

E S T U D I O D E F L U J O D E C A R G A

Y E S T A B I L I D A D

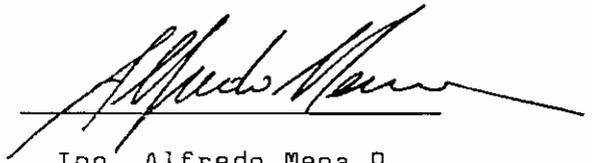
M E D I A N T E S I S T E M A S D I G I T A L E S

Tesis previa a la obtención del Título de
Ingeniero en la especialización de Inge-
niería Eléctrica, en la Escuela Politécni-
ca Nacional.

P E D R O F R E I L E G R A N I Z O

QUITO - AGOSTO 1.972

Certifico que la presente Tesis:
"Estudio de Flujo de Carga y Es-
tabilidad mediante Sistemas Digi-
tales", ha sido realizada en su
totalidad por el Sr. Pedro Frei-
le Granizo.

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'Alfredo Mena P.', is written over a horizontal line. The signature is fluid and cursive.

Ing. Alfredo Mena P.

Director de Tesis

A MI ADORADA ESPOSA

A G R A D E C I M I E N T O

Un especial agradecimiento a los Ingenieros Alfredo Mena y Ramiro Rodas, gracias a cuyas indicaciones se ha podido realizar este trabajo.

Un agradecimiento también para los Centros- de Computación del Ministerio de Obras Públicas y de la Universidad Central del Ecuador, en cuyas computadoras se han corrido los programas - de este trabajo.

I N D I C E G E N E R A L

	Pag.
CAPITULO I.-	
- Generalidades y objetivos del estudio	1
CAPITULO II.-	
- Elementos de un Sistema	1
- Generadores	1
- Transformadores	10
de dos devanados	10
de tres devanados	14
- Líneas de Transmisión	16
- Elementos concentrados	18
Reactores	18
Condensadores	19
en paralelo	20
en serie	20
sincrónicos	20
- Cargas	21
CAPITULO III.-	
- Análisis Matemático del Sistema	23
- Tratamiento de los transformadores con relación de transformación fuera de la nominal	28

CAPITULO IV.-

- Flujo de Carga del Sistema	31
- Lógica a seguir en la programación	31
- Programa FORTRAN	33
- Limitaciones, usos y recomendaciones	37

CAPITULO V.-

- Estudio de Estabilidad del Sistema	45
- Análisis Matemático	45
- Lógica a seguir en la programación	46
- Programa FORTRAN	49
- Limitaciones, usos y recomendaciones	50

CAPITULO VI.-

- Aplicación de los programas	55
- Flujo de Carga	55
- Estabilidad	62

BIBLIOGRAFIA	69
------------------------	----

- C A P I T U L O I -

GENERALIDADES Y OBJETIVOS DEL ESTUDIO.-

La interconexión de sistemas es de vital importancia para los sistemas de potencia por muy importantes razones: primeramente, la interconexión hace factible la instalación de unidades de gran capacidad de generación sin necesidad de instalar unidades de reserva. Segundo, las compañías con sus sistemas interconectados pueden realizar economías de operación.

La existencia de redes interconectadas hace simple y muy efectivo el control automático de operación, por medio del cual cada empresa puede ajustar su sistema de generación de acuerdo a su variación de carga.

Se considera el problema de operación eléctrica como el de controlar el sistema generación-transmisión. Se entiende que el sistema de generación-transmisión incluye todos los generadores, las redes de transmisión, subestaciones y todas las interconexiones con los sistemas exteriores. Las cargas se asume, se encuentran concentradas en las barras de las subestaciones. Así, todas las redes más allá de estas barras no se tomarán en cuenta. Las máquinas impulsoras por si mismas y sus fuentes de energía no se incluyen en el análisis del presente trabajo.

El Flujo de Carga consiste en determinar las magnitudes de voltaje de los nodos de la red y los ángulos de voltaje para un grupo de condiciones dadas en la red eléctrica estudiada. Conociendo estos valores se puede determinar el flujo de potencia activa y reactiva por los ramales de la red.

Una determinación de la distribución de potencia y voltaje en un Sistema de Potencia integrado de generadores, circuitos de transmisión y distribución y de cargas, es usualmente un requerimiento esencial en el diseño del sistema y en los estudios de operación del mismo. Este estudio hace posible evaluar las condiciones de operación de los sistemas para un funcionamiento actual o futuro, pudiendo de esta manera establecer las necesidades del mismo, en cuanto a generación y transmisión para un determinado año y para unas determinadas condiciones de funcionamiento.

El término Estabilidad de un Sistema de potencia se aplica a sistemas de potencia de corriente alterna y denota una condición en la cual las varias máquinas de un sistema permanecen en sincronismo o "funcionan al compás" entre sí.

Los estudios de estabilidad tienen una gran importancia en los trabajos de evaluación de sistemas de potencia. Se hacen para determinar la respuesta de un sis-

tema de potencia a cualquier tipo de operación anormal.

Gracias a los estudios de estabilidad se puede conocer el "tiempo crítico de despeje de una determinada falla en el sistema y se puede así graduar los aparatos de protección, en lo que a tiempo de operación se refiera.

Tiempo crítico es el máximo tiempo al que hay que despejar la falla del sistema para que éste no pierda la estabilidad.

Existen varias maneras de resolver los problemas de Flujo de Carga y Estabilidad de un Sistema de Potencia. Uno de ellos es resolviendo las ecuaciones que rigen a los sistemas de potencia sin la ayuda de otro aparato que no sea para facilitar los cálculos aritméticos pertinentes; este es el modo más primitivo de resolución y por lo mismo el que implica mayor posibilidad de error y también mayor tiempo de trabajo.

Otra manera de resolver estos problemas es la de usar el Analizador de Redes de Corriente Alterna, esta es una manera muy eficaz de resolución debido a que se pueden cambiar condiciones del problema con mucha facilidad, y por lo mismo sin mayor trabajo se puede resolver el problema varias veces consecutivamente para varias alternativas, en contra se podría anotar que los resultados no son de una precisión absoluta debido a que interviene el ojo humano en su obtención.

Por fin, el método más moderno de resolver estos y cualquier otro tipo de problemas es el de usar las Computadoras, este es el método más preciso y rápido de todos; éste último método es el que se aplicará en el presente trabajo.

El objetivo del presente trabajo es presentar un nuevo método de resolución del problema de Flujo de carga utilizando técnicas de computación digital.

Se ha aplicado fundamentalmente el método de Vectores de Voltaje, inicialmente desarrollado en Yugoslavia (6), adaptándolo a las disponibilidades locales de equipos de computación.

Se presenta además la resolución de problemas de Estabilidad, usando igualmente técnicas apropiadas de Computación Digital.

- C A P I T U L O I I -

ELEMENTOS DE UN SISTEMA.-

Un Sistema de Potencia consiste en principio de una fuente de energía (Generador), de una carga que consume la energía producida por esa fuente y de un elemento que une los dos anteriores (Línea de transmisión), y que sirve de transporte de la energía mencionada.

Debido a la gran demanda de energía eléctrica, los sistemas actuales de potencia constan de varios sistamas interconectados y varias cargas conectadas al sistema general.

Estos sistemas constan generalmente de: genera-dores, transformadores, líneas de transmisión, elementos concentrados (como condensadores y reactores), y de car-gas.

GENERADORES.-

Los generadores son los elementos principales-en los estudios de Estabilidad y Flujo de Carga, debido a que son los proveedores de potencia tanto activa como reactiva.

En los generadores, siendo máquinas sincrónicas se deben considerar varias reactancias, diferenciándolas

especialmente por el tiempo de consideración, así se tienen reactancias: subtransitorias (períodos muy cortos de tiempo), transitoria (períodos cortos de tiempo), y sincrónica (régimen permanente). (1)

TABLA I

SIMBOLO	DENOMINACION	SIGNIFICACION FISICA
X_s	Sincrónica	Efecto desmagnetizante. Fmm que las corrientes del estator oponen a la corriente de excitación.
X''	Subtransitoria	Suma de la reactancia de dispersión y de la reactancia debida al flujo del inducido.
X'	Transitoria	Suma de la reactancia de dispersión y de la reactancia debida al flujo del inducido y que llega al inductor.
X_q	En cuadratura	Igual significado que las anteriores, excepto en que estas se tratan del otro eje.

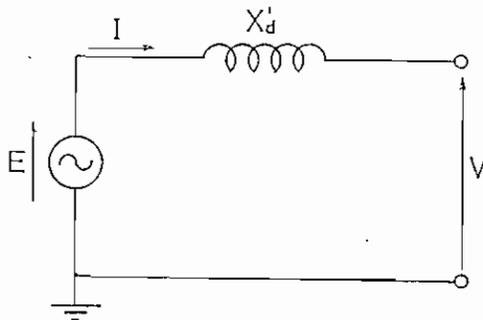
Se tienen también las reactancias en cuadratura y de eje directo según el eje al que corresponda la componente de la reactancia tratada.

En la Tabla I se puede ver la significación física de las reactancias antes mencionadas.

Además para el cálculo de cortocircuitos se requieren las reactancias de componentes simétricas: negativa, positiva y cero. (1)

Para los estudios de Flujo de Carga, debido a que son hechos en estado de régimen permanente, se considera la reactancia sincrónica. Para los estudios de Estabilidad, como se hacen en períodos de tiempo cortos, la reactancia que se toma es la transitoria.

Los generadores u otras máquinas sincrónicas se representan comunmente por su reactancia transitoria de e



je directo o por su reactancia sincrónica según el estudio que se vaya a realizar, en serie con una fuente de voltaje. Figura 1. (2)

Fig. 1

La ecuación matemática que rige para los generadores, y que indica la potencia suplida por el generador a la red es:

$$P + jQ = \bar{E}^* \bar{I}$$

como

$$\bar{I} = \bar{E} \bar{Y}$$

Si el subíndice está formado por dos números i iguales, la admitancia es propia, si por dos números diferentes se trata de admitancia mutua o de transferencia en tre las máquinas signadas con los números del subíndice.

Sustituyendo (2) en (1) se obtiene:

$$\begin{aligned} P_1 + jQ_1 &= \bar{E}_1^* \bar{Y}_{11} \bar{E}_1 + \bar{E}_1^* \bar{Y}_{12} \bar{E}_2 \dots + \bar{E}_1^* \bar{Y}_{1n} \bar{E}_n \\ P_2 + jQ_2 &= \bar{E}_2^* \bar{Y}_{21} \bar{E}_1 + \bar{E}_2^* \bar{Y}_{22} \bar{E}_2 \dots + \bar{E}_2^* \bar{Y}_{2n} \bar{E}_n \end{aligned} \quad (3)$$

y así sucesivamente.

Para estudios de estabilidad es preferible tener ecuaciones con magnitudes escalares y el ángulo de desplazamiento de las máquinas:

$$\begin{aligned} \bar{E}_1 &= E_1 \angle \delta_1 & \bar{E}_2 &= E_2 \angle \delta_2 & \dots & \bar{E}_n &= E_n \angle \delta_n \\ \bar{Y}_{11} &= Y_{11} \angle \theta_{11} & \bar{Y}_{12} &= Y_{12} \angle \theta_{12} & \text{etc.} & & \end{aligned} \quad (4)$$

Sustituyendo (4) y (5) en (3) se tiene:

$$\begin{aligned} P_1 + jQ_1 &= E_1^2 Y_{11} \angle \theta_{11} + E_1 E_2 Y_{12} \angle \theta_{12} - \delta_1 + \delta_2 \dots E_1 E_n Y_{1n} \angle \theta_{1n} - \delta_1 + \delta_n \\ P_2 + jQ_2 &= E_2 E_1 Y_{21} \angle \theta_{21} - \delta_2 + \delta_1 + E_2^2 Y_{22} \angle \theta_{22} \dots E_2 E_n Y_{2n} \angle \theta_{2n} - \delta_2 + \delta_n \end{aligned} \quad (6)$$

y así sucesivamente.

