ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

ESCUELA DE CIENCIAS

PROBLEMAS ELÍPTICOS NO LINEALES PERTURBADOS CON
CONDICIONES DE DIRICHLET HOMOGÉNEAS.
CASO ASINTÓTICAMENTE LINEAL.

PROYECTO PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE MATEMÁTICO

MIGUEL ANGEL YANGARI SOSA
Email: m6297.angelito@hotmail.com

Director: Prof. MARCO CALAHORRANO
Email: marco.calahorrano@epn.edu.ec

QUITO, SEPTIEMBRE 2008

DECLARACIÓN

Yo MIGUEL ANGEL YANGARI SOSA, declaro bajo juramento que el trabajo aquí escrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentada para ningún grado o calificación profesional; y que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

A través de la presente declaración cedo mis derechos de propiedad intelectual, correspondientes a este trabajo, a la Escuela Politécnica Nacional, según lo establecido por la Ley de Propiedad Intelectual, por su reglamento y por la normatividad institucional vigente.

Miguel Yangari Sosa

CERTIFICACIÓN

Certifico que el presente trabajo fue desarrollado por MIGUEL ANGEL YANGARI SOSA, bajo mi supervisión.

Prof. Marco Calahorrano Recalde

DIRECTOR DE PROYECTO

AGRADECIMIENTOS

Dejo constancia de mi sincero agradecimiento:

Al Prof. Marco Calahorrano Recalde por su apoyo e incentivo permanente a lo largo de la realización de esta tesis y sobre todo su gran paciencia y dedicación.

DEDICATORIA

A mis padres Yolanda Sosa y Julio Yangari, quienes estuvieron a mi lado en todo momento.

Miguel

Índice general

Notaciones

$B\{x_0, r\} = \{x; \|x - x_0\| < r\}$	Bola abierta, centrada en cero, de radio r.
$M^\perp$	Complemento ortogonal de M.
$Ker(A)$	Núcleo del operador A.
$Rg(A)$	Rango del operador A.
$c.t.p.$	Casi todo punto.
$\Delta u = \Sigma_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$	Laplaciano de u.
$\mathbb{R}^+$	Reales positivos.
$\partial_\nu u$	Derivada normal exterior.
$signf(x)$	Función signo de f.
$\partial\Omega = \Gamma$	Frontera de Ω.
$C(\overline{\Omega})$	Funciones continuas en $\overline{\Omega}$.
$C^k(\Omega)$	Funciones k veces continuamente diferenciables en Ω.
$C^{0,\alpha}(\Omega)$	Funciones Hölder continuas en Ω.
$W^{1,p}$, $W^{1,p}$, $W^{m,p}$, H^1, H_0^1	Espacios de Sovolev.

Introducción.

En este trabajo, se hará una presentación mas o menos sintética de los elementos básicos de la teoría del grado topológico de Brouwer y su extensión a espacios de Banach de dimensión infinita, además se darán a conocer los resultados principales de la Teoría de Bifurcaciones.

Asimismo, destacamos una serie de aplicaciones de dichas teorías en problemas relacionados con las ecuaciones diferenciales parciales, para los cuales se tratará de hallar la forma que tienen sus ramas de bifurcación, dándonos a conocer la existencia y multiplicidad de soluciones. Además se verán ciertos ejemplos de aplicaciones en el análisis y el álgebra.

La bibliografía relativa la Teoría de Grado Topológico es muy extensa y los primeros artículos pueden ubicarse a fines del siglo XIX; en particular sus antecedentes se refieren al trabajo de Kronecker. No obstante, el primer autor que dió una definición del grado de una función continua fue Brouwer en un artículo publicado en el año 1911, a partir de allí fue denominado grado topológico de Brouwer.

En un célebre trabajo realizado por Leray y Schauder en 1934, se define el grado topológico para ciertas funciones definidas sobre conjuntos abiertos y acotados de un espacio de Banach arbitrario. La clase de funciones para las cuales se definió, fueron llamadas a posteriori transformaciones de Leray-Schauder, que resultan ser perturbaciones compactas de la identidad, es decir $\Phi = I - T$ con T un operador compacto. La idea central de la definición de grado de Leray-Schauder que la estudiaremos en el Capítulo 4, consiste en aproximar la transformación compacta mediante transformaciones de rango finito y posteriormente utilizar la teoría del grado topológico de Brouwer, válida para un espacio de dimensión finita.

En el capítulo 5, se enunciarán los memorables teoremas de Rabinowitz y Krasnoselskii, los cuales son una aplicación del grado de Leray-Schauder. Además, se darán a conocer ciertos resultados de la teoría de bifuraciones aplicados a problemas elípticos.

En el capítulo 6 se realizará la parte principal de esta tesis, que consiste en generalizar [2], pero en nuestro caso aplicado a problemas elípticos no lineales perturbados con condiciones de Dirichlet homogéneas. Permitiéndonos de esta manera hallar resultados de existencia de soluciones positivas para este tipo de problemas. Más aún, dando ciertas condiciones al problema, podremos conocer la forma que tendrán las ramas de bifurcación y así se podrá aumentar o disminuir el número de soluciones.

Para finalizar haremos una aplicación de los resultados obtenidos en el capítulo 6, estudiando los problemas elípticos no lineales con condiciones de Dirichlet no homogéneas, los cuales son una generalización de los modelos usados para estudiar las llamas solares en ausencia de gravedad.

Capítulo 1

Preliminares.

1.1. Cálculo diferencial

Sean X, Y espacios de Banach y sea $L(X, Y)$ el espacio de los operadores lineales continuos de X en Y. Dotamos a $L(X, Y)$ con la norma

$$\|A\|_{L(X,Y)} = \sup\{\|Ax\|_Y : \|x\|_X \leq 1\}, \qquad A \in L(X, Y),$$

Con esta norma $L(X, Y)$ es un espacio de Banach. Si $U \subset X$ es un abierto, $C(U, Y)$ denota el espacio de las funciones continuas de U en Y.

Definición 1. *Decimos que $f : U \to Y$ es Fréchét diferenciable en $u \in U$con derivada $df(u) \in L(X, Y)$ si*

$$f(u+h) = f(u) + df(u)[h] + o(\|h\|), \qquad \text{con } h \to 0$$

f se dice diferenciable en U si f es diferenciable en todo punto $u \in U$.

De la definición se sigue que si f es diferenciable en $u \in U$, entonces f es continua en u.

Sea $f : X \times Y \to Z$, consideremos la función $f_v : u \to f(u, v)$, respectivamente $f_u : v \to f(u, v)$. La *derivada parcial* de f con respecto a u, respectivamente v, en $(u, v) \in X \times Y$ está definida por $\partial_u f(u, v) = df_v(u)$, respectivamente $\partial_v f(u, v) = df_u(v)$.

