

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS

POLARIZACIÓN DE UN ELECTRÓN RELATIVISTA EN PRESENCIA DE UN CAMPO MAGNÉTICO ULTRA FUERTE

PROYECTO PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE FÍSICO

OSCAR ANDRÉS LASSO ANDINO

DIRECTOR: PROF. ERICSON LÓPEZ IZURIETA PHD.

Quito, Septiembre del 2007

DECLARACIÓN

Yo Oscar Andrés Lasso Andino, declaro bajo juramento que el trabajo aquí escrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentada para ningún grado o calificación profesional; y que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

A través de la presente declaración cedo mis derechos de propiedad intelectual correspondientes a este trabajo, a la Escuela Politécnica Nacional, según lo establecido por la Ley de Propiedad Intelectual, por su reglamento y por la normatividad institucional vigente.

Oscar Andrés Lasso Andino

CERTIFICACIÓN

Certifico que le presente trabajo fue desarrollado por Oscar Andrés Lasso Andino, bajo mi supervisión.

Prof. Ericson López Izurieta PhD.
DIRECTOR DE PROYECTO

AGRADECIMIENTOS

Mi sincero a agradecimiento al Señor Jesucristo, Creador del Universo

DEDICATORIA

El presente trabajo está dedicado a la memoria de Richard Wurmbrand, “El Pastor”, y a todos los que murieron por la fe en Cristo Jesús.

Oscar Andrés

CONTENIDO:

RESUMEN

PRESENTACIÓN

INTRODUCCIÓN

CAPITULO 1. La ecuación de Dirac y la Mecánica Cuántica.....1

- 1.1 La Ecuación de Klein Gordon.....1
- 1.2 La Ecuación de Dirac.....4
- 1.3 El formalismo de la Mecánica Cuántica.....8
- 1.4 El espacio de Hilbert para la ecuación de Dirac.....10
- 1.5 Operadores para los demás observables.....10
- 1.6 El operador de Dirac en el espacio de Fourier11
- 1.7 La transformación de Foldy-Wouthuysen.....13
- 1.8 Las energías negativas.....14

CAPITULO 2. La ecuación de Dirac en presencia de un campo electromagnético.....16

- 2.1 Supersimetría.....16
 - 2.1.1. La involución unitaria.....17
 - 2.1.2. Las supercargas.....17
 - 2.1.3. Operadores de Dirac con supersimetría.....21

2.1.4. Supersimetría en campos electromagnéticos.....	22
2.2 Campos magnéticos.....	23
2.2.1. Campo magnético homogéneo.....	25
CAPITULO 3. Polarización de un electrón relativista.....	31
3.1. Los parámetros de Stokes.....	31
3.2. Polarización de fotones.....	33
3.3 Polarización de electrones.....	33
3.4 Estados mezclados.....	35
3.5 Cálculo de los parámetros de Stokes, comparaciones experimentales y Conclusiones.....	36
CAPITULO 4. Interpretaciones físicas del Zitterbewegung.....	46
4.1. El operador Velocidad.....	47
4.2 El operador posición.....	48
4.3 Los operadores de momento angular.....	48
4.4 Localización y acausalidad.....	51
4.4.1 Nociones de localización.....	51
4.4.2 Propagación super-lumínica.....	54
4.4.3 La desigualdad de Bell.....	55
4.5 Interpretación y Conclusiones.....	59
REFERENCIAS.....	67
BIBLIOGRAFÍA.....	70

RESUMEN

Se hace el análisis teórico de la polarización de un electrón relativista en presencia de un campo magnético ultra fuerte, calculando los parámetros de Stokes se pasa a la comparación con publicaciones ya hechas de mediciones semi-empíricas de la polarización en campos fuertes. Haciendo énfasis en la utilización del espinor completo para los cálculos, lo que al parecer provoca una mezcla entre estados con energía positiva y estados con energía negativa, mas aún, al introducir la noción de supersimetría aparecen estados fermiónicos y bosónicos, para resolver éstos inconvenientes se plantea una interpretación basados en la interpretación transaccional de la mecánica cuántica no relativista hecha por Wheeler y Feynman

Se observa que los cálculos teóricos se acoplan bastante bien a los semi-empíricos, y mejor aún, nos dan el comportamiento de la polarización para un rango más amplio del campo y de los niveles de energía.

Finalmente se analiza el comportamiento de la polarización de partículas y antipartículas en experimento del tipo Aspect, llevando a violar la desigualdad de Bell. Se establece la dicotomía entre propagaciones super-lumínicas y localización exacta, pues debemos aceptar solo uno de los dos fenómenos como real.

PRESENTACIÓN

El presente trabajo está organizado en cuatro capítulos, dos de los cuales presentan el background físico-matemático necesario para el desarrollo de la investigación; y los otros dos presentan una combinación entre teoría y el aporte mismo de ésta investigación.

Así, en el capítulo uno se deduce la ecuación de Dirac, para luego dar el formalismo matemático necesario para estudiar fenómenos cuántico-relativistas con esta ecuación. Aquí se definen los operadores que vamos a usar y los espacios en los cuales vamos a trabajar.

En el capítulo dos se hace una presentación de la teoría de supersimetría y su relación con los campos magnéticos, haciendo hincapié en el espectro de los operadores.

En el capítulo tres aparece la teoría de polarización que vamos a utilizar para nuestro cálculo, para al final de éste capítulo presentar las conclusiones en base a la comparación con las curvas de polarización ya publicadas.

Finalmente, en el último capítulo se da un tratamiento matemático a lo que se conoce como Zitterbewegung. Al término de éste capítulo se presenta nuestro aporte a la interpretación de la teoría desarrollada, y usando los cálculos de los parámetros de Stokes, que son el eje central de éste trabajo, se da las conclusiones finales.

INTRODUCCIÓN

El estudio del comportamiento de partículas en condiciones extremas ha sido objeto de estudio durante algunos años, sin embargo, el descubrimiento de entes físicos capaces de poseer tales intensidades de campo a puesto sobre la mesa la validez de tales estudios, en particular, en el presente trabajo se pretende efectuar un estudio del comportamiento del spin del electrón relativista en presencia de un campo magnética ultra fuerte, tanto en la parte fenomenológica como en la interpretación en el marco de la teoría cuántica ; claro está que la manera correcta de realizar tal análisis es involucrándose profundamente en el formalismo matemático de la mecánica cuántica relativista dado que los problemas filosóficos de la mecánica cuántica se heredan a la versión relativista de ésta.

Fundamentalmente se inicia definiendo el espacio de Hilbert en el que vamos a trabajar, puesto que uno de los problemas que aparece posteriormente está relacionado con la medición. Se da un tratamiento matemático con la teoría de Lebesgue de la medida, más aún, se recalca el uso de la teoría espectral de los operadores autoadjuntos o como mínimo esencialmente autoadjuntos. Pretendiendo inmiscuirnos en los problemas fundamentales de la teoría cuántica se hace un estudio, que aunque elemental, pretende esbozar la relación entre las funciones de onda relativistas y la paradoja EPR. Finalmente, surgirá el problema de la localización y la acausalidad, que aunque el primero no es significativo al instante de la medición nos lleva a un estudio interesante de la teoría físico-matemática, además nos ayudará a comprender mejor la relación entre la Matemática y la Física. El problema de la acausalidad ya ha sido estudiado por varios autores, muchos de los cuales

han dado varias demostraciones de proposiciones que vamos a utilizar en éste análisis.

La polarización del electrón relativista es uno de los pasos fundamentales antes de iniciar el debate acerca de la teoría cuántica relativista, puesto que el spin es una propiedad intrínseca de las partículas y más que todo, es la magnitud preferida e ideal para efectuar los famosos "*Gedankenexperiment*" (*experimentos pensados*) que darán más luz a los problemas que nos vamos a enfrentar. Aunque lo ideal sería efectuar una comprobación experimental, la interpretación que se dará, por su carácter no permite el desarrollo de técnicas experimentales como veremos al final de las conclusiones

El objetivo fundamental de éste trabajo es al análisis teórico de la mecánica cuántica relativista en espacios de Hilbert, sin embargo, no es desubicado pretender una comprobación experimental, especialmente en lo que corresponde al estudio del electrón relativista para lo cual se efectúa la comparación con datos experimentales ya publicados, esencialmente en el campo de la Astrofísica.

En el desarrollo de la teoría cuántica moderna un factor preponderante representa la Matemática usada para el análisis, ya que la intuición física se ve traicionada en el mundo cuántico es necesario aferrarse a un formalismo estricto, pero que a su vez preste facilidad a la interpretación para finalmente llegar a la comprobación experimental. Una herramienta potente para el desarrollo de una teoría que nos permita interpretar de alguna manera el formalismo es la supersimetría, que no se la desarrollará por completo simplemente se dará algunas pautas para el análisis matemático de los sistemas supersimétricos

Finalmente la teoría cuántica relativista nos introduce en el estudio de paradojas que serán tratadas elementalmente, haciendo énfasis en la propagación super-lumínica, brindando una interpretación física a los cálculos efectuados. Nuestra interpretación se desarrolla en base al estudio tanto físico como matemático de lo que se conoce como Zitterbewegung, y que al parecer podría ser analizado o al menos enfocado a partir de la supersimetría. Hay que recalcar que los problemas mencionados anteriormente han sido estudiados a lo largo de décadas y en la mayoría de ellos las paradojas siguen vigentes, por tanto las interpretaciones de la teoría, abiertas.

CAPÍTULO 1

LA ECUACIÓN DE DIRAC Y LA MECÁNICA CUÁNTICA

En el presente capítulo se hace una deducción directa de las ecuaciones relativistas de Klein-Gordon y de Dirac, para luego comenzar a dar el formalismo matemático para sustentar la ecuación de Dirac, que como se verá, es la única ecuación que nos permite estudiar a electrones relativistas. Además se definen los operadores relativistas, basados en el principio de correspondencia y en analogía con la mecánica cuántica no relativista.

1.1. LA ECUACIÓN DE KLEIN-GORDON

Se conoce de la mecánica cuántica elemental que la evolución de los estados puros del sistema viene dada por la ecuación:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = \hat{H} \psi(x, t) \quad (1.1)$$

conocida como la ecuación de *Schrödinger*, donde \hat{H} el operador Hamiltoniano, tiene la forma:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}) \quad (1.2)$$

para una partícula sometida a la acción de un potencial $V(x)$ y donde \hat{p} es el operador momento:

$$\hat{p} = -i\hbar \vec{\nabla} \quad (1.3)$$

que corresponden a la energía no relativista de la partícula.

Puesto que necesitamos definir una nueva ecuación que pueda ser utilizada para la descripción de las partículas relativistas es necesario considerar el Hamiltoniano relativista:

$$H^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (1.4)$$

Tomando $V(x) = 0$ en (1.2) y reemplazando este resultado en (1.4), se obtiene; aplicando sobre una función de onda $\psi(x, t)$, la siguiente ecuación:

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi(x, t) = -\hbar^2 c^2 \nabla^2 \psi(x, t) + m^2 c^4 \psi(x, t) \quad (1.5)$$

conocida como la ecuación de *Klein – Gordon*.

Consideremos la ecuación relativista

$$\hat{p}^\mu \hat{p}_\mu = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p} \cdot \vec{p} = m_0^2 c^2 \quad (1.6)$$

Reemplazando en la ecuación (1.6) el operador \hat{p}^μ por el operador cuadri-momento:

$$\hat{p}^\mu = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_\mu} = -i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial(ct)}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (1.7)$$

obtenemos, aplicando sobre la función de onda $\psi(x, t)$

$$\hat{p}^\mu \hat{p}_\mu \psi(x, t) = m_0^2 c^2 \psi(x, t) \quad (1.8)$$

lo que muestra que la ecuación de Klein-Gordon es covariante, ya que $\hat{p}^\mu \hat{p}_\mu$ es un invariante de Lorentz. Se puede observar claramente que la ecuación de Klein-Gordon es la ecuación de onda que incluye el termino adicional $\frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}$. Las soluciones de (1.8) son de la forma

$$\psi(x, t) = \exp\left[\frac{i}{\hbar}(p \cdot x - Et)\right] \quad (1.9)$$

Reemplazando (1.9) en (1.8) obtenemos directamente la ecuación (1.4) que resulta en:

$$E = \pm(p^2 c^2 + m_0^2 c^4)^{\frac{1}{2}} \quad (1.10)$$

más adelante se aclarará el problema del signo negativo en la ecuación (1.10). Identificando \hat{H} con la energía E del sistema

Es importante enfatizar, que del mismo modo que en la teoría cuántica no

relativista se define una densidad de probabilidad y una corriente de probabilidad, en la teoría relativista deben existir magnitudes análogas que cumplan una ecuación de continuidad (conservación de la probabilidad); todo esto para satisfacer la interpretación estadística de Born.

Calculemos la cuadri-corriente j_μ para la ecuación de Klein Gordon, partiendo de la ecuación (1.8) en la forma

$$(\hat{p}^\mu \hat{p}_\mu - m_o^2 c^2) \psi = 0 \quad (1.11)$$

tomamos la compleja conjugada de esta ecuación

$$(\hat{p}^{\mu*} \hat{p}_\mu^* - m_o^2 c^2) \psi^* = 0 \quad (1.12)$$

multiplicando a ambas ecuaciones por la izquierda, la primera (1.11) por Ψ^* , la segunda (1.12) por Ψ , y restando las dos ecuaciones resultantes obtenemos finalmente:

$$\nabla_\mu (\psi^* \nabla^\mu \psi - \psi \nabla^\mu \psi^*) = \nabla^\mu j_\mu = 0 \quad (1.13)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{i\hbar}{2m_o c^2} (\psi^* \frac{\partial}{\partial t} \psi - \psi \frac{\partial}{\partial t} \psi^*) \right\} + \nabla \cdot \left\{ -\frac{i\hbar}{2m_o} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) \right\} = 0 \quad (1.14)$$

Lo que nos lleva a identificar la cuadri-corriente como:

$$j_\mu = \frac{i\hbar}{2m_o} (\psi^* \nabla^\mu \psi - \psi \nabla^\mu \psi^*) \quad (1.15)$$

a la que hemos multiplicado por el factor $\frac{i\hbar}{2m_o}$ por cuestiones de dimensionalidad (i.e. para que la componente j_o tenga dimensiones de densidad de probabilidad, lo cual nos asegura que podremos obtener el limite no relativista correcto de (1.14)). La expresión (1.14) es una ecuación de continuidad de la forma:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla j = 0 \quad (1.16)$$

comparando (1.16), (1.14) podemos escribir

$$\rho = \frac{i\hbar}{2m_o c^2} (\psi^* \frac{\partial}{\partial t} \psi - \psi \frac{\partial}{\partial t} \psi^*) \quad (1.17)$$

Sin embargo, existe un problema en la interpretación de ρ como densidad de probabilidad, ya que a cualquier tiempo tanto ψ como $\frac{\partial}{\partial t} \psi$ pueden tomar cualquier valor; de ese modo ρ puede tomar tanto valores positivos como negativos indistintamente, por eso ya no podemos interpretar a ρ como densidad de probabilidad, ya que para lo cual debería tomar solo valores positivos. De ahí que no se puede utilizar la ecuación de Klein- Gordon por no

tener una interpretación física acorde con la interpretación estadística de Born.

Sería algún tiempo después que se daría una interpretación diferente a ρ , multiplicándola por la carga eléctrica e la densidad ρ se convierte en la densidad de carga, interpretación que rescataría nuevamente a la ecuación de Klein-Gordon.

Se puede mostrar que la formulación de Klein-Gordon introduce un grado de libertad adicional de las partículas: La CARGA^[1]. Es claro que la ecuación de Klein-Gordon no incluye el spin de las partículas, si queremos estudiar partículas con spin debemos buscar una nueva ecuación.

1.2.LA ECUACIÓN DE DIRAC

Al observar que la ecuación de Klein-Gordon no da como resultado una densidad de probabilidad positiva, Dirac en 1928 comenzó a buscar una ecuación covariante con densidad de probabilidad positiva partiendo de la ecuación de *Schrödinger*. Puesto que la ecuación de *Schrödinger* es lineal en la derivada temporal era natural buscar una ecuación lineal también en las derivadas con respecto a las otras coordenadas, así la ecuación (1.1) tiene que ser de la forma:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = \frac{\hbar}{i} (\hat{\beta}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\beta}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\beta}_z \frac{\partial}{\partial z} + \hat{\beta}_o) \psi(x, t) \quad (1.18)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = (\hat{\beta}_x \hat{p}_x + \hat{\beta}_y \hat{p}_y + \hat{\beta}_z \hat{p}_z + \hat{\beta}_o) \psi(x, t) \quad (1.19)$$

en forma compacta se escribe

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = (\hat{\beta} \cdot \hat{p} + \hat{\beta}_o) \psi(x, t) \quad (1.20)$$

Comparando (1.20) con (1.1) podemos concluir que:

$$\hat{H} = (\hat{\beta} \cdot \hat{p} + \hat{\beta}_o) \quad (1.21)$$

Se suele definir

$$\hat{\beta}_i = c\hat{\alpha}_i \quad (1.22)$$

$$\hat{\beta}_o = m_o c^2 \hat{\beta} \quad (1.23)$$

con lo cual la ecuación (1.20) se convierte en

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = (c\hat{\alpha} \cdot \hat{p} + m_o c^2 \hat{\beta}) \psi(x, t) \quad (1.24)$$

La ecuación (1.24) se conoce como la *ecuación de Dirac*. Los coeficientes $\hat{\alpha}$

no pueden ser elementos de los reales, de otro modo (1.24) no sería invariante bajo rotaciones espaciales, lo que nos lleva a concluir que los $\hat{\alpha}$ deben ser matrices, evidentemente $\hat{\beta}$ también debe serlo. Además $\psi(x, t)$ ya no puede ser un escalar, deberá ser un vector columna.

$$\psi(x, t) = \begin{pmatrix} \psi_1(x, t) \\ \psi_2(x, t) \\ \psi_3(x, t) \\ \vdots \\ \psi_n(x, t) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n \quad (1.25)$$

y la densidad de probabilidad ρ vendrá dada por

$$\rho = \psi^+(x, t)\psi(x, t) \quad (1.26)$$

debemos exigir también otros requerimientos, como la ecuación de continuidad para la densidad (1.26), y claro está, la Lorentz-covarianza de (1.24)^[2]

Nuevamente como en (1.4) igualamos \hat{H} con E , de modo que \hat{H} adquiera un significado físico, a saber, la energía del sistema; aclarando que en mecánica cuántica los valores de la energía son los valores propios del operador Hamiltoniano. Sustituyendo (1.21) en (1.4) se obtiene:

$$(\hat{\beta}_x\hat{p}_x + \hat{\beta}_y\hat{p}_y + \hat{\beta}_z\hat{p}_z + \hat{\beta}_o)^2 = (\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2)c^2 + m_o^2c^4 \quad (1.27)$$

Evidentemente para que se satisfaga (1.27) es necesario que cada componente de $\psi(x, t)$ satisfaga individualmente la ecuación de Klein-Gordon; por otra parte iterando la ecuación (1.19) se llega a determinar^[3]

$$\begin{aligned} -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi &= -\hbar^2 c^2 \sum_{i,k=1}^3 \frac{\hat{\alpha}_i \hat{\alpha}_k + \hat{\alpha}_k \hat{\alpha}_i}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^i \partial x^k} + \\ &\frac{\hbar m_o c^3}{i} \sum_{i=1}^3 (\hat{\alpha}_i \hat{\beta} + \hat{\beta} \hat{\alpha}_i) \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} + \hat{\beta}^2 c^4 m_o^2 \Psi \end{aligned} \quad (1.28)$$

comparando con (1.5) se llega a determinar los siguientes requerimientos para las matrices $\hat{\alpha}$

$$\hat{\alpha}_x^2 = \hat{\alpha}_y^2 = \hat{\alpha}_z^2 = 1 \quad (1.29)$$

$$\hat{\alpha}_i^2 = 1 \quad (1.30)$$

$$\hat{\alpha}_i \hat{\alpha}_k + \hat{\alpha}_k \hat{\alpha}_i = 0 \quad i \neq k \quad (1.31)$$

$$\hat{\alpha}_i \hat{\beta} + \hat{\beta} \hat{\alpha}_i = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.32)$$

que en función de los matrices $\hat{\beta}$ se escriben:

$$\hat{\beta}_x^2 = \hat{\beta}_y^2 = \hat{\beta}_z^2 = c^2 \quad (1.33)$$

$$\hat{\beta}_o^2 = m_o^2 c^4 \quad (1.34)$$

$$\hat{\beta}_i \hat{\beta}_k + \hat{\beta}_k \hat{\beta}_i = 0 \quad i \neq k \quad (1.35)$$

$$\hat{\beta}_i \hat{\beta}_o + \hat{\beta}_o \hat{\beta}_i = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.36)$$

Tomando en cuenta que \hat{H} debe ser hermítico las matrices $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ deben serlo también, es decir:

$$\hat{\alpha}^+ = \hat{\alpha} \quad (1.37)$$

$$\hat{\beta}^+ = \hat{\beta} \quad (1.38)$$

lo que implica que los valores propios de las matrices deben ser reales, y acorde con (1.30) y (1.34), los valores propios de las matrices deben ser únicamente ± 1 . Siguiendo las relaciones de conmutación para las matrices $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ se puede demostrar que:^[4]

$$Tr(\hat{\alpha}_i) = Tr(\hat{\beta}) = 0 \quad (1.39)$$

Nuestra tarea consiste en determinar n , el orden de las matrices $\hat{\alpha}$, para esto consideremos las siguientes ecuaciones:

$$\det(\hat{\alpha}^k \hat{\beta}) = \det(\hat{\alpha}^k) \det(\hat{\beta}) = \det(\hat{\beta}) \det(\hat{\alpha}^k) \quad (1.40)$$

$$\hat{\alpha}^k \hat{\beta} = -\hat{\beta} \hat{\alpha}^k = -I \hat{\beta} \hat{\alpha}^k \quad k = x, y, z \quad (1.41)$$

Igualando (1.40) con (1.41) llegamos a

$$\det(\hat{\alpha}^k \hat{\beta}) = \det(-\hat{\beta} \hat{\alpha}^k) = (-1)^n \det(\hat{\alpha}^k \hat{\beta}) \quad (1.42)$$

esto nos lleva concluir que n debe ser par, ahora, si $n = 2$ se puede verificar que la ecuación (1.20) no es covariante^[5]; se concluye finalmente que la menor dimensión para que (1.20) sea covariante es $n = 4$, está claro que la dimensión del espacio-tiempo hace que las matrices sean de dimensión cuatro, pero ésta no es una condición suficiente. Sin embargo, para demostraciones más profundas se aconseja observar la bibliografía recomendada. (Ver por ejemplo: GREINER W. Relativistic Quantum Mechanics, wave equations. Third edition.)

