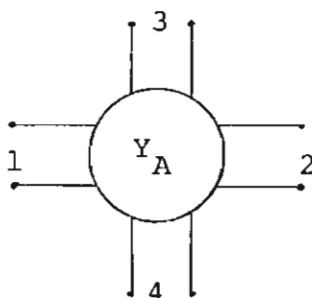


Fig.4.2. Obtención de $[A, B]$

De aquí se demuestra la existencia de una red que es un circuito abierto y un corto-circuito en una puerta dada. Sin embargo se debe puntualizar que mientras la síntesis técnica da una realización, el

método generalmente produce una red con elementos -
superfluos.

Una estructura simple que posee las mismas propieda
des que la red obtenida de la figura 4.2. se indica
en la figura 4.3.

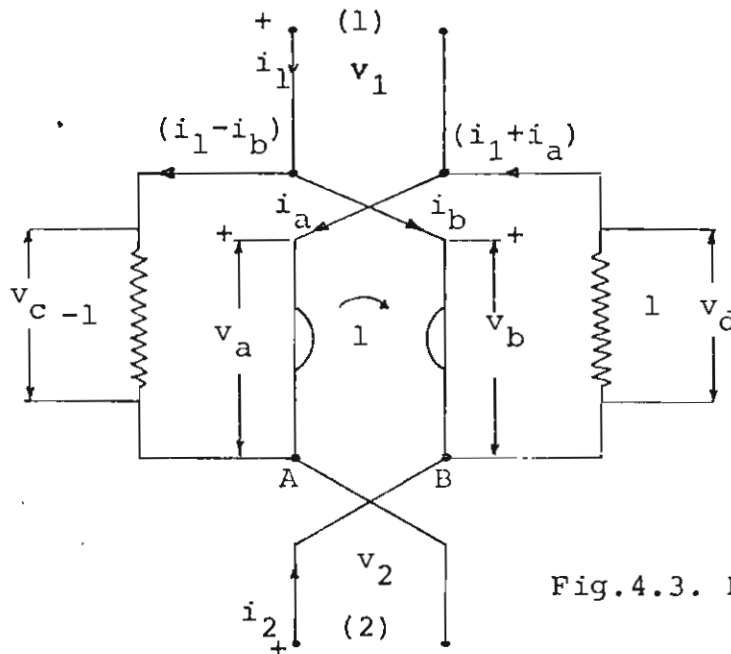


Fig.4.3. Realización de:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

Se demostrará a continuación que la red de la figu-
ra 4.3. cumple con las características mencionadas.
Aquí cabe señalar las características del girador -

|15|

$$\begin{bmatrix} v_b \\ i_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/G \\ G & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_a \\ -i_a \end{bmatrix}$$

donde: G= Conductancia girostática

en este caso $G = 1$

$$\begin{bmatrix} v_b \\ i_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_a \\ -i_a \end{bmatrix}$$

$$v_b = -i_a$$

$$i_b = v_a$$

De la figura 4.3; aplicando ecuaciones de malla.

$$v_1 = v_c - v_a ; \quad v_c = -1(i_1 - i_b) ; \quad v_a = i_b$$

$$v_1 = -i_1 + i_b - i_b \qquad v_1 = v_b + v_d ; \quad v_d = 1(i_1 + i_a)$$

$$v_1 = -i_1 \quad (x) \qquad v_1 = i_1 + i_a - i_a$$

$$v_1 = i_1 \quad (y)$$

Para que (x) y (y) se cumplan simultáneamente la única solución es que i_1 sea igual a cero.

$$\text{Por lo tanto} \quad i_1 = 0 \qquad v_1 = 0$$

Se demostrará ahora que i_2 y v_2 son arbitrarios:

Aplicando ecuación de malla

$$v_2 = -v_b + v_c \qquad v_2 = v_d + v_a$$

$$v_2 = +i_a + |-1(i_1 - i_b)| \qquad v_2 = i_1 + (i_a + i_b)1$$

$$v_2 = i_a - i_1 + i_b ; \quad i_1 = 0 \qquad v_2 = i_1 + i_a + i_b ; \quad i_1 = 0$$

$$v_2 = i_a + i_b \quad (z) \qquad v_2 = i_a + i_b \quad (w)$$

$$(z) - (w) \quad v_2 - v_2 = (i_a + i_b) - (i_a + i_b)$$

$$\text{o } v_2 = 0$$

$$v_2 = \frac{0}{0} \text{ ind.}$$

$$v_2 \text{ arbitrario}$$

Aplicando ecuaciones de nodos en A y B.

nodo A

$$i_2 = i_a + i_1 - i_b ; i_1 = 0$$

$$i_2 = i_a - i_b \quad (m)$$

nodo B

$$i_2 = i_1 + i_a - i_b ; i_1 = 0$$

$$i_2 = i_a - i_b \quad (n)$$

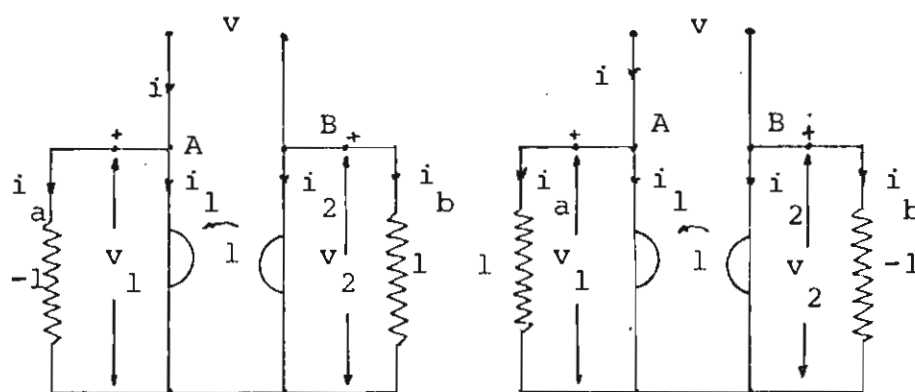
$$(m) - (n) \quad i_2 - i_2 = (i_a - i_b) - (i_a - i_b)$$

$$0i_2 = 0$$

$$i_2 = \frac{0}{0} \text{ ind.} \quad i_2 \quad \text{arbitrario}$$

La red de la figura 4.3. es ciertamente peculiar, pero una anomalía adicional de la puerta (1) definida por $v = i = 0$, es que la estructura demuestra utilizar elementos no recíprocos (girador), elementos con pérdidas ($R_1=1$) y elementos activos ($R_2=-1$), sin embargo definiendo las ecuaciones implican una red recíproca sin pérdidas (puesto que la potencia de entrada $vi=0$). Por lo tanto, esta monopuerta por su comportamiento requiere elementos no pasivos y no recíprocos para su realización.

Una propiedad adicional de la estructura de la figura 4.3. es que cuando la puerta (1) está terminada, es decir en corto-circuito o circuito abierto, la corriente y el voltaje en la puerta (2) son completamente arbitrarios. Un circuito equivalente de la puerta (1) se indica en la figura 4.4.a y de la puerta (2) en la figura 4.4.b.



a) $v = i = 0$

b) v, i arbitrarios

Fig.4.4 Redes degeneradas de una puerta

Fácilmente se demuestra que estas redes corresponden a las especificadas.

Para la figura 4.4.a:

Aplicando ecuaciones de nodo se tiene:

En el nodo A

$$i = i_1 + i_a$$

$$i_a = \frac{v_1}{-1} = -v_1;$$

$$i = i_1 - v_1$$

$v_1 = -i_2$ de las características del girador.

$$i = i_1 + i_2$$

En el nodo B

$$i = -i_2 - i_b$$

$$i_b = \frac{v_2}{1} = v_2$$

$$i = -i_2 - v_2$$

$v_2 = i_1$ de las características del girador.

$$i = -i_2 - i_1$$

Sumando estas ecuaciones de nodos que deben cumplirse simultáneamente se tiene

$$2i = 0$$

Por lo tanto $i = 0$

Aplicando ecuaciones de malla

$$v = v_1 - v_2$$

$v = -i_2 - i_1$ de las características del girador

$$v = -(i_1 + i_2)$$

$$\text{pero: } i_1 + i_2 = i = 0$$

por lo tanto $v = 0$

De igual forma para la figura 4.4.b.

$$i = i_a + i_1; i_a = \frac{v_1}{1} = v_1 \quad i = -i_2 - i_b; i_b = \frac{v_2}{-1} = -v_2$$

$$i = v_1 + i_1$$

$$i = -i_2 + v_2$$

$$i = -i_2 + i_1$$

$$i = -i_2 + i_1$$

cambiando de signo

$$-i = -i_1 + i_2$$

sumando estas ecuaciones de nodos

$$(i - i) = (i_1 - i_2) - (i_1 - i_2)$$

$0i = 0$; se cumple para cualquier valor de i arbitrario

$$v = v_1 - v_2$$

$$v = i_a \cdot 1 - i_b (-1)$$

$$v = -i_2 - i_1 \quad (\text{A})$$

$$v = i_a + i_b$$

$$i_a = \frac{v_1}{1}; i_b = \frac{v_2}{-1} = -v_2$$

cambiando de signo

$$-v = i_1 + i_2$$

$$v = v_1 - v_2$$

$$v = -i_2 - i_1 \quad (\text{B})$$

$$(\text{A}) + (\text{B}) \quad (v - v) = (i_1 + i_2) - (i_1 + i_2)$$

$$0v = 0$$

Se cumple para cualquier valor de v ; v arbitrario

Este género de estructuras anómalas son la base para la síntesis de la matriz $[A, B]$ cuyo rango normal

es $r \leq 2n$.

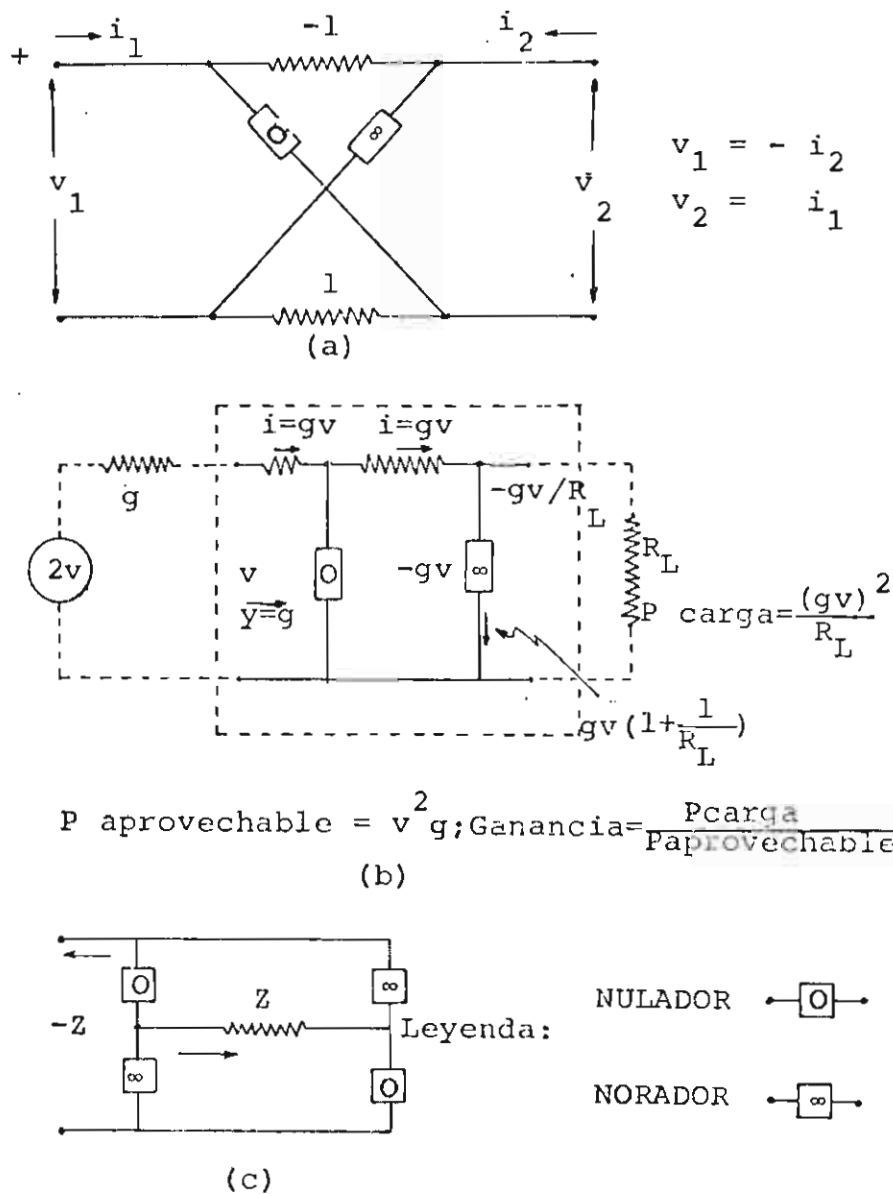


Fig. 4.5. Circuitos equivalentes utilizando NULADOR y NORADOR.

