

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS

MÉTODOS GENERALIZADOS DE NEWTON PARA LA
SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL FLUJO DE CASSON EN UNA
TUBERÍA.

PROYECTO DE TITULACIÓN PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL
TÍTULO DE MATEMÁTICO

POR:

William David Bastidas Maldonado
wdbastidas@gmail.com

DIRIGIDO POR:

Dr. Sergio Alejandro González Andrade
sergio.gonzalez@epn.edu.ec

2 0 1 4

Declaración

Yo, William David Bastidas Maldonado, declaro que el trabajo aquí descrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

La Escuela Politécnica Nacional, puede hacer uso de los derechos correspondientes a este trabajo, según lo establecido por la Ley de Propiedad Intelectual, por su Reglamento y por la normatividad institucional vigente.

William David Bastidas Maldonado

Certificación

Certifico que el presente trabajo fue desarrollado por William David Bastidas Maldonado bajo mi supervisión.

Dr. Sergio Alejandro González Andrade
Director del Proyecto

Agradecimientos

Primero quiero agradecer a Sergio por su paciencia y ayuda, a mis padres Wilson y Gerardina por su comprensión, estímulo, apoyo y amor, a mi hermano Daniel por ser la silueta en mi horizonte. A mis compañeros Lady, Patricia y Livino por su compañía en este camino y a Diana, por lo que es y significa en mi vida.

Dedicatoria

A mi madre, por hacer de mi lo que soy.

Índice general

Declaración	I
Certificación	III
Agradecimientos	V
Dedicatoria	VII
Resumen	1
Abstract	3
Introducción	5
Capítulo 1. Resultados preliminares	7
1. Resultados sobre análisis funcional	7
2. Espacios funcionales	8
3. Diferenciabilidad	10
4. Análisis convexo	11
5. Método de Newton Generalizado	13
Capítulo 2. Introducción a la mecánica de fluidos	15
1. Cinemática	15
2. Ecuaciones gobernantes del movimiento de fluidos	20
3. Fluidos viscosos no lineales	24
4. Fluidos con límite elástico	25
Capítulo 3. Modelo de Casson: Flujo laminar en una tubería	27
1. Modelo de Casson	27
2. Flujo laminar en una tubería	27
3. Procedimiento de regularización	32
Capítulo 4. Simulación numérica del flujo	39
1. Discretización del sistema de optimalidad	39
2. Paso de Newton aproximado	41
3. Algoritmo Globalizado Tipo Newton.	48
Capítulo 5. Resultados Numéricos	51
1. Flujo laminar al interior de una tubería de sección cuadrada	51
2. Comparación GSNN con el método de Lagrangeanos extendidos.	55
3. Comportamiento del modelo de Bingham	60
Capítulo 6. Conclusiones	63
Capítulo 7. Recomendaciones	65
Bibliografía	67

Resumen

En esta tesis aplicamos métodos generalizados de Newton para la resolución numérica del flujo laminar y estacionario de un fluido de Casson en tuberías de sección constante, circular ó cuadrada. Nuestro principal objetivo es desarrollar un algoritmo basado en los métodos generalizados de Newton que mejore la velocidad de convergencia de la aproximación hacia la solución del problema, para lo cual iniciamos estudiando las ecuaciones constitutivas que rigen el flujo de un fluido de Casson y mostramos que la solución del sistema satisface una desigualdad variacional que es condición necesaria de un problema de optimización de un funcional no diferenciable. Debido a un mal condicionamiento en el sistema original, se propone una regularización local continua del tipo Huber y caracterizamos las soluciones de los problemas regularizados a través de un sistema que involucra una ecuación diferencial y una ecuación de complementariedad. Luego se muestra la convergencia de las soluciones de la familia de problemas regularizados hacia las soluciones del problema original en los espacios respectivos. A continuación se construye un algoritmo globalizado basado en los métodos generalizados de Newton y se estudia sus propiedades de convergencia. Finalmente, se realiza una detallada experimentación numérica.

Abstract

In this thesis, we apply semismooth Newton methods for the numerical resolution of the steady laminar flows of a Casson's fluid in a pipe of square or circular cross section. Our main goal is to improve the approximation's convergence rate, because of that we study the variational inequation involved as a necessary condition of an optimization problem of a non differentiable functional. As our problem is bad condicionated we proposed a local smooth Huber-type regularization and characterized the solutions of our regularized problems through of a system of equations involving a variational differential equation and a complementary function. Then, we proved the convergence of the solutions of our regularized problems toward the solution of original sistem. After that, we construct a globalized algorithm based in the semismooth Newton methods and study its convergence properties. Finally, we developed numerical experiments.

Introducción

Una clase importante de fluidos no-Newtonianos son los denominados fluidos visco-plásticos. Este tipo de fluidos presentan una deformación discontinua hasta que cierto nivel de esfuerzo, conocido como límite elástico, es alcanzado. Por tanto, sus ecuaciones constitutivas se basan en la suposición de la existencia de tal límite. Una consecuencia directa de esta propiedad es que el flujo está dividido en dos regiones: la zona rígida y la zona no rígida.

En la industria, las ecuaciones constitutivas de los fluidos visco-plásticos juegan un papel importante, ya que fluidos como el chocolate fundido, lodos de aguas residuales, emulsiones, soluciones de polímero, polímeros fundidos y suspensiones de pigmentos en barnices litográficos utilizados para la preparación de tintas de impresión y las suspensiones de silicio presentan características que pueden ser modeladas a través de estas ecuaciones [17, 34].

Los modelos comúnmente utilizados para simular estos tipos de fluidos son los modelos de Bingham, Casson y Herschel-Bulkley, de los cuales el modelo de Bingham ha sido más ampliamente estudiado [2, 13, 32, 20, 22, 12, 33].

Estudios recientes muestran, que el fluido de Casson describe de manera muy precisa las características del flujo de la sangre a velocidades de cizalla bajas y flujos en venas pequeñas. Se ha demostrado además, que los flujos de Casson pueden ser aplicables en el desarrollo de modelos de oxigenadores de aire y hemodiálisis [4, y la bibliografía citada ahí].

Aún cuando son muchos los problemas relacionados con el modelo de Casson, en esta tesis nos enfocamos en el flujo laminar y estacionario en tuberías de sección cuadrada y circular. Las características del flujo de un fluido de Casson en tuberías fueron investigadas en primera instancia por Oka [24]. Él consideró un modelo generalizado para flujos de fluidos no-Newtonianos en tuberías de los cuales el modelo del fluido de Casson fue deducido como un caso especial. Los detalles del flujo estacionario, completamente desarrollado y laminar de un Fluido de Casson es descrito en [8].

El principal objetivo de esta tesis es desarrollar un algoritmo de segundo orden, eficiente, para la resolución numérica del flujo laminar y estacionario de un fluido de Casson en una tubería de sección constante, cuadrada y circular, para lo cual se sigue un enfoque variacional, dado que el sistema de ecuaciones constitutivas que rige este tipo de movimiento deriva en una desigualdad variacional, la cual es condición necesaria de un problema de optimalidad no restringido. Como el sistema de ecuaciones constitutivas original está mal condicionado, se propone una regularización local del tipo Huber y se obtiene una familia de problemas regularizados. A continuación se caracteriza las soluciones de dichos problemas regularizados a través de un sistema que incluye una ecuación diferencial y una ecuación de complementariedad, y se muestra la convergencia de las soluciones de la familia de problemas regularizados hacia la solución del problema original. Finalmente se plantea un algoritmo basado en los métodos generalizados de Newton.

Gracias a la regularización local del tipo Huber propuesta, se obtiene un sistema a ser resuelto en cada iteración del método, ésta es una propiedad importante, la cual implica un ahorro computacional mostrada para el caso de Bingham en [5].

Esta tesis está organizada de la siguiente manera. En el Capítulo 1 se presentan algunos resultados que se utilizan con frecuencia en esta tesis. En el Capítulo 2 se lleva a cabo una breve revisión de la mecánica de cuerpos continuos. En el Capítulo 3 se discute algunos aspectos importantes del flujo de un fluido de Casson y se introduce la noción de flujo laminar y estacionario en una tubería. Además se adimensiona el sistema que caracteriza el flujo, se lo formula variacionalmente y se muestra que la inecuación variacional resultante es una condición necesaria de un problema de optimalidad no restringido. Dado que el sistema está mal condicionado, se introduce una familia de problemas regularizados localmente, se caracteriza la solución del sistema regularizado y se muestra la convergencia hacia las soluciones de nuestro sistema original. En el Capítulo 4 se discute la discretización del sistema utilizando elementos finitos y se construye un método generalizado de Newton globalizado. Además, se analizan las propiedades de convergencia de este algoritmo. En el Capítulo 5 se presentan algunos resultados numéricos que confirman las propiedades cualitativas del método. Finalmente en el Capítulo 6 y 7 se presentan las principales conclusiones y recomendaciones de esta tesis, respectivamente.

Resultados preliminares

En este capítulo introducimos algunas definiciones y resultados sobre el análisis convexo, diferenciabilidad generalizada y métodos generalizados de Newton utilizados en la presente tesis. Además discutimos brevemente las técnicas implementadas en este trabajo.

Un espacio afín tridimensional real, es una terna $(\mathcal{E}^3, E^3, \Phi)$ formada por un conjunto \mathcal{E}^3 , un espacio vectorial real E^3 y una aplicación $\Phi : \mathcal{E}^3 \times \mathcal{E}^3 \rightarrow E^3$ que cumple

- $\forall P \in \mathcal{E}^3$ y $\forall \vec{u} \in E^3$ existe un único $Q \in \mathcal{E}^3$ tal que $\Phi(P, Q) = \vec{u}$.
- $\Phi(P, Q) + \Phi(Q, R) = \Phi(P, R)$ para todo $P, Q, R \in \mathcal{E}^3$.

A los elementos del conjunto \mathcal{E}^3 los denominaremos puntos y diremos que E^3 es el espacio afín asociado a $(\mathcal{E}^3, E^3, \Phi)$.

Notaremos por \vec{a} a los elementos de un espacio Euclídeo. Dados los vectores $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)^T$ y $\vec{b} = (b_1, \dots, b_n)^T$ de \mathbb{R}^n , el producto interno está definido por

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle := \sum_{i=1}^n a_i b_i,$$

y la norma asociada está definida por $|\vec{a}| := \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle^{1/2}$.

Dadas dos matrices, $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ en $\mathbb{R}^{N \times N}$, definimos el producto vectorial de Hadamard por

$$A \star B := (a_{ij} b_{ij}).$$

1. Resultados sobre análisis funcional

Sean H_1, H_2 dos espacios de Hilbert, notamos respectivamente por $(\cdot, \cdot)_{H_1}, \|\cdot\|_{H_1}$ el producto interno y su norma asociada en H_1 . Notamos además por $\mathcal{L}(H_1, H_2)$, el espacio de todos los funcionales lineales y acotados de H_1 a H_2 . Este espacio con la norma

$$\|F\|_{\mathcal{L}(H_1, H_2)} := \sup_{v \in H_1, \|v\|_{H_1}=1} \|Fv\|_{H_2}, \forall F \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$$

es un espacio de Banach si H_2 es de Banach [13, 19, Teo. 2.10-2].

Definición 1.1. Sea H un espacio de Hilbert. El espacio $\mathcal{L}(H, \mathbb{R})$ es llamado espacio dual de H y es notado por H^* . Notamos por $\langle F, v \rangle_{H^*, H}$ el producto en dualidad con $F \in H^*$ y $v \in H$.

Teorema 1.1. (Riesz). Sea H un espacio de Hilbert con dual H^* . Dado un F en H^* , existe un único $f \in H$ tal que

$$\langle F, v \rangle_{H^*, H} = (f, v)_H \forall v \in H.$$

Además se verifica

$$\|f\|_H = \|F\|_{H^*}.$$

DEMOSTRACIÓN. Ver [3, Teo. V.5, pag. 81] □

Definición 1.2. Sea V un espacio vectorial normado, una sucesión $(v_n) \subset V$ se dice débilmente convergente hacia $v \in V$ si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f, v_n \rangle_{V^*, V} = \langle f, v \rangle_{V^*, V} \forall f \in V^*.$$

Utilizaremos la notación $v_n \rightharpoonup v$, para señalar la convergencia débil de la sucesión (v_n) hacia v .

Sea H un espacio de Hilbert, gracias al teorema de Riesz, una sucesión (v_n) converge débilmente a $v \in H$ si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n, x)_H = (v, x)_H, \forall x \in H.$$

Teorema 1.2. *Sea H un espacio de Hilbert y sea $(v_n) \subset H$*

- i) *Si $v_n \rightharpoonup v$, entonces existe una constante $K > 0$ tal que $\|v_n\| \leq K$ y $\|v\|_H \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|v_n\|_H$.*
- ii) *Si $v_n \rightarrow v$ fuertemente, entonces $v_n \rightharpoonup v$.*
- iii) *Sea $C > 0$ una constante independiente de v_n , tal que $\|v_n\| \leq C$. Entonces existe un $v \in H$ y una subsucesión (v_{n_k}) tal que $v_n \rightharpoonup v$ en H , cuando $k \rightarrow \infty$*

DEMOSTRACIÓN. Ver [3, Prop. III.5 y Teorema III.28] □

2. Espacios funcionales

En esta sección introduciremos los espacios funcionales y algunos resultados importantes utilizados en este trabajo. Para un estudio detallado, recomendamos [3].

2.1. Definición y propiedades elementales de los espacios L^p . En esta sección definiremos los espacios L^p y estudiaremos algunas de sus propiedades básicas.

En todo lo que sigue Ω designa un subconjunto abierto de \mathbb{R}^2 con frontera de Lipschitz Γ .

Definición 1.3. Sea $1 \leq p < \infty$, se define

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es medible y } \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty\}.$$

Este espacio está dotado de la norma

$$\|f\|_{L^p} = \left[\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right]^{1/p}.$$

Definición 1.4. Se define

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es medible y existe una constante } C > 0 \text{ tal que } |f(x)| < C \text{ en casi todo punto de } \Omega\}.$$

Este espacio está dotado de la norma

$$\|f\|_{L^\infty} := \inf\{C : |u(x)| \leq C \text{ en casi todo punto de } \Omega\}.$$

$L^p(\Omega)$ no es un espacio funcional, es decir, sus elementos no son funciones, es un espacio cuyos elementos son clases de equivalencia de funciones, y dos funciones pertenecen a la misma clase, si éstas coinciden en casi todo punto (c.t.p.) de Ω . En otras palabras, tenemos la siguiente relación de equivalencia

$$f \sim g \text{ si y solo si } f(x) = g(x), \text{ c.t.p. en } \Omega.$$

Esta relación de equivalencia divide $L^p(\Omega)$ en clases de equivalencia, y cada clase consiste en todas las funciones que son equivalentes a una dada. Sin embargo, es usual relegar este hecho a un entendimiento tácito y considerar $L^p(\Omega)$ como un espacio de funciones [13, Cap. 1, pag. 17]. En esta tesis seguiremos este razonamiento.

Lema 1.3. Sea $f \in L^1(\Omega)$ tal que $\int_{\Omega} f v dx = 0$, para todo $v \in C_0(\Omega)$. Entonces, se tiene que $f = 0$ ctp en Ω .

DEMOSTRACIÓN. Ver [3, Lem. IV.2] □

Teorema 1.4. *El espacio $L^p(\Omega)$ es un espacio de Banach para $1 \leq p \leq \infty$, es reflexivo para $1 < p < \infty$ y separable para $1 \leq p < \infty$. Además, si $1 < p < \infty$, el espacio dual de $L^p(\Omega)$ está dado por $L^{p'}(\Omega)$, donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. El espacio dual de $L^1(\Omega)$ es $L^\infty(\Omega)$ y el espacio dual de $L^\infty(\Omega)$ contiene estrictamente a $L^1(\Omega)$.*

DEMOSTRACIÓN. Ver [3, Sec. IV.3., pag. 59-66] □

Para $L^2(\Omega)$ se define el producto interno de la siguiente manera:

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} := \int_{\Omega} u(x)v(x)dx,$$

obteniéndose una estructura de espacio de Hilbert.

Teorema 1.5. (Hölder). *Sea $u \in L^p(\Omega)$ y $v \in L^{p'}(\Omega)$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Entonces $uv \in L^1(\Omega)$ y*

$$\int_{\Omega} |u(x)v(x)|dx \leq \|u\|_{L^p} \|v\|_{L^{p'}}.$$

DEMOSTRACIÓN. Ver [3, Teo. IV.6, pag. 56] □

De aquí en adelante usaremos la notación $\mathbf{L}^p(\Omega) := L^p(\Omega) \times L^p(\Omega) \times \cdots \times L^p(\Omega)$. Estos espacios están dotados de la norma $\|\cdot\|_{\mathbf{L}^p}$, que para el caso de \mathbf{L}^2 es inducida por el producto escalar

$$(u, v)_{\mathbf{L}^2} := \int_{\Omega} \langle u(x), v(x) \rangle dx, \forall u, v \in \mathbf{L}^2(\Omega)$$

2.2. Espacios de Sobolev. En esta sección estudiaremos algunos resultados importantes sobre los espacios de Sobolev que se utilizarán en los siguientes capítulos. Para empezar, definiremos estos espacios.

Definición 1.5. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ con frontera regular Γ y sea $p \in \mathbb{R}$ con $1 \leq p \leq \infty$. El espacio de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ está definido como:

$$W^{1,p}(\Omega) := \left\{ u \in L^p(\Omega) : \begin{array}{l} \text{Existe } g_1, \dots, g_n \in L^p(\Omega) \text{ tal que} \\ \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} g_i \varphi dx, \text{ para todo } \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \\ \text{para todo } i = 1, \dots, n \end{array} \right\}$$

Se nota $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$.

Para $u \in W^{1,p}(\Omega)$, se tiene que

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} := g_i \text{ y } \nabla u := \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$$

Esta definición tiene sentido, ya que g_i es única [13, 3].

Estos espacios están dotados con la norma

$$\|u\|_{W^{1,p}} := \left(\|u\|_{L^p} + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p} \right)^{1/p}$$

Teorema 1.6. *El espacio $W^{1,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach para $1 \leq p \leq \infty$, es reflexivo para $1 < p < \infty$ y separable para $1 \leq p < \infty$.*

DEMOSTRACIÓN. Ver [3, Prop. IX.1, pag. 150] □

Definición 1.6. Sea $1 \leq p < \infty$. $W_0^{1,p}(\Omega)$ denota la clausura de $C_0^\infty(\Omega)$ en $W^{1,p}(\Omega)$. Además, denotamos $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$.

El espacio $W_0^{1,p}(\Omega)$, dotado con la norma inducida por $W^{1,p}(\Omega)$, es un espacio de Banach separable. Es también reflexivo si $1 < p < \infty$. $H_0^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con el producto escalar inducido por $H^1(\Omega)$. Además es posible mostrar que si Ω es suficientemente regular, el espacio $H_0^1(\Omega)$ puede ser representado por

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ en } \Gamma\}.$$

Proposición 1.7. *Todo espacio de Hilbert es uniformemente convexo y por tanto reflexivo.*

DEMOSTRACIÓN. Ver [3, Proposición V. 1] □

Teorema 1.8. *(Desigualdad de Poincaré). Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto con frontera de Lipschitz, y sea $1 \leq p < \infty$, entonces existe una constante C , dependiente de Ω , tal que*

$$\|u\|_{L^p} \leq C \|\nabla u\|_{L^p}, \text{ para todo } u \in W_0^{m,1,p}(\Omega).$$

La desigualdad de Poincaré implica que en $W_0^{1,p}(\Omega)$ se cumple la equivalencia

$$\|u\|_{W_0^{1,p}} := \|\nabla u\|_{L^p}.$$

En $H_0^1(\Omega)$ la expresión

$$\int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle dx,$$

es un producto escalar el cual induce la norma $\|\nabla \cdot\|_{L^2}$, la cual es equivalente a la norma $\|\cdot\|_{H^1}$. En esta tesis utilizaremos este resultado.

En adelante, usaremos la notación $\mathbf{H}^1(\Omega) := H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times \cdots \times H^1(\Omega)$. Estos espacios están dotados de la norma producto usual, $\|\cdot\|_{\mathbf{H}^1}$.

3. Diferenciabilidad

En esta sección introduciremos las definiciones de algunas derivadas necesarias para nuestro estudio. Adicionalmente, introduciremos el concepto de derivada de Newton, la cual es esencial para el desarrollo de los métodos generalizados de Newton.

Definición 1.7. Sean V y W dos espacios normados. Se dice que una función $F : V \rightarrow W$ es Lipschitz continua si existe una constante positiva L tal que

$$\|F(v_1) - F(v_2)\|_W \leq L \|v_1 - v_2\|_V, \text{ para todo } v_1, v_2 \in V.$$

Definición 1.8. Sean X e Y dos espacios normados. Sean adicionalmente $D \subset X$ un conjunto abierto no vacío y $f : D \rightarrow Y$ una función dada.

- Si, para $x \in D$ y $h \in X$, el límite

$$f'(x)(h) := \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{f(x + \alpha h) - f(x)}{\alpha}$$

existe, se dice que la función es direccionalmente diferenciable. Además, $f'(x)(h)$ es llamada la derivada direccional de f en x , en dirección h .

- Si la derivada direccional $f'(x)(h)$ existe para todo $h \in X$ y $f'(x)$ es un operador continuo de X a Y , entonces se dice que f es Gâteaux diferenciable. Además, si $f'(x)$ es lineal, es llamada derivada de Gâteaux de f en x .

Definición 1.9. Sean X e Y dos espacios normados y sea $f : X \rightarrow Y$ una función continua definida en un conjunto abierto $A \subset X$. Se dice que f es Fréchet diferenciable en $x \in A$ si existe un operador lineal y acotado $f'(x) \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que

$$\|f(x+h) - f(x) - f'(x)(h)\|_Y = o(\|h\|_X).$$

$f'(x)$ es llamada diferencial de Fréchet de f en x .

Definición 1.10. Sean X e Y dos espacios de Banach. Sean adicionalmente $D \subset X$ un conjunto no vacío y $f : D \rightarrow Y$ una función dada. f es llamada Newton diferenciable en D si existe una familia de funciones $G : D \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ tal que

$$\|f(x+h) - f(x) - G_f(x+h)h\|_Y = o(\|h\|_X),$$

para algún $G_f \in G$ y todo $x \in D$. Llamaremos a G_f , derivada de Newton para f en D .

De aquí en adelante, diremos que una función f es semisuave en D , si es Newton diferenciable en D .

Si comparamos la definición de derivada de Newton (Definición 1.10) con la definición de derivada de Fréchet (Definición (1.9)) varias diferencias aparecen. Primero, la derivada de Fréchet es única, mientras que la función $G_f \in G$ no es necesariamente única para ser derivada de Newton. Además, la diferencial de Fréchet f' está definida sobre x , y la diferencial de Newton está definida sobre $x+h$. Gracias a esto, varias funciones como máx: $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, son Newton diferenciables aún cuando no son Fréchet diferenciables. En el Capítulo 4, analizamos la semisuavidad de funciones definidas en el espacio Euclídeo, en otras palabras, de funciones del tipo $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. A continuación, presentamos la regla de la cadena para funciones diferenciables en el sentido de Newton.

Teorema 1.9. Sean X, Y y Z tres espacios de Banach y sea $B : X \rightarrow Y$ un mapeo afín definido por $Bx = Ax + b$, con $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ y $b \in Y$. Además, asumimos que $F : D \subset Y \rightarrow Z$ es Newton diferenciable en un subconjunto abierto D , con derivada de Newton G . Si $B^{-1}(D)$ es no vacío, entonces $F \circ B$ es Newton diferenciable en $B^{-1}(D)$ con derivada generalizada dada por $G(Ax + b)A \in \mathcal{L}(X, Z)$

DEMOSTRACIÓN. Ver [13, Cap. 1, pag 24 y la bibliografía citada ahí] □

Ejemplo 1.10. Sea $\vec{e} \in \mathbb{R}^n$ un vector con todas sus componentes igual a uno y $g > 0$ una constante. La función $\vec{y} \rightarrow \text{máx}(g\vec{e}, \vec{y})$, de \mathbb{R}^n a \mathbb{R}^n , es Newton diferenciable en \mathbb{R}^n . Además, la matriz diagonal G_m , definida por

$$G_{\text{máx}(\vec{v})} := \begin{cases} 1 & \text{if } y_i \geq 0, \text{ para } 1 \leq i \leq n, \\ 0 & \text{if } y_i < 0, \end{cases}$$

es una derivada de Newton para esta función.

El esquema de demostración sería el siguiente: de [13, y la bibliografía citada ahí] sabemos que la función $\vec{y} \rightarrow \text{máx}(0, \vec{y})$ es Newton diferenciable. De hecho, tenemos que $G_m \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ y $|G_m \vec{y}|$ es acotado para todo $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$. A continuación, es posible mostrar que

$$|\text{máx}(0, \vec{y} + \vec{h}) - \text{máx}(0, \vec{y}) - G_m(\vec{y} + \vec{h})\vec{h}| = 0 \text{ si } \|\vec{h}\|_\infty < \min\{|y_i| : y_i \neq 0\},$$

lo que implica que G_m es una derivada de Newton de $\vec{y} \rightarrow \text{máx}(0, \vec{y})$. Adicionalmente, el resultado sigue el Teorema 1.11, dado que

$$\text{máx}(g\vec{e}, \vec{y}) = \text{máx}(0, \vec{y} - g^{-1}\vec{e}) + g\vec{e}.$$

4. Análisis convexo

En esta sección resumimos algunas definiciones y resultados importantes del análisis convexo, los cuales juegan un rol fundamental en los siguientes capítulos. De aquí en adelante tomaremos a X como un espacio de Banach real

Definición 1.11. Un funcional $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ se dice convexo si

$$F((1-\lambda)x_1) + F(\lambda x_2) \leq (1-\lambda)F(x_1) + \lambda F(x_2)$$

para todo $x_1, x_2 \in X$ y $\lambda \in (0, 1)$.

Definición 1.12. Un funcional $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ se dice semicontinuo inferior (s.c.i) en $x \in X$ si

$$F(x) \leq \liminf_{y \rightarrow x} F(y).$$

F se dice débilmente semicontinua inferior (s.c.i), si es s.c.i. para todo $x \in X$

Ejemplo 1.11. [27, Cap. 2, Ejemplo 2.6 - 2.9]

- (a) La función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := |x|$, es convexa, pero no estrictamente convexa.
- (b) Para todo $p \in]1, \infty]$, la función $f_p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_p(x) := |x|^p$, es estrictamente convexa.
- (c) Sea C un subconjunto convexo de un espacio vectorial normado X , entonces, para todo $p \in]1, \infty[$, la función $N_p : C \rightarrow \mathbb{R}$, $N_p(x) := \|x\|^p$, es estrictamente convexa.

Lema 1.12. [27, Lema 2.10] Sean X, Y dos espacios vectoriales reales, sean $C_1 \subseteq X$, $C_2 \subseteq X$ convexos y consideremos $f_1 : C_1 \rightarrow \mathbb{R}$, $f_2 : C_2 \rightarrow \mathbb{R}$.

- (a) Sea $\lambda \geq 0$, si f_1 es (estrictamente) convexa, entonces λf_1 es (estrictamente) convexa.
- (b) Si f_1 y f_2 son (estrictamente) convexas, entonces

$$(f_1 + f_2) : C_1 \times C_2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (f_1 + f_2)(u, v) := f_1(u) + f_2(v),$$

es (estrictamente) convexa.

- (c) Si f_1 y f_2 son convexas, y $S : C_2 \rightarrow C_1$ es un funcional lineal

$$f : C_2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(u) := f_1(Su) + f_2(u),$$

es convexa. Si al menos una de las siguientes hipótesis se satisfacen, entonces f es estrictamente convexa:

- f_1 es estrictamente convexa y S inyectiva.
- f_2 es estrictamente convexa.

Definición 1.13. Un funcional $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ se dice débilmente semicontinuo inferior (d.s.c.i) en $x \in X$ si

$$F(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F(x_n)$$

para toda sucesión (x_n) débilmente convergente a x . F se dice débilmente semicontinuo inferior (d.s.c.i), si es d.s.c.i. para todo $x \in X$.

Definición 1.14. El epígrafo de F está definido por $\text{epi}(F) := \{(x, c) \in X \times \mathbb{R} : F(x) < c\}$.

Teorema 1.13. Las siguientes tres definiciones son equivalentes

- F es s.c.i.
- $\text{epi}(F)$ es cerrado.
- Las curvas de nivel $S_\alpha : \{x \in X : F(x) \leq \alpha\}$ de F son cerradas para cada $\alpha \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 1.14. La función característica $1_A : H \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$1_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{if } x \in A \\ 0 & \text{if } x \in H \setminus A \end{cases}$$

es d.s.c.i. si y solo si A es abierto. Adicionalmente, la función indicatriz $\chi_A : H \rightarrow \mathbb{R}$ es d.s.c.i. si y solo si A es cerrado.

Teorema 1.15. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado real, S un subconjunto no vacío y convexo de X y $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ una función dada, entonces:

- f es convexa si y solamente si $\text{epi}(f)$ es convexo.
- Si f es convexa, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ el conjunto $S_\alpha := \{x \in S : f(x) \leq \alpha\}$ es convexo.