Usando la relación $\angle \theta = \cos \theta + j \sin \theta$ se tiene

$$\begin{aligned} P_1 &= E_1^2 Y_{11} \cos \theta_{11} + E_1 E_2 Y_{12} \cos(\theta_{12} - \delta_1 + \delta_2) \dots E_1 E_n Y_{1n} \cos(\theta_{1n} - \delta_1 + \delta_n) \\ Q_1 &= E_1^2 Y_{11} \sin \theta_{11} + E_1 E_2 Y_{12} \sin(\theta_{12} - \delta_1 + \delta_2) \dots E_1 E_n Y_{1n} \sin(\theta_{1n} - \delta_1 + \delta_n) \end{aligned} \quad (7)$$

y en forma similar para las otras máquinas.

TRANSFORMADORES.-

Son aparatos que se usan para transferir energía de un circuito a otro. En principio constan de dos circuitos eléctricos, independientes electricamente pero acoplados uno a otro magnéticamente.

En el presente estudio se tratarán los transformadores de dos y tres devanados.

Transformadores de dos Devanados.- Se representan por una T equivalente, figura 3, en donde las impedancias en serie representan las equivalentes de cada devanado del transformador; y la impedancia en paralelo representa la de excitación. (2)

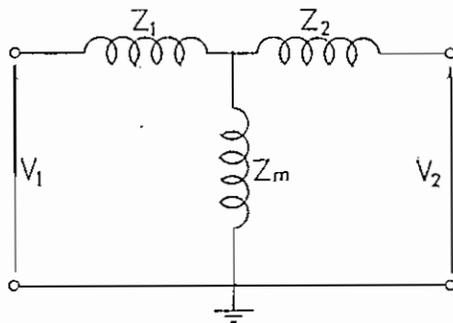


Fig. 3

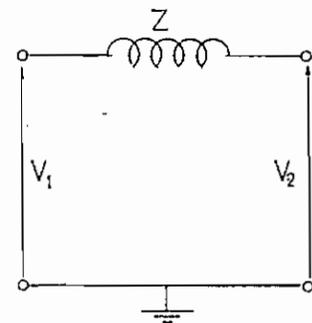


Fig. 4

Esta impedancia de excitación puede ser despreciada para estudios de Estabilidad, quedando el circuito equivalente del transformador como el que indica la figura 4, en donde "Z" es la impedancia equivalente del transformador y viene dada por la impedancia de cortocircuito.

La corriente de magnetización de los transformadores es de aproximadamente el 3-4 % de la corriente de carga. (1)

Se ha dicho que se desprecia la impedancia de magnetización, en vista de que sus efectos pueden ser compensados con la capacitancia de la línea de transmisión.

Se debe considerar el transformador con "taps", debido a que en el caso en que haya la necesidad de variar la relación de transformación en los transformadores, se puede simular esa variación sin necesidad de hacer un cambio de los valores del sistema afectados por esa operación.

El transformador así considerado puede representarse como en la figura 5. El esquema de la figura es una Delta con sus elementos Z_x , Z_y y Z_z ; más adelante se demostrará que se trata de una "Delta Resonante".

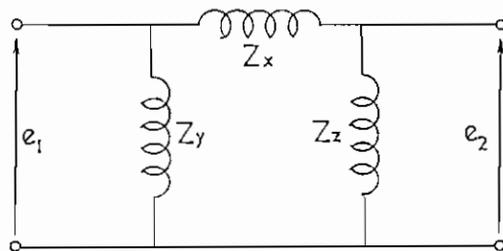


Fig. 5

Se tiene " e_1 " el voltaje nominal del transformador en el devanado primario dividido para la base de voltaje en ese lado del sistema.

Así mismo se tiene " e_2 " para el devanado secundario. La relación de voltaje del transformador al vacío es " e_1/e_2 ".

Se tiene Z_t , que es la impedancia del transformador en por unidad, basado en los Voltamperios Base del sistema:

$$\frac{Z_z}{Z_x + Z_z} = \frac{e_2}{e_1} \quad (8) \qquad \frac{Z_y}{Z_x + Z_y} = \frac{e_1}{e_2} \quad (8')$$

Con el devanado primario cortocircuitado, la impedancia vista desde el devanado secundario es " $e_2^2 Z_t$ " con base de voltaje igual a la de ese lado del transformador.

Si este valor de impedancia es igualado a aquel en la figura 5, vista desde el secundario con el primario cortocircuitado.

$$\frac{Z_x Z_z}{Z_x + Z_z} = e_2^2 Z_t \quad (9)$$

Resolviendo simultaneamente (8) y (9) se tiene:

$$Z_x = e_1 e_2 Z_t \quad (10)$$

Reemplazando en (8) y en (8')

$$Z_y = \frac{e_1}{e_2 - e_1} (e_1 e_2 Z_t) \quad (11)$$

$$Z_z = \frac{e_2}{e_1 - e_2} (e_1 e_2 Z_t) \quad (12)$$

De (8), (8') y (9) o de (10), (11) y (12):

$$Z_x + Z_y + Z_z = 0 \quad (13)$$

De (13) se deduce que la figura 5 representa una "Delta - resonante", ya que la suma de sus elementos es cero; además, cuando uno de los extremos está abierto y se le aplica al otro un voltaje no hay flujo de corriente, que es o

tra condición satisfecha por la "Delta Resonante".

Se nota de las ecuaciones (10) - (12) que, si " e_1 " es mayor que " e_2 ", " Z_y " es negativa, lo que indica que es capacitiva; lo mismo sucede con " Z_z " si " e_2 " es mayor que " e_1 ".

Aunque la "Delta Resonante" no puede ser reemplazada por la "Ye" equivalente de impedancias finitas, - sus elementos pueden ser combinados con otros del sistema para simplificar los cálculos.

Si " e_1 " y " e_2 " son la unidad, " $Z_y = Z_z = 0$ " y la Delta se reduce a " $Z_x \cong Z_1$ ".

Si " $e_1 = e_2$ " pero no iguales a la unidad, es el caso cuando los voltajes base están en proporción a los - voltajes nominales, pero no son iguales a ellos, entonces " Z_y " y " Z_z " se hacen infinitos, " $e_1 = e_2 = e$ ", y la impedancia del transformador es " $Z_x = e_1^2 Z_1$ ".

Si los voltajes base y nominal son iguales en u no de los lados, " e " es unitario en ese lado. En muchos-casos se puede escoger el voltaje base para que " e_1 " y " e_2 " sean unitarios.

De estas últimas conclusiones se puede deducir- que al transformador se lo puede representar siempre con la "Delta Resonante", ya que en caso de estar el trans -

formador en su relación de transformación normal, la delta se reduce a Z_t que es la impedancia equivalente de cualquier transformador.

TRANSFORMADOR DE TRES DEVANADOS.-

Se tienen los tres devanados designados 1, 2 y 3. Con un transformador de tres devanados, es razonable suponer que la base de voltaje escogida para dos de los

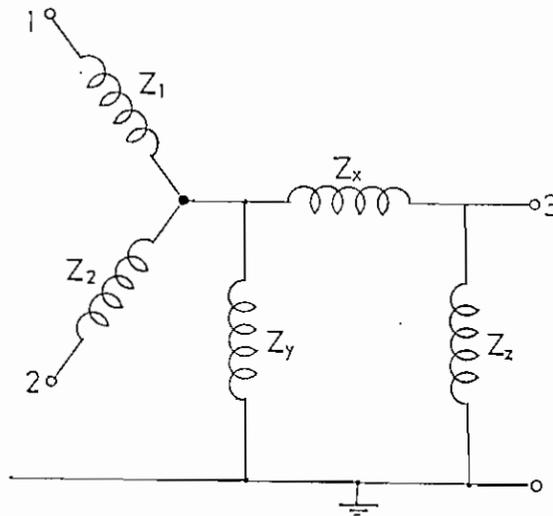


Fig. 6

tres devanados se rá igual al volta je nominal de los mismos. Como los voltajes nominal y base son iguales, empleando la notación para los transformadores de dos devanados,

" $e_1 = e_2 = 1$ ". El voltaje base en el tercer devanado será diferente del voltaje nominal, y " e_3 " es diferente de la unidad.

Se tiene " Z_{12} ", " Z_{13} " y " Z_{23} " las impedancias mutuas entre los devanados indicados por los subíndices, to mando dos al mismo tiempo, mientras el tercero está abier to.

Para satisfacer las condiciones al vacío, se considera una "Delta Resonante" en el circuito equivalente entre los terminales 1 y 3, y entre 2 y 3, pero no entre 1 y 2. La figura 6 muestra ese circuito equivalente.

Del circuito equivalente de dos devanados se desprende que:

$$Z_y = \frac{1}{e_3 - 1} Z_x \quad (14)$$

$$Z_z = \frac{e_3}{1 - e_3} Z_x \quad (14')$$

La impedancia entre los devanados 1 y 2 con el tercer devanado abierto en el circuito de la figura 6, debe ser igual que en el transformador:

$$Z_1 + Z_2 = Z_{12} \quad (15)$$

Con el terminal 3 cortocircuitado con el neutro y con voltaje aplicado en 1 cuando 2 está abierto, y luego en 2 cuando 1 está abierto:

$$Z_1 + Z_x + \frac{Z_1 Z_x}{Z_y} = Z_{13} \quad (16)$$

$$Z_2 + Z_x + \frac{Z_2 Z_x}{Z_y} = Z_{23} \quad (17)$$

Resolviendo simultaneamente (14) - (17) se tiene:

$$Z_x = \frac{Z_{13} + Z_{23} - Z_{12} e_3}{2}$$

$$Z_y = \frac{Z_{12} + Z_{23} - Z_{12} e_3}{2(e_3 - 1)}$$

$$Z_z = \frac{e_3 (Z_{12} + Z_{23} - Z_{12}e_3)}{2(1 - e_3)} \quad (18)$$

$$Z_1 = \frac{Z_{12}e_3 + Z_{13} - Z_{23}}{2 e_3}$$

$$Z_2 = \frac{Z_{12}e_3 + Z_{23} - Z_{13}}{2 e_3}$$

Si " $e_3 = 1$ " en (18), " Z_y " y " Z_z " tienden a infinito, y el circuito equivalente por unidad se reduce a aquel del transformador de tres devanados basado en los voltajes nominales y KVA del sistema.

Otra manera de representar los transformadores cuya relación de transformación está fuera de la nominal, es de acuerdo a la ecuación compleja de la relación de transformación, esto es:

$$re^{j\theta} = \frac{V' e^{j\theta'}}{V e^{j\theta}}$$

Esta otra manera de tratar a los transformadores será más detalladamente expuesta en el próximo capítulo, debido a que forma parte del estudio matemático del sistema en conjunto.

LINEAS DE TRANSMISION.-

Las líneas de transmisión tienen esencialmente dos propósitos: transmitir potencia desde una fuente hasta un sitio de consumo; y el de conectar sistemas, esto -

es para transmitir energía de un sistema a otro en caso de emergencia o para estabilizar el buen servicio de los sistemas interconectados.

Existen varios circuitos equivalentes que pueden ser usados para representar de las líneas de transmisión; uno de esos circuitos es la "Pi" nominal o equivalente.

La figura 7 muestra la "Pi" nominal, en la cual la impedancia en serie es la impedancia por fase total de la línea, y la admitancia en paralelo colocada a cada lado de la línea es la mitad de la admitancia total de la línea. La impedancia serie consiste de resistencia y reactancia inductiva, la admitancia en paralelo consiste - prácticamente solo se susceptancia capacitiva, ya que la conductancia de las líneas es despreciable.

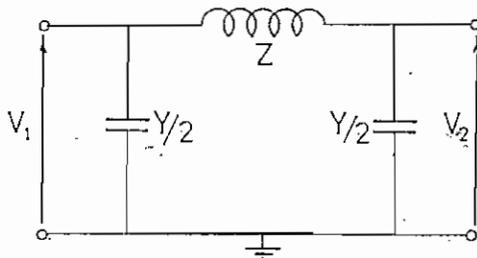


Fig. 7

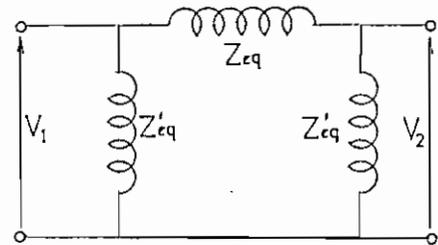


Fig. 8

La "Pi" equivalente, figura 8, se diferencia de la "Pi" nominal en unos factores de corrección que pueden ser calculados o encontrados en tablas o curvas preestablecidas. (4)

Las ecuaciones que rigen dicho circuito equivalente son:

$$Z_{eq} = r L K_r + j x L K_x \quad (19)$$

$$Z_{c0} = -j \frac{2 x'}{L} (k_r + j k_x) 10^6 \quad (20)$$

$$K_r = 1 - \frac{x L^2}{x'} 12.8756 \quad K_x = 1 - \frac{L^2}{x'} \left(x - \frac{r^2}{x} \right) 6.4378 \quad (21)$$

$$k_r = 1 - \frac{x L^2}{x'} 3.2189 \quad k_x = \frac{r L^2}{x'} 3.2189$$

En donde: L = longitud de la línea (Kilómetros).

r = resistencia de la línea (Ω / Km. - fase).

x = reactancia de la línea (Ω / Km. - fase).

x' = reactancia capacitiva en derivación (M Ω /Km - fase).