En función de las *matrices de Pauli* σ_i , las matrices de Dirac se pueden escribir

$$\hat{\alpha}_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\beta} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad (1.43)$$

$$\begin{aligned}
\hat{\alpha}_x &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \hat{\alpha}_y &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\hat{\alpha}_z &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \hat{\beta} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{1.44}$$

Ahora podemos escribir el Hamiltoniano para la ecuación de Dirac en función de las matrices de Pauli

$$\hat{H}_D = c \begin{pmatrix} 0 & \sigma_x \\ \sigma_x & 0 \end{pmatrix} p_x + c \begin{pmatrix} 0 & \sigma_y \\ \sigma_y & 0 \end{pmatrix} p_y + c \begin{pmatrix} 0 & \sigma_z \\ \sigma_z & 0 \end{pmatrix} p_z + m_0 c^2 \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \tag{1.45}$$

$$\psi_D(x, t) = \begin{pmatrix} \psi_1(x, t) \\ \psi_2(x, t) \\ \psi_3(x, t) \\ \psi_4(x, t) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4 \tag{1.46}$$

Efectuando el mismo procedimiento que en la ecuación de Klein Gordon podemos encontrar la densidad y la corriente de probabilidad para la ecuación de Dirac, las cuales se escriben

$$\rho = \psi_D(x, t) \psi_D^*(x, t) \tag{1.47}$$

$$j = \psi_D(x, t) \hat{\alpha} \psi_D^*(x, t) \tag{1.48}$$

Originalmente y debido a la asimetría entre la derivada temporal y las derivadas espaciales, Dirac demostró la imposibilidad de incluir los campos electromagnéticos en forma relativísticamente invariante en la ecuación de Klein-Gordon y buscó una nueva ecuación en la cual poder incluir tales campos, dicha ecuación debería describir la estructura interna de los electrones: el Spin. Además una ecuación que describa la evolución temporal de los estados en mecánica cuántica debería ser de primer orden en la derivada temporal y ciertamente la ecuación de Klein-Gordon no lo es. Si $m = 0$ la ecuación (1.20) se convierte en

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_D(x, t) = (c \hat{\sigma} \cdot \hat{p}) \psi_D(x, t) \tag{1.49}$$

con $\Psi_D(x, t)$ ahora de dos componentes, ésta ecuación se denomina la ecuación de Weyl.

Para finalizar ésta primera sección es necesario observar la forma de las soluciones para la ecuación de Dirac, para lo cual anunciamos el siguiente

teorema:

Teorema 1.1. La ecuación (1.20) tiene como soluciones a los siguientes vectores (espinores), que son funciones de onda que se desplazan en la dirección z y $\lambda = \pm 1$ representa las soluciones positivas y negativas con el factor de evolución temporal λE_p

$$\psi_{p,\lambda,+\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{m_0c^2 + \lambda E_p}{2\lambda E_p}} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \frac{c\hat{\sigma}_z\hat{p}}{m_0c^2 + \lambda E_p} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} e^{i\frac{(pz - \lambda E_p t)}{\hbar}} \quad (1.50)$$

$$\psi_{p,\lambda,-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{m_0c^2 + \lambda E_p}{2\lambda E_p}} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \frac{c\hat{\sigma}_z\hat{p}}{m_0c^2 + \lambda E_p} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} e^{i\frac{(pz - \lambda E_p t)}{\hbar}} \quad (1.51)$$

Los estados a los que corresponden energías negativas se interpretan como antipartículas con energía positiva, aunque esta interpretación nos lleva a concluir *a posteriori* como veremos más adelante, que existen estados que son superposición de estados de energía positiva y negativa, lo cual es imposible que suceda; por tanto es necesario establecer ciertas restricciones para el Hamiltoniano de modo que un estado que posea energía positiva siga teniendo energía positiva todos los instantes de tiempo.

1.3.EL FORMALISMO DE LA MECÁNICA CUÁNTICA

De acuerdo a uno de los postulados de la mecánica cuántica se define un espacio de Hilbert \mathcal{H} para cada sistema cuántico. Todo "observable" (i.e. toda cantidad medible) debe ser representado por un operador autoadjunto. El estado de un sistema al tiempo t_o viene dado por $\psi(t_o) \in \mathcal{H}$; asumimos que éste estado está normalizado, es decir:

$$\|\psi(t_o)\|^2 = 1 \quad (1.52)$$

entonces, al tiempo t el estado viene dado por:

$$\psi(t) = e^{(-iHt)}\psi(t_o) \quad (1.53)$$

donde H (el Hamiltoniano) representa la energía del sistema; y de acuerdo al teorema de Stone ^[6], $\psi(t)$ es la única solución fuerte para el problema de Cauchy:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(t) = \hat{H}\psi(t) \quad , \psi(t_o) \in \mathcal{D}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{H} \quad (1.54)$$

Sea \hat{A} un operador autoadjunto con dominio de definición $\mathcal{D}(\hat{A})$, entonces:

$$\hat{A}(t) = e^{(iHt)}\hat{A}e^{(-iHt)} \quad (1.55)$$

es autoadjunto en $\mathcal{D}(\hat{A}(t)) = e^{(-iHt)}\mathcal{D}(\hat{A})$.

Con la ayuda de el teorema espectral [7] podemos formular la siguiente definición

Definición (Interpretación estadística de Born). Si un sistema cuántico está (en cierto instante) en el estado descrito por ψ , entonces:

$$(\psi, \chi(A \in B)\psi) = \int_B d(\psi, E_A(\lambda)\psi). \quad (1.56)$$

(\cdot, \cdot) , denota el producto escalar en \mathcal{H} .

es la probabilidad de obtener, al medir el observable representado por \hat{A} , un resultado en B .

Donde

$$\chi(A \in B) = \int_{\mathbb{R}} \chi(\lambda \in B) dE_A(\lambda) = \int_B dE_A(\lambda) \quad (1.57)$$

es la medida espectral y B es un Boreliano de \mathbb{R} , $E_A(\lambda)$ es la familia espectral de \hat{A} , y $\chi(\lambda \in B)$ es la función característica de B . Se puede demostrar que el operador $\chi(A \in B)$ es una proyección ortogonal. [8]

Por tanto los únicos resultados posibles de la medición de un observable son números reales contenidos en $\sigma(\hat{A})$, el espectro de \hat{A} . A partir de (1.55) y puesto que la evolución temporal es unitaria se encuentra que:

$$(\psi, \chi(\hat{A}(t) \in B)\psi) = (\psi(t), \chi(A \in B)\psi(t)) \quad \forall t \quad (1.58)$$

y si además $\psi(t) = e^{(-iHt)}\psi$ definido en $\mathcal{D}(\hat{A})$ para todo t , entonces podemos definir el *valor esperado*:

$$(\psi, \hat{A}(t)\psi) = (\psi(t), \hat{A}\psi(t)) \quad \forall t \quad (1.59)$$

el cual representa el valor medio de los resultados obtenidos de varias mediciones efectuadas en sistemas idénticos que se encuentran en el estado ψ .

El operador de proyección $\hat{E} = \phi(\phi, \cdot)$ corresponde al observable que determina si el sistema está o no en el estado ϕ , y los únicos posibles

resultados de su medición son 1 (si el sistema está en ϕ), y 0 (si el sistema no está en ϕ). si el sistema está en el estado ψ , entonces el valor esperado de E , es decir, la probabilidad de encontrar este sistema en el estado ϕ viene dado por:

$$(\psi, \hat{E}\psi) = |(\phi, \psi)|^2 \quad (1.60)$$

y se denomina *la probabilidad de transición* de ψ a ϕ .

1.4 EL ESPACIO DE HILBERT PARA LA ECUACIÓN DE DIRAC

Según (1.45) el operador diferencial autoadjunto \hat{H} es una matriz 4×4 que actúa sobre las funciones a valores en \mathbb{C}^4 de $x \in \mathbb{R}^3$. Tomaremos por tanto el espacio de Hilbert:

$$\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3) \oplus \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3) \oplus \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3) \oplus \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3) \equiv \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)^4 = \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathbb{C}^4 \quad (1.61)$$

El cual consiste de vectores de cuatro componentes $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)^T$, donde cada componente ψ_i es una Lebesgue-clase de equivalencia^[9] de funciones a valores complejos de variable x .

El producto escalar viene dado por:

$$(\psi, \hat{E}\psi) = (\phi, \psi) = \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i=1}^4 \bar{\psi}_i(x) \phi_i(x) d^3x \quad (1.62)$$

la barra denota el complejo conjugado.

En este espacio de Hilbert nosotros definimos el operador de Dirac:

$$\hat{H}\psi = (-ic\hat{\alpha} \cdot \hat{\nabla} + m_0c^2\hat{\beta})\psi \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(\hat{H}) \quad (1.63)$$

el cual es autoadjunto en $\mathcal{D}(\hat{H})$ (Hay que definir correctamente el espacio $\mathcal{D}(\hat{H})$), con esto y usando el teorema de Stone la ecuación (1.20) es un problema de valores iniciales bien definido en el espacio de Hilbert \mathcal{H} .

1.5 OPERADORES PARA LOS DEMÁS OBSERVABLES

Puesto que ya hemos definido el operador autoadjunto H de energía para un electrón libre nos resta definir los operadores autoadjuntos para los demás observables. Las siguientes definiciones se motivan en la teoría cuántica no relativista para el electrón.

El operador $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$ de multiplicación por x se denomina *operador de posición estándar*. Por tanto \hat{x} consiste de tres operadores autoadjuntos \hat{x}_i que se definen en:

$$\mathcal{D}(\hat{x}_i) = \left\{ \psi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)^4 / \int \sum_{i=1}^4 |\hat{x}_i \psi_k(x)|^2 d^3x < \infty \right\}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.64)$$

$$(\hat{x}_i \psi)(\hat{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} \hat{x}_i \psi_1(\hat{\mathbf{x}}) \\ \vdots \\ \hat{x}_i \psi_4(\hat{\mathbf{x}}) \end{pmatrix} \quad (1.65)$$

para ψ en el dominio dado en (1.25), e $i = 1, 2, 3$

Definimos un operador de proyección evaluado en \mathbb{R}^3 tomando:

$$E(B) = \chi(x_1 \in B_1) \chi(x_2 \in B_2) \chi(x_3 \in B_3) \quad (1.66)$$

para cada $B = B_1 \times B_2 \times B_3$. Entonces la probabilidad de encontrar a una partícula en la región $B \subset \mathbb{R}^3$ es:

$$(\psi, E(B)\psi) = \int_B |\psi(\mathbf{x})|^2 d^3x \quad \forall t \quad |\psi(\mathbf{x})|^2 = \sum_{k=1}^4 |\psi_k(\mathbf{x})|^2 \quad (1.67)$$

donde $|\psi(\mathbf{x})|^2$ se puede interpretar como la *densidad de probabilidad de la posición*.

El operador diferencial $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar \hat{\nabla} = -i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)$ que actúa sobre el vector ψ , se denomina *operador momento*, el cual puede ser definido matemáticamente como la transformada de Fourier del operador de posición estándar, que se puede intuir a partir de :

$$(e^{-i\mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{p}}} \psi)(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \quad \mathbf{a} = \text{vector de traslación} \quad (1.68)$$

Además vamos a definir los *operadores de momento angular* como:

$$\hat{\mathbf{S}} \equiv \frac{-i}{4} (\hat{\alpha} \times \hat{\alpha}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix} \quad (\text{Operador de momento angular de spin}) \quad (1.69)$$

$$\hat{\mathbf{L}} \equiv \frac{-i}{4} (\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{p}}) \quad (\text{Operador de momento angular orbital}) \quad (1.70)$$

$$\hat{\mathbf{J}} \equiv \hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{S}} \quad (\text{Operador de momento angular total}) \quad (1.71)$$

en particular, vamos a estar interesados en el momento angular de Spin, el cual es acotado, definido en toda parte y autoadjunto en $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)^4$ [10]

1.6 EL OPERADOR DE DIRAC EN EL ESPACIO DE FOURIER

La transformada de Fourier para funciones integrables es un operador unitario \mathcal{F} en $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)^4$ definido por:

$$(\mathcal{F}\psi_k)(\hat{\mathbf{p}}) \equiv \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{(-i\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{x})} \psi_k(\mathbf{x}) d^3x, \quad k = 1, 2, 3, 4 \quad (1.72)$$

notaremos $\mathcal{FL}^2(\mathbb{R}^3, d^3x)^4 = \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3, d^3p)^4$, el cual suele llamarse espacio de momentos. Cualquier operador diferencial matricial en $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3, d^3x)^4$ puede ser transformado a través de \mathcal{F} en un operador matricial en $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3, d^3p)^4$. En particular para el operador de Dirac de una partícula libre se obtiene:

$$(\mathcal{F}\hat{H}\mathcal{F}^{-1})(\hat{\mathbf{p}}) \equiv h(\hat{\mathbf{p}}) \equiv \begin{pmatrix} mc^2\mathbf{1} & c\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}} \\ c\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}} & -mc^2\mathbf{1} \end{pmatrix} \quad (1.73)$$

para cualquier $\hat{\mathbf{p}}$ la matriz (1.73) es Hermítica y sus valores propios son:

$$\lambda_1(p) = \lambda_2(p) = -\lambda_3(p) = -\lambda_4(p) = \sqrt{c^2p^2 + m^2c^4} \equiv \lambda(p), \quad |\hat{\mathbf{p}}| = p \quad (1.74)$$

La transformación unitaria $u(\hat{\mathbf{p}})$ la cual transforma $h(\hat{\mathbf{p}})$ a su forma diagonal se expresa como:^[11]

$$u(\hat{\mathbf{p}}) = \frac{(mc^2 + \lambda(p))\mathbf{1} + \beta c\hat{\boldsymbol{\alpha}}\cdot\hat{\mathbf{p}}}{\sqrt{2\lambda(p)(mc^2 + \lambda(p))}} = a_+(p)\mathbf{1} + a_-(p)\beta\frac{\hat{\boldsymbol{\alpha}}\cdot\hat{\mathbf{p}}}{p} \quad (1.75)$$

$$u(\hat{\mathbf{p}})^{-1} = a_+(p)\mathbf{1} - a_-(p)\beta\frac{\hat{\boldsymbol{\alpha}}\cdot\hat{\mathbf{p}}}{p} \quad (1.76)$$

con:

$$a_{\pm}(p) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 \pm \frac{mc^2}{\lambda(p)}}, \quad \text{y } \mathbf{1} \text{ es la matriz identidad } 4 \times 4 \quad (1.77)$$

se puede demostrar que:^[12]

$$u(\hat{\mathbf{p}})h(\hat{\mathbf{p}})u(\hat{\mathbf{p}})^{-1} = \beta\lambda(p) \quad (1.78)$$

De lo anterior se puede ver que la transformación unitaria definida por :

$$\mathcal{W} = u\mathcal{F} \quad (1.79)$$

convierte al operador \hat{H} a través de la multiplicación de las matrices diagonales en:

$$(\mathcal{W}H\mathcal{W}^{-1})(p) = \beta\lambda(p) \quad (1.80)$$

en el espacio de Hilbert $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3, d^3p)^4$. Si $\phi = \mathcal{W}\psi$ es integrable, entonces podemos escribir:

$$(\psi_k)(\hat{\mathbf{x}}) \equiv \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{(-i\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{x})} u(\hat{\mathbf{p}})^{-1}\phi(\hat{\mathbf{p}})d^3p, \quad \phi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^3)^4 \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)^4 \quad (1.81)$$

Claramente se puede observar que $u(\hat{\mathbf{p}})^{-1}\phi(\hat{\mathbf{p}})$ es una combinación lineal de los cuatro vectores propios de la matriz $h(\hat{\mathbf{p}})$. Estos vectores pueden ser tomados simultáneamente como vectores propios de la *Helicidad* $\hat{\Sigma} = \hat{\mathbf{S}} \cdot \hat{\mathbf{p}}$ ^[13]

En el espacio de Hilbert donde el operador de Dirac es diagonal las dos componentes superiores de la ecuación de onda corresponden a energías positivas, mientras que las dos componentes inferiores corresponden a energías negativas, por esto definimos el subespacio de energías positivas $\mathcal{H}_p \subset \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)^4$ como el subespacio generado por los vectores del tipo:

$$\Psi_{pos} \equiv \mathcal{W}^{-1} \frac{1}{2} (\mathbf{1} + \beta) \mathcal{W} \psi, \quad \psi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3, d^3x) \quad (1.82)$$

similarmente, el subespacio de energías negativas $\mathcal{H}_n \subset \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)^4$ es generado por los vectores:

$$\Psi_{neg} \equiv \mathcal{W}^{-1} \frac{1}{2} (\mathbf{1} - \beta) \mathcal{W} \psi, \quad \psi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3, d^3x) \quad (1.83)$$

y puesto que \mathcal{H}_n es ortogonal a \mathcal{H}_p podemos escribir:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{pos} \oplus \mathcal{H}_{neg} \quad (\text{suma ortogonal directa}) \quad (1.84)$$

Todo estado $\psi \in \mathcal{H}$ puede ser escrito de manera única como la suma de ψ_{pos} y ψ_{neg} . Se demuestra a partir de (1.72) y (1.73) que: ^[14]

$$H\psi_{pos} = +\sqrt{-c^2\nabla^2 + m^2c^4} \mathbf{1}\psi_{pos} \quad (1.85)$$

$$H\psi_{neg} = -\sqrt{-c^2\nabla^2 + m^2c^4} \mathbf{1}\psi_{neg} \quad (1.86)$$

1.7. LA TRANSFORMACIÓN DE FOLDY-WOUTHUYSEN

La transformación

$$U_{FW} = \mathcal{F}^{-1} \mathcal{W} \quad (1.87)$$

se denomina *la transformación de Foldy-Wouthuysen*; ésta transforma al Hamiltoniano \mathcal{H} en:

$$U_{FW} H U_{FW}^{-1} = \begin{pmatrix} +\sqrt{-c^2\nabla^2 + m^2c^4} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-c^2\nabla^2 + m^2c^4} \end{pmatrix} \quad (1.88)$$

de aquí se puede ver que la ecuación de Dirac es equivalente a un par de ecuaciones de Klein-Gordon de dos componentes, elevadas a la potencia $\frac{1}{2}$.

Teorema 1.2. El operador de Dirac para una partícula libre es esencialmente autoadjunto ^[15] en el dominio denso $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ y autoadjunto en el espacio

de Sobolev^[16] $\mathcal{D}(\hat{H}) = H^1(\mathbb{R}^3)^4$, además su espectro es pura y absolutamente continuo y viene dado por:

$$\sigma(\hat{H}) = (-\infty, -mc^2] \cup [mc^2, \infty) \quad (1.89)$$

1.8.LAS ENERGÍAS NEGATIVAS

Podemos observar que el operador \hat{H} en la ecuación de Dirac representa la energía del sistema descrito por dicha ecuación, puesto que el espectro del operador posee una parte negativa se requiere una interpretación de tales valores ya que el sistema ahora se puede encontrar en uno de estos estados. Hay que recordar que la intención de Dirac fue describir al electrón en un contexto cuantico-relativista, (un electrón que suponemos esta en un estado con energía positiva). Además se añade otra dificultad, ya que el operador H no es acotado, lo que nos provee de un reservorio infinito de energía.

A lo largo de la historia han aparecido muchas interpretaciones para las energías negativas, sin embargo una de las mejores y más aceptadas es, como ya señalamos en la sección 1.2, la de los positrones. Para esto consideraremos el operador de Dirac \hat{H} en presencia de un campo externo, si tal campo es electromagnético con potenciales (ϕ, \vec{A}) el operador de Dirac, viene dado por

$$\hat{H}(e) = c\hat{\alpha} \cdot (\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\hat{\mathbf{A}}(t,x)) + m_0c^2\hat{\beta} + e\phi(t,x) \quad (1.90)$$

Ahora consideremos la transformación antiunitaria:

$$C\psi = U_T\bar{\psi} \quad (1.91)$$

donde U_C es una matriz unitaria 4×4 que satisface $\hat{\beta}U_C = -U_C\hat{\beta}$, y $a_k U_C = U_C \bar{a}_k$ para $k = 1, 2, 3$. Si $\psi(t)$ es una solución para el operador $\hat{H}(e)$ entonces $C\psi(t)$ es una solución para $\hat{H}(-e)$. de modo que:

$$C\hat{H}(e)C^{-1} = -\hat{H}(-e) \quad (1.92)$$

La ecuación anterior muestra que el espacio de las energías positivas está conectado con el de las energías negativas a través de una transformación de simetría para una partícula de carga opuesta (antipartícula), Para $C\psi$ en el espacio de las energías positivas de $\hat{H}(-e)$ podemos interpretar $|C\psi(x)|^2$ como la densidad de probabilidad de la posición, por lo que la ecuación.

$$|C\psi(x)|^2 = |\psi(x)|^2 \quad (1.93)$$

nos muestra que el movimiento de un estado ψ (correspondiente al electrón) es indistinguible del movimiento del estado correspondiente (positrón con energía positiva). Finalmente podemos concluir que:

Un estado $\psi \in H_{neg}$ describe a una antipartícula con energía positiva.