DEMOSTRACIÓN. Ver [16, Teo. 2.8, pag. 12]. □

Definición 1.15. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado real, S un subconjunto no vacío y convexo de X y $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ una función dada. Si para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ el conjunto $S_\alpha := \{x \in S : f(x) \leq \alpha\}$ es convexo, el funcional f se dice cuasiconvexo

Corolario 1.16. *Todo funcional convexo es cuasiconvexo.*

DEMOSTRACIÓN. Ver [16, Teorema 2.8] □

Lema 1.17. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado real, S un subconjunto no vacío y convexo y cerrado de X y $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ una función dada. Si el funcional f es continuo y cuasiconvexo, entonces f es d.s.c.i.

DEMOSTRACIÓN. Ver [16, Lema 2.11, pag. 15]. □

Teorema 1.18. *Sea S un conjunto convexo, cerrado, acotado y no vacío de un espacio de Banach reflexivo, y sea $F : S \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional continuo y cuasiconvexo. Entonces F tiene al menos un punto mínimo en S . Si adicionalmente f es estrictamente convexo, entonces el punto mínimo es único.*

DEMOSTRACIÓN. Ver [16, Cap. 2, pag. 15]. □

PRUEBA. Ver [67, Teo. 3.1].

5. Método de Newton Generalizado

Empezamos esta sección definiendo la tasa de convergencia de un algoritmo. Para un mayor detalle ver [13, y la bibliografía citada ahí].

Definición 1.16. Sea $\{x_n\} \subset \mathbb{R}^N$ y $x^* \in \mathbb{R}^N$. Entonces

- $x_n \rightarrow x^*$ cuadráticamente si $x_n \rightarrow x^*$ y hay un $K > 0$ tal que

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leq K \|x_n - x^*\|^2$$

- $x_n \rightarrow x^*$ cuadráticamente con factor $\alpha > 1$ si $x_n \rightarrow x^*$ y hay un $K > 0$ tal que

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leq K \|x_n - x^*\|^\alpha,$$

- $x_n \rightarrow x^*$ superlineal si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|x_{n+1} - x^*\|}{\|x_n - x^*\|} = 0,$$

- $x_n \rightarrow x^*$ Lineal con factor $\alpha \in (0, 1)$ si

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leq \alpha \|x_n - x^*\|,$$

para n suficientemente grande.

Observación 1.17. Una sucesión superlineal convergente es también una sucesión convergente con factor α , para cualquier $\alpha > 0$. Adicionalmente, una sucesión cuadrática convergente es superlineal convergente con orden 2.

En el Capítulo 4, estaremos interesados en encontrar las soluciones de un sistema del tipo

$$(1.1) \quad F(x) = 0,$$

donde $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función local de Lipschitz.

En el capítulo mencionado, propondremos un algoritmo generalizado de Newton y analizaremos su tipo de convergencia

Proponemos el siguiente algoritmo tipo Newton para resolver estas ecuaciones

$$(1.2) \quad x^{k+1} = x^k - V_k^{-1} F(x^k), \quad V_k \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Si tenemos que $V_k \in \partial_b F(x^k)$, donde $\partial_b F$ representa la derivada en el sentido de Bouligand de F , tenemos el siguiente teorema de convergencia.

Teorema 1.19. *Sea \bar{x} una solución de (1.1). Asumimos que F es semisuave en \bar{x} y que todo $\bar{V} \in \partial_b F(\bar{x})$ es no singular. Entonces, el método de iteración (6.2) está bien definido y converge a \bar{x} superlinealmente en un vecindario de \bar{x} .*

DEMOSTRACIÓN. Ver [13] y la bibliografía citada ahí. \square

Adicionalmente, si asumimos que F es Newton diferenciable en un vecindario de \bar{x} y $V_k = G(x^k)$, donde G es Newton diferenciable para F , entonces la iteración (1.2) está bien definida y converge a \bar{x} superlinealmente en un vecindario de \bar{x} (ver [38, Teo. 1.1]).

Para beneficio del lector, recordemos la definición de la derivada de Bouligand

Definición 1.18. Sea $F : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, donde A es un conjunto abierto. Se dice que F es Bouligand diferenciable en $x \in A$, si F es Lipschitz continua localmente y direccionalmente diferenciable en x . Si F es diferenciable en el sentido de Bouligand en x , llamaremos a la derivada direccional $F'(x)(h)$, derivada en el sentido de Bouligand de F en x en la dirección h .

En este trabajo, analizaremos iteraciones del tipo (1.1), donde V_k resulta de las modificaciones a las derivadas de Newton de F . Para este caso, usaremos dos de los siguientes resultados

Teorema 1.20. *Supongamos que $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una ecuación de Lipschitz localmente en un conjunto convexo y abierto $D \subset \mathbb{R}^n$ y que $\bar{x} \in D$ es una solución de (1.1). Supongamos que F es semisuave en algún \bar{x} con una derivada de Newton no singular $G(\bar{x})$. Además, supongamos que existen constantes positivas ρ y A_1 tal que si $x^0 \in D$, $|x^0 - \bar{x}| \leq \rho$, y existe $W_k \in \partial_b F(x^k)$ tal que*

$$\|V_k - W_k\| \leq A_1,$$

entonces la sucesión de puntos generada por (1.2) está bien definida y converge a \bar{x} linealmente en un vecindario de \bar{x} .

DEMOSTRACIÓN. Ver [13] y la bibliografía citada ahí. \square

Por otra parte, podemos obtener una convergencia superlineal asumiendo algunas propiedades adicionales en W_k .

Teorema 1.21. *Supongamos que $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una ecuación de Lipschitz localmente en un conjunto convexo $D \subset \mathbb{R}^n$. Supongamos que F es semisuave en algún $\bar{x} \in D$ con una derivada de Newton no singular $G(\bar{x})$. Sea $\{V_k\}$ una sucesión de matrices no singulares en $\mathbb{R}^{n \times n}$ y supongamos que para algún $x^0 \in D$ la sucesión de los puntos generados por (1.2) permanecen en D y satisface $x^k \neq \bar{x}$ para todo k , y $\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = \bar{x}$. Entonces, $\{x_k\}$ converge superlinealmente a \bar{x} , y $F(\bar{x}) = 0$ si y solo si existe $W_k \in \partial_b F(x^k)$ tal que*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|(V_k - W_k)s^k|}{|s^k|} = 0,$$

donde $s^k = x^{k+1} - x^k$.

DEMOSTRACIÓN. Ver [13] y la bibliografía citada ahí. \square

Introducción a la mecánica de fluidos

En este capítulo se introducirán los aspectos más relevantes de la mecánica de fluidos. Se iniciará analizando la descripción del movimiento de una partícula material, luego se estudiarán las diferentes configuraciones utilizadas para la descripción del movimiento, las variables cinéticas fundamentales y su interpretación física. A continuación se enumerarán algunos movimientos especiales y se presentarán las ecuaciones gobernantes más generales que rigen el movimiento de los fluidos. Finalmente se presentará la forma del tensor de esfuerzo para fluidos viscosos no lineales y algunas características de los fluidos con límite elástico.

1. Cinemática

En esta sección se estudiará brevemente la cinemática necesaria para describir el movimiento de los fluidos visco-plásticos. Iniciaremos analizando la forma de describir el movimiento de una partícula material en un cuerpo continuo, las variables cinéticas fundamentales tanto para sólidos elásticos como para fluidos visco-plásticos y su significado físico. Finalmente describiremos algunos tipos de movimientos especiales.

1.1. Descripción del movimiento de una partícula material en un cuerpo continuo. Si bien, la discontinuidad en la distribución de la masa es una propiedad inherente de la materia, ésta se puede asumir continua cuando en el problema físico de interés se ven inmersas magnitudes de longitud y tiempo a escalas macroscópicas, siendo en este caso una suposición valedera, la existencia de una función continua de densidad ρ que depende de la posición y el tiempo.

Conceptualmente podemos definir un medio continuo como una porción finita de materia, cuyas propiedades físicas son independientes de su tamaño actual y de la escala de tiempo sobre la cual dichas propiedades son medidas y un cuerpo continuo como una colección de partículas materiales, las cuales al ser consideradas juntas, dotan al cuerpo de propiedades físicas locales independientes de su tamaño actual y de la escala de tiempo sobre la cual dichas propiedades son medidas, entendiéndose en este contexto una partícula material como un volumen infinitesimal de materia.

Para iniciar nuestro estudio, consideremos un cuerpo continuo \mathcal{B} , y notemos por P y \mathcal{S} , una partícula y un subconjunto arbitrarios de \mathcal{B} , respectivamente.

Sea x el punto del espacio, el cual notaremos por \mathcal{E}^3 , ocupado por la partícula P de \mathcal{B} al instante t , y sea \mathbf{x} su vector posición asociado respecto al origen O de una base ortonormal en el espacio vectorial E^3 . Definimos por $\chi_t : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}^3$ la configuración de \mathcal{B} al instante t , la cual asumimos invertible y diferenciable tantas veces como sea necesaria.

Utilizando χ_t podemos definir el movimiento de \mathcal{B} por

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \bar{\chi} : \mathcal{B} \times \mathbb{R} &\rightarrow E^3 \\ (P, t) &\mapsto \bar{\chi}(P, t) := \chi_t(P) = \mathbf{x}, \end{aligned}$$

la cual es una función inyectiva, invertible, para todo t fijo, y diferenciable tantas veces como sea necesario en espacio y tiempo [9, Cap. 1, pag. 3].

Esta función representa la descripción material del movimiento del cuerpo ya que su dominio consiste en la totalidad de partículas materiales del cuerpo, como también del tiempo. Esta descripción, a pesar de sus propiedades matemáticas, es de limitado uso

práctico, ya que no hay forma directa de cuantificar la trayectoria de las partículas en el cuerpo. Por esta razón, discutiremos a continuación dos configuraciones alternativas.

De todas las configuraciones posibles, tomamos una, es decir $\kappa_0 = \chi_{t_0}(\mathcal{B})$ al tiempo $t = t_0$, la cual denominaremos configuración de referencia. Ahora notemos por X , el punto que ocupa P al tiempo t_0 , el cual está asociado con el vector \mathbf{X} en E^3 , es decir

$$(2.2) \quad \mathbf{X} = \bar{\chi}(P, t_0) = \chi_{t_0}(P).$$

Así podemos escribir

$$(2.3) \quad \mathbf{x} = \bar{\chi}(P, t) = \bar{\chi}(\chi_{t_0}^{-1}(\mathbf{X}), t) =: \chi_{\kappa_0}(\mathbf{X}, t).$$

Si identificamos a cada partícula P de \mathcal{B} por su posición con respecto a la configuración de referencia κ_0 , la función $\chi_{\kappa_0} : E^3 \times \mathbb{R} \rightarrow E^3$, donde

$$(2.4) \quad \mathbf{x} = \chi_{\kappa_0}(\mathbf{X}, t) = \chi_t(\mathbf{X})$$

representa la configuración referencial o Lagrangeana del movimiento del cuerpo y determina la posición que ocupa P en el instante t respecto a la configuración de referencia. Esta configuración considera implícito el hecho de que la configuración de referencia es dada. Ahora supongamos que el movimiento del cuerpo \mathcal{B} es descrito con respecto a la configuración $\kappa(t)$, es decir en función de (\mathbf{x}, t) . Llamaremos a esta configuración, configuración espacial o Euleriana y notaremos por $\kappa(t) := \chi_t(\mathcal{B})$ a la configuración de \mathcal{B} al instante t la cual será llamada configuración actual.

Notaremos por \mathcal{R}_0 con frontera cerrada $\partial\mathcal{R}_0$ la región ocupada por \mathcal{B} en κ_0 y su región correspondiente en $\kappa(t)$ será notada por $\mathcal{R}(t)$ con frontera cerrada $\partial\mathcal{R}(t)$. De manera similar, notaremos por \mathcal{V}_0 con frontera cerrada $\partial\mathcal{V}_0$ la región ocupada por \mathcal{S} en κ_0 y su región correspondiente en $\kappa(t)$ será notada por $\mathcal{V}(t)$ con frontera cerrada $\partial\mathcal{V}(t)$.

Dado que para nuestro estudio solo necesitamos definir una configuración de referencia, podemos prescindir del subíndice κ_0 en (2.4).

Notemos en este punto, que toda función f de espacio y tiempo, puede ser expresada equivalentemente en configuración material, referencial o espacial, es decir

$$(2.5) \quad f = \check{f}(P, t) = \bar{f}(\mathbf{X}, t) = \hat{f}(\mathbf{x}, t).$$

Ahora, dada una función f en configuración referencial, definimos la derivada material de f como

$$(2.6) \quad \frac{Df}{Dt} = \frac{\partial \bar{f}(\mathbf{X}, t)}{\partial t}.$$

De esta definición es claro que la derivada material de una función, representa la tasa de variación de una función tomando la posición de referencia \mathbf{X} (y por tanto la partícula P asociada con esta posición) fija.

Si alternativamente, f es expresada en configuración espacial, es decir $f = \hat{f}(\mathbf{x}, t)$, entonces

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \frac{Df}{Dt} &= \frac{\partial \hat{f}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \frac{\partial \hat{f}(\mathbf{x}, t)}{\partial x} \cdot \frac{\partial \chi(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \\ &= \frac{\partial \hat{f}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla \hat{f} \cdot \frac{\partial \chi(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \end{aligned}$$

Los vectores velocidad y aceleración pueden ser definidos a través de (2.4) por

$$(2.8) \quad \mathbf{y} = \frac{\partial \chi(\mathbf{X}, t)}{\partial t}, \quad \mathbf{a} = \frac{\partial^2 \chi(\mathbf{X}, t)}{\partial t^2},$$

teniéndose que la ecuación (2.7) puede ser expresada por

$$(2.9) \quad \frac{Df}{Dt} = \frac{\partial \hat{f}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla \hat{f} \cdot \mathbf{y}.$$

Enfocándonos especialmente en las configuraciones referencial y espacial, es fácil ver que la velocidad y aceleración pueden equivalentemente ser expresadas como

$$(2.10) \quad \mathbf{y} = \bar{\mathbf{y}}(\mathbf{X}, t) = \hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{a} = \bar{\mathbf{a}}(\mathbf{X}, t) = \hat{\mathbf{a}}(\mathbf{x}, t),$$

donde, por ejemplo, $\mathbf{y} = \hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t)$ es

$$(2.11) \quad \frac{D\mathbf{y}}{Dt} = \frac{\partial \hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla \hat{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{y}$$

1.2. Gradiente de deformación y otras medidas de estiramiento y deformación. Durante la deformación o movimiento, un elemento infinitesimal $d\mathbf{X}$ en κ_0 se transforma en $d\mathbf{x}$ en $\kappa(t)$. Este cambio de longitud y orientación del elemento infinitesimal $d\mathbf{X}$ a $d\mathbf{x}$ puede ser expresado gracias a (2.4) y la regla de la cadena por

$$(2.12) \quad d\mathbf{x} = \frac{\partial \chi(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} d\mathbf{X},$$

donde $\mathbf{F} := \frac{\partial \chi(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}}$ es un tensor de segundo orden, denominado gradiente de deformación.

Recordemos que el movimiento del cuerpo \mathcal{B} , χ , se asume invertible para un t dado, con lo cual el teorema de la función invertible del análisis real, para el caso de la función χ , se puede expresar de la siguiente manera: Para un tiempo t dado, sea $\chi_t : \mathcal{R}_0 \rightarrow \mathcal{R}$ continuamente diferenciable y sea $\mathbf{X} \in \mathcal{R}_0$, tal que $\det \frac{\partial \chi_t(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} \neq 0$. Entonces, hay un conjunto abierto \mathcal{V}_0 de \mathbf{X} en \mathcal{R}_0 y un conjunto abierto \mathcal{V} de \mathcal{R} , tal que $\chi_t(\mathcal{V}_0) = \mathcal{V}$ y χ_t tiene una inversa continuamente diferenciable $\chi_t^{-1}(\mathcal{V}) = \mathcal{V}_0$. Además, para todo $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$, $\frac{\partial \chi_t^{-1}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = (\mathbf{F}(\mathbf{X}, t))^{-1}$.

El teorema de la función inversa establece que la función χ es invertible en el punto \mathbf{X} para un t dado, si el Jacobiano del movimiento, $J = \det \left(\frac{\partial \chi(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} \right) = \det \mathbf{F}$, es no nulo para toda partícula material. De esta manera se tiene que J , es estrictamente positivo, debido a que $\mathbf{F} = \mathbf{I}$ en movimientos rígidos y a la continuidad del movimiento, también asumida, ya que cualquier cambio de signo en J necesariamente implicaría que existe algún tiempo t en el cual $J = 0$ para alguna partícula material.

Consideremos ahora la relación existente entre el volumen infinitesimal dv de un conjunto de partículas materiales dado en la configuración de actual y el volumen dV del mismo conjunto de partículas materiales en la configuración de referencia. El elemento volumétrico en la configuración referencial es definido con un paralelepípedo infinitesimal de lados, $d\mathbf{X}$, $d\mathbf{Y}$ y $d\mathbf{Z}$. De igual manera su imagen a través de χ tiene por lados a $d\mathbf{x}$, $d\mathbf{y}$ y $d\mathbf{z}$, donde $d\mathbf{x}$, $d\mathbf{y}$ y $d\mathbf{z}$ son las imágenes de $d\mathbf{X}$, $d\mathbf{Y}$ y $d\mathbf{Z}$ a través de χ , respectivamente.

Notemos que, gracias al triple producto mixto el volumen infinitesimal en la configuración de referencia viene dado por

$$(2.13) \quad dV = d\mathbf{X} \cdot (d\mathbf{Y} \times d\mathbf{Z}) = [d\mathbf{X}d\mathbf{Y}d\mathbf{Z}].$$

Además este producto satisface $[d\mathbf{X}d\mathbf{Y}d\mathbf{Z}] = [d\mathbf{Y}d\mathbf{Z}d\mathbf{X}] = [d\mathbf{Z}d\mathbf{X}d\mathbf{Y}]$ y $[d\mathbf{X}d\mathbf{Y}d\mathbf{Z}] = \det(d\mathbf{X}, d\mathbf{Y}, d\mathbf{Z})$, con lo cual el volumen dv en la configuración actual esta dado por

$$(2.14) \quad \begin{aligned} dv &= d\mathbf{x} \cdot (d\mathbf{y} \times d\mathbf{z}) \\ &= (\mathbf{F}d\mathbf{X} \cdot ((\mathbf{F}d\mathbf{Y}) \times (\mathbf{F}d\mathbf{Z}))) \\ &= \det(\mathbf{F}d\mathbf{X}, \mathbf{F}d\mathbf{Y}, \mathbf{F}d\mathbf{Z}) \\ &= (\det \mathbf{F})(d\mathbf{X}, d\mathbf{Y}, d\mathbf{Z}) \\ dv &= JdV. \end{aligned}$$

Adicionalmente, la derivada material de Jacobiano es tal que

$$(2.15) \quad \frac{DJ}{Dt} = J \nabla \cdot \mathbf{y}.$$

Como veremos más adelante, el tensor de esfuerzo (stress tensor), restringe su dependencia en \mathbf{F} si las condiciones de invarianza son satisfechas, como consecuencia, los tensores izquierdo y derecho de Cauchy-Green, $\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$ y $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F}$, respectivamente, son de utilidad en la discusión de los modelos constitutivos para sólidos elásticos.

Gracias a las propiedades de J , \mathbf{B} y \mathbf{C} son tensores simétricos definidos positivos y se reducen a la identidad en movimientos rígidos. Una forma sencilla de utilizar estas variables es para definir medidas de deformación. Las deformaciones Eulerianas y Lagrangianas están definidas por

$$(2.16) \quad \mathbf{e} := \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1}) \text{ y } \mathbf{E} := \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}),$$

respectivamente.

El significado físico de \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{e} y \mathbf{E} puede ser analizado de la siguiente manera. Consideremos el cambio de orientación y longitud de un elemento infinitesimal $d\mathbf{X}$ en κ_0 a $d\mathbf{x}$ en $\kappa(t)$. Supongamos que $d\mathbf{X} = dS\mathbf{M}$ y $d\mathbf{x} = ds\mathbf{m}$ donde, dS y ds son sus magnitudes y \mathbf{M} y \mathbf{m} los unitarios. De (2.12) se tiene que

$$\begin{aligned} d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} &= ds^2 \mathbf{m} \cdot \mathbf{m} = ds^2 \\ d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} &= \mathbf{F}d\mathbf{X} \cdot \mathbf{F}d\mathbf{X} = dS^2 \mathbf{M}^T \mathbf{F}^T \mathbf{F} \mathbf{M} = dS^2 \mathbf{M}^T \mathbf{C} \mathbf{M} = dS^2 \mathbf{M} \cdot \mathbf{C} \mathbf{M}, \end{aligned}$$

y por tanto el estiramiento al cuadrado es definido por: $\lambda^2 := \frac{ds^2}{dS^2} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{C} \mathbf{M}$.

Por otro lado, de (2.16), se tiene

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{E} \mathbf{M} = \frac{1}{2} \mathbf{M} \cdot (\mathbf{C} - \mathbf{I}) \mathbf{M} = \frac{1}{2} \left(\frac{ds^2}{dS^2} - 1 \right) = \frac{ds^2 - dS^2}{2dS^2}.$$

Resumiendo, tenemos que

$$(2.17) \quad \frac{ds^2}{dS^2} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{C} \mathbf{M} \text{ y } \frac{ds^2 - dS^2}{2dS^2} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{E} \mathbf{M},$$

es decir, el cuadrado del estiramiento λ , está dado en términos de \mathbf{C} , y en función de \mathbf{E} se tiene una “medida” de la deformación respecto a la configuración de referencia.

En paralelo a (2.17) se puede mostrar que

$$(2.18) \quad \frac{dS^2}{ds^2} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{B}^{-1} \mathbf{M} \text{ y } \frac{ds^2 - dS^2}{2ds^2} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{e} \mathbf{M}.$$

Así en términos de \mathbf{B}^{-1} esta dado el inverso del estiramiento, y en función de \mathbf{e} se tiene una “medida” Euleriana de la deformación.

1.3. Gradiente de velocidad y el tensor de deformación. Mientras que para los sólidos elásticos, la variable cinética fundamental es el gradiente de deformación, para los fluidos visco-plásticos lo es el gradiente de velocidad $\mathbf{L} = \nabla \mathbf{v}$.

Como se discutirá posteriormente, el tensor de esfuerzos dependerá de \mathbf{L} si las condiciones de invarianza son satisfechas. En consecuencia, generalmente estamos interesados en la parte simétrica de \mathbf{L} , $\mathcal{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T)$, denominado tensor de deformación, ya que “mide” la deformación del material mientras este se mueve.

Para analizar este significado físico consideremos como antes $d\mathbf{X} = dS\mathbf{M}$ y $d\mathbf{x} = ds\mathbf{m}$. Por (2.12) podemos escribir

$$(2.19) \quad \begin{aligned} d\mathbf{x} &= \mathbf{F}d\mathbf{X} = \mathbf{F}M dS \\ &= \mathbf{m} ds, \end{aligned}$$

y así

$$(2.20) \quad \lambda \mathbf{m} = \mathbf{F} \mathbf{M} \text{ con } \lambda := \frac{ds}{dS} \text{ el estiramiento.}$$

De $\det \mathbf{F} > 0$, se sigue directamente que $\lambda > 0$.

Si tomamos las derivadas materiales de ambos lados de (2.20) obtenemos la relación

$$(2.21) \quad \begin{aligned} \frac{D\lambda}{Dt} \mathbf{m} + \lambda \frac{D\mathbf{m}}{Dt} &= \frac{D\mathbf{F}}{Dt} \mathbf{M} + \mathbf{F} \frac{D\mathbf{M}}{Dt} \\ &= \mathbf{L}\mathbf{F}\mathbf{M} = \mathbf{L}(\lambda\mathbf{m}) = \lambda\mathbf{L}\mathbf{m}, \end{aligned}$$

donde $\frac{D\mathbf{M}}{Dt} = 0$ pues es la dirección de P en κ_0 , y $\frac{D\mathbf{F}}{Dt} = \mathbf{L}\mathbf{F}$, gracias a la regla de la cadena y a la suposición de que $\frac{\partial^2 \chi}{\partial \mathbf{X} \partial t}$ es continua.

Tomando el producto punto de cada lado de (2.21) con \mathbf{m} se sigue que

$$(2.22) \quad \frac{D\lambda}{Dt} \mathbf{m} \cdot \mathbf{m} + \lambda \frac{D\mathbf{m}}{Dt} \cdot \mathbf{m} = \lambda \mathbf{m} \cdot \mathbf{L}\mathbf{m}.$$

Dado que \mathbf{m} es un vector unitario, $\mathbf{m} \cdot \mathbf{m} = 1$, lo que simplifica la ecuación anterior a

$$(2.23) \quad \frac{D\lambda}{Dt} = \lambda \mathbf{m} \cdot \mathbf{L}\mathbf{m}.$$

Se tiene que la parte antisimétrica de \mathbf{L} , $\mathcal{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^T)$ satisface

$$(2.24) \quad \mathbf{m} \cdot \mathcal{A}\mathbf{m} = \mathbf{m} \cdot (-\mathcal{A}^T)\mathbf{m},$$

por tanto $\mathbf{m} \cdot \mathcal{A}\mathbf{m} = 0$, con lo cual podemos reescribir (2.23) como

$$(2.25) \quad \frac{D\lambda}{Dt} = \lambda \mathbf{m} \cdot \mathcal{E}\mathbf{m},$$

o alternativamente como

$$(2.26) \quad \frac{D \ln \lambda}{Dt} = \mathbf{m} \cdot \mathcal{E}\mathbf{m}.$$

Así, el tensor \mathcal{E} determina completamente la derivada material del logaritmo natural del estiramiento para un elemento infinitesimal lineal con dirección \mathbf{m} en la configuración actual.

1.4. Movimientos especiales.

Movimiento rígido. En un movimiento rígido, la distancia entre dos partículas materiales permanece constante para todo t , por tanto, la derivada material de ds es cero para todos los puntos del cuerpo durante el movimiento.

El movimiento rígido más general puede ser escrito como

$$(2.27) \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}_0(t) + \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{X},$$

donde \mathbf{Q} es un tensor propio ortonormal de segundo orden [9, Cap. 1, pag. 8].

De (2.25) podemos notar que una condición necesaria y suficiente para que el movimiento de un cuerpo sea rígido es que \mathcal{E} sea cero para todos los puntos del cuerpo, durante todo el período de movimiento.

En este punto, es conveniente introducir la noción de movimiento de un cuerpo rígido superpuesto (superposed rigid-body motion). Con este fin, consideraremos los movimientos de \mathcal{B} , χ y χ^+ tal que $\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t)$, como antes y $\mathbf{x}^+ = \chi^+(\mathbf{X}, t)$. Entonces podemos escribir

$$(2.28) \quad \mathbf{x}^+ = \chi^+(\mathbf{X}, t) = \chi^+(\chi_t^{-1}(\mathbf{x}), t) = \bar{\chi}^+(\mathbf{x}, t),$$

o equivalentemente

$$(2.29) \quad \mathbf{x}^+ = \chi_t^+(\mathbf{X}) = \bar{\chi}_t^+(\mathbf{x}) = \bar{\chi}_t^+(\chi_t(\mathbf{X})),$$

y dado que esto se satisface para toda partícula material se sigue que

$$(2.30) \quad \chi_t^+ = \bar{\chi}_t^+ \circ \chi_t,$$

es decir, que χ y χ^+ difieren solo por el movimiento de un cuerpo rígido superpuesto.

Movimiento isocórico. Un movimiento isocórico es aquel en el que el volumen de un conjunto de partículas dado permanece constante durante el movimiento, es decir, $J = 1$. De esta definición se concluye que las condiciones necesarias y suficientes para que un movimiento sea isocórico son

$$(2.31) \quad J = 1, \quad dv = dV, \quad \frac{DJ}{Dt} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{y} = 0, \quad \text{tr}(\mathcal{E}) = 0,$$

para todas las partículas materiales durante el movimiento.

Se debe notar que un material no necesariamente tiene que ser incompresible para presentar un movimiento isocórico.

Cizalla simple. Éste es un ejemplo de movimiento isocórico, en el cual la velocidad es estacionaria, totalmente desarrollada (fully developed) y unidireccional. La magnitud de la velocidad depende linealmente de las componentes perpendiculares a la dirección del movimiento, por ejemplo, si tomamos coordenadas rectangulares $x_1x_2x_3$ y suponemos que la dirección del flujo es paralela al eje x_3 , la orientación y origen del sistema de coordenadas puede ser tomado de tal forma que el campo de velocidades puede ser escrito como

$$(2.32) \quad \mathbf{y} = f(x_1, x_2)\mathbf{e}_3,$$

donde \mathbf{e}_i es el vector unitario paralelo al eje x_i .

La medida de la velocidad de deformación de cizalla por unidad de tiempo esta dada por $\dot{\gamma}_0 = |\nabla f|$.

Un ejemplo del movimiento de cizalla simple es el flujo laminar en tuberías de sección constante.