En particular, $\partial_u f(u, v) \in L(X, Z)$ y $\partial_v f(u, v) \in L(Y, Z)$. Es fácil ver que si $f : X \times Y \to Z$ es diferenciable en (u, v), entonces f es parcialmente diferenciable y $\partial_u f(u, v)[h] = df_v(u)[h] =$

$df(u,v)[h,0]$, respectivamente $\partial_v f(u,v)[k] = df_u(v)[k] = df(u,v)[0,k]$. Más aún, se satisface el siguiente resultado:

Proposición 1. *Si f posee derivada parcial con respecto a u y v en una vecindad N de (u,v) y las funciones $u \to \partial_u f$ y $v \to \partial_v f$ son continuas en N, entonces f es diferenciable en (u,v) y*

$$df(u,v)[h,k] = \partial_u f(u,v)[h] + \partial_v f(u,v)[k]$$

Demostración. Ver referencia [7], página 162. □

Sea $f \in C(U,Y)$, $u^* \in U$ y $v^* = f(u^*) \in Y$. Decimos que f es *localmente invertible en u^** si existen vecindades U^* y V^* de u^* y v^* respectivamente y una función $g \in C(U^*, V^*)$ tal que

$$g(f(u)) = u, \quad \forall u \in U^*, \qquad f(g(u)) = v, \quad \forall v \in V^*$$

Teorema 1. *(Teorema de inversión local)*
Supongamos que $f \in C^1(U,Y)$ y $df(u^*)$ es invertible (como una aplicación lineal en L(X,Y)). Entonces f es localmente invertible en u^*, f^{-1} es de clase C^1 y

$$df^{-1}(v) = (df(u))^{-1}, \qquad \forall v \in V^*, \qquad \text{donde } u = f^{-1}(v)$$

Más aún, si $f \in C^k(U,Y)$, entonces f^{-1} es de clase C^k.

Demostración. Ver referencia [7], página 172. □

Definición 2. *Sea X un espacio de Banach y T un operador continuo en X.*
T se dice Compacto *si para toda sucesión acotada (x_i) en X, la sucesión (Tx_i) tiene una subsucesión convergente. Equivalentemente, si Ω es un conjunto cerrado y acotado, diremos que T es* Compacto *si la imagen $T(\Omega)$ es relativamente compacto.*

En todo lo que sigue, se considerará la función $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ donde $u := u(x)$, la misma notación se usará para todas las funciones que dependan de $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$.

1.2. Ecuaciones elípticas.

Consideremos el problema lineal con condiciones de Dirichlet en la frontera,

$$\begin{aligned} -\Delta u = h \quad & en \;\; \Omega \\ u = 0 \quad & en \;\; \partial\Omega \end{aligned} \tag{1.1}$$

donde h es una función dada en $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Si $h \in L^2(\Omega)$, una solución débil de (1.1) es una función $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla v \; dx = \int_\Omega hv \; dx, \qquad \forall v \in C_0^\infty(\Omega).$$

Teorema 2. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado.*

- *Si $h \in L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, entonces (1.1) tiene una única solución débil $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^{2,p}(\Omega)$ tal que*
$$\|u\|_{H^{2,p}} \leq c\,\|h\|_{L^p}$$
- (Estimaciones de Schauder)*Si Ω es de clase $C^{2,\alpha}$ y $h \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ entonces $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ es una solución clásica de (1.1) y*

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}} \leq c\,\|h\|_{C^{0,\alpha}}$$

Demostración. Ver referencia [6], página 317. □

Observación 1. *Las estimaciones de Schauder se siguen satisfaciendo cuando reemplazamos $-\Delta$ por el operador elíptico de segundo orden*

$$-Lu = -\sum a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu$$

donde a_{ij}, b_i, c son de clase $C^1(\overline{\Omega})$, $c \geq 0$ en $\overline{\Omega}$ y $\exists k > 0$ tal que

$$\sum a_{ij}\zeta_i\zeta_j \geq k \mid \zeta \mid^2, \qquad \forall x \in \overline{\Omega}, \zeta \in \mathbb{R}^n.$$

1.3. Valores propios del problema lineal con condiciones Dirichlet en la frontera.

Consideremos el problema lineal de eigenvalores

$$\begin{aligned} -\Delta u = \lambda u \quad & en \ \ \Omega \\ u = 0 \quad & en \ \ \partial\Omega \end{aligned} \tag{1.2}$$

con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Se sigue que (1.2) es equivalente al problema $u = \lambda K(u)$ donde $K = (-\Delta)^{-1}$, con $u \in L^2(\Omega)$ o $u \in C^{0,\alpha}(\Omega)$.

Ahora es conveniente tomar en cuenta las siguientes propiedades para un operador $A \in L(X, X)$ donde X es un espacio de Banach.

(RF_1) $Ker(A)$ es de dimensión finita, $Rg(A)$ es cerrado y tiene codimensión finita;

(RF_2) $Rg(A) = [Ker(A^*)]^\perp = \{u \in X : \langle \psi, u \rangle = 0, \forall \psi \in Ker(A^*)\}$;

(RF_3) $\exists m \geq 1$ tal que $Ker(A^k) = Ker(A^{k+1}), \forall k \geq m$. Más aún, $\exists k \geq m$ tal que $Rg(A^{k+1}) = Ker(A^k)$, $X = Ker(A^m) \oplus Rg(A^m)$ y la restricción de A a $Rg(A^m)$ es un homeomorfismo lineal de $Rg(A^m)$ sobre si mismo.

(RF_4) $Ker(A) = \{0\} \iff Rg(A) = X$.

Para la siguiente definición vamos a considerar $A_\lambda = I - \lambda K$.