Evidentemente podría suceder como ya se señaló en una sección anterior, que el espacio de Hilbert $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)^4$ contendría estados que son la superposición de otros con energía positiva y negativa, lo que nos motiva a plantear nuevas restricciones para el Hamiltoniano, ya que resulta imposible concebir a una partícula como una superposición de electrones y positrones. Lo que se tratará de hacer, es restringir todo al espacio \mathcal{H}_{pos} con la ayuda del operador $\hat{\mathbf{P}}_{pos}$ definido como

$$\hat{\mathbf{P}}_{pos} = \hat{\psi}_p = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\hat{H}}{|\hat{H}|} \right) \quad \text{con } |H| = +\sqrt{-c^2\nabla^2 + m^2c^4} \quad (1.94)$$

éste operador conmuta con \hat{H} y por lo tanto con $\exp(-i\hat{H}t)$, de modo que :

$$\psi(t) \equiv \exp(-i\hat{H}t)\psi = \hat{\mathbf{P}}_{pos}\psi(t) \quad \Leftrightarrow \psi \hat{\mathbf{P}}_{pos}\psi \quad (1.95)$$

lo que nos permite afirmar que un estado inicial con energía positiva tendrá energías positivas en todo instante. El único problema es que algunos observables no dejan invariante \mathcal{H}_{pos} , lo cual no será analizado totalmente en el presente trabajo.

CAPÍTULO 2

LA ECUACIÓN DE DIRAC EN PRESENCIA DE UN CAMPO ELECTROMAGNÉTICO.

Ahora vamos a iniciar el estudio de una partícula relativista cargada en presencia de un campo magnético ultra fuerte, para esto es necesario dar cierto formalismo y algunas herramientas antes de efectuar tal análisis para la ecuación de Dirac considerada anteriormente. Ahora nos enfocaremos en el estudio del espectro del operador de Hamilton para ésta ecuación. Además es de nuestro interés encontrar las funciones de onda que describen al electrón relativista. Es importante notar que la cuantización de los valores propios del Hamiltoniano aparece solo por el hecho de considerar campos ultra fuertes, lo que nos muestra que estamos usando la teoría adecuada para estudiar tal fenómeno

2.1. SUPERSIMETRÍA

Con motivo de analizar el comportamiento de un electrón relativista en presencia de un campo magnético es necesario estudiar algunos aspectos matemático-físicos que nos permitan dar una interpretación más certera y nos faciliten los cálculos. Una de las herramientas que vamos a utilizar para tal estudio es la supersimetría; la cual proviene del hecho de que siempre podemos separar al Hamiltoniano de Dirac en la suma de dos partes, una par y otra impar, además, éste tratamiento nos permitirá a futuro dar una interpretación física al sistema estudiado y a las consecuencias de la aceptación de los postulados físico-matemáticos; como se verá más adelante, el caso de una partícula de spin $\frac{1}{2}$ es un ejemplo de un sistema

supersimétrico.

2.1.1. LA INVOLUCIÓN UNITARIA

Una involución es un operador acotado $\hat{\kappa}$ en \mathcal{H} que satisface $\hat{\kappa}^2 = 1$. Si un operador posee dos de las tres propiedades: unitario, autoadjunto e involutorio, entonces éste operador posee también la tercera.

$$\kappa^2 = \kappa^* \kappa = \kappa \kappa^* = 1 \quad (2.1)$$

dado que $\hat{\kappa}^2 = 1$, los valores propios de κ serán únicamente ± 1 , notaremos a los correspondientes subespacios propios como \mathcal{H}_+ y \mathcal{H}_- respectivamente. El espacio de Hilbert \mathcal{H} se descompone en la suma ortogonal directa de estos subespacios propios, y los operadores de proyección en \mathcal{H}_\pm se definen por

$$\hat{P}_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \hat{\kappa}) \quad (2.2)$$

de tal definición podemos ver que $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)^4$ es un espacio con involución unitaria, si tomamos $\hat{\kappa} = \hat{\beta}$.

En \mathcal{H} dotado con una involución unitaria $\hat{\kappa}$ definimos *el operador abstracto de Dirac*, como un operador autoadjunto \tilde{H} con dominio $\mathcal{D}(\tilde{H})$ tal que es invariante bajo $\hat{\kappa}$ por la izquierda, es decir: $\kappa \mathcal{D}(\tilde{H}) = \mathcal{D}(\tilde{H})$

Lema 2.1. Todo operador abstracto de Dirac \tilde{H} puede ser escrito de forma unívoca como la suma de dos operadores \tilde{H}_{par} , \tilde{H}_{impar} , los cuales son simétricos en $\mathcal{D}(\tilde{H})$ (No necesariamente autoadjuntos), de modo que \tilde{H}_{impar} anticonmuta con $\hat{\kappa}$, mientras que \tilde{H}_{par} conmuta con $\hat{\kappa}$, lo que significa:

$$\{\tilde{H}_{impar}, \hat{\kappa}\} = \hat{\kappa} \tilde{H}_{impar} + \tilde{H}_{impar} \hat{\kappa} = 0 \quad \text{en } \mathcal{D}(\tilde{H}) \quad (2.3)$$

$$[\tilde{H}_{par}, \hat{\kappa}] = \hat{\kappa} \tilde{H}_{par} - \tilde{H}_{par} \hat{\kappa} = 0 \quad \text{en } \mathcal{D}(\tilde{H}) \quad (2.4)$$

El operador simétrico \tilde{H}_{impar} se denomina la parte fermiónica de \tilde{H} , y \tilde{H}_{par} se denomina la parte bosónica de \tilde{H} , en gran parte de las aplicaciones, los operadores \tilde{H}_{impar} y \tilde{H}_{par} se pueden extender a operadores autoadjuntos.

2.1.2. LAS SUPERCARGAS

Un operador abstracto de Dirac \hat{Q} para el cual $\hat{Q} = \hat{Q}_{impar}$ se denomina *supercarga* con respecto a $\hat{\kappa}$. Una supercarga es auto-adjunta, con

$$\hat{\kappa} \mathcal{D}(\hat{Q}) = \hat{\kappa} \mathcal{D}(\hat{Q}), \quad \{\hat{\kappa}, \hat{Q}\} = 0 \quad \text{en } \mathcal{D}(\tilde{H}) \quad (2.5)$$

el operador positivo \hat{Q}^2 se suele denominar *Hamiltoniano con supersimetría*; éste conmuta con $\hat{\kappa}$ y por lo tanto es un operador par.

Normalmente los operadores de Dirac vienen dados por la suma de una supercarga \hat{Q} y un operador \hat{V} el cual es simétrico y par.

Lema 2.2. Sea \hat{Q} una supercarga respecto a \hat{k} entonces el operador $\hat{Q}' = i\hat{Q}\hat{k}$, definido en $\mathcal{D}(\hat{Q})$ también es una supercarga respecto a \hat{k} , el cual satisface:

$$\hat{Q}^2 = \hat{Q}'^2, \quad \{\hat{Q}', \hat{Q}\} = 0 \quad \text{en } \mathcal{D}(\hat{Q}^2) \quad (2.6)$$

$$(\hat{Q}')' = \hat{Q} \quad \text{en } \mathcal{D}(\hat{Q}) \quad (2.7)$$

Sea \hat{k} una involución unitaria en \mathcal{H} y sea $\mathcal{H}_\pm = \hat{P}_\pm \mathcal{H}$ con \hat{P} dado en (2.2); se define la representación standard escribiendo $\psi \in \mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$ como el vector columna $\psi = (\psi^+, \psi^-)^\top$, donde $\psi^+ \in \mathcal{H}_+$ y $\psi^- \in \mathcal{H}_-$. Con ésta notación, la involución unitaria \hat{k} se puede escribir como:

$$\hat{k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{en } \mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_- \quad (2.8)$$

Un operador abstracto de Dirac se escribirá:

$$\tilde{H} = \hat{P}_+ \tilde{H} \hat{P}_+ + \hat{P}_- \tilde{H} \hat{P}_- + \quad (2.9)$$

$$\hat{P}_+ \tilde{H} \hat{P}_- + \hat{P}_- \tilde{H} \hat{P}_+ = \begin{pmatrix} \tilde{H}_+ & \tilde{H}_{+-} \\ \tilde{H}_{-+} & \tilde{H}_- \end{pmatrix} \quad \text{en } \mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$$

$$\hat{P}_+ \tilde{H} \hat{P}_- = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{H}_{+-} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{en } \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{PD}(\tilde{H}) \quad (2.10)$$

el operador \tilde{H}_{par} (\tilde{H}_{impar}) es la diagonal (la matriz sin diagonal) de \tilde{H}

Para un operador par V se obtiene la representación

$$\tilde{H} = \hat{P}_+ V \hat{P}_+ + \hat{P}_- V \hat{P}_- = \begin{pmatrix} \hat{V}_+ & 0 \\ 0 & \hat{V}_- \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

es decir, \hat{V} es la suma directa de los operadores \hat{V}_+ y \hat{V}_- , por lo tanto V será autoadjunto (esencialmente autoadjunto, simétrico cerrado) si y solamente si los operadores \hat{V}_+ y \hat{V}_- son ambos (esencialmente autoadjuntos, simétricos cerrados) en $\mathcal{D}(V_\pm) \subset \mathcal{H}_\pm$. Para un operador impar las cosas se complican, sin embargo podemos anotar el siguiente lema que nos permite determinar cuando un operador es autoadjunto, simétrico o esencialmente autoadjunto.

Lema 2.3. Sean \mathcal{H}_+ y \mathcal{H}_- espacios de Hilbert, asumimos que $\hat{D}_+ : \mathcal{D}_+ \subset \mathcal{H}_+ \rightarrow \mathcal{H}_-$, y $\hat{D}_- : \mathcal{D}_- \subset \mathcal{H}_- \rightarrow \mathcal{H}_+$ son operadores densamente cerrables^[17]. En $\mathcal{D}_+ \oplus \mathcal{D}_-$ se define el operador:

$$\hat{Q} = \begin{pmatrix} 0 & \hat{D}_- \\ \hat{D}_+ & -1 \end{pmatrix} \text{ en } \mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_- \quad (2.12)$$

Entonces

$$\hat{Q}^* = \begin{pmatrix} 0 & \hat{D}_+^* \\ \hat{D}_-^* & -1 \end{pmatrix}, \quad \hat{Q}^{**} = \begin{pmatrix} 0 & \hat{D}_-^{**} \\ \hat{D}_+^{**} & -1 \end{pmatrix} \text{ en } \mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_- \quad (2.13)$$

Lo que muestra claramente que un operador impar \hat{Q} es autoadjunto si y solamente si \hat{D}_+ es cerrado en \mathcal{D}_+ y $\hat{D}_- = \hat{D}_+^*$ (que es equivalente al hecho de que \hat{D}_- es cerrado en \mathcal{D}_- y $\hat{D}_+ = \hat{D}_-^*$). del mismo modo \hat{Q} es esencialmente autoadjunto (i.e., $\hat{Q}^{**} = \hat{Q}^*$) si y solamente si $\hat{D}_-^{**} = \hat{D}_+^*$. Finalmente, Q es simétrico (i.e., $Q^{**} \subset Q^*$) si $D_-^{**} \subset D_+^*$

Para el operador de Dirac en un campo magnético, el operador

$$\hat{D}_+ = \hat{D}_- = \hat{D} \equiv c\hat{\sigma} \cdot (-i\vec{\nabla} - \frac{e}{c}\vec{A}) \text{ en } C_0^\infty(\mathbb{R}^3)^2 \quad (2.14)$$

es simétrico si cada una de las componentes es localmente cuadrado integrable y un operador simétrico siempre es cerrable. Aquí Q es (esencialmente) autoadjunto, si D es (esencialmente) autoadjunto.

Por lo que podemos afirmar que existe una correspondencia uno a uno entre los operadores cerrados densamente definidos D y los operadores autoadjuntos Q de la forma

$$\hat{Q} = \begin{pmatrix} 0 & \hat{D}^* \\ \hat{D} & 0 \end{pmatrix} \text{ en } \mathcal{D}(\hat{Q}) = \mathcal{D}(\hat{D}) \oplus \mathcal{D}(\hat{D}^*) \quad (2.15)$$

Con esto es posible efectuar varias demostraciones para operadores cerrados usando los resultados para operadores autoadjuntos. A continuación se anuncian varios resultados importantes, los cuales no se demostrarán en el presente trabajo. Para su demostración se recomienda ver la Bibliografía recomendada.

Teorema 2.4. Si \hat{D} es un operador cerrado definido densamente, de $\mathcal{D}(\hat{D}) \subset \mathcal{H}_+$ en \mathcal{H}_- , entonces ambos operadores $\hat{D}\hat{D}^*$ y $\hat{D}^*\hat{D}$ son densamente definidos, autoadjuntos y positivos, y $\mathcal{D}(\hat{D}\hat{D}^*)$ (resp $\mathcal{D}(\hat{D}^*\hat{D})$) es un núcleo para \hat{D}^* (resp \hat{D}), además podemos escribir

$$\hat{D} = \hat{Q}_- \hat{S} = \hat{S} \hat{Q}_+ \quad (2.16)$$

con los operadores autoadjuntos y positivos \hat{Q}_+ y \hat{Q}_- definidos como

$$\hat{Q}_+ = (\hat{D}^* \hat{D})^{\frac{1}{2}}, \quad \hat{Q}_- = (\hat{D} \hat{D}^*)^{\frac{1}{2}} \quad (2.17)$$

definidos en $\mathcal{D}(\hat{Q}_-) = \mathcal{D}(\hat{D})$, $\mathcal{D}(\hat{Q}_+) = \mathcal{D}(\hat{D}^*)$, con la isometría parcial definida como

$$S = \begin{cases} \hat{Q}_-^{-1} \hat{D} = \hat{D} \hat{Q}_+^{-1}, & \text{en } (\text{Ker } \hat{D})^\perp \\ 0 \dots \dots \dots \text{en } (\text{Ker } \hat{D}) \end{cases} \quad (2.18)$$

donde $\text{Ker } \hat{D} = \{\psi \in \mathcal{D}(\hat{D}) / \hat{D}\psi = 0\}$, y " \perp " denota el complemento ortogonal de el conjunto.

Para cualquier \hat{Q} dada como en (2.15) se tiene que

$$\text{Ker } \hat{Q} = \text{Ker } \hat{D} \oplus \text{Ker } \hat{D}^* \quad (2.19)$$

además la fórmula $\text{Ker } \hat{Q} = \text{Ker } \hat{Q}^2 = (\text{Ran } \hat{Q})^\perp$ es equivalente a

$$\begin{aligned} \text{Ker } \hat{D} &= \text{Ker } \hat{D}^* \hat{D} = (\text{Ran } \hat{D}^*)^\perp = (\text{Ran } \hat{D}^* \hat{D})^\perp \\ \text{Ker } \hat{D}^* &= \text{Ker } \hat{D} \hat{D}^* = (\text{Ran } \hat{D})^\perp = (\text{Ran } \hat{D} \hat{D}^*)^\perp \end{aligned} \quad (2.20)$$

El operador $\text{sgn} \hat{Q}$ es una aplicación unitaria de $(\text{Ker } \hat{Q})^\perp$ en $(\text{Ker } \hat{Q})^\perp$ (i.e. isometría parcial). En la representación estándar viene dado por

$$\text{sgn} \hat{Q} = \begin{pmatrix} 0 & \hat{S}^* \\ \hat{S} & 0 \end{pmatrix} \text{ en } (\text{Ker } \hat{Q})^\perp \quad (2.21)$$

entonces \hat{S} es unitaria de $(\text{Ker } \hat{D})^\perp$ en $(\text{Ker } \hat{D}^*)^\perp$

Corolario 2.5. El operador $\hat{D}^* \hat{D}$ en $(\text{Ker } \hat{D})^\perp$ es unitariamente equivalente al operador $\hat{D} \hat{D}^*$ en $(\text{Ker } \hat{D}^*)^\perp$. En particular, el espectro de $\hat{D}^* \hat{D}$ y de $\hat{D} \hat{D}^*$ son iguales a excepción del cero

$$\sigma(\hat{D} \hat{D}^*) \setminus \{0\} = \sigma(\hat{D}^* \hat{D}) \setminus \{0\} \quad (2.22)$$

Para cualquier supercarga \hat{Q} y cualquier función acotada f se define en $\mathcal{D}(\hat{Q}_-)$ el operador

$$\hat{Q} f(\hat{Q}^2) = \int \lambda f(\lambda^2) dE_{\hat{Q}}(\lambda) = f(\hat{Q}^2) \hat{Q} \quad (2.23)$$

puesto que:

$$f(\hat{Q}^2) = \begin{pmatrix} f(\hat{D}^* \hat{D}) & S^* \\ S & f(\hat{D} \hat{D}^*) \end{pmatrix} \text{ en } (\text{Ker } \hat{Q})^\perp \quad (2.24)$$

se tiene que para cualquier operador cerrado densamente definido \hat{D} se

cumplen las siguientes ecuaciones.

$$f(\hat{D}^*\hat{D})\hat{D}^* = \hat{D}^*f(\hat{D}\hat{D}^*) \quad (2.25)$$

$$f(\hat{D}\hat{D}^*)\hat{D} = \hat{D}f(\hat{D}^*\hat{D}) \quad (2.26)$$

2.1.3 OPERADORES DE DIRAC CON SUPERSIMETÍA

Definimos el *operador de Dirac con supersimetría*, el cual cabe notar, es un caso particular de los operadores abstractos de Dirac, tal operador tendrá la siguiente forma

$$\hat{H} = \hat{Q} + \hat{M}\hat{\kappa} \quad (2.27)$$

donde \hat{Q} es una supercarga respecto a $\hat{\kappa}$ y \hat{M} es un operador autoadjunto positivo, el cual conmuta con \hat{Q} y con $\hat{\kappa}$ lo que significa que \hat{M} es un operador par;

$$\hat{M}\mathcal{D}(\hat{Q}) \subset \mathcal{D}(\hat{Q}), \quad [\hat{M}, \hat{Q}] = 0 \quad \text{en } \mathcal{D}(\hat{Q}) \subset \mathcal{D}(\hat{M}) \quad (2.28)$$

$$\hat{\kappa}\mathcal{D}(\hat{M}) = \mathcal{D}(\hat{M}), \dots\dots[\hat{M}, \hat{\kappa}] = 0 \dots\dots \text{en } \mathcal{D}(\hat{M}) \quad (2.29)$$

Asumiremos por simplicidad que \hat{M} es invertible y que \hat{M} y \hat{M}^{-1} son acotados y definidos en todo \mathcal{H} , de lo cual concluimos

$$\hat{M} : \mathcal{D}(\hat{M}) = \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \text{ es biyectiva y } \hat{M}\mathcal{D}(\hat{Q}) = \mathcal{D}(\hat{Q}) \quad (2.30)$$

Claramente podemos notar que el operador definido en (1.21), es un operador de Dirac con supersimetría, donde la matriz $\hat{Q} = -i\hat{\alpha}\hat{\nabla}$ es una supercarga con respecto a $\hat{\beta}$ en el espacio de Hilbert $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)^4$.

Teorema 2.6. Sea $\hat{H} = \hat{Q} + \hat{M}\hat{\kappa}$ un operador de Dirac con supersimetría, entonces \hat{H} es autoadjunto en $\mathcal{D}(\hat{H}) = \mathcal{D}(\hat{Q})$. El operador \hat{H}^2 es autoadjunto en $\mathcal{D}(\hat{H}^2) = \mathcal{D}(\hat{Q}^2)$, y

$$\hat{H}^2 = \hat{Q}^2 + \hat{M}^2 \text{ en } \mathcal{D}(\hat{Q}^2) \quad (2.31)$$

Además \hat{H}^2 es estrictamente positivo

$$(\psi, \hat{H}^2\psi) \geq \frac{1}{\|\hat{M}^{-1}\|^2} \text{ para todo } \psi \text{ con } \|\psi\| = 1 \quad (2.32)$$

En la representación estándar $\hat{H} = \hat{Q} + \hat{M}\hat{\kappa}$ tiene la representación

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} \hat{M}_+ & \hat{D}^* \\ \hat{D} & \hat{M}_- \end{pmatrix} \text{ en } (\text{Ker}\hat{Q})^\perp \quad (2.33)$$

en la misma representación \hat{H}^2 se convierte en

$$\hat{H}^2 = \begin{pmatrix} \hat{D}^*\hat{D} + \hat{M}_+^2 & 0 \\ 0 & \hat{D}\hat{D}^* + \hat{M}_+^2 \end{pmatrix} \text{ en } (\text{Ker}\hat{Q})^\perp \quad (2.34)$$

2.1.4 SUPERSIMETRÍA EN CAMPOS ELECTROMAGNÉTICOS

El operador de Dirac para una partícula de spin $\frac{1}{2}$ en un campo electromagnético se escribe

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} mc^2 & c\hat{\sigma} \cdot (-i\vec{\nabla} - \frac{e}{c}\vec{\mathbf{A}}) \\ c\hat{\sigma} \cdot (-i\vec{\nabla} - \frac{e}{c}\vec{\mathbf{A}}) & -mc^2 \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

si tomamos como

$$\hat{M}_+ = \hat{M}_- = mc^2, \quad \hat{D} = \hat{D}^* = c\hat{\sigma} \cdot (-i\vec{\nabla} - \frac{e}{c}\vec{\mathbf{A}}) \quad (2.36)$$

usando las propiedades de las matrices de Pauli, podemos obtener

$$\hat{D}^*\hat{D} = \hat{D}\hat{D}^* = c^2(-i\vec{\nabla} - \frac{e}{c}\vec{\mathbf{A}})^2 - ec\hat{\sigma} \cdot \mathbf{B} \quad (2.37)$$

En la ecuación anterior se ve que comienza a aparecer la relación no relativista de la ecuación de Pauli.