El flujo de cizalla simple puede ser generado entre placas paralelas para un gran número de fluidos denominados fluidos simples. Motivo por el cual, muchos reómetros son diseñados para aproximar estos fluidos. Con esto en mente, consideraremos el flujo de cizalla simple entre dos placas paralelas separadas una distancia h , cuando la placa superior se mueve a una velocidad U sobre \mathbf{e}_1 y el origen del sistema de coordenadas coincide con algún punto de la placa inferior. Considerando las condición de adhesión se tiene que $\dot{\gamma}_0 = U/h$, obteniéndose que el tensor de deformación para este caso está dado por

$$(2.33) \quad \mathcal{E} = \frac{\dot{\gamma}_0}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Flujo laminar. Cuando entre dos partículas en movimiento existe gradiente de velocidad, o sea, una se mueve más rápido que la otra, se desarrollan fuerzas de fricción que actúan tangencialmente a las mismas.

Las fuerzas de fricción tratan de introducir rotación entre las partículas en movimiento, pero simultáneamente la viscosidad trata de impedir la rotación. Dependiendo del valor relativo de estas fuerzas se pueden producir diferentes estados de flujo.

Cuando el gradiente de velocidad es bajo, la fuerza de inercia es mayor que la de fricción, las partículas se desplazan pero no rotan, o lo hacen pero con muy poca energía, el resultado final es un movimiento en el cual las partículas siguen trayectorias definidas, y todas las partículas que pasan por un punto en el campo del flujo siguen la misma trayectoria. Este tipo de flujo se denomina laminar, queriendo significar con ello que las partículas se desplazan en forma de capas o láminas.

2. Ecuaciones gobernantes del movimiento de fluidos

En esta sección estudiaremos las ecuaciones gobernantes más generales aplicables al movimiento de fluidos. Para su estudio, se enunciará y demostrará el teorema de transporte de Reynolds [9, Parte I, Cap. 2, pag. 9], el cual nos permitirá obtener la forma local de las ecuaciones desde su forma integral. Luego enunciaremos algunas restricciones sobre las

ecuaciones gobernantes, las cuales se detallan de una manera mas amplia en [9, Cap. 1, Secc. 2, pag. 9].

Teorema 2.1. (*Teorema de transporte*) Sea \mathcal{S} un subconjunto arbitrario de \mathcal{B} , el cual ocupa las regiones \mathcal{V}_0 y $\mathcal{V}(t)$ en las configuraciones referencial y actual, respectivamente. Sea $f = \bar{f}(\mathbf{X}, t) = \hat{f}(\mathbf{x}, t)$ una función de espacio y tiempo a valores escalares o tensoriales cualquiera. Entonces se tiene que

$$(2.34) \quad \frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}(t)} \hat{f}(\mathbf{x}, t) dv = \int_{\mathcal{V}(t)} \frac{\partial \hat{f}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) dv + \int_{\partial \mathcal{V}(t)} \hat{f}(\mathbf{x}, t) \hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} da.$$

donde \mathbf{n} es el vector normal externo a $\partial \mathcal{V}(t)$.

DEMOSTRACIÓN. Ver [30, Cap.1, pag. 6]. □

2.1. Conservación de la masa. Notemos por \mathcal{M} , la masa de un subconjunto \mathcal{S} de \mathcal{B} , la cual al instante t está dada por

$$(2.35) \quad \mathcal{M} = \int_{\mathcal{V}(t)} \hat{\rho}(\mathbf{x}, t) dv = \int_{\mathcal{V}_0} \bar{\rho}(\mathbf{X}, t_0) J dV.$$

Gracias al Teorema de transporte (2.1) y a la representación (2.10), se tiene que la derivada material de \mathcal{M} viene dada por

$$\begin{aligned} \frac{D\mathcal{M}}{Dt} &= \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}(t)} \hat{\rho}(\mathbf{x}, t) dv = \int_{\mathcal{V}(t)} \frac{\partial \hat{\rho}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} dv + \int_{\partial \mathcal{V}(t)} \hat{\rho}(\mathbf{x}, t) \hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} da \\ &= \int_{\mathcal{V}(t)} \frac{\partial \hat{\rho}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} dv + \int_{\mathcal{V}(t)} \nabla \cdot (\hat{\rho}(\mathbf{x}, t) \hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t)) dv \\ &= \int_{\mathcal{V}(t)} \frac{\partial \hat{\rho}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} dv + \int_{\mathcal{V}(t)} \nabla \hat{\rho}(\mathbf{x}, t) \cdot \hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t) dv + \int_{\mathcal{V}(t)} \hat{\rho}(\mathbf{x}, t) (\nabla \cdot \hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t)) dv \\ &= \int_{\mathcal{V}(t)} \left[\frac{D\hat{\rho}}{Dt}(\mathbf{x}, t) + \hat{\rho}(\mathbf{x}, t) (\nabla \cdot \hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t)) \right] dv. \end{aligned}$$

Por otro lado, el principio de conservación de la masa establece que la masa \mathcal{M} de un conjunto de partículas materiales dado no varía en el tiempo, es decir, $\frac{D\mathcal{M}}{Dt} = 0$, y por tanto

$$(2.36) \quad \int_{\mathcal{V}(t)} \left[\frac{D\hat{\rho}}{Dt}(\mathbf{x}, t) + \hat{\rho}(\mathbf{x}, t) (\nabla \cdot \hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t)) \right] dv = 0.$$

Si asumimos que el integrando de (2.36) es continuo y dado que \mathcal{S} (y por tanto $\mathcal{V}(t)$) es arbitrario, se obtiene la forma local del principio de conservación de la masa

$$(2.37) \quad \frac{D\hat{\rho}}{Dt}(\mathbf{x}, t) + \hat{\rho}(\mathbf{x}, t) (\nabla \cdot \hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t)) = 0.$$

2.1.1. Implicaciones de la conservación de la masa para fluidos incompresibles. El volumen de una región ocupada por partículas materiales de un fluido incompresible no varía en el tiempo, teniéndose que un fluido incompresible solo puede presentar un movimiento isocórico, por tanto, éste satisface todas sus condiciones y en especial $\nabla \cdot \hat{\mathbf{y}} = 0$. De esto se sigue, que la forma local del principio de conservación de la masa (2.37) para fluidos incompresibles se reduce al hecho de que la densidad permanece constante durante el movimiento de un fluido incompresible, es decir, $\frac{D\hat{\rho}}{Dt}(\mathbf{x}, t) = 0 \forall t$.

2.2. Balance de la cantidad de movimiento lineal. El principio de balance de la cantidad de movimiento lineal establece que la tasa de variación de momento lineal de una región $\mathcal{V}(t)$ ocupada al tiempo t por un subconjunto \mathcal{S} , del cuerpo, es igual a la suma de las fuerzas externas resultantes sobre dicha región, esto significa que

$$(2.38) \quad \frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}(t)} \hat{\rho}(\mathbf{x}, t) \hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t) dv = \int_{\mathcal{V}(t)} \hat{\rho}(\mathbf{x}, t) \hat{\mathbf{b}}(\mathbf{x}, t) dv + \int_{\partial\mathcal{V}(t)} \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{x}, t, n) da$$

donde $\mathbf{b} = \hat{\mathbf{b}}(\mathbf{x}, t)$ es la fuerza del cuerpo por unidad de masa en la configuración actual, $\mathbf{t} = \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{x}, t, n)$, llamado vector de esfuerzo de Cauchy (Cauchy stress vector), es la fuerza por unidad de área de $\partial\mathcal{V}(t)$ en la configuración actual y n es el vector normal exterior a la frontera de \mathcal{V} al tiempo t .

Utilizando (2.38) se puede mostrar el lema de Cauchy [25], el cual establece que los vectores de esfuerzos que actúan sobre un punto x en lados opuestos de la misma superficie, son iguales y opuestos, es decir

$$(2.39) \quad \hat{\mathbf{t}}(x, t, n) = -\hat{\mathbf{t}}(x, t, -n)$$

Adicionalmente, utilizando el principio de balance de la cantidad de movimiento lineal y el lema de Cauchy en una región en forma de tetraedro suficientemente pequeña, se puede mostrar la existencia de un tensor de segundo orden \mathbf{T} [25], denominado tensor de esfuerzo de Cauchy, el cual es independiente de n , y satisface

$$(2.40) \quad \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) \cdot n.$$

Al considerar la expresión anterior podemos reescribir (2.38) como

$$(2.41) \quad \begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}(t)} \hat{\rho}(\mathbf{x}, t) \hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t) dv &= \int_{\mathcal{V}(t)} \hat{\rho}(\mathbf{x}, t) \hat{\mathbf{b}}(\mathbf{x}, t) dv + \int_{\partial\mathcal{V}(t)} \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) \cdot n dv \\ &= \int_{\mathcal{V}(t)} \hat{\rho}(\mathbf{x}, t) \hat{\mathbf{b}}(\mathbf{x}, t) dv + \int_{\mathcal{V}(t)} \nabla \cdot \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) dv. \end{aligned}$$

Utilizando el principio de conservación de la masa, el lado izquierdo de la ecuación anterior puede ser expresada por

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}(t)} \hat{\rho}(\mathbf{x}, t) \hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t) dv &= \int_{\mathcal{V}(t)} \frac{d}{dt} (\hat{\rho} \hat{\mathbf{y}})(\mathbf{x}, t) dv + \int_{\mathcal{V}(t)} \hat{\rho}(\mathbf{x}, t) \hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t) (\nabla \cdot \hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t)) \\ &= \int_{\mathcal{V}(t)} \left(\left(\frac{d}{dt} \hat{\rho}(\mathbf{x}, t) \right) \hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t) + \hat{\rho}(\mathbf{x}, t) \frac{d}{dt} \hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t) \right) dv \\ &+ \int_{\mathcal{V}(t)} \hat{\rho}(\mathbf{x}, t) \hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t) (\nabla \cdot \hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t)) dv \\ &= \int_{\mathcal{V}(t)} \left[\left(\frac{d}{dt} \hat{\rho}(\mathbf{x}, t) + \hat{\rho}(\mathbf{x}, t) \nabla \cdot \hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t) \right) \hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t) + \hat{\rho}(\mathbf{x}, t) \frac{d}{dt} \hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t) \right] dv \\ &= \int_{\mathcal{V}(t)} \hat{\rho}(\mathbf{x}, t) \hat{\mathbf{a}}(\mathbf{x}, t) dv \end{aligned}$$

como lo anterior se satisface para cualquier subconjunto \mathcal{S} , se tiene la forma Euleriana local del balance de momento lineal

$$(2.42) \quad \hat{\rho}(\mathbf{x}, t) \hat{\mathbf{a}}(\mathbf{x}, t) = \hat{\rho}(\mathbf{x}, t) \hat{\mathbf{b}}(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot \mathbf{T}(\mathbf{x}, t).$$

En ocasiones es conveniente expresar \mathbf{T} como la suma de una parte esférica y una parte deviatorica,

$$(2.43) \quad \mathbf{T} = \bar{t} \mathbf{I} + \tau$$

donde $tr(\tau) = 0$ y por tanto $\hat{t} = \frac{1}{3} tr(\mathbf{T})$.

Cuando el tensor de esfuerzo de Cauchy, se descompone de esta manera a $-\bar{t}$ se le denomina presión y se nota por p .

Utilizando (2.43), la forma local del balance de momento lineal se puede reescribir como

$$(2.44) \quad \hat{\rho}(\mathbf{x}, t)\hat{\mathbf{a}}(\mathbf{x}, t) = -\nabla p(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}, t) + \hat{\rho}(\mathbf{x}, t)\hat{\mathbf{b}}(\mathbf{x}, t)$$

Para fluidos comprensibles p es la presión termodinámica. Una ecuación de estado que relacione la presión con otras variables termodinámicas como la densidad y la temperatura es necesaria.

Para fluidos incompresibles p es la presión mecánica, que se origina en la restricción de incompresibilidad. No se necesita otra ecuación de estado, p se determina como parte de la solución del problema.

2.3. Balance de momento angular. El principio de balance del momento angular establece que la variación de momento angular de una región material $\mathcal{V}(t)$ ocupada al tiempo t por un subconjunto \mathcal{S} de \mathcal{B} es igual a los torques combinados del cuerpo.

La forma integral del balance de momento angular puede ser expresado por

$$(2.45) \quad \frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}(t)} \mathbf{x} \times \hat{\rho}(\mathbf{x}, t)\hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t)dv = \int_{\mathcal{V}(t)} \mathbf{x} \times \hat{\rho}(\mathbf{x}, t)\hat{\mathbf{b}}(\mathbf{x}, t)dv + \int_{\partial\mathcal{V}(t)} \mathbf{x} \times \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{x}, t, n)da$$

La parte izquierda de la ecuación representa la variación del momento angular de la región material $\mathcal{V}(t)$. Las integrales del lado derecho son los torques resultantes de las fuerzas de contacto y superficie respectivamente.

Una vez más, gracias al principio de conservación de la materia podemos reescribir fácilmente el término del lado derecho de la ecuación (2.45) como

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}(t)} \hat{\rho}(\mathbf{x}, t)\hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t)dv \\ &= \int_{\mathcal{V}(t)} \left\{ \frac{d}{dt} (\mathbf{x} \times \hat{\rho}(\mathbf{x}, t)\hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t) + (\mathbf{x} \times \hat{\rho}(\mathbf{x}, t)\hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t))\nabla \cdot \hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t)) \right\} dv \\ &= \int_{\mathcal{V}(t)} \left[\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \times \hat{\rho}(\mathbf{x}, t)\hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{x} \times \frac{\partial \hat{\rho}(\mathbf{x}, t)}{\partial t}\hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{x} \times \hat{\rho}(\mathbf{x}, t)\frac{\partial \hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right] dv \\ &+ \int_{\mathcal{V}(t)} (\mathbf{x} \times \hat{\rho}(\mathbf{x}, t)\hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t))\nabla \cdot \hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t)dv \\ &= \int_{\mathcal{V}(t)} \left\{ \mathbf{x} \times \left(\frac{\partial \hat{\rho}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \hat{\rho}(\mathbf{x}, t)(\nabla \cdot \hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t)) \right) \hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{x} \times \hat{\rho}(\mathbf{x}, t)\hat{\mathbf{a}}(\mathbf{x}, t) \right\} dv \\ (2.46) \quad &= \int_{\mathcal{V}(t)} \mathbf{x} \times \hat{\rho}(\mathbf{x}, t)\hat{\mathbf{a}}dv. \end{aligned}$$

Como resultado, el principio de balance de la cantidad de momento angular viene dada por

$$(2.47) \quad \int_{\mathcal{V}(t)} \mathbf{x} \times \hat{\rho}(\mathbf{x}, t)\hat{\mathbf{a}}(\mathbf{x}, t)dv = \int_{\mathcal{V}(t)} \mathbf{x} \times \hat{\rho}(\mathbf{x}, t)\hat{\mathbf{b}}(\mathbf{x}, t)dv + \int_{\partial\mathcal{V}(t)} \mathbf{x} \times \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{x}, t, n)da,$$

de lo cual se puede mostrar que (2.45) se reduce al requerimiento de que el tensor de esfuerzo de Cauchy es simétrico [25], es decir

$$(2.48) \quad \mathbf{T} = \mathbf{T}^T$$

2.4. Restricciones en las ecuaciones gobernantes. En esta sección se estudiarán ciertas restricciones impuestas sobre las ecuaciones constitutivas ya enunciadas, adicionalmente se descartará toda influencia no mecánica y asumiremos que el estado actual del cuerpo está completamente determinado por su historia cinemática. Para un análisis más detallado, el lector puede referirse a [9, Cap. 1, Secc. 2, pag. 9].

2.4.1. *Principio de invarianza.* Las ecuaciones constitutivas son independientes de el sistema de coordenadas utilizadas para la descripción del movimiento de un cuerpo.

2.4.2. *Principio de determinismo.* El esfuerzo en un cuerpo está determinado por la historia del movimiento del mismo y es independiente de su comportamiento futuro.

2.4.3. *Principio de acción local.* Las fuerzas de contacto sobre un partícula material son independientes del movimiento fuera de un vecindario arbitrario de la partícula.

2.4.4. *Principio de equipresencia.* Una cantidad que aparece como variable independiente en una ecuación constitutiva de un material debe estar presente en las otras a menos que viole alguna ley física o el principio de invarianza.

2.4.5. *Principio de indiferencia material.* La descripción del comportamiento de un material no es afectada por su posición y orientación (cambio de observador).

2.4.6. *Bien definido.* El problema de valor inicial asociado con las ecuaciones gobernantes de la teoría mecánica, originadas de la conservación de la masa, balance de la cantidad de movimiento lineal y de la ecuación constitutiva del tensor de esfuerzo, debe estar bien definida. Esto significa que la existencia, unicidad y dependencia de la solución en los datos puede ser mostrada.

2.4.7. *Respuesta material.* En esta sección nos enfocaremos en las restricciones que se pueden imponer a los fluidos incompresibles simples. Un fluido incompresible simple, es un fluido incompresible cuyo esfuerzo en cualquier instante está determinado por la historia de la deformación.

El comportamiento mecánico de este tipo de fluidos está completamente determinado en algunos flujos, denominados flujos viscoméricos, una vez que tres funciones materiales son conocidas para este flujo, entendiéndose por función material a aquella que solo depende de la naturaleza del material. Nos referiremos a estas tres funciones como viscoméricas.

Un ejemplo de este tipo de funciones para el flujo de cizalla simple generado por placas paralelas son la viscosidad, el primer y segundo coeficiente normal de esfuerzo, las cuales, están definidas con respecto a las componentes rectangulares de \mathbf{T} y son dadas respectivamente por

$$(2.49) \quad \eta(\dot{\gamma}_0) = \frac{T_{12}}{\dot{\gamma}_0}, \quad \psi_1(\dot{\gamma}_0) = \frac{T_{11} - T_{22}}{\dot{\gamma}_0^2}, \quad \psi_2(\dot{\gamma}_0) = \frac{T_{22} - T_{33}}{\dot{\gamma}_0^2},$$

con $\dot{\gamma}_0 \neq 0$.

3. Fluidos viscosos no lineales

La forma más general del tensor de esfuerzo para fluidos viscosos incompresibles, está dada por

$$(2.50) \quad \mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \tau(\mathbf{L}),$$

donde p es el multiplicador de Lagrange asociado con la restricción de incompresibilidad y τ no necesariamente es el tensor deviatorico definido anteriormente [9, Cap. 1, Secc. 3, pag. 18].

Usando la invarianza del tensor de los esfuerzos bajo el movimiento de un cuerpo rígido superpuesto y el teorema de representación para funciones tensoriales simétricas isotrópicas, se puede mostrar que la forma más general de (2.50) que satisface los requerimientos de invarianza es

$$(2.51) \quad \mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \phi_1(\mathcal{E}_{II}, \mathcal{E}_{III})\mathcal{E} + \phi_2(\mathcal{E}_{II}, \mathcal{E}_{III})\mathcal{E}^2.$$

Fluidos incompresibles de la forma anterior se denomina fluidos de Reiner-Rivlin.

El fluido de Navier-Stokes es un caso especial de un fluido de Reiner-Rivlin con $\phi_2 = 0$ y $\phi_1 = cte.$

3.1. Restricciones en la ecuación de Reiner-Rivlin por comportamiento de fluidos reales. La ecuación constitutiva más general de la forma $\mathbf{T} = \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{L})$ esta dada por

$$(2.52) \quad \mathbf{T} = -p\mathbf{I} + 2\eta(\mathcal{E}_{II}, \mathcal{E}_{III})\mathcal{E},$$

en la cual se desprecia la dependencia de η en \mathcal{E}_{III} , debido especialmente al comportamiento mostrado por fluidos reales y a la incapacidad de la mayoría de reómetros en determinar dicha dependencia [9, Cap. 1, Secc. 3, pag. 19]. Por otro lado, dado que \mathcal{E}_{II} no es una cantidad positiva para movimientos isocóricos, se introduce una métrica para la velocidad de deformación notada y definida como

$$(2.53) \quad \dot{\gamma} = \sqrt{2tr(\dot{\eta}^2)} = \sqrt{4|\mathcal{E}_{II}|},$$

la cual coincide con $\dot{\gamma}_0$ en el flujo de cizalla simple.

En resumen, (2.52) puede ser escrita como

$$(2.54) \quad \mathbf{T} = -p\mathbf{I} + 2\eta(\dot{\gamma})\mathcal{E} \text{ con } \dot{\gamma} = \sqrt{4|\mathcal{E}_{II}|},$$

donde p es la presión mecánica.

Fluidos con un tensor de esfuerzo como el anterior, se denominan fluidos Newtonianos generalizados. El concepto de fluido Newtoniano generalizado fue desarrollado para explicar el comportamiento no-Newtoniano similar al comportamiento lineal Newtoniano de algunos fluidos y está caracterizado por la relación no lineal entre \mathbf{T} y \mathcal{E} .

Una de las restricciones de este modelo constitutivo es no ser capaz de modelar los efectos del esfuerzo normal no nulos en fluidos reales.

4. Fluidos con límite elástico

Para describir matemáticamente este tipo de fluidos y en especial el criterio de quiebre (yield criterion), es necesario primero seleccionar una medida para el tensor de esfuerzos.

En el flujo de cizalla simple generado por placas paralelas, esto es trivial, ya que los únicos componentes no nulos del tensor de los esfuerzos son idénticos, $\tau_{12} = \tau_{21}$. En este caso la métrica vendría dada por $|\tau_{12}|$ y el criterio de quiebre podría ser escrito de manera simple como $|\tau_{12}| = g$, teniéndose que cuando $|\tau_{12}| < g$, el material se comporta como un sólido rígido, presentando una deformación no continua y cuando $|\tau_{12}| \geq g$ el material se comporta como un fluido visco-plástico, presentando una deformación continua.

Por otro lado, si el movimiento es un tanto más complejo que este flujo de cizalla simple generado por placas paralelas, el criterio anterior no es suficiente, pues no satisface el principio de invarianza de coordenadas, por lo cual, es necesario definir una métrica más general.

Para determinar dicha métrica, suponemos que el límite elástico del material no depende de p y que es una función de las invarianzas de τ , es decir

$$(2.55) \quad g = \mathfrak{f}(\tau_I, \tau_{II}, \tau_{III}),$$

donde $\tau_I = \text{tr } \tau$, $\tau_{II} = \frac{1}{2}((\text{tr } \tau)^2 - \text{tr } \tau^2)$, $\tau_{III} = \det \tau$.

En [9, Cap. I, Secc. 4, pag. 21], se afirma que la forma más simple para la métrica buscada y que satisface nuestras expectativas es

$$(2.56) \quad \mathfrak{f}(\tau_I, \tau_{II}, \tau_{III}) = \sqrt{|\tau_{II}|},$$

siendo el correspondiente criterio de quiebre

$$(2.57) \quad g = \sqrt{|\tau_{II}|}.$$

En el siguiente capítulo, definiremos un fluido de Casson, postularemos el sistema que gobierna su movimiento en una tubería y analizaremos el flujo estacionario y laminar de este tipo de fluidos.

Modelo de Casson: Flujo laminar en una tubería

En este capítulo estudiaremos el flujo estacionario y laminar de un fluido de Casson en una tubería de sección constante circular o cuadrada bajo el efecto de una pérdida de presión lineal y constante con condición de adhesión en la frontera. Iniciaremos definiendo el tensor de esfuerzo para este tipo de fluidos, luego deduciremos desde las formas más generales de las ecuaciones gobernantes el sistema constitutivo para nuestro problema en particular, posteriormente adimensionalizaremos dicho sistema y deduciremos su forma variacional. A continuación mostraremos que dicha forma variacional es una condición necesaria de un problema de optimalidad, a través del cual mostraremos la existencia y unicidad de soluciones para nuestro problema original. Posteriormente caracterizaremos dicha solución y finalmente introduciremos una familia de problemas regularizados y mostraremos la convergencia de las soluciones de dichos problemas hacia la solución de nuestro problema original.

1. Modelo de Casson

El modelo de Casson es comúnmente utilizado para la simulación de fluidos no-Newtonianos como la sangre, chocolate líquido, tinta, entre otros. Inicialmente este modelo reológico fue desarrollado para representar el límite elástico y el comportamiento pseudo-plástico de suspensiones formadas al dispersar varios tipos de pigmentos en barnices litográficos pero en la actualidad es utilizado en el desarrollo de modelos de oxigenadores de aire, hemodiálisis, etc. [4, y la bibliografía ahí].

Las ecuaciones constitutivas de este modelo están orientadas a explicar la relación no lineal existente entre \mathbf{T} y \mathcal{E} a través de una expresión de la forma

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \tau(\mathcal{E}),$$

donde τ , para este caso, viene dada por la relación [9, Cap.1, Secc. 4, pag. 25]

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \sqrt{|\tau_{II}|} \leq g &\Rightarrow \mathcal{E}_{ij} = 0 \\ \sqrt{|\tau_{II}|} > g &\Rightarrow \begin{cases} \mathcal{E}_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left(1 - \frac{\sqrt{g}}{\sqrt[4]{|\tau_{II}|}}\right)^2 \tau_{ij} \\ \tau_{ij} = 2 \left(\sqrt{\mu} + \frac{\sqrt{g}}{\sqrt[4]{4|\mathcal{E}_{II}|}}\right)^2 \mathcal{E}_{ij} \end{cases} \end{aligned}$$

En la siguiente sección deduciremos a partir de (3.1) y del principio de conservación de la masa para fluidos incompresibles, las ecuaciones constitutivas que rigen el flujo estacionario y laminar de un fluido de Casson en una tubería de sección constante con condición de adhesión.

2. Flujo laminar en una tubería

Del balance de la cantidad de movimiento lineal y la implicación del principio de conservación de la masa en fluidos incompresibles, se sabe que el sistema que rige el movimiento

de un fluido de Casson es

$$(3.2) \quad \rho \mathbf{a} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{b}$$

$$(3.3) \quad \nabla \cdot \mathbf{y} = 0,$$

sobre Ω donde $\boldsymbol{\tau}$ esta dado por

$$\boldsymbol{\tau} = 2 \left(\sqrt{\mu} + \frac{\sqrt{g}}{\sqrt[4]{4|\mathcal{E}_{II}|}} \right)^2 \boldsymbol{\mathcal{E}}$$

Para flujos estacionarios la ecuación (3.2) se reduce a

$$(3.4) \quad -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{b} = 0.$$

Adicional a esto consideramos la condición de adhesión

$$(3.5) \quad \mathbf{y} = 0 \in \Gamma.$$

Por otro lado, entenderemos por tubería a una estructura tridimensional, como un cilindro, cuyos generadores son paralelos al eje x_3 en el sistema ortonormal $x_1x_2x_3$, es decir, es una estructura que genera un movimiento de cizalla simple. Recordemos que para este tipo de movimiento el campo de velocidades puede ser escrito como

$$\mathbf{y} = f(x_1, x_2)\mathbf{e}_3.$$

Esto es equivalente a decir que $\mathbf{y} = (0, 0, y)$ y que y depende solo de x_1 y x_2 , lo cual implica que $\frac{\partial y}{\partial x_3} = 0$.

Sea $\Omega \in \mathbb{R}^2$ la sección transversal de la tubería. Estudiaremos el flujo entre dos secciones transversales $x_3 = 0$ y $x_3 = l$, donde l es una constante positiva. Para generar movimiento, impondremos valores de presión en estos puntos, es decir

$$(3.6) \quad p(x_3)|_{x_3=0} = 0 \text{ y } p(x_3)|_{x_3=l} = -cl$$

donde la constante positiva c representa el decaimiento lineal y constante de la presión por unidad de longitud. Consideraremos además que el fluido se mueve solo bajo el efecto del decaimiento de la presión en la tubería, es decir, consideramos que no hay fuerzas de contacto actuando sobre el material, es decir que $\mathbf{b}=0$.

Por lo expuesto anteriormente, se tiene que el tensor de deformación para nuestro caso está dado por

$$(3.7) \quad \boldsymbol{\mathcal{E}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial y}{\partial x_1} \\ 0 & 0 & \frac{\partial y}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y}{\partial x_1} & \frac{\partial y}{\partial x_2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Consecuentemente la ecuación (3.2) puede ser escrita como

$$(3.8) \quad \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x_1} &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial x_2} &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial x_3} &= \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{32}}{\partial x_2}. \end{aligned}$$

Del sistema anterior se sigue directamente que

$$(3.9) \quad p = -cx_3.$$

Resumiendo, buscamos un campo de velocidades $y = y(x_1, x_2)$ en Ω que satisfice

$$(3.10) \quad \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{32}}{\partial x_2} = -c, \text{ en } \Omega$$

$$(3.11) \quad y = 0 \text{ en } \Gamma$$

$$(3.12) \quad \begin{cases} \tau_{3i} = 2 \left(\sqrt{\mu} + \frac{\sqrt{g}}{\sqrt[4]{4|\mathcal{E}_{II}|}} \right)^2 \mathcal{E}_{3i} \text{ si } \mathcal{E}_{3i} \neq 0 \text{ para } i = 1, 2, \\ \sqrt{|\tau_{II}|} < g \text{ si } \mathcal{E}_{3i} = 0 \text{ para } i = 1, 2. \end{cases}$$

Con el fin de expresar el sistema anterior de manera adimensional, se utilizará el cambio de variable propuesto en [33], en el cual se nota por L , el radio de la sección transversal y por $U = cL/\mu$ la velocidad característica, con la correspondiente tasa de flujo dada por $Q = UL^2$. El número de Oldroyd generalizado es expresado como

$$(3.13) \quad Od = \frac{g}{cL},$$

el cual representa la relación entre el límite elástico y el esfuerzo viscoso y se asume en el intervalo $[0, 1/2]$. Adicionalmente se define $x = L\tilde{x}$, $y = U\tilde{y}$, $\tau_{ij} = cL\tilde{\tau}_{ij}$, $\mathcal{E}_{ij} = \frac{U}{L}\dot{\gamma}_{ij}$ y $p = cL\tilde{p}$, lo cual significa que en el sistema adimensionalizado $\tilde{c} = 1$.