ELEMENTOS CONCENTRADOS.-

Elementos concentrados son aquellos usados en los sistemas eléctricos con el fin de lograr ciertas condiciones de funcionamiento.

Fundamentalmente existen dos tipos de elementos concentrados, a saber: Reactores y condensadores; de estos elementos se tratará a continuación.

REACTORES.- Se instalan normalmente en los sistemas de potencia para limitar la magnitud de las

corrientes de cortocircuito y para reducir las perturbaciones de la tensión en el resto del sistema.

Según el uso que se los da, se conectan en serie o en paralelo. Si están conectados en serie sirven como limitadores de corriente, para reducir las corrientes de cortocircuito y para reducir las perturbaciones de tensión. Si están conectados en paralelo se emplean con el objeto de neutralizar el efecto de las corrientes de carga o capacitivas.

CONDENSADORES.- Se dividen en dos tipos principales: estáticos y sincrónicos.

Los condensadores estáticos suelen ir conectados a los sistemas de dos formas: en paralelo o en serie, dependiendo del fin al que estén destinados.

Un condensador conectado entre línea y neutro o línea y línea, se llama "Condensador en Paralelo". Están muchas veces referidos a una fuente supliendo KVAR al sistema.

Los condensadores cuando están conectados en serie con la línea, producen el efecto de neutralizar o reducir la reactancia inductiva de la línea. Este efecto puede aceptarse es una "reducción aparente de la longitud de la línea".

Capacitores en paralelo.- Los capacitores en paralelo en sistemas de potencia tienen las siguientes funciones principales:

Asegurar que los KVAR inductivos suplidos por la carga, se mantengan en límites razonables.

Evitar sobrecargas de circuitos.

Reducir las pérdidas en el sistema.

Regular el nivel de voltaje del sistema.

Capacitores en serie.- Se usan principalmente para reducir las caídas de voltaje de los sistemas y mejorar la regulación de voltaje.

Condensadores sincrónicos.- Son los competidores de los capacitores. Su uso y efecto son en principio los mismos, pero los condensadores sincrónicos tienen ciertas ventajas y desventajas, tales como:

El condensador sincrónico puede ser fijado en un valor con mucha fineza, mientras que en los estáticos esto requiere de muchos pasos de tanteo.

Pueden suplir en períodos cortos, mayor número de KVAR que el de su rango nominal.

Como desventaja se puede anotar la mayor complejidad en la instalación de condensadores sincrónicos; además aumentan la corriente de cortocircuito del sistema, con las consiguientes desventajas.

CARGAS.-

Las cargas, siendo el fin por el que existen - los sistemas de potencia, son junto con los generadores, - los elementos principales de los mismos.

En los sistemas de potencia se consideran las - cargas concentradas en algunos puntos, reuniendo en ellos todas las cargas pequeñas que componen el sistema de distribución, y dentro de éste cada uno de los aparatos que funcionan a base de electricidad.

Se conocen básicamente dos tipos de cargas: Inductivas y Resistivas, podría considerarse también un ter cero que sería la combinación de los dos anteriores. En la realidad las cargas que predominan son las compuestas de parte inductiva y parte resistiva.

Para estudios de Estabilidad las cargas se re-- presentan como impedancias en paralelo; estas impedancias provienen de la conv rsión de los kilovatios y de los kilovars en ohmios, al voltaje normal. Esto se hace debido a que los estudios de estabilidad se realizan para períodos de tiempo muy pequeños, en donde se supone no hay cam bios de voltaje.

Para estudios de Flujo de Carga, como en ellos-

se considera la variación de voltaje, las cargas pueden ser representadas también como impedancias, pero haciendo las correcciones correspondientes a cada cambio de voltaje.

C A P I T U L O I I I

ANALISIS MATEMATICO DEL SISTEMA.-

El fin del presente trabajo es el estudio del Flujo de Carga y de Estabilidad de un sistema. En consecuencia hay que hacer el estudio matemático orientado a la resolución de esos problemas.

El problema del Flujo de Carga consiste en determinar las magnitudes de Voltaje de nodo y los correspondientes Angulos de Voltaje, para un grupo de condiciones impuestas al sistema (6); como existe la necesidad de conocer el flujo de potencia por los ramales del sistema hay necesidad de calcular las Potencias Activa y Reactiva pero esos valores se pueden encontrar facilmente una vez que se tienen los valores de los voltajes y de las impedancias del sistema.

Existen algunos métodos para resolver el problema de Flujo de Carga, para el presente estudio se ha escogido el método de Vectores de Voltaje, debido a que es más ventajoso en cuanto a rapidez y seguridad de convergencia y sobre todo porque es el único método que introduce simultaneamente el enfoque del problema cuando existen transformadores con relación de transformación fuera de la nominal.

En la figura 9 se muestra un sistema general en donde todos los nodos están interconectados. (7)

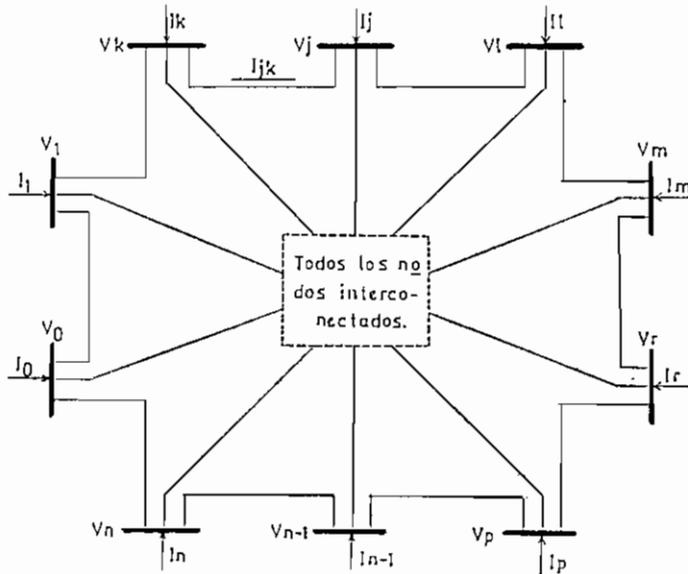


Fig. 9

En el nodo "k", la corriente total I_k es la suma de las corrientes que fluyen por las ramas y convergen al nodo "k", así:

$$I_k = I_{0k} + I_{1k} \dots + I_{nk} \quad (22)$$

La corriente de rama entre los nodos "j" y "k", es:

$$I_{kj} = \frac{V_k - V_j}{Z_{kj}} \quad (23)$$

Donde V_k y V_j son los voltajes fase-neutro en los nodos "k" y "j" respectivamente, y Z la impedancia de la rama "kj".

La ecuación (22) puede ser expresada con admi-

tancia en lugar de impedancia:

$$I_{kj} = Y_{kj} (V_k - V_j) \quad (24)$$

donde

$$Y_{kj} = \frac{1}{Z_{kj}} \quad (25)$$

Sumando todas las corrientes en el nodo "j" y usando la expresión (24), la corriente total del nodo "j" es:

$$I_j = \sum_k Y_{jk} (V_j - V_k) \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (26)$$

Ahora bien, para cualquier nodo "j", la potencia compleja S_j , viene dada por:

$$S_j = V_j I_j^* \quad (27)$$

$$S_j = P_j + jQ_j \quad (28)$$

donde * indica la conjugada.

Sustituyendo (26) en (27) se tiene:

$$S_j = V_j \sum_k Y_{jk}^* (V_j - V_k)^* \quad (29)$$

Usando la expresión (28), y poniendo (29) en forma exponencial, se tiene:

$$P_j + jQ_j = V_j e^{j\theta_j} \sum_k Y_{jk}^* (V_j e^{j\theta_j} - V_k e^{j\theta_k})^* \quad k \neq j = 0, 1, \dots, n \quad (30)$$

donde: P_j = potencia real entrando al nodo "j".

Q_j = potencia reactiva entrando al nodo "j".

θ_k = ángulo de voltaje en el nodo "k".

V_k = magnitud de voltaje en el nodo "k".

también:

$$Y_{jk} = \frac{1}{R_{jk} + jX_{jk}} \quad j \neq k \quad (31)$$

$$Z_{jk}^2 = R_{jk}^2 + X_{jk}^2 \quad j \neq k \quad (32)$$

donde: R_{jk} = resistencia de rama entre los nodos "j" y "k".

X_{jk} = reactancia de rama entre los nodos "j" y "k".

Ejecutando las conjugadas de (30):

$$P_j + jQ_j = V_j e^{j\theta_j} \sum_k \frac{1}{R_{jk} - jX_{jk}} (V_j e^{j\theta_j} - V_k e^{j\theta_k}) \quad (33)$$

Racionalizando:

$$P_j + jQ_j = V_j \sum_k \frac{R_{jk} + jX_{jk}}{R_{jk}^2 + X_{jk}^2} (V_j - V_k e^{j(\theta_j - \theta_k)}) \quad (34)$$

Poniendo en forma trigonométrica y reemplazando (32) en (34), se tiene:

$$P_j + jQ_j = V_j \sum_k \frac{R_{jk} + jX_{jk}}{Z_{jk}^2} V_j - [V_k (\cos(\theta_j - \theta_k) + j \operatorname{sen}(\theta_j - \theta_k))] \quad (35)$$

Poniendo en función del ángulo mitad:

$$P_j + jQ_j = V_j \sum_k \frac{R_{jk} + jX_{jk}}{Z_{jk}^2} [V_j - V_k (1 - 2 \operatorname{sen} \frac{\theta_j - \theta_k}{2} + j \operatorname{sen}^2(\theta_j - \theta_k))] \quad (36)$$

Ejecutando operaciones, y separando las partes real e imaginaria, se tiene por fin:

$$P_j = V_j \sum_k \frac{V_k \operatorname{sen}(\theta_j - \theta_k)}{Z_{jk}^2 / X_{jk}} + V_j \sum_k \left[\frac{V_j - V_k}{Z_{jk}^2 / R_{jk}} + \frac{2 V_k \operatorname{sen}^2(\theta_j - \theta_k) / 2}{Z_{jk}^2 / R_{jk}} \right] \quad (37)$$

$$Q_j = V_j \sum_k \frac{V_j - V_k}{Z_{jk}^2 / X_{jk}} + V_j \sum_k \left[- \frac{V_k \operatorname{sen}(\theta_j - \theta_k)}{Z_{jk}^2 / R_{jk}} + \frac{2 V_k \operatorname{sen}^2(\theta_j - \theta_k) / 2}{Z_{jk}^2 / X_{jk}} \right]$$

Si se toman en cuenta los dos primeros términos de la Serie de Taylor, $(\theta_j - \theta_k) - (\theta_j - \theta_k)^3/6$, en lugar de $\operatorname{sen} \theta$, las expresiones (37) se convierten en:

001617

$$P_j = \sum_k \frac{\theta_j - \theta_k}{(Z_{jk}^2 / X_{jk}) / V_j V_k} + V_j \sum_k \left[\frac{V_j - V_k}{Z_{jk}^2 / R_{jk}} + \frac{V_k (\theta_j - \theta_k)^2}{2 Z_{jk}^2 / R_{jk}} - \frac{V_k (\theta_j - \theta_k)^3}{6 Z_{jk}^2 / X_{jk}} \right] \quad (38)$$

$$Q_j = V_j \sum_k \frac{V_j - V_k}{Z_{jk}^2 / X_{jk}} + \sum_k \left[-\frac{V_k (\theta_j - \theta_k)}{Z_{jk}^2 / R_{jk}} + \frac{V_k (\theta_j - \theta_k)^2}{2 Z_{jk}^2 / X_{jk}} + \frac{V_k (\theta_j - \theta_k)^3}{6 Z_{jk}^2 / R_{jk}} \right]$$