El operador supersimétrico de Dirac puede ser diagonalizado por cierta transformación de Foldy-Wouthuysen U_{FW} . Para el operador de Dirac de una partícula libre, U_{FW} coincide con la transformación definida en (1.88). Para un operador de Dirac supersimétrico en general tenemos el siguiente resultado

Teorema 2.7. Sea $\hat{H} = \hat{Q} + \hat{M}\hat{\kappa}$ un operador de Dirac Supersimétrico, definimos

$$\hat{U}_{FW} = \hat{a}_+ + \hat{\kappa}(\text{sgn}\hat{Q})\hat{a}_-, \quad \hat{a}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 \pm \hat{M}|\hat{H}|^{-1}} \quad (2.38)$$

entonces \hat{U}_{FW} es unitario, y además

$$\hat{U}_{FW}\hat{H}\hat{U}_{FW}^* = \hat{\kappa}|\hat{H}| = \hat{\kappa}\sqrt{\hat{Q}^2 + \hat{M}^2} \equiv \hat{H}_{FW} \quad (2.39)$$

\hat{H}_{FW} es un operador par y satisface

$$\hat{H}_{FW}^2 = \hat{H}^2 \quad (2.40)$$

En la representación estándar \hat{U}_{FW} diagonaliza al operador \hat{H} . de la siguiente forma

$$\hat{U}_{FW} \begin{pmatrix} \hat{M}_+ & \hat{D}^* \\ \hat{D} & -\hat{M}_- \end{pmatrix} \hat{U}_{FW}^* = \begin{pmatrix} \sqrt{\hat{D}^* \hat{D} + \hat{M}_+^2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{\hat{D} \hat{D}^* + \hat{M}_-^2} \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

Corolario 2.8. Sea $\hat{H} = \hat{Q} + \hat{m}\hat{k}$, con $m > 0$ una constante cualquiera. Entonces el espectro de \hat{H} es simétrico con respecto a 0 (excepto posiblemente a $\pm m$), y tiene un salto de $-m$ a $+m$, y es determinado por el espectro de $\hat{D}^* \hat{D}$ (excepto en $-m$). El punto $+m$ (ó $-m$) es un valor propio de \hat{H} si 0 es un valor propio de \hat{D} (ó \hat{D}^*).

2.2. CAMPOS MAGNÉTICOS

Para cualquier espacio de dimensión $n \geq 2m$ la intensidad del campo magnético se describe por la forma bilineal

$$B(x) = \sum_{\substack{i,k=1 \\ i < k}}^n F_{ik}(x) dx_i \wedge dx_k \quad (2.42)$$

que satisface $dB = 0$, donde

$$F_{ik}(x) = \frac{\partial A_i(x)}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k(x)}{\partial x_i} \quad (2.43)$$

es el tensor de Faraday. Además se define el vector potencial magnético como

$$A(x) = \sum_{i=1}^n A_i(x) dx_i \quad (2.44)$$

que como se conoce el vector potencial no es un observable y presenta varios problemas con respecto a la medición, ya que se conoce que puede ser distinto de cero aún cuando el campo magnético es cero. Asumiremos que cada componente de B es una función suave en $C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

El operador de Dirac en un campo magnético se escribe a continuación

$$\hat{H}(A) = \begin{cases} c \sum_{i=1}^3 \alpha_i (\hat{p}_i - \hat{A}_i) + \hat{\beta} mc^2 & \text{si } n = 3 \\ c \sum_{i=1}^2 \sigma_i (\hat{p}_i - \hat{A}_i) + \hat{\sigma}_3 mc^2 & \text{si } n = 2 \end{cases} \quad (2.45)$$

el cual es esencialmente autoadjunto en $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)^4$ (resp. $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)^2$), sin restricción en el crecimiento de B o A incluso hacia el infinito

En la representación estándar $\hat{H}(A)$ tiene la forma (supersimétrica)

$$\hat{H}(A) = \begin{pmatrix} mc^2 & c\hat{D}^* \\ c\hat{D} & -mc^2 \end{pmatrix} \quad (2.46)$$

donde

$$\hat{D} = \begin{cases} \sum_{i=1}^3 \hat{\sigma}_i(\hat{p}_i - \hat{A}_i) & \text{si } n = 3 \\ (\hat{p}_1 - \hat{A}_1) + i(\hat{p}_2 - \hat{A}_2) & \text{si } n = 2 \end{cases} \quad (2.47)$$

Se define el *operador de Pauli* como

$$\hat{H}_P(A) = \frac{1}{2m} \hat{D}^* \hat{D} = \begin{cases} \hat{H}_S(A) \mathbf{1} - \left(\frac{1}{2m}\right) \sigma \cdot B & \text{si } n = 3 \\ \hat{H}_S(A) - \left(\frac{1}{2m}\right) B & \text{si } n = 2 \end{cases} \quad (2.48)$$

el cual puede ser deducido obteniendo el límite no relativista de $\hat{H}(A)$, y donde $\hat{H}_S(A) = \frac{1}{2m} (-i\nabla - A)^2$ se denomina el operador de Schrödinger para una partícula no relativista, sin spin y en presencia de un campo magnético. Por otro lado la estructura (supersimétrica) de (2.46) y el corolario 2.8 nos permiten anunciar el siguiente teorema.

Teorema 2.9. El espectro de $\hat{H}(A)$ es simétrico con respecto a 0 excepto posiblemente a $\pm mc^2$. El intervalo abierto $(-mc^2, mc^2)$ no está dentro del espectro. Además se tiene:

$$\hat{H}(A)\Psi = mc^2\Psi \quad (2.49)$$

si y solamente si

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ con } \hat{D}^* \hat{D} \psi_1 = 0 \quad (2.50)$$

por otro lado

$$\hat{H}(A)\Psi = -mc^2\Psi \quad (2.51)$$

si y solamente si

$$\Psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \text{ con } \hat{D} \hat{D}^* \psi_2 = 0 \quad (2.52)$$

En tres dimensiones, donde $\hat{D} = \hat{D}^*$, el espectro es siempre simétrico aún en

$\pm mc^2$

2.2.1 CAMPO MAGNÉTICO HOMOGÉNEO

Ahora necesitamos estudiar el comportamiento del espectro del operador de Dirac en un campo magnético homogéneo con el objetivo de estudiar la polarización de los electrones usando la función de onda para los electrones en presencia de un campo magnético homogéneo ultra fuerte..

La supersimetría nos ayudará en los cálculos y nos permitirá estudiar fácilmente el espectro del operador de Dirac, para lo cual consideremos un campo magnético a lo largo del eje z

$$A = (0, B_o x, 0) \quad (2.53)$$

es suficiente considerar el operador bidimensional $\hat{H}(A)$ con el vector potencial

$$A = \frac{B_o}{2}(-y, x) \quad (2.54)$$

con $\hat{D} = (-i\partial_x - A_x) + (\partial_y - iA_y)$ podemos obtener:

$$\hat{D}\hat{D}^* = \hat{D}^*\hat{D} + 2B_o \quad (2.55)$$

lo que muestra que el espectro del operador $\hat{D}\hat{D}^*$ es igual al espectro del operador $\hat{D}^*\hat{D}$ corrido en $2B_o$. Puesto que $\hat{D}^*\hat{D} \geq 0$, podemos concluir que $\hat{D}\hat{D}^* \geq 2B_o$, lo que significa que el espectro de $\hat{D}\hat{D}^*$ no toma ningún valor en el intervalo $(0, 2B_o]$

Además la supersimetría implica que $\sigma(\hat{D}^*\hat{D}) = \sigma(\hat{D}\hat{D}^*)$ excepto en 0 y por lo tanto $\sigma(\hat{D}^*\hat{D}) \cap (0, 2B_o) = \emptyset$, por esto, el primer valor propio distinto de cero de $\hat{D}^*\hat{D}$ solo puede alcanzarse en $2B_o$, del mismo modo podríamos hacer para el siguiente intervalo $(2B_o, 4B_o)$, y así sucesivamente, por consiguiente podemos afirmar

$$\sigma(\hat{D}^*\hat{D}) \subset \{0, 2B_o, 4B_o, \dots\} \quad (2.56)$$

$$\sigma(\hat{D}\hat{D}^*) \subset \{2B_o, 4B_o, \dots\} \quad (2.57)$$

por lo que finalmente escribimos

$$\sigma(\hat{H}(A)) \subset \{\sqrt{2nB_o + mc^2}, -\sqrt{2(n+1)B_o + mc^2}; n = 0, 1, 2, 3, \dots\} \quad (2.58)$$

Par obtener la inclusión en el otro sentido asumamos que $\hat{D}^*\hat{D}\psi_o = 0$ para algún $\psi_o \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$, al mismo tiempo ψ_o es un vector propio de $\hat{D}\hat{D}^*$ debido a que de (4.53) obtenemos $\hat{D}\hat{D}^*\psi_o = 2B_o\psi_o$, esto muestra que $2B_o \in \sigma(\hat{D}\hat{D}^*)$,

además $0 \in \sigma(\hat{D}\hat{D}^*)$. la supersimetría implica que $\psi_1 = \hat{D}^*\psi_0$ es un vector propio de $\hat{D}^*\hat{D}$ que tiene el mismo valor propio $2B_0$, usando (4.53) encontramos que $\hat{D}\hat{D}^*\psi_1 = 4B_0\psi_1$. Si continuamos en esta forma podemos obtener la secuencia de vectores propios $\psi_n = (\hat{D}^*)^n\psi_0, n = 0, 1, 2, \dots$ que satisfacen

$$\hat{D}^*\hat{D}\psi_n = 2nB_0\psi_n \quad (2.59)$$

$$\hat{D}\hat{D}^*\psi_n = 2(n+1)B_0\psi_n, n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.60)$$

Los vectores propios de la ecuación de Dirac se pueden obtener a partir de la transformación inversa de Foldy-Wouthuysen de la siguiente forma

$$\hat{H}(A)\hat{U}_{FW}^{-1}\begin{pmatrix} \psi_n \\ 0 \end{pmatrix} = \sqrt{2nB_0 + mc^2} U^{-1}\begin{pmatrix} \psi_n \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.61)$$

$$\hat{H}(A)\hat{U}_{FW}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ \psi_n \end{pmatrix} = -\sqrt{2(n+1)B_0 + mc^2} U^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ \psi_n \end{pmatrix} \quad (2.62)$$

Definimos un campo escalar auxiliar del siguiente modo

$$\phi = \frac{B_0}{4}(x^2, y^2) \quad (2.63)$$

tal que

$$\hat{A} = \nabla \wedge \phi = (-\partial_y, \partial_x) \quad (2.64)$$

entonces se puede verificar que si $D\psi_0 = 0$ la función

$$\omega = e^\phi\psi_0 \quad (2.65)$$

satisface

$$0 = De^\phi\omega = -ie^\phi(\partial_x + i\partial_y)\omega \quad (2.66)$$

La ecuación

$$\frac{\partial\omega}{\partial x} + i\frac{\partial\omega}{\partial y} = 0 \quad (2.67)$$

es equivalente a las ecuaciones de Cauchy -Riemann; ω debe ser una función entera y analítica de $x + iy$. además se debe cumplir $e^{-\phi}\omega = e^{\frac{-B_0x^2}{4}}\omega = \psi_0$, debe ser cuadrado integrable.

Sin embargo, cualquier polinomio en $x + iy$ dará una solución $\psi_0^{m_j}$ de $D\psi_0^{m_j} = 0$, si tomamos

$$\psi_o^{m_j} = e^{-\frac{B_o}{4}(x^2+y^2)} (x+iy)^{m_j-\frac{1}{2}} \quad (2.68)$$

donde $m_j \in \{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots\}$. además

$$(-ix\partial_y - iy\partial_x + \frac{\sigma_3}{2}) \begin{pmatrix} \psi_o^{m_j} \\ 0 \end{pmatrix} = m_j \begin{pmatrix} \psi_o^{m_j} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.69)$$

se nota claramente que $(-ix\partial_y - iy\partial_x + \frac{\sigma_3}{2})$ es el momento de la partícula. Con esto podemos enunciar el siguiente teorema

Teorema 2.10. El operador de Dirac en dos dimensiones en un campo magnético uniforme B_o tiene los valores propios

$$\sqrt{2nB_o + mc^2}, \quad -\sqrt{2(n+1)B_o + mc^2} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.70)$$

cada valor propio infinitamente degenerado.

Si consideramos un campo $B_o < 0$ se procede análogamente a lo expuesto en esta sección y obtendremos el valor propio $-mc^2$ de $\hat{H}(A)$.

Para el caso en tres dimensiones existe un teorema similar, pero aquí ya no se hará uso de la supersimetría puesto que es imperativo calcular explícitamente las funciones de onda para el electrón, por lo tanto procederemos a buscar directamente la forma de esta función de onda.

Tomemos el potencial vectorial definido en (2.53), que provocará que la ecuación de Dirac ahora dependa solo de la coordenada x , esto lleva a que los momentos p_y y p_z sean constantes del movimiento permitiéndonos tomar una función de onda de la siguiente forma

$$\Psi(x, t) = f(x) \exp(-i\rho(\vec{p} \cdot \vec{r} - Et - p_x x)) \quad (2.71)$$

donde $\rho = \pm$ es el signo de la energía cuya magnitud es E .

Insertando en la ecuación de Dirac (ecuación 1.24), y reemplazando p^μ por $p^\mu - eA^\mu$ (donde e es la carga eléctrica) se obtiene

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi - \left(c \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix} p + eBx \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix} + m_o c^2 \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \right) \Psi = 0 \quad (2.72)$$

en donde se ha considerado al potencial eléctrico como cero, puesto que queremos calcular la función de onda para campos magnéticos ultra fuertes, por lo que el aporte del campo eléctrico a la energía es muy pequeño.

Desarrollando (2.72) en función de los espinores podemos obtener después de algunos cálculos

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} mc^2 & 0 & cp_z & \hat{R}_1 \\ 0 & mc^2 & \hat{R}_2 & -cp_z \\ cp_z & \hat{R}_1 & -mc^2 & 0 \\ \hat{R}_2 & -cp_z & 0 & -mc^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = 0 \quad (2.73)$$

con $\hat{R}_1 = c(p_x - ip_y + eB_o x)$, y $\hat{R}_2 = c(p_x + ip_y + eB_o x)$

reemplazando (2.71) en (2.73), se llega al siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} E + mc^2 & 0 & cp_z & \hat{R}_1 \\ 0 & E + mc^2 & \hat{R}_2 & -cp_z \\ cp_z & \hat{R}_1 & E - mc^2 & 0 \\ \hat{R}_2 & -cp_z & 0 & E - mc^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_3(x) \\ f_4(x) \end{pmatrix} = 0 \quad (2.74)$$

si hacemos el cambio de variable $\zeta = (eB)^{\frac{1}{2}} \left(x + \frac{pp_y}{eB_o} \right)$ el sistema anterior se convierte en

$$\begin{aligned} (E - mc^2)f_1 - cp_z f_3 - ci(eB_o)^{\frac{1}{2}} \left(\zeta + \frac{d}{d\zeta} \right) f_4 &= 0 \\ (E - mc^2)f_2 + cp_z f_4 + ci(eB_o)^{\frac{1}{2}} \left(\zeta + \frac{d}{d\zeta} \right) f_3 &= 0 \\ (E + mc^2)f_3 - cp_z f_1 - ci(eB_o)^{\frac{1}{2}} \left(\zeta + \frac{d}{d\zeta} \right) f_2 &= 0 \\ (E + mc^2)f_4 + cp_z f_2 + ci(eB_o)^{\frac{1}{2}} \left(\zeta + \frac{d}{d\zeta} \right) f_1 &= 0 \end{aligned} \quad (2.75)$$

donde se ha hecho $f(x) = (f_1, f_2, f_3, f_4)^T$

Finalmente después de algunos cálculos se obtiene

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial \zeta^2} + \frac{E^2 + m^2 c^4 - c^2 p^2}{eB_o} f_1 - (\zeta^2 + 1)f_1 = 0 \quad (2.76)$$

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial \zeta^2} + \frac{E^2 + m^2 c^4 - c^2 p^2}{eB_o} f_2 - (\zeta^2 - 1)f_2 = 0 \quad (2.77)$$

$$\frac{\partial^2 f_3}{\partial \zeta^2} + \frac{E^2 + m^2 c^4 - c^2 p^2}{eB_o} f_3 - (\zeta^2 + 1)f_3 = 0 \quad (2.78)$$

$$\frac{\partial^2 f_4}{\partial \zeta^2} + \frac{E^2 + m^2 c^4 - c^2 p^2}{eB_o} f_4 - (\zeta^2 - 1)f_4 = 0 \quad (2.79)$$

que tienen exactamente la misma forma de la ecuación de Schrödinger para el oscilador armónico simple, de ahí que las soluciones de las ecuaciones diferenciales son normalizables si definimos $n \geq 0$ como

$$n = \frac{E^2 + m^2 c^4 - c^2 p^2}{eB_0} \quad (2.80)$$

donde se interpreta a n como el número cuántico que determina la energía perpendicular de la partícula con respecto a la dirección del campo magnético, además si se define

$$2n \mp 1 = 2l + 1 \quad (2.81)$$

entonces se tiene que $(2l + 1)eB_0$ es la contribución del movimiento armónico simple y seB_0 es la contribución debida al spin. De esto se sigue que las soluciones normalizadas son las funciones de onda correspondientes al oscilador armónico cuántico; a saber, una función de los polinomios de Hermite

$$v_n(\zeta) = \frac{1}{(\sqrt{\pi} 2^n n!)^{\frac{1}{2}}} H_n(\zeta) \exp\left(-\frac{\zeta^2}{2}\right) \quad (2.82)$$

Con esto al función $f(x)$ de (2.71) se escribe

$$f(x) = \begin{pmatrix} Av_{n-1}(\zeta) \\ Bv_n(\zeta) \\ Cv_{n-1}(\zeta) \\ Dv_n(\zeta) \end{pmatrix} \quad (2.83)$$

con A, B, C, D constantes.

Reemplazando (2.81) en (2.74) obtenemos

$$\begin{pmatrix} E_n + mc^2 & 0 & cp_z & -i(2neB)^{\frac{1}{2}} \\ 0 & E_n + mc^2 & i(2neB)^{\frac{1}{2}} & -cp_z \\ cp_z & -i(2neB)^{\frac{1}{2}} & E_n - mc^2 & 0 \\ i(2neB)^{\frac{1}{2}} & -cp_z & 0 & E_n - mc^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A(x) \\ B(x) \\ C(x) \\ D(x) \end{pmatrix} = 0 \quad (2.84)$$

con $E_n = (m^2 c^2 + c^2 p_z^2 + 2neB)^{\frac{1}{2}}$.

Tomando las dos primeras columnas de la matriz en (2.84) y tomando en cuenta (2.83) obtenemos finalmente la función de onda para un electrón relativista en presencia de un campo magnético ultra fuerte ($2.11 \cdot 10^{17}$ Teslas):

$$\Psi_q^\kappa(t, x) = \frac{\exp(-i\rho(\vec{p} \cdot \vec{r} - Et - p_x x))}{[2\kappa E_n(\kappa E_n + m)V]^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{1+s}{2} \mathcal{U}_1 + \frac{1-s}{2} \mathcal{U}_2 \right) \quad (2.85)$$

$$U_1 = \begin{pmatrix} (\kappa E_n + mc^2)v_{n-1}(\zeta) \\ 0 \\ kp_z v_{n-1}(\zeta) \\ ip_n v_n(\zeta) \end{pmatrix} \quad U_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ (\kappa E_n + mc^2)v_n(\zeta) \\ -ip_n v_{n-1}(\zeta) \\ p_z v_n(\zeta) \end{pmatrix} \quad (2.86)$$

donde se ha hecho $p_n = (2neB)^{\frac{1}{2}}$ [18][19]

El valor del campo magnético puede ser calculado considerando a un electrón con energía $\hbar\omega$ de modo que podemos escribir

$$\hbar\omega = \frac{\hbar e B}{mc} \geq mc^2 \quad (2.87)$$

de aquí se obtiene que

$$B \geq \frac{m^2 c^3}{\hbar e} = 2.1104748 * 10^{17} \text{ Teslas} \quad (2.88)$$

CAPÍTULO 3

POLARIZACIÓN DE UN ELECTRÓN RELATIVISTA

En éste capítulo se pretende dar una concisa introducción a la teoría de polarización, la cual finalmente nos va a servir para el cálculo de la polarización del electrón, usando la función de onda (2.85), para luego pasar a la interpretación de los resultados, que estará enmarcada en la comparación con datos experimentales ya publicados en el campo de la Astrofísica. Hay que recalcar que para el cálculo de los parámetros de Stokes se considerará al espinor completo, con sus cuatro componentes, que aunque físicamente es correcto, matemáticamente parece no serlo, ya que se comienzan a mezclar estados de partículas con antipartículas; con la interpretación que vamos a presentar se pretende evitar la interacción de la polarización de antipartículas con la de las partículas para que las observaciones experimentales estén acorde con los cálculos que aquí vamos a efectuar. Al comparar los gráficos obtenidos de los cálculos teóricos que en éste capítulo se proponen se observará que las curvas publicadas, obtenidas semi-empíricamente se acoplan perfectamente al modelo teórico, mas aún, el cálculo teórico presenta curvas más completas, permitiéndonos estudiar lo que sucede más allá y predecir lo que sucedería con la polarización para campos más altos.

3.1. LOS PARÁMETROS DE STOKES

La forma más general posible para una onda que satisface las leyes de Maxwell y que se propaga en la dirección $\vec{k} = k\vec{n}$ viene dada por

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = (a_1\vec{E}_1 + a_2\vec{E}_2) \exp(i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\omega t) \quad (3.1)$$

Las amplitudes a_1, a_2 son números complejos con el fin que exista la posibilidad de una diferencia de fase entre ondas de distinta polarización. Si a_1 y a_2 están en fase, entonces (3.1) representa una onda polarizada linealmente, cuyo vector de polarización forma un ángulo $\theta = \text{tg}^{-1}(\frac{a_2}{a_1})$ con \vec{E}_1 y cuyo módulo es $A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$. Si a_1 y a_2 presentan diferencia de fase, entonces (3.1) está polarizada elípticamente

Los vectores unitarios E_1 y E_2 que pueden ser reales o complejos son perpendiculares a \vec{k} y forman la *base de polarización*. Para vectores reales la base está formada por dos direcciones de polarización lineales o planas que se las toma como perpendiculares entre sí. Para vectores complejos la base es elíptica. Normalmente se suele hablar en éste caso como vectores de *polarización circular izquierda y derecha*

Los parámetros de Stokes son cuadráticos en a_1 y a_2 y pueden ser usados para determinar la polarización de una onda electromagnética a través de la intensidad de la onda solamente. Introduciendo un sistema de coordenadas cuyos ejes x, y, z están ordenados en el sentido contrario a las manecillas del reloj, y asumiendo que la onda viaja en la dirección z positiva, los parámetros de Stokes se definen a continuación

$I_0 \equiv$ Intensidad de la onda

$P_1 \equiv$ Grado de polarización lineal con respecto a los ejes x y y , Si las intensidades son I_x , y I_y , $P_1 = (I_x - I_y)/I_0$

$P_2 \equiv$ Grado de polarización con respecto a los ejes orientados 45° a la derecha de los ejes previos x y y . En este caso las intensidades son I_{45} y I_{135} , $P_2 = (I_{45} - I_{135})/I_0$

$P_3 \equiv$ Grado de polarización circular: Si las intensidades para la polarización circular izquierda y derecha son I_l y I_r , respectivamente, $P_3 = (I_l - I_r)/I_0$

Expresando en términos de a_1 y a_2 y tomando como base $\{\vec{E}_1, \vec{E}_2\}$ los parámetros de Stokes se convierten en

$$I_0 = a_1 a_1^* + a_2 a_2^* \quad (3.2)$$

$$P_1 = \frac{a_1^* a_1 - a_2^* a_2}{I_0} \quad (3.3)$$

$$P_2 = \frac{a_1^* a_2 + a_2^* a_1}{I_0} \quad (3.4)$$

$$P_3 = -i \frac{a_1^* a_2 - a_2^* a_1}{I_0} \quad (3.5)$$

Los parámetros de Stokes son reales y satisfacen $P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 = 1$. Es necesario notar que el valor de estos parámetros depende de la base de polarización que hayamos escogido. Lo que pretendemos a continuación es darle un tratamiento cuántico .