Al implementar el cambio de variable se tiene que

$$(3.14) \quad \text{tr}(\mathcal{E}^2) = \text{tr}\left(\frac{U^2}{L^2}\dot{\gamma}^2\right) = \left(\frac{U}{L}\right)^2 \text{tr}(\dot{\gamma}^2)$$

y por tanto

$$(3.15) \quad |\mathcal{E}_{II}| = \frac{1}{2} \left(\frac{U}{L}\right)^2 \text{tr}(\mathcal{E}_{II}^2) = \left(\frac{U}{L}\right)^2 |\dot{\gamma}_{II}|.$$

Calculando explícitamente \mathcal{E}^2 y $|\mathcal{E}_{II}|$ se tiene

$$(3.16) \quad \mathcal{E}^2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 & \frac{\partial y}{\partial x_1} \frac{\partial y}{\partial x_2} & 0 \\ \frac{\partial y}{\partial x_1} \frac{\partial y}{\partial x_2} & \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2 \end{pmatrix},$$

y por tanto

$$(3.17) \quad |\mathcal{E}_{II}| = \frac{1}{2} \text{tr}(\mathcal{E}^2) = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2 \right] = \frac{1}{4} |\nabla y|^2.$$

Si utilizamos el hecho de que $y = U\tilde{y}$ e introducimos la convención $\nabla = L^{-1}\tilde{\nabla}$, donde $\tilde{\nabla}$ es el Laplaciano respecto a la nueva variable \tilde{x} , entonces podemos escribir la ecuación anterior de la siguiente manera

$$(3.18) \quad |\mathcal{E}_{II}| = \frac{1}{4} \left(\frac{U}{L}\right)^2 |\tilde{\nabla}\tilde{y}|^2,$$

por lo que se deduce directamente que

$$(3.19) \quad |\dot{\gamma}_{II}| = \frac{1}{4} |\tilde{\nabla}\tilde{y}|^2.$$

A continuación, si expandemos (3.12) se obtiene

$$(3.20) \quad \tau_{3i} = 2 \left(\mu + 2 \frac{\sqrt{\mu g}}{\sqrt[4]{4|\mathcal{E}_{II}|}} + \frac{g}{\sqrt[4]{4|\mathcal{E}_{II}|}} \right) \mathcal{E}_{3i}.$$

Al introducir el cambio de variable la ecuación anterior se escribe

$$(3.21) \quad cL\tau_{3i} = 2 \left(\mu + 2 \frac{\sqrt{\mu g}}{\left(\frac{U}{L}\right)^{1/2} \sqrt[4]{4|\dot{\gamma}_{II}|}} + \frac{g}{\frac{U}{L} \sqrt{4|\dot{\gamma}_{II}|}} \right) \frac{U}{L} \dot{\gamma}_{3i}.$$

Al despejar τ_{ij} y reducir términos, se tiene que

$$(3.22) \quad \begin{aligned} \tau_{3i} &= 2 \left(1 + \frac{2}{\sqrt[4]{4|\dot{\gamma}_{II}|}} \sqrt{\frac{\mu U g}{c^2 L^3}} + \frac{Od}{\sqrt{4|\dot{\gamma}_{II}|}} \right) \dot{\gamma}_{3i} \\ &= 2 \left(1 + \frac{2}{\sqrt[4]{4|\dot{\gamma}_{II}|}} \sqrt{Od} + \frac{Od}{\sqrt{4|\dot{\gamma}_{II}|}} \right) \dot{\gamma}_{3i} \end{aligned}$$

Considerando (3.19) y $\dot{\gamma}_{3i} = \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{y}}{\partial \tilde{x}_i}$, la ecuación anterior se puede escribir de la siguiente manera

$$(3.23) \quad \tau_{3i} = \left(1 + 2 \left(\frac{Od}{|\nabla \tilde{y}(x)|} \right)^{1/2} + \frac{Od}{|\nabla \tilde{y}(x)|} \right) \frac{\partial \tilde{y}}{\partial \tilde{x}_i}(\tilde{x}),$$

Descartando, por simplicidad, la notación con sombreros nuestro problema se reduce a encontrar un campo de velocidades $y = y(x_1, x_2)$ que satisface

$$(3.24) \quad -\nabla \cdot \tau(x) = 1, \text{ en } \Omega$$

$$(3.25) \quad y(x) = 0 \text{ en } \Gamma$$

$$(3.26) \quad \begin{cases} \tau = \left(1 + 2 \left(\frac{Od}{|\nabla y(x)|} \right)^{1/2} + \frac{Od}{|\nabla y(x)|} \right) \nabla y(x). \text{ si } x \in \mathcal{A} \\ |\tau(x)| \leq Od \text{ si } x \in \mathcal{I}, \end{cases}$$

con los conjuntos \mathcal{A} e \mathcal{I} , de activos e inactivos, definidos respectivamente como

$$(3.27) \quad \mathcal{A} := \{x \in \Omega : |\nabla y(x)| \neq 0\} \text{ e } \mathcal{I} := \{x \in \Omega : |\nabla y(x)| = 0\}.$$

El conjunto de activos \mathcal{A} representa las regiones del material donde se satisface el criterio de quiebre, es decir, las regiones donde el material presenta una deformación continua. Por el contrario, el conjunto de inactivos \mathcal{I} , representa las regiones donde no se satisface el criterio de quiebre, es decir, donde el material se comporta como un sólido rígido.

Finalmente, introducimos la variable q , la cual representa la parte plástica del modelo y reescribimos nuestro problema de la siguiente manera

$$(3.28) \quad -\Delta y(x) - \nabla \cdot q(x) = 1, \text{ en } \Omega$$

$$(3.29) \quad y(x) = 0 \text{ en } \Gamma$$

$$(3.30) \quad \begin{cases} q = \left(2 \left(\frac{Od}{|\nabla y(x)|} \right)^{1/2} + \frac{Od}{|\nabla y(x)|} \right) \nabla y(x). \text{ si } x \in \mathcal{A} \\ |q(x)| \leq Od \text{ si } x \in \mathcal{I}, \end{cases}$$

Si bien el sistema (3.28)-(3.30) describe el movimiento de un fluido de Casson en una tubería, nuestro interés está en una formulación variacional del mismo, por lo cual presentamos la siguiente proposición.

Proposición 3.1. *Sean \bar{y} la solución del sistema (3.28)-(3.30). Entonces, se tiene la siguiente desigualdad variacional*

$$(3.31) \quad \int_{\Omega} \left(1 + 2 \left(\frac{Od}{|\nabla \bar{y}(x)|} \right)^{1/2} \right) \nabla \bar{y}(x) \cdot \nabla (v - \bar{y})(x) dx + Od \int_{\Omega} (|\nabla v(x)| - |\nabla \bar{y}(x)|) dx - \int_{\Omega} (v - \bar{y})(x) dx \geq 0$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $v \in H_0^1(\Omega)$, multiplicamos (3.29) por $v - \bar{y}$ e integramos de manera formal sobre Ω obteniendo

$$-\int_{\Omega} (\Delta \bar{y}(x) + \nabla \cdot q(x))(v - \bar{y})(x) dx = \int_{\Omega} (v - \bar{y})(x) dx.$$

A continuación integramos por partes el lado izquierdo de la ecuación anterior, resultando

$$\int_{\Omega} \langle \nabla \bar{y}(x) + q(x), \nabla(v - \bar{y})(x) \rangle dx = \int_{\Omega} (v - \bar{y})(x) dx.$$

Al reemplazar (3.30) en la expresión anterior, podemos reescribirla como

$$\int_{\Omega} \left(1 + 2 \left(\frac{Od}{|\nabla \bar{y}(x)|} \right)^{1/2} + \frac{Od}{|\nabla \bar{y}(x)|} \right) \langle \nabla \bar{y}(x), \nabla(v - \bar{y})(x) \rangle = \int_{\Omega} (v - \bar{y})(x) dx$$

De la desigualdad de Cauchy-Schwartz se sigue que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{Od}{|\nabla \bar{y}(x)|} \langle \nabla \bar{y}(x), \nabla(v - \bar{y})(x) \rangle dx &= Od \int_{\Omega} \frac{\langle \nabla \bar{y}(x), \nabla(v - \bar{y})(x) \rangle}{|\nabla \bar{y}(x)|} dx \\ &= Od \int_{\Omega} \frac{\langle \nabla \bar{y}(x), \nabla v(x) \rangle}{|\nabla \bar{y}(x)|} dx - Od \int_{\Omega} \frac{\langle \nabla \bar{y}(x), \nabla \bar{y}(x) \rangle}{|\nabla \bar{y}(x)|} dx \\ &\leq Od \int_{\Omega} |\nabla v(x)| dx - Od \int_{\Omega} |\nabla \bar{y}(x)| dx, \end{aligned}$$

de lo cual obtenemos lo deseado. \square

La proposición anterior nos es de utilidad en el análisis de existencia y unicidad para nuestro problema, ya que (3.31) es condición necesaria de un problema de optimización no restringida, tal como se muestra en la siguiente proposición.

Proposición 3.2. *La desigualdad variacional (3.31) es condición de optimalidad necesaria del problema siguiente*

$$(3.32) \quad \min_{y \in H_0^1(\Omega)} J(y) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla y|^2 dx + \frac{4}{3} \sqrt{Od} \int_{\Omega} |\nabla y|^{\frac{3}{2}} dx + Od \int_{\Omega} |\nabla y| dx - \int_{\Omega} y dx.$$

DEMOSTRACIÓN. Ver [33, Sección 3, pag 129] \square

A continuación, analizaremos la existencia y unicidad de (3.32), para lo cual nos ayudaremos de las siguientes definiciones.

Sean

$$\begin{aligned} J_1 : H_0^1(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R} \\ y &\mapsto J_1(y) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla y|^2 dx - \int_{\Omega} y dx, \\ J_2 : L^2(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R} \\ p &\mapsto J_2(p) = \frac{4}{3} \sqrt{Od} \int_{\Omega} |p|^{\frac{3}{2}} dx + Od \int_{\Omega} |p| dx, \end{aligned}$$

dos funciones continuas y el operador $\Lambda \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega), L^2(\Omega))$, dado por

$$\Lambda y = \nabla y.$$

Ahora notemos que J se puede expresar como:

$$J(y) = J_1(y) + J_2(\Lambda y).$$

En el siguiente Lema analizaremos las propiedades de convexidad J a través de la convexidad de J_1 y J_2 .

Lema 3.3. *J es una función convexa.*

DEMOSTRACIÓN. Para nuestra demostración utilizaremos el Lema 1.12, que menciona, que si dos funciones $f_1 : C_1 \rightarrow \mathbb{R}$ y $f_2 : C_2 \rightarrow \mathbb{R}$ son convexas, y $\Lambda : C_2 \rightarrow C_1$ lineal, entonces

$$f : C_2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(u) := f_1(\Lambda u) + f_2(u),$$

es convexa. Además, si al menos una de las siguientes hipótesis se satisface, entonces f es estrictamente convexa:

- f_1 es estrictamente convexa y S inyectiva.
- f_2 es estrictamente convexa.

Para demostrar la convexidad de $J_1(y)$ se analizará por separado cada uno de sus términos. Primero, en el Ejemplo 1.11 se menciona que para todo $p \in (1, \infty)$, $\|x\|^p$ es estrictamente convexa en todo espacio normado, entonces $\|y\|_{H_0^1(\Omega)} = \int_{\Omega} |\nabla y|^2 dx$ es estrictamente convexa. Del primer literal del Lema 1.12 se tiene que el producto de una función estrictamente convexa con un escalar no negativo es estrictamente convexo, por tanto $\frac{1}{2}\|y\|_{H_0^1(\Omega)} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla y|^2 dx$ es estrictamente convexo. Por otro lado, de la linealidad de la integral se sigue directamente que $-\int_{\Omega} y dx$ es convexa, y dado que la suma de una función convexa y otra estrictamente convexa es estrictamente convexa, se concluye la convexidad estricta de $J_1(y)$.

A continuación, analizaremos la convexidad de J_2 . Sean $p, q \in L^2(\Omega)$ y $t \in (0, 1)$, entonces

$$J_2(tp + (1-t)q) = \frac{4}{3}\sqrt{Od} \int_{\Omega} |[tp + (1-t)q]|^{\frac{3}{2}} dx + Od \int_{\Omega} |[tp + (1-t)q]| dx.$$

De la convexidad de $|\cdot|^p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con $p \in [0, \infty[$ (ver Ejemplo (1.11)), se tiene que

$$\begin{aligned} & \frac{4}{3}\sqrt{Od} \int_{\Omega} |[tp + (1-t)q]|^{\frac{3}{2}} dx + Od \int_{\Omega} |[tp + (1-t)q]| dx \\ & \leq \frac{4}{3}\sqrt{Od} t \int_{\Omega} |p|^{\frac{3}{2}} dx + (1-t) \int_{\Omega} |q|^{\frac{3}{2}} dx + Od t \int_{\Omega} |p| dx + (1-t) \int_{\Omega} |q| dx \\ & = t \left[\frac{4}{3}\sqrt{Od} \int_{\Omega} |p|^{\frac{3}{2}} dx + Od \int_{\Omega} |p| dx \right] + (1-t) \left[\int_{\Omega} |q|^{\frac{3}{2}} dx + \int_{\Omega} |q| dx \right] \\ & = tJ_2(p) + (1-t)J_2(q). \end{aligned}$$

Con lo cual se tiene la convexidad de $J_2(p)$.

Dada la convexidad estricta de $J_1(y)$, la convexidad de $J_2(p)$ y la linealidad de Λ , se tiene que se satisfacen las condiciones del Lema 1.12, de lo cual se concluye lo deseado. \square

Teorema 3.4. *El problema (3.32) posee una única solución \bar{y} en $H_0^1(\Omega)$.*

DEMOSTRACIÓN. Del Teorema 1.18 se sabe que todo funcional continuo y cuasiconvexo $F : S \rightarrow \mathbb{R}$ definido sobre un subconjunto convexo, cerrado, acotado y no vacío S de un espacio de Banach reflexivo tiene al menos un punto mínimo en S . Si adicionalmente f es estrictamente convexo, entonces el punto mínimo es único.

A continuación verificaremos si J satisface las hipótesis de dicho teorema.

Se sabe que J es continua, y gracias al lema anterior es estrictamente convexa y por tanto cuasiconvexa (Corolario 1.16). Adicionalmente dado que J esta definido sobre $H_0^1(\Omega)$, el cual es un espacio de Hilbert, y dado que todo espacio de Hilbert es reflexivo, se satisfacen las demás hipótesis del Teorema 1.18, pudiéndose concluir que J tiene al menos un punto mínimo en $H_0^1(\Omega)$. Adicionalmente de la convexidad estricta de J se concluye la unicidad de las soluciones. \square

3. Procedimiento de regularización

Dado que la ecuación (3.28) incluye el operador divergencia, la solución del sistema (3.28)-(3.30) no es única [11], lo cual puede ocasionar inestabilidad en el esquema numérico. Por tanto en esta sección se introducirá una familia de problemas regularizados, con

los cuales aproximaremos nuestro sistema, este método de regularización está motivado por la regularización del tipo Huber del modelo estacionario de Bingham estudiado en [13]. Posteriormente formularemos variacionalmente el problema regularizado y finalmente demostraremos la convergencia de las soluciones en los espacios respectivos.

3.1. Regularización. En esta sección introduciremos una familia de problemas regularizados para el sistema (3.28)-(3.30) inspirados en la necesidad de encontrar una expresión de $q(x)$ en la vecindad de $x \in \Omega$ tal que $|\nabla y(x)| = 0$. Esta aproximación fue sugerida por la regularización del tipo Huber utilizada en [13], pero a diferencia de esta, la presente regularización fue obtenida a través de una “Huberización” directa del problema, la cual se presenta a continuación.

Dado un parámetro $\gamma > 0$, buscamos un $y_\gamma \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$(3.30) \quad -\Delta y_\gamma(x) - \nabla \cdot q_\gamma(x) = 1, \text{ en } \Omega$$

$$(3.31) \quad y_\gamma(x) = 0 \text{ en } \Gamma$$

$$(3.32) \quad q_\gamma(x) = \begin{cases} \left(2 \left(\frac{Od}{|\nabla y_\gamma(x)|} \right)^{1/2} + \frac{Od}{|\nabla y_\gamma(x)|} \right) \nabla y_\gamma(x) & \text{c.t.p. en } \mathcal{A}_\gamma \\ (2\sqrt{\gamma} + \gamma) \nabla y_\gamma(x) & \text{c.t.p. en } \mathcal{I}_\gamma. \end{cases}$$

Siendo en este caso definidos, los conjuntos activo e inactivo, respectivamente, por

$$(3.33) \quad \mathcal{A}_\gamma := \{x \in \Omega : \gamma |\nabla y_\gamma| \geq Od\} \text{ y } \mathcal{I}_\gamma := \Omega \setminus \mathcal{A}_\gamma.$$

La regularización q_γ caracteriza de forma continua q en todo Ω . Una de las propiedades más importantes de este procedimiento es que mantiene invariante la función q salvo en una vecindad de x en la que $|\nabla y_\gamma| = Od$, es decir, donde la forma de la función q no es conocida.

Si bien el sistema (3.30)-(3.32) regulariza el sistema que describe el flujo de un fluido de Casson en una tubería, nuevamente nuestro interés está en una formulación variacional del mismo, la misma que se analiza en la siguiente proposición.

Proposición 3.5. *Sean y_γ la solución del sistema (3.30)-(3.32). Entonces $y_\gamma \in H_0^1(\Omega)$ y satisface la formulación variacional*

$$(3.34) \quad \int_{\Omega} \langle \nabla y_\gamma(x), \nabla v(x) \rangle dx + \int_{\Omega} \langle q_\gamma(x), \nabla v(x) \rangle = \int_{\Omega} v(x) dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

DEMOSTRACIÓN. Multiplicamos (3.30) por $v \in H_0^1(\Omega)$ e integramos sobre Ω obteniendo

$$-\int_{\Omega} (\Delta y_\gamma(x) + \nabla \cdot q_\gamma(x)) v(x) dx = \int_{\Omega} v(x) dx.$$

A continuación integramos por partes el lado derecho de la ecuación anterior, resultando

$$\int_{\Omega} \langle \nabla y_\gamma(x) + q_\gamma(x), \nabla v(x) \rangle dx = \int_{\Omega} v(x) dx.$$

□

A continuación demostraremos dos resultados que nos permitirán reescribir el sistema (3.30)-(3.32) de una forma más conveniente.

Proposición 3.6. *Sea $x \in \Omega$. Entonces $x \in \mathcal{A}_\gamma$ si y solamente si*

$$(3.35) \quad \frac{(2\sqrt{\gamma} + \gamma) |\nabla y_\gamma(x)|}{2Od^{-1/2} |\nabla y_\gamma(x)| + 1} \geq Od \text{ c.t.p. en } \Omega.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $x \in \mathcal{A}_\gamma$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{(2\sqrt{\gamma} + \gamma)|\nabla y_\gamma(x)|}{2Od^{-1/2}|\nabla y_\gamma(x)| + 1} &= \frac{(2\sqrt{\gamma}|\nabla y_\gamma(x)|^{1/2})|\nabla y_\gamma(x)|^{1/2} + \gamma|\nabla y_\gamma(x)|}{2Od^{-1/2}|\nabla y_\gamma(x)| + 1} \\ &\geq \frac{2Od^{1/2}|\nabla y_\gamma(x)|^{1/2} + Od}{2Od^{-1/2}|\nabla y_\gamma(x)| + 1} \\ &= \frac{(2Od^{-1/2}|\nabla y_\gamma(x)| + 1)Od}{2Od^{-1/2}|\nabla y_\gamma(x)| + 1} = Od \end{aligned}$$

Recíprocamente, si $x \in \Omega$ es tal que satisface (3.35), entonces

$$2\gamma^{1/2}|\nabla y_\gamma(x)| + \gamma|\nabla y_\gamma(x)| \geq 2Od^{1/2}|\nabla y_\gamma(x)|^{1/2} + Od.$$

Pasando todos los términos al lado izquierdo

$$2\gamma^{1/2}|\nabla y_\gamma(x)| + \gamma|\nabla y_\gamma(x)| - 2Od^{1/2}|\nabla y_\gamma(x)|^{1/2} - Od \geq 0.$$

Agrupando el primer término con el tercero y el segundo término con el cuarto en la inecuación anterior se tiene

$$(3.36) \quad 2(\gamma^{1/2}|\nabla y_\gamma(x)|^{1/2} - Od^{1/2})|\nabla y_\gamma(x)|^{1/2} + (\gamma|\nabla y_\gamma(x)| - Od) \geq 0.$$

Si suponemos que $\gamma|\nabla y_\gamma(x)| < Od$, entonces $\gamma^{1/2}|\nabla y_\gamma(x)|^{1/2} < Od^{1/2}$ y por tanto

$$2(\gamma^{1/2}|\nabla y_\gamma(x)|^{1/2} - Od^{1/2})|\nabla y_\gamma(x)|^{1/2} + (\gamma|\nabla y_\gamma(x)| - Od) < 0,$$

lo cual contradice (3.36). Por tanto necesariamente $\gamma|\nabla y_\gamma(x)| \geq Od$. \square

Proposición 3.7. *La ecuación (3.32) puede ser equivalentemente escrita como*

$$(3.37) \quad \max \left\{ Od, \frac{(2\sqrt{\gamma} + \gamma)|\nabla y_\gamma(x)|}{2Od^{-1/2}|\nabla y_\gamma(x)| + 1} \right\} q_\gamma(x) = (2\sqrt{\gamma} + \gamma)Od\nabla y_\gamma(x) \text{ c.t.p. en } \Omega.$$

DEMOSTRACIÓN. De (3.37), se tiene que

$$(3.38) \quad q_\gamma(x) = \frac{(2\sqrt{\gamma} + \gamma)Od\nabla y_\gamma}{\max \left\{ Od, \frac{(2\sqrt{\gamma} + \gamma)|\nabla y_\gamma|}{2Od^{-1/2}|\nabla y_\gamma| + 1} \right\}} \text{ c.t.p. en } \Omega.$$

Ahora mostraremos que (3.38) implica (3.32). Para esto supongamos que $Od \leq \gamma|\nabla y_\gamma|$, es decir en el conjunto de activos. Por tanto gracias a la Proposición 3.6 podemos reescribir (3.38) como

$$\begin{aligned} q_\gamma(x) &= \frac{(2\sqrt{\gamma} + \gamma)Od\nabla y_\gamma}{\frac{(2\sqrt{\gamma} + \gamma)|\nabla y_\gamma|}{2Od^{-1/2}|\nabla y_\gamma| + 1}} \\ &= \frac{(2\sqrt{\gamma} + \gamma)Od\nabla y_\gamma(2Od^{-1/2}|\nabla y_\gamma| + 1)}{(2\sqrt{\gamma} + \gamma)|\nabla y_\gamma|} \\ &= \left(2Od^{1/2}|\nabla y_\gamma(x)|^{1/2} + Od \right) \frac{|\nabla y_\gamma(x)|}{|\nabla y_\gamma(x)|} \\ &= \left(2 \left(\frac{Od}{|\nabla y_\gamma(x)|} \right)^{1/2} + \frac{Od}{|\nabla y_\gamma(x)|} \right) \nabla y_\gamma(x) \text{ c.t.p. en } \mathcal{A}_\gamma. \end{aligned}$$

De manera similar, del la Proposición 3.6 se tiene que si

$$\frac{(2\sqrt{\gamma} + \gamma)|\nabla y_\gamma(x)|}{2Od^{-1/2}|\nabla y_\gamma(x)| + 1} \geq Od \text{ c.t.p. en } \Omega$$

entonces $x \in \mathcal{A}_\gamma$, y por tanto si $x \in \mathcal{I}_\gamma$ entonces

$$\frac{(2\sqrt{\gamma} + \gamma)|\nabla y_\gamma(x)|}{2Od^{-1/2}|\nabla y_\gamma(x)| + 1} < Od \text{ c.t.p. en } \Omega$$

de lo cual se concluye que

$$q_\gamma(x) = (2\sqrt{\gamma} + \gamma)\nabla y_\gamma(x) \text{ c.t.p. en } \mathcal{I}_\gamma.$$

Recíprocamente, para probar que (3.32) implica (3.38), distinguiremos entre los dos casos de (3.32). Supongamos que $\gamma|\nabla y(x)| \geq Od$ c.t.p., entonces, gracias a la Proposición (3.6) se tiene que

$$\begin{aligned} \text{máx} \left\{ Od, \frac{(2\sqrt{\gamma} + \gamma)|\nabla y_\gamma(x)|}{2Od^{-1/2}|\nabla y_\gamma(x)| + 1} \right\} q_\gamma(x) &= \frac{(2\sqrt{\gamma} + \gamma)|\nabla y_\gamma(x)|}{2Od^{-1/2}|\nabla y_\gamma(x)| + 1} q_\gamma(x) \\ &= (2\sqrt{\gamma} + \gamma)Od\nabla y_\gamma(x) \text{ c.t.p. en } \mathcal{A}_\gamma. \end{aligned}$$

Al despejar $q_\gamma(x)$ de la ecuación anterior obtenemos

$$\begin{aligned} q_\gamma(x) &= \frac{(2Od^{-1/2}|\nabla y_\gamma(x)| + 1)Od\nabla y_\gamma(x)}{|\nabla y_\gamma(x)|} \\ &= \left(2 \left(\frac{Od}{|\nabla y_\gamma(x)|} \right)^{1/2} + \frac{Od}{|\nabla y_\gamma(x)|} \right) \nabla y_\gamma(x) \text{ c.t.p. en } \mathcal{A}_\gamma. \end{aligned}$$

De manera similar, si suponemos que $\gamma|\nabla y(x)| < Od$ c.t.p., se tiene, gracias a la Proposición (3.6), que

$$\begin{aligned} \text{máx} \left\{ Od, \frac{(2\sqrt{\gamma} + \gamma)|\nabla y_\gamma(x)|}{2Od^{-1/2}|\nabla y_\gamma(x)| + 1} \right\} q_\gamma(x) &= Od q_\gamma(x) \\ &= Od(2\sqrt{\gamma} + \gamma)\nabla y_\gamma(x) \text{ c.t.p. en } \mathcal{I}_\gamma. \end{aligned}$$

□

Las proposiciones anteriores nos permiten reescribir nuestro problema regularizado como

$$(S_\gamma) \quad \begin{cases} \int_{\Omega} \langle \nabla y_\gamma(x), \nabla v(x) \rangle dx + \int_{\Omega} \langle q_\gamma(x), \nabla v(x) \rangle dx = \int_{\Omega} v(x) dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ \text{máx} \left\{ Od, \frac{(2\sqrt{\gamma} + \gamma)|\nabla y_\gamma(x)|}{2Od^{-1/2}|\nabla y_\gamma(x)| + 1} \right\} q_\gamma(x) = (2\sqrt{\gamma} + \gamma)Od\nabla y_\gamma(x) \text{ c.t.p. en } \Omega. \end{cases}$$

En el siguiente teorema demostraremos la convergencia de las soluciones del problema regularizado hacia las soluciones originales, para esto supondremos lo siguiente.

Suposición 3.8. Supongamos que existe un $M > 0$ tal que $|\nabla \bar{y}(x)| \leq M$ c.t.p. en Ω .

Teorema 3.9. Sean (\bar{y}, \bar{q}) y (y_γ, q_γ) las soluciones del sistema original (3.28)-(3.30) y regularizado (3.30)-(3.32) respectivamente. Sea $\gamma \in (0, \infty)$. Entonces la solución y_γ del problema regularizado converge fuertemente a la solución \bar{y} del problema original en $H_0^1(\Omega)$. Además, q_γ converge débilmente a \bar{q} en $\mathbf{L}^2(\Omega)$

DEMOSTRACIÓN. Iniciemos recordando que las soluciones (\bar{y}, \bar{q}) y (y_γ, q_γ) satisfacen las ecuaciones

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \langle \nabla \bar{y}(x), \nabla v(x) \rangle dx + \int_{\Omega} \langle \bar{q}(x), \nabla v(x) \rangle dx &= \int_{\Omega} v(x) dx, \\ \int_{\Omega} \langle \nabla y_\gamma(x), \nabla v(x) \rangle dx + \int_{\Omega} \langle q_\gamma(x), \nabla v(x) \rangle dx &= \int_{\Omega} v(x) dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \end{aligned}$$

Restando las dos ecuaciones anteriores se tiene

$$\int_{\Omega} \langle \nabla \bar{y}(x) - \nabla y_\gamma(x), \nabla v(x) \rangle dx = \int_{\Omega} \langle q_\gamma(x) - \bar{q}(x), \nabla v(x) \rangle dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

Tomando $v := \bar{y} - y_\gamma$ en la ecuación anterior obtenemos

$$(3.39) \quad \int_{\Omega} |\nabla(\bar{y} - y_{\gamma})(x)|^2 dx = \int_{\Omega} \langle q_{\gamma}(x) - \bar{q}(x), \nabla(\bar{y} - y_{\gamma})(x) \rangle dx.$$

A continuación estableceremos cotas puntuales para

$$\langle q_{\gamma}(x) - \bar{q}(x), \nabla(\bar{y} - y_{\gamma})(x) \rangle,$$

en los siguientes conjuntos disjuntos $\mathcal{A} \cap \mathcal{A}_{\gamma}$, $\mathcal{A} \cap \mathcal{I}_{\gamma}$, $\mathcal{A}_{\gamma} \cap \mathcal{I}$ y $\mathcal{I} \cap \mathcal{I}_{\gamma}$.