(a) Girador

(b) Amplificador de voltaje unilateral

(c) Convertidor de impedancia negativa.

Adicionalmente, una propiedad más importante de v , i arbitrarios es que define a la única monopuerta lineal no-recíproca. Este elemento, simultáneamente con el elemento $v = i = 0$, constituyen dos circuitos básicos cuyos nombres son: El elemento nulo, ($v = i = 0$) es llamado NULADOR, la monopuerta no-recíproca, (v, i arbitrarios) es llamada NORADOR. La figura 4.5 demuestra la interconexión de el NULADOR de el NORADOR para formar un girador, un amplificador unilateral y un convertidor de Impedancia negativa respectivamente.

A continuación se considera la síntesis del problema para el caso general de n -puertas cuando la representación $[A, B]$ existe pero no se han puntualizado restricciones especiales en lo que se refiere al rango normal de esta matriz. Las matrices A y B son cada una rectangulares, reales, racionales, de orden $m \times n$. Para este caso $[A, B]$ se transformará dentro de una simple forma canónica. Se considera entonces:

$$\begin{aligned}
 [A, B] \begin{bmatrix} V \\ I \end{bmatrix} &= Q [A, B] P P^{-1} \begin{bmatrix} V \\ I \end{bmatrix} \\
 &= [A', B'] \begin{bmatrix} V' \\ I' \end{bmatrix} = 0 \qquad (4.11.)
 \end{aligned}$$

con

$$[A', B'] = Q[A, B]P; \begin{bmatrix} V' \\ I' \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} V \\ I \end{bmatrix} \quad (4.12.a.)$$

Donde Q es de orden $m \times m$, P es de $2n \times 2n$ y se determinan para dar la forma canónica definida por:

$$[A', B'] = Q[A, B]P = \begin{bmatrix} E_r & O_{r, n-r} \\ O_{m-r, r} & O_{m-r, n-r} \end{bmatrix} \quad (4.12.b.)$$

Q y P representan matrices de funciones racionales, reales de p la cual ejecuta solamente operaciones elementales entre filas y columnas en $[A, B]$: Aquí Q y P son no singulares de rangos normales m y $2n$ respectivamente. Los factores resultantes corriente y voltaje I', V' satisfacen la ecuación (4.11). Luego refiriéndola a (4.12.b.) se pueden definir los voltajes y corrientes individuales de la red transformada y se distinguen dos casos:

Caso a:

$$0 \leq r \leq n \quad \text{para } n \leq m < 2n$$

$$v'_1 = v'_2 = \dots = v'_r = 0$$

Todos los otros voltajes y corrientes son arbitrarios.

Caso b:

$$n \leq r \leq 2n \quad \text{para } m \geq 2n$$

$$v'_1 = v'_2 = \dots = v'_n = 0$$

$$i'_1 = i'_2 = \dots = i'_{r-n} = 0$$

Las restantes $2n-r$ corrientes son arbitrarias

En el caso a, la red representada por $[A', B']$ consiste de n monopuertas desacopladas. De estas, r son corto-circuito y $n-r$ tienen voltajes y corrientes arbitrarios en sus terminales, tal que, cada uno de estos pueden representarse por el NORADOR de la figura 4.4.b.

En el caso b, $[A', B']$ está nuevamente representada por n monopuertas desacopladas, $r-n$ de las cuales son NULADOR como el indicado en la figura 4.4.a. ($v'_k = i'_k = 0$), mientras las $2n-r$ restantes son cortocircuitos.

En cualquiera de los dos casos, las n monopuertas desacopladas son conectadas a través de n de las $2n$ puertas que corresponden a P^{-1} , y las restantes n puertas de P^{-1} constituyen la entrada para las variables V, I prescritas. Lo que resta por demostrarse es que la transformación P^{-1} se puede siempre realizar como una red de $2n$ puertas.

Se considera la matriz:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}$$

Si la segunda ecuación de (4.12.a) se escribe en la forma $[A, B]$

$$\begin{bmatrix} A_1 & -E_n & A_2 & 0 \\ A_3 & 0 & A_4 & -E_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ V' \\ I \\ I' \end{bmatrix} = 0 \quad (4.13)$$

El menor:

$$\begin{bmatrix} -E_n & 0 \\ 0 & -E_n \end{bmatrix}$$

en 4.13 forma un determinante de orden $2n$ que no desaparece y por el teorema 2, la red correspondiente a P^{-1} puede realizarse de la representación $[A, B]$.

Se puede ahora resumir los resultados de esta sección en forma de un teorema general:

TEOREMA 3

Si una matriz $[A, B]$ $m \times 2n$ (A y B son matrices rectangulares de orden $m \times n$) de rango normal $r \leq 2n$, contiene funciones reales, racionales, la descripción $AV = BI$ puede siempre realizarse como una red de n puertas que contiene elementos pasivos y resistencias negativas.

Cabe reiterar en este punto que como una condición-necesaria para que una matriz $[A, B]$ pueda realizarse como una red de n puertas, con elementos pasivos es que $[A, B]$ debe ser de rango normal n . Si esto no se satisface, se requieren resistencias negativas y uno de los métodos descritos anteriormente.

4.3. SINTESIS CON UN RESTRINGIDO NUMERO DE RESISTENCIAS

Se ha demostrado anteriormente que inclusive en ausencia de cualquier formalismo usual tal como inmitancias o dispersiones, la síntesis global de cualquier sistema se puede conseguir teniendo como recurso la matriz $[A, B]$ que existe siempre que la red tenga una representación gráfica. En esta parte se dará principal atención a la clase de problema en el cual una representación inmitancia hace posible su existencia y en este caso se requiere un mínimo número de elementos resistores. Como resultado final se tiene que cualquier matriz inmitancia racional $n \times n$, con coeficientes reales, puede siempre construirse como un sistema de n puertas, que contiene elementos pasivos sin pérdidas y en suma admite a lo más n resistencias positivas y n resistencias negativas. Por otra parte, se sigue un proceso que va desde casos restrictivos hacia el resul

tado más general. En el teorema 4 se consideran redes de n puertas las cuales contienen elementos sin pérdidas y resistencias negativas. El teorema 5 extiende la síntesis a matrices racionales con coeficientes reales cuyos polos del semi-plano derecho - y del semi-plano izquierdo son arbitrarios en localización y orden, pero cuyos polos límites ($p=jw$) - son simples. El problema para polos ilimitados se trata entonces, primero para una puerta y finalmente para n puertas.

El teorema 6 considera la mono-puerta especial que tiene una función inmitancia particular en la frequencia compleja variable p ; y el teorema 7 generaliza estos resultados para la mono-puerta con una función inmitancia con coeficientes reales totalmente arbitraria; y esto demuestra que para la mono - puerta general son suficientes una resistencia positiva y una resistencia negativa. La generalización final para matrices inmitancias $n \times n$ que contienen funciones racionales completamente arbitrarias (sin restricciones en cuanto a la localización y multiplicidad de los polos), con coeficientes reales, se da el teorema 8, el cual indica que, cuando más se requieren n resistencias positivas y n resistencias negativas para n puertas. El teorema 9 establece -

que si la matriz inmitancia racional $n \times n$ es simétrica, la realización requiere solamente elementos recíprocos, pero nuevamente son suficientes n resistencias positivas y n resistencias negativas.

Se considerará primeramente una red en la cual todas las resistencias son negativas. Es claro que la potencia absorbida en tal estructura es siempre negativa, de tal forma que para frecuencias reales se tiene, según el apéndice III que:

$$2 P(\omega) = \mathbf{I}^* \left[\mathbf{Z}(p) + \mathbf{Z}'(-p) \right] \mathbf{I} \Big|_{p=j\omega} \leq 0$$

Entonces:

$$\mathbf{Z}_H = \mathbf{Z}(p) + \mathbf{Z}'(-p)$$

debe ser la matriz de una forma definida negativa (o semi-definida) en $j\omega$. (En dicha ecuación primera (') indica matriz transpuesta, asterisco (*) indica compleja conjugada transpuesta, y la frecuencia compleja $p = \sigma + j\omega$). Entonces con $-\mathbf{Z}(p)$ la red debe tener una potencia positiva formada en $j\omega$.

Aún más, se puede demostrar que una condición necesaria para que una red $\mathbf{Z}(p)$ contenga solamente resistencias negativas es que $-\mathbf{Z}(p)$ sea una matriz real positiva [16]. Para demostrar esto, se supone que se visualizan las n puertas de $\mathbf{Z}(p)$ como una red -

reactiva $Z_{o(p)}$ de $n + m$ puertas, con todas las m resistencias consideradas conectadas a las m puertas de $Z_{o(p)}$, y con las restantes n puertas como los terminales de entrada de $Z_{(p)}$. Esto se representa en la figura 4.6. Si $Z_{o(p)}$ se divide para hacer evidente las $n+m$ puertas se tiene:

$$Z_{o(p)} = \begin{bmatrix} Z_{nn}(p) & Z_{nm}(p) \\ Z_{mn}(p) & Z_{mm}(p) \end{bmatrix}$$

Aquí los elementos son submatrices y representan las impedancias propias y mutuas entre la n y m puertas.

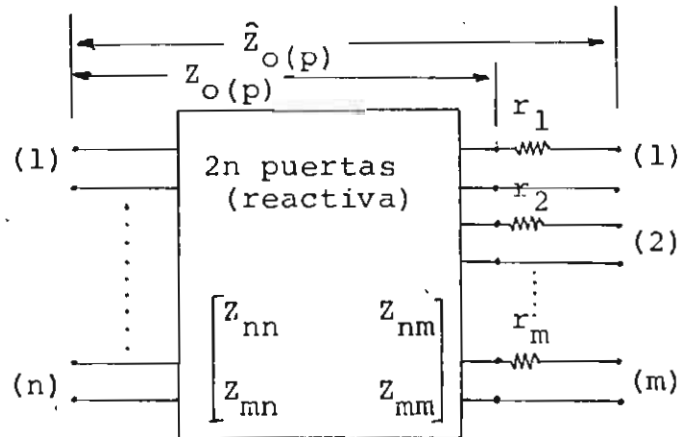


Fig. 4.6. Red de $n+m$ puertas (reactiva) con terminaciones resistivas.

Si las resistencias se conectan a las m puertas, por el momento estas puertas no están cerradas, la matriz $Z_{o(p)}$ se transforma en:

$$\hat{z}_o(p) = \begin{bmatrix} z_{nn}(p) & z_{nm}(p) \\ z_{mn}(p) & z_{mm}(p) - R \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Donde $-R = \text{diag}(r_1, \dots, r_m)$, $r_k > 0$. Si ahora se cierran las m puertas a través de resistencias $-r_k$ la matriz impedancia en las n puertas accesibles es $Z(p)$. La fórmula de reducción que puede usarse para dar una expresión para $Z(p)$ en términos de los elementos de la (4.14):

$$Z(p) = z_{nn}(p) - z_{nm}(p) \left[z_{mm}(p) - R \right]^{-1} z_{mn}(p) \quad (4.15)$$

Se observa que al ser $Z_o(p)$ reactiva, debe ser anti-hermitiana [17] en $p = j\omega$, o en términos de la frecuencia compleja variable p ,

$$\begin{aligned} z_{nn}(p) &= -z'_{nn}(-p), & z_{mm}(p) &= -z'_{mm}(-p), \\ z_{nm}(p) &= -z'_{mn}(-p), \end{aligned} \quad (4.16)$$

en cualquier lugar del plano complejo p .