3.2. POLARIZACIÓN DE FOTONES

Las ecuaciones de Maxwell se pueden escribir usando el cuadvivector potencial $A^\mu = (\phi, \vec{A})$. Puesto que el campo electromagnético solo tiene dos componentes independientes, dos de las cuatro componentes de A^μ son superfluas para la descripción del campo, ambas componentes "sobrantes" pueden ser eliminadas haciendo uso de la invariancia de gauge. En el gauge de coulomb se toma por ejemplo $\phi = 0$, y $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$.

La cuantización del campo en éste gauge nos lleva a escribir el potencial vectorial en función de los operadores de creación $a^{(\lambda)+}(k)$ y de aniquilación $a^{(\lambda)}(k)$ de la siguiente forma

$$\vec{A}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k_0} \sum_{\lambda=1}^2 A^{(\lambda)}(k) [a^{(\lambda)}(k)e^{-ikx} + a^{(\lambda)+}(k)e^{ikx}] \quad (3.6)$$

donde k es el cuadrivector que satisface $k^2 = 0$ o $k_0 = |\vec{k}|$, la condición de gauge $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$. nos lleva a $\vec{k} \cdot \vec{A}^{(\lambda)}(k) = 0$. Ambos vectores de polarización $\vec{A}^{(\lambda)}(k)$ son perpendiculares a k y pueden ser tomados el uno ortogonal al otro por conveniencia.

De la ecuación (3.6) se puede ver que para cierto momento k dos estados ortogonales independientes pueden ser creados del vacío $|0\rangle$. Un fotón arbitrario con momento \vec{k} es la combinación lineal de estos dos estados. Los estados polarizados $\phi_1 = a^{(1)+}(k)|0\rangle$ y $\phi_2 = a^{(2)+}(k)|0\rangle$ forman un conjunto completo, en términos del cual un estado arbitrario siempre puede escribirse como

$$\phi = a_1\phi_1 + a_2\phi_2 \quad (3.7)$$

donde $|a_1|^2$ y $|a_2|^2$ son las probabilidades de encontrar al fotón en uno de los estados base. Un solo fotón siempre está en un estado de polarización puro, para el cual los parámetros de Stokes se dan en (3.2),(3.3),(3.4),(3.5).

3.3. POLARIZACIÓN DE ELECTRONES

Ahora estamos listos para el estudio del electrón relativista. Las soluciones de la ecuación de Dirac obtenidas en la sección (2.2.1) son soluciones que tienen cuatro componentes, dos soluciones para el electrón y dos soluciones para el

positrón, las cuales son independientes. Si las dos soluciones para el electrón son ϕ_1 y ϕ_2 , la función de onda para un electrón se puede escribir como (3.7). En el sistema propio del electrón la polarización se define como el valor esperado de la matriz \hat{S} definida en (1.69)

$$S_x = \langle \phi | \sigma_x | \phi \rangle = (a_1^*, a_2^*) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = a_1^* a_2 + a_2^* a_1 \quad (3.8)$$

$$S_y = \langle \phi | \sigma_y | \phi \rangle = (a_1^*, a_2^*) \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = -i(a_1^* a_2 - a_2^* a_1) \quad (3.9)$$

$$S_z = \langle \phi | \sigma_z | \phi \rangle = (a_1^*, a_2^*) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = a_1^* a_1 - a_2^* a_2 \quad (3.10)$$

Comparando las ecuaciones anteriores con la definición de los parámetros de Stokes definidos en (3.2),(3.3),(3.4),(3.5).se puede apreciar que $P_1 = S_z, P_2 = S_x$ y $P_3 = S_y$ si I se toma como

$$I = \langle \phi | I | \phi \rangle = (a_1^*, a_2^*) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = a_1^* a_1 + a_2^* a_2 \quad (3.11)$$

los parámetros de Stokes se pueden usar para describir la polarización de un electrón del mismo modo en que se usan para describir la polarización de los fotones, sin embargo, para el electrón el significado de las componentes de $P = (P_1, P_2, P_3)$ es fijado con el escogitamiento de una base en el sistema de laboratorio, puesto que la dirección de polarización del electrón no depende necesariamente con la dirección de movimiento del electrón.

Si hacemos un cambio de base los parámetros de Stokes van cambiar de valor como ya se mencionó; si las bases, tanto la inicial como la final son ortogonales la transformación de los parámetros de Stokes se describe a través de una matriz M .

Para una rotación en un ángulo θ al rededor de el eje de P_3 viene dada por

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega & \sin \omega & 0 \\ 0 & -\sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

donde $\omega = \theta$ para los electrones y $\omega = 2\theta$ para los fotones. Una rotación al rededor de P_1 se tiene

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \omega & \sin \omega \\ 0 & 0 & -\sin \omega & \cos \omega \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

Usando los parámetros de Stokes el efecto de una interacción electromagnética se puede escribir como una matriz 4×4 , T de modo que la ecuación de transformación nos queda

$$\begin{pmatrix} I' \\ \vec{P}' \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} I \\ \vec{P} \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

3.4. ESTADOS MEZCLADOS

Hasta ahora solo hemos considerado estados puros, es decir, estados en los que existe una dirección definida en la cual la polarización es igual a uno. Para describir estados mezclados se utiliza el formalismo de la matriz de densidad. En tal formalismo un chorro de electrones o fotones se representa por una matriz hermítica 2×2 con valores propios no negativos, y traza uno, lo que implica que el estado es normalizado. Para un estado puro la matriz de polarización es

$$\rho = \begin{pmatrix} a_1^* a_1 & a_2^* a_1 \\ a_1^* a_2 & a_2^* a_2 \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

la cual puede ser transformada a

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

a través de una transformación unitaria. Un estado mezclado se obtiene a partir de una superposición incoherente de estados puros. En este caso ρ puede ser diagonalizada pero en general los elementos de la diagonal son distintos de cero. La matriz resultante es una superposición incoherente de estados no polarizados y de estados polarizados

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_a & 0 \\ 0 & \rho_b \end{pmatrix} = (1 - \eta) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \eta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

donde $\eta = \rho_a - \rho_b$ es el grado de polarización. Se puede escribir

$$\rho = \frac{1}{2}(I + \vec{S}\vec{\sigma}) \quad (3.18)$$

para un estado puro $|\vec{S}| = 1$, mientras que para un estado mezclado

$$|\vec{S}| = \eta < 1$$

3.5. CÁLCULO DE LOS PARÁMETROS DE STOKES, COMPARACIONES EXPERIMENTALES Y CONCLUSIONES

Usando la función de onda (2.28) podemos calcular el valor medio de S definido en (1.69), sin embargo por lo extenso de los cálculos estos no se presentarán desarrollados totalmente y los resultados finales se presentan a continuación

$$S_x = (\Psi_q^1(t,x))^+ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} (\Psi_q^1(t,x)) \quad (3.19)$$

$$S_y = (\Psi_q^1(t,x))^+ \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix} (\Psi_q^1(t,x)) \quad (3.20)$$

$$S_z = (\Psi_q^1(t,x))^+ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} (\Psi_q^1(t,x)) \quad (3.21)$$

aquí $+$ denota transpuesto y conjugado

$$S_x = \frac{(m^2c^2 + 2kE_n m + ikp_z(2neB)^{\frac{1}{2}})}{4E_n^2 + 4E_n m} v_n v_{n-1} \quad (3.22)$$

$$S_y = \frac{p_z(2neB)^{\frac{1}{2}} s}{(kE_n^2 + E_n m)V} v_n v_{n-1} \quad (3.23)$$

$$S_z = \frac{1}{2E_n^2 + 2kE_n m} \left(\frac{(1+s^2)}{2} 2(m^2c^2 + p_z^2c^2 + neB) + \frac{(1-s^2)}{4} (2neB) \right) v_{n-1}^2(\zeta) - \frac{1}{2E_n^2 + 2kE_n m} \left(\frac{(1-s^2)}{4} 2(m^2c^2 + p_z^2c^2 + neB) + \frac{(1+s^2)}{4} (2neB) \right) v_n^2(\zeta) \quad (3.24)$$

$$I = \frac{1}{2E_n^2 + 2kE_n m} \left(\frac{(1+s^2)}{2} 2(m^2c^2 + p_z^2c^2 + neB) + \frac{(1-s^2)}{4} (2neB) \right) v_{n-1}^2(\zeta) + \frac{1}{2E_n^2 + 2kE_n m} \left(\frac{(1-s^2)}{4} 2(m^2c^2 + p_z^2c^2 + neB) + \frac{(1+s^2)}{4} (2neB) \right) v_n^2(\zeta) \quad (3.25)$$

A continuación se presentan las gráficas de los parámetros de Stokes discretizadas por $n = 0, 1, 2, \dots$

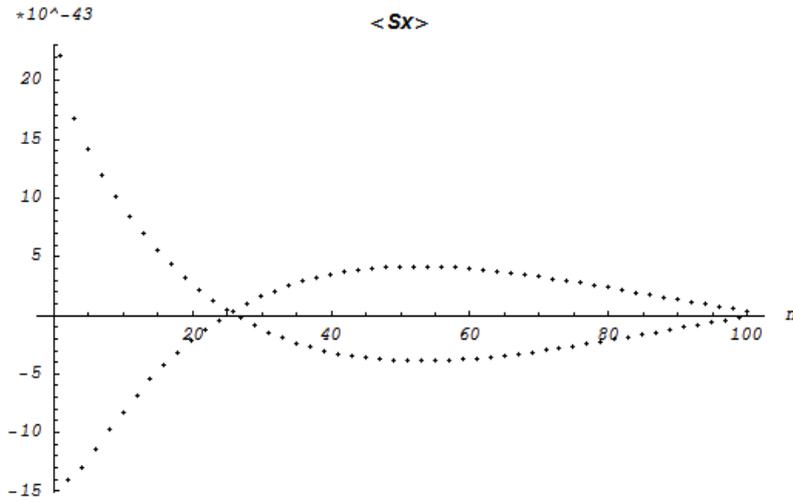


Gráfico 1. Polarización lineal con resp. al eje x, orientado a 45° grados resp. del eje anterior

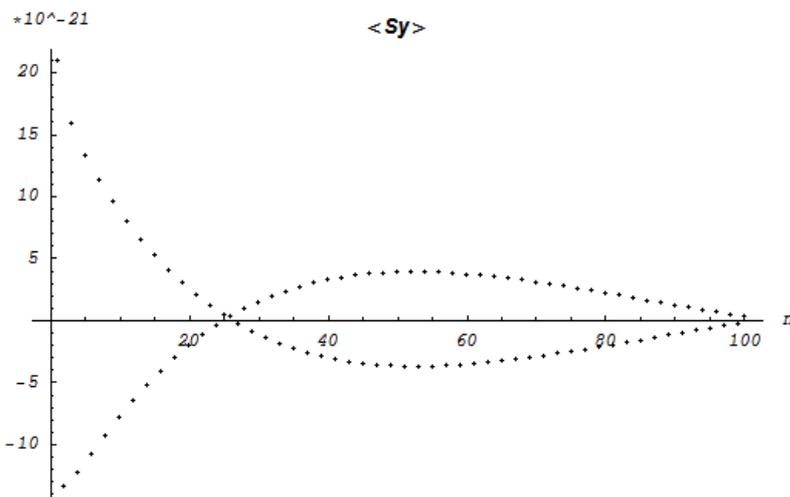


Gráfico 2. Grado de polarización circular

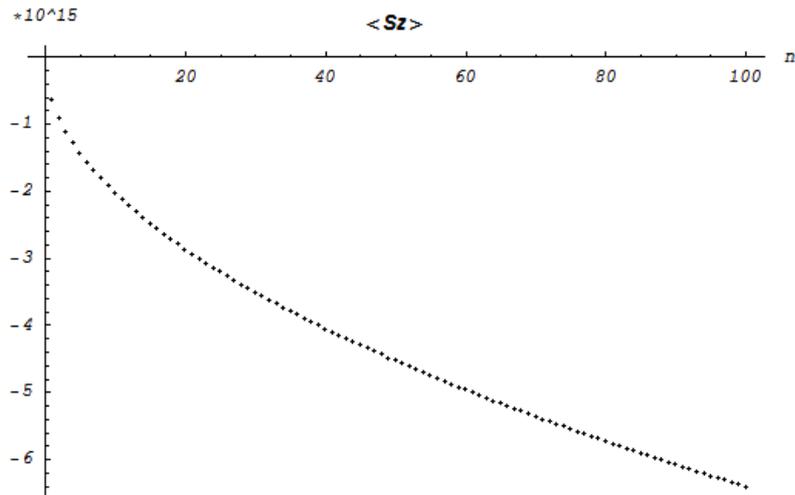


Gráfico 3.- Grado de polarización lineal con resp. al eje x , y al eje y

Para obtener un análisis más profundo en lo que nos interesa es necesario observar el comportamiento de los gráficos para un n grande, por eso presentamos a continuación los gráficos para n entre 0 y 1000.

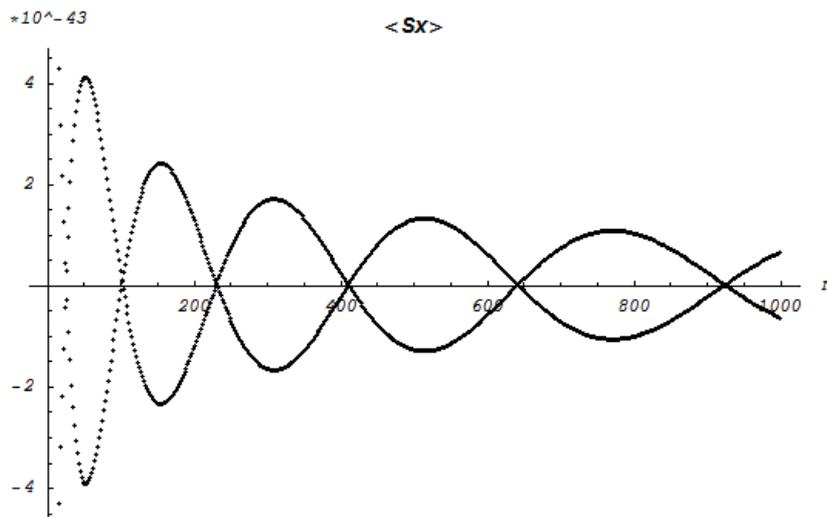


Gráfico 4. Polarización lineal con resp. al eje x, orientado a 45° grados resp. del eje anterior ($n=1,2,\dots,1000$)

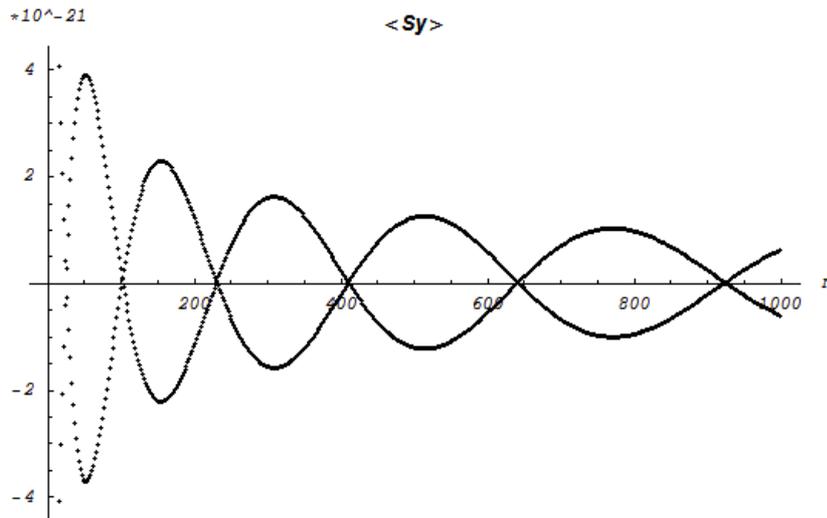


Gráfico 5. Grado de polarización circular ($n=1,2,\dots,1000$)

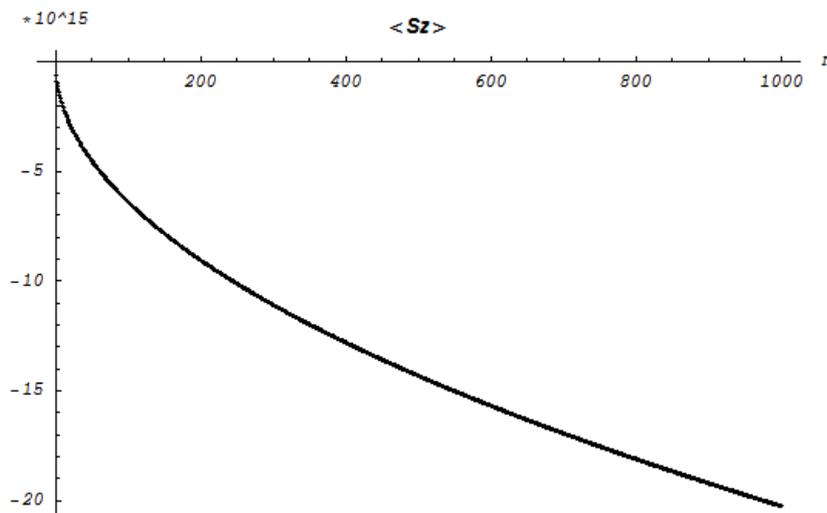


Gráfico 6.- Grado de polarización lineal con resp. al eje x , y al eje y

Con tales cálculos efectuados podemos observar el comportamiento de los parámetros de Stokes, incluso para n grande (Gráficos 4,5,6). Sin embargo es necesario analizar profundamente la validez de estos, y uno de los campos que se presta para hacerlo, debido a la magnitud de los campos que ahí se manejan es la astrofísica. Reconociendo que varios científicos a lo largo de los años han tratado de estudiar estos fenómenos, generalmente basados en suposiciones un tanto elementales, y más bien tratando de obtener curvas semi-empíricas (un ejemplo es la gráfico 7, del cual se hablará más adelante) que les permitan calcular o predecir la polarización de las estrellas.

Se piensa que la emisión térmica de las atmósferas de una estrella de neutrones fuertemente magnetizada es altamente polarizada, sin embargo, debido a las diferentes orientaciones del campo magnético sobre la superficie

de la estrella, se asume que la polarización neta es relativamente reducida, ya que las polarizaciones de distintas regiones se cancelan mutuamente. Cada elemento de una estrella de neutrones (en su superficie) emite radiación térmica altamente polarizada ($> 50\%$) en frecuencias que van, del óptico a los rayos X ^{[20],[21]}.

En el área de emisión la dirección de polarización está correlacionada con la dirección del campo magnético. Sin embargo la orientación del campo magnético varía sobre la superficie de la estrella de neutrones. Al sumarse las intensidades polarizadas se obtiene como resultante una polarización neta relativamente baja, típicamente se obtienen valores que van del 5% al 25% de polarización. Se considera que la polarización observada es igual en magnitud a la polarización producida.

La polarización intrínseca de la radiación emitida de la superficie de una estrella de neutrones con un campo magnético fuerte del orden de $10^{11} Gauss$ y superiores, es bastante alta (50% al 80%), el piso de la emisión térmica está en $\nu = 10^{18} Hz$, por lo tanto se puede concluir que los pulsares, en promedio, deben ser altamente polarizados, incluso en el óptico, su polarización neta debe ser significativamente alta.

Actualmente, polarimetría en el óptico o en el ultra violeta puede ser realizada para una estrella de neutrones, sin embargo la radiación térmica, de incluso las estrellas más cercanas, es muy débil y requiere de largas exposiciones con los instrumentos mas grandes disponibles. debido a que la radiación térmica alcanza su pico en frecuencias de rayos X, probablemente la polarimetría en rayos X sea la más favorable.

Los magnetares, que son estrellas de neutrones aisladas con una superficie dipolar de $10^{15} Gauss$, campos mucho más altos que los de un pulsar ordinario ($10^{12} Gauss$), emiten radiación en forma de rayos gamma y rayos X. Como mecanismo de generación de ésta radiación se ha considerado la presencia de electrones relativistas que se mueven en estos campos fuertes, dispersión Compton inversa y emisión sincrotrónica pueden dar lugar a radiación de alta energía y polarizada, debido a las energías involucradas se tiene que pensar necesariamente en estos mecanismos, dejando a un lado procesos térmicos tradicionales.

En el presente trabajo se usa una muy conveniente herramienta para la descripción de la polarización, basada en el formalismo de los parámetros de Stokes, el cual es desarrollado para la descripción, tanto de radiación electromagnética como de partículas elementales, formalismo propuesto

originalmente en 1954 por Mc.Master [22]

El estudio de un plasma en un campo magnético se constituye en objeto tradicional de estudio en las investigaciones astrofísicas, suficiente es recordar que un gran trabajo se ha realizado para analizar en detalle la radiación de electrones relativistas en campos magnéticos.