En $\mathcal{A} \cap \mathcal{A}_{\gamma}$: Aquí utilizaremos el hecho de que

$$\bar{q}(x) = \left(2 \left(\frac{Od}{|\nabla \bar{y}(x)|} \right)^{1/2} + \frac{Od}{|\nabla \bar{y}(x)|} \right) \nabla \bar{y}(x)$$

y

$$q_{\gamma} = \left(2 \left(\frac{Od}{|\nabla y_{\gamma}(x)|} \right)^{1/2} + \frac{Od}{|\nabla y_{\gamma}(x)|} \right) \nabla y_{\gamma}(x),$$

con lo cual tenemos la siguiente estimación puntual

$$(3.40) \quad \begin{aligned} \langle q_{\gamma}(x) - \bar{q}(x), \nabla(\bar{y} - y_{\gamma})(x) \rangle &\leq \left[2 \left(\frac{Od}{|\nabla \bar{y}(x)|} \right)^{1/2} + \frac{Od}{|\nabla \bar{y}(x)|} \right] |\nabla \bar{y}(x)| |\nabla y_{\gamma}(x)| \\ &\quad + \left[2 \left(\frac{Od}{|\nabla y_{\gamma}(x)|} \right)^{1/2} + \frac{Od}{|\nabla y_{\gamma}(x)|} \right] |\nabla \bar{y}(x)| |\nabla y_{\gamma}(x)| \\ &\quad - \left[2 \left(\frac{Od}{|\nabla \bar{y}(x)|} \right)^{1/2} + \frac{Od}{|\nabla \bar{y}(x)|} \right] |\nabla \bar{y}(x)|^2 \\ &\quad - \left[2 \left(\frac{Od}{|\nabla y_{\gamma}(x)|} \right)^{1/2} + \frac{Od}{|\nabla y_{\gamma}(x)|} \right] |\nabla y_{\gamma}(x)|^2 \\ &= 2Od^{1/2} (|\nabla \bar{y}(x)|^{1/2} |\nabla y_{\gamma}(x)| + |\nabla \bar{y}(x)| |\nabla y_{\gamma}(x)|^{1/2}) \\ &\quad - 2Od^{1/2} (|\nabla \bar{y}(x)|^{3/2} + |\nabla y_{\gamma}(x)|^{3/2}) \\ &= 2Od^{1/2} |\nabla \bar{y}(x)|^{1/2} (|\nabla y_{\gamma}(x)| - |\nabla \bar{y}(x)|) \\ &\quad + 2Od^{1/2} |\nabla y_{\gamma}(x)|^{1/2} (|\nabla \bar{y}(x)| - |\nabla y_{\gamma}(x)|) \\ &= 2Od^{1/2} (|\nabla \bar{y}(x)|^{1/2} - |\nabla y_{\gamma}(x)|^{1/2}) (|\nabla y_{\gamma}(x)| - |\nabla \bar{y}(x)|). \end{aligned}$$

Si a y b son dos números positivos, y suponemos que $a \leq b$, entonces $a^{1/2} \leq b^{1/2}$ y por tanto $(a - b)(b^{1/2} - a^{1/2}) \leq 0$. De igual manera, si suponemos que $a \geq b$, entonces $a^{1/2} \geq b^{1/2}$ y $(a - b)(b^{1/2} - a^{1/2}) \leq 0$. De esta forma, si tomamos en (3.40), $a = |\nabla \bar{y}(x)|$ y $b = |\nabla y_{\gamma}(x)|$ entonces inmediatamente se tiene que

$$(|\nabla \bar{y}(x)|^{1/2} - |\nabla y_{\gamma}(x)|^{1/2}) (|\nabla y_{\gamma}(x)| - |\nabla \bar{y}(x)|) \leq 0,$$

y por tanto

$$(3.41) \quad \langle q_{\gamma}(x) - \bar{q}(x), \nabla(\bar{y} - y_{\gamma})(x) \rangle \leq 0 \text{ c.t.p. en } \Omega.$$

En $\mathcal{A} \cap \mathcal{I}_\gamma$: Aquí utilizaremos el hecho de que $\bar{q}(x) = \left(2 \left(\frac{Od}{|\nabla \bar{y}(x)|}\right)^{1/2} + \frac{Od}{|\nabla \bar{y}(x)|}\right) \nabla \bar{y}(x)$, $q_\gamma = (2\sqrt{\gamma} + \gamma) \nabla y_\gamma(x)$ y $\gamma |\nabla y_\gamma(x)| < Od$, con lo cual obtenemos

$$\begin{aligned}
& \langle q_\gamma(x) - \bar{q}(x), \nabla(\bar{y} - y_\gamma)(x) \rangle \\
& \leq \left[2\sqrt{\gamma} + \gamma + 2 \left(\frac{Od}{|\nabla \bar{y}(x)|}\right)^{1/2} + \frac{Od}{|\nabla \bar{y}(x)|} \right] |\nabla \bar{y}(x)| |\nabla y_\gamma(x)| \\
& \quad - (2\sqrt{\gamma} + \gamma) |\nabla y_\gamma(x)|^2 - \left(2 \left(\frac{Od}{|\nabla \bar{y}(x)|}\right)^{1/2} + \frac{Od}{|\nabla \bar{y}(x)|}\right) |\nabla \bar{y}(x)|^2 \\
& = 2\sqrt{\gamma} |\nabla \bar{y}(x)| |\nabla y_\gamma(x)| + \gamma |\nabla \bar{y}(x)| |\nabla y_\gamma(x)| \\
& \quad + 2Od^{1/2} |\nabla \bar{y}(x)|^{1/2} |\nabla y_\gamma(x)| + Od |\nabla y_\gamma(x)| \\
& \quad - 2\sqrt{\gamma} |\nabla y_\gamma(x)|^2 - \gamma |\nabla y_\gamma(x)|^2 - 2Od^{1/2} |\nabla \bar{y}(x)|^{3/2} - Od |\nabla \bar{y}(x)| \\
& < 2 \frac{Od |\nabla \bar{y}(x)|}{\gamma^{1/2}} + Od |\nabla \bar{y}(x)| + 2 \frac{Od^{3/2} |\nabla \bar{y}(x)|^{1/2}}{\gamma} + \frac{Od^2}{\gamma} \\
& \quad - 2\sqrt{\gamma} |\nabla y_\gamma(x)|^2 - \gamma |\nabla y_\gamma(x)|^2 - 2Od^{1/2} |\nabla \bar{y}(x)|^{3/2} - Od |\nabla \bar{y}(x)| \\
& \leq 2 \frac{Od |\nabla \bar{y}(x)|}{\gamma^{1/2}} + 2 \frac{Od^{3/2} |\nabla \bar{y}(x)|^{1/2}}{\gamma} + \frac{Od^2}{\gamma}.
\end{aligned}$$

De la Suposición (3.8) se puede concluir que

$$(3.42) \quad \langle q_\gamma(x) - \bar{q}(x), \nabla(\bar{y} - y_\gamma)(x) \rangle \leq 2 \frac{OdM}{\gamma^{1/2}} + 2 \frac{Od^{3/2}M^{1/2}}{\gamma} + \frac{Od^2}{\gamma} \text{ c.t.p. en } \Omega.$$

En $\mathcal{A}_\gamma \cap \mathcal{I}$: Aquí utilizaremos el hecho de que

$$\nabla \bar{y}(x) = 0, \text{ y } q_\gamma = \left(2 \left(\frac{Od}{|\nabla y_\gamma(x)|}\right)^{1/2} + \frac{Od}{|\nabla y_\gamma(x)|}\right) \nabla y_\gamma(x),$$

de donde tenemos

$$\begin{aligned}
& \langle q_\gamma(x) - \bar{q}(x), \nabla(\bar{y} - y_\gamma)(x) \rangle \\
& = - \left(2 \left(\frac{Od}{|\nabla y_\gamma(x)|}\right)^{1/2} + \frac{Od}{|\nabla y_\gamma(x)|}\right) |\nabla y_\gamma(x)|^2 + \langle \mathbf{q}(x), \nabla y_\gamma(x) \rangle \\
& \leq |\bar{q}(x)| |\nabla y_\gamma(x)| - Od |\nabla y_\gamma(x)| - 2Od^{1/2} |\nabla y_\gamma(x)|^{3/2} \\
(3.43) \quad & = (|\bar{q}(x)| - Od) |\nabla y_\gamma(x)| - 2Od^{1/2} |\nabla y_\gamma(x)|^{3/2} \leq 0.
\end{aligned}$$

En $\mathcal{I}_\gamma \cap \mathcal{I}$: Aquí utilizaremos el hecho de que $\nabla \bar{y}(x) = 0$, $q_\gamma = (2\sqrt{\gamma} + \gamma) \nabla y_\gamma(x)$, $\gamma |\nabla y_\gamma(x)| < Od$ y $|\bar{q}(x)| < Od$, con lo cual obtenemos

$$\begin{aligned}
(3.44) \quad \langle q_\gamma(x) - \bar{q}(x), \nabla(\bar{y} - y_\gamma)(x) \rangle & \leq -(2\sqrt{\gamma} + \gamma) |\nabla y_\gamma(x)|^2 + \langle \bar{q}(x), \nabla y_\gamma(x) \rangle \\
& \leq |\bar{q}(x)| |\nabla y_\gamma(x)| - (2\sqrt{\gamma} + \gamma) |\nabla y_\gamma(x)|^2 \\
& < Od |\nabla y_\gamma(x)| - (2\sqrt{\gamma} + \gamma) |\nabla y_\gamma(x)|^2 \\
& = (Od - \gamma |\nabla y_\gamma(x)|) |\nabla y_\gamma(x)| - 2\sqrt{\gamma} |\nabla y_\gamma(x)|^2 \leq \frac{Od^2}{\gamma}.
\end{aligned}$$

Dado que los conjuntos disjuntos $\mathcal{A} \cap \mathcal{A}_\gamma$, $\mathcal{A} \cap \mathcal{I}_\gamma$, $\mathcal{A}_\gamma \cap \mathcal{I}$ y $\mathcal{I} \cap \mathcal{I}_\gamma$ generan una partición de Ω , (3.39) y las estimaciones (3.40), (3.41), (3.42) y (3.43) implican que

$$(3.45) \quad \int_{\Omega} |\nabla(\bar{y} - y_\gamma)(x)|^2 dx < \int_{\Omega} \left(2 \frac{OdM}{\gamma^{1/2}} + 2 \frac{Od^{3/2}M^{1/2}}{\gamma} + \frac{Od^2}{\gamma}\right) dx.$$

De esta forma se tiene que $y_\gamma \rightarrow \bar{y}$ fuertemente en $H_0^1(\Omega)$ cuando $\gamma \rightarrow \infty$.

Adicionalmente se tiene que $q_\gamma \rightarrow \bar{q}$ débilmente en $\nabla(H_0^1(\Omega))$, gracias a que $y_\gamma \rightarrow \bar{y}$ fuertemente en $H_0^1(\Omega)$ y a (3.39), donde

$$\nabla(H_0^1(\Omega)) := \{q \in \mathbf{L}^2(\Omega) : \exists v \in H_0^1(\Omega) \text{ tal que } q = \nabla v\}.$$

□

Observación 3.1. La Suposición 3.8 es un resultado cuya demostración escapa a los alcances de este proyecto de titulación. Sin embargo, es un resultado de regularidad que puede ser probado mediante métodos variacionales como aquellos utilizados en [7] para el caso de fluidos de Bingham. En efecto, en [7, Teorema 3.4.4] se concluye que la solución del problema de Bingham tiene regularidad $C^{1,\lambda}(\Omega)$, donde λ es una constante adecuada. Esto implica que $\nabla u \in C^{0,\lambda}(\Omega)$, lo que implica la acotación puntual del gradiente.

Observación 3.2. Gracias a la convergencia de las soluciones del sistema (S_γ) hacia las soluciones de nuestro problema original mostrada en el teorema anterior, en el siguiente capítulo propondremos un algoritmo para la solución numérica de nuestro problema, motivados por [13] y la bibliografía citada ahí.

Simulación numérica del flujo

En este capítulo se discretizará el sistema de optimalidad regularizado (S_γ) , luego se estudiará el problema tipo Newton relacionado y se calcularán los tamaños de paso en las variables involucradas. Finalmente se desarrollará un algoritmo tipo Newton y se mostrará su convergencia superlineal.

1. Discretización del sistema de optimalidad

En esta sección discretizaremos el sistema (S_γ) utilizando elementos finitos. De aquí en adelante identificaremos las cantidades discretizadas por el superíndice h . Para un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ cualquiera, notamos por $D(\vec{v}) := \text{diag}(\vec{v})$ la matriz diagonal $n \times n$ cuyas entradas diagonales son las componentes de \vec{v} . Adicionalmente notamos por \star el producto vectorial de Hadamard, es decir, $\vec{v} \star \vec{w} = (v_1 w_1, \dots, v_n w_n)^T$.

Sean los espacios de dimensión finita $V^h \subset H_0^1(\Omega)$ y $W^h \subset \mathbf{L}^2(\Omega)$, definimos la aproximación en elementos finitos de (S_γ) a través del siguiente problema: encontrar $y^h \in V^h$ y $q^h \in W^h$, tal que

$$(4.1) \quad \begin{cases} \int_{\Omega} \langle \nabla y^h, \nabla v^h \rangle dx + \int_{\Omega} \langle q^h, \nabla v^h \rangle dx = \int_{\Omega} v^h dx \quad \forall v \in V^h \\ \text{máx} \left(Od, \frac{(2\gamma^{1/2} + \gamma)|\nabla y^h|}{2Od^{-1/2}|\nabla y^h| + 1} \right) q^h = Od(2\gamma^{1/2} + \gamma)\nabla y^h, \text{ c.t.p. en } \Omega, \forall \gamma > 0. \end{cases}$$

Dado que nuestro objetivo es aproximar este sistema con elementos finitos de primer orden, tomamos como V^h y W^h los siguientes espacios de dimensión finita

$$\begin{aligned} V^h &:= \{\eta \in C(\bar{\Omega}) : \eta|_T \in \Phi_1, \text{ para todo } T \in \mathcal{T}^h\} \\ W^h &:= \{q^h := (q_1^h, q_2^h) \in \mathbf{L}^2(\Omega) : q_1^h|_T, q_2^h|_T \in \Phi_0, \text{ para todo } T \in \mathcal{T}^h\}, \end{aligned}$$

donde Φ_k representa el espacio de todos los polinomios sobre \mathbb{R}^n de grado menor o igual a k , \mathcal{T}^h es una triangulación regular de Ω en el sentido de Ciarlet, es decir, los nodos de la malla están en los vértices del triángulo y los elementos de la malla son disjuntos [1].

Tomamos la base $B_V^h := \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ y $B_W^h := \{\rho_1, \dots, \rho_{2m}\}$ de V^h y W^h respectivamente, donde $\dim(V^h) = n$ y $\dim(W^h) = 2m$. De esta forma tenemos que, $y^h = \sum_{i=1}^n y_i \varphi_i$ y $q^h = \sum_{k=1}^{2m} q_k \rho_k$.

Gracias a esta definición, la primera ecuación en (4.1) puede ser escrita de forma equivalente por

$$(4.2) \quad A^h \vec{y} + Q^h \vec{q} = f^h$$

donde los componentes de los vectores $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ y $\vec{q} \in \mathbb{R}^{2m}$ son los coeficientes de las bases nodales B_V^h y B_W^h de la pareja de elementos finitos (y^h, q^h) y las matrices $A^h \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y

$Q^h \in \mathbb{R}^{n \times 2m}$ con respecto a las bases V^h y W^h están dadas por

$$A^h = (a_{ij}), \text{ donde } a_{ij} := \sum_{T \in \mathcal{T}^h} \int_T \langle \nabla \varphi_i, \nabla \varphi_j \rangle dx, \text{ para } i, j = 1, \dots, n.$$

$$Q^h = (q_{jk}), \text{ donde } q_{jk} := \sum_{T \in \mathcal{T}^h} \int_T \langle \rho_k, \nabla \varphi_j \rangle dx, \text{ para } j = 1, \dots, n \text{ y } k = 1, \dots, 2m.$$

El lado derecho f^h está dado por

$$f^h := (f_j), \text{ donde } f_j = \sum_{T \in \mathcal{T}^h} \int_T \varphi_j dx, \text{ para } j = 1, \dots, n.$$

Aproximaremos f^h siguiendo [1, pag. 123], es decir

$$\int_T \varphi_j dx \approx \frac{1}{6} \det \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix}$$

donde (x_i, y_i) , $i, j = 1, 2, 3$, son los vértices de T . Aquí consideramos que $\Omega \subset \cup_{T \in \mathcal{T}^h} T$.

A continuación analizaremos la segunda ecuación en (4.1). Primero, dado que $y^h \in V^h \subset H_0^1(\Omega)$, concluimos que $\nabla y^h \in W^h \subset \mathbf{L}^2(\Omega)$. De esta manera, la ecuación

$$(4.3) \quad \text{máx} \left(Od, \frac{(2\gamma^{1/2} + \gamma)|\nabla y^h|}{2Od^{-1/2}|\nabla y^h|^{1/2} + 1} \right) q^h = Od(2\gamma^{1/2} + \gamma)\nabla y^h, \text{ c.t.p. en } \Omega, \forall \gamma > 0,$$

es una relación puntual en el espacio W^h .

Ahora, construiremos una formulación equivalente de (4.3) en términos de los vectores \vec{y} y \vec{q} , respectivamente.

Iniciemos notando que

$$(4.4) \quad \rho_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{en } T_k \in \mathcal{T}^h \\ 0 & \text{caso contrario,} \end{cases}$$

con $k = 1, \dots, 2m$.

Así que, proponemos la siguiente versión discreta del gradiente

$$(4.5) \quad \nabla^h := \begin{pmatrix} \partial_1^h \\ \partial_2^h \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2m \times n},$$

donde $\partial_1^h := \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x_1}|_{T_k}$ y $\partial_2^h := \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x_2}|_{T_k}$, para $i = 1, \dots, n$ y $k = 1, \dots, m$. Notemos que $\frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x_1}|_{T_k}$ y $\frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x_2}|_{T_k}$ son los valores constantes de $\frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x_1}$ y $\frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x_2}$ en cada triángulo T_k , respectivamente. Esta definición fue tomada de [13, Cap. 3, Secc. 6, pag. 82], donde la siguiente caracterización de $\nabla y^h(x)$ en términos de las funciones de prueba ρ_k , $k = 1, \dots, 2m$, es introducida

$$(4.6) \quad \begin{aligned} \frac{\partial y^h}{\partial x_1}(x) &= \frac{1}{2} \sum_{T_k \in \mathcal{T}^h} \left(\sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} y_i \right)_k \right) \rho_k(x), \text{ para } i = 1, \dots, n, k = 1, \dots, m, \\ \frac{\partial y^h}{\partial x_2}(x) &= \frac{1}{2} \sum_{T_k \in \mathcal{T}^h} \left(\sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2} y_i \right)_k \right) \rho_k(x), \text{ para } i = 1, \dots, n, k = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Para calcular $\frac{|\nabla y^h|}{2Od^{-1/2}|\nabla y^h|^{1/2} + 1}$ en términos de \vec{y} , definimos las funciones $\xi : \mathbb{R}^{2m} \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$ y $\zeta : \mathbb{R}^{2m} \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$ por

$$(4.7) \quad \begin{aligned} (\xi(p))_k &= (\xi(p))_{k+m} := |(p_k, p_{k+m})^T|, \\ (\zeta(p))_k &= (\zeta(p))_{k+m} := \frac{1}{2Od^{-1/2}|(p_k, p_{k+m})^T|^{1/2} + 1} = \frac{1}{2Od^{-1/2}(\xi(p))_k^{1/2} + 1}, \end{aligned}$$

con $p \in \mathbb{R}^{2m}$, $k = 1, \dots, m$.

De esta manera, $(\xi(\nabla^h \vec{y}))_k$ representa el valor de $|\nabla y^h(x)|$ en cada triángulo T_k . Utilizando las definiciones dadas, podemos escribir el problema discreto equivalente de (4.3) como

$$(4.8) \quad \text{máx} \left(Od \vec{e}, (2\gamma^{1/2} + \gamma)\xi(\nabla^h \vec{y}) \star \zeta(\nabla^h \vec{y}) \right) \star \vec{q} = Od(2\gamma^{1/2} + \gamma)\nabla^h \vec{y}, \forall \gamma > 0,$$

donde $\vec{e} \in \mathbb{R}^{2m}$ es un vector donde todas sus componentes son uno.

Finalmente se tiene que el sistema de optimalidad discreto está dado por

$$(4.9) \quad \begin{cases} A^h \vec{y} + Q^h \vec{q} = f^h \\ \text{máx} \left(Od \vec{e}, (2\gamma^{1/2} + \gamma)\xi(\nabla^h \vec{y}) \star \zeta(\nabla^h \vec{y}) \right) \star \vec{q} = Od(2\gamma^{1/2} + \gamma)\nabla^h \vec{y}, \forall \gamma > 0. \end{cases}$$

Observación 4.1. Para una malla uniforme, se tiene que

$$Q^h = |T|(\nabla^h)^T,$$

donde $|T|$ representa el área constante de cualquier triángulo en \mathcal{T}^h [13, Cap. 3, Secc. 6].

2. Paso de Newton aproximado

En esta sección estamos interesados en el problema

$$(4.10) \quad F(\vec{y}, \vec{q}) := \begin{bmatrix} A^h \vec{y} + Q^h \vec{q} - f^h \\ \text{máx} \left(Od \vec{e}, (2\gamma^{1/2} + \gamma)\xi(\nabla^h \vec{y}) \star \zeta(\nabla^h \vec{y}) \right) \star \vec{q} - Od(2\gamma^{1/2} + \gamma)\nabla^h \vec{y} \end{bmatrix} = 0$$

De los resultados expuestos en [13, Cap. 3, Secc. 6, y la bibliografía citada ahí], sabemos que el operador máx, y la función norma ξ son semisuaves. Además, por los teoremas de regla de la cadena, tales como [13, Cap. 1, Secc. 4, Teorema 1.15] y [31, Cap. 2, Prop. 2.7 y Prop. 2.9], se obtiene la semisuavidad de ζ y se garantiza la semisuavidad necesaria en las funciones que componen (4.10).

Se sabe adicionalmente por (1.10), que el Jacobiano generalizado del operador $\text{máx}(Od \vec{e}, \cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, es la matriz diagonal definida por

$$(4.11) \quad (G_{\text{max}}(\vec{y}))_{ii} := \begin{cases} 1 & \text{si } y_i \geq Od, \\ 0 & \text{si } y_i < Od, \end{cases} \text{ para } 1 \leq i \leq n.$$

De esta forma, se tiene que el Jacobiano generalizado de F , esta dado por la matriz $\mathbb{R}^{(2m+n) \times (2m+n)}$ definida por

$$(4.12) \quad G_F(\vec{y}, \vec{q}) := \begin{bmatrix} A^h & Q^h \\ -(2\gamma^{1/2} + \gamma)K^h \nabla^h & D(m^h) \end{bmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned} G & \left(\text{máx} \left(Od \vec{e}, (2\gamma^{1/2} + \gamma)\xi(\nabla^h \vec{y}) \star \zeta(\nabla^h \vec{y}) \right) \star \vec{q} - Od(2\gamma^{1/2} + \gamma)\nabla^h \vec{y} \right) \\ &= G \left(\text{máx} \left(Od \vec{e}, (2\gamma^{1/2} + \gamma)\xi(\nabla^h \vec{y}) \star \zeta(\nabla^h \vec{y}) \right) \star \vec{q} \right) - G \left(Od(2\gamma^{1/2} + \gamma)\nabla^h \vec{y} \right) \\ &= D(t^h)D(\vec{q})G \left((2\gamma^{1/2} + \gamma)\xi(\nabla^h \vec{y}) \star \zeta(\nabla^h \vec{y}) \right) - Od(2\gamma^{1/2} + \gamma)\nabla^h \\ &= (2\gamma^{1/2} + \gamma) \left(D(t^h) \left[P^h(\nabla^h \vec{y})D(\zeta(\nabla^h \vec{y})) + R^h(\nabla^h \vec{y})D(\xi(\nabla^h \vec{y})) \right] D(\vec{q}) - Od I_{2m} \right) \nabla^h \\ &= -(2\gamma^{1/2} + \gamma)K^h \nabla^h, \end{aligned}$$

$$K^h := (Od I_{2m} - D(t^h) \left[P^h(\nabla^h \vec{y})D(\zeta(\nabla^h \vec{y})) + R^h(\nabla^h \vec{y})D(\xi(\nabla^h \vec{y})) \right] D(\vec{q})),$$

$$m^h := \text{máx} \left(Od \vec{e}, (2\gamma^{1/2} + \gamma)\xi(\nabla^h \vec{y}) \star \zeta(\nabla^h \vec{y}) \right) \text{ y } t^h \text{ es tal que}$$

$$(t^h)_i := \begin{cases} 1 & \text{si } (2\gamma^{1/2} + \gamma)(\xi(\nabla^h \vec{y}))_i (\zeta(\nabla^h \vec{y}))_i \geq Od \\ 0 & \text{de lo contrario.} \end{cases}$$

Con el fin de expresar t^h de forma más compacta, presentamos el siguiente resultado

Proposición 4.1. $(2\gamma^{1/2} + \gamma)(\xi(\nabla^h \vec{y}))_i (\zeta(\nabla^h \vec{y}))_i \geq Od$ si y solamente si $\gamma(\xi(\nabla^h \vec{y}))_i \geq Od$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $\gamma(\xi(\nabla^h \vec{y}))_i \geq Od$, entonces de (4.7) obtenemos que

$$\begin{aligned} (2\gamma^{1/2} + \gamma)(\xi(\nabla^h \vec{y}))_i (\zeta(\nabla^h \vec{y}))_i &= \frac{(2\gamma^{1/2} + \gamma)(\xi(\nabla^h \vec{y}))_i}{2Od^{-1/2}(\xi(\nabla^h \vec{y}))_i + 1} \\ &= \frac{(2\gamma^{1/2}(\xi(\nabla^h \vec{y}))_i^{1/2})(\xi(\nabla^h \vec{y}))_i^{1/2} + \gamma(\xi(\nabla^h \vec{y}))_i}{2Od^{-1/2}(\xi(\nabla^h \vec{y}))_i + 1} \\ &\geq \frac{2Od(\xi(\nabla^h \vec{y}))_i^{1/2} + Od}{2Od^{-1/2}(\xi(\nabla^h \vec{y}))_i + 1} \\ &= \frac{(2Od^{-1/2}(\xi(\nabla^h \vec{y}))_i + 1)Od}{2Od^{-1/2}(\xi(\nabla^h \vec{y}))_i + 1} = Od \end{aligned}$$

Recíprocamente, si $(2\gamma^{1/2} + \gamma)(\xi(\nabla^h \vec{y}))_i (\zeta(\nabla^h \vec{y}))_i \geq Od$, entonces por las definiciones de ξ y ζ se tiene

$$2\gamma^{1/2}(\xi(\nabla^h \vec{y}))_i + \gamma(\xi(\nabla^h \vec{y}))_i \geq 2Od^{1/2}(\xi(\nabla^h \vec{y}))_i^{1/2} + Od,$$

o lo que es equivalente

$$2\gamma^{1/2}(\xi(\nabla^h \vec{y}))_i + \gamma(\xi(\nabla^h \vec{y}))_i - 2Od^{1/2}(\xi(\nabla^h \vec{y}))_i^{1/2} - Od \geq 0.$$

Agrupando el primer término con el tercero y el segundo con el cuarto se sigue

$$(4.13) \quad 2(\gamma^{1/2}(\xi(\nabla^h \vec{y}))_i^{1/2} - Od^{1/2})(\xi(\nabla^h \vec{y}))_i^{1/2} + (\gamma(\xi(\nabla^h \vec{y}))_i - Od) \geq 0.$$

Si suponemos que $\gamma(\xi(\nabla^h \vec{y}))_i < Od$, entonces $\gamma^{1/2}(\xi(\nabla^h \vec{y}))_i^{1/2} < Od^{1/2}$ y por tanto

$$2(\gamma^{1/2}(\xi(\nabla^h \vec{y}))_i^{1/2} - Od^{1/2})(\xi(\nabla^h \vec{y}))_i^{1/2} + (\gamma(\xi(\nabla^h \vec{y}))_i - Od) < 0,$$

lo cual contradice (3.36). Por tanto necesariamente $\gamma(\xi(\nabla^h \vec{y}))_i \geq Od$. \square

Gracias a la proposición anterior t^h puede ser reescrita como

$$(4.14) \quad (t^h)_i := \begin{cases} 1 & \text{si } \gamma(\xi(\nabla^h \vec{y}))_i \geq Od \\ 0 & \text{de lo contrario.} \end{cases}$$

Adicionalmente, notamos por P^h y R^h los Jacobianos generalizados de ξ y ζ respectivamente, es decir, para $\vec{p} \in \mathbb{R}^{2m}$, se tiene que

$$P^h(\vec{p}) := \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi_i}{\partial p_j} & \frac{\partial \xi_i}{\partial p_{j+m}} \\ \frac{\partial \xi_{i+m}}{\partial p_j} & \frac{\partial \xi_{i+m}}{\partial p_{j+m}} \end{bmatrix} \text{ y } R^h(\vec{p}) := \begin{bmatrix} \frac{\partial \zeta_i}{\partial p_j} & \frac{\partial \zeta_i}{\partial p_{j+m}} \\ \frac{\partial \zeta_{i+m}}{\partial p_j} & \frac{\partial \zeta_{i+m}}{\partial p_{j+m}} \end{bmatrix}, \text{ para } i, j = 1, \dots, m,$$

donde las matrices diagonales que los componen están definidas por

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_i(p)}{\partial p_j} &= \frac{\partial \xi_{i+m}(p)}{\partial p_j} := \delta_{ij} \begin{cases} \frac{p_i}{|(p_i, p_{i+m})^T|} & \text{si } (p_i, p_{i+m})^T \neq 0 \\ \varepsilon_1 & \text{si } (p_i, p_{i+m})^T = 0 \end{cases} \\ \frac{\partial \xi_i(p)}{\partial p_{j+m}} &= \frac{\partial \xi_{i+m}(p)}{\partial p_{j+m}} := \delta_{ij} \begin{cases} \frac{p_{i+m}}{|(p_i, p_{i+m})^T|} & \text{si } (p_i, p_{i+m})^T \neq 0 \\ \varepsilon_2 & \text{si } (p_i, p_{i+m})^T = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta_i(p)}{\partial p_j} &= \frac{\partial \zeta_{i+m}(p)}{\partial p_j} \\ &:= \delta_{ij} \begin{cases} -\frac{p_i}{Od^{1/2}|(p_i, p_{i+m})^T|^{3/2}(2Od^{-1/2}|(p_i, p_{i+m})^T|^{1/2} + 1)^2} & \text{si } (p_i, p_{i+m})^T \neq 0 \\ \nu_1 & \text{si } (p_i, p_{i+m})^T = 0 \end{cases} \\ \frac{\partial \zeta_i(p)}{\partial p_{j+m}} &= \frac{\partial \zeta_{i+m}(p)}{\partial p_{j+m}} \\ &:= \delta_{ij} \begin{cases} -\frac{p_{i+m}}{Od^{1/2}|(p_i, p_{i+m})^T|^{3/2}(2Od^{-1/2}|(p_i, p_{i+m})^T|^{1/2} + 1)^2} & \text{si } (p_i, p_{i+m})^T \neq 0 \\ \nu_2 & \text{si } (p_i, p_{i+m})^T = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

con $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \nu_1$ y ν_2 números reales, tal que, $|(\varepsilon_1, \varepsilon_2)^T| \leq 1$ y $|(\nu_1, \nu_2)^T| \geq 1$ (ver [31, pag. 23]).