Definición 3. *Un número real λ tal que $Ker(A_\lambda) \neq \{0\}$ es un eigenvalor de (1.2). El entero m tal que (RF_3) se satisfece (con $A = A_\lambda$) es llamada la multiplicidad de λ. Cuando la multiplicidad es igual a 1 decimos que el eigenvalor es simple.*

Ahora partiendo de la definición anterior se tiene el siguiente resultado:

Teorema 3. *(i) La ecuación (1.2) tiene una sucesión de eigenvalores λ_k tal que*

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \cdots \leq \lambda_k \nearrow +\infty$$

El primer eigenvalor λ_1 es simple y sus correspondientes eigenvectores no cambian de signo en Ω. Más aún, λ_1 es el único eigenvalor con las siguientes propiedades:

Denotaremos por φ_1 al eigenvector correspondiente a λ_1 tal que $\varphi_1 > 0$ y $\|\varphi_1\|_{L^2} = 1$. Tambien denotaremos por φ_i los eigenvectores correspondientes a λ_i tal que:

$$\int_\Omega \varphi_h \varphi_k dx = \delta_{hk}$$

(ii) Se satisface

$$\lambda_1 = \text{mín}\{\int_\Omega \mid \nabla u \mid^2 dx : u \in H_0^1(\Omega), \int_\Omega u^2 dx = 1\}$$

(iii) Sea $W_k = \{u \in H_0^1(\Omega) : \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi_h dx = 0\}$ *para* $h = 1, ..., k-1$ *se tiene que*

$$\lambda_k = \text{mín}\{\int_\Omega \mid \nabla u \mid^2 dx : u \in W_k(\Omega), \int_\Omega u^2 dx = 1\}$$

Demostración. Ver referencia [6], páginas 336-344. □

Las propiedades (*i*) y (*ii*) son caracterizaciones variacionales de los eigenvalores. De (*ii*) podemos deducir que

$$\lambda_1 \int_\Omega u^2 dx \leq \int_\Omega \mid \nabla u \mid^2 dx \tag{1.3}$$

1.4. Soluciones positivas.

Los métodos más utilizados para probar la positividad de las soluciones, están basados en el uso de los principios del máximo. Los cuales indican que:

Teorema 4 (Principio del máximo fuerte)**.**
Supongamos que $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *es armónica en* Ω*. Entonces,*

(i)

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$$

(ii) Si Ω *es conexo y existe un punto* $x_0 \in \Omega$ *tal que*

$$u(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} u$$

entonces u *es constante dentro de* Ω*.*

Demostración. Ver referencia [6], página 27. □

Observación 2. *El principio del máximo fuerte afirma que si Ω es conexo y $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ satisface*

$$\begin{aligned} -\triangle u &= 0 \quad en \;\; \Omega \\ u &= g \quad en \;\; \partial\Omega \end{aligned}$$

donde $g \geq 0$, entonces u es positiva en Ω si g es positiva en $\partial\Omega$.

Teorema 5 (Principio del máximo)**.**
Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado con frontera suave y sea $\lambda < \lambda_1$. Supongamos que $u \in C^2(\Omega) \cup C(\overline{\Omega})$ satisface

$$\begin{aligned} -\triangle u &\geq \lambda u \quad en \;\; \Omega \\ u &\geq 0 \quad en \;\; \partial\Omega \end{aligned}$$

Entonces $u \geq 0$ en Ω. Más aún, $u > 0$ en Ω o $u = 0$ en Ω.

Demostración. Ver referencia [1], página 12. □

Observación 3. *El principio del máximo afirma que si $u > 0$ en $\partial\Omega$, entonces u es positiva en Ω.*

1.5. Sub y super-soluciones

Consideremos el problema

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f(u) \quad en \;\; \Omega \\ u &= 0 \quad en \;\; \partial\Omega \end{aligned} \tag{1.4}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y $| f' | \leq C$ para alguna constante C.

Definición 4. *(i) Decimos que $\overline{u} \in H^1(\Omega)$ es una supersolución débil del problema (1.4) si*

$$\int_\Omega \nabla\overline{u}\nabla v dx \geq \int_\Omega f(\overline{u}) v dx \tag{1.5}$$

para cada $v \in H_0^1(\Omega)$ y $v \geq 0$ c.t.p.

(ii) Decimos que $\underline{u} \in H^1(\Omega)$ es una subsolución débil si

$$\int_\Omega \nabla \underline{u} \nabla v dx \leq \int_\Omega f(\underline{u}) v dx \tag{1.6}$$

para cada $v \in H_0^1(\Omega)$ y $v \geq 0$ c.t.p.

(iii) Decimos que $u \in H_0^1(\Omega)$ es una solución débil si

$$\int_\Omega \nabla \underline{u} \nabla v dx = \int_\Omega f(\underline{u}) v dx \tag{1.7}$$

para cada $v \in H_0^1(\Omega)$ y $v \geq 0$ c.t.p.

Observación 4. *Si $\overline{u}, \underline{u} \in C^2(\Omega)$, entonces de (1.5) y (1.6) se sigue que*

$$-\Delta \overline{u} \geq f(\overline{u}), \ -\Delta \underline{u} \leq f(\underline{u}) \quad \text{en } \Omega$$

Teorema 6. *Asumimos que existe una sub y una supersolución del problema (1.4) que satisfacen*

$$\overline{u} \geq 0, \ \underline{u} \leq 0 \text{ en } \partial\Omega \text{ y } \underline{u} \leq \overline{u} \text{ en } \Omega$$

Entonces existe una solución débil u del problema (1.4) tal que

$$\underline{u} \leq u \leq \overline{u} \quad \text{c.t.p. en } \Omega$$

Demostración. Ver referencia [6], página 508. □

Capítulo 2

Grado topológico de Brouwer.

El grado topológico de una función es una herramienta muy útil para resolver ecuaciones funcionales. Este fue introducido por L. Brouwer para dimensiones finitas y luego extendido por J. Leray y J. Schauder a dimensiones infinitas.

A continuación se hará una demostración minuciosa de la construcción del grado topológico de Brouwer, cabe recalcar que todas las demostraciones presentadas en este capítulo las realicé en base a las pruebas parcialmente desarrolladas y a las indicaciones que son dadas en [9].

Además se darán algunos ejemplos que permitirán ver la utilidad de esta herramienta matemática en las ramas del álgebra y el cálculo.

2.1. Teorema de Bolzano

Teorema 7. *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua y*

$$f(a).f(b) < 0$$

Entonces f tiene un cero en $[a, b]$.

Demostración. Como f es continua y $[a, b]$ es conexo, entonces $f([a, b])$ es conexo en $\mathbb{R}$, es decir es un intervalo, ahora como $f(a).f(b) < 0$, se tiene que $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos distintos, se puede suponer que $f(a) < f(b)$ y así $f(a) < 0 < f(b)$ pues estamos en un intervalo, es decir $0 \in f([a, b])$ y así $\exists\ x \in]a, b[$ tal que $f(x) = 0$. $\square$

2.2. Método del disparo

Sea el problema de Dirichlet:

$$\ddot{u}(t) = F(t, u(t)) \tag{2.1}$$

$$u(0) = u(1) = 0 \tag{2.2}$$

donde $F : [0, 1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua y acotada.

Ahora para cada $\zeta \in \mathbb{R}$ denotamos por $u(t, \zeta)$ una solución del problema (2.1) con $u(0, \zeta) = 0$ y $\dot{u}(0, \zeta) = \zeta$, así definimos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(\zeta) = u(1, \zeta)$.

Para resolver el problema de Dirichlet debemos mirar los ceros de f, de esta menera habremos hallado una solución $u(t, \zeta)$ que satisface (2.1) y (2.2), a esto se lo conoce como el método del disparo. Nosotros verificaremos el método probando el siguiente resultado.