Observaciones de la polarización circular de la radiación continua de las estrellas, se constituye en un método efectivo de estudio de sus campos magnéticos; justamente, estos estados de la polarización circular de la radiación de enanas blancas dio lugar al crecimiento y desarrollo de investigaciones teóricas en esa dirección [23].

En éste contexto, los procesos relacionados con el comportamiento de la materia y de la radiación en campos magnéticos fuertes $B > 10^{12}$ Gauss también han sido estudiados. Así por ejemplo, una aproximación cualitativa para la sección transversal de fotoionización en un campo magnético fuerte fue obtenida por Hasegave H. y Hovard R [24]

Para las aplicaciones en astrofísica es necesario conocer el espectro de emisión que se emite desde un plasma magneto activo. La ley de conducción térmica para la radiación en un plasma con campo magnético fuerte fue establecida por Pavlov G.G. y Yakovlev D. G. [25]. Igualmente Pavlov G. G. y Shabanov determinaron el espectro de emisión en el óptico de un plasma caliente, desarrollando en serie la función de Planck, en función de la profundidad óptica. en ésta aproximación también calcularon la polarización de la radiación emitida por una atmósfera de plasma estratificada, inmersa en un campo magnético fuerte [26]

El mayor resultado obtenido por estos autores es que para $\hbar\omega_B \geq 3kT_e$, con T_e temperatura de la estrella, el grado de polarización lineal y polarización circular pueden ser comparables en magnitud y alcanzar algunas decenas porcentuales ($\sim 50\%$). En la posibilidad de apareamiento de polarización circular en la radiación de fuentes térmicas compactas en campos magnéticos fuertes, puso atención Kemp [27]. Particularmente, al mismo tiempo el problema de transporte de radiación en polarización circular en una atmósfera en equilibrio térmico fue resuelto por Shipman H.L. [28] utilizando la fórmula obtenida por Kemp para el grado de polarización de una fuente ópticamente delgada en el caso de libre-libre transiciones.

Si el campo magnético en la superficie de una estrella de neutrones es lo suficientemente grande ($B \geq 10^{12} - 10^{13}$ Gauss) y $\omega \ll \omega_B$ la sección eficaz de

dispersión y de absorción de la radiación se vuelve anisotrópica.

El campo magnético juega un papel importante en la formación del diagrama de direccionamiento de la radiación en pulsares conduce el material en el disco de acreción y en las regiones de los polos magnéticos de las estrellas de neutrones.^[29]

Con mucho interés se ha considerado los diferentes modelos teóricos relacionados con el estudio de las emisiones polarizadas en rayos X de pulsares. Estudios detallados se muestran varios trabajos ^[30]

En un campo magnético fuerte se esperaría que la radiación que se mueven a lo largo del campo magnético esté altamente polarizada circularmente y la que se mueve transversalmente tenga una componente lineal. En el campo magnético el movimiento transversal del electrón ocurre por órbitas circulares cuantizadas, según la mecánica cuántica en niveles discretos, los denominados *niveles de Landau*. Para valores altos de energía ocurren saltos espontáneos entre los niveles de Landau con diferente n , lo cual conlleva a la bien conocida emisión sinclotrópica de un plasma caliente en las frecuencias armónicas $\omega_s = s\omega_B$, con $s = 0, 1, 2, 3, \dots$

La mayoría de estrellas tienen un campo magnético tal que $\omega_B \ll \frac{kT_e}{\hbar}$

Caso $\omega_B \ll \omega$,

En éste caso la polarización de la radiación se puede considerar circular para cualquier ángulo de propagación excepto para el intervalo cerca de $\theta = \frac{\pi}{2}$. Por lo tanto la polarización de tales fuentes debe ser preferentemente circular. El grado de polarización lineal es una contribución adicional pequeña, del orden de $\frac{\omega_B}{\omega}$. el grado de polarización circular de la radiación estelar con campo magnético fuerte se puede determinar en dos situaciones diferentes: en equilibrio termodinámico local y en dispersión pura.

a) Equilibrio termodinámico local .- Comunmente las atmósferas de las estrellas se pueden considerar lo suficientemente densa, tal que la aproximación de equilibrio termodinámico local se puede utilizar. los modos de vibración en la radiación son ortogonales; se puede determinar que el grado de polarización lineal, para el caso en que el campo magnético de la estrella es considerado dipolar varía periódicamente, aproximadamente como

$$P_\nu(\omega, B, T) \simeq k(\omega, B, T) \cos \gamma \quad (3.26)$$

γ es el ángulo entre la dirección del campo magnético y la del observador.

Si las no homogeneidades del campo magnético son fuertes en comparación con la componente dipolar, el grado de polarización de la radiación disminuye. sin embargo, para frecuencias altas ($\hbar\omega \geq kT_e$), las no homogeneidades se manifiestan en menor grado debido a la disminución del rol que juegan las zonas ecuatoriales en comparación con las zonas polares. como resultado, el máximo de la curva periódica de polarización circular se mueve al lado de la región de todavía más altas frecuencias.

En conclusión, la contribución debido a la polarización debido a las zonas polares es significativamente mayor que la contribución de las zonas ecuatoriales; además, ésta diferencia es mayor para menores valores del coeficiente de absorción. se debe poner atención, también en el hecho de que el máximo de polarización se encuentra en las regiones de altas frecuencias ($\hbar\omega = 10kT$) La dependencia del grado de polarización circular de la frecuencia puede ser considerada como $P_v(\omega) \simeq \omega^{-\frac{3}{7}}$ [31]

Recientemente, en las enanas blancas se descubrió que la polarización circular detectada evidenciaba la presencia de campos magnéticos del orden de $10^6 - 10^8 Gauss$ en las atmósferas de éstas estrellas [32]

Caso $\omega_B \gg \omega$

Para éste caso se puede determinar los parámetros de Stokes correspondientes a la polarización lineal y circular. El grado de polarización lineal puede ser mucho mayor que en el caso anterior y alcanzar niveles comparables con la polarización circular $\rho_V \sim \rho_L \simeq 10\%$. Éste caso se ha verificado observacionalmente que puede tener lugar en enanas blancas del tipo AMHer, fuentes que pueden tener un grado considerable (*hasta 30%*) de polarización circular y lineal. [33]

En conclusión, objetos del tipo AMHer existentes en la naturaleza poseen radiación que contiene alto grado de polarización tanto circular como lineal. Las curvas semi-empíricas para estrellas calientes han mostrado ser bastante aproximadas a la realidad. Como se ve en el Gráfico 7, las curvas presentan un comportamiento sinusoidal que al parecer se va atenuando después del máximo, se esperaría que la atenuación continúe hasta el infinito, pero por ser éstas graficas semi-empíricas los campos no pueden alcanzar más de $10^8 - 10^9 Gauss$.

Si comparamos el Gráfico 7 con el Gráfico 5 se observa que los cálculos efectuados se apegan mucho a la curva semi-empírica, sin embargo los

cálculos efectuados por su naturaleza teórica se pueden extender para campos tan altos como se quiera, resta por ver si tales campos pueden ser encontrados en el Universo

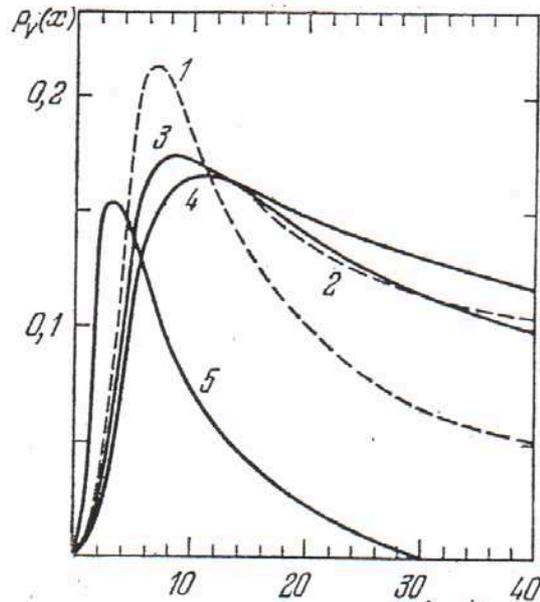


Gráfico 7.-Polarización circular en función de la frecuencia para atmósferas de estrellas calientes con campo magnético fuerte (curvas semi-empíricas)^[34]

Finalmente, hay que notar que si bien es complicado encontrar en el Universo campos extremadamente altos como para verificar la validez de la curva obtenida teóricamente, podemos utilizar estos resultados para el análisis interpretacional de la teoría cuántica relativista, a lo cual se procederá en el siguiente capítulo.

Puntualizando el análisis anterior podemos anotar que:

1. Existen indicios científicos de que uno de los factores fundamentales en la generación de radiación de alta energía y polarizada son los electrones moviéndose a velocidades relativistas.
2. La polarización debido a las zonas polares de las estrellas es mayor que la de las zonas ecuatoriales.
- 3.-Existen objetos en el Universo cuya polarización se comporta como se ha descrito en los gráficos (4,5,6).
- 4.- La polarización lineal y circular debida a electrones relativistas fluctúa al

rededor de cero atenuándose conforme n aumenta. Existe una especie de Zitterbewegung al rededor de n , que mezcla estados de polarización positiva y negativa, en el sistema en reposo del electrón.

5.- Las curvas semi-empíricas representan una parte de las curvas teóricas, se espera que si se encuentran campos mas altos la polarización se comporte como en las curvas teóricas.

CAPÍTULO 4

INTERPRETACIÓN E IMPLICACIONES FÍSICAS DEL ZITTERBEWEGUNG

Las conclusiones obtenidas en el capítulo anterior a base de la comparación con resultados ya publicados nos muestran que los cálculos efectuados se aproximan a las curvas obtenidas experimentalmente, aunque en el modelo teórico el campo puede ser tan grande como se quiera. No se tiene una razón a priori para considerar campos no susceptibles de incrementarse hasta el infinito. En el Universo encontramos campos bastante altos, aunque no lo suficiente como para poder testear las gráficas (4,5,6). Como se anotó en el capítulo anterior, para el cálculo de los parámetros de Stokes se usó el espinor completo, lo que provocaría mezclas de estados de polarización de partículas y antipartículas. En este capítulo daremos una interpretación que permite eliminar tal posibilidad en los resultados obtenidos experimentalmente, de modo que la teoría se acople a las observaciones. Antes es necesario dar una introducción formal al estudio de los problemas que acarrea la mecánica cuántica relativista, además se hará incapié en el formalismo matemático fundamental, para observar la interrelación entre la Matemática (el lenguaje) y la Física (el fenómeno). La interpretación que se va a aportar tiene como eje central al fenómeno que denominamos Zitterbewegung, que es el que causa los más grandes problemas de interpretación y desarrollo matemático, y cuya contraparte en la mecánica cuántica no relativista no existe. Se estudian algunos problemas de mecánica cuántica fundamental.

4.1. EL OPERADOR VELOCIDAD

En los capítulos anteriores ya definimos los operadores asociados a los observables que se usan generalmente en la mecánica cuántica no relativista, ahora vamos a analizar como varían esos operadores en el tiempo, y que relación tienen con el Hamiltoniano de Dirac \hat{H} .

Para partículas libres el operador velocidad se define como la derivada temporal del operador de posición $\hat{x}(t) = \exp(iHt)x\exp(-iHt)$. Si tomamos x como el operador definido en (1.65) podemos construir *el operador velocidad standard*

$$\frac{d}{dt}x(t) = \exp(iHt)i[H,x]\exp(-iHt) = \exp(iHt)c\hat{\alpha}\exp(-iHt) = c\hat{\alpha}(t) \quad (4.1)$$

La matriz $c\hat{\alpha}$ tiene como valores propios $\{+c, -c\}$. el operador $c\hat{\alpha}(t)$ es unitariamente equivalente a $c\hat{\alpha}$, por lo tanto su espectro también será $\{+c, -c\}$ para todo t , lo que muestra que los únicos valores posibles de la medición de la velocidad son $\{+c, -c\}$.

En correspondencia con la cinemática relativista clásica se esperaría que el operador $c^2\hat{\mathbf{p}}H^{-1}$ sea el operador asociado a la velocidad, este operador es acotado y conmuta con \hat{H} , además tiene un espectro puramente continuo, a saber, el intervalo $[-c, c]$; llamaremos a $c^2\hat{\mathbf{p}}H^{-1}$ *el operador clásico de velocidad*. La derivada del operador standard viene dada por

$$\frac{d}{dt}c\hat{\alpha}(t) = \exp(iHt)i[H, c\hat{\alpha}(t)]\exp(-iHt) = 2iH\mathbf{F}(t) \quad (4.2)$$

de lo cual podemos concluir que el operador $\hat{\alpha}(t)$ no es una constante del movimiento. El operador $\mathbf{F}(t)$ se define como

$$\mathbf{F} = c\hat{\alpha} - c^2\hat{\mathbf{p}}H^{-1} \quad (4.3)$$

el cual es acotado, y cada una de sus componentes anticonmuta con \hat{H} , fácilmente podemos obtener de la relación de anticonmutación la siguiente expresión

$$\mathbf{F}(t) = \exp(2iHt)\mathbf{F} \quad (4.4)$$

Integrando (4.2) y tomando $c\hat{\alpha}(0) = c\hat{\alpha}$ se obtiene

$$c\hat{\alpha}(t) = c^2\hat{\mathbf{p}}H^{-1} + \mathbf{F}(t) \quad (4.5)$$

Podemos observar claramente que la velocidad oscila al rededor del valor medio $c^2\hat{\mathbf{p}}H^{-1}$ el cual es justamente el operador de velocidad clásico. Éste fenómeno de oscilación se suele denominar "*Zitterbewegung*"

4.2.EL OPERADOR POSICIÓN

Se puede hacer el mismo análisis para la evolución temporal de x , obteniéndose un resultado análogo, el cual se sintetiza a continuación, en el siguiente teorema

Teorema 4.1. El dominio $\mathcal{D}(x) = \mathcal{D}(x(t))$ del operador multiplicativo x es invariante por la izquierda bajo la evolución temporal .

$$\mathcal{D}(x(t)) = \exp(-iHt)\mathcal{D}(x) = \mathcal{D}(x) \quad (4.6)$$

en este dominio se tiene

$$x(t) = x + c^2 \hat{\mathbf{p}} H^{-1} t + \frac{1}{2iH} (\exp(2iHt) - 1) \mathbf{F} \quad (4.7)$$

Se puede demostrar que $\mathcal{D}(x)$ es denso en \mathcal{H} y además que el término $\frac{1}{2iH} (\exp(2iHt) - 1) \mathbf{F}$ tiende a cero cuando t tiende al infinito

El Zitterbewegung es una consecuencia de las energías negativas, dado que \mathbf{F} anticonmuta con H podemos escribir

$$\mathbf{F} \mathbf{P}_{pos} = \mathbf{P}_{neg} \mathbf{F} \quad (4.8)$$

$$\mathbf{F} \mathbf{P}_{neg} = \mathbf{P}_{pos} \mathbf{F} \quad (4.9)$$

Lo que muestra claramente que el operador acotado \mathbf{F} mapea el espacio de las energías positivas en el espacio de energías negativas y viceversa, en particular $\mathbf{P}_{pos} \mathbf{F} \mathbf{P}_{pos} = 0$. Todo esto podemos enunciarlo en el siguiente teorema:

Teorema 4.2. El valor esperado de x en el estado $\psi(t) \equiv \exp(-i\hat{H}t)\psi$, donde $\psi \in \mathcal{D}(x)$, tiene la forma:

$$(\psi(t), x\psi(t)) = (\psi, \{x + \frac{1}{2iH} \mathbf{F}\} \psi) + (\psi, c^2 \hat{\mathbf{p}} H^{-1} \psi) t + \frac{1}{2iH} (\exp(2iHt) - 1) \mathbf{F} \quad (4.10)$$

Si ψ es un estado inicial con energía positiva (negativa), entonces el valor esperado de x en el estado $\psi(t)$ no efectúa Zitterbewegung siempre. en tal caso tenemos:

$$(\psi(t), x\psi(t)) = (\psi, x\psi) + (\psi, c^2 \hat{\mathbf{p}} H^{-1} \psi) t \quad \psi \in \mathcal{H}_{pos} \text{ o } \mathcal{H}_{neg} \quad (4.11)$$

La velocidad de una partícula con energía negativa es siempre *antiparalela* a su momento puesto que $c^2 \hat{\mathbf{p}} H^{-1} \psi_{neg} = -c^2 \hat{\mathbf{p}} |H^{-1} \psi_{neg}$

4.3.LOS OPERADORES DE MOMENTO ANGULAR

Es necesario notar que además de $x(t)$ existen otras magnitudes que presentan el fenómeno llamado Zitterbewegung, y es de nuestro interés particular el comportamiento de los operadores de momento angular $\hat{\mathbf{J}}, \hat{\mathbf{L}}$ y $\hat{\mathbf{S}}$.

Se puede mostrar sin dificultad que el operador $\hat{\mathbf{L}}$ y el operador $\hat{\mathbf{S}}$ cumplen con las siguientes ecuaciones:

$$\hat{\mathbf{L}}(t) = x(t) \wedge \mathbf{p} = \hat{\mathbf{L}} + \frac{1}{2iH} (\exp(2iHt) - 1) \hat{\mathbf{F}} \wedge \hat{\mathbf{p}} \quad (4.12)$$

$$\hat{\mathbf{S}}(t) = -\frac{i}{4} \hat{\boldsymbol{\alpha}}(t) \wedge \hat{\boldsymbol{\alpha}}(t) = \hat{\mathbf{S}} - \frac{1}{2iH} (\exp(2iHt) - 1) \hat{\mathbf{F}} \wedge \hat{\mathbf{p}} \quad (4.13)$$

De las ecuaciones anteriores se puede observar que tanto $\hat{\mathbf{L}}$ como $\hat{\mathbf{S}}$ no se conservan a causa de las Zitterbewegung. sin embargo el operador $\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{S}}$; como se ve claramente en función de (4.12) y (4.13), se conserva, puesto que los términos que provocan Zitterbewegung se anulan quedando $\hat{\mathbf{J}}(t) = \hat{\mathbf{J}}$.

Del mismo modo que en (4.5) se observa que las matrices $\hat{\boldsymbol{\alpha}}(t)$ vienen dadas por un término Zitterbewegung, así se puede hacer para el estudio de las matrices $\hat{\boldsymbol{\beta}}$; anunciamos aquí el resultado:

$$c\beta(t) = \frac{mc^2}{H} + \mathbf{G}(t) \quad (4.14)$$

donde

$$\mathbf{G} = \beta - \frac{mc^2}{H} \quad (4.15)$$

el operador $\hat{\mathbf{G}}$ describe la diferencia entre la matriz $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ y el operador clásico

$$\frac{mc^2}{E} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (4.16)$$

Los operadores $\hat{\mathbf{G}}$ y $\hat{\mathbf{F}}$ se relacionan a través de $H^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4$ como

$$\hat{\mathbf{F}} \cdot \hat{\mathbf{p}} + mc^2 \mathbf{G} = 0 \quad (4.17)$$

lo que muestra finalmente que el operador de Dirac H permanece invariante si reemplazamos $c\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ por $c^2\hat{\mathbf{p}}H^{-1}$ y $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ por mc^2H^{-1} además podemos agregar las siguientes relaciones:

$$\frac{1}{c} \hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \hat{\mathbf{p}} + \hat{\boldsymbol{\beta}} \cdot \hat{\mathbf{G}} = 3 \quad (4.18)$$

$$3 - \frac{\hat{\mathbf{F}}^2}{c^2} = \hat{\mathbf{G}}^2 \quad (4.19)$$

Las oscilaciones Zitterbewegung son difíciles de interpretar físicamente, aunque matemáticamente son bien entendidas. El problema fundamental se

encuentra en la forma en la que escogimos los operadores para los observables (posición estándar, velocidad estándar) la cual es incorrecta, ya que hemos visto que el operador x mezcla los estados de energía positiva y negativa en una forma compleja; esto es lo que origina las Zitterbewegung. Lo que nos hace pensar que si restringimos el espacio de estados solo al de las energías positivas (negativas) para ser consistentes con la interpretación de los estados de energía negativa como antipartículas de energía positiva; podemos evitar por decirlo así las oscilaciones, todo esto a través de las transformaciones (4.8) y (4.9). Por ejemplo, podemos considerar el operador \tilde{x} dado por

$$\tilde{x} = P_{pos} x P_{pos} + P_{neg} x P_{neg} = x - \frac{1}{2iH} \mathbf{F} \quad (4.20)$$

el cual es acotado y autoadjunto en $\mathcal{D}(\tilde{x}) = \mathcal{D}(x)$, De (4.5) y el Teorema 4.1 podemos también deducir que:

$$\tilde{x}(t) = \tilde{x} + c^2 \hat{\mathbf{p}} H^{-1} t \quad (4.21)$$

de la misma forma podemos restringir el resto de operadores que mezclan los estados de energía positiva con los de energía negativa.

El operador \tilde{x} tiene la propiedad de que sus componentes no conmutan, lo que implica que la localización en una zona finita ya no tiene significado. sin embargo se puede construir otro operador de posición el cual deja invariante los subespacios de energía positiva y de energía negativa, el cual tiene componentes que si conmutan y cuya derivada temporal es $c^2 \hat{\mathbf{p}} H^{-1}$, este operador se denomina "operador de posición de Newton-Wigner"; el cual se define como la transformación inversa de Foldy-Wouthuysen de x :

$$x_{NW} = U_{FW}^{-1} x U_{FW} \quad (4.22)$$

además para la evolución temporal podemos obtener:

$$x_{NW}(t) = x_{NW} + c^2 \hat{\mathbf{p}} H^{-1} t \quad (4.23)$$

el cual en la representación estándar viene dado por:

$$x_{NW} = x - \frac{\beta}{2i\Omega} \left(c\hat{\alpha} - \frac{c^2}{\Omega(\Omega + mc^2)} c(\hat{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}}) \cdot \hat{\mathbf{p}} \right) - \frac{c^2}{\Omega(\Omega + mc^2)} \hat{\mathbf{S}} \wedge \hat{\mathbf{p}} \quad (4.24)$$

$$\Omega = (p^2 c^2 + m_0^2 c^4)^{\frac{1}{2}} \quad (4.25)$$

La representación de Foldy-Wouthuysen nos ayuda a determinar fácilmente todos los operadores y luego nos permite pasarlos a la forma estándar. Los operadores restantes en la representación de Foldy-Wouthuysen se muestran en el apéndice.