Substituyendo (4.16) en (4.15) se tiene:

$$Z(p) = -z'_{nn}(-p) + z'_{mn}(-p) \left[z'_{mm}(-p) + R \right]^{-1} z'_{nm}(-p)$$

$$Z(p) = - \left[z_{nn}(-p) - z_{nm}(-p) \left[z_{mm}(-p) + R \right]^{-1} z_{mn}(-p) \right]'$$

$$\text{y:} \quad (4.17)$$

$$-z'_{nm}(-p) = z_{nn}(p) - z_{nm}(p) \left[z_{mm}(p) + R \right]^{-1} z_{mn}(p) \quad (4.18)$$

Comparando (4.18) con (4.15), se ve claramente que $-Z'_{(-p)}$ es la matriz impedancia de una red reactiva de $n+m$ puert \bar{a} s, m de las cuales est \bar{a} n terminadas en resistencias positivas r_k .

De aqu \bar{a} , $-Z'_{(-p)}$ es una matriz real positiva y su $-$ transpuesta $-Z_{(-p)}$ es tambi \bar{e} n real positiva. Esto establece una condici \bar{o} n necesaria para una red de $-$ resistencia negativa.

Una prueba suficiente se demuestra si, dada una $Z_{(p)}$ $n \times n$, tal que $-Z_{(-p)}$ sea una matriz real positiva, $-$ se demuestra que la red correspondiente a $Z_{(p)}$ existe y contiene solamente elementos reactivos puros y resistencias negativas. Se demuestra tambi \bar{e} n que tal red se puede sintetizar. Puesto que $-Z_{(p)}$ es real positiva, as \bar{i} tambi \bar{e} n lo es $-Z'_{(-p)}$ y \bar{e} sta puede construirse como un sistema reactivo de $2n$ puert \bar{a} s, n de las cuales terminan en resistencias positivas. Si el sistema de $2n$ puert \bar{a} s reactivo es $Z_{o(p)}$, entonces en t \bar{e} rminos de las impedancias propias y mutuas en los dos grupos de puert \bar{a} s determinadas de la red (n accesibles, n terminadas en resistencias positivas), la forma de $-Z'_{(-p)}$ est \bar{a} dada por (4.18). Ahora si las resistencias r_k se cambian cada una por $-r_k$ es claro que (4.18) cambia a (4.15), y se ha exhibido $Z_{(p)}$ tan solo sintetizan

do $-Z'_{(-p)}$ y cambiando los signos de todas las n resistencias positivas. De lo anotado podemos concluir en el siguiente teorema:

TEOREMA 4

La condición necesaria y suficiente que debe cumplir una matriz $Z_{(p)}$ $n \times n$ de funciones reales, racionales, que correspondan a una red que contenga solamente elementos sin pérdidas y resistencias negativas, es que $Z_{(-p)}$ sea una matriz Real Positiva. Además, la red que corresponde a $Z_{(p)}$ puede siempre sintetizarse como una estructura que contiene cuando más n resistencias negativas.

Como una consecuencia del teorema 4, se demuestra que cualquier matriz $Z_{(p)}$ real, racional, de dimensiones $n \times n$ puede sintetizarse con no más de n resistencias negativas y n resistencias positivas, con tal que $Z_{(p)}$ contenga polos límites simples en $j\omega$. Para ver esto, se representa $Z_{(p)}$ como:

$$Z_{(p)} = Z_{R(p)} + Z_{L(p)} + Z_{B(p)}$$

donde los tres términos impedancia contienen respectivamente el semi-plano derecho, el semi-plano izquierdo y los polos límites de $Z_{(p)}$. El término $Z_{B(p)}$ es fácilmente analizado ya que contiene solamente polos límites simples y representa entonces una red puramente reactiva en serie con otros dos-

(polos de orden más alto en el límite incluyendo el punto en el infinito no se consideran por hipótesis)

Los términos $Z_{R(p)}$ y $Z_{L(p)}$ son finitos para cualquier $j\omega$, ya que ellos no contienen polos límites, por lo tanto $R = \text{diag}(r_1, r_2, \dots, r_n)$, $r_k \geq 0$ puede escogerse siempre de tal forma que la parte hermítica de $Z_1 = -R + Z_{R(p)}$ sea una matriz de forma definida negativa y la parte hermítica de $Z_2 = R + Z_{L(p)}$ sea una matriz de forma definida positiva. En adición $Z_2(p)$ es analítica en el semi-plano derecho, ya que una matriz real positiva es realizable con elementos reactivos y con n resistencias positivas. Además, puesto que $Z_{R(p)}$ tiene polos solamente en el semi-plano derecho, $Z_{R(-p)}$ es analítica en el semi-plano derecho y con

$$-Z_1(-p) = R - Z_{R(-p)}$$

es claro que $-Z_1(-p)$ es real positiva puesto que tiene una parte hermítica positiva, no tiene polos en $j\omega$, y es analítica en el semi-plano derecho. Entonces por el teorema 4, $Z_1(p)$ es realizable con elementos sin pérdidas y n resistencias negativas. Puesto que $Z(p) = Z_1(p) + Z_2(p) + Z_B(p)$, se sintetiza $Z(p)$ con n resistencias positivas y n resistencias negativas. De aquí se concluye en un nuevo

teorema:

TEOREMA 5

Cualquier matriz inmitancia real $n \times n$, racional, con polos ilimitados, excepto que estos en $j\omega$ son sim - ples, puede realizarse como una red que contiene e - lementos sin pérdidas y cuando más n resistencias - positivas y n resistencias negativas.

Este teorema indica que bajo ciertas restricciones - (polos límites simples), es posible la síntesis con un mínimo número de resistencias. Es claro que en - el caso especial de que Z sea simétrica, así tam - bién serán $Z_1(p)$, $Z_2(p)$, $Z_B(p)$, y por lo tanto, es - tos elementos se realizan con redes recíprocas. Co - mo un corolario del teorema 5 se tiene que bajo la - obligación de tener polos límites simples o bien, - la matriz inmitancia arbitraria $n \times n$, simétrica, ra - cional, con coeficientes reales, puede sintetizarse como un sistema de n puertas con elementos recípro - cos sin pérdidas y cuando más n resistencias positi - vas y n resistencias negativas.

Se procederá ahora al caso general de una matriz in - mitancia en la cual se permiten polos límites de or - den arbitrario (incluyendo el punto en el infinito).

Se considerará primeramente la mono- puerta o inmitancia de excitación, la cual se trata a continuación.

4.4. FUNCIONES INMITANCIA DE EXCITACION GENERALES

En esta parte se demostrará que la síntesis de una función inmitancia de excitación arbitraria, racional, real, necesita elementos recíprocos y no más de una resistencia negativa. Se considera primeramente una red recíproca de dos puertas terminada en una resistencia de -1 ohmio. El factor de reflexión (Apéndice I) de entrada a dicha red es:

$$S_o = S_{11} + \frac{S_{12}^2 S}{S_{11} - S S_{22}}, \quad (4.19)$$

donde S es el factor de reflexión de la impedancia terminal, y S_{jk} son funciones de dispersión de las dos puertas. Cuando la terminación se acerca a -1 , $S \rightarrow \infty$ de tal forma que la (4.19) se transforma en:

$$S_o = S_{11} - \frac{S_{12}^2}{S_{22}} \quad (4.20)$$

Si se supone que $S_{11} = 0$

$$S_o = - \frac{S_{12}^2}{S_{22}} \quad S_{11} = 0 \quad (4.21)$$

Se mostrará ahora una matriz de dispersión real, li

mitada, ($S \leq M$ finito) simétrica (de aquí la red pasiva recíproca), definida por funciones apropiadas-
 $S_{11} = 0$, S_{12} , S_{22} , que corresponden a cualquier función prescrita s_o arbitraria, real, racional. Se obtiene s_o por terminación del sistema pasivo de dos puertas en -1 ohmio.

Escribiendo el factor de reflexión prescrito $s_o(p)$ en la forma de numerador y denominador con polinomios

$$S_o(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{N_R(p)N_L(p)}{D_R(p)D_L(p)} \quad (4.22)$$

donde los subíndices R y L designan los factores raíz del semi-plano derecho e izquierdo respectivamente, y cualquier raíz en el eje finito $p=j\omega$ son incluidas en los factores "R".

Entonces:

$$\begin{aligned} S_o &= \frac{N_R(p)}{D_L(p)} \cdot \frac{1}{\frac{D_R(p)}{N_L(p)}} \\ &= \frac{K^2 N_R(p) \bar{N}_R(p)}{D_L(p) \bar{D}_L(p)} \cdot \frac{1}{K^2 \frac{D_R(p) N_R(p)}{N_L(p) \bar{D}_L(p)}} \quad (4.23) \end{aligned}$$

K^2 es una constante real positiva y los polinomios-
 $\bar{N}_R(p)$ y $\bar{D}_L(p)$ se escogen de tal manera que $N_R \bar{N}_R$ y $D_L \bar{D}_L$ sean cuadrados perfectos. Además, el exceso de factores de \bar{N}_R y \bar{D}_L se escogen de orden suficien

temente alto tal que:

$$\text{grado } (D_L \bar{D}_L) \geq \text{grado } (N_R \bar{N}_R) \quad (4.24)$$

$$\text{grado } (N_L \bar{D}_L) \geq \text{grado } (D_R \bar{N}_R) \quad (4.25)$$

Se nota que si D_L y/o N_L es una constante, se inserta arbitrariamente un factor de raíz del semi-plano izquierdo localizado en el eje σ y localizado éste dentro de $\bar{D}_L(p)$.

Usando como una guía la (4.21), se indentificará ahora:

$$S_{12}^2 = K^2 \frac{N_R(p) \bar{N}_R(p)}{D_L(p) \bar{D}_L(p)} = K^2 \frac{N_{12}^2(p)}{D_{12}^2(p)} \quad (4.26)$$

$$S_{12} = K \frac{N_{12}(p)}{D_{12}(p)} \quad (4.27)$$

$$S_{22} = -K^2 \frac{D_R(p) \bar{N}_R(p)}{N_L(p) \bar{D}_L(p)} \quad (4.28)$$

Se observa que S_{12} y S_{22} son analíticas en el semi-plano derecho y en cualquier parte del límite, incluyendo el punto en el infinito, en virtud del método delineado para escoger los factores. Además se satisface la ecuación (4.21). Ahora se escogerá K de tal manera que garantice la pasividad del sistema de dos puertas cuya matriz de dispersión es:

$$S = \begin{bmatrix} 0 & S_{12} \\ S_{12} & S_{22} \end{bmatrix}$$

Esto se hace de la siguiente manera; si S es finita y real, sus elementos deben ser analíticos en el semi-plano derecho (condición ya satisfecha) y la matriz hermítica.

$$E - S(-p)S(p) \Big|_{p=j\omega} = Q(\omega^2) \quad (4.29)$$

debe ser positiva; esto es

$$|S_{12}|^2 = S_{12}(p)S_{12}(-p) \Big|_{p=j\omega} \leq 1 \quad (4.30)$$

$$|S_{22}|^2 = S_{22}(p)S_{22}(-p) \Big|_{p=j\omega} \leq 1 \quad (4.31)$$

$$\text{y además: } \text{Det}Q(\omega^2) \geq 0 \quad (4.32.a)$$

pero se tiene

$$\text{Det}Q(\omega^2) = [1 - |S_{12}(j\omega)|^2]^2 - |S_{22}(j\omega)|^2 \geq 0 \quad (4.32.b)$$

$$\circ |S_{12}(j\omega)|^2 + |S_{22}(j\omega)| \leq 1 \quad (4.33)$$

Si esto es cierto, se satisfacen automáticamente las desigualdades (4.30) y (4.31), de tal manera que solamente la desigualdad (4.33) es necesaria para asegurar la positividad de Q .