Teorema 8. *Si F es una función continua y acotada entonces el problema de Dirichlet tiene al menos una solución.*

Demostración. Se tiene $u(t, \zeta)$ que satisface:

$$u(t, \zeta) = \zeta t + \int_0^t (t - s)F(s, u(s, \zeta))ds$$

Si $\mid F(t, u) \mid \leq M \quad \forall (t, u)$,

$$\mid u(t, \zeta) - \zeta t \mid \leq M \int_o^t (t - s)ds \leq \frac{M}{2} t^2$$

entonces

$$\mid f(\zeta) - \zeta \mid \leq \frac{M}{2} \qquad \forall \zeta \in \mathbb{R}$$

así,

$$-\frac{M}{2} + \zeta \leq f(\zeta) \leq \frac{M}{2} + \zeta$$

ahora como $\lim_{\zeta \to \pm\infty} f(\zeta) = \pm\infty$, f tiene al menos un cero. □

2.3. Grado en $\mathbb{R}$

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua, $f(x) \neq 0$ si $x = a$ o $x = b$. Definimos el Grado Topológico de Brouwer como:

$$deg(f,]a, b[) = \begin{cases} 1 & \text{si } f(a) < 0 < f(b), \\ -1 & \text{si } f(b) < 0 < f(a), \\ 0 & \text{otros} \end{cases}$$

2.3.1. Reformulación del Teorema de Bolzano

Teorema 9. *Si $deg(f,]a, b[) \neq 0$, entonces f tiene un cero en $]a, b[$.*

Demostración. La demostración es una consecuencia del Teorema de Bolzano. □

Puesto que, dado un conjunto abierto y acotado $\Omega \in \mathbb{R}$, puede ser expresado como la unión disjunta y contable de intervalos abiertos, es decir $\Omega = \bigcup_n I_n$, podemos dar la siguiente definición.

Definición 5. *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua, $f(x) \neq 0 \ \ \forall x \in \partial\Omega$, definimos el grado como*

$$deg(f, \Omega) = \Sigma_n deg(f, I_n)$$

Teorema 10. *Si se asumen las condiciones anteriores, entonces f se anula solo en un número finito de componentes I_n.*

Demostración. Suponemos por contradicción que $f(x_n) = 0$ con x_n que pertence a un único $I_{\sigma(n)}$. Extrayendo una subsucesión convergente (x_{n_k}) tal que $x_{n_k} \to x$, por continuidad $f(x) = 0$, así $x \in I_m$ para algún m, por lo tanto $x_n \in I_m$ con n suficientemente grande, lo cual es una contradicción. □

Definición 6. *Asumamos ahora que $f \in C^1[a, b]$, $f(x) \neq 0$ si $x = a$ o $x = b$. Dado un cero $\zeta \in]a, b[$ decimos que es* simple *si $f'(\zeta) \neq 0$.*

Una fórmula importante:
Por el Teorema 10 tenemos que existe un número finito de ceros de f, supongamos ahora que todos ellos son simples, los cuales pueden ser ordenados de la siguiente manera:

$$a < \zeta_1 < \zeta_2 < .... < \zeta_n < b$$

Teorema 11. *Si $f \in C^1[a,b]$, $f(x) \neq 0$ si $x = a$ o $x = b$, entonces*

$$deg(f,]a,b[) = \Sigma_{i=1}^{n} signf'(\zeta_i)$$

donde

$$signf'(x) = \begin{cases} 1 & si\ f'(x) > 0, \\ -1 & si\ f'(x) < 0, \end{cases}$$

Por convención supondremos que $\sum_{\emptyset} = 0$.

2.4. Grado en $\mathbb{R}^2$

Lema 1. *Asumamos que $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^2$-$\{0\}$ es continua. Entonces existe una función continua $\Theta : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que*

$$\alpha(t) = r(\cos(\Theta(t)), \sin(\Theta(t))), \quad t \in [a,b]$$

con $r = \|\alpha\|$ (norma euclidiana). Más aún, $\Theta(t)$ es única, salvo por la aditividad de 2π.

Demostración. Primero probaremos la unicidad.
Si $\Theta_1, \Theta_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ son funciones continuas, por tanto se tiene que,

$$(\cos(\Theta_1(t)), \sin(\Theta_1(t))) = (\cos(\Theta_2(t)), \sin(\Theta_2(t)))$$

entonces $\Theta_2(t) = \Theta_1(t) + 2\pi k(t)$ para cada t, con $k(t) \in \mathbb{Z}$. Como $t \mapsto k(t)$ es continua y a valores reales, se tiene que k es constante.

Existencia para $\alpha \in C^1([a,b], \mathbb{R}^2)$.
Antes de realizar la prueba asumiremos que el resultado es válido y trataremos de encontrar una fórmula para $\dot{\Theta}$,

$$\alpha = r(\cos\Theta, \sin\Theta) \Rightarrow \dot{\alpha} = \dot{r}(\cos\Theta, \sin\Theta) + r\dot{\Theta}(-\sin\Theta, \cos\Theta)$$

así tomando la matriz ortogonal se tiene que:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

de donde se tiene que $\langle \dot{\alpha}, J\alpha \rangle = r^2\dot{\Theta}$ (esta ecuación se satisface tomando $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$).

Ahora podemos empezar la prueba: definimos

$$\Theta(t) = \Theta_0 + \int_a^t \frac{-\alpha_2(s)\dot{\alpha_1}(s) + \dot{\alpha_2}(s)\alpha_1(s)}{\alpha_1(s)^2 + \alpha_2(s)^2} ds$$

con Θ_0 escogida tal que $\alpha(a) = \|\alpha(a)\| (\cos\Theta_0, \sin\Theta_0)$.
Así la función Θ es C^1 y $x_1 = \cos\Theta$, $x_2 = \sin\Theta$ es una solución del sistema de ecuaciones $\dot{x_1} = -\dot{\Theta}(t)x_2$, $\dot{x_2} = \dot{\Theta}(t)x_1$.

Ahora probaremos que $y_1 = \frac{\alpha_1}{r}$ y $y_2 = \frac{\alpha_2}{r}$ también son una solución del sistema anterior. Así,

$$r^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 \Rightarrow r\dot{r} = \alpha_1\dot{\alpha_1} + \alpha_2\dot{\alpha_2}$$

$$\dot{y_1} = \frac{\dot{\alpha_1}r - \alpha_1\dot{r}}{r^2} = \frac{\dot{\alpha_1}r^2 - \alpha_1 r\dot{r}}{r^3} = \frac{\dot{\alpha_1}r^2 - \alpha_1^2\dot{\alpha_1} - \alpha_1\alpha_2\dot{\alpha_2}}{r^3}$$

$$= \frac{\alpha_2^2\dot{\alpha_1} - \alpha_1\alpha_2\dot{\alpha_2}}{r^3} = \frac{\alpha_2\dot{\alpha_1} - \alpha_1\dot{\alpha_2}}{r^2}.\frac{\alpha_2}{r} = -\dot{\Theta}(t)y_2$$

de manera similar se puede probar que $\dot{x_2} = \dot{\Theta}(t)x_1$.