Con lo expuesto, podemos obtener el paso de Newton aproximado para (4.10) a través de

$$G_\gamma(\vec{y}_k, \vec{q}_k) \begin{pmatrix} \delta_y \\ \delta_q \end{pmatrix} = -F(\vec{y}_k, \vec{q}_k),$$

es decir,

$$(4.15) \quad \begin{bmatrix} A^h & Q^h \\ -(2\gamma^{1/2} + \gamma)K_k^h \nabla^h & D(m_k^h) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_y \\ \delta_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A^h \vec{y}_k - Q^h \vec{q}_k + f^h \\ -D(m_k^h) \vec{q}_k + Od(2\gamma^{1/2} + \gamma) \nabla^h \vec{y}_k \end{bmatrix},$$

con

$$m_k^h = \max \left(Od \vec{e}, (2\gamma^{1/2} + \gamma) \xi(\nabla^h \vec{y}_k) \star \zeta(\nabla^h \vec{y}_k) \right) \in \mathbb{R}^{2m}$$

y

$$K_k^h := \left(Od I_{2m} - D(t_k^h) \left[P^h(\nabla^h \vec{y}_k) D(\zeta(\nabla^h \vec{y}_k)) + R^h(\nabla^h \vec{y}_k) D(\xi(\nabla^h \vec{y}_k)) \right] D(\vec{q}_k) \right).$$

Como $D(m_k^h)$ es una matriz invertible, podemos eliminar δ_q del sistema (4.15). Para ello, notemos que de la segunda ecuación del sistema anterior se tiene que

$$(4.16) \quad D(m_k^h) \delta_q = -D(m_k^h) \vec{q}_k + (2\gamma^{1/2} + \gamma) [Od \nabla^h \vec{y}_k + K_k^h \nabla^h \delta_y].$$

De la invertibilidad de $D(m_k^h)$, inmediatamente se sigue que

$$(4.17) \quad \delta_q = -\vec{q}_k + (2\gamma^{1/2} + \gamma) D(m_k^h)^{-1} [Od \nabla^h \vec{y}_k + K_k^h \nabla^h \delta_y].$$

Al reemplazar (4.17), en la primera ecuación de (4.15), obtenemos

$$(4.18) \quad A^h \delta_y + Q^h (-\vec{q}_k + (2\gamma^{1/2} + \gamma) D(m_k^h)^{-1} [Od \nabla^h \vec{y}_k + K_k^h \nabla^h \delta_y]) = -A^h \vec{y}_k - Q^h \vec{q}_k + f^h,$$

y por tanto

$$(4.19) \quad \begin{aligned} [A^h + (2\gamma^{1/2} + \gamma) Q^h D(m_k^h)^{-1} K_k^h \nabla^h] \delta_y &= -A^h \vec{y}_k + f^h \\ &\quad - Od(2\gamma^{1/2} + \gamma) Q^h D(m_k^h)^{-1} \nabla^h \vec{y}_k. \end{aligned}$$

Si notamos

$$\begin{aligned} \Xi_{\gamma,k} &:= A^h + (2\gamma^{1/2} + \gamma) Q^h D(m_k^h)^{-1} K_k^h \nabla^h \\ \eta_{\gamma,k} &:= -A^h \vec{y}_k + f^h - Od(2\gamma^{1/2} + \gamma) Q^h D(m_k^h)^{-1} \nabla^h \vec{y}_k, \end{aligned}$$

podemos reescribir (4.19) por

$$(4.20) \quad \Xi_{\gamma,k} \delta_y = \eta_{\gamma,k},$$

donde $\Xi_{\gamma,k}$ es una matriz $n \times n$ y representa el complemento de Schur de $D(m_k^h)$ en el sistema de matrices (4.15).

En este punto, analizaremos las propiedades cualitativas de la matriz $\Xi_{\gamma,k}$.

Primero, observemos que $\Xi_{\gamma,k}$ en general no es simétrica, ya que K_k^h no lo es. Sin embargo es posible mostrar que en la solución, es decir, para $(\vec{y}_k, \vec{q}_k) = (\vec{y}, \vec{q})$, la matriz K_k^h es simétrica. De hecho de (4.8) se tiene que

$$(4.21) \quad (\vec{q}_k)_i = Od(\xi(\nabla^h \vec{y}_k))_i^{-1} (\zeta(\nabla^h \vec{y}_k))_i^{-1} (\nabla^h \vec{y}_k),$$

para todo $i \in \{1, \dots, 2m\}$ tal que $\gamma(\xi(\nabla^h \vec{y}_k))_i \geq Od$. De esta manera

$$\begin{aligned} & D(t^h)D(\vec{q}_k)P^h(\nabla^h \vec{y}_k)D(\zeta(\nabla^h \vec{y}_k)) \\ &= D(t_k^h)D(\vec{q}_k)D(\zeta(\nabla^h \vec{y}_k))(D(\xi(\nabla^h \vec{y}_k)))^{-1} \begin{pmatrix} D(\partial_1 \vec{y}_k) & D(\partial_2 \vec{y}_k) \\ D(\partial_1 \vec{y}_k) & D(\partial_2 \vec{y}_k) \end{pmatrix} \\ &= OdD(t_k^h)(D(\xi(\nabla^h \vec{y}_k)))^{-2} D(\nabla^h \vec{y}_k) \begin{pmatrix} D(\partial_1 \vec{y}_k) & D(\partial_2 \vec{y}_k) \\ D(\partial_1 \vec{y}_k) & D(\partial_2 \vec{y}_k) \end{pmatrix} \\ &= OdD(t_k^h)(D(\xi(\nabla^h \vec{y}_k)))^{-2} \begin{pmatrix} D_1 & D_2 \\ D_2 & D_3 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & D(t^h)D(\vec{q}_k)R^h(\nabla^h \vec{y}_k)D(\xi(\nabla^h \vec{y}_k)) \\ &= -Od^{-1/2}D(t_k^h)D(\vec{q}_k)D(\zeta(\nabla^h \vec{y}_k))^2(D(\xi(\nabla^h \vec{y}_k)))^{-1/2} \begin{pmatrix} D(\partial_1 \vec{y}_k) & D(\partial_2 \vec{y}_k) \\ D(\partial_1 \vec{y}_k) & D(\partial_2 \vec{y}_k) \end{pmatrix} \\ &= -Od^{1/2}D(t_k^h)D(\zeta(\nabla^h \vec{y}_k))(D(\xi(\nabla^h \vec{y}_k)))^{-3/2} D(\nabla^h \vec{y}_k) \begin{pmatrix} D(\partial_1 \vec{y}_k) & D(\partial_2 \vec{y}_k) \\ D(\partial_1 \vec{y}_k) & D(\partial_2 \vec{y}_k) \end{pmatrix} \\ &= -Od^{1/2}D(t_k^h)D(\zeta(\nabla^h \vec{y}_k))(D(\xi(\nabla^h \vec{y}_k)))^{-3/2} \begin{pmatrix} D_1 & D_2 \\ D_2 & D_3 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} D_1 &:= D(\partial_1 \vec{y}_k)^2 \\ D_2 &:= D(\partial_1 \vec{y}_k) \star D(\partial_2 \vec{y}_k) \\ D_3 &:= D(\partial_2 \vec{y}_k)^2, \end{aligned}$$

con $A^2 = A \star A$.

De esto se concluye que

$$\begin{aligned} & D(t_k^h) \left[P^h(\nabla^h \vec{y}_k)D(\zeta(\nabla^h \vec{y}_k)) + R^h(\nabla^h \vec{y}_k)D(\xi(\nabla^h \vec{y}_k)) \right] D(\vec{q}_k) \\ &= D(t_k^h) \left[Od(D(\xi(\nabla^h \vec{y}_k)))^{-2} - Od^{1/2}D(\zeta(\nabla^h \vec{y}_k))(D(\xi(\nabla^h \vec{y}_k)))^{-3/2} \right] \begin{pmatrix} D_1 & D_2 \\ D_2 & D_3 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

y gracias a la Observación 4.1, en la solución, la matriz K_k^h es simétrica. Claramente se tiene que esto es cierto también para $\Xi_{\gamma,k}$.

En el resto de esta sección analizaremos las condiciones bajo las cuales la matriz $\Xi_{\gamma,k}$ es definida positiva y las propiedades relacionadas con este hecho.

Iniciaremos estudiando K_k^h . Siguiendo [14], reordenaremos los índices de

$$\left[P^h(\nabla^h \vec{y}_k)D(\zeta(\nabla^h \vec{y}_k)) + R^h(\nabla^h \vec{y}_k)D(\xi(\nabla^h \vec{y}_k)) \right] D(\vec{q}_k)$$

de manera que esta matriz se transforme en una matriz diagonal por bloques, donde cada uno de estos bloques es una matriz 2×2 con la estructura

$$(4.22) \quad (p_k^h)_i = [(\zeta(\nabla^h \vec{y}_k))_i (\xi(\nabla^h \vec{y}_k))_i^{-1} - Od^{-1/2}(\zeta(\nabla^h \vec{y}_k))_i^2 (\xi(\nabla^h \vec{y}_k))_i^{-1/2}] \cdot \begin{pmatrix} (\vec{q}_k)_i (\partial_1 \vec{y}_k)_i & (\vec{q}_k)_i (\partial_2 \vec{y}_k)_i \\ (\vec{q}_k)_{i+m} (\partial_1 \vec{y}_k)_i & (\vec{q}_k)_{i+m} (\partial_2 \vec{y}_k)_i \end{pmatrix}$$

para todos los i para los cuales $[(\partial_1 \vec{y}_k)_i, (\partial_2 \vec{y}_k)_i]^T \neq 0$. Además se tiene que

$$(4.23) \quad (p_k^h)_i = \begin{pmatrix} (\vec{q}_k)_i \varepsilon_1 & (\vec{q}_k)_i \varepsilon_2 \\ (\vec{q}_k)_{i+m} \varepsilon_1 & (\vec{q}_k)_{i+m} \varepsilon_2 \end{pmatrix}$$

para todos los i para los cuales $[(\partial_1 \vec{y}_k)_i, (\partial_2 \vec{y}_k)_i]^T = 0$.

Gracias a este reordenamiento, la matriz K_k^h es transformada en una matriz diagonal por bloques con los siguientes bloques diagonales

$$(4.24) \quad (\kappa_k^h)_i := Od \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - (t_k^h)(p_k^h)_i.$$

Claramente, $(\kappa_k^h)_i$, es definida positiva para todos los índices inactivos, es decir, para todos los i tal que $(t_k^h)_i = 0$. A continuación, buscaremos condiciones bajo las cuales $(\kappa_k^h)_i$ es definida positiva para los índices activos, es decir, para $(t_k^h)_i = 1$. De [18, Rem. 1] se sabe que una condición suficiente para que la matriz $(\kappa_k^h)_i$ sea definida positiva es que su componente simétrica $(\bar{\kappa}_k^h)_i$, sea definida positiva. Por tanto analizaremos la matriz

$$(4.25) \quad (\bar{\kappa}_k^h)_i = \frac{(\kappa_k^h)_i + (\kappa_k^h)_i^T}{2} = \begin{bmatrix} u_{k,i} & \frac{v_{k,i} + w_{k,i}}{2} \\ \frac{v_{k,i} + w_{k,i}}{2} & z_{k,i} \end{bmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned} u_{k,i} &:= Od - [(\zeta(\nabla^h \vec{y}_k))_i (\xi(\nabla^h \vec{y}_k))_i^{-1} - Od^{-1/2} (\zeta(\nabla^h \vec{y}_k))_i^2 (\xi(\nabla^h \vec{y}_k))_i^{-1/2}] (\vec{q}_k)_i (\partial_1 \vec{y}_k)_i \\ v_{k,i} &:= -[(\zeta(\nabla^h \vec{y}_k))_i (\xi(\nabla^h \vec{y}_k))_i^{-1} - Od^{-1/2} (\zeta(\nabla^h \vec{y}_k))_i^2 (\xi(\nabla^h \vec{y}_k))_i^{-1/2}] (\vec{q}_k)_i (\partial_2 \vec{y}_k)_i \\ w_{k,i} &:= -[(\zeta(\nabla^h \vec{y}_k))_i (\xi(\nabla^h \vec{y}_k))_i^{-1} - Od^{-1/2} (\zeta(\nabla^h \vec{y}_k))_i^2 (\xi(\nabla^h \vec{y}_k))_i^{-1/2}] (\vec{q}_k)_{i+m} (\partial_1 \vec{y}_k)_i \\ z_{k,i} &:= Od - [(\zeta(\nabla^h \vec{y}_k))_i (\xi(\nabla^h \vec{y}_k))_i^{-1} - Od^{-1/2} (\zeta(\nabla^h \vec{y}_k))_i^2 (\xi(\nabla^h \vec{y}_k))_i^{-1/2}] (\vec{q}_k)_{i+m} (\partial_2 \vec{y}_k)_i. \end{aligned}$$

Como estamos considerando el caso $(t_k^h)_i = 1$, se sabe que $1 > (\zeta(\nabla^h \vec{y}_k))_i > 0$ y $(\xi(\nabla^h \vec{y}_k))_i^{-1} > 0$, por tanto las expresiones anteriores están bien definidas. A continuación probaremos que $\xi(\vec{q}_k)_i \leq Od(\zeta(\nabla^h \vec{y}_k))_i^{-1}$, para $i = 1, \dots, m$, es una condición suficiente para que K_k^h sea una matriz definida positiva.

Proposición 4.2. *Supongamos que $\xi(\vec{q}_k)_i \leq Od(\zeta(\nabla^h \vec{y}_k))_i^{-1}$, para $i = 1, \dots, m$ y $k \in \mathbb{N}$, entonces la matriz K_k^h es semidefinida positiva.*

DEMOSTRACIÓN. Iniciemos recordando el criterio de Sylvester, el cual establece que $(\bar{\kappa}_k^h)_i$ es definida positiva si y solo si $\det(((\bar{\kappa}_k^h)_i)_j) \geq 0$, para $j = 1, 2$, donde $((\bar{\kappa}_k^h)_i)_j$ con $j = 1, 2$, es la submatriz $j \times j$ superior izquierda de $(\bar{\kappa}_k^h)_i$, (ver [10]). Se sabe que

$$\begin{aligned} u_{k,i} &= \det(((\bar{\kappa}_k^h)_i)_1) \\ &= Od - [(\zeta(\nabla^h \vec{y}_k))_i (\xi(\nabla^h \vec{y}_k))_i^{-1} - Od^{-1/2} (\zeta(\nabla^h \vec{y}_k))_i^2 (\xi(\nabla^h \vec{y}_k))_i^{-1/2}] (\vec{q}_k)_i (\partial_1 \vec{y}_k)_i \\ &= Od - (\zeta(\nabla^h \vec{y}_k))_i (\xi(\nabla^h \vec{y}_k))_i^{-1} (\vec{q}_k)_i (\partial_1 \vec{y}_k)_i \\ &\quad + Od^{-1/2} (\zeta(\nabla^h \vec{y}_k))_i^2 (\xi(\nabla^h \vec{y}_k))_i^{-1/2} (\vec{q}_k)_i (\partial_1 \vec{y}_k)_i \\ &= Od - Od(\xi(\nabla^h \vec{y}_k))_i^{-2} (\partial_1 \vec{y}_k)_i^2 + Od^{1/2} (\zeta(\nabla^h \vec{y}_k))_i (\xi(\nabla^h \vec{y}_k))_i^{-3/2} (\partial_1 \vec{y}_k)_i^2 \\ &= Od - Od(\xi(\nabla^h \vec{y}_k))_i^{-2} (\partial_1 \vec{y}_k)_i^2 \\ &\quad + Od^{1/2} (\zeta(\nabla^h \vec{y}_k))_i (\xi(\nabla^h \vec{y}_k))_i^{-1/2} [(\xi(\nabla^h \vec{y}_k))_i^{-1/2} (\partial_1 \vec{y}_k)_i]^2 \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

gracias a que $1 > (\zeta(\nabla^h \vec{y}_k))_i > 0$, $(\xi(\nabla^h \vec{y}_k))_i^{-1} > 0$ y $\frac{(\partial_1 \vec{y}_k)_i}{(\xi(\nabla^h \vec{y}_k))_i} \leq 1$.

A continuación tenemos,

$$\begin{aligned}
& [u_{k,i} + w_{k,i}]^2 - 4u_{k,i}z_{k,i} \\
&= [(\zeta(\nabla^h \vec{y}_k))_i (\xi(\nabla^h \vec{y}_k))_i^{-1} - Od^{-1/2} (\zeta(\nabla^h \vec{y}_k))_i^2 (\xi(\nabla^h \vec{y}_k))_i^{-1/2}]^2 \\
&\cdot [(\vec{q}_k)_i (\partial_2 \vec{y}_k)_i + (\vec{q}_k)_{i+m} (\partial_1 \vec{y}_k)_i]^2 - 4Od^2 \\
&+ 4Od [(\zeta(\nabla^h \vec{y}_k))_i (\xi(\nabla^h \vec{y}_k))_i^{-1} - Od^{-1/2} (\zeta(\nabla^h \vec{y}_k))_i^{-2} (\xi(\nabla^h \vec{y}_k))_i^{-1/2}] \\
&\cdot [(\vec{q}_k)_i (\partial_1 \vec{y}_k)_i + (\vec{q}_k)_{i+m} (\partial_2 \vec{y}_k)_i] - 4 [(\zeta(\nabla^h \vec{y}_k))_i (\xi(\nabla^h \vec{y}_k))_i^{-1} \\
&- Od^{-1/2} (\zeta(\nabla^h \vec{y}_k))_i^{-2} (\xi(\nabla^h \vec{y}_k))_i^{-1/2}]^2 (\vec{q}_k)_i (\vec{q}_k)_{i+m} (\partial_1 \vec{y}_k)_i (\partial_2 \vec{y}_k)_i \\
&= - [(\zeta(\nabla^h \vec{y}_k))_i (\xi(\nabla^h \vec{y}_k))_i^{-1} - Od^{-1/2} (\zeta(\nabla^h \vec{y}_k))_i^{-2} (\xi(\nabla^h \vec{y}_k))_i^{-1/2}]^2 \\
&\cdot [(\vec{q}_k)_i (\partial_1 \vec{y}_k)_i + (\vec{q}_k)_{i+m} (\partial_2 \vec{y}_k)_i]^2 \\
&+ 4Od [(\zeta(\nabla^h \vec{y}_k))_i (\xi(\nabla^h \vec{y}_k))_i^{-1} - Od^{-1/2} (\zeta(\nabla^h \vec{y}_k))_i^{-2} (\xi(\nabla^h \vec{y}_k))_i^{-1/2}] \\
&\cdot [(\vec{q}_k)_i (\partial_1 \vec{y}_k)_i + (\vec{q}_k)_{i+m} (\partial_2 \vec{y}_k)_i] - 4Od^2 + [(\vec{q}_k)_i^2 + (\vec{q}_k)_{i+m}^2] \\
&\cdot [(\zeta(\nabla^h \vec{y}_k))^2 - 2Od^{-1/2} (\xi(\nabla^h \vec{y}_k))^{1/2} (\zeta(\nabla^h \vec{y}_k))^3 + Od^{-1} (\xi(\nabla^h \vec{y}_k)) (\zeta(\nabla^h \vec{y}_k))^4] \\
&= - \{ 2Od - [(\zeta(\nabla^h \vec{y}_k))_i (\xi(\nabla^h \vec{y}_k))_i^{-1} - Od^{-1/2} (\zeta(\nabla^h \vec{y}_k))_i^{-2} (\xi(\nabla^h \vec{y}_k))_i^{-1/2}] \\
&\cdot [(\vec{q}_k)_i (\partial_1 \vec{y}_k)_i + (\vec{q}_k)_{i+m} (\partial_2 \vec{y}_k)_i] \}^2 + [(\vec{q}_k)_i^2 + (\vec{q}_k)_{i+m}^2] \\
&\cdot [(\zeta(\nabla^h \vec{y}_k))^2 - 2Od^{-1/2} (\xi(\nabla^h \vec{y}_k))^{1/2} (\zeta(\nabla^h \vec{y}_k))^3 + Od^{-1} (\xi(\nabla^h \vec{y}_k)) (\zeta(\nabla^h \vec{y}_k))^4] \\
&= - \{ Od + Od^{1/2} (\zeta(\nabla^h \vec{y}_k))_i (\xi(\nabla^h \vec{y}_k))_i^{1/2} \}^2 + [(\vec{q}_k)_i^2 + (\vec{q}_k)_{i+m}^2] \\
&\cdot [(\zeta(\nabla^h \vec{y}_k))^2 - 2Od^{-1/2} (\xi(\nabla^h \vec{y}_k))^{1/2} (\zeta(\nabla^h \vec{y}_k))^3 + Od^{-1} (\xi(\nabla^h \vec{y}_k)) (\zeta(\nabla^h \vec{y}_k))^4] \\
&\leq -Od^2 - 2Od^{3/2} (\zeta(\nabla^h \vec{y}_k))_i (\xi(\nabla^h \vec{y}_k))_i^{1/2} - Od (\zeta(\nabla^h \vec{y}_k))_i^2 (\xi(\nabla^h \vec{y}_k))_i \\
&+ Od^2 - 2Od^{3/2} (\zeta(\nabla^h \vec{y}_k))_i (\xi(\nabla^h \vec{y}_k))_i^{1/2} + Od (\zeta(\nabla^h \vec{y}_k))_i^2 (\xi(\nabla^h \vec{y}_k))_i \\
&\leq -4Od^{3/2} (\zeta(\nabla^h \vec{y}_k))_i (\xi(\nabla^h \vec{y}_k))_i^{1/2} \leq 0,
\end{aligned}$$

lo que implica que $\det(((\bar{\kappa}_k^h)_i)_2) \geq 0$, y por tanto se sigue el resultado deseado. \square

Proposición 4.3. *Supongamos que $\xi(\vec{q}_k)_i \leq Od(\zeta(\nabla^h \vec{y}_k))_i^{-1}$, para $i = 1, \dots, m$ y $k \in \mathbb{N}$. Entonces para todo $k \in \mathbb{N}$, la matriz $\Xi_{\gamma,k}$ es definida positiva y $\lambda_{\min}(\Xi_{\gamma,k}) \geq \lambda_{\min}(A^h) > 0$. Además la sucesión $\{\Xi_{\gamma,k}^{-1}\}_{k \in \mathbb{N}}$ es uniformemente acotada.*

DEMOSTRACIÓN. La primera parte se sigue inmediatamente del hecho que A^h es simétrica definida positiva y de la Proposición 4.2. La segunda parte del teorema ($\lambda_{\min}(\Xi_{\gamma,k}) \geq \lambda_{\min}(A^h) > 0$) se sigue de la siguiente caracterización

$$\lambda_{\min}(\Xi_{\gamma,k}) = \min_{x \neq 0} \left[\frac{x^T (A^h + (2\gamma^{1/2} + \gamma)Q^h D(m_k^h)^{-1} K_k^h \nabla^h) x}{x^T x} \right]$$

Por último, de [21, pag. 2], se sabe que

$$\|\Xi_{\gamma,k}^{-1}\|_{sp} = \lambda_{\max}((\Xi_{\gamma,k}^{-1})^T (\Xi_{\gamma,k}^{-1})) = \lambda_{\max}((\Xi_{\gamma,k}^{-1})^2) = \lambda_{\max}(\Xi_{\gamma,k}^{-1})^2,$$

donde $\|\cdot\|_{sp}$ representa la norma espectral de matrices. Por tanto del hecho que

$$\lambda_{\max}(\Xi_{\gamma,k}^{-1}) = \frac{1}{\lambda_{\min}(\Xi_{\gamma,k})} \leq \frac{1}{\lambda_{\min}(A^h)},$$

se concluye la demostración. \square

Gracias a las proposiciones (4.2) y (4.3) sabemos que si se cumple $\xi(\vec{q}_k)_i \leq Od(\zeta(\nabla^h \vec{y}_k))_i^{-1}$ para todo $i = 1, \dots, m$, la solución de (4.20) existe para todo k y su solución es una dirección de descenso hacia la solución de nuestro problema. Sin embargo esta condición solo se satisface para $i = 1, \dots, m$ y $k \in \mathbb{N}$. Para sobrellevar esta dificultad, construimos siguiendo, [13] y las referencias ahí citadas, un algoritmo globalizado de Newton al modificar los términos involucrados en

$$\left[P^h(\nabla^h \vec{y}_k) D(\zeta(\nabla^h \vec{y}_k)) + R^h(\nabla^h \vec{y}_k) D(\xi(\nabla^h \vec{y}_k)) \right] D(\vec{q}_k),$$

para los índices i tales que $\xi(\vec{q}_k)_i > Od$. Esto se logra al reemplazar \vec{q}_k por

$$Od \left(\max(Od, (\xi(q_k^h))_i (\zeta(\nabla^h y_k^h))_i) \right)^{-1} ((q_k^h)_i, (q_k^h)_{i+m}),$$

al ensamblar la matriz $\Xi_{\gamma,k}$, es decir, proyectando la variable \vec{q}_k sobre el conjunto

$$C_{Od}^h = \{ \vec{q} \in \mathbb{R} : \xi(\vec{q}_k) \leq Od(\zeta(\nabla^h \vec{y}_k)), i = 1, \dots, m \}.$$

Esto garantiza que $\xi(\vec{q}_k) \leq Od(\zeta(\nabla^h \vec{y}_k))$ para todo $i = 1, \dots, m$. Además, gracias a este procedimiento y recurriendo al mismo reordenamiento de índices que usamos en esta sección, obtenemos las siguientes matrices por bloques

$$(4.26) \quad (\tilde{\kappa}_k^h)_i = \begin{bmatrix} \tilde{u}_{k,i} & \tilde{v}_{k,i} \\ \tilde{w}_{k,i} & \tilde{z}_{k,i} \end{bmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned} u_{k,i} &:= Od - Od \left(\max(Od, (\xi(q_k^h))_i (\zeta(\nabla^h y_k^h))_i) \right)^{-1} \\ &\quad \cdot [(\zeta(\nabla^h \vec{y}_k))_i (\xi(\nabla^h \vec{y}_k))_i^{-1} - Od^{-1/2} (\zeta(\nabla^h \vec{y}_k))_i^2 (\xi(\nabla^h \vec{y}_k))_i^{-1/2}] (\vec{q}_k)_i (\partial_1 \vec{y}_k)_i \\ v_{k,i} &:= -Od \left(\max(Od, (\xi(q_k^h))_i (\zeta(\nabla^h y_k^h))_i) \right)^{-1} \\ &\quad \cdot [(\zeta(\nabla^h \vec{y}_k))_i (\xi(\nabla^h \vec{y}_k))_i^{-1} - Od^{-1/2} (\zeta(\nabla^h \vec{y}_k))_i^2 (\xi(\nabla^h \vec{y}_k))_i^{-1/2}] (\vec{q}_k)_i (\partial_2 \vec{y}_k)_i \\ w_{k,i} &:= -Od \left(\max(Od, (\xi(q_k^h))_i (\zeta(\nabla^h y_k^h))_i) \right)^{-1} \\ &\quad \cdot [(\zeta(\nabla^h \vec{y}_k))_i (\xi(\nabla^h \vec{y}_k))_i^{-1} - Od^{-1/2} (\zeta(\nabla^h \vec{y}_k))_i^2 (\xi(\nabla^h \vec{y}_k))_i^{-1/2}] (\vec{q}_k)_{i+m} (\partial_1 \vec{y}_k)_i \\ z_{k,i} &:= Od - Od \left(\max(Od, (\xi(q_k^h))_i (\zeta(\nabla^h y_k^h))_i) \right)^{-1} \\ &\quad \cdot [(\zeta(\nabla^h \vec{y}_k))_i (\xi(\nabla^h \vec{y}_k))_i^{-1} - Od^{-1/2} (\zeta(\nabla^h \vec{y}_k))_i^2 (\xi(\nabla^h \vec{y}_k))_i^{-1/2}] (\vec{q}_k)_{i+m} (\partial_2 \vec{y}_k)_i. \end{aligned}$$

Esta proyección satisface $\tilde{u}_{k,i} \geq 0$ y $\tilde{z}_{k,i} \geq 0$. Además la simetrización de las matrices $\tilde{c}_{h,i}^h$ es definida positiva, para todo $i = 1, \dots, m$. Finalmente retomando el reordenamiento de los índices resulta una matriz modificada $\Xi_{\gamma,k}^+$, que reemplaza a $\Xi_{\gamma,k}$, sobre la cual podemos demostrar el siguiente resultado

Corolario 4.4. *La matriz $\Xi_{\gamma,k}^+$ es definida positiva, y $\lambda(\Xi_{\gamma,k}^+) \geq \lambda(A^h) > 0$. Además la sucesión $\{(\Xi_{\gamma,k}^+)^{-1}\}_{k \in \mathbb{N}}$ es uniformemente acotada.*

DEMOSTRACIÓN. La demostración se sigue inmediatamente de la demostración de la Proposición 4.3. De hecho, la proyección de \vec{q}_k sobre C_{Od}^h vuelve a la matriz \tilde{K}_k^h semidefinida positiva ya que las matrices bloque \tilde{c}_k^h que lo componen son semidefinidas positivas. La demostración continua de manera similar a la ya mencionada. Notemos que, donde $\xi(\vec{q}_k) \leq Od(\zeta(\nabla^h \vec{y}_k))$, se tiene que $(\tilde{c}_k^h)_i = (c_k^h)_i$. \square

3. Algoritmo Globalizado Tipo Newton.

En esta sección definiremos un algoritmo globalizado tipo Newton. Este algoritmo utiliza la matriz $\Xi_{\gamma,k}^+$ en los puntos donde se desconocen la forma de \vec{q}_k , mientras que en los lugares donde la forma de dicha variable es conocida se utiliza $\Xi_{\gamma,k}$. Los resultados de convergencia, se probarán posteriormente y están basados en los resultados expuestos en [14, 13].