Substituyendo las ecuaciones (4.27) y (4.28) en (4.33) se tiene una desigualdad que define K^2 :

$$K^2 \left[\left| \frac{N_{12}}{D_{12}} \right|^2 + \left| \frac{D_R \bar{N}_R}{N_L D_L} \right| \right]_{p=j\omega} \leq 1 \quad (4.34)$$

Ya que $D_{12}(p)$, $N_L(p)$, $\bar{D}_L(p)$, no tienen polos en $j\omega$, las cantidades dentro del paréntesis tienen un máximo finito M , y K^2 se escoge como $1/M$, tal que la desigualdad (4.34) pueda siempre satisfacerse. Esto completa la determinación de S , y la inmitancia de entrada prescrita se obtiene sintetizando las dos puertas correspondientes a S y luego terminando la salida de estas dos puertas en una resistencia de -1 ohmio.

Como un caso especial de singular importancia se tiene si se supone que la impedancia de excitación prescrita es una función impar. Entonces

$$S_{0(p)} S_{0(-p)} = \frac{Z(p)^{-1}}{Z(p)^{+1}} \cdot \frac{-Z(p)^{-1}}{-Z(p)^{+1}} = 1$$

o $S_{0(p)}$ es una función paso que no tiene polos límites y se puede escribir como un producto "Blaschke" finito.

$$S_{0(p)} = \prod \frac{(p - \alpha_k) (p - \alpha_k^*)}{(p + \alpha_k) (p + \alpha_k^*)}$$

donde los α_k pueden estar en el semi-plano derecho o izquierdo.

Puesto que las raíces del semi-plano derecho e izquierdo son siempre pareadas, $S_{12}(p)$ y $S_{22}(p)$ dadas en (4.27) y (4.28) contienen similarmente raíces acopladas y polos pares, y las amplitudes de estas-

funciones son respectivamente K y K^2 en $p=j\omega$. Entonces (4.34) se transforma en

$$2K^2 \leq 1$$

y el máximo valor permisible de K^2 está dado por:
 $k^2 = 1/2$.

Refiriendo a (4.32), esto significa

$$\text{Det}Q_{(\omega^2)}=0$$

de tal forma que el rango de Q es 1. $S_{(p)}$ por lo tanto corresponde a una red reducida (una red reducida corresponde a un sistema de dos puertas en la cual $|\text{Re}Z_{(j\omega)}|=1$; esta condición se satisface si $Q_{(\omega^2)}$ es de rango 1). De aquí se deduce que para esta síntesis se requiere solamente una resistencia positiva. Se puede concluir por lo tanto en el siguiente teorema:

TEOREMA 6

Una función inmitancia de excitación real, impar, racional, ($Z_{(p)} = -Z_{(-p)}$) puede siempre sintetizarse con elementos concentrados sin pérdidas y cuando más una resistencia positiva y una resistencia negativa. Alternativamente esto se cumple cuando la función de reflexión de entrada es real y racional y satisface que $S_{o(p)} S_{o(-p)} = 1$.

Como un ejemplo de aplicación del teorema 6, se indica la síntesis de $Z_{(p)} = p^3$. El factor de reflexión es: (Apéndice I)

$$S_o = \frac{p^3 - 1}{p^3 + 1} = \frac{(p-1)(p^2+p+1)}{(p+1)(p^2-p+1)}$$

lo cual de acuerdo a (4.23), se escribe en la forma:

$$S_o = K^2 \frac{(p-1)(p-1)}{(p+1)(p+1)} \cdot \frac{1}{K^2 \frac{p^2-p+1}{p^2+p+1} \cdot \frac{p-1}{p+1}}$$

Entonces

$$S_{11} = 0; \quad S_{12} = S_{21} = K \frac{p-1}{p+1}$$

$$S_{22} = -K^2 \cdot \frac{p^2-p+1}{p^2+p+1} \cdot \frac{p-1}{p+1}$$

y con

$$k = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

estas funciones definen un sistema de dos puertas físicamente realizable que contiene una resistencia positiva. $Z_{(p)}$ se establece haciendo terminar las salidas de esta doble puerta con una resistencia de $1\ \Omega$.

Ahora se generalizará el teorema 6 y se demostrará que para cualquier función inmitancia de excitación real, racional, se requiere no más de una resistencia positiva y una resistencia negativa para su síntesis-

como una red recíproca. La técnica a usarse requiere la supresión de los polos límites y luego realizar la síntesis de acuerdo al teorema 5.

Se considera primero una función inmitancia $Z(p) = N(p)/D(p)$ la cual no es puramente impar. Ahora aumentando $Z(p)$ para conseguir

$$\bar{Z}(p) = \frac{N(p)}{D(p)} - Ap - \frac{B}{p} \quad (4.35)$$

Se escogen A y B (constantes reales positivas) de tal manera que $Z(p)$ no contenga ceros en ningún lugar de $p = j\omega$, incluyendo el punto en el infinito. Para ver como se hace esto, se escribe la (4.35) como

$$\bar{Z}(p) = \frac{pN - Ap^2D - BD}{pD} \quad (4.36)$$

Examinando la ecuación (4.36)

1) Se selecciona A tal que p^2D sea del mismo grado que pN , las potencias mayores de pN y Ap^2D se cancelan. Esto garantiza que el grado del denominador \bar{Z}_p no exceda al grado del numerador. La ecuación (4.35) demuestra que aún teniendo N/D un cero en $p_k = j\omega_k$ finito, este cero no aparece en $\bar{Z}(p)$ puesto que:

2) Se selecciona A y B tal que $Ap + B/p$ no desaparezca para cualquier ω_k . Finalmente, a fin de que no

se creen nuevos ceros límites en $\bar{z}_{(p)}$, se deben considerar los puntos en los cuales $z_{(p)}$ tenga una parte real cero. Estos serán finitos en número puesto que $z_{(p)}$ es inicialmente prescrita como no puramente impar (su parte real no es siempre cero en $j\omega$).

3) Se selecciona entonces A y B de tal manera que - en estos puntos de reactancia pura de $Z(j\omega)$, la - reactancia de $Ap+B/p$ no cancele la reactancia de - $Z(j\omega)$.

Hay entonces un número finito de valores prohibidos para A y B dados por 1)-3) que se deben evitar. Si las constantes A y B se seleccionan para evitar estos valores prohibidos, $\bar{z}_{(p)}$ no tiene ceros en $j\omega$ y $1/\bar{z}_{(p)}$ no tiene polos límites en ningún lugar (incluyendo el punto en el infinito). Se puede entonces sintetizar $1/\bar{z}_{(p)}$ por separación en la suma de dos partes una de las cuales contiene los polos del semi-plano derecho y la otra que contiene los polos del semi-plano izquierdo. Como se indica en el teorema 5, esta síntesis requiere solamente una resistencia positiva y una resistencia negativa. Finalmente, $z_{(p)}$ se construye por adición en serie con la red correspondiente a $z_{(p)}$ la reactancia pura - $Ap+B/p$. El único caso excluido de este proceso es aquel en el cual $z_{(p)}$ es puramente impar pero de es

to se encarga el teorema 6. Se llega por consiguiente al presente resultado.

TEOREMA 7

Cualquier función inmitancia de excitación arbitraria, real, racional, cuyos ceros y polos son completamente ilimitados tanto en multiplicidad como en situación en el plano complejo p , puede realizarse como una red agrupada constituida de elementos reciprocos sin pérdidas y no más de una resistencia positiva y una resistencia negativa.

4.5. SINTESIS DE N PUERTAS CON N RESISTENCIAS POSITIVAS Y N RESISTENCIAS NEGATIVAS.

En esta parte del capítulo, se extiende el teorema-7 para el sistema más general de n puertas y establece una síntesis con n resistencias positivas y n resistencias negativas, usando un método de prueba-que es muy similar al ya dado para una puerta.

Se considera entonces una $Z_{(p)}$ $n \times n$ arbitraria, la cual es generalmente no recíproca y contiene elementos reales, racionales, pero la cual no es antisimétrica $Z_{(p)} \neq -Z'_{(-p)}$. Se hace en forma paralela con la técnica de la sección anterior y primero se au-

menta $Z_{(p)}$ para eliminar ceros límites.

$$\bar{Z}_{(p)} = Z_{(p)} - \bar{X}_{(p)}, \quad (4.37)$$

donde los elementos de $\bar{X}_{(p)}$ están dados por:

$$X_{ii} = A_i p + B_i/p; \quad X_{ij} = A p + B/p + \alpha; \quad (4.38)$$

$$X_{ji} = A p + B/p - \alpha$$

A_i, B_i, A, B, α reales positivos

$$A_i \geq A, \quad B_i \geq B$$

La matriz $\bar{X}_{(p)}$ es físicamente realizable como una reactancia pura de n puertas, puesto que es antisimétrica en $p = j\omega$, sus elementos son analíticos en $\text{Re } p > 0$ y todos los polos límites son simples.

El inverso de $\bar{Z}_{(p)}$ tiene elementos $\bar{Y}_{ij}(p) = \frac{A_{ji}(p)}{\bar{\Delta}(p)}$

$$(4.39)$$

Donde A_{ji} es el cofactor de \bar{Z}_{ij} , un elemento de $\bar{Z}_{(p)}$ y $\bar{\Delta}(p)$ es el determinante de $\bar{Z}_{(p)}$. Los números $q_i = (A_i, B_i, A, B, \alpha)$ se escogen de acuerdo a (4.38) y se deben evitar un finito determinado de valores prohibidos. La selección debe hacerse de tal forma que $\bar{Y}_{ij}(p)$ no tenga polos límites. El apéndice IV demuestra que esto siempre puede hacerse con tal que $Z_{(p)} \neq -Z_{(-p)}$; $\bar{Z}_{(p)}$ se sintetiza entonces de acuerdo al teorema 5, y $Z_{(p)}$ finalmente construida -

por adición en serie con $\bar{Z}_{(p)}$ la reactancia de n -
puertas de $\bar{X}_{(p)}$.

Para obtener un resultado final general, se debe trata
tar el caso en el cual una matriz inmitancia que es
antisimétrica, $Z_{(p)} = -Z'_{(-p)}$ en este caso, y

$$S_{(p)} S'_{(p)} = (Z_{(-p)} - 1)(Z_{(p)} + 1)^{-1} (-Z_{(p)} - 1)(-Z_{(p)} + 1)^{-1} = E,$$

$S_{(p)}$ es para -unitaria (una matriz para unitaria es-
unitaria para $p=j\omega$ tal que $U_{1(p)} U_{2(-p)} = E$). Puesto -
que lo anterior es verdadero, $S_{(p)}$ no contiene polos
límites (el requerimiento para dar $\sum |S_{ij}(j\omega)|^2 = 1$ y -
entonces cualquier S_{ij} conteniendo un polo $p=j\omega$ no -
debería cancelarse con ningún otro término puesto -
que cada elemento de la suma es positivo, de aquí -
que dicho polo es excluido). Se puede por consiguiente
te escribir:

$$S_{(p)} = g_1(p) S_{(p)} g^{-1}_{(p)} EE, \quad (4.40)$$

donde $g_1(p)$ es un producto escalar Blaschke, analítico
co en el semi-plano derccho, cuyo numerador contiene
todos los polos del semi-plano derecho de $S_{(p)}$, tal
que $g_1 S$ tiene todos sus polos del semi-plano derecho
cancelados. Siendo así, con:

$$U_1 = g_1 S, \quad U_2 = E \quad \lambda = g^{-1} E, \quad (4.41.a)$$

$$\text{se tiene } S_{(p)} = U_1 \lambda U_2 \quad (4.41.b)$$

Esta es una transformación para-unitaria de la ma -

triz diagonal para-unitaria λ . Entonces U_1 y U_2 son para-unitarias y analíticas en el semi-plano derecho p , (4.41.b) corresponde a una red sin pérdidas de $2n$ puertas cuya matriz de dispersión es:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & g_1 S \\ E & 0 \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

la cual tiene conectadas, a sus n puertas de salida las n puertas de λ . Esta última estructura a su vez, está formada de n mono-puertas desacopladas, cada uno de cuyos factores de reflexión es $g^{-1}_{(p)}$; y puesto que $g^{-1}_{(p)} g^{-1}_{(-p)} = 1$, esta mono-puerta es sintetizada de acuerdo al teorema 6 con elementos recíprocos, sin pérdidas y una sola resistencia positiva y una resistencia negativa. Entonces la red para S se presenta en las restantes n puertas de T y contiene elementos sin pérdidas y cuando más n resistencias positivas y n resistencias negativas. Un diagrama esquemático de la red se demuestra en la figura 4.7.