En (38):

$$I_j = \sum_k \frac{V_j V_k}{Z_{jk}^2 / X_{jk}} (\theta_j - \theta_k) \quad (39)$$

$$P_j = V_j \sum_k \left[\frac{V_j - V_k}{Z_{jk}^2 / R_{jk}} + \frac{V_k (\theta_j - \theta_k)^2}{2 Z_{jk}^2 / R_{jk}} - \frac{V_k (\theta_j - \theta_k)^3}{6 Z_{jk}^2 / X_{jk}} \right] \quad (40)$$

$$J_j = \sum_k \frac{V_j - V_k}{Z_{jk}^2 / X_{jk}} \quad (41)$$

$$q_j = \sum_k \left[-\frac{V_k (\theta_j - \theta_k)}{Z_{jk}^2 / R_{jk}} + \frac{V_k (\theta_j - \theta_k)^2}{2 Z_{jk}^2 / X_{jk}} + \frac{V_k (\theta_j - \theta_k)^3}{6 Z_{jk}^2 / R_{jk}} \right] \quad (42)$$

En todas las expresiones anteriores:

$$j, k = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$y \quad j \neq k$$

Entonces se puede expresar:

$$I_j = P_j - P_j \quad j = 0, 1, \dots, n \quad (43)$$

$$J_j = \frac{Q_j}{V_j} - q_j \quad j = 0, 1, \dots, n \quad (44)$$

Tomando el nodo de referencia 0, y $\theta_0=0$ y $V_j=V_0$ se puede escribir (39) y (41) en forma de matriz. se obtienen entonces los dos siguientes sistemas de "n" ecuaciones lineales simultáneas:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & \cdots & T_{1n} \\ T_{21} & T_{22} & & T_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ T_{n1} & T_{n2} & & T_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_n \end{bmatrix} \quad (45)$$

$$\begin{aligned}
 T_{jj} &= \sum_{k=0}^n t_{jk} \\
 T_{jk} &= T_{kj} = - t_{jk} = - t_{kj} \\
 t_{jk} &= \frac{V_j V_k}{Z_{jk}^2 / X_{jk}} \quad j \neq k = 0, 1, \dots, n \quad (45a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ \vdots \\ J_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & \dots & U_{1n} \\ U_{21} & U_{22} & & U_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ U_{n1} & U_{n2} & & U_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 - V_0 \\ V_2 - V_0 \\ \vdots \\ V_n - V_0 \end{bmatrix} \quad (46)$$

$$\begin{aligned}
 U_{jj} &= \sum_{k=0}^n u_{jk} \\
 U_{jk} &= U_{kj} = - u_{jk} = - u_{kj} \\
 u_{jk} &= \frac{1}{Z_{jk}^2 / X_{jk}} \quad j \neq k = 0, 1, \dots, n \quad (46a)
 \end{aligned}$$

Las expresiones (45) y (46) con las relaciones correspondientes (43) y (44) representan el modelo matemático del Flujo de Carga. En el problema del Flujo de Carga (45) debe ser resuelto para las incógnitas θ , ángulos de voltaje, y (46) para las incógnitas V , magnitudes de voltaje. De las magnitudes y ángulos de voltaje y los datos iniciales, cualquier otra magnitud puede ser calculada directamente. Puesto que (43) y (44) son no-lineales, un esquema iterativo debe ser empleado para resolver el sistema.

Los modelos (45) y (46) pueden ser resueltos de varias formas, el método usado en este trabajo será trata

do en el Capítulo correspondiente a la resolución del problema.

TRATAMIENTO DE LOS TRANSFORMADORES CON RELACION DE TRANSFORMACION FUERA DE LA NOMINAL.-

En el caso de incluirse transformadores con relación de transformación fuera de la nominal se puede incluir este estudio simultaneamente con el resto del problema.

Se considera el transformador en el elemento j-k igual a 1-2, como se demuestra en la figura 10; la relación de transformación -

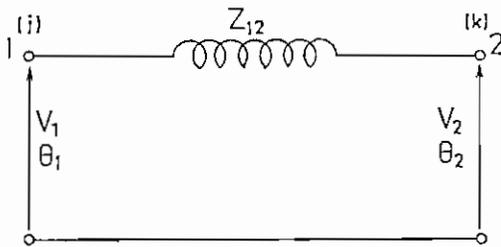


Fig. 10

es:

$$r_1 = \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_1 + \Delta V_1}{V_1} \quad (47)$$

y en forma exponencial:

$$r_1 e^{j\psi_1} = \frac{V_1 + \Delta V_1}{V_1} e^{j\Delta\theta_1} \quad (48)$$

$$y \quad \psi_1 = \Delta\theta_1$$

Entonces en lugar de (45) y (46) se puede escribir:

$$\begin{bmatrix} I_1 + T_{12} \Delta\theta_1 \\ I_2 - T_{21} \Delta\theta_1 \\ I_3 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & \cdots & T_{1n} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & & T_{2n} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & & T_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{n1} & T_{n2} & T_{n3} & & T_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \vdots \\ \theta_n \end{bmatrix} \quad (49)$$

$$\begin{bmatrix} J_1 + U_{12} \Delta V_1 \\ J_2 - U_{21} \Delta V_1 \\ J_3 \\ \vdots \\ J_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} & \cdots & U_{1n} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} & & U_{2n} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} & & U_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ U_{n1} & U_{n2} & U_{n3} & & U_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 - V_0 \\ V_2 - V_0 \\ V_3 - V_0 \\ \vdots \\ V_n - V_0 \end{bmatrix} \quad (50)$$

Donde las cantidades T en (49) tienen el mismo significado para todos los elementos "j-k", dado por (45) (a), excepto para los elementos "r-k = j-k" con transformadores con relación de transformación fuera de la nominal, donde $V_j = V_r$ permanece, en lugar de $r_j V_j = r_r V_r = r_l V_l$. Las cantidades U en (50) están definidas por (46a).

Las cantidades I y J están definidas por las ecuaciones (43) y (44) respectivamente. Pero estas expresiones no son generales, se cumplen solamente para los sistemas sin transformación fuera de la nominal. Pero las ecuaciones de I y J puestas a continuación son independientes, y prescinden de si el sistema contiene o no transformadores con relación de transformación fuera de la nominal.

La fórmula para I es:

$$I_j = P_j - \sum_{k=0}^n P_{jk} \quad (51a)$$

$$P_{jk} = \frac{V_j (V_j - V_k)}{Z_{jk}^2 / R_{jk}} + \frac{V_j V_k (\theta_j - \theta_k)^2}{2 Z_{jk}^2 / R_{jk}} - \frac{V_j V_k (\theta_j - \theta_k)^3}{6 Z_{jk}^2 / X_{jk}} \quad (51b)$$

La expresión (51b) se cumple para todos los ele

mentos (ramas) "j-k", excepto para los elementos "j-k = r-k" con transformadores con relación de transformación fuera de la nominal, donde " $V_j = V_r$ " se pone en lugar de " $r_j V_j = r_r V_r$ ", y " $\theta_j = \theta_r$ " en lugar de " $\theta_j + \Delta\theta_j = \Delta\theta_r + \theta_r$ ", $j = r$.

La fórmula para J es:

$$J_j = \frac{Q_j}{V_j} \sum_{k=0}^n q_{jk} + \sum_k a_{jk} \quad (52a)$$

$$q_{jk} = -\frac{V_k (\theta_j - \theta_k)}{Z_{jk}^2 / R_{jk}} + \frac{V_k (\theta_j - \theta_k)^2}{2 Z_{jk}^2 / X_{jk}} + \frac{V_k (\theta_j - \theta_k)^3}{6 Z_{jk}^2 / R_{jk}} \quad (52b)$$

La expresión (52b) se cumple para todos los elementos "j-k" excepto para los elementos "j-k = r-k" con transformadores con relación de transformación fuera de la nominal, donde " $\theta_j = \theta_r$ " se pone en lugar de " $\theta_j + \Delta\theta_j = \theta_r + \Delta\theta_r$ "; $j = r$, y " $V_j = V_r$ " y " V_k " en lugar de " $r_j V_j = r_r V_r$ " y " $r_r V_k$ ", respectivamente.

Las cantidades " a_{jk} " en (52b) son iguales a cero para todos los nodos "j" excepto para el nodo "j = r" en el elemento "j-k = r-k" con transformadores con relación de transformación fuera de la nominal, donde sus valores son:

$$a_{jk} = a_{rk} = (r-1) U_{rk} (r V_r - V_k) \quad (53)$$

En (53), " a_{jk} " y " a_{rk} " indican la corriente debida al transformador, (r-1) es el aumento en por ciento de las magnitudes de voltaje, (rV_r - V_k) es el aumento del voltaje en magnitud.

- C A P I T U L O I V -

LOGICA A SEGUIR EN LA PROGRAMACION.-

El primer paso en la programación para el Flujo de Carga consiste en aplicar el algoritmo iterativo necesario para resolver el problema.

El algoritmo iterativo básico para resolver el problema de Flujo de Carga es como sigue:

- 1º Fijar las magnitudes de voltaje, en donde se den, y fijar las otras magnitudes de voltaje igual a aquel del nodo de referencia ($V_j = V_0$). Todos los ángulos se fijan igual al del nodo de referencia ($\theta_j = \theta_0 = 0$).
- 2º Calcular las cantidades I_j y J_j de (51) y (52) respectivamente.
- 3º Resolver (50) para las incógnitas de magnitudes de voltaje V_j , y (49) para los ángulos de voltaje θ_j , $j = 0, 1, 2, \dots, n$.
- 4º Se requiere un proceso iterativo hasta que la solución converja, por ejemplo hasta que las expresiones

$$\begin{aligned} I_j &= (I_j^t - I_j^{t-1}) \\ J_j &= (J_j^t - J_j^{t-1}) \end{aligned} \quad (54)$$

donde "t" indica el número de iteraciones, sean suficientemente pequeñas para cada nodo "j".

Cuando (54) está satisfecho, el problema está resuelto. Si no, el proceso se repite desde el paso 2º.

El diagrama simplificado de flujo del Algoritmo Iterativo se muestra en la figura 11.

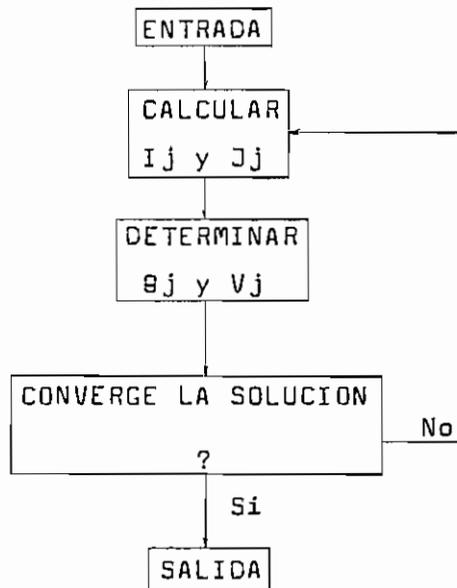


Fig. 11

El punto más importante en la resolución de las expresiones (49) y (50), esto es $[I] = [T][θ]$ y $[J] = [U][V]$, es la resolución de las matrices $[T]$ y $[U]$.

En el presente estudio se ha escogido el método de la inversión de la matriz; entonces;

$$[I] = [T] [e]$$

$$[J] = [U] [V]$$

$$[e] = [I] [T]^{-1}$$

$$[V] = [J] [U]^{-1}$$

Para la inversión de la matriz se ha usado la Subrutina MINV, propia de la computadora IBM 1130 en la que se realizó el presente trabajo.

Una vez que se tiene elaborado el programa se debe pensar en la entrega de los datos a la computadora.

Para el presente trabajo y de acuerdo a como se ha enfocado el problema, se hace necesario entregar a la computadora, los siguientes datos:

- Voltaje de los nodos, en donde se ha fijado esa magnitud.
- Resistencia de las líneas.
- Reactancia de las líneas.
- Voltajes primario y secundario de los transformadores.
- Potencia activa y reactiva de los generadores
- Potencia activa y reactiva de las cargas.
- Número de transformadores y su relación de transformación.