Como las soluciones x_1, x_2 y y_1, y_2 satisfacen la misma condición inicial el $t = a$, por la unicidad del problema de Cauchy se tiene que $x_1 = y_1, x_2 = y_2$, por tanto:

$$\alpha_1 = r\cos\Theta, \quad \alpha_2 = r\sin\Theta$$

Ahora probemos que si $\mid \Theta_1 - \Theta_2 \mid\leq \frac{\pi}{4}$, entonces $\mid \Theta_1 - \Theta_2 \mid\leq \sqrt{2} \mid e^{i\Theta_1} - e^{i\Theta_2} \mid$

Para esto, primeramente probaremos que:

$$0 \leq \Theta \leq \frac{\pi}{4} \Rightarrow \Theta \leq \sqrt{2} \mid e^{i\Theta} - 1 \mid$$

Así,

$$\mid e^{i\Theta} - 1 \mid\geq\mid \sin\Theta \mid\geq\mid \cos\zeta \mid \Theta$$

para algún $\zeta \in [0, \frac{\pi}{4}]$

$$\Rightarrow \quad \mid e^{i\Theta} - 1 \mid\geq \frac{1}{\sqrt{2}}\Theta$$

Ahora, tomando $\Theta = \Theta_1 - \Theta_2$ se tiene que:

$$\mid \Theta_1 - \Theta_2 \mid\leq \sqrt{2} \mid e^{i\Theta_1 - i\Theta_2} - 1 \mid= \sqrt{2} \mid e^{i\Theta_1}e^{-i\Theta_2} - e^{i\Theta_2}e^{-i\Theta_2} \mid$$

$$\leq \sqrt{2} \mid e^{-i\Theta_2} \mid\mid e^{i\Theta_1} - e^{i\Theta_2} \mid\leq \sqrt{2} \mid e^{i\Theta_1} - e^{i\Theta_2} \mid$$

Existencia para α continua
Sea $(\alpha_n) \in C^1([a,b];\mathbb{R}^n)$ tal que $\alpha_n \to \alpha$ uniformemente. Tomar en cuenta que para cada α_n existe Θ_n tal que $\forall\ t \in [a,b]$

$$\alpha_n(t) = \|\alpha_n\| \left(\cos(\Theta_n(t)), \sin(\Theta_n(t))\right)$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\alpha_n(t)}{\|\alpha_n\|} = (\cos(\Theta_n(t)), \sin(\Theta_n(t))) = e^{i\Theta_n(t)}$$

Ahora puesto que $\alpha_n \to \alpha$ se tiene que (α_n) es de Cauchy y por tanto $(\|\alpha_n\|)$ también lo es, pues,

$$|\ \|\alpha_n\| - \|\alpha_m\|\ | \leq \|\alpha_n - \alpha_m\| \to 0$$

así se tiene que $(\|\alpha_n\|)$ es convergente.

Tomando $n, m \geq N$ para un N suficientemente grande se tiene que,

$$\|\alpha_n\| = \|\alpha_m\| = k$$

y así usando la estimación hecha anteriormente,

$$|\ \Theta_n(t) - \Theta_m(t)\ | \leq \sqrt{2}\ |\ e^{i\Theta_1(t)} - e^{i\Theta_2(t)}\ | \leq \sqrt{2}\ |\ \frac{\alpha_n(t)}{\|\alpha_n\|} - \frac{\alpha_m(t)}{\|\alpha_m\|}\ |$$

$$\leq \frac{\sqrt{2}}{k}\ |\ \alpha_n(t) - \alpha_m(t)\ | \to 0$$

por tanto $(\Theta_n(t))$ es de Cauchy y así $(\Theta_n(t))$ converge uniformemente a $\Theta(t)$, donde Θ es el argumento buscado. □

Lema 2. *Asumamos que $\alpha_n : [a,b] \to \mathbb{R}^2$-$\{0\}$ es una sucesión de funciones continuas, uniformemente convergentes a $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^2$-$\{0\}$. Si $\Theta_n(a) \to \Theta(a)$, entonces $\Theta_n \to \Theta$ uniformemente.*

Demostración. Puesto que (α_n) es una sucesión de funciones continuas, para cada α_n puedo hallar Θ_n tal que

$$\frac{\alpha_n(t)}{\|\alpha_n\|} = (\cos(\Theta_n(t)), \sin(\Theta_n(t))) = e^{i\Theta_n(t)}$$

Ya que $\alpha_n \to \alpha$, se tiene que (α_n) es de Cauchy y por tanto $(\|\alpha_n\|)$ también lo es, así se tiene que $(\|\alpha_n\|)$ es convergente.

Tomando $n, m \geq N$ para un N suficientemente grande se tiene que,

$$\|\alpha_n\| = \|\alpha_m\| = k$$

y así usando la estimación hecha en el teorema anterior

$$\mid \Theta_n(t) - \Theta_m(t) \mid \leq \frac{\sqrt{2}}{k} \mid \alpha_n(t) - \alpha_m(t) \mid \to 0$$

por tanto $(\Theta_n(t))$ es de Cauchy y puesto $\Theta_n(a) \to \Theta(a)$, se concluye que $(\Theta_n(t))$ converge uniformemente a $\Theta(t)$ donde Θ es el argumento buscado. □

Definición 7. *Dado la función continua $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^2$-$\{0\}$, definimos el número WN[1] de la curva $\alpha(t)$ alrededor del origen por:*

$$WN = \frac{1}{2\pi} [\Theta(b) - \Theta(a)]$$

Se puede ver que el número WN es independiente del argumento elegido.