Algoritmo (GSSN)

1. Inicializamos $(\vec{y}_0, \vec{q}_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{2m}$ y definimos $k = 0$.
2. Estimamos los conjuntos activos, es decir, determinamos $\chi_{A_{k+1}} \in \mathbb{R}^{2m \times 2m}$.
3. Calculamos $\Xi_{\gamma,k}^+$, si desconocemos la forma de $(q_k)_i$, para todo $i = 1, \dots, m$. De lo contrario tomamos $\Xi_{\gamma,k}^+ = \Xi_{\gamma,k}$. Resolvemos con respecto a δ_y

$$\Xi_{\gamma,k}^+ \delta_y = \eta_{\gamma,k}.$$

4. Calculamos $\delta_q = -\vec{q}_k + (2\gamma^{1/2} + \gamma)D(m_k^h)^{-1}[Od\nabla^h \vec{y}_k + K_k^h \nabla^h \delta_y]$.
5. Actualizamos $\vec{y}_{k+1} = \vec{y}_k + \delta_y$ y $\vec{q}_{k+1} = \vec{q}_k + \delta_q$.
6. Se detiene o vuelve al paso dos con $k := k + 1$.

Notemos que durante la iteración de nuestro algoritmo, a la variable q se le permite tener una forma desconocida. Esta propiedad del algoritmo evita la posibilidad de un mal condicionamiento en tamaño de pasos pequeños (ver [14]).

3.1. Convergencia del algoritmo GSSN. En esta sección estudiaremos las propiedades de convergencia del algoritmo anterior. Iniciaremos con la siguiente proposición

Proposición 4.5. *Sean $\vec{y}_\gamma, \vec{q}_\gamma$ las soluciones del sistema (3.30)-(3.32). Supongamos que $\vec{q}_k \rightarrow \vec{q}_\gamma$ y $\vec{y}_k \rightarrow \vec{y}_\gamma$. Entonces $\Xi_{\gamma,k}^+ \rightarrow \Xi_{\gamma,k}$ cuando $\gamma \rightarrow \infty$.*

DEMOSTRACIÓN. Esta demostración vuelve a usar el reordenamiento de índices anterior. Estudiaremos cada matriz de (4.26) por separado. Notemos que para los índices inactivos, es decir, para los i tal que $(t_k^h)_i = 0$, las matrices bloque original y modificada coinciden y el resultado se sigue inmediatamente. Por otro lado, para los índices activos, es decir, para los i tal que $(t_k^h)_i = 1$, de la continuidad de ξ y ζ , se tiene que $(\xi(\vec{q}_k))_i \rightarrow (\xi(\vec{q}_\gamma))_i$, $(\zeta(\nabla^h \vec{y}_k))_i \rightarrow (\zeta(\nabla^h \vec{y}_\gamma))_i$ y por tanto $(\xi(\vec{q}_k))_i (\zeta(\nabla^h \vec{y}_k))_i \rightarrow (\xi(\vec{q}_\gamma))_i (\zeta(\nabla^h \vec{y}_\gamma))_i < Od$. Esto implica que

$$Od \left(\max(Od, (\xi(\vec{q}_k))_i (\zeta(\nabla^h \vec{y}_k))_i) \right)^{-1} ((\vec{q}_k)_i, (\vec{q}_k)_{i+m}) \rightarrow ((\vec{q}_\gamma)_i, (\vec{q}_\gamma)_{i+m}).$$

Además, si $(\xi(\vec{q}_\gamma))_i (\zeta(\nabla^h \vec{y}_\gamma))_i \leq Od$, existe un $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(\xi(\vec{q}_k))_i (\zeta(\nabla^h \vec{y}_k))_i \leq Od$ para todo $k \geq k_0$. De esta forma todas las matrices bloque modificadas convergen hacia las originales cuando $k \rightarrow \infty$. Retomando el ordenamiento inicial de las matrices concluye la demostración. \square

A continuación presentamos el teorema que establece la convergencia superlineal local del Algoritmo GSSN.

Teorema 4.6. *Las iteraciones (\vec{y}_k, \vec{q}_k) del algoritmo convergen superlinealmente a $(\vec{y}_\gamma, \vec{q}_\gamma)$ cuando (\vec{y}_0, \vec{q}_0) es suficientemente cercano a $(\vec{y}_\gamma, \vec{q}_\gamma)$.*

DEMOSTRACIÓN. Recordemos que F es semisuave. Del Corolario (4.4) y de la Proposición (4.5) se concluye la existencia de las constantes $A_1 > 0$, $A_2 > 0$ y el radio $\rho > 0$ tal que

$$(4.27) \quad |(\vec{y}_k, \vec{q}_k) - (\vec{y}_\gamma, \vec{q}_\gamma)| \leq \rho$$

implica

$$\|\Xi_{\gamma,k} - \Xi_{\gamma,k}^+\| \leq A_1 \text{ y } \|\Xi_{\gamma,k}^+\| \leq A_2.$$

De esta forma, las condiciones de [29, Teo. 41] son satisfechas, pudiéndose concluir que las iteraciones (\vec{y}_k, \vec{q}_k) del algoritmo convergen linealmente a $(\vec{y}_\gamma, \vec{q}_\gamma)$ cuando (\vec{y}_0, \vec{q}_0) es suficientemente cercano a $(\vec{y}_\gamma, \vec{q}_\gamma)$. Por otro lado de la Proposición (4.5) implica que $\Xi_{\gamma,k}^+ \rightarrow \Xi_{\gamma,k}$ y con esto se son satisfechas las condiciones de [29, Teo. 42], lo que nos lleva a que las iteraciones convergen superlinealmente de forma local. \square

Resultados Numéricos

En este capítulo se presentarán algunos experimentos numéricos con el objetivo de ilustrar las principales propiedades de los métodos generalizados de Newton en la resolución numérica del flujo laminar de un fluido de Casson en una tubería de sección circular o cuadrada. Además se comparará el método desarrollado en esta tesis con el método de Lagrangeanos extendidos estudiado en [6, 15, 33], entre otros. Finalmente se mostrará gráficamente algunas de las diferencias entre los fluidos de Bingham y Casson para distintos números de Oldroyd.

1. Flujo laminar al interior de una tubería de sección cuadrada

En esta sección se considerará el flujo laminar y estacionario de un fluido de Casson al interior de una tubería con sección cuadrada $\Omega = (-1, 1) \times (-1, 1)$. Suponemos que se satisface la condición de adhesión, es decir, el valor de la velocidad en la frontera es cero.

Para el desarrollo de la experimentación se inicializa la variable y como la solución de la ecuación de Poisson $A^h y_0^h = 1$ y $q_0^h = \mathbf{0}$ y se considera una malla uniforme, como se muestra a continuación, con tamaño de paso $h = 0,025$. (y por tanto el número de nodos es de $N = 6561$).

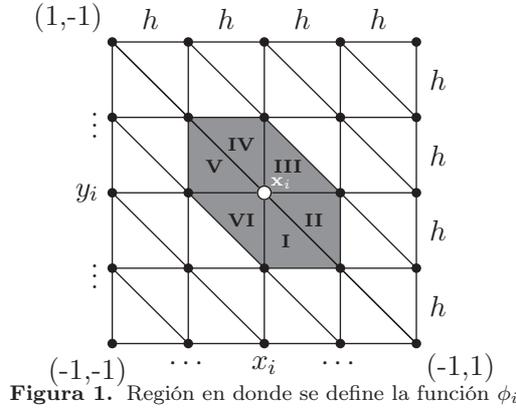


Figura 1. Región en donde se define la función ϕ_i

Entonces los elementos finitos considerados para un nodo cualquiera $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i)$ son funciones las $\{\phi_i\}_{i=1}^N$ definidas de la siguiente forma

$$(5.1) \quad \phi_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{1}{h}(y - y_i) + 1, & \text{si } \mathbf{x} \in \mathbf{I} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 | x \geq x_i, y \leq -(x - x_i) + y_i\}, \\ -\frac{1}{h}(x - x_i) + 1, & \text{si } \mathbf{x} \in \mathbf{II} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 | y > -(x - x_i) + y_i, y < y_i\}, \\ -\frac{1}{h}(x - x_i) - \frac{1}{h}(y - y_i) + 1, & \text{si } \mathbf{x} \in \mathbf{III} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 | y \geq y_i, y \leq -(x - x_i) + y_i + h, x > x_i\}, \\ -\frac{1}{h}(y - y_i) + 1, & \text{si } \mathbf{x} \in \mathbf{IV} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 | x \leq x_i, y > -(x - x_i) + y_i\}, \\ \frac{1}{h}(x - x_i) + 1, & \text{si } \mathbf{x} \in \mathbf{V} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 | y \leq -(x - x_i) + y_i, y > y_i\}, \\ \frac{1}{h}(x - x_i) + \frac{1}{h}(y - y_i) + 1, & \text{si } \mathbf{x} \in \mathbf{VI} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 | y \leq y_i, y \geq -(x - x_i) + y_i - h, x < x_i\} \\ 0, & \text{para otros valores de } \mathbf{x} \end{cases}$$

Estas funciones tienen la siguiente características

$$(5.2) \quad \phi_i(\mathbf{x}_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Por otro lado, de aquí en adelante se notará por $\|\cdot\|_{H_0^{1,h}}$ a la versión discreta de la norma $H_0^1(\Omega)$, la cual para nuestro caso es $\|y\|_{H_0^{1,h}} = (\bar{y}^T A^h \bar{y})^{1/2}$. Adicionalmente se notará por ν_k^h a la tasa de convergencia dada por

$$\nu_k^h = \frac{\|\bar{\mathbf{y}}_{k+1} - \bar{\mathbf{y}}_k\|_{H_0^{1,h}}}{\|\bar{\mathbf{y}}_k - \bar{\mathbf{y}}_{k-1}\|_{H_0^{1,h}}},$$

la cual es de utilidad para verificar la tasa de convergencia superlineal del método numérico.

Por motivos de comparación, se toma como criterio de parada a $\|\delta_k^h\|_{H_0^{1,h}} = \|\bar{\mathbf{y}}_{k+1} - \bar{\mathbf{y}}_k\|_{H_0^{1,h}} \leq 10^{-6}$. Finalmente se fija el parámetro de regularización $\gamma = 10^3$

De la experimentación numérica, en la Figura 2 se muestra la velocidad del flujo simulado, así como la vista axial del mismo para distintos números de Oldroyd. Estas gráficas ilustran las propiedades mecánicas esperadas del material, es decir, dado que la velocidad de cizalla decrece hacia el centro de la tubería, el fluido presenta un movimiento rígido en este sector.

En los cuadros 1, 2 y 3 se muestran las propiedades de convergencia del algoritmo **GSSN** a través de las magnitudes $\|\delta_k^h\|_{H_0^{1,h}}$ y ν_k^h . Dado que $\|\delta_k^h\|_{H_0^{1,h}}$ decrece, numéricamente comprobamos la convergencia de $\bar{\mathbf{y}}_k$ hacia $\bar{\mathbf{y}}_\gamma$. Notemos que la tasa de decrecimiento aumenta en las últimas iteraciones, lo que confirma la convergencia superlineal del método. Esta información se muestra de manera gráfica en la Figura 3 en escala logarítmica. En los cuadros mencionados, adicionalmente se muestra el tamaño del conjunto de activos, es decir, el número de triángulos en \mathcal{A}_{k+1} en cada iteración. Notemos que esta región decrece a medida que el número de Oldroyd aumenta, lo que implica que el tamaño de la zona inactiva es mayor, lo cual explica que el algoritmo necesite un mayor número de pasos para resolución del problema, ya que como se mencionó necesita aproximar una zona mayor.

En la Figura 4 se muestra una aproximación del conjunto de activos así como una familia de 9 curvas de nivel del campo de velocidades resultante.

En el Cuadro 4 se resume el comportamiento del algoritmo **GSSN** para diferentes valores de Od . Particularmente mostramos la aproximación numérica del conjunto final de activos $|\mathcal{A}_\gamma|$ y el residuo $\|\delta_k^h\|_{H_0^{1,h}}$.

Iteración	$\ \delta_k^h\ $	ν_k^h	$ \mathcal{A}_{k+1} $
1	$4,1172^{-01}$	$4,1172^{-01}$	25596
2	$1,1678^{-01}$	$2,8363^{-01}$	25596
3	$2,4181^{-02}$	$2,0707^{-01}$	25584
4	$2,5540^{-03}$	$1,0561^{-01}$	25500
5	$2,9824^{-04}$	$1,1677^{-01}$	25304
6	$5,0045^{-05}$	$1,6780^{-01}$	25112
7	$9,0973^{-06}$	$1,8178^{-01}$	24980
8	$1,4231^{-06}$	$1,5643^{-01}$	24960
9	$1,1051^{-07}$	$7,6353^{-02}$	24960
10	$1,1314^{-09}$	$1,0239^{-02}$	24960

Cuadro 1. Flujo laminar de un fluido de Casson en una tubería de sección cuadrada. Para cada iteración k : el residuo $\|\delta_k^h\|$, tasa de convergencia ν_k^h y número del conjunto de activos $|\mathcal{A}_{k+1}|$ para $Od = 0,1$.

Iteración	$\ \delta_k^h\ $	ν_k^h	$ \mathcal{A}_{k+1} $
1	$4,8725^{-01}$	$4,8725^{-01}$	25596
2	$1,3930^{-01}$	$2,8589^{-01}$	25596
3	$3,9221^{-02}$	$2,8185^{-01}$	25548
4	$8,3159^{-03}$	$2,1203^{01}$	25236
5	$1,2148^{-03}$	$1,4608^{-01}$	24412
6	$2,1196^{-04}$	$1,7448^{-01}$	23532
7	$4,1895^{-05}$	$1,9808^{-01}$	22976
8	$7,8786^{-06}$	$1,8765^{-01}$	22724
9	$9,3928^{-07}$	$1,1922^{-01}$	22724
10	$4,1107^{-08}$	$4,3764^{-02}$	22724

Cuadro 2. Flujo laminar de un fluido de Casson en una tubería de sección cuadrada. Para cada iteración k : el residuo $\|\delta_k^h\|$, tasa de convergencia ν_k^h y número del conjunto de activos $|\mathcal{A}_{k+1}|$ para $Od = 0,2$.

Iteración	$\ \delta_k^h\ $	ν_k^h	$ \mathcal{A}_{k+1} $
1	$5,5718^{-01}$	$5,5718^{-01}$	25596
2	$1,3893^{-01}$	$2,4934^{-01}$	25596
3	$3,6528^{-02}$	$2,6292^{-01}$	25424
4	$1,0814^{-02}$	$2,9605^{-01}$	24060
5	$3,3976^{-03}$	$3,1419^{-01}$	20816
6	$9,0604^{-04}$	$2,6667^{-01}$	17196
7	$1,8977^{-04}$	$2,0645^{-01}$	14628
8	$3,9868^{-05}$	$2,0903^{-01}$	13276
9	$6,2536^{-06}$	$1,5764^{-01}$	13016
10	$3,6897^{-07}$	$5,8903^{-02}$	12984
11	$2,9480^{-08}$	$7,9909^{-02}$	13012

Cuadro 3. Flujo laminar de un fluido de Casson en una tubería de sección cuadrada. Para cada iteración k : el residuo $\|\delta_k^h\|$, tasa de convergencia ν_k^h y número del conjunto de activos $|\mathcal{A}_{k+1}|$ para $Od = 0,4$.

Od	Iteración	ν_k^h	$ \mathcal{A}_{k+1} $
0.1	10	$1,1314^{-09}$	24960
0.2	10	$4,1107^{-08}$	22724
0.4	11	$2,9480^{-08}$	13012

Cuadro 4. Flujo laminar de un fluido de Casson en una tubería de sección cuadrada.

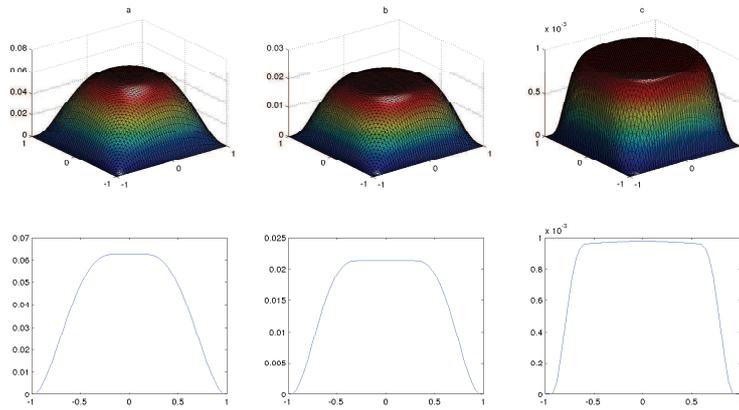


Figura 2. Flujo de un fluido de Casson en una tubería de sección cuadrada (arriba) y su corte transversal (abajo). a) $Od=0.1$, b) $Od=0.2$, c) $Od=0.4$

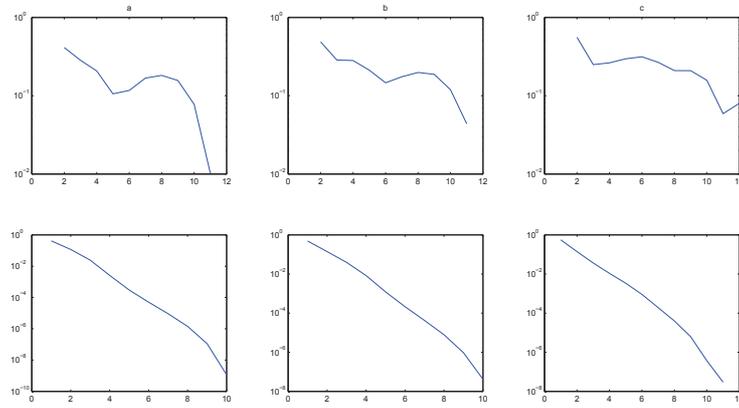


Figura 3. La tasa de convergencia ν_k^h (arriba) y el residuo $\|\delta_k^h\|_{H_0^{1,h}}$ (abajo), en la simulación del flujo para a) $Od=0.1$, b) $Od=0.2$, c) $Od=0.4$

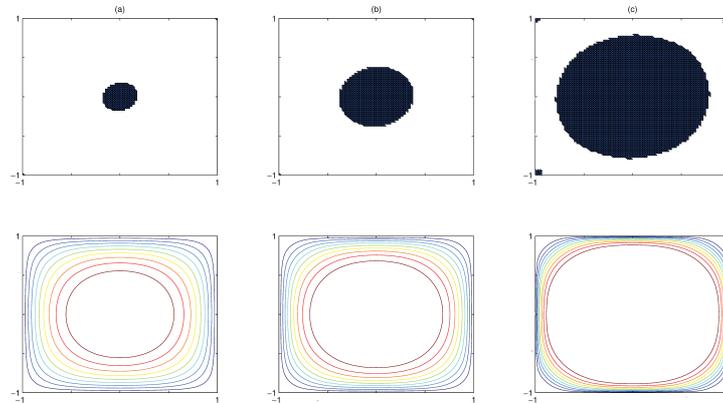


Figura 4. Aproximación del conjunto de activos (arriba) y curvas de nivel (abajo) para los números de Oldroyd a) $Od=0.1$, b) $Od=0.2$, c) $Od=0.4$.

Se puede concluir después de analizar las tres simulaciones anteriores que las propiedades del algoritmo son independientes del número de Oldroyd seleccionado.

2. Comparación GSNN con el método de Lagrangeanos extendidos.

En esta sección mostraremos las ventajas del uso de los métodos generalizados de Newton en la resolución numérica del flujo laminar de un fluido de Casson frente al método de Lagrangeanos extendidos, el cual es el método más usado para la resolución de este tipo de problemas. Con este propósito se considera un dominio circular, con centro en el origen y radio unitario, una triangulación uniforme, cuyas componentes están inscritas en un círculo de radio $r = 0,05$, tal como se muestra en la siguiente figura. Para generar esta malla utilizamos un código de MATLAB para la generación de mallas triangulares y tetraedricas denominada distmesh desarrollado por Per-Olof Persson y Gilbert Strang y mostrado en [26].

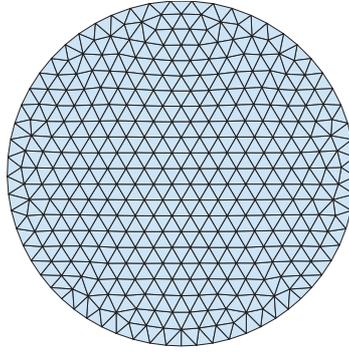


Figura 5. Discretización del dominio circular.

Como en la sección anterior, para la resolución numérica del problema utilizando el método generalizados de Newton, se inicializa la variable y , como la solución de la ecuación de Poisson $A^h y_0^h = 1$ y $q_0^h = \mathbf{0}$. En esta sección se utilizará la norma euclídeana en lugar de $\|\cdot\|_{H_0^{1,h}}$ pues son equivalentes al estar definidas sobre un espacio de dimensión finita, por tanto el criterio de parada es $\|\delta_k^h\| \leq 10^{-6}$.

2.1. Método de Lagrangeanos Extendidos. A continuación se introducirá el método de Lagrangeanos extendidos para la solución numérica del problema (3.32) (para un estudio más detallado del método ver [23] y [33]). En lugar de (3.32) consideramos el problema equivalente

$$(5.3) \quad \min_{y \in H_0^1(\Omega), \mathbf{p} \in \mathbf{L}^2(\Omega); \mathbf{p} = \nabla y} J(y, \mathbf{p}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\mathbf{p}|^2 dx + \frac{4}{3} \sqrt{Od} \int_{\Omega} |\mathbf{p}|^{\frac{3}{2}} dx + Od \int_{\Omega} |\mathbf{p}| dx - \int_{\Omega} y dx.$$

A continuación relajamos la restricción $\nabla y - \mathbf{p} = 0$, con el uso de multiplicadores de Lagrange, así que, definimos el funcional Lagrangeano

$$(5.4) \quad L(y, \mathbf{p}, \lambda) := J(y, \mathbf{p}) + \int_{\Omega} \lambda \cdot (\mathbf{p} - \nabla y) dx,$$

con $y \in H_0^1(\Omega)$, $\mathbf{p}, \lambda \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, y para $r > 0$ el funcional Lagrangeano extendido

$$(5.5) \quad L_r(y, \mathbf{p}, \lambda) := L(y, \mathbf{p}, \lambda) + \frac{r}{2} \int_{\Omega} |\mathbf{p} - \nabla y|^2 dx.$$

De esta forma, el problema (3.32) es equivalente a encontrar el punto de ensilladura de $L(y, \mathbf{p}, \lambda)$. Como (3.32) tiene una única solución, existe un punto de ensilladura de $L(y, \mathbf{p}, \lambda)$ tal que $\nabla y - \mathbf{p} = 0$, el cual es también un punto de ensilladura de $L_r(y, \mathbf{p}, \lambda)$. De [22, 33] se sabe que el algoritmo para hallar el punto de ensilladura de $L_r(y, \mathbf{p}, \lambda)$ está basado en el siguiente esquema iterativo.

Algoritmo (LE)

1. $\mathbf{p}^0, \lambda^1 \in \mathbb{R}^2$ son arbitrarios y cuadráticamente integrables sobre el dominio Ω .
2. Con $\mathbf{p}^{m-1}, \lambda^m$ conocidos, encontrar y^m tal que

$$(5.6) \quad -r\Delta y^m = 1 + \nabla \cdot \lambda^m - r\nabla \cdot \mathbf{p}^{m-1},$$

donde $y^m = 0$ en $\partial\Omega$ para $m = 1, 2, 3, \dots$

3. Obtener \mathbf{p}^m de

$$(5.7) \quad \begin{cases} \mathbf{p}^m = 0 & \text{si } Od \geq |\lambda^m + r\nabla y^m| \\ (Od\sqrt{Od}|\mathbf{p}^m|^{-1/2})\mathbf{p}^m = (\lambda^m + r\nabla y^m) \left(1 - \frac{Od}{|\lambda^m + r\nabla y^m|}\right), & \text{de lo contrario.} \end{cases}$$

4. Obtener λ^{m+1} de

$$(5.8) \quad \lambda^{m+1} = \lambda^m + \rho_m(\nabla y^m - \mathbf{p}^m),$$

donde ρ^m es una sucesión de constantes.

Con este algoritmo se tiene la siguiente convergencia (ver [22, pag. 3]):

$$(5.9) \quad y^m \rightarrow \bar{y} \text{ fuertemente en } H_0^1(\Omega),$$

$$(5.10) \quad \mathbf{p}^m \rightarrow \mathbf{p} \text{ fuertemente en } \mathbf{L}^2(\Omega),$$

$$(5.11) \quad \lambda^{m+1} - \lambda^m \rightarrow \mathbf{0} \text{ fuertemente en } \mathbf{L}^2(\Omega),$$

Teniendo por tanto que el criterio de parada para este algoritmo es $\|\lambda^{m+1} - \lambda^m\|_{H^{1,h}} \leq \epsilon$ con $\epsilon > 0$ [23], siendo $\epsilon = 10^{-6}$ el utilizado en esta sección.

Al igual que en [33], r y ρ_m se fijan como la unidad y se toma como iniciales $\mathbf{q}^0 = \mathbf{1}$ y $\lambda^1 = \mathbf{0}$.

2.2. Comparaciones numéricas. En los Cuadros 5 - 7 se muestra el comportamiento del algoritmo GSNN y el de Lagrangeanos extendidos para distintos números de Oldroyd y de tamaños de malla. Como parámetro de comparación se toma el número de iteraciones, el tamaño del conjunto de activos aproximado por cada método, la norma en $H^{1,h}$ del criterio de parada y el número de sistemas lineales resueltos hasta alcanzar el criterio de parada.