PROGRAMA FORTRAN.-

Para la elaboración del Programa FORTRAN es ne-

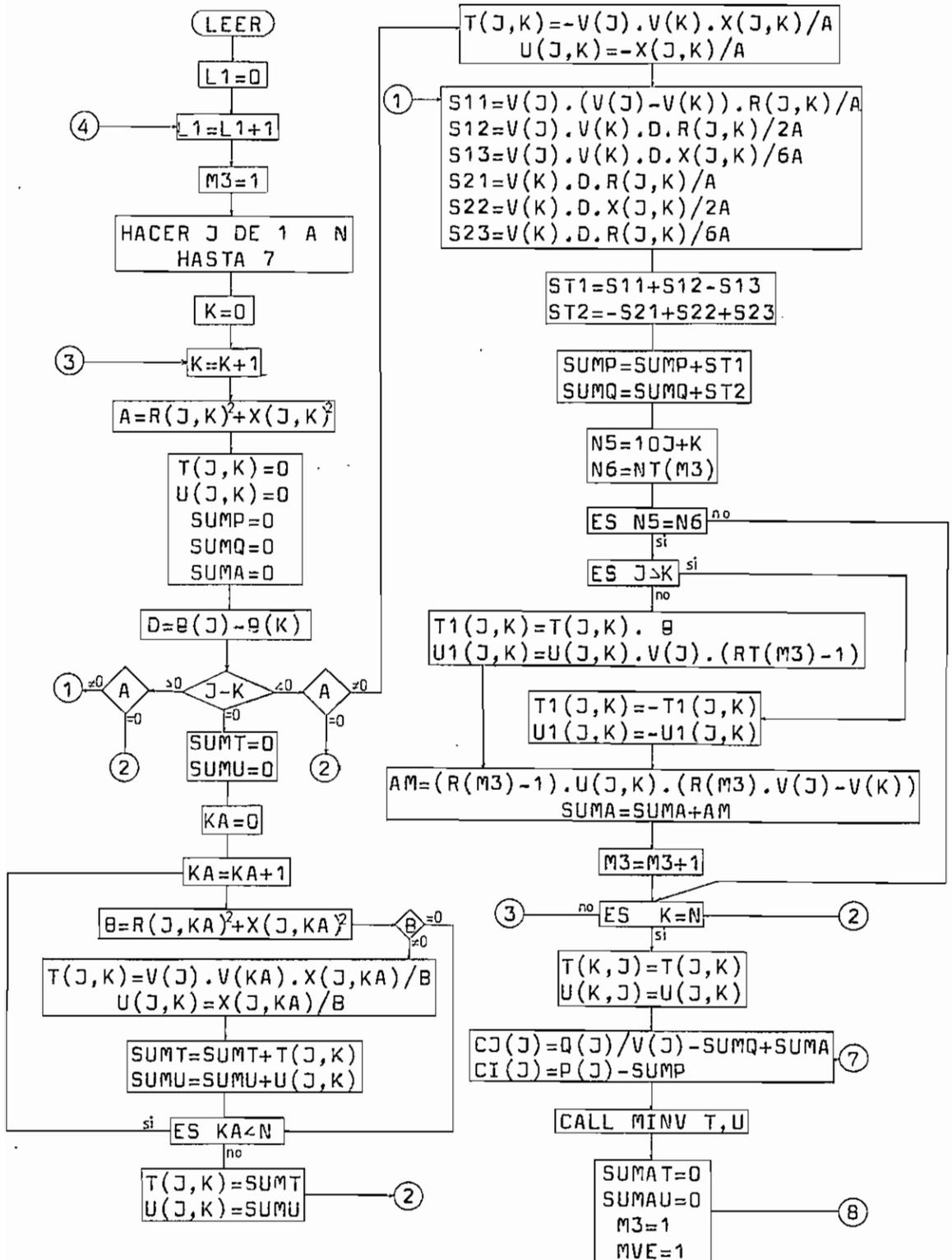


Fig. 12

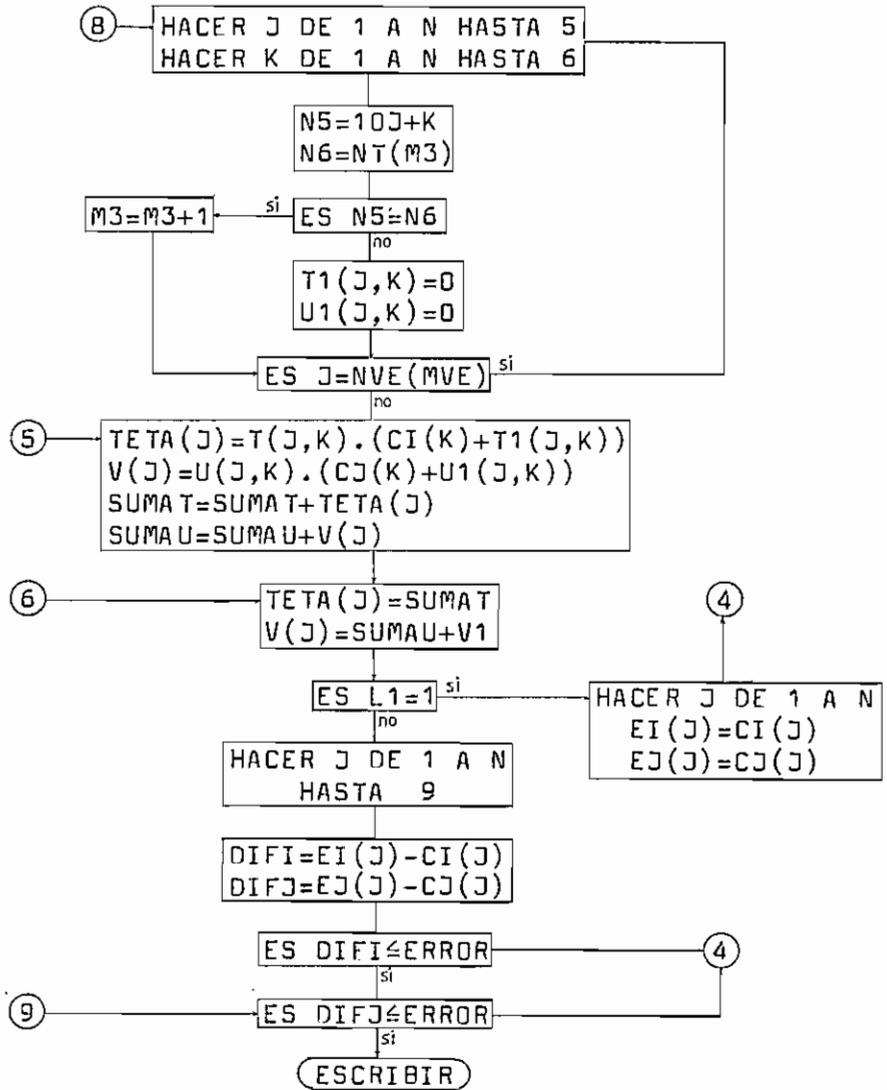


Fig. 12 (Continuación)

cesario en primer lugar, elaborar el Diagrama de Flujo - del problema; este diagrama de flujo puede verse en la fi gura 12.

En el diagrama de flujo pueden verse términos - que no constan en el estudio matemático del problema, y - que sirven para facilitar la programación y para aumentar la eficiencia de la computadora.

A continuación se ve un cuadro de los términos- mencionados y su significado.

TERMINO	SIGNIFICADO
V1	Voltaje de referencia
A	Corresponde a Z^2
D	Corresponde a $(\theta_j - \theta_k)$
B	Corresponde a Z^2 para el cálculo de los elementos T_{nn} y U_{nn} .
SUMT	Sumatorio de " t_{jk} ", en (45a)
SUMP	Sumatorio de " p_{jk} ", en (51a)
SUMU	Sumatorio de " u_{jk} ", en (46a)
SUMQ	Sumatorio de " q_{jk} ", en (52a)
SUMA	Sumatorio de " a_{jk} ", en (51a)
S11, S12 S13	Términos en la expresión (51b)
S21 S22 S23	Términos en la expresión (52b)
ST1 ST2	Representan " p_{jk} " y " q_{jk} " en las expresiones (51b) y (52b)

AM	Es " a_{jk} " en (53)
CI(J)	Es " I_j " en (51a)
CJ(J)	Es " J_j " en (52a)
DIFI	Diferencia de I_j en (54)
DIFJ	Diferencia de J_j en (54)

El Programa FORTRAN para el Flujo de Carga se puede ver en la figura 13.

LIMITACIONES USOS Y RECOMENDACIONES.-

Las limitaciones del programa radican principalmente en la capacidad de la computadora. El presente trabajo ha sido realizado en una computadora IBM 1130 con una capacidad de memoria de 6K (6.000 espacios de memoria) Con esa capacidad de memoria el presente trabajo está limitado a la resolución de problemas de redes no mayores de 15 nodos.

Por lo demás se podrá tener un transformador por nodo y todos los nodos interconectados entre sí.

Así mismo se podrá tener fuentes de potencia reactiva y de potencia activa en todos los nodos del sistema, y consecuentemente se podrá tener cargas en cualquiera de los nodos.

```
DIMENSION U(15,15),T(15,15),L(15),M(15),RT(15),NT(15),
          NVE(15)
DIMENSION V(15),P(15),Q(15),R(15,15),X(15,15),TETA(15)
DIMENSION CJ(15),CI(15),T1(15,15),U1(15,15),EI(15),
          EJ(15)
READ(2,2)ERROR,V1
READ(2,1)LT,N,LTR,NV
READ(2,3)(RT(M1),M1=1,LT)
READ(2,1)(NT(M2),M2=1,LTR)
READ(2,1)(NVE(M4),M4=1,NV)
Do 101 J=1,N
Q(J)=0.
P(J)=0.
V(J)=0.
DO 101 K=1,N
R(J,K)=0.
101 X(J,K)=0.
102 READ(2,103)J1,K1,R(J1,K1),X(J1,K1),V(J1),P(J1),Q(J1),
          NEXT
103 FORMAT(2I3,5F14.4,I3)
      IF(NEXT)104,102,104
104 READ(2,2)(TETA(J2),J2=1,N)
1  FORMAT(20I3)
2  FORMAT(5F15.8)
3  FORMAT(8F10.6)
```

Fig. 13

```
R(K,J)=R(J,K)
X(K,J)=X(J,K)
L1=0
4  L1=L1+1
    M3=1
    DO 20 J=1,N
      K=0
5   K=K+1
      A=R(J,K)**2+X(J,K)**2
      T(J,K)=0.
      U(J,K)=0.
      SUMP=0.
      SUMQ=0.
      SUMA=0.
      D=TETA(J)-TETA(K)
      IF(J-K)11,6,12
6   SUMT=0.
      SUMU=0.
      KA=0
7   KA=KA+1
      B=R(J,KA)**2+X(J,KA)**2
      IF(B)8,9,8
8   T(J,K)=V(J)*V(KA)*X(J,KA)/B
      X(J,K)=X(J,KA)/B
      SUMT=SUMT+T(J,K)
      SUMU=SUMU+U(J,K)
```

Fig. 13 (Continuación)

```
9  IF(KA-N)7,10,10
10  T(J,K)=SUMT
    U(J,K)=SUMU
    GO TO 18
11  IF(A)61,18,61
12  IF(A)14,18,14
61  T(J,K)=(-1.)*V(J)*V(K)*X(J,K)/A
    U(J,K)=(-1.)*X(J,K)/A
14  S11=V(J)*(V(J)-V(K))*R(J,K)/A
    S12=V(J)*V(K)*(D**2)*R(J,K)/(2.*A)
    S13=V(J)*V(K)*(D**3)*X(J,K)/(6.*A)
    S21=V(K)*D*R(J,K)/A
    S22=V(K)*(D**2)*X(J,K)/(2.*A)
    S23=V(K)*(D**3)*R(J,K)/(6.*A)
    ST1=S11+S12-S13
    ST2=-S21+S22+S23
    SUMP=SUMP+ST1
    SUMQ=SUMQ+ST2
    N5=10*J+K
    N6=NT(M3)
    IF(N5-N6)18,15,18
15  IF(J-K)158,158,16
158 T1(J,K)=T(J,K)
    T1(J,K)=0.
    U1(J,K)=U(J,K)*V(J)*(RT(M3)-1.)
    GO TO 17
```