El teorema que sumariza este resultado más general es el que se expone a continuación.

TEOREMA 8

Para cualquier matriz inmitancia o dispersión $n \times n$ -

(se supone que estas representaciones existen simultáneamente), no necesariamente simétrica, de funciones reales, racionales, con orden y colocación de ceros y polos arbitrarios, corresponde a una red de n puertas compuesta de elementos sin pérdidas y cuando más n resistencias positivas y n resistencias negativas.

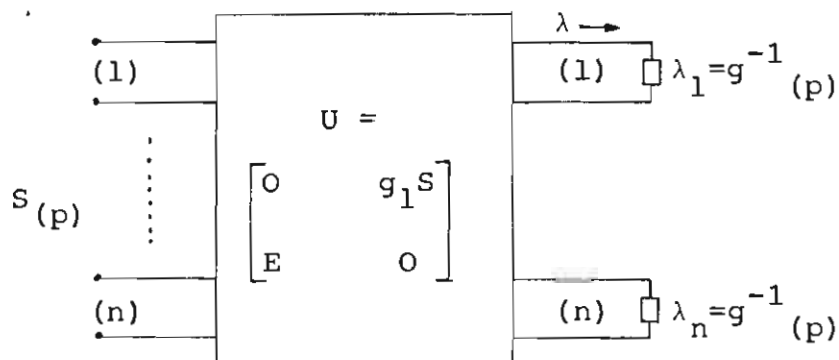


Fig.4.7.-Síntesis de una matriz de dispersión paraunitaria.

$$S(p)S'(-p) = E$$

Es interesante anotar que cuando la síntesis técnica justamente descrita se aplica a una matriz inmitancia simétrica, la estructura resultante usa solamente elementos recíprocos.

Siguiendo con esto, ya que en el caso simétrico es necesario solamente aumentar $Z(p)$ con una $\bar{X}(p)$ simétrica en vez de una matriz reactancia antisimétrica [17] a fin de obtener una $\bar{Y}(p)$ sin polos límites. -

Como un asunto de hecho, no hay necesidad para los términos \bar{X}_{ij} ser antisimétricos en la medida que los polos de A_{ji} se vean afectados. La necesidad para la antisimetría de \bar{X}_{ij} es cuidar el caso donde los términos Z_{ij} sean impares, pero $Z_{(p)}$ no es simétrica, ni antisimétrica. Si esto ocurre, $\Delta_{(p)}$ es ya sea puramente par o impar; pero por aumentar con una $\bar{X}_{(p)}$ antisimétrica, se obtiene una $\bar{\Delta}_{(p)}$ el cual no es ni par ni impar, y los ceros límites de ésta pueden removerse. Si $Z_{(p)}$ es simétrica, sin embargo, siempre será posible eliminar los ceros límites de $\Delta_{(p)}$ usando una $\bar{X}_{(p)}$ simétrica (de aquí la red recíproca sin pérdidas en serie), a menos que $Z_{(p)}$ sea a la vez puramente impar y simétrica en cuyo caso Δ y $\bar{\Delta}$ son cada uno par o impar. Esta situación requiere nuevamente un tratamiento separado y ahora se desea demostrar que si $Z_{(p)} = -Z_{(-p)}$ con $Z_{(p)} = Z'_{(p)}$ entonces una transformación recíproca aplicable llevará a una síntesis apropiada.

Se ha demostrado que si $S_{(p)}$ es simétrica y para-unitaria, puede reducirse a la forma para-unitaria diagonal mediante una transformación para-unitaria dada por:

$$\lambda = USU' \quad (4.43)$$

con U para-unitaria.

Se puede considerar que S en (4.43) corresponde a la $Z_{(p)}$ simétrica, impar prescrita, y de aquí

$$S = W \lambda W' \quad (4.44)$$

con $W = U^{-1}$

Como antes, se remueven los polos del semi-plano derecho de W mediante el producto escalar Blaschke - el cual deja la propiedad para-unitaria inalterada,

$$S = (gW) \left(\frac{1}{g^2} \lambda \right) (Wg)' = \bar{W} \lambda \bar{W}' \quad (4.45)$$

Donde $\bar{W} = gW$ es para-unitaria y analítica en el semi-plano derecho. La transformación (4.45) por consiguiente corresponde a una matriz de dispersión recíproca sin pérdidas de $2n$ puertas.

$$T = \begin{bmatrix} 0 & W \\ \bar{W}' & 0 \end{bmatrix}$$

En cada una de las n puertas de T se conecta una mono-puerta que corresponde a los elementos de la diagonal $\bar{\lambda}$ y sintetizada con una resistencia positiva y una resistencia negativa de acuerdo al teorema 6. Esto es, puesto que $\bar{\lambda}$ es diagonal y para-unitaria, cada uno de sus elementos es un producto Blaschke que representa el factor de reflexión de entrada de una mono-puerta. Las restantes n puertas de T representan la red requerida para S . Por lo tanto se puede-

establecer el siguiente teorema.

TEOREMA 9

Cualquier matriz inmitancia o dispersión simétrica, que contiene funciones reales, racionales, con polos y ceros de orden y colocación arbitrarios, puede sintetizarse por una red recíproca que contiene elementos sin pérdidas y cuando más n resistencias positivas y n resistencias negativas.

4.6. TRANSFORMADOR IDEAL CON RESISTENCIAS NEGATIVAS

Como una aplicación más específica de la resistencia negativa, se tiene la realización de un transformador ideal utilizando tal elemento y adicionalmente resistencias positivas y giradores.

Analizando la matriz que determina el funcionamiento del transformador ideal de la figura 4.8 se tiene:

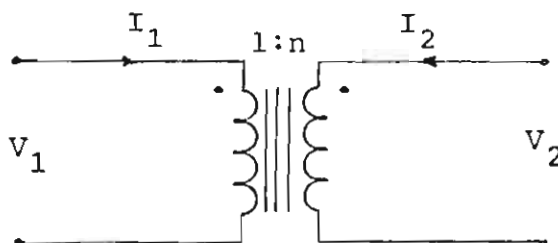


Fig.4.8. Transformador ideal

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

$$[F] = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix}$$

$$[F] \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

desarrollando la ecuación matricial:

$$\frac{V_1}{n} = V_2 \quad \text{Ecuaciones de voltaje y corriente que definen un transformador ideal}$$

$$nI_1 = -I_2$$

Se puede factorar $[F]$ de varias maneras:

$$[F] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & n \\ \frac{1}{n} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

$$[F] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -n \\ \frac{1}{n} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

Las matrices dadas en (4.47) se pueden identificar como aquellas de un girador de constante igual a 1 y un girador de constante n respectivamente. De aquí se tiene por lo tanto la representación de un -

transformador ideal mediante giradores. Figura .4.9

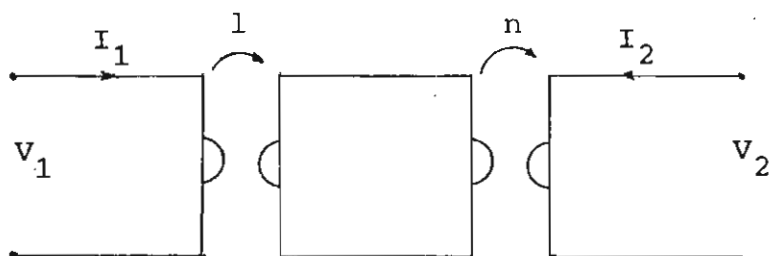


Fig.4.9. Transformador ideal mediante giradores

Dado que en la figura 4.5 se da la realización de un girador mediante el nulador y el norador, y éstos como redes de resistencia negativa, se concluye que es posible realizar un transformador ideal mediante resistencias negativas.

De igual forma las matrices de (4.48) representan inversores de impedancia negativa [15] y éstos a su vez son realizables con resistencias positivas y negativas, una red que represente estos inversores nos dará la representación de un transformador ideal.

Fig. 4.10.

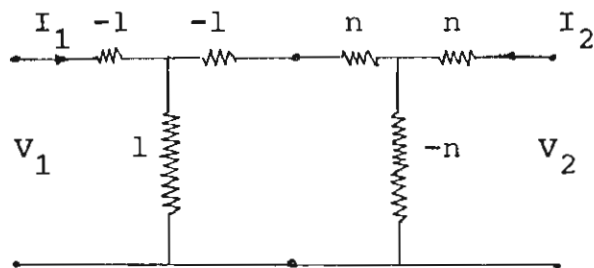


Fig.4.10 Transformador ideal con resistencias positivas y negativas.

Por transformaciones simples T - Π se pueden lograr otras redes que representan un transformador ideal. Estas se indican en las figuras 4.11 y 4.12

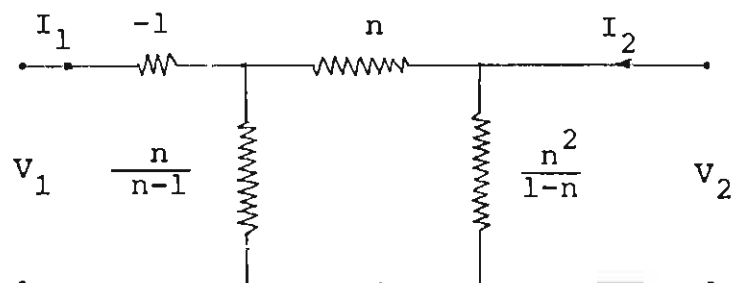


Fig. 4.11. Circuito equivalente de un transformador ideal.

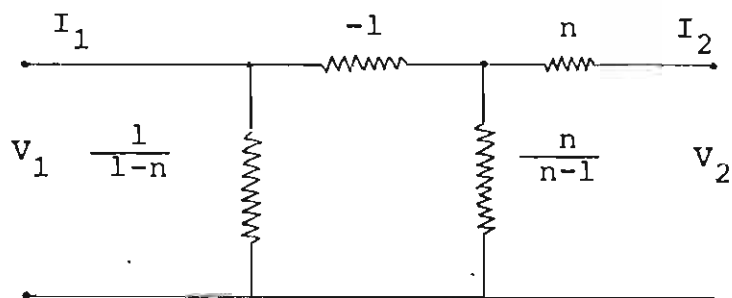


Fig. 4.12.

C A P I T U L O Q U I N T O

C O N C L U S I O N E S

Y

R E C O M E N D A C I O N E S

CAPITULO QUINTO

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

5.1. CONCLUSIONES

- La resistencia positiva es un elemento cuya característica no tiene limitaciones en cuanto se refiere al voltaje y corriente en sus terminales, en cambio los dispositivos físicos que presentan características de resistencia negativa, presentan tal característica solamente en un rango determinado, y además es un efecto que dependen exclusivamente del voltaje o exclusivamente de la corriente, razón por la cual, las resistencias negativas son arreglos ya sea controlados por voltaje o controlados por corriente.
- Las resistencias negativas no son aplicables para eliminar resistencias positivas, en primer lugar por su falta de estabilidad, y adicionalmente por limitaciones de tipo económico, ya que estos arreglos requieren una fuente de energía y un medio de controlarla.
- Una resistencia positiva disipa energía proporcional al cuadrado de la corriente o del voltaje aplicado.

cado, mientras que una resistencia negativa genera energía proporcional al cuadrado de la corriente del voltaje aplicado.