4.4. LOCALIZACIÓN Y ACAUSALIDAD

4.4.1 NOCIONES DE LOCALIZACIÓN

Por lo expuesto en la sección anterior podemos afirmar que existen varias formas de escoger los operadores de posición, sin embargo existen varias propiedades que sin importar cual sea el operador de posición, éste debe cumplir. Para esto consideremos una partícula que tiene la propiedad de estar localizada en un subconjunto B de \mathbb{R}^3 . Si esta propiedad es un observable entonces debe existir un operador autoadjunto $E(B)$ en el espacio de Hilbert de esta partícula que describe las dos posibilidades de encontrar a la partícula; dentro de B o fuera de B . Lo que provoca que el operador $E(B)$ solo debe tener los valores propios 1 (dentro de B) y 0 (fuera de B). Un operador $E(B)$ con éstas propiedades debe ser un operador de proyección. Cualquier observable que describe si un sistema físico tiene o no tiene cierta propiedad debe ser un operador de proyección.

Se requiere que dicho operador cumpla las siguientes propiedades^[35]:

1. Para todo conjunto (Borel-medible) $B \subset \mathbb{R}^3$ existe un operador de proyección $E(B)$ tal que $(\psi, E(B)\psi)$ es la probabilidad de encontrar la partícula en B , si ésta se encuentra en el estado $\psi, \|\psi\| = 1$. La partícula debe estar donde quiera, dado que

$$E(\mathbb{R}^3) = 1 \quad (4.26)$$

2. Si el sistema está al mismo tiempo localizado en B_1 y B_2 entonces éste está localizado en $B_1 \cap B_2$

$$E(B_1 \cap B_2) = E(B_1)E(B_2) \quad \forall B_1, B_2 \quad (4.27)$$

3. El rango de $E(B_1 \cup B_2)$ es el subespacio de estados que están localizados en $B_1 \cup B_2$, éste subespacio debe ser extendido sobre los vectores en $E(B_1)$, y aquellos en $E(B_2)$, ya que

$$E(B_1 \cup B_2) = E(B_1) + E(B_2) - E(B_1 \cap B_2) \quad \forall B_1, B_2 \quad (4.28)$$

si B_1, B_2, \dots son disjuntos, entonces

$$E(B_1 \cup B_2 \cup \dots) = \sum_{i=1}^{\infty} E(B_i) \quad (4.29)$$

4. Sea $U(a, \mathbf{R}), a \in \mathbb{R}^3, \mathbf{R} \in SO(3)$, una representación unitaria de el grupo euclidiano en el espacio de Hilbert de la partícula. Para cualquier boreliano $B \in \mathbb{R}^3$, el conjunto denotado por $\mathbf{R}B + a$ obtenido de B por una rotación \mathbf{R} y

una traslación con el vector a , entonces

$$E(\mathbf{R}B + a) = U(a, \mathbf{R})E(B)U(a, \mathbf{R})^* \quad (4.30)$$

si $E(B)$ satisface las cuatro condiciones anteriores, entonces éste es una medida espectral de un operador de posición único $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$. Además podemos definir las familias espectrales $E_{q_i}(\lambda) \equiv E(\{x \in \mathbb{R}^3/x_i \leq \lambda\})$, y los operadores

$$q_i = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE_{q_i}(\lambda), \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.31)$$

Usando (4.27) se obtiene

$$E_{q_i}(\lambda)E_{q_k}(\lambda) = E_{q_k}(\lambda)E_{q_i}(\lambda), \quad i, k = 1, 2, 3 \quad (4.32)$$

es decir; las componentes de \mathbf{q} conmutan. Por otro lado, para cualquier operador de posición con componentes que conmutan podemos definir $E(B) = \chi(x \in B)$ a través del teorema espectral. Aquí χ denota la función característica de B

Para el operador de Newton Wigner x_{NW} , la medida espectral

$$E(B) = \chi(x_{NW} \in B) = U_{FW}^{-1}\chi(x \in B)U_{FW} \quad (4.33)$$

satisface los cuatro requerimientos impuestos puesto que nos son afectados por una transformación unitaria. Si $(\psi, E(B)\psi) = 1$, entonces la partícula está localizada en B lo cual no significa que la función de onda ψ esté localizada en B

Finalmente presentamos un teorema (Newton, Wigner, Wightman) que nos aclarará y mostrará que el operador de Newton-Wigner permite la localización en una zona B

Teorema 4.3 Sea $q = (q_1, q_2, q_3)$ un conjunto de operadores autoadjuntos en $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)^4$ tal que $E(B) = \chi(q \in B)$ cumple con los requerimientos del 1 al 4 y además satisface

5. $E_q(B)$ deja invariante \mathcal{H}_{pos} , y \mathcal{H}_{neg} , es decir

$$E_q(B)\underset{neg}{\mathcal{H}_{pos}} \subset \underset{neg}{\mathcal{H}_{pos}} \quad (4.34)$$

entonces q es un operador de Newton-Wigner.

Sin embargo aunque el operador de Newton-Wigner. nos permite definir

claramente el sentido de la "localización en B " existen varios argumentos a priori en contra de la localización estricta de partículas con signo definido de la energía.

En la teoría relativista los estados de una partícula se transforman de acuerdo a una representación irreducible del grupo no-homogéneo de Lorentz con $m \geq 0$ y energía positiva.

Consideremos vectores de estado φ_t , normalizados y dependientes del tiempo, además una región fija V . Asumimos que

i) Existe un operador $T(V)$ tal que $(\varphi_t, T(V)\varphi_t)$ representa la probabilidad de encontrar la partícula en V al instante t , claramente $T(V)$ es autoadjunto y es tal que $0 \leq T(V) \leq 1$.

Se dice que una partícula está localizada en V al instante t si la probabilidad de encontrar la partícula en V es 1, se dice que no está localizada en V al tiempo t si la probabilidad es 0. Por otro lado definimos formalmente la noción de causalidad:

ii) Si al tiempo $t_0 = 0$ el estado de la partícula está localizado en V , entonces existe una constante $r = r_t$, tal que, al tiempo $t > 0$, la partícula cuando es trasladada por \vec{v} , $|\vec{v}| \geq r_t$, no está en V . Con esto podemos enunciar el siguiente teorema:

Teorema 4.4. Supóngase que se cumple la suposición de probabilidad *i)*. Entonces en la teoría relativista no existe el estado de una partícula localizado en la región finita del espacio V que satisfaga la condición de causalidad *ii)* [36]

El teorema establece que si se satisfacen ambas condiciones *i)*, *ii)* entonces es imposible preparar el estado de una partícula que está estrictamente localizado en una región finita del espacio V , en particular el operador $T(V)$ no es un proyector. Sin embargo dependiendo de las propiedades de $T(V)$ la probabilidad de localización fuera de V se podría hacer lo suficientemente pequeña, aunque, incluso si se considera el estado localizado en una región finita con colas exponenciales y acotadas fuera de la región finita, después de cierto tiempo se viola la causalidad. Por otro lado, si se insiste en localizar estrictamente al estado de la partícula en V entonces, igualmente se viola la causalidad. Un ejemplo se puede obtener al considerar el operador de posición de Newton-Wigner

Directamente se puede extender el teorema anterior para una región del

espacio tiempo arbitraria, incluso para una región sometida a un campo.

Generalizando los resultados anteriores^[37] se puede demostrar que en cualquier teoría cuántica relativista con energía positiva, y cualquier espacio-tiempo traslacionalmente covariante, la noción de localización es incompatible con el requerimiento de causalidad, lo que nos lleva tomar la decisión de considerar estados estrictamente localizados siempre y cuando abandonemos la noción de causalidad, o permitirnos asumir que el operador de energía no es acotado ni superior ni inferiormente. Se puede interpretar que se necesita infinita energía para localizar al estado de la partícula en una región finita

Sin embargo hay que diferenciar dos tipos de no localidad, la no localidad del primer tipo que surge al interpretar al vector de estado como una onda física real, y la no localidad de segundo tipo que está asociada con la obligatoriedad de la correlación entre dos mediciones espacialmente separadas.

4.4.2. PROPAGACIÓN SUPER-LUMÍNICA

Uno de los postulados de la relatividad especial de Einstein establece que la mayor velocidad a la que se pueden propagar en éste caso las partículas es la velocidad de la luz c . Por lo que cualquier solución de la ecuación de Dirac tenga energía positiva o no; no puede propagarse más rápido que la velocidad de la luz. Por otro lado en la representación de Foldy-Wouthuysen se espera que las partículas (sus funciones de onda) alcancen velocidades super-lumínicas en el espacio de Hilbert $U_{FW}\mathcal{H}$, de aquí que si tomamos el operador de Newton-Wigner (el cual es exactamente la multiplicación por x en la representación de Foldy-Wouthuysen) como un observable de posición entonces tenemos que lidiar con una propagación acausal de las partículas inicialmente localizadas; éste problema surge con todos los operadores de posición que conmutan con el signo de la energía, lo cual queda expresado en el siguiente teorema

Teorema 4.4 Sea \mathcal{H} un espacio de Hilbert. Para todo Boreliano $B \subset \mathbb{R}^3$ sea $F(B)$ un operador acotado y autoadjunto en \mathcal{H} tal que para todo $\psi \in \mathcal{H}$ con $\|\psi\| = 1$, $(\psi, F(B)\psi)$ es una medida de probabilidad con las siguientes propiedades

1. $(\psi, F(B)\psi) = 1$ y $(\phi, F(B)\phi) = 0$ implica que $(\phi, \psi) = 0$
2. Existe un operador autoadjunto \mathbf{p} (el generador de las traslaciones espaciales) tal que para todo $a \in \mathbb{R}^3$

$$(\exp(-i\mathbf{p}a)\psi, F(B+a)\exp(-i\mathbf{p}a)\psi) = (\psi, F(B)\psi) \quad (4.35)$$

Además, definimos $H = \lambda(\mathbf{p})$, donde λ es una función positiva y distinta de la función constante. Sea $\psi \in \mathcal{H}$ con $\|\psi\| = 1$, entonces para todo conjunto no vacío $B \subset \mathbb{R}^3$ y para todo $\epsilon > 0$ existe un tiempo $t \in (0, \epsilon)$ tal que

$$(\exp(-i\mathbf{H}t)\psi, F(B)\exp(-i\mathbf{H}t)\psi) = \|F(B)^{\frac{1}{2}}\exp(-i\mathbf{H}t)\psi\|^2 \neq 0 \quad (4.36)$$

4.4.3.LA DESIGUALDAD DE BELL

Los valores propios de la helicidad $\hat{\Sigma}$ son S_{z_1} por lo que se interpreta, como ya dijimos, a las soluciones de la ecuación de Dirac como soluciones con spin $\frac{1}{2}$, que es una consecuencia de la estructura de la ecuación y no una imposición *a priori* como en la teoría cuántica no relativista. En el caso (límite) de una partícula en reposo en que las cuatro funciones propias son también funciones propias de $\hat{\Sigma}_z$.

Evidentemente la proyección del spin sobre un eje dado no nos servirá para caracterizar un estado cualquiera. Se puede demostrar que si se conserva la proyección del spin en la dirección del movimiento, es decir la helicidad, puesto que como vimos, solo se conserva el momento angular $\hat{\mathbf{J}}$, evidentemente se puede escribir.

$$\frac{1}{2}\hat{\Sigma} \cdot \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} = \left(\frac{1}{2}\hat{\Sigma} + \vec{r} \wedge \vec{p}\right) \cdot \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} = \hat{\mathbf{J}} \cdot \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} = \hat{\mathbf{J}} \cdot \vec{n} \quad (4.37)$$

Los estados de una partícula con valores de helicidad determinados se llaman estados de helicidad. Físicamente, la helicidad se interpreta como la proyección del spin sobre la dirección del movimiento. Dado que $(\hat{\Sigma} \cdot \vec{n})^2 = 1$, los valores propios de $\hat{\Sigma} \cdot \vec{n}$ son ± 1 , y además al conmutar con el Hamiltoniano nos permite buscar soluciones comunes. Para el caso sencillo de ondas planas podemos considerar la ecuación de valores propios

$$\left(\frac{1}{2}\hat{\Sigma} \cdot \vec{n}\right)\psi_\eta = \eta\psi_\eta \quad (4.38)$$

y tratemos a las componentes de energía positiva y negativa por separado:

$$\psi_\eta^+ = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_\eta^- = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} \quad (4.39)$$

Reemplazando (4.39) en (4.38) obtenemos

$$\frac{1}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{n}\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} = \eta\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} \quad (4.40)$$

$$\frac{1}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{n}\begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} = \eta\begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} \quad (4.41)$$

Es conveniente expresar el vector unitario \vec{n} en término de variables angulares (θ, ϕ) , $0 < \phi < 2\pi$; $0 < \theta < \pi$,

$$\vec{n} = (\cos\phi \cdot \sin\theta, \sin\phi \cdot \sin\theta, \cos\theta) \quad (4.42)$$

la ecuación (4.40) se convierte en

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \cos\theta & \exp(-i\phi)\sin\theta \\ \exp(i\phi)\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} = \eta\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} \quad (4.43)$$

de aquí se sigue que los valores propios η son $\pm\frac{1}{2}$ los vectores propios asociados son

$$u(\eta = \frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} \exp(-i\frac{\phi}{2})\cos\frac{\theta}{2} \\ \exp(-i\frac{\phi}{2})\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \quad (4.44)$$

$$u(\eta = -\frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} -\exp(-i\frac{\phi}{2})\sin\frac{\theta}{2} \\ \exp(i\frac{\phi}{2})\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \quad (4.45)$$

del mismo modo para v^1 , y v^2 , obteniéndose un resultado similar

$$v(\eta = \frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} \exp(-i\frac{\phi}{2})\cos\frac{\theta}{2} \\ \exp(-i\frac{\phi}{2})\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \quad (4.46)$$

$$v(\eta = -\frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} -\exp(-i\frac{\phi}{2})\sin\frac{\theta}{2} \\ \exp(i\frac{\phi}{2})\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \quad (4.47)$$

Todos los estados unitarios de spin los podemos representar como

$$\chi_{\uparrow}^{\dagger} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_{\downarrow}^{\dagger} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_{\uparrow}^{-} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_{\downarrow}^{\dagger} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.48)$$

podemos expresar cada uno de los espinores (4.46) como una combinación

lineal de los vectores propios. La función total será

$$\psi_{\eta} = u^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v^1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.49)$$

sin embargo para nuestro caso consideraremos la las componentes de las partículas

$$\psi_{\eta}^+ = u^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.50)$$

expandiendo $\chi_{\downarrow} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\chi_{\uparrow} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ como una combinación lineal de $u(\eta = \frac{1}{2})$, y $u(\eta = -\frac{1}{2})$ se tiene

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \sin \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} \exp(-i\frac{\phi}{2}) \cos \frac{\theta}{2} \\ \exp(-i\frac{\phi}{2}) \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} + \cos \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} -\exp(-i\frac{\phi}{2}) \sin \frac{\theta}{2} \\ \exp(i\frac{\phi}{2}) \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \quad (4.51)$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \cos \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} \exp(-i\frac{\phi}{2}) \cos \frac{\theta}{2} \\ \exp(-i\frac{\phi}{2}) \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} - \sin \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} -\exp(-i\frac{\phi}{2}) \sin \frac{\theta}{2} \\ \exp(i\frac{\phi}{2}) \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \quad (4.52)$$

suponiendo que la primera medición resulta en $+\frac{\hbar}{2}$, la segunda medición necesariamente tiene que ser negativa. La probabilidad de que la segunda medición nos de un valor positivo será $P_{++} = \sin^2(\frac{\phi}{2})$, del mismo modo se definen las probabilidades P_{+-}, P_{-+}, P_{--} para los resultados posibles de los dos experimentos. Similares consideraciones nos llevan a

$$P_{++}(\phi) = \sin^2(\frac{\phi}{2}) \quad P_{+-}(\phi) = \cos^2(\frac{\phi}{2}) \quad (4.53)$$

$$P_{-+}(\phi) = \cos^2(\frac{\phi}{2}) \quad P_{--}(\phi) = \sin^2(\frac{\phi}{2}) \quad (4.54)$$

aquí introducimos el *coeficiente de correlación* $C(\phi)$, definido como el promedio del producto $S_{z_1} S_{z_2}$, promediado sobre un gran número de medidas de pares de partículas. Entonces

$$C(\phi) = \frac{\hbar^2}{8} (P_{++}(\phi) - P_{+-}(\phi) - P_{-+}(\phi) + P_{--}(\phi)) = -\frac{\hbar^2}{4} \cos \phi \quad (4.55)$$

Si estudiamos una teoría de variables ocultas la cual asume todos los valores posibles de las componentes del spin (solamente una puede ser determinada

a cierto tiempo) fijas, pero con valores desconocidos. Esto significa que un vector de spin "real" debería existir, en el mismo sentido de un vector de momento angular clásico debe existir, fue J.S.Bell quien dio una demostración de la imposibilidad de las teorías de variables ocultas, demostración que reproducimos a continuación:

Primero necesitamos establecer los requerimientos mínimos que una teoría de variables ocultas local y determinista debe cumplir en el caso del experimento hipotético de Bohm. Después de que las dos partículas se han separado, el sistema debería tener la propiedad de determinar por adelantado el resultado de la medición de cualquier componente del spin de cualquier partícula, esto estaría garantizado con la existencia de un vector de spin "real", en el caso más general una variable oculta no necesariamente debe corresponder a un parámetro de un modelo físico en especial.

El resultado de la medición de la componente z del spin S de la primera partícula se designa como $S_{z_1}(\lambda)$ donde los únicos valores permitidos para S_{z_1} son $\pm \frac{1}{2}\hbar$ y λ representa la variable oculta (evidentemente λ puede ser sustituida por múltiples variables ocultas, y la demostración puede ser extendida a tales variables). Una teoría de éste tipo se denomina determinista, puesto que los valores de S_{z_1} y S_{ϕ_2} quedan determinados por el valor λ . La teoría es local puesto que el resultado del experimento no depende de un experimento que determine el valor de spin de la otra partícula.

Todo par de partículas tiene un valor definido de λ , nosotros definimos la densidad de probabilidad $p(\lambda)$, que da la probabilidad de que un par tenga un valor de λ que se encuentra entre λ y $\lambda + d\lambda$ de modo que la condición de normalización debe ser

$$\int p(\lambda)d\lambda = 1 \quad (4.56)$$

Ahora consideremos un experimento que determina las componentes del spin S_{z_1} y S_{ϕ_2} de un gran número de pares. El valor medio $C''(\phi)$ de los productos $S_{z_1}S_{\phi_2}$ viene dado por

$$C''(\phi) = \int S_{z_1}(\lambda)S_{\phi_2}(\lambda)p(\lambda)d\lambda \quad (4.57)$$

Consideremos un segundo experimento de medida, así como el anterior mediremos la componente z del spin de la partícula, pero ahora el aparato de medición esta ubicado a un ángulo θ del eje z . Con esta suposición obtenemos un resultado análogo a (4.57) para el coeficiente de correlación

$$C''(\phi) - C''(\theta) = \int (S_{z_1}(\lambda)S_{\phi_2}(\lambda) - S_{z_1}(\lambda)S_{\theta_2}(\lambda))p(\lambda)d\lambda \quad (4.58)$$

Sabemos que los spines de las partículas tendrán iguales magnitudes pero direcciones opuestas, es decir

$$S_{\theta_1}(\lambda) = -S_{\phi_2}(\lambda) \quad S_{\phi_1}(\lambda) = -S_{\theta_2}(\lambda) \quad (4.59)$$

Insertando (4.59) en (4.58) obtenemos

$$\begin{aligned} C''(\phi) - C''(\theta) &= -\int S_{z_1}(\lambda)(S_{\phi_1}(\lambda) - S_{\theta_1}(\lambda))p(\lambda)d\lambda \\ &= -\int S_{z_1}(\lambda)S_{\phi_1}(\lambda)\left(1 - \frac{4}{\hbar^2}S_{\phi_1}(\lambda)S_{\theta_1}(\lambda)\right)p(\lambda)d\lambda \end{aligned} \quad (4.60)$$

donde hemos usado $\langle S_{\phi_1}(\lambda) \rangle^2 = \frac{1}{4}\hbar^2$ La magnitud de (4.60) se puede estimar como

$$|C''(\phi) - C''(\theta)| \leq \int \left| S_{z_1}(\lambda)S_{\phi_1}(\lambda)\left(1 - \frac{4}{\hbar^2}S_{\phi_1}(\lambda)S_{\theta_1}(\lambda)\right)p(\lambda) \right| d\lambda \quad (4.61)$$

Dado que $p(\lambda)$ siempre toma valores positivos y los spines siempre toman los valores $\pm \frac{1}{2}\hbar$ (Así $|S_{z_1}(\lambda)S_{\phi_1}(\lambda)| = \frac{1}{2}\hbar$) de modo que se obtiene

$$\begin{aligned} |C''(\phi) - C''(\theta)| &\leq \int \left(\frac{\hbar^2}{4} - S_{\phi_1}(\lambda)S_{\theta_1}(\lambda) \right) p(\lambda) d\lambda \\ &= \frac{\hbar^2}{4} + \int S_{\phi_1}(\lambda)S_{\theta_1}(\lambda)p(\lambda)d\lambda \end{aligned} \quad (4.62)$$

Nos vamos a restringir a los casos en los que el eje z y las direcciones dadas por ϕ y θ están en el mismo plano. Los valores medios definidos en (4.58) solamente dependen de la orientación relativa de las mediciones individuales no de la dirección absoluta del eje z . Por lo tanto podemos reemplazar en (4.62), así llegamos al resultado

$$|C''(\phi) - C''(\theta)| - C''(\theta - \phi) \leq \frac{\hbar^2}{4} \quad (4.63)$$

La desigualdad (4.63) se conoce como la *Desigualdad de Bell*. Esta es una consecuencia directa de toda teoría determinista y local de variables ocultas [38]

4.5. INTERPRETACIÓN Y CONCLUSIONES

Desde el año en que la mecánica cuántica moderna surgió (1925-1927), el formalismo matemático de ésta, que reemplazo a la teoría cuántica antigua desarrollada por Planck, Einstein, y Bohr, jamás había sido retado teóricamente ni experimentalmente hasta 1930. Sin embargo la controversia

acerca de la interpretación de la teoría, y el significado de la Matemática con respecto a la realidad subyacente en tales herramientas ha sido debatido por varias décadas, sin que se llegue a clarificar hasta la actualidad.