Fig. 13 (Continuación)

```
16  T1(J,K)=(-1.)*T(J,K)
    T1(J,K)=0.
    U1(J,K)=(-1.)*U(J,K)*V(K)*(RT(M3)-1.)
17  AM=(RT(M3)-1.)*U(J,K)*(RT(M3)*V(J)-V(J))
    SUMA=SUMA+AM
    M3=M3+1
18  IF(K-N)5,19,5
19  T(K,J)=T(J,K)
    U(K,J)=U(J,K)
    CJ(J)=Q(J)/V(J)-SUMQ+SUMA
20  CI(J)=P(J)-SUMP
    CALL MINV(U,6,D,L,M)
    CALL MINV(T,6,D,L,M)
    SUMAT=0.
    SUMAU=0.
    M3=1
    MVE=1
    DO 152 J=1,N
    DO 151 K=1,N
    N5=10*J+K
    N6=NT(M3)
    IF(N5-N6)21,22,21
21  T1(J,K)=0.
    U1(J,K)=0.
    GO TO 231
22  M3=M3+1
```

Fig, 13 (Continuación)

```
231 IF(J-NVE(MVE))23,152,23
23  TETA(J)=T(J,K)*(CI(K)+T1(J,K))
    V(J)=U(J,K)*(CJ(K)+U1(J,K))
    SUMAT=SUMAT+TETA(J)
151 SUMAU=SUMAU+V(J)
    TETA(J)=SUMAT
    V(J)=SUMAU+V1
152 CONTINUE
    WRITE(3,32)(V(J),TETA(J),CI(J),CJ(J),J=1,N)
    IF(L1-1)26,24,26
24  DO 25 J=1,N
    EI(J)=CI(J)
25  EJ(J)=CJ(J)
    GO TO 4
26  DO 28 J=1,N
    DIFI=EI(J)-CI(J)
    DIFJ=EJ(J)-CJ(J)
    IF(ABS(DIFI)-ERROR)27,27,24
27  IF(ABS(DIFJ)-ERROR)28,28,24
28  CONTINUE
31  WRITE(3,319)
319 FORMAT(10X,'V(J)',14X,'TETA(J)',13X,'I(J)',15X,'J(J)',//)
    WRITE(3,32)(V(J),TETA(J),CI(J),CJ(J),J=1,N)
32  FORMAT(4(5X,E14.7))
    CALL EXIT
    END
```

Fig. 13 (Continuación)

Las limitaciones de magnitud de las cantidades están fijadas de la siguiente manera:

- Para ERROR se ha puesto un rango de 10^5 a 10^8 , que se considera suficiente para cualquier trabajo de Flujo de Catga.
- Para las cantidades que indican número de nodos, número de transformadores y número de líneas con transformadores, se considera como suficiente un rango de 1 a 999; aunque 999 líneas significan 32 nodos interconectados entre sí, que podrían ser completamente utilizados si la computadora tuviera la capacidad suficiente.
- El rango de magnitud de la relación de transformación es de 10^{-6} a 100.
- En cuanto a las magnitudes de ángulo de voltaje, se pueden poner de 10^{-4} a 10^8 .

Las cantidades de los datos deben estar dadas en por unidad.

Cuando se disponga de una computadora con mayor capacidad de memoria y se necesite estudiar un problema con más de 15 nodos, se tendrá que cambiar las tarjetas de DIMENSION, en las cuales se deberá poner en lugar de 15 el número suficiente para satisfacer las necesidades del problema. Lo mismo se debe decir de la instrucción--

CALL MINV, en la cual en donde aparece 15 debe ponerse el número correspondiente al número de nodos de la red.

La entrega de los datos referentes a la impedancia de las líneas, voltaje, potencia de los nodos se hace en una sola tarjeta por nodo, entonces se debe tomar en cuenta el hecho de que se dan los valores solamente en donde los hay, indicando antes el número de dicho nodo (J1,K1).

Además hay que anotar que las potencias cuando se tratan de generadores se deberán poner positivas y cuando se trata de cargas se deberán poner negativas.

- C A P I T U L O V -

ESTUDIO DE ESTABILIDAD DEL SISTEMA.-

ANALISIS MATEMATICO.-

La ecuación que gobierna el funcionamiento de cada una de las máquinas de un sistema es la "Ecuación de Oscilación", esta es:

$$M \frac{d^2\delta}{dt^2} = P_a = P_i - P_u \quad (55)$$

donde: M = constante de inercia de las máquinas.

δ = ángulo de desplazamiento del rotor con respecto a un eje de referencia rotando a velocidad normal.

t = tiempo.

P_a = potencia de aceleración.

P_i = potencia mecánica de entrada.

P_u = potencia eléctrica de salida.

De la ecuación (55) se llega a la siguiente ecuación, que es la usada para encontrar cada uno de los puntos de la curva de oscilación: (2)

$$\delta_n = \Delta\delta_{n-1} + \frac{(\Delta t)^2}{M} P_{a_{n-1}} \quad (56)$$

esta ecuación da el incremento del ángulo durante un intervalo de tiempo en términos de su incremento en el in-

tervalo de tiempo anterior.

La otra ecuación necesaria para resolver el problema es la de los ángulos de potencia, desarrollada en el Capítulo III:

$$P_n = \sum_{k=1}^n E_n E_k Y_{nk} \cos (\theta_{nk} - \delta_n + \delta_k) \quad (57)$$

Entonces con las ecuaciones (56) y (57) se puede entrar al siguiente punto que es la elaboración del Programa FORTRAN.

LOGICA A SEGUIR EN LA PROGRAMACION.-

En la resolución del problema de la estabilidad no hay necesidad de aplicar ningún proceso iterativo, en consecuencia basta aplicar técnicas de computación digital apropiadas, a las ecuaciones de la estabilidad para obtener el programa correspondiente.

Luego se debe elaborar la lista de datos que se necesitan para la resolución del problema.

Los datos que se deben entregar a la computadora son los siguientes:

- Voltajes internos de las máquinas, en magnitud y ángulo.
- Potencia de salida de las máquinas.
- Admitancias terminales de la red durante la

falla, en magnitud y ángulo.

- Admitancias terminales de la red luego del despeje de la falla, en magnitud y ángulo.

Para encontrar estas cantidades se pueden emplear varios métodos, uno de los cuales es el usado en "Estabilidad de los Sistemas de Potencia". (2)

Para encontrar los voltajes internos de las máquinas se puede emplear también el Programa para el Flujo de Carga, el proceso a seguir es el siguiente:

Primero se debe determinar las corrientes de los generadores utilizando la siguiente ecuación:

$$I_N = \sum_{k=1}^n Y_{jk} (V_j - V_k) + I_c \quad (58)$$

en donde: I_c = corriente de la carga conectada al nodo j .

I_N = corriente del generador.

Luego hay que calcular los voltajes de los generadores, que es el dato que se necesita, para lo cual se emplea la siguiente ecuación:

$$E_N = E_j + I_N Z_N \quad (59)$$

donde: E_N = voltaje del generador.

E_j = voltaje de la barra en la que está conectado el generador.

Z_N = impedancia del generador.

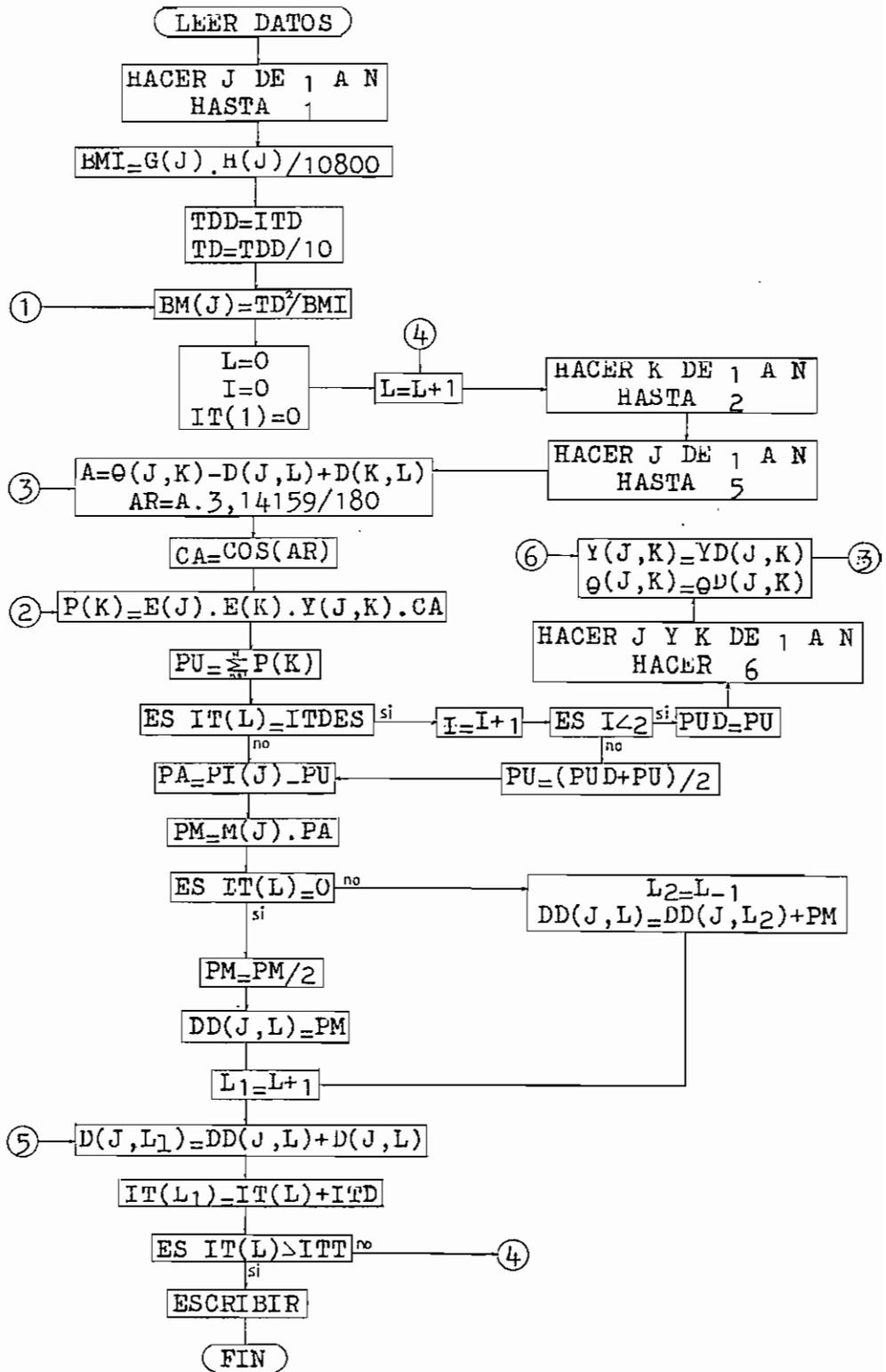


Fig. 14

Para encontrar las admitancias terminales durante y después de la falla, hay necesariamente que reducir la red utilizando métodos apropiados. (2)

PROGRAMA FORTRAN.-

Para la elaboración del Programa FORTRAN es necesario en primer lugar, elaborar el Diagrama de Flujo del problema, el diagrama de flujo del problema de estabilidad se puede ver en la figura 14.

En el Diagrama de Flujo pueden verse algunos términos que no aparecen en las ecuaciones que se utilizan para resolver este problema y que sirven para facilitar la programación.

A continuación se ve un cuadro de los términos mencionados y su significado.

TERMINO	SIGNIFICADO
TD	Intervalo de tiempo
TTDES	Tiempo de despeje
Y(J,K)	Admitancia durante la falla
YD(J,K)	Admitancia luego de la falla
$\theta(J,K)$	Angulo de la admitancia durante la falla
$\theta D(J,K)$	Angulo de la admitancia luego de la falla

DD(J,K)	$\Delta \delta$ en el tiempo n
DD(J,L2)	$\Delta \delta$ en el tiempo n-1
D(J,L)	δ en el tiempo n
D(J,L1)	δ en el tiempo n-1

El Programa FORTRAN para el Flujo de Carga se puede ver en la figura 15.

LIMITACIONES USOS Y RECOMENDACIONES.-

Como en el caso del Flujo de Carga, las limitaciones del programa radican principalmente en la capacidad de la computadora.