- La resistencia negativa controlada por voltaje, es apropiada para excitar oscilaciones en un circuito paralelo sintonizado de elementos R, L, C. La re - sistencia negativa controlada por corriente, en cam bio, excitará oscilaciones en un circuito sintonizado serie.

- Los dispositivos que presentan resistencia negativa, tienen un retraso de tiempo entre la causa y el efecto, de tal manera que una resistencia negativa controlada por voltaje, puede considerarse como el resultado de una resistencia negativa sin retraso en paralelo con una capacitancia. En cambio, un e lemento controlado por corriente presenta un efecto tal como el de una resistencia negativa sin retraso, en serie con una inductancia; debido a lo cual, la resistencia negativa es una función de la frecuencia.

- Cualquier relación lineal entre voltajes y corrientes en una red de n puertos, puede construirse como una red gráfica, la misma que contiene elementos pa sivos y resistencias negativas.

- La representación de una función inmitancia, es posible realizarla con un mínimo número de resistencias.
- Cualquier matriz inmitancia racional $n \times n$, con coeficientes reales, puede siempre construirse como una red de n puertas que contiene elementos pasivos sin pérdidas, n resistencias positivas y n resistencias negativas.

5.2. RECOMENDACIONES

- Es necesario ampliar el estudio primeramente de los elementos que conforman las redes activas, para posteriormente analizar dichas redes de una forma más amplia.
- Dado que existen ciertos circuitos que además de la resistencia negativa incluyen capacitancia negativa e inductancia negativa, sería necesario analizar estos elementos y la posibilidad de aplicarlos.
- Se recomienda adicionalmente, experimentar con dispositivos de resistencia negativa y fundamentalmente con sus aplicaciones, en particular tratar de conseguir un transformador ideal con resistencias negativas y resistencias positivas.

- Siendo de mucha importancia dentro de la teoría de redes la síntesis de las mismas, es conveniente - iniciar su estudio para ampliar los criterios sobre los circuitos eléctricos.

APENDICE IMATRIZ DE DISPERSION

A más de las caracterizaciones impedancia y admitancia, son posibles otras caracterizaciones para redes de n puertas. Los parámetros de dispersión forman una de estas caracterizaciones para una red.

Por simplificación se presenta solamente para redes de dos puertas, más las técnicas descritas se pueden extender con ligeras modificaciones para n puertas.

DEFINICION DE PARAMETROS DE DISPERSION

En esta parte se definirán los parámetros de dispersión para la caracterización de una red de dos puertas, se ilustrará su uso y se mostrará su relación con otras caracterizaciones para dos puertas.

Primeramente se introducen los conceptos de coeficientes de transmisión y reflexión.

COEFICIENTES DE TRANSMISION Y REFLEXION

Un sistema comúnmente se reduce a una fuente de se

ñal $E_1(p)$ con resistencia interna R_1 , acoplada con una resistencia de carga R_2 a través de una red sin pérdidas como se indica en la Fig. I.1. El análisis o síntesis de una doble puerta usualmente implica la transmisión de voltaje o potencia de la fuente E_1 a la carga R_2 . Dicha transmisión se puede caracterizar convenientemente por coeficientes de transmisión o reflexión. Esta caracterización lleva a la definición de los parámetros de dispersión para la red lineal de dos puertas. Se supone que la red es recíproca y sin pérdidas.

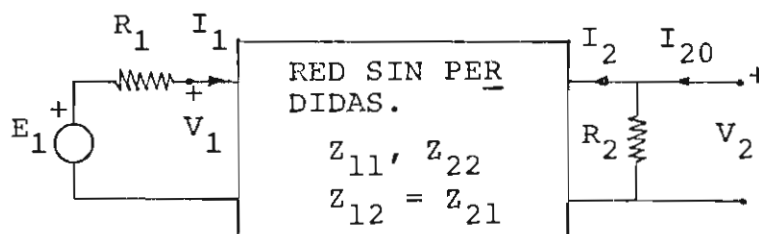


Fig.I.1. Red de dos puertas sin pérdidas

Los voltajes y corrientes de la Figura I.1 pueden determinarse por los parámetros Z mediante las ecuaciones:

$$\begin{aligned} E_1 - R_1 I_1 = V_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 \\ V_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 \end{aligned} \quad (\text{I.1})$$

Se puede considerar R_2 como parte de la red de dos puertas y escribir:

$$E_1 - R_1 I_1 = V_1 = \hat{Z}_{11} I_1 + \hat{Z}_{12} I_{20}$$

$$V_2 = \hat{Z}_{21} I_1 + \hat{Z}_{22} I_{20}$$
(I.2)

Donde los parámetros impedancia de carga \hat{Z}_{ij} para la red incluyendo R_2 pueden expresarse en términos de Z_{ij} y R_2 . Como en las operaciones normales de la red se tiene $I_{20} = 0$, en el siguiente desarrollo se tiene entonces,

$$\frac{V_2}{E_1} = \frac{\hat{Z}_{21}}{\hat{Z}_{11} + R_1}$$
(I.3)

Se desarrollará ahora una expresión para los COEFICIENTES DE REFLEXION de la red en la puerta 1. Estos coeficientes usualmente denominados por ρ_1 están definidos en magnitud por la ecuación

$$|\rho_1(p)|^2 = \frac{\text{Potencia disponible en la puerta 1} - \text{Potencia aceptada por } R_2}{\text{Potencia disponible en la puerta 1}}$$
(I.4)

Aplicando el teorema de máxima transferencia de potencia de la teoría de circuitos:

$$\text{Potencia disponible en la puerta 1} = \frac{|E_1(p)|^2}{4R_1}$$

$$\text{Potencia aceptada por la carga } R_2 = \frac{|V_2(p)|^2}{R_2}$$

$$\text{Se tiene: } |\rho_1(p)|^2 = \frac{|E_1(p)|^2/4R_1 - |V_2(p)|^2/R_2}{|E_1(p)|^2/4R_1}$$

$$|\rho_1(p)|^2 = 1 - \frac{4R_1}{R_2} \left| \frac{V_2(p)}{E_1(p)} \right|^2 \quad (\text{I.5})$$

Substituyendo (I.3) en (I.5)

$$|\rho_1(p)|^2 = 1 - \frac{4R_1}{R_2} \left| \frac{\hat{z}_{21}(p)}{R_1 + \hat{z}_{11}(p)} \right|^2 \quad (\text{I.6})$$

Con la condición impuesta inicialmente de que la red es sin pérdidas, se cumple que la potencia de entrada es igual a la potencia aceptada por R_2 ;

$$|I_1(p)|^2 \hat{r}_{11}(p) = \frac{|V_2(p)|^2}{R_2}$$

donde \hat{r}_{11} es la parte real de \hat{z}_{12} . Sin embargo, se tiene que $I_{20} = 0$ por asunción; comparando (I.2) con la ecuación desarrollada se tiene:

$$\left| \frac{V_2(p)}{I_1(p)} \right|^2 = |\hat{z}_{21}(p)|^2 = R_2 \cdot \hat{r}_{11}(p) \quad (\text{I.7})$$

con (I.7) la (I.6) se reduce a la forma

$$|\rho_1(p)|^2 = \left| \frac{R_1 - \hat{z}_{11}(p)}{R_1 + \hat{z}_{11}(p)} \right|^2 \quad (\text{I.8})$$

Se define $\rho_1(p)$ en general por

$$\rho_1(p) = \frac{\hat{z}_{11}(p) - R_1}{\hat{z}_{11}(p) + R_1} \quad (\text{I.9})$$

$$\text{donde } \hat{z}_{11}(p) = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_{20}=0}$$

Cuando una fuente de impedancia interna R_2 se aplica

a la puerta 2, y en la puerta 1 se tiene una carga R_1 , un desarrollo similar definirá ρ_2 , como el coeficiente de reflexión en la puerta 2 como:

$$\rho_2(p) = \frac{\widehat{Z}_{22}(p) - R_2}{\widehat{Z}_{22}(p) + R_2} \quad (\text{I.10})$$

donde $\widehat{Z}_{22} = \frac{V_2}{I_2} \Big|_{V_1 = -R_1 I_1}$

La relación de potencia de carga a potencia aprovechable de una fuente similarmente se expresa en términos de un COEFICIENTE DE TRANSMISION γ . Se definirá la magnitud de γ por:

$$|\gamma(p)|^2 = \frac{\text{Potencia aceptada por la carga } R_2}{\text{Potencia disponible en la puerta 1}}$$

A partir de las ecuaciones (I.4), (I.5), y (I.6) se tiene que:

$$|\gamma(p)|^2 + |\rho_1(p)|^2 = 1 \quad (\text{I.11})$$

o a su vez.

$$|\gamma(p)|^2 = \frac{4R_1}{R_2} \left| \frac{V_2(p)}{E_1(p)} \right|^2 = \frac{4R_1}{R_2} \left| \frac{\widehat{Z}_{21}(p)}{R_1 + \widehat{Z}_{11}(p)} \right|^2$$

Esta expresión para $|\gamma(p)|^2$ se desarrolló en términos de transmisión de la puerta 1 a la puerta 2; sin embargo, se demuestra que la magnitud de los coeficientes de transmisión no depende de la dirección de la transmisión, si se cumple que la red es sin pérdidas y recíproca. Como una consecuencia de esta -

propiedad y de (I.11) los coeficientes de transmisión de entrada y salida para la red sin pérdidas son iguales.

PARAMETROS DE DISPERSION

Se definirá ahora la matriz de dispersión de una red lineal de dos puertas (Fig. I.2.a). La extensión para n puertas es evidente, sin embargo, la red no requiere ser pasiva ni recíproca. Cabe anotar aquí que existen varios procedimientos ligeramente diferentes para normalizar una red y esto utilizar en la definición de matriz de dispersión. El procedimiento desarrollado aquí, comprende primero la selección de dos resistencias R_1 y R_2 asociadas con las puertas 1 y 2. Las resistencias escogidas usualmente simplifican la manipulación de la matriz de dispersión. Por ejemplo, se puede escoger estas resistencias de manera que correspondan a la resistencia de la fuente y a la resistencia de la carga respectivamente. Además es conveniente tratar con los llamados voltajes y corrientes normalizados V_1' , V_2' , I_1' , I_2' indicados en la figura I.2.b, en la cual para normalizar la red se ha escogido un transformador ideal, con relación de vueltas apropiada para simplificar el análisis.