Proposición 2. *Si la curva es cerrada ($\alpha(a) = \alpha(b)$), el WN es un entero.*

Demostración. Como $\alpha(a) = \alpha(b) \Rightarrow \|\alpha(a)\| = \|\alpha(b)\|$, se tiene que

$$(\cos(\Theta(a)), \sin(\Theta(a))) = (\cos(\Theta(b)), \sin(\Theta(b)))$$

entonces $\Theta(b) = \Theta(a) + 2\pi k$ con $k \in \mathbb{Z}$, así

$$WN = \frac{1}{2\pi} [\Theta(b) - \Theta(a)] = \frac{1}{2\pi} [2\pi k] = k \in \mathbb{Z}$$

□

Asumimos ahora que Ω es un Dominio de Jordan en $\mathbb{R}^2$. Esto significa que Ω es la componente acotada de $\mathbb{R}^2$-Γ, donde Γ es la curva de Jordan. Asumamos que $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ es una parametrización positiva de Γ, tal que,

$$\begin{aligned} &\alpha(0) = \alpha(1) \\ \alpha \mid_{[0,I[} \quad &es\ inyectiva, \forall\ I \leq 1 \\ &\alpha([0,1]) = \Gamma \end{aligned}$$

[1] WN son las siglas de "Winding Number", que en español significa "Número Zigzagueante".

Definición 8. *Dada* $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^2$ *continua,* $f(x) \neq 0 \;\; \forall x \in \partial\Omega = \Gamma$*, definimos*

$$deg(f, \Omega) = WN \; de \;\; (f \circ \alpha) \;\; alrededor \; del \; origen$$

Para una mejor comprención de lo hecho anteriormente, se resolverán algunos ejemplos que fueron tomados de los ejercicios propuestos en [9].

Ejemplo 1.

i) $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$, $f(z) = z^n$, $n = 1, 2, ...$, $\Omega =$ *disco unidad,* $\alpha(t) = e^{2\pi i t}$. *Hallar* $deg(f, \Omega)$.

Solución: *Se tiene que* $f(\alpha(t)) = e^{2\pi i n t}$ *y por tanto* $\|f(\alpha(t))\| = 1$*, ahora*

- $f(\alpha(1)) = e^{2\pi i n} = (\cos(2\pi n), \sin(2\pi n))$*, así*

$$\cos(2\pi n) = \cos(\Theta(1)) \;\; y \;\; \sin(2\pi n) = \sin(\Theta(1))$$
$$\Rightarrow \Theta(1) = 2\pi n$$

- $f(\alpha(0)) = e^{0i} = (\cos(0), \sin(0)) = (1, 0)$*, así*

$$\cos(\Theta(0)) = 1 \;\; y \;\; \sin(\Theta(0)) = 0$$
$$\Rightarrow \Theta(0) = 0$$

por tanto

$$\begin{aligned} deg(f, \Omega) &= \frac{1}{2\pi}[\Theta(1) - \Theta(0)] \\ &= \tfrac{1}{2\pi}[2\pi n - 0] = n \end{aligned}$$

ii) $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}$, $f(z) = \bar{z}$, $\Omega =$ *disco unidad,* $\alpha(t) = e^{2\pi i t}$. *Hallar* $deg(f, \Omega)$.

Solución: *Se tiene que* $f(\alpha(t)) = e^{-2\pi i t}$ *y por tanto* $\|f(\alpha(t))\| = 1$*, ahora*

- $f(\alpha(1)) = e^{-2\pi i} = (\cos(-2\pi), \sin(-2\pi)$*, así*

$$\cos(-2\pi) = \cos(\Theta(1)) \;\; y \;\; \sin(-2\pi) = \sin(\Theta(1))$$
$$\Rightarrow \Theta(1) = -2\pi$$

- $f(\alpha(0)) = e^{0i} = (\cos(0), \sin(0)) = (1, 0)$, *así*

$$\cos(\Theta(0)) = 1 \quad y \quad \sin(\Theta(0)) = 0$$

$$\Rightarrow \Theta(0) = 0$$

por tanto

$$\begin{aligned} deg(f, \Omega) &= \frac{1}{2\pi}[\Theta(1) - \Theta(0)] \\ &= \tfrac{1}{2\pi}[-2\pi - 0] = -1 \end{aligned}$$

Proposición 3. *El grado es una función continua*

Demostración. Sean $f_n, f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^2$ continuas, $f_n \neq 0, f(x) \neq 0 \quad \forall x \in \partial\Omega$ y $f_n \to f$ uniformemente, entonces por el Lema 2 se tiene que $deg(f_n, \Omega) \to deg(f, \Omega)$. □

Además, como $deg(f_n, \Omega)$ es un entero para todo $n \geq 1$ y puesto que $deg(f_n, \Omega) \to deg(f, \Omega)$, se tiene que la sucesión $(deg(f_n, \Omega))$ deber ser constante a partir de un cierto N. De aquí se deduce la siguiente propiedad:

Definición 9. *Una Homotopía es una función $H = H(\lambda, x)$ tal que $H \in C([0,1] \times \overline{\Omega}, \mathbb{R}^2)$ donde Ω es un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^2$.*

Definición 10. *Una homotopía es admisible, si $H(\lambda, x) \neq 0$ para todo $(\lambda, x) \in [0,1] \times \partial\Omega$.*

2.4.1. Propiedad de Homotopía

Si H es una homotopía admisible, entonces $deg(H(\cdot, \lambda), \Omega)$ es independiente de λ.

Demostración. Tomemos una sucesión $(H_n(\cdot, \lambda))$ que converge uniformemente a $H(\cdot, \lambda)$ con $\lambda \in [0,1]$, como $deg(H(\cdot, \lambda), \Omega)$ es continua, se tiene que,

$$deg(H_n(\cdot, \lambda), \Omega) \to deg(H(\cdot, \lambda), \Omega)$$

como $deg(H_n(\cdot, \lambda), \Omega)$ toma solo valores enteros, se concluye que $deg(H(\cdot, \lambda), \Omega)$ es constante $\forall\ \lambda \in [0,1]$. □

2.4.2. Propiedad de existencia

Teorema 12. *Si* $f : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^2$ *es continua,* $f(x) \neq 0 \quad \forall x \in \partial\Omega$*,* $deg(f, \Omega) \neq 0$ *entonces* f *tiene un cero en* Ω*.*

Demostración.

- Si Ω es la bola unidad y definimos $H(x, \lambda) = f(\lambda x)$. Por el absurdo, si f no tiene ceros, H es una homotopía, lo que implica que

$$deg(H(\cdot, 0), \Omega) = deg(H(\cdot, 1), \Omega) = deg(f, \Omega) \neq 0$$

pero $H(x, 0) = f(0)$ y puesto que función constante tiene grado cero, se produce una contradicción.

- Si Ω es un dominio de Jordan, tomamos:

$$h(x, \lambda) = f(\Phi(x, \lambda))$$

donde

$$\Phi : \overline{\Omega} \times [0, 1] \to \overline{\Omega} \ \ \textit{es continua}$$

$$\Phi(\cdot, 1) = \textit{identidad}$$

$$\Phi(\cdot, 0) = \textit{constante}$$

Así por el absurdo, si f no tiene ceros, H es una homotopía lo que implica que

$$deg(H(\cdot, 0), \Omega) = deg(H(\cdot, 1), \Omega) = deg(f, \Omega) \neq 0$$

pero $H(x, 0) = f(\Phi(x, 0)) = f(k)$ con k constante, lo que produce una contradicción.