Claro está, que como hemos definido en las secciones anteriores, nuestro estudio se enfocará en la teoría cuántica relativista, que como puede discernirse con la ayuda de la sección 4.4, hereda los mismos problemas filosóficos y de interpretación de la mecánica cuántica no relativista, especial interés hemos puesto en las teorías de variables ocultas. Sin embargo para el efecto de interpretar los resultados obtenidos en el análisis de éste trabajo es necesario puntualizar ciertas definiciones.

Consideraremos a la mecánica cuántica susceptible de ser dividida en formalismo y su interpretación, asumiremos para el propósito de éste trabajo que el formalismo de la mecánica cuántica es correcto (analizaremos ciertas excepciones) y está muy bien soportado por la evidencia experimental, por lo tanto nos enfocaremos en la interpretación de la teoría y en particular de la interpretación de Copenhagen.

Vamos a identificar los elementos que para nuestro propósito serán los que conformen la interpretación de Copenhagen:

(a) El principio de incertidumbre de Heisenberg, que incluye la dualidad onda-partícula, el rol de las variables canónicas conjugadas, y la imposibilidad de medir simultáneamente pares de tales variables con precisión arbitraria.

(b) La interpretación estadística de Born, que incluye el significado del vector de estado, dado por la ley de probabilidad ($P = \Psi\Psi^*$), y la predictividad del formalismo solo por el comportamiento promedio de un grupo de eventos similares.

(c) El principio de complementariedad de Bohr, que incluye la totalidad del sistema microscópico y el aparato de medida macroscópico, la naturaleza complementaria de la onda y la partícula, y el carácter del principio de incertidumbre como una propiedad intrínseca de la naturaleza en lugar de una peculiaridad del proceso de medición.

(d) Identificación del vector de estado con "conocimiento del sistema" por Heisenberg: esto es; la identificación misma, como el uso de éste concepto para explicar el colapso del vector de estado, para eliminar problemas simples de no-localidad

(e) El positivismo de Heisenberg, esto incluye, dejar de debatir acerca del

significado o realidad, y enfocarnos en la discusión interpretativa exclusivamente en los observables ^[39]

Una de las más serias objeciones de Schrödinger a la interpretación semi-clásica del vector de estado (VE), es que éste vector es una cantidad compleja; puesto que usualmente en física los valores complejos sirven para indicar que tal solución no tienen significado físico, la interpretación estadística de Born es la que resuelve el problema, puesto que el VE no es una cantidad física real y por tanto un observable, de ahí que su carácter complejo es irrelevante, ya que todos los observables físicos dependen de los cuadrados del valor absoluto de las componentes del vector de estado, que siempre son reales. Claro, surge siempre la pregunta, ¿porqué la probabilidad depende del cuadrado del valor absoluto de las componentes del vector de estado y no del valor absoluto o la parte real, o alguna cantidad similar? algo de luz podemos obtener al analizar el operador inversión temporal de Wigner que no es más que la conjugación compleja, así el carácter complejo del VE es una manifestación de su estructura temporal.

La parte real del vector de estado es inverso temporal derecha, y la parte imaginaria es inverso temporal izquierda, además el inverso de la fase compleja del vector de estado invierte su sentido de tiempo y los signos de sus observables de energía y frecuencia, así la ley de probabilidad de Born nos dice implícitamente que la probabilidad de una observación particular se obtiene tomando el producto de la componente del VE con su inversa en el tiempo. Pero la interpretación de Copenhague no nos dice, porqué; es decir, ¿porqué la probabilidad debe estar compuesta por conocimiento y conocimiento invertido temporalmente (falta de conocimiento)?

Cave notar que una interpretación que dé significado físico al VE del formalismo, provee una solución al problema de la incompletitud de la teoría propuesta en la paradoja EPR.

Los problemas interpretativos esenciales, para nuestro trabajo, van más allá de la determinación o identificación física de ciertas herramientas y objetos matemáticos, es más bien tratar de relacionar el experimento con la teoría, incluso modificar el formalismo matemático si es necesario, para acomodar la realidad física a los cálculos. Es en éste contexto en que los resultados (3.22,3.23,3.24,3.25) muestran que el valor medio del spin calculado con la ayuda de la función de onda de Jhonson - Lippman, toma valores tanto positivos como negativos en función de la frecuencia (en el caso de S_x y S_y) y se puede observar claramente que los máximos relativos de las gráficas se van atenuando con el aumento de n (aumento de la frecuencia relativista), evidentemente si consideramos los valores de la energía negativos se

producirá el mismo comportamiento ($n \in \mathbb{Z}$).

Lo que estamos observando es una clara manifestación de lo que denominamos *Zitterbewegung*, aunque en éste caso es en función de la energía, que según la ecuación (4.13) el spin también se ve afectado por éste fenómeno. Sin embargo hay que recordar que el *Zitterbewegung* son fluctuaciones al rededor de un valor medio tomando como variable independiente el tiempo, es decir, necesitamos considerar la evolución temporal del operador para comprobar efectivamente estos "temblores"; hay que notar que los parámetros de Stokes fueron calculados para el sistema propio del electrón y considerando la función de onda como dependiente del tiempo, además tomamos a priori el valor $k = 1$ en la función de onda (2.85); lo que muestra que a pesar de que escogimos la función de onda para un electrón los valores de los parámetros de Stokes fluctúan al rededor de cero. (únicamente en el caso de S_x y S_y).

Lo que nos interesa analizar es el comportamiento asintótico de la polarización, puesto que el spin presenta *Zitterbewegung* y además fluctúa al rededor de polarización cero, y dado que estos dos tipos de fluctuaciones desaparecen cuando la energía tiende al infinito es claro que existe algún vinculo matemático y talvez, físico que relaciona los dos fenómenos, el primer fenómeno para el operador de spin, y el segundo para el valor medio de éste en un sistema en reposo.

Más aún, como se mencionó en la sección 4.4.2 , ligado con el *Zitterbewegung* aparece la propagación super-lumínica; para esto tomemos un caso especial. Sea $F(B)$ la medida espectral de algun operador de posición en $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{pos}$. Como hemos dicutado en la sección 4.4.1 existen estados $\psi \in \mathcal{H}$, $\|\psi\| = 1$, que satisfacen $(\psi, F(B)\psi) = \|F(B)\psi\|^2 = 1$, puesto que $F(B)$ es una proyección. Se dice que estos estados están localizados en B . Ahora tomemos un estado ψ localizado en $B_o \subset \mathbb{R}^3$. sea B otro subconjunto localizado lejos de B_o . si d es la distancia entre B y B_o entonces esperaríamos que ψ esté localizado fuera de B como mínimo al tiempo $\frac{d}{c}$ (el tiempo en que una señal de luz tarad en llegar de B a B_o). pero la probabilidad de encontrar al sistema en B al tiempo t viene dado 4.36 , si H es el Hamiltoniano del sistema. Puesto que ésta probabilidad es distinta de cero para algun t arbitrario lo suficientemente pequeño, tenemos que admitir que la probabilidad de que el sistema esté fuera de B_o es para un tiempo arbitrariamente corto distinta de cero , es decir, mcomo en el teorema 4.4 aparece la propagación super-lumínica. Lo que nos lleva a concluir que las nociones de localización definidas en 4.4.1 están en contradicción con los principios de la teoría de la relatividad

Hegerfeldt G. C. demostró^[40] que incluso si un estado está localizado aproximadamente al tiempo $t = 0$ en una región finita del espacio, con probabilidad que decae exponencial y acotadamente fuera de la región, éste estado violará la causalidad en el futuro. Es decir, si queremos mantener la noción de localización, debemos renunciar a una interpretación causal. Debemos puntualizar que el *Zitterbewegung* es el responsable de no poder definir un operador de posición en sentido análogo a la teoría cuántica no relativista, y aunque restringimos el dominio de los operadores solo al espacio de las energías positivas o negativas, el problema de localización, si bien por parte del *Zitterbewegung* (al considerar el operador de Newton - Wigner) fue eliminado, persiste en las definiciones de la teoría como tal, puesto que el teorema 4.4 no incluye de manera a priori el operador de Newton Wigner, sino más bien se establece como un problema en la postulación de las nociones de localización.

Por un lado, mantengamos las nociones de localización así tendremos que renunciar a la propagación con velocidades menores a la de la luz, lo que nos llevará a tener una violación de la desigualdad de Bell (4.63) que como podemos observar en la sección 4.4.3 fue deducida a partir de la aceptación de la existencia de variables ocultas y la localidad de la teoría. Sin embargo es necesario aclarar que la teoría cuántica relativista también debe llevar a ésta desigualdad, puesto que estamos considerando partículas aisladas de las antipartículas, es decir considerando la mitad del espinor. Ahora, los parámetros de Stokes fueron calculados considerando el espinor completo, lo que significa que la polarización en éste caso fluctúa entre estados para partículas y para antipartículas.

Lo que habría que considerar es un par partícula-antipartícula y así efectuar los cálculos ya hechos en la sección 4.4.3 lo que nos llevará a encontrar que la polarización intrínseca de éste par puede ser interpretada como una variable oculta en el experimento EPR como sugeriría De Hass Paul (2004)^[41]

Por el otro lado, mantengamos la ausencia de propagación super-lumínica lo que nos lleva a cuestionar las nociones de localización definidas en 4.4.1 llevándonos a contradecir la definición estadística de Born uno de los pilares de la interpretación de Copenhagen, puesto que por los problemas en las nociones de localización la posición ya no es un observable mecano-cuántico en el sentido usual. Ya que las nociones establecidas en 4.4.1 provienen al considerar la definición estadística de Born para un espacio de Hilbert completo es evidente que la teoría desarrollada usando la teoría de Lebesgue es incompleta, y al parecer la paradoja EPR se mantiene vigente en algún

sentido hasta no dar una interpretación física al VE.

A lo largo de la Historia han existido varias interpretaciones que ayudan a aclarar los conceptos en mecánica cuántica, sin embargo, y por el momento en la historia en el que nos encontramos, tomamos como interpretación la propuesta por Wheeler y Feynman. Aunque el objetivo de éste trabajo no es desarrollar completamente ésta interpretación, esbozaremos sus fundamentos para la teoría cuántica relativista.

El elemento básico de la interpretación transaccional, es la emisión-absorción de una transacción, a través del intercambio de ondas avanzadas y retardadas, como fue descrita en principio por Wheeler y Feynman. Las ondas avanzadas son soluciones de la ecuación de onda electromagnética y otras ecuaciones de onda similares que contienen solo la segunda derivada en el tiempo. Las ondas avanzadas tienen valores propios característicos de energía y frecuencia negativas y se propagan en la dirección negativa del tiempo las soluciones avanzadas de la ecuación de onda electromagnética usualmente no se toman en cuenta puesto que no tienen su contraparte en el mundo físico.

Wheeler y Feynman. postularon que era posible que un electrón interactuara con las ondas avanzadas enviadas por otros electrones, los cuales absorberían en el futuro la radiación retardada. Así, este modelo puede ser utilizado para la emisión y absorción, ya no de ondas, sino de partículas masivas como los electrones. El único requerimiento para éste modelo es que las ecuaciones de onda que describen las partículas de interés, tengan soluciones retardadas y adelantadas. En el caso de la ecuación de Schrödinger (recordando que ésta ecuación no es correcta, puesto que no es invariante relativísticamente) solo posee soluciones retardadas, sin embargo, se suele tomar una combinación lineal de la solución retardada y su conjugada.

En el caso de la ecuación de Dirac podemos ver que de acuerdo a la sección 1.4 (La transformación del Foldy-Wouthuysen) ésta ecuación corresponde a dos ecuaciones de Klein Gordon elevadas a la potencia $\frac{1}{2}$, que al tener segunda derivada temporal poseen soluciones retardadas y avanzadas; y la ecuación de Schrödinger puede ser interpretada como el caso limite de una ecuación de onda relativísticamente invariante cuando la velocidad de la luz tiende al infinito.

Es interesante recalcar el hecho de que la ecuación de Dirac corresponde a dos ecuaciones de Klein-Gordon elevadas a la potencia $\frac{1}{2}$, dado que la ecuación de Klein-Gordon sirve para estudiar partículas de spin cero, aunque

en general la ecuación de Dirac en éste contexto se usa para el estudio de partículas de spin $\frac{1}{2}$. Asumimos en éste caso que la propiedad supersimétrica del Hamiltoniano de Dirac permite no solo establecer una transformación que lleva de fermiones en bosones (transformación de Foldy-Wouthuysen) sino una transformación que nos permite establecer matemáticamente una interpretación clara que maneja tanto partículas como antipartículas.

El aporte principal que hacemos es mostrar como la supersimetría, aunque en un sentido elemental, no solo tiene que ver con las transformaciones entre bosones y fermiones, sino también con transformaciones entre partículas y antipartículas, aunque físicamente no está claro como se da el intercambio entre estados de energía positiva y estados de energía negativa, matemáticamente el comportamiento no es ajeno, incluso cuando restringimos el espacio de energías solo al de positivas o al de negativas. De aquí que si queremos eliminar estos problemas debemos enfocarnos en las nociones de localización, que como sabemos dan origen a la teoría de la medida de Lebesgue, puesto que el completado del espacio de funciones con derivada continua es el espacio de las funciones de Lebesgue cuadrado integrables. Quedan planteadas las preguntas ¿se puede generalizar aún más la teoría de Lebesgue? o más bien ¿la interpretación transaccional deja de lado algunos aspectos importantes sin incluir?

Existe también otra implicación de la teoría cuántica, que es la imposición de una nueva relación de incertidumbre como en (a) puesto que la imposición de la velocidad de la luz como límite nos lleva a $\Delta p = \frac{\hbar}{c\Delta t}$, algo parecido sucede con la posición, lo que nos lleva a invalidar (b), pero cuando en la electrodinámica cuántica las magnitudes de campo no se representan por funciones puntuales, sino por funciones en una zona del espacio tiempo, desaparece la discrepancia entre los límites impuestos por el principio de incertidumbre relativista y la posibilidad física de la medición. El VE no puede ser identificado simplemente como el que lleva la probabilidad en el dominio relativista. La interpretación (b) debe ser generalizada para el caso relativista.

Estos elementos ínfimos de la interpretación transaccional nos ayudan a ver que si las antipartículas se interpretan como partículas viajando en el eje negativo del tiempo, las soluciones avanzadas de las ecuaciones podrían ser identificadas con tales antipartículas y así bajo el marco de esta interpretación interactuar partículas con antipartículas tanto en el pasado como en el futuro y considerar a la polarización de un par partícula-antipartícula como una variable oculta en la teoría de Bell, claro está, aceptando la propagación super-lumínica.

Quedaría por analizar el comportamiento de dos partículas polarizadas (una partícula y una antipartícula) en el marco de la paradoja de Bell, evidentemente sería imposible efectuar un experimento del tipo Aspect para verificar tal teoría, en lo que si nos ayudaría sería en analizar el comportamiento del tiempo y como interaccionan sucesos en el pasado con sucesos en el presente. Finalmente quedaría por estudiar el comportamiento de una partícula relativista en presencia de un campo gravitatorio ultra- fuerte, en el sentido de el análisis del tiempo como magnitud física, dado que en el Universo si se pueden encontrar tales campos gravitatorios.

Todavía queda sin aclarar la forma en que la supersimetría modifica el VE, y más aún, si con la interpretación que estamos dando podemos efectuar un análisis ya no de una sola partícula sino de un conjunto de partículas, y también efectuar un tratamiento estadístico para poder determinar en que instante la mecánica cuántica pasa a ser estocástica para luego convertirse en mecánica clásica. En futuros trabajos sería indispensable efectuar tales aproximaciones y consideraciones.

REFERENCIAS

- [1] Walter Greiner, Relativistic Quantum Mechanics, wave equations. Third edition. Pag 11-12

- [2] Para demostraciones más detalladas ver por ejemplo:Walter Greiner, Relativistic Quantum Mechanics, wave equations. Third edition

- [3] Ibid.

- [4] James D. Bjorken. Sidney D Drell, Relativistic Quantum Mechanics, 1964. Pag 6-9

- [5] Walter Greiner, Relativistic Quantum Mechanics, wave equations. Third edition. Pag 100-103

- [6] Edward Prugovecky, Quantum Mechanics in Hilbert Space (1981), Pag 335

- [7] Ibid. Pag 241-242

- [8] Josef Jouch, Foundations of Quantum Mechanics, 1968 Pag 37

- [9] Walter Rudin, Functional Analysis (1973) Pag.35

- [10]Bernd Thaller, The Dirac equation (1992) Pag.8

- [11] Ibid.Pag 8-9

- [12] Ibid Pag.9-10
- [13] Ibid. Pag 39-41
- [14] Ibid. Pag 9
- [15] Josef Jouch, Foundations of Quantum Mechanics, 1968 Pag 41
- [16] Walter Rudin, Functional Analysis (1973) Pag.198-199
- [17] The Dirac Equation, THALLER Bernd, Springer - Verlag 1992, Pag 142
- [18] G.H. Dumitrescu, Romanian Reports in Physics, Vol 56, N° 2, Pag 170-177, 2004
- [19] Exact Solution of relativistic wave equations, BAGROV V.G, GITMAN D.M, Kluwer academic publishers, 1990
- [20] Pavlov G.G and Sibanov I.A., Astron. Zh. 55,373,1978
- [21] Ventura J. Astrophysical Journal, 233,L125, 1979
- [22] McMaster William, American Journal of Physics, 22, 6, 1954
- [23] Angel J.R.P, Mechanisms that produces linear and circular polarization, In: Planets, stars and nebulae studied with photopolarimetry, Edited by T.Gehrels, Univ. of Arizona Press, Tucson, 1974
- [24] Hosegave H; Hovard R., Journal of Phys. Chem. sol; 1961, 21,179
- [25] Pavlov G.G. y Yakovlev D. G, Astrofísica, 1977,13,173
- [26] Pavlov G. G. y Shabanov A. Astronomical Journal , 1978, 55, 373
- [27] Kemp J.C., Astrophysical Journal, 1970, 162, 169
- [28] Shipman H.L, Astrophysical Journal, 1971, 167, 165
- [29] Pringle J.E. and Rces M.J , Astron. astrophysics, 1972, 21, 1
- [30] Lightman A.P; Rees M. J, Shapiro S.L., Summer school on physics and astrophysics of Newton stars an Black Holes, Varemna, Italy, 1975

- Tsuruta S, Some observational tests for possible Models Her X -1, 1974
- [31] Pavlov G. G. et al *Astronomicheskii Zhurnal*; 1978, 55, 79
- [32] Shulov O.S; *Astrofísica*, 1975, 163
- [33] Mitofanov I. G., Letter to *Astronomicheskii Zhurnal*; 1977, 3, 391
- [34] Pavlov G. G. et al *Astronomicheskii Zhurnal*; 1975, 52, 956
- [35] THALLER Bernd, *The Dirac Equation*, Springer - Verlag 1992.
- [36] Hegerfeldt Gerhard C; Remark on causality and particle localization; *Physical Review D*, Vol 10, N° 10, 15 November 1974
- [37] Perez J. Fernando, Wilde Ivan F; Localization and causality in relativistic quantum mechanics; *Physical Review D*, Vol 16, N° 2, 15 July 1977
- [38] Greiner Walter, *Quantum Mechanics: An introduction* ,Fourth edition (2000) Pag. 462-468
- [39] Cramer John; The transactional interpretation of quantum mechanics; *Reviews of Modern Physics*, Vol 58, No 3, July 1986
- [40] Hegerfeldt Gerhard C; Violation of Causality in Relativistic Quantum Theory?; *Physical Review Letters*, Vol 54, N° 22, 3 June 1985
- [41] de Hass Paul J. Dirac's electron polarization can be interpreted as the hidden variable in the EPR experiment, April, 26, 2004

BIBLIOGRAFÍA

THALLER Bernd, The Dirac Equation, , Springer - Verlag 1992

Relativistic Quantum Mechanics, Wave equations, GREINER Walter, Springer-Verlag tercera edición, 2000

Quantum electrodynamics of strong fields, GREINER Walter, MÜLLER Berndt, Johann Rafelski, Springer – Verlag, 1985

Quantum Mechanics, an introduction. GREINER Walter, Springer – Verlag, cuarta edición, 2000

Quantum Mechanics, Vol I, Vol 2. GALINDO Alberto, PASCUAL Pedro, Springer-Verlag 1991

The principles of quantum mechanics, DIRAC P.A.M, Oxford University Press, Cuarta edición, 1958

Atoms and molecules in strong external fields, Edited by, SCHMELCHER P, SCHWEIZER W, Kluwer academic publishers, 2002

Foundations of quantum mechanics, JAUCH Josef M. Adisson-Wesley 1968

Exact Solution of relativistic wave equations, BAGROV V.G, GITMAN D.M, Kluwer academic publishers, 1990

Quantum Mechanics in Hilbert space, PRUGOVECKY Eduard, Academic

Press Inc. 1971

Measure, Lebesgue Integrals, and Hilbert Space, KOLMOGOROV, A.N.,
FOMIN S.V. Academic Press, 1961

Functional Analysis, RUDIN Walter, McGraw Hill book company, 1973

Real and complex Analysis, RUDIN Walter, McGraw Hill book company, 1970

G.H. Dumitrescu, Romanian Reports in Physics, Vol 56, N° 2, Pag 170-177,
2004

Perez, F. Wilde, I., Physical Review D 16, 315 (1977)

Hegerfeldt Gerhard, Physical Review D10, 3320 (1974)

Hegerfeldt Gerhard, Physical Review Letters, Vol 54,N° 22 ,2395, (1985)