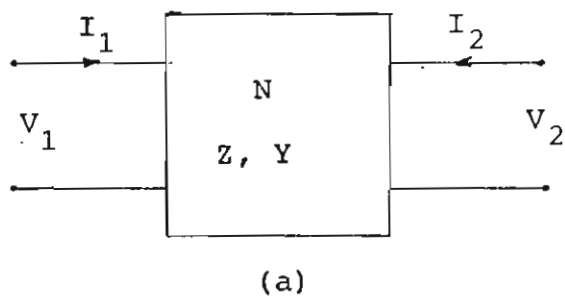


Fig.I.2.a) Red de dos puertas

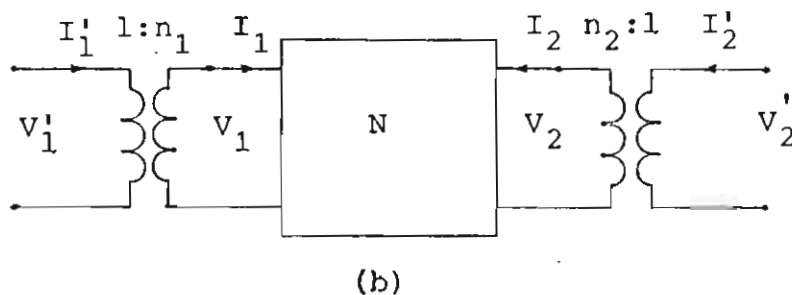


Fig.I.2.b) Representación normalizada

Se definen matrices R y N como sigue:

$$R = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \quad (\text{I.12})$$

$$N = R^{1/2} = \begin{bmatrix} R_1^{1/2} & 0 \\ 0 & R_2^{1/2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1 & 0 \\ 0 & n_2 \end{bmatrix} \quad (\text{I.13})$$

donde n_1 y n_2 son positivos. Se pueden obtener entonces los voltajes y corrientes normalizados.

$$V_1'(p) = \frac{V_1(p)}{n_1} \quad V_2'(p) = \frac{V_2(p)}{n_2}$$

$$I_1'(p) = n_1 I_1(p) \quad I_2'(p) = n_2 I_2(p)$$

o en forma de matriz

$$V' = N^{-1}V \tag{I.14}$$

$$I' = NI$$

$$V' = \begin{bmatrix} V_1'(p) \\ V_2'(p) \end{bmatrix} \quad I' = \begin{bmatrix} I_1'(p) \\ I_2'(p) \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} V_1(p) \\ V_2(p) \end{bmatrix} \quad I = \begin{bmatrix} I_1(p) \\ I_2(p) \end{bmatrix}$$

Las ecuaciones (I.14) describen las relaciones im -
 puestas por la conexión de transformadores ideales -
 indicados en la figura (I.2.b). La red N asociada -
 con los transformadores se llamará red normalizada.
 (Los transformadores se introducen sólo por convenienu
 cia matemática). La red física podría, por ejemplo,
 estar conectada a una fuente y a una carga como en -
 la figura (I.1)

Se introducen matrices columna α y β , definidas como

$$\alpha = \frac{1}{2} [V' + I'] = \begin{bmatrix} \frac{V_1' + I_1'}{2} \\ \frac{V_2' + I_2'}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \quad (\text{I.15})$$

$$\beta = \frac{1}{2} [V' - I'] = \begin{bmatrix} \frac{V_1' - I_1'}{2} \\ \frac{V_2' - I_2'}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$$

Las matrices α y β pueden considerarse como ondas incidentes y reflejadas, respectivamente, de voltajes normalizados. Vale la pena anotar que los elementos de las matrices α y β tanto como los de V' e I' tienen dimensiones de (Watts)^{1/2}, como es evidente de (I.13) y (I.14). Entonces son convenientes para describir relaciones de potencia.

Se puede definir las relaciones siguientes de (I.15)

$$V' = (\alpha + \beta) \quad (\text{I.16})$$

$$I' = (\alpha - \beta)$$

Puesto que las redes consideradas son lineales, los elementos de α y β están relacionados por ecuaciones lineales. Usualmente se consideran los voltajes incidentes y reflejados como excitación y la correspondiente respuesta, relacionados por la transformación lineal.

$$\beta = S\alpha \quad (\text{I.17})$$

donde:

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1(p) \\ \alpha_2(p) \end{bmatrix}; \beta = \begin{bmatrix} \beta_1(p) \\ \beta_2(p) \end{bmatrix}; S = \begin{bmatrix} S_{11}(p) & S_{12}(p) \\ S_{21}(p) & S_{22}(p) \end{bmatrix} \quad (\text{I.18})$$

La matriz S que describe la transformación lineal es llamada matriz de dispersión de la red de dos puertas; sus elementos son llamados parámetros o coeficientes de dispersión. Cabe anotar aquí que S no es única, puesto que las resistencias de normalización R_1 y R_2 pueden seleccionarse en forma arbitraria. Sin embargo, se asumirá que R_1 y R_2 se seleccionan de tal manera que S exista para estos valores de resistencia. Como en el caso de los parámetros impedancia o admitancia, algunas redes no tienen parámetros de dispersión. Pero se demuestra que la matriz de dispersión existe para toda red pasiva.

Se denominan a las matrices impedancia de circuito abierto y admitancia de corto-circuito de la red original (Fig. I.2.a) por Z y Y respectivamente, y las matrices de la red normalizada de la figura I.2.b por Z' y Y' , respectivamente. Entonces la ecuación I.14 implica que

$$\begin{aligned} Z' &= N^{-1} Z N^{-1} \\ Y' &= N Y N \end{aligned} \quad (\text{I.19})$$

Se demuestra ahora que puede obtenerse una matriz de

dispersión para satisfacer (I.17), considerando la red de la figura I.3.a la cual se obtiene aumentando a la red normalizada de la figura I.2.b con resistencias - en serie en ambas puertas. Esta red aumentada es equivalente a la red normalizada con resistencias de 1 ohmio en serie, como se indica en la figura I.3.b. Sin embargo, la red de la figura I.3.a proporciona una interpretación física de los voltajes incidentes y reflejados contenidos en α y β , puesto que los voltajes y corrientes de la red satisfacen las ecuaciones (I.15). Es evidente que matriz de dispersión S describe relaciones de voltaje en la red aumentada, ya que los elementos de S en (I.18) pueden expresarse como:

$$S_{11} = \left. \frac{\beta_1}{\alpha_1} \right|_{\alpha_2=0} \quad S_{12} = \left. \frac{\beta_1}{\alpha_2} \right|_{\alpha_1=0}$$

$$S_{21} = \left. \frac{\beta_2}{\alpha_1} \right|_{\alpha_2=0} \quad S_{22} = \left. \frac{\beta_2}{\alpha_2} \right|_{\alpha_1=0}$$

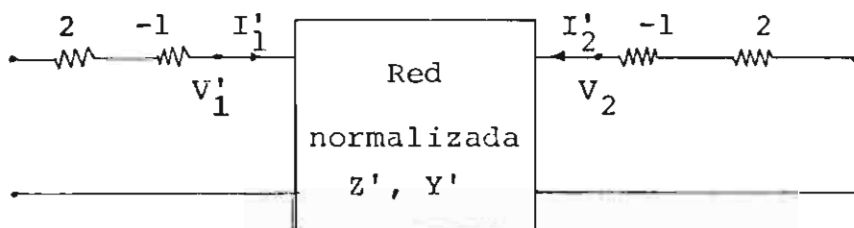


Fig. I.3.a) Red normalizada aumentada

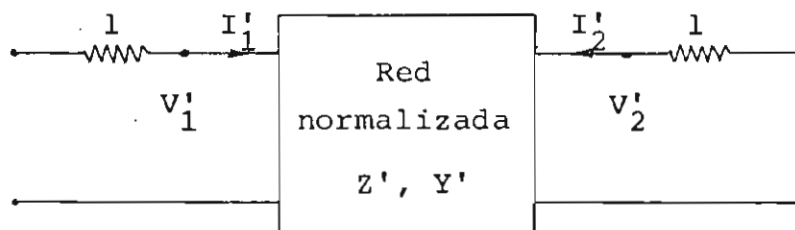


Fig.I.3.b) Su equivalente

S_{ij} es la relación de la onda de voltaje reflejado en la puerta i a la onda de voltaje incidente en la puerta j . Es claro que S_{ii} son coeficientes de reflexión y S_{12} , S_{21} son coeficientes de transmisión.

Para redes pasivas la inclusión de las resistencias negativas puede considerarse un artificio matemático; para redes activas, sin embargo, la matriz de dispersión se podría considerar como una matriz de transferencia de voltaje de una red física. En cualquier caso, la resistencia total incrementada en cada puerta es positiva.

La red aumentada de la figura I.3.b tiene una matriz - admitancia Y_A ; entonces de las ecuaciones (I.15) se - tiene:

$$I' = 2Y_A \alpha$$

$$\text{y de la (I.16) } \beta = A - I' = (E_n - 2Y_A)A \quad (\text{I.20})$$

donde E_n es la matriz unitaria

Si se comparan (I.17) con (I.20) se tiene

$$S = E_n - 2Y_A$$

pero: $Y_A = N Y N$

donde:

$$N = \begin{bmatrix} R_1^{1/2} & 0 \\ 0 & R_2^{1/2} \end{bmatrix}$$

de aquí: $S = E_n - 2R^{1/2} Y_A R^{1/2}$

De igual forma se demuestra que:

$$S = E_n - 2G^{1/2} Z_A G^{1/2}$$

APENDICE IITRANSFORMACION DE UNA MATRIZ [A, B]

Se demostrará aquí:

$$[A, B] \begin{bmatrix} V \\ I \end{bmatrix} = [A, B] P P^{-1} \begin{bmatrix} V \\ I \end{bmatrix} = [A', B'] \begin{bmatrix} V' \\ I' \end{bmatrix}$$

con P como una matriz de permutación de constantes

$$\begin{bmatrix} V \\ I \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} V' \\ I' \end{bmatrix}$$

entonces P tiene una representación de 2n-puertas usando transformadores ideales, giradores y $\pm R$. Para hacer esto, se considera solamente el intercambio de dos columnas, puesto que P puede tomarse como el producto de una multiplicidad de matrices de permutación correspondiendo a la cascada de una serie de redes de 2n-puertas, cada una de las cuales está asociada con una columna intercambiada. La permutación efectuada por P de la columna i de A con la columna i de B es representada por un girador en la puerta i, el cual intercambia solamente el voltaje y la corriente en esa puerta. Se considera ahora el intercambio de cualquier par de columnas en [A, B] representado por (4.9.a). Dividiendo la matriz P 2n x 2n en cuatro sub-matrices,

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & | & P_2 \\ \hline P_3 & | & P_4 \end{bmatrix} \quad (\text{II.1})$$

La matriz P difiere de la matriz identidad E_{2n} solamente en que si las columnas i y j de $[A, B]$ van a ser permutadas, entonces se cambian las columnas i y j de E_{2n} para formar P . De (4.9.a) y (II.1).

$$V = P_1 V' + P_2 I'$$

$$I = P_3 V' + P_4 I'$$

y poniendo esto en la forma $[A, B]$

$$\begin{bmatrix} E_1 & -P_1 \\ O_n & P_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ V' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O_n & P_2 \\ E_2 & -P_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ I' \end{bmatrix} \quad (\text{II.2.a})$$

E_1 y E_2 son matrices identidad de n filas, los sub-índices usados solamente permiten identificar su colocación en (II.2.a)

Se debe demostrar ahora que:

$$\begin{bmatrix} A_P & B_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 & -P_1 & O_n & P_2 \\ O_n & P_3 & E_2 & -P_4 \end{bmatrix}, \quad (\text{II.2.b})$$

la cual se ve claramente que es de rango $2n$, tiene un menor complementario diferente de cero. Se supone que el intercambio de dos columnas de P ocurre en

$$\begin{bmatrix} -P_1 \\ P_3 \end{bmatrix}$$

Entonces E_1 y $-P_4$ forman un menor complementario diferente de cero, puesto que $-P_4 = -E_n$. Una situación similar ocurre cuando el intercambio de columnas de P ocurre en

$$\begin{bmatrix} P_2 \\ -P_4 \end{bmatrix}$$

Entonces E_1 y P_3 forman un menor diferente de cero.

El caso final por considerar es cuando la columna i de

$$\begin{bmatrix} -P_1 \\ P_3 \end{bmatrix}$$

debe intercambiarse con la columna j de

$$\begin{bmatrix} P_2 \\ -P_4 \end{bmatrix}$$

Se busca una serie de $2n$ columnas complementarias, cada una de las cuales contiene un elemento unidad simple pero localizado en una posición diferente en la fila de cada una de las columnas.

Claramente se ve que:

$$\begin{bmatrix} E_1 & P_2 \\ O_n & -P_4 \end{bmatrix}$$

no satisface este criterio, pero la columna j de

$$\begin{bmatrix} P_2 \\ -P_4 \end{bmatrix}$$

tiene su elemento unidad en la posición de la fila i de P_2 , correspondiendo a la misma posición en la fila como el elemento unidad en la columna i de E_1 .