□

2.5. Aplicación del grado en el plano

2.5.1. El Teorema Fundamental del Álgebra

Teorema 13. *Sea* $p \in \mathbb{C}[z]$ *y* $n > 1$*,* $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$ *un polinomio donde los* $a_i \in \mathbb{R} \ \forall \ i \in \{0, 1, ..., n-1\}$*. Entonces* p *tiene al menos una raiz.*

Demostración. Primeramente recordaremos (ref. [3])que la siguiente es una estimación para una posible raiz ζ de p;

$$| \zeta | \leq \text{máx}\{1, | a_0 | +....+ | a_{n-1} |\}$$

Definimos
$$H(z, \lambda) = z^n + \lambda a_{n-1} z^{n-1} + ... + \lambda a_1 z + \lambda a_0$$

y sea Ω la bola centrada en el origen con radio $R > \text{máx}\{1, | a_0 | +....+ | a_{n-1} |\}$. Entonces $H(z, \lambda) \neq 0 \quad \forall (z, \lambda) \in \partial\Omega \times [0, 1]$ y así

$$deg(p, \Omega) = deg(H(\cdot, 1), \Omega) = deg(H(\cdot, 0), \Omega) = n > 0$$

Entonces la propiedad de existencia implica que p tiene un cero en Ω. □

2.5.2. Teorema del punto fijo de Brouwer

Si $A = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq 1\}$ y $\Phi : A \to A$ es continua. Entonces Φ tiene un punto fijo.

Demostración. Asumamos que $\Phi(x) \neq x \quad \forall x \in \partial A$ y definimos

$$H(x, \lambda) = x - \lambda \Phi(x)$$

y observemos que si $\|x\| = 1, \lambda \in [0, 1[$,

$$\|H(x, \lambda)\| \geq \|x\| - \lambda \|\Phi(x)\| \geq 1 - \lambda > 0$$

Así, $H(x, \lambda) \neq 0$ si $(x, \lambda) \in \partial A \times [0, 1]$ y por tanto

$$deg(I - \Phi, A^o) = deg(H(\cdot, 1), A^o) = deg(H(\cdot, 0), A^o) = deg(I, A^o) = 1$$

donde $A^o = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < 1\}$. Entonces $I - \Phi$ tiene un cero y este es el punto fijo de la función Φ. □

2.5.3. Generalización del Teorema de Bolzano. (Poincaré-Miranda)

Teorema 14. *Si* $\Omega =]-a, a[\times]-b, b[$ *y*

$$f_1(a, y) > 0 > f_1(-a, y) \quad \forall\, y \in [-b, b]$$

$$f_2(x,b) < 0 < f_2(x,-b) \qquad \forall\ x \in [-a,a]$$
$$f = (f_1, f_2) : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^2 \quad \textit{continua}$$

Entonces f tiene un cero en Ω.

Demostración. Observaremos primero que la función $f^\star = (f_1^\star, f_2^\star) = (x, -y)$ satisface las condiciones del problema. El grado de esta función es fácil de calcular, siendo $deg(f^\star, \Omega) = -1$ (pues $f^\star$ le da una vuelta a (0,0) en sentido horario).

Definimos
$$H(x,y,\lambda) = [\lambda f_1(x,y) + (1-\lambda)x, \lambda f_2(x,y) - (1-\lambda)y]$$

Se puede observar que para cada $\lambda \in [0,1]$, $H(\cdot,\cdot,\lambda)$ satisface las condiciones del teorema y así $H(x,y,\lambda) \neq 0$ si $x = \pm a$ o $x = \pm b$, es decir si $(x,y) \in \partial\Omega$.
Por tanto,

$$deg(f,\Omega) = deg(H(\cdot,1),\Omega) = deg(H(\cdot,0),\Omega) = deg(f^\star,\Omega) = -1$$

entonces f tiene un cero en Ω. □

2.6. Algunas propiedades del grado

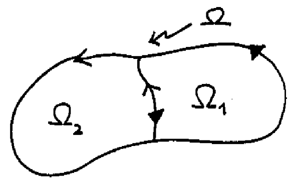
Para lo que sigue, será útil tomar en cuenta lo siguiente:

- Dadas dos funciones continuas $\alpha_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^2$-$\{0\}$, $\alpha_2 : [c,d] \to \mathbb{R}^2$-$\{0\}$ tal que $\alpha_1(b) = \alpha_2(c)$, podemos yuxtaponerlas y así obtener una nueva función $\alpha_1 * \alpha_2 : [a,d] \to \mathbb{R}^2$-$\{0\}$ definida por:

$$\alpha_1 * \alpha_2(t) = \begin{cases} \alpha_1(t) & \text{si } a \leq t \leq b \\ \alpha_2(c-b+t) & \text{si } b \leq t \leq b+d-c \end{cases}$$

- El WN es aditivo.

Asumamos ahora que tenemos tres dominios de Jordan como se indica en la figura:



y $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^2$ continua, $f(x) \neq 0 \quad \forall x \in \partial\Omega_1 \bigcup \partial\Omega_2$. Entonces

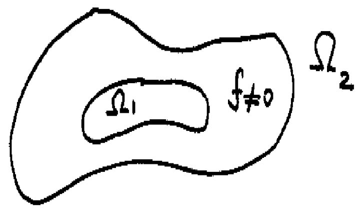
$$deg(f, \Omega) = deg(f, \Omega_1) + deg(f, \Omega_2)$$

(note que $\partial\Omega \subset \partial\Omega_1 \bigcup \partial\Omega_2$).

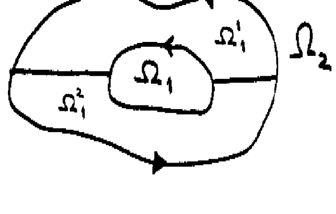
A esta propiedad se la conoce como ***Propiedad de aditividad.***

Con un argumento similar podemos deducir la ***Propiedad de excisión:***
Sean Ω_1, Ω_2 dominios de Jordan, $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega_2$ como se ve en la figura, $f : \overline{\Omega}_2 \to \mathbb{R}^2$ continua, $f(x) \neq 0 \ \ \forall x \in \overline{\Omega}_2$-$\Omega_1$, entonces

$$deg(f, \Omega_1) = deg(f, \Omega_2)$$



Demostración. Por la aditividad del grado y por la gráfica



se tiene que

$$deg(f, \Omega_2) = deg(f, \Omega_1) + deg(f, \Omega_1^1) + deg(f, \Omega_1^2)$$

ahora como $f(x) \neq 0 \quad \forall x \in \overline{\Omega}_2$-$\Omega_1$, por la negación de la propiedad de existencia se tiene que $deg(f, \Omega_1^1) = deg(f, \Omega_1^2) = 0$ y así

$$deg(f, \Omega_1) = deg(f, \Omega_2)$$

$\square$

2.6.1. El grado de una aplicación lineal

Asumamos que L es una matriz 2×2 con $\det L \neq 0$ y sea Ω la bola unidad centrada en el origen. Observe que $Lx \neq 0 \quad \forall x \in \partial\Omega$. Definimos el conjunto

$$Gl(\mathbb{R}^2) = \{L \in M_{22}(\mathbb{R}) : \det L \neq 0\}$$

que puede ser dividido en dos componentes: matrices con determinante positivo y negativo.