Así, el presente trabajo está hecho con una capacidad para 15 nodos, todos interconectados entre sí, en cada nodo pueden haber generadores y cargas. Aunque cambiando las tarjetas de DIMENSION, poniendo 20 en donde aparece 15, cosa que se ha hecho para que exista concordancia entre el Programa de la Estabilidad y el Programa del Flujo de Carga, se puede ampliar un poco más la capacidad del programa.

El rango para las cantidades de tiempo; intervalo de tiempo, tiempo de despeje y tiempo total de trabajo es de 10^4 a 10^5 .

Para las demás cantidades: voltajes, ángulos, -

```
DIMENSION TETA(15,15),D(15,15),P(15),E(15),Y(15,15),
          PI(15),G(15)
DIMENSION IT(15),H(15),BM(15),YD(15,15),TETAD(15,15),
          DD(15,15)
READ(2,1) N,ITD,ITDES
1  FORMAT(4I5)
   DO 2 J=1,N
   DO 2 K=1,N
2  D(J,K)=0.
   L1=1
   READ(2,3)(D(J1,L1),J1=1,N)
3  FORMAT(10F8.4)
   READ(2,3)((TETA(J2,K2),K2=1,N),J2=1,N)
   READ(2,3)((TETAD(J3,K3),K3=1,N),J3=1,N)
   READ(2,3)(E(J4),J4=1,N)
   READ(2,3)((Y(J5,K5),K5=1,N),J5=1,N)
   READ(2,3)((YD(J6,K6),K6=1,N),J6=1,N)
   READ(2,3)(PI(J7),J7=1,N)
   READ(2,3)(G(J8),J8=1,N)
   READ(2,3)(H(J9),J9=1,N)
   DO 4 J=1,N
   BMI=G(J)*H(J)/10800
   TDD=ITD
   TD=TDD/10.
4  BM(J)=TD**2/BMI
   L=0
   I=0
```

Fig. 15

```
      IT(1)=0
5  L=L+1
6  DO 17 J=1,N
7  PU=0.
      DO 8 K=1,N
      A=TETA(J,K)-D(J,L)+D(K,L)
      AR=A*3.14159/180.
      CA=COS(AR)
      P(K)=E(J)*E(K)*Y(J,K)*CA
8  PU=PU+P(K)
      IF(IT(L)-ITDES)13,9,13
9  I=I+1
      IF(I-2)10,12,12
10 PUD=PU
      DO 11 JD=1,N
      DO 11 KD=1,N
      Y(JD,KD)=YD(JD,KD)
11 TETA(JD,KD)=TETAD(JD,KD)
      GO TO 7.
12 PU=(PUD+PU)/2.
13 PA=PI(J)-PU
      PM=BM(J)*PA
      IF(IT(L))14,15,14
14 L2=L-1
```

Fig. 15 (Continuación)

```
DD(J,L)=DD(J,L2)+PM
GO TO 16
15 PM=PM/2.
DD(J,L)=PM
16 L1=L+1
17 D(J,L1)=DD(J,L)+D(J,L)
IT(L1)=IT(L)+ITD
IF(IT(L1)-ITT)5,5,18
18 WRITE(3,19)ITDES
19 FORMAT(10X,'TIEMPO DE DESPEJE =',F6.2,2X,'SEG/10',//)
WRITE(3,20)
20 FORMAT(5X,'TIEMPO',17X,'DELTA (GRADOS ELECTRICOS)',/)
WRITE(3,21)(J,J=1,N)
21 FORMAT(4X,'(SEG/10)',5X,'MAQUINA',1X,8(I6,5X),/)
DO 22 K=1,L
22 WRITE(3,23)IT(K),(D(J,K),J=1,N)
23 FORMAT(4X,F7.4,13X,8(F10.4,1X))
CALL EXIT
END
```

Fig. 15 (Continuación)

admitancias, potencias, etc., el rango es de 10^{-4} a 10^5 .

Todas las cantidades deben estar expresadas en por unidad, las cantidades de tiempo deben estar expresadas en forma entera y multiplicadas por 10, esto se ha hecho para mayor facilidad en la programación.

- C A P I T U L O V I -

APLICACION DE LOS PROGRAMAS.-

FLUJO DE CARGA.-

Para la aplicación del Programa del Flujo de Carga se ha escogido un problema de laboratorio usado en la Escuela Politécnica Nacional, en las clases prácticas del Analizador de Redes de corriente Alterna.

En la figura 17 se puede ver el diagrama de la red que se va a estudiar. Allí se puede apreciar los elementos componentes de la red y la longitud de las líneas en pies. En la Tabla de la figura 16 se pueden ver las características de los elementos constitutivos de la red.

ELEMENTO	SIMBOLO	X	X'	X''	MW	MVA	F.P.	RELAC. TRANS/
Generad.	G1-G2		30	20	12.5		0.86	
Generad.	G3-G4		23	14	7.5		0.86	
Transf.	T1-T2	6.2				3.0		$\frac{11}{2.3}$
Transf.	T3	5.5				6.0		$\frac{34.65}{2.4}$
Transf.	T4-T5	5.3				9.0		$\frac{36.30}{11.88}$
Reactor	R	5.0				6.0		
Carga	L1					20	0.90	
Carga	L2					2.3	0.70	

Carga	L3					11.8	0.80	
Carga	L4					8.1	0.80	

Fig. 16

Todas las líneas son de Cobre, 250 MCM y 19 hilos. La separación entre conductores es de 36 pulgadas, configuración horizontal.

El estudio del Flujo de Carga se realizará bajo las siguientes condiciones:

- Voltaje en la barra C (3) de 100%, y
- Generación de G3 y G4 de 11.5 MW y 7.8 MVAR.

Para facilitar el trabajo en la programación se han creado dos nodos que junto a los propios de las barras hacen un total de seis (6) nodos en la red; los nodos creados son el 5 y el 6.

Se debe a continuación, elaborar los datos para introducirlos en la computadora.

En primer lugar se debe dar el valor del Error (0.001) y el voltaje de referencia ($V1 = 1.0$).

Luego se deben entregar, el número de transformadores con relación de transformación fuera de la nominal ($LT = 3$), el número de nodos ($N = 6$) y el número de -

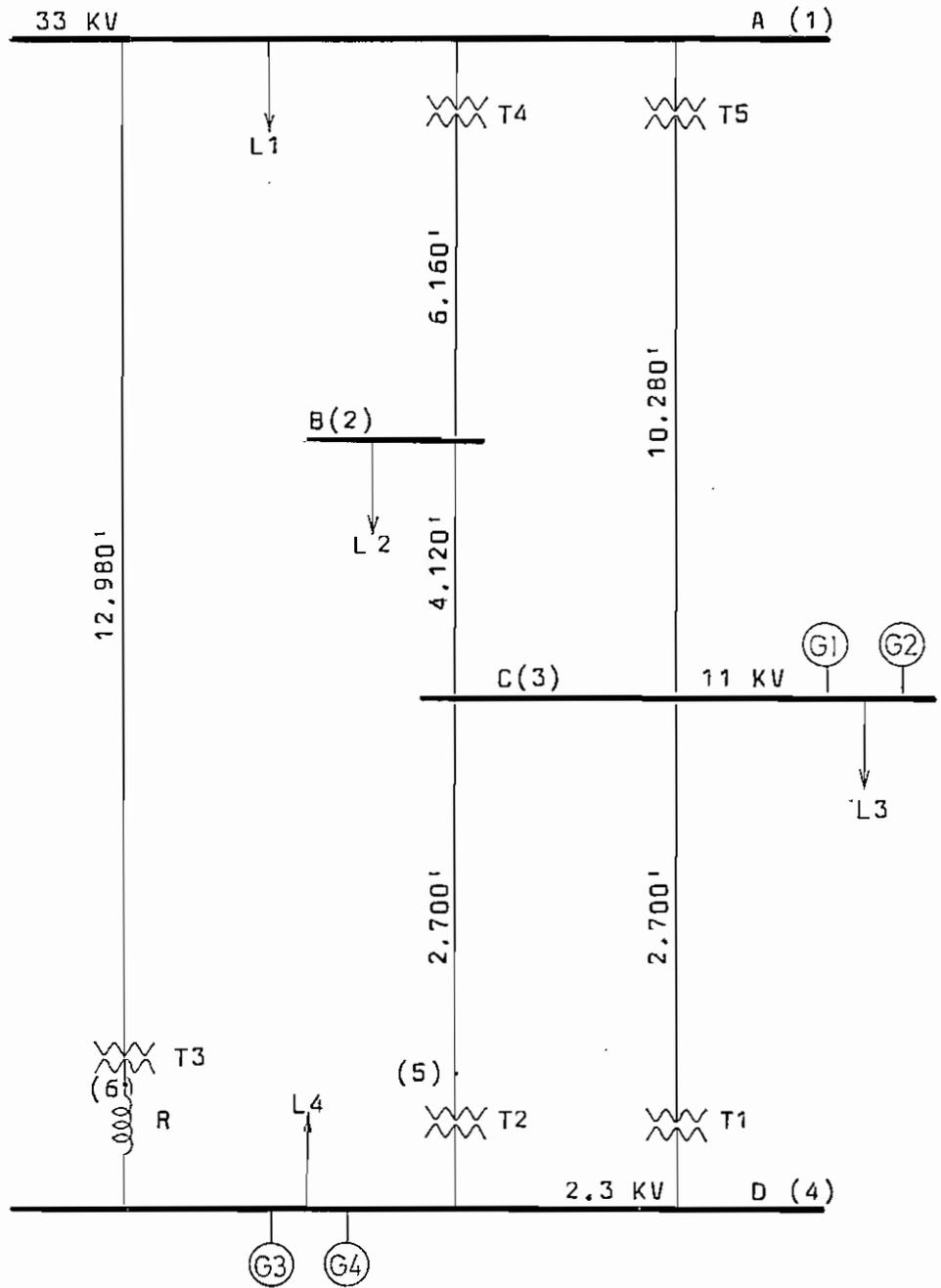


Fig. 17

líneas con transformador de relación de transformación fuera de la nominal (LTR = 6).

Los siguientes datos a entregarse son las relaciones de transformación y los nodos con transformador de relación de transformación fuera de la nominal; para el presente trabajo esos datos son:

RT =	1.018518	1.018518	1.00625			
NT =	12	13	16	21	31	61

Se debe tomar en cuenta que NT abarca todos los pares de nodos donde están conectados los transformadores debe entonces ponerse tanto "jk" como "kj" en estricto or den ascendente.

Los valores de los ángulos de voltaje, como se indicó en el Análisis Matemático, son todos cero.

Los voltajes en todos los nodos deben ponerse con el mismo valor que el voltaje de referencia (V1 = 1.)

El siguiente paso es calcular los valores en por unidad de las potencias de los generadores y de las cargas, para esto hay que dividir los valores reales para la base de potencia (20 MVA).

$$PL3 = \frac{11.8 \times 0.8}{20} = 0.475$$

$$QL3 = \frac{11.8 \times 0.6}{20} = 0.35$$

$$PG1-2 = \frac{25}{20} = 1.25$$

$$QG1-2 = \frac{25 \times 0.6}{20} = 0.75$$

Igual para las demás cargas y generadores.

Para el cálculo de las impedancias se opera de la siguiente manera:

En tablas se encuentra la resistencia y la reactancia unitarias de la línea para sus características (línea de cobre de 250 MCM y 19 hilos).

$$r = 0.235 \Omega/\text{milla} \quad x_a = 0.487 \Omega/\text{milla}$$

Se encuentra la distancia media geométrica

$$\text{GMD} = \sqrt[3]{3 \times 3 \times 6} = \sqrt[3]{54} = 3.78 \text{ pies}$$

En las tablas se encuentra la corrección de la reactancia debido a la separación de los conductores

$$x_d = 0.1614 \Omega/\text{milla}.$$

$$x = x_a + x_d$$

$$x = 0.487 + 0.1614 = 0.6484 \Omega/\text{milla}$$

La impedancia de las líneas es igual entonces a la impedancia unitaria por su longitud.

$$Z = (0.235 + j 0.6484) \times 2.14 = 0.5 + j 1.38$$

A continuación se debe calcular las impedancias en por unidad, para lo cual hay necesidad de calcular la impedancia en tanto por ciento:

$$Z_{\%} = \frac{\text{KVA}}{\text{KV} \times 10} Z$$

$$Z_{\%} = \frac{20.000}{33 \times 10} (0.5 + j 1.38) = 0.91 + j 2.5$$

y en por unidad

$$Z_{pu} = 0.0091 + j 0.025$$

De igual para las demás líneas.