En las Figuras 6, 8 y 10 se muestra las soluciones numéricas del algoritmo para diferentes números de Oldroyd y se compara las zonas inactivas obtenidas a través del algoritmo GSNN y Lagrangeanos extendidos. Estas gráficas muestran el efecto del número de Oldroyd en las soluciones del algoritmo, ya que se puede evidenciar que la velocidad del flujo de pistón (plug flow velocity) decae evidentemente cuando el número de Oldroyd aumenta. Además el tamaño de la zona rígida aumenta a mayor número de Oldroyd, Od . En las Figuras 7, 9 y 11 se compara gráficamente la tasa de convergencia ν_k^h , el residuo $\|\delta_k^h\|_{H^{1,h}}$ y en número del conjunto de activos \mathcal{A}_{k+1} en la última iteración realizada con el método GSNN (parte superior) y Lagrangeanos extendidos (parte inferior).

Od	h	Iteraciones		$ \mathcal{A}_{k+1} $		Criterio de parada		Sistemas lineales	
		GSNN	LE	GSNN	LE	GSNN	LE	GSNN	LE
0.1	0.2	6	196	280	274	$4,3216^{-06}$	$9,9073^{-06}$	6	196
0.1	0.1	7	3244	1284	1282	$7,7328^{-06}$	$9,9989^{-06}$	7	3244
0.1	0.05	8	5662	5388	5356	$2,4565^{-06}$	$9,9971^{-06}$	8	5662

Cuadro 5. Comportamiento numérico del algoritmo GSNN y Lagrangeanos extendidos para distintos tamaños de malla con $Od=0.1$.

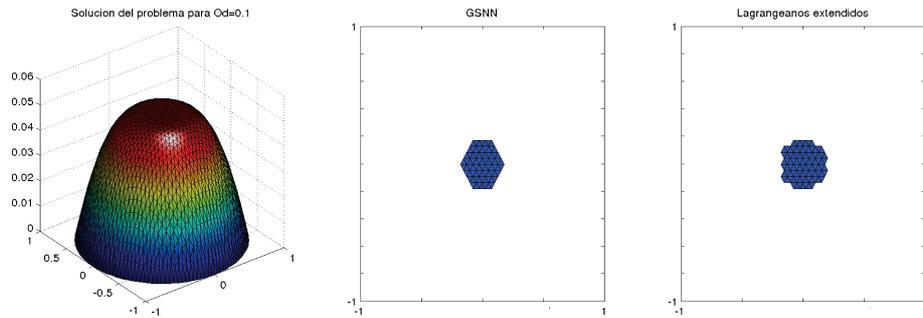


Figura 6. Flujo de un fluido de Casson en una tubería de sección circular (izquierda) y aproximación de zona la inactiva con GSNN (centro) y Lagrangeanos extendidos (derecha) con $Od=0.1$.

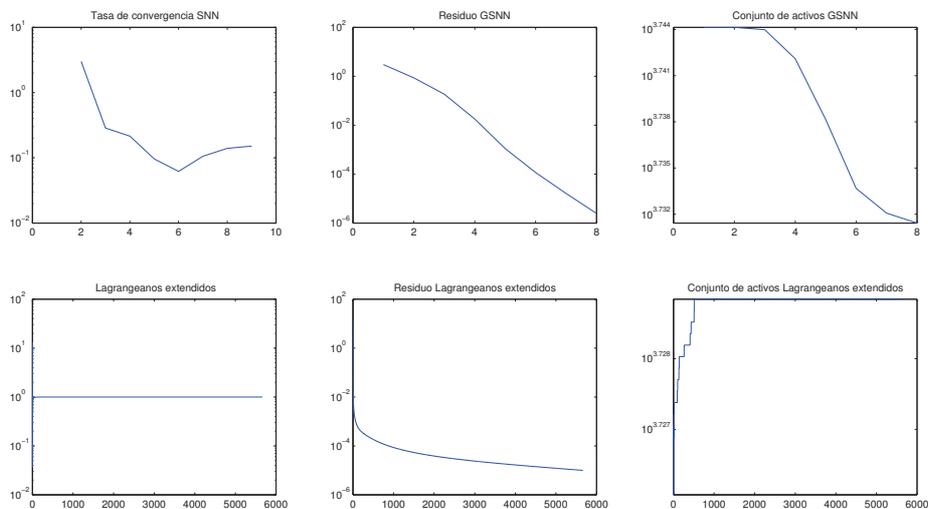


Figura 7. Ejemplo 1: Flujo de un fluido de Casson en una tubería de sección cuadrada (izquierda) y su corte diagonal (derecha). $Od=0.2$.

Para el número de Oldroyd, $Od = 0,1$ y diferentes tamaños de malla (Cuadro 5), se puede evidenciar las ventajas del algoritmo GSNN sobre el algoritmo LE. Si se compara el número de sistemas lineales a ser resueltos, se tiene que en la malla más fina el algoritmo GSNN resuelve 8 sistemas, mientras que el algoritmo LE resuelve 5662. Se observa además, que el tamaño del conjunto de activos es similar para los dos algoritmos. En la Figura 7 se puede observar que la tasa de convergencia del algoritmo LE permanece estable, mientras que la velocidad en que el algoritmo GSNN converge hacia la respuesta es mucho mayor.

Od	h	Iteraciones		$ \mathcal{A}_{k+1} $		Criterio de parada		Sistemas lineales	
		GSNN	LE	GSNN	LE	GSNN	LE	GSNN	LE
0.2	0.2	9	3757	260	256	$1,2869^{-06}$	$9,9958^{-06}$	9	3757
0.2	0.1	8	4705	1142	1132	$8,7514^{-06}$	$9,9997^{-06}$	8	4705
0.2	0.05	9	9535	4808	4736	$7,6680^{-07}$	$9,9983^{-06}$	9	9535

Cuadro 6. Comportamiento numérico del algoritmo GSNN y Lagrangeanos extendidos para distintos tamaños de malla con $Od=0.2$.

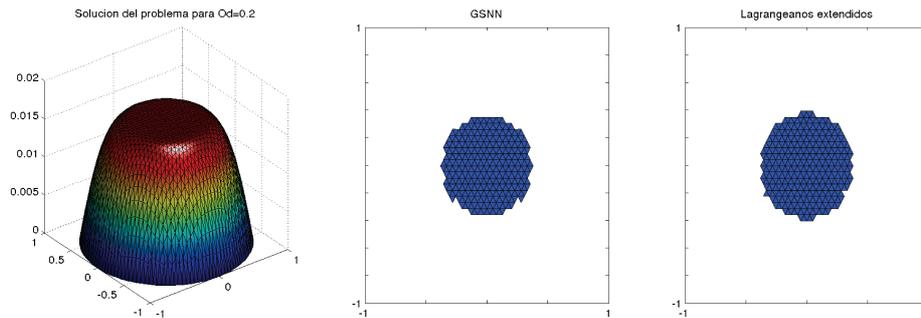


Figura 8. Flujo de un fluido de Casson en una tubería de sección circular (izquierda) y aproximación de zona la inactiva con GSNN (centro) y Lagrangeanos extendidos (derecha) con $Od=0.2$.

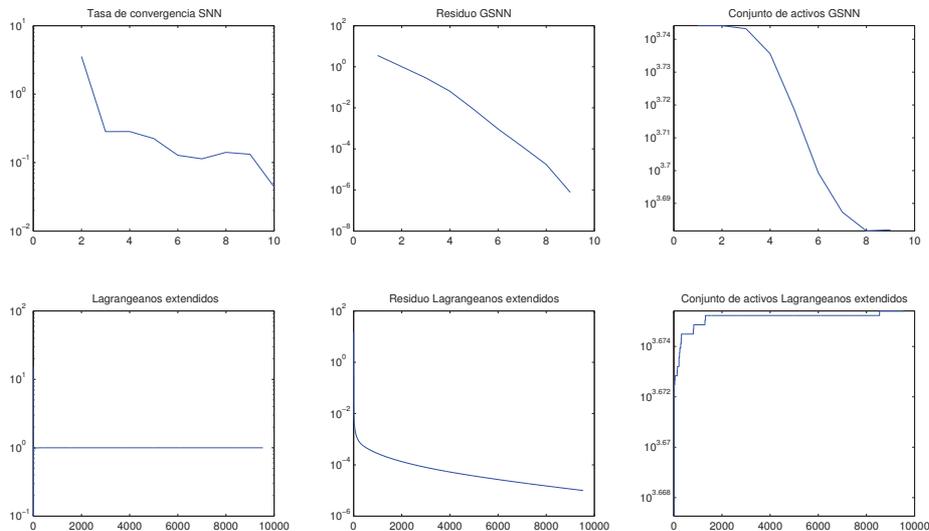


Figura 9. Ejemplo 1: Flujo de un fluido de Casson en una tubería de sección cuadrada (izquierda) y su corte diagonal (derecha). $Od=0.2$.

Para el número de Oldroyd, $Od = 0,2$ y diferentes tamaños de malla (Cuadro 6), se puede evidenciar las ventajas del algoritmo GSNN sobre el algoritmo LE. Si se compara el numero de sistemas lineales a ser resueltos, se tiene que que en la malla más fina el algoritmo GSNN resuelve 9 sistemas, mientras que el algoritmo LE resuelve 9535. Se observa además, que el tamaño del conjunto de activos es similar para los dos algoritmos. En la Figura 9 se puede observar que la tasa de convergencia del algoritmo LE permanece estable, mientras que la velocidad en que el algoritmo GSNN converge hacia la respuesta es mucho mayor.

Od	h	Iteraciones		$ \mathcal{A}_{k+1} $		Criterio de parada		Sistemas lineales	
		GSNN	LE	GSNN	LE	GSNN	LE	GSNN	LE
0.4	0.2	9	7105	142	132	$3,9853^{-06}$	$3,9853^{-06}$	9	7105
0.4	0.1	10	24502	438	420	$3,1507^{-07}$	$9,9995^{-06}$	10	724502
0.4	0.05	10	26603	2444	2278	$3,7597^{-07}$	$9,9997^{-06}$	10	26603

Cuadro 7. Comportamiento numérico del algoritmo GSNN y Lagrangeanos extendidos para distintos tamaños de malla con $Od=0.4$.

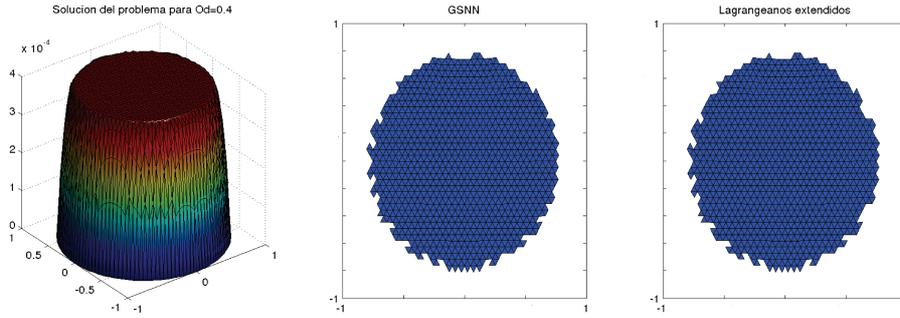


Figura 10. Flujo de un fluido de Casson en una tubería de sección circular (izquierda) y aproximación de zona inactiva con GSNN (centro) y Lagrangeanos extendidos (derecha) con $Od=0.4$.

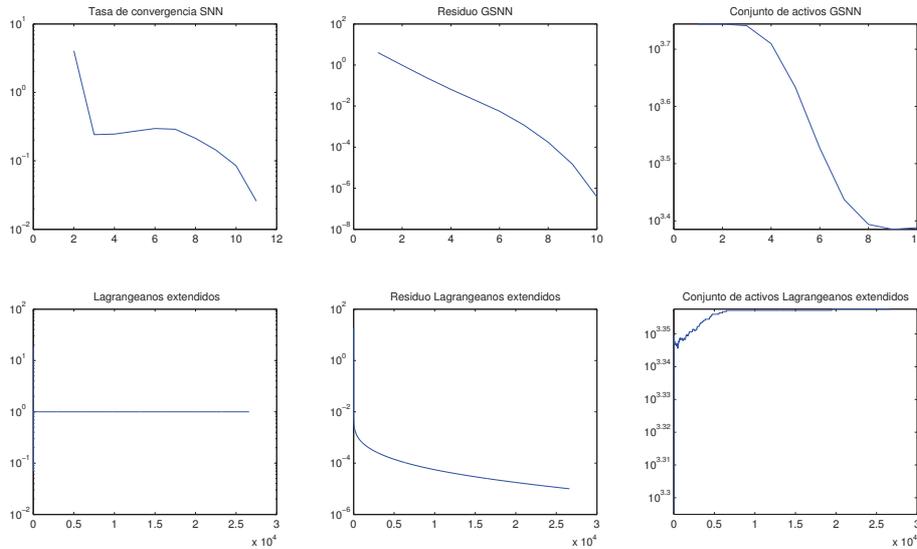


Figura 11. Ejemplo 1: Flujo de un fluido de Casson en una tubería de sección cuadrada (izquierda) y su corte diagonal (derecha). $Od=0.4$.

Para el número de Oldroyd, $Od = 0,4$ y diferentes tamaños de malla (Cuadro 7), se puede evidenciar las ventajas del algoritmo GSNN sobre el algoritmo LE. Si se compara el número de sistemas lineales a ser resueltos, se tiene que en la malla más fina el algoritmo GSNN resuelve 10 sistemas, mientras que el algoritmo LE resuelve 26603. Se observa además, que el tamaño del conjunto de activos es similar para los dos algoritmos. En la Figura 11 se puede observar que la tasa de convergencia del algoritmo LE permanece estable, mientras que la velocidad en que el algoritmo GSNN converge hacia la respuesta es mucho mayor.

3. Comportamiento del modelo de Bingham

En esta sección se realizará una breve comparación entre las soluciones de los fluidos de Bingham y Casson utilizando métodos generalizados de Newton. Como en las secciones anteriores, se inicializa la variable y , como la solución de la ecuación de Poisson $A^h y_0^h = 1$ y $q_0^h = \mathbf{0}$ y se fija como criterio de parada $\|\delta_k^h\|_{H^{1,h}} \leq 10^{-6}$.

3.1. Fluido de Bingham. Un fluido de Bingham, es un fluido visco plástico que al igual que el modelo de Casson, presenta un comportamiento rígido hasta que cierto nivel de esfuerzo es alcanzado, luego de lo cual fluye como un fluido viscoso.

Las ecuaciones constitutivas de este tipo de fluidos se pueden reducir a encontrar un campo de velocidades $y = y(x_1, x_2)$ en Ω que satisface

$$(5.12) \quad -\Delta y(x) - \nabla \cdot q(x) = 1, \text{ en } \Omega$$

$$(5.13) \quad y(x) = 0 \text{ en } \Gamma$$

$$(5.14) \quad \begin{cases} q(x) = \frac{Od}{|\nabla y(x)|} \nabla y(x) \text{ si } x \in \mathcal{A} \\ |q(x)| \leq Od \text{ si } x \in \mathcal{I}, \end{cases}$$

con los conjuntos \mathcal{A} e \mathcal{I} , de activos e inactivos, definidos respectivamente como

$$(5.15) \quad \mathcal{A} := \{x \in \Omega : |\nabla y(x)| \neq 0\} \text{ e } \mathcal{I} := \{x \in \Omega : |\nabla y(x)| = 0\}.$$

3.2. Comparaciones numéricas. Estas las Figuras 11 - 14 se puede evidenciar el decaimiento que sufre la velocidad del flujo de pistón (plug flow velocity) cuando el número de Oldroyd aumenta, siendo este efecto más fuerte en el fluido de Casson que en el de Bingham. Adicionalmente se tiene, que el número de triángulos en la zona inactiva es igual en ambos fluidos en los dos primeros casos analizados (ver Cuadro 8), algo no tan sorprendente dado que las zonas activas e inactivas de ambos flujos se definen de forma idéntica.

	Od		
$ \mathcal{A}_{k+1} $	0,1	0,2	0,4
GSNN	19208	17772	10060
LE	19208	17772	11152

Cuadro 8. Conjunto de activos para distintos números de Oldroyd.

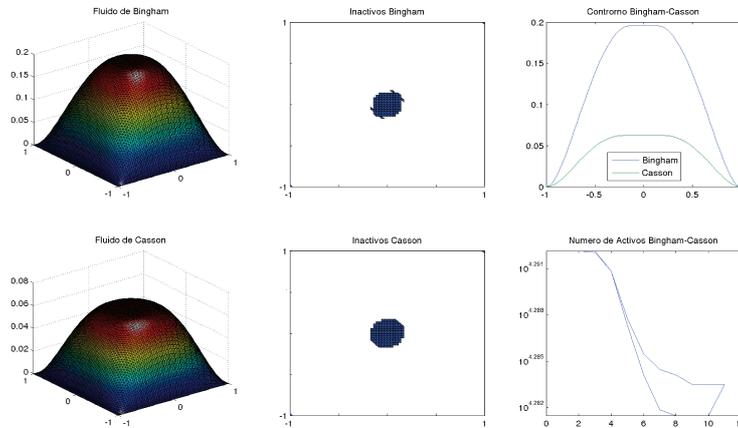


Figura 12. Solución del sistema, conjunto de inactivos, corte transversal y tamaño del conjunto de activos de los fluidos de Bingham (parte superior) y Casson (parte inferior) para $Od=0.1$.

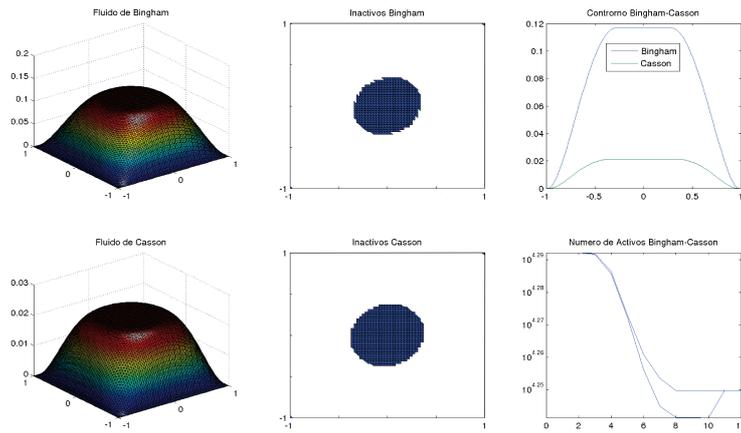


Figura 13. Solución del sistema, conjunto de inactivos, corte transversal y tamaño del conjunto de activos de los fluidos de Bingham (parte superior) y Casson (parte inferior) para $Od=0.2$.

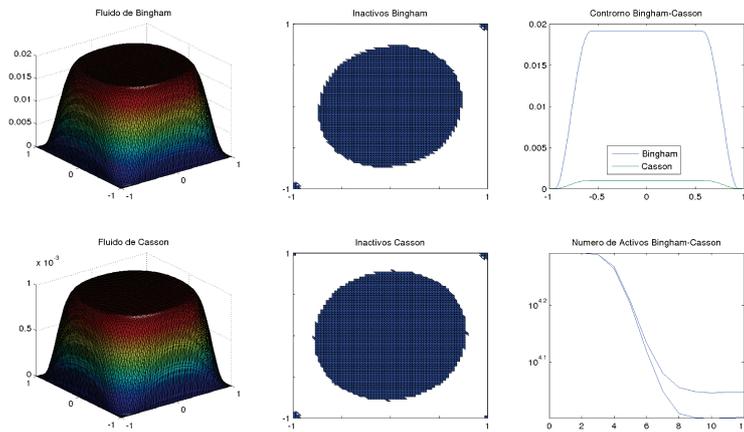


Figura 14. Solución del sistema, conjunto de inactivos, corte transversal y tamaño del conjunto de activos de los fluidos de Bingham (parte superior) y Casson (parte inferior) para $Od=0.4$.

De las comparaciones anteriores se puede verificar que ambos fluidos presentan las propiedades mecánicas características de fluidos con límite elástico, es decir se puede constatar la existencia de una zona rígida que en ambos fluidos presentan dimensiones similares aun cuando el modelo de Bingham muestra una velocidad de flujo superior a la del modelo de Casson.

Conclusiones

El principal objetivo de esta tesis fue desarrollar un algoritmo de segundo orden para la simulación numérica de un flujo laminar y estacionario de un fluido de Casson en tuberías de sección constante, con condiciones de adhesión en la frontera. Con este fin iniciamos estudiando las variables cinemáticas y las ecuaciones constitutivas fundamentales para el desarrollo de este tipo de fluidos. A continuación deducimos sus ecuaciones gobernantes generales para el flujo de un fluido de Casson, bajo ciertas suposiciones que garantizaban entre otras cosas su invarianza con respecto al sistema de coordenadas elegido, la coherencia con la respuesta real del material modelado y la correcta definición de las ecuaciones involucradas. Como siguiente paso, deducimos el sistema que rige el movimiento específico para nuestro caso, calculamos explícitamente su tensor de deformación y adimensionalizamos nuestro sistema con el objetivo de escribirlo a manera de una desigualdad variacional de segundo orden, y de esta manera asociarlo con un problema de optimización no restringida, a través del cual se demuestra la existencia y unicidad de las soluciones para el problema en análisis.

Como nuestro problema asociado incluye el operador divergencia, el esquema de solución numérica puede sufrir un mal condicionamiento, razón por la cual se introduce una familia de problemas regularizados localmente, a través de una regularización continua del tipo Huber, el cual puede ser reescrito como un sistema de complementariedad que incluye una ecuación en $H_0^1(\Omega)$ y una ecuación en $L^2(\Omega)$. Esta regularización nos permite aproximar las soluciones de nuestro problema a través de la sucesión formada por las soluciones de los problemas regularizados. Se muestra, que esta sucesión es convergente a la solución de nuestro problema al finalizar el Capítulo 3.

Tras escribir nuestro problema como un sistema de complementariedad, discretizamos dicho sistema utilizando elementos finitos y caracterizamos cada una de las matrices que componen nuestro sistema discreto. A continuación desarrollamos un algoritmo globalizado tipo Newton para la resolución numérica de nuestro problema, el cual se muestra convergente globalmente de forma lineal y localmente de forma superlineal, proveyendo una metodología eficiente para la simulación numérica de este tipo de fluidos.

En el Capítulo 5 se muestran los resultados numéricos de la implementación del método generalizado de Newton y mostramos las propiedades de convergencia del algoritmo **GSSN** a través de las magnitudes $\|\delta_k^h\|$ y ν_k^h , observándose que $\|\delta_k^h\|$ decrece, comprobando numéricamente la convergencia de \vec{y}_k hacia \vec{y}_γ . Además se observa que la tasa de decrecimiento aumenta en las últimas iteraciones, lo que confirma la convergencia superlineal del método.

Posteriormente se desarrolla la comparación entre el método GSNN y el método de Lagrangeanos extendidos mostrándose las claras ventajas de los métodos generalizados de Newton.

Recomendaciones

Después de probar nuestra metodología y mostrar las ventajas de los métodos generalizados de Newton en la resolución numérica del flujo laminar y estacionario de un fluido de Casson en una tubería de secciones cuadrada o circular, estamos seguros que ésta tesis contribuye al desarrollo del análisis de fluidos visco plásticos y se recomienda continuar su estudio y extenderlo en otros fluidos sin limitarse al caso estacionario, ya que este trabajo puede servir de base para el análisis del movimiento de este tipo de fluidos en reservorios, canales y cavidades o de problemas con viscosidad dependiente de la temperatura, entre otros.

Bibliografía

- [1] J. Albery, C. Carstensen, and S. Funken. Remarks around 50 lines of Matlab: short finite element implementation. *Numerical Algorithms*, 20:117–137, 1999.
- [2] A. Aposporidis, E. Haber, M. A. Olshanskii, and A. Veneziani. A mixed formulation of the Bingham fluid flow problem: Analysis and numerical solution. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 187(2011):2434–2446.
- [3] H. Brézis. *Análisis Funcional. Teoría y Aplicaciones*. Alianza Editorial, 1984.
- [4] R. K. Dash, K. N. Mehta, and G. Jayaraman. Casson Fluid Flow in a Pipe Filled with a Homogeneous Porous Medium. *Int. J. Engng Sci.*, vol. 34, No. 10(1996):1145–1156.
- [5] J. C. De los Reyes and S. A. González Andrade. Path following methods for steady laminar bingham flow a in cylindrical pipes. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*.
- [6] E. J. Dean, R. Glowinski, and G. Guidoboni. On the numerical simulation of Bingham visco-plastic flow: Old and new results. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 142(2007):36–62.
- [7] M. Fuchs and G. Seregin. *Variational Methods for Problems from Plasticity Theory and for Generalized Newtonian Fluids*. Springer, Berlin, 2000.
- [8] Y. C. Fung. Biomechanics, Mechanical Properties of Living Tissues. *Springer-Verlag, New York*, Chap 3(1981).
- [9] G. P. Galdi, R. Rannacher, A. M. Robertson, and S. Turek. *Hemodynamical Flows - Modeling, Analysis and Simulation*, volume 37 of *Oberwolfach Seminars*. Berlin, 2008.
- [10] G.T. Gilbert. Positive definite matrices and sylvester’s criterion. *The American Mathematical Monthly*, 98(1):44-46, 1991.
- [11] R. Glowinski. *Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems*. Springer Series in Computational Physics. Springer-Verlag, 1984.
- [12] R. Glowinski, J.L. Lions, and R. Tremolieres. *Analyse Numerique des Inequations Variationnelles. Theorie generale premieres applications*. Methodes Mathematiques de l’Informatique. Dunod, 1976.
- [13] S. A. González Andrade. *Semismooth Newton and Path-Following Methods for the Numerical Simulation of Bingham Fluids*. PhD thesis, Escuela Politécnica Nacional, Quito, 2008.
- [14] M. Hintermuller and G. Stadler. An infeasible primal-dual algorithm for tv-based inf-convolution-type image restoration. *SIAM J. SCI. COMPUT.*, 28(1):1-23, 2006.
- [15] K. Ito and K. Kunisch. Semi-smooth Newton methods for variational inequalities of the first kind. *ESAIM:M2AN*, 37(1):41-62, 2003.
- [16] J. Jahn. *Introduction to the Theory of Nonlinear Optimization*. Springer, 2007.
- [17] G. Jayaraman, K. N. Mehta, and K. Dash. Casson Fluid Flow in a Pipe Filled with a Homogeneous Porous Medium. *Int. J. Engng Sci.*, Vol. 34, No. 10, pp. 1145-1156, 1996.
- [18] C.R. Johnson. Positive definite matrices. *The American Mathematical Monthly*, 77(3):259-264, March 1970.
- [19] H. Kreyszig. *Introductory Functional Analisis with Applications*. John Wiley & Songs, 1978.
- [20] J. L. Lions. *Optimal Control of Systems Governed by Partial Diferential Equations*. Springer-Verlag, 1971.
- [21] R. Mathias. Matrices with positive definite hermitian part: Inequalities and linear systems. *SIAM. J. Matrix Anal. Appl.*, 13(2):640-654, 1992.
- [22] M.A. Moyers-Gonzalez and I.A. Frigaard. Numerical solution of duct flows of multiple visco-plastic fluids. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 122(1-3):227–241, 2004.
- [23] E. A. MURAVLEVA and M. A. OLSHANSKII. Two finite-difference schemes for calculation of Bingham fluid flows in a cavity. *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling*, Vol. 23, No. 6, pp. 615-634(2008).
- [24] S. Oka. An Approach to α Unified Theory of the Flow Behavior of Time-Independent Non-Newtonian Suspensions. *Japanese Journal of Applied Physics*, 10(3):287, 1971.
- [25] P. Papadopoulos. Introduction to Continuum Mechanics. <http://www.me.berkeley.edu/ME280B/notes.pdf>. Department of Mchanical Engineering, University of California, Berkeley, 2008.
- [26] P.-O. Persson and G. Strang. A Simple Mesh Generator in MATLAB. *SIAM Review*, Volume 46 (2)(June 2004):pp. 329–345.

- [27] P. Philip. Lecture Notes on Optimal Control of Partial Differential Equations. [http://www.math.lmu.de/~\\$~\\$philip/publications/lectureNotes/optimalControl0fPDE.pdf](http://www.math.lmu.de/~$~$philip/publications/lectureNotes/optimalControl0fPDE.pdf), November 10, 2009.
- [28] K. Sangho. *A Study of Non-Newtonian Viscosity and Yield Stress of Blood in a Scanning Capillary-Tube Rheometer*. PhD thesis, Drexel University, December 2002.
- [29] D. Sun and J. Han. Newton and quasi-Newton methods for a class of nonsmooth equations and related problems. *SIAM J. OPTIM*, 7(2):463-480, May 1997.
- [30] W. W. Symes. CAAM 436 Notes: Partial Differential Equations of Mathematical Physic. <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.170.9344&rep=rep1&type=pdf>. Department of Computational and Applied Mathematics, Rice University.
- [31] M. Ulbrich. *Nonsmooth Newton-like Methods for Variational Inequalities and Constrained Optimization Problems in Function Spaces*. Habilitation thesis, Technische Universitat Munchen. 2001-2002.
- [32] D. Vola, L. Boscardin, and J.C. Latch. Laminar unsteady flows of Bingham fluids: a numerical strategy and some benchmark results. *Journal of Computational Physics*, 187(2003):441-456.
- [33] Z. You and R. R. Huilgol. Application of the augmented Lagrangian method to steady pipe flows of Bingham, Casson and Herschel-Bulkley fluids. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 128(2005):126-143.
- [34] F. S. F. Zinani and S. Frey. Galerkin Least-Squares Approximations fo Flows of Casson Fluids Through an Expansion. *Engenharia Térmica (Thermal Engineering)*, vol. 5 No 02(December 2006):82-91.