Si $i = j$ tan sólo se suprime la columna j de

$$\begin{bmatrix} P_2 \\ -P_4 \end{bmatrix}$$

y lograr el elemento unidad requerido de la columna j de

$$\begin{bmatrix} -P_1 \\ P_3 \end{bmatrix}$$

Esta unidad aparecerá en la fila j de P_3 . El menor complementario consiste ahora de

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ O_n \end{bmatrix} \text{ más la columna } j \text{ de } \begin{bmatrix} -P_1 \\ P_3 \end{bmatrix} \text{ mas } \begin{bmatrix} P_2 \\ -P_4 \end{bmatrix}$$

con su columna j suprimida

Si $i \neq j$, el desarrollo siempre conduce a un menor com

plementario.

Nuevamente se suprime la columna j de $\begin{bmatrix} P_2 \\ -P_4 \end{bmatrix}$ y substituye la columna j de $\begin{bmatrix} O_n \\ E_2 \end{bmatrix}$ para dar un elemento unidad en la posición de la fila $n+j$. Para mantener complementariamente, se suprime la columna j de

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ O_n \end{bmatrix}$$

y se logra el elemento unidad requerido en la columna j y la fila j de

$$\begin{bmatrix} -P_1 \\ P_3 \end{bmatrix}$$

puesto que la posición de este elemento unidad, con $i \neq j$, no ha cambiado. El menor complementario diferente de cero consiste entonces de

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ O_n \end{bmatrix}$$

con su columna j suprimida, la columna j de

$$\begin{bmatrix} -P_1 \\ P_3 \end{bmatrix}, \text{ la columna } j \text{ de } \begin{bmatrix} O_n \\ E_2 \end{bmatrix}, \text{ y } \begin{bmatrix} P_2 \\ -P_4 \end{bmatrix}$$

con su columna j suprimida.

La descripción $[A, B]$ para P satisface el teorema 1 y

APENDICE III

Demostración de: $2P(\omega) = I^* [Z_{(p)} + Z'_{(-p)}] I \Big|_{P=j\omega}$

Potencia compleja: W

$$W = P + jQ = i^*v$$

$$W = I^*V$$

$$V = ZI$$

$$W = I^*ZI$$

$$P = \text{Re}(W)$$

$$P = \text{Re}(I^*ZI)$$

$$P = I^*(\text{Re}Z)I$$

Z es una matriz cuyos elementos son números complejos- que no tienen simetría especial. Pero una matriz puede escribirse como la suma de dos matrices, cada una de las cuales tiene propiedades de simetría especial;- estas matrices se denominan hermítica y antihermítica- por cumplir las siguientes características.

$$Z_{(p)ij} = Z^*_{(p)ji} \quad \text{y} \quad Z_{(p)ii} = \text{real}$$

$$Z_{(p)} = Z^*_{(p)} \quad (\text{matriz hermítica})$$

$$Z'_{(-p)} = -Z^*_{(-p)} \quad (\text{matriz antihermítica})$$

Para expresar ReZ

se puede utilizar la siguiente ecuación

$$\text{Re}Z = \frac{1}{2} (Z_{(p)} + Z'_{(-p)})$$

donde:

$$Z_{(p)} = Z + Z^* \quad (\text{matriz hermítica}) \quad |17|$$

$$Z'_{(-p)} = Z - Z^* \quad (\text{matriz antihermítica con } Z_{ii(-p)} = 0)$$

Por lo tanto: $P_{(\omega)} = I^* \frac{1}{2} [Z_{(p)} + Z'_{(-p)}] I$

$$2P_{(\omega)} = I^* [Z_{(p)} + Z'_{(-p)}] I \Big|_{p = j\omega}$$

APENDICE IV

REMOCION DE POLOS LIMITES DE UNA MATRIZ INMITANCIA

Se demuestra aquí que si $Z_{(p)} \neq Z'_{(-p)}$ entonces $(\bar{Z}_{(p)})^{-1}$ puede formarse con polos no limitados donde:

$$\bar{Z}_{(p)} = Z_{(p)} - \bar{X}_{(p)},$$

y $\bar{X}_{(p)}$ está definida por (4.38) y es realizable por una red sin pérdidas de n puertas. Las constantes $q_i = (A_i, B_i, A, B, a)$ pueden seleccionarse para evitar una serie finita de valores prohibidos como sigue a continuación. Los elementos de $(\bar{Z})^{-1}$ están dados por

$$Y_{ij}(p) = \frac{A_{ij}(p)}{\bar{\Delta}(p)}$$

como en (4.39)

1) Igual que en el análisis de una puerta, se seleccionan los números q_i de tal manera que no haya cancelación de potencias mayores en los numeradores de $\bar{Z}_{ij}(p)$, y si necesariamente en el determinante $\bar{\Delta}(p)$. Estas afirmaciones que $\bar{\Delta}(p)$ no exceda el grado de ningún $A_{ij}(p)$ y de aquí $\bar{Y}_{ij}(p)$ no tiene polos en el ∞ .

2) Lo próximo que se desea es asegurar la cancela -

ción de polos límites finitos en $j\omega$ de A_{ji} por factores límites idénticos en $\bar{\Delta}$. Para lograr esto se observa que en la expansión de $\bar{\Delta}$, cada elemento de la matriz \bar{Z} tiene como coeficientes un menor complementario de la fila $(n-1)$. Se seleccionan los números q_i tal que ninguno de estos menores desaparezca idénticamente, y aún más, tal que los ceros-límites de los menores no coincidan con los polos-prescritos de $Z_{(p)}$. Esto significa que un número finito de valores q_i pueden evitarse y prever que para todos los polos límites de $A_{ji(p)}$ devidos a cualquier elemento de \bar{Z} , se presentará un factor de cancelación en $\bar{\Delta}$ y así no aparecerá el polo en $Y_{ij(p)}$.

3) Se debe ahora prevenir que ningún cero límite aparezca en $\bar{\Delta}$. Si $\bar{\Delta}$ es expandido se tendrá la forma:

$$\bar{\Delta} = (\prod A_i) p^n + (\prod B_i) \frac{1}{p^n} + f(q_i, p) + \Delta, \quad (\text{IV.1})$$

donde Δ es el determinante de $Z_{(p)}$. Aún cuando f tenga términos en p^n y $1/p^n$, los coeficientes $(\prod A_i)$, $(\prod B_i)$ no aparecen nuevamente. Así, aún cuando Δ desaparezca en el límite, es decir en $p=j\omega$, $\left[(\prod A_i) (j\omega_k)^n \right] + \left[(\prod B_i) 1/j\omega_k^n \right]$ pueden seleccionarse para diferenciarse de $f(q_i, j\omega_k)$ y así Δ no aparecerá. Además, en el número finito de puntos límites donde desaparezca sea la parte real o imagina-

ria de Δ , nuevamente A_i y B_i pueden seleccionarse de tal forma que los dos primeros términos de (III.1) no se combinen con Δ y f para producir un cero límite. Los términos tanto en p^n y $1/p^n$ son incluidos de tal manera que no se presenten ceros para $p = 0$ o para $p = \infty$. La única situación bajo la cual esta técnica no puede llevarse adelante, es aquella en la cual $Z_{(p)}$ es antisimétrica. Por consiguiente $\bar{Z}_{(p)}$ es también antisimétrica, y Δ es puramente par o impar (su parte real o imaginaria desaparecen idénticamente antes que en un finito número de puntos), tal que en general, no puede escogerse de los q_i , así se evita un cero límite. Si $Z_{(p)}$ no es antisimétrica, la adición de la matriz \bar{X} apropiada obliga al determinante Δ ser ni par ni impar. Si, por consiguiente, $Z_{(p)} \neq -Z'_{(-p)}$, se puede producir una $\bar{Z}_{(p)}$ tal que $\bar{Z}_{(p)}^{-1}$ no tenga polos límites, y se desprende del teorema 5 que $\bar{Y}_{(p)}$ puede sintetizarse con n resistencias positivas y n resistencias negativas en adición a los elementos pasivos sin pérdidas. $Z_{(p)}$ se obtiene entonces por incremento de la estructura reactiva de n puertas $\bar{X}_{(p)}$, a la red correspondiente a $\bar{Z}_{(p)}$.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- |1| Barkhausen, H. , "STABILITY CONDITIONS OF THE ARC LIGHT AND ELECTRON TUBES"; Phys. Zeit., Vol. 27, p. 43, (1926)
- |2| Crisson, G. , "NEGATIVE IMPEDANCES AND THE TWIN 21 -TYPE REPEATER"; Bell. Sys. Tech. Your., Vol. 10 p. 485, (1931)
- |3| Herold, E.W., "NEGATIVE RESISTANCE AND DEVICES FOR OBTAINING IT"., Proc. I.R.E., Vol. 23, N. 10, p. 1201, (October, 1935)
- |4| Carlin, H.J., Youla, D.C., "NETWORK SYNTHESIS WITH NEGATIVE RESISTORS", Proc. I.R.E., p. 907, (May - 1961)
- |5| Carter, H., "DICTIONARY OF ELECTRONICS"; Tab Books, U.S.A., Sec. Edition, N. 300, p. 80, (1973)
- |6| Millman, J., Halkias, C.C., "ELECTRONICA INTEGRADA"; Ed. Hispano Europea, Barcelona, p. 720, (1976)
- |7| Carter, H., "DICTIONARY OF ELECTRONICS"; Tab Books, U.S.A. , Sec. Edition, N. 300, p. 80, (1973)
- |8| Ryder, J.D. , "ELECTRONICA", Ed. Aguilar, Madrid , Cuarta Edición, p. 118, (1967)
- |9| Ryder, J.D. , "ELECTRONICA", Ed. Aguilar, Madrid , Cuarta Edición, p. 32, (1967)
- |10| Millman, J., Halkias, C.C., "ELECTRONICA INTEGRADA"; Ed. Hispano Europea, Barcelona, p. 319, (1976)

- |11| Ryder, J.D. , "ELECTRONICA", Ed. Aguilar, Madrid, Cuarta Edición, p. 204, (1967)
- |12| Carlin, H.J., Giordano, A.B., "NETWORK THEORY", - Prentice Hall Series, U.S.A., p. 227, (1964)
- |13| Ayres, F., "MATRICES", Mc Graw Hill, Compendios - Schaum, Colombia, p. 4, (1969)
- |14| Carlin, H.J., "GENERAL n-PORT SYNTHESIS WITH NEGATIVE RESISTORS", Proc. I.R.E., Vol 48, p. 1174, - (Jun 1960)
- |15| Kim, W.H., Meadows, H.E., "MODERN NETWORK ANALYSIS", John Wiley & Sons. Inc., U.S.A. , p. 67, (1971)
- |16| Valkenburg, V., "INTRODUCTION TO MODERN NETWORK - SYNTHESIS", John Wiley & Sons, INC., U.S.A., p.78, (1965)
- |17| Pipes, L.A., "MATEMATICAS APLICADAS PARA INGENIEROS Y FISICOS", Mc Graw Hill, Segunda Edición, - España, p. 84, (1963)

BIBLIOGRAFIA

- Herold, E.W., "NEGATIVE RESISTANCE AND DEVICES FOR OBTAINING IT" , Proc. I.R.E., Vol. 23, N. 10, (Oct. 1935)
- Carlin, H.J., Youla, D.C., "NETWORK SYNTHESIS WITH NEGATIVE RESISTORS" , Proc. I.R.E., (May 1961)
- Carlin, H.J., Giordano, A.B., "NETWORK THEORY", - Prentice Hall Series, U.S.A., (1964)
- Valkenburg, V., "INTRODUCTION TO MODERN SYNTHESIS" John Wiley & Sons, INC., U.S.A. , (1965)
- Kim, W.H., Meadows, H.E., "MODERN NETWORK ANALYSIS", John Wiley & Sons, INC., U.S.A., (1971)
- Kendall, L., "REALIZATION OF THE IDEAL TRANSFORMER WITH ACTIVE ELEMENTS", Proc. I.E.E.E., (1966)
- Ruston, H., Bordogna, J., "ELECTRIC NETWORKS: FUNCTIONS, FILTERS, ANALYSIS", Mc Graw Hill, U. S. A., (1966)