Se debe también calcular las reactancias de los transformadores en por unidad:

La reactancia en base propia es:

$$x_{BProp.} = x_{\Omega} \left(\frac{KV_B}{KV} \right)^2$$

$$x_{BP} = 5.5 \left(\frac{33}{34.65} \right)^2 = 5\%$$

en base 20 MVA

$$x_{20} = x_{\%} \left(\frac{KVA_B}{KVA} \right)$$

$$x_{20} = 5 \frac{20}{6} = 16.5\%$$

y en por unidad $x = 0.165$ p.u.

Igual para los demás transformadores.

Para el reactor se hace el mismo trabajo:

$$x = 5 \frac{20}{6} = 16.5\% \text{ y } x = 0.165 \text{ p.u.}$$

Se debe tomar en cuenta que las potencias de -

las cargas son negativas en vista de que son absorbidas - de la red por lo tanto las potencias de los generadores, - que son entregadas a la red, son positivas; en consecuencia la potencia en los nodos es la suma aritmética de las potencias existentes en los mismos.

En cuanto a las reactancias de las líneas, en - las que están conectados transformadores, se deberá poner la suma de las reactancias que están conectadas en serie, esto es la reactancia de la línea más la reactancia del - transformador.

En la Tabla de la figura 18 se pueden ver los - datos de potencias y reactancias listos para ser introducidos en la computadora.

ELEMENTO	SIMBOLO	P	Q	R	X
Nodo	N1	-0.9	-0.435		
Nodo	N2	-0.08	-0.08		
Nodo	N3	0.775	0.3995		
Nodo	N4	0.2725	0.145		
Línea	L12			0.0396	0.206
Línea	L13			0.0694	0.289
Línea	L23			0.0263	0.0725
Línea	L34			0.0173	0.4612
Línea	L45				0.414

Línea	L46				0.165
Línea	L53			0.0173	0.0472
Línea	L61			0.0091	0.19

Fig. 18

En la Tabla de la figura 19 se pueden apreciar los resultados del problema de Flujo de Carga.

NODO	VOLTAJE (voltios)	TETA (grados)
------	----------------------	------------------

No se han podido obtener estos resultados por la imposibilidad de correr el programa en las computadoras existentes en la ciudad.

Fig. 19

ESTABILIDAD.-

Para la aplicación del Programa para resolver el problema de Estabilidad, se ha tomado el problema presentado en el libro "Estabilidad de los Sistemas de Potencia" (2); se ha escogido este problema por tener un listado de los resultados por lo que se puede hacer una comparación con los resultados obtenidos con el programa elabo

rado en el presente trabajo.

En la figura 21 se puede ver la configuración de la red estudiada y en la Tabla de la figura 20 se pueden ver los datos de los generadores y de las cargas.

ELEMENTO	SIMBOLO	MVA	MW	MW INIC.	V IN.	X	H
Gener.	G1	105		80	1.05	0.35	3
Gener.	G2	300		230	1.00	0.21	7
Gener.	G3	100		90	1.00	0.18	8
Carga	L1		200				
Carga	L2		200				

Fig. 20

Se debe anotar que todos los valores en por unidad están calculados con una base de 100 MVA.

Luego de hacer las reducciones de la red antes de la falla, durante y después de ella, y de calcular las condiciones iniciales (cuyos cálculos se pueden ver en la mencionada nota bibliográfica), se obtienen los datos propiamente dichos, necesarios para la introducción en la computadora. En la Tabla de la figura 22 se pueden ver los datos mencionados.

Condiciones iniciales.-

$$E_1 = 1.17$$

$$\delta_1 = 23.0$$

$$P_{u1} = P_{i1} = 0.80$$

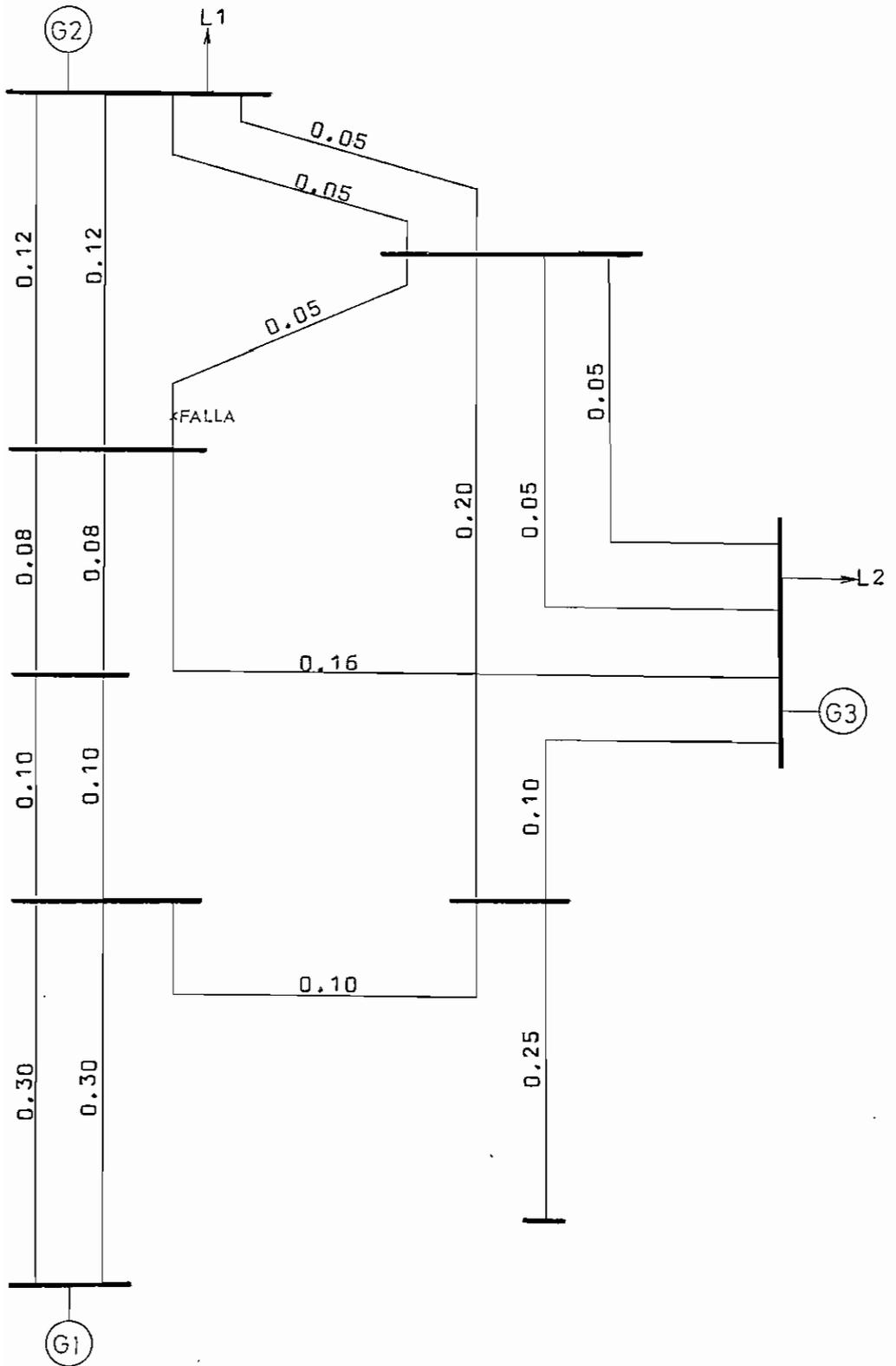


Fig. 21

$$\begin{array}{lll}
 E_2 = 1.01 & \delta_2 = 10.4 & P_{U_2} = P_{i_2} = 2.30 \\
 E_3 = 1.00 & \delta_3 = 9.5 & P_{U_3} = P_{i_3} = 0.90
 \end{array}$$

Admitancias.-

ELEMENTO	DURANTE LA FALLA		DESPUES DE LA FALLA	
	Y	θ	Y	θ
11	1.84	-90.0	1.66	-89.0
22	10.14	-88.7	4.81	-70.7
33	4.66	-88.9	3.69	-84.9
12	0.086	86.0	1.12	79.5
23	0.668	84.7	3.06	77.4
13	0.086	86.7	0.502	79.2

Fig. 22

Se deben también poner como datos, el número de generadores ($N = 3$), el tiempo máximo de computación ($ITT = 10$), el tiempo de despeje ($ITDES = 4$) y el incremento de tiempo ($ITD = 1$). Se debe anotar que los tiempos están dados en décimas de segundo; en caso que se requieran intervalos de tiempo del orden de centésimas de segundo se deberá considerar un factor de multiplicación de 100, esto significa que en lugar de poner $ITT = 10$ se deberá poner $ITT = 100$, y así las demás cantidades en las que interviene el tiempo.

A continuación se encuentran los datos antes -

mencionados:

N = 3 ITT = 10 ITDES = 4 ITD = 1

En la Tabla de la figura 23 se puede ver el resultado del problema obtenido por medio del programa elaborado en el presente trabajo.

En la Tabla de la figura 24 pueden verse los resultados que se encuentran en la nota bibliográfica mencionada.

Trabajo presente.-

TIEMPO (SEG/10)	DELTA (GRADOS ELECTRICOS)			
	MAQUINA	1	2	3
0		23.00	10.40	9.50
1		35.72	15.56	14.74
2		73.02	31.12	30.63
3		132.78	57.27	57.55
4		213.16	94.24	95.82
5		291.90	140.13	141.55
6		376.38	190.69	190.05

Fig. 23

Como se puede apreciar, los resultados son casi iguales, existiendo una pequeña diferencia que se debe a que para la obtención de los resultados en la nota bibliográfica

gráfica, se han hecho varios redondeos y aproximaciones - en los resultados intermedios, y los cálculos en el trabajo presente tienen una precisión de diezmilésimas.

Nota bibliográfica.-

TIEMPO (SEG/10)	DELTA (GRADOS ELECTRICOS)			
	MAQUINA	1	2	3
0		23.00	10.40	9.50
1		35.70	15.50	14.80
2		73.10	31.00	30.80
3		133.10	57.00	57.70
4		213.70	93.80	95.90
5		293.30	139.50	141.90
6		380.80	189.90	189.80

Fig. 24

El tiempo empleado en obtener resultados, desde la introducción del programa en la computadora, es de cuatro minutos, mientras que la obtención de los resultados con la ayuda de una calculadora de escritorio, desde que se tienen los datos necesarios, emplea un tiempo estimado de 5 horas. Entonces el empleo de la computadora ha ahorrado 4.93 horas de trabajo, o lo que es lo mismo se ha realizado el trabajo 75 veces más rápidamente. Anotando además que el uso de la computadora hace el trabajo mucho

más fácil de realizar.

Se debe considerar que el tiempo empleado en la obtención de los datos es igual para ambos casos.

- B I B L I O G R A F I A -

- 1.- KNOWLTON A. E., "Manual Standard del Ingeniero Electricista", 1ª Edición, 3ª reimpresión, Editorial Labor S.A., Barcelona, Volumen I, 1.967.
- 2.- KIMBARK E. W., "Power System Stability", 1ª Edición, Editorial John Wiley & Sons Inc., New York, Volumen I, 1.948.
- 3.- CLARKE E., "Circuit Analysis of A-C Power Systems", 4ª Edición, Editorial John Wiley & Sons Inc., New York, Volumen II, 1.963.
- 4.- "Electrical Transmission and Distribution", 4ª Edición, 5ª Reimpresión, Editorial Westinghouse Electric Corp., Pennsylvania, 1.964.
- 5.- PLACENCIA H., "Notas de Clase", Quito, 1.969.
- 6.- DESPOTOVIC S. T., BABIC B. S., MASTILOVIC V. P., "A-Rapid and Reliable Method for Solving Load Flow Problems", IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, New York, Volumen PAS-90 Nº 1, 1.971.
- 7.- HUMPAGE W. D., "Power System Engineering Lecture Course - Digital Computer Methods for Load Flow Calculations", The University of Manchester Institute of Science and Technology.