Asumamos ahora que $\det L > 0$. Entonces podemos definir una función continua $\lambda \in [0,1] \mapsto L_\lambda \in Gl_+(\mathbb{R}^2)$ con $L_0 = L$, $L_1 = Id$. Así la función

$$H(x, \lambda) = L_\lambda x$$

satisface la propiedad de homotopía pues $L_\lambda x = 0 \Rightarrow x = 0$, de donde

$$deg(L_0, \Omega) = deg(L, \Omega) = deg(I, \Omega) = 1$$

Si $\det L < 0$, podemos hacer una homotopía con

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

además sabemos que esta es una función con grado $-1 \quad (z \mapsto \overline{z})$

Resumiendo,

$$deg(L, \Omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \det L > 0, \\ -1 & \text{si } \det L < 0, \end{cases}$$

2.6.2. Linearización y grado

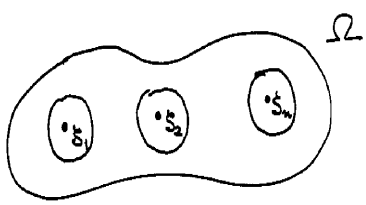
Asumamos que Ω es un dominio arbitrario de Jordan y $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^2$ es C^1. Más aún, f tiene un único cero $x_* \in \Omega$ y este cero es simple ($det(f'(x_*) \neq 0$). Entonces,

$$deg(f, \Omega) = deg(f'(x_*), \Omega) = sign(\det f'(x_*))$$

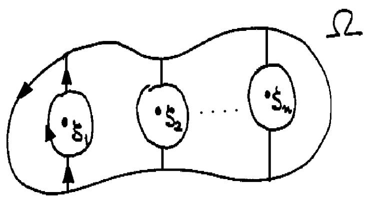
Una fórmula importante:
Asumimos que Ω es un dominio de Jordan y $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^2$ es C^1 con $f(x) \neq 0 \quad \forall x \in \partial\Omega$, además todos los ceros $\zeta_1....\zeta_n \in \Omega$ son simples. Entonces

$$deg(f,\Omega) = \sum_{i=1}^{n} sign(detf'(\zeta_i)) \tag{2.3}$$

Demostración. Primeramente, haremos pequeños discos Ω_i alrededor de cada ζ_i como se indica en la figura



Entonces aplicamos la aditividad y la principio de linearización a:



Así, se tiene que

$$deg(f,\Omega) = \sum_{i=1}^{n} deg(f,\Omega_i) = \sum_{i=1}^{n} sign(detf'(\zeta_i))$$

□

Ahora resolveremos uno de los ejercicios propuestos en [9], el cual nos permitirá hacer uso de las propiedades y definiciones antes expuestas.

Ejemplo 2. *Calcular el grado de $f(x,y) = (e^{x+y} - 1, e^{x-y} - 1)$ en una vecindad del origen.*

Solución: *Primero veamos cuales son los ceros de f, así,*

$$f(x,y) = (e^{x+y} - 1, e^{x-y} - 1) = (0,0)$$

$$\Rightarrow \quad e^{x+y} = 1 \;\; y \;\; e^{x-y} = 1$$

$$\Rightarrow \quad e^{x+y} = e^{x-y}$$

$$\Rightarrow \quad x + y = x - y$$

$$\Rightarrow \quad x = y = 0$$

ahora calculemos $f'(x,y)$,

$$f'(x,y) = \begin{bmatrix} e^{x+y} & e^{x+y} \\ e^{x-y} & -e^{x-y} \end{bmatrix}$$

así,

$$det(f'(x,y)) = -e^{x+y}e^{x-y} - e^{x+y}e^{x-y} = -2e^{x+y}$$

$$\Rightarrow \quad det(f'(0,0)) = -2$$

$$\Rightarrow \quad deg(f,\Omega) = deg(f'(0,0),\Omega) = sign(det f'(0,0)) = -1$$

2.7. Grado en $\mathbb{R}^d$

Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ abierto y acotado, $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^d$ continua con $f(x) \neq 0 \;\; \forall x \in \partial\Omega$.
En este capítulo definiremos el $deg(f,\Omega)$ tal que las propiedades de existencia, homotopía y de excisión se mantengan. La idea es usar la fórmula anterior, para formar la nueva definición de grado, esto lo haremos en tres pasos.

Paso 1: f es C^1 y todos sus ceros son simples, así

$$deg(f,\Omega) = \sum_{i=1}^{n} sign(det f'(\zeta_i)) \tag{2.4}$$

con $f^{-1}(0) = \{\zeta_1.....\zeta_n\}$. Por convención $\sum_{\emptyset} = 0$.

Ejemplo 3. *Sea $d = 2$, $\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$, $f(z) = z^2 - \epsilon, \epsilon > 0$, Ω la bola unidad. Calcular el grado.*

Solución: *Se tiene que $f^{-1}(0) = \{\sqrt{\epsilon}, -\sqrt{\epsilon}\}$ y su derivada es,*

$$f'(x, y) = \begin{bmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{bmatrix}$$

por tanto se tiene que:

$$det f'(x, y) = 4x^2 + 4y^2$$

y así,

$$det f'(\sqrt{\epsilon}) = 4\epsilon \quad y \quad det f'(-\sqrt{\epsilon}) = 4\epsilon$$

por tanto

$$deg(f, \Omega) = 2$$

Paso 2: f es C^1 pero sus ceros no son necesariamente simples. Aplicaremos el Teorema de Sard, el cual dice que casi todos los vectores $v \in \mathbb{R}^d$ son valores regulares de f, esto significa que si $f(\zeta) = v$ entonces $det f'(\zeta) \neq 0$. Puede ser que el vector $v = 0$ no sea un valor regular, pero esto no es problema pues podemos encontrar una sucesión de vectores $v_n \in \mathbb{R}^d$ tal que sean valores regulares que converjan a 0. Así podemos aplicar el *paso* 1 a la función $f_n(x) = f(x) - v_n$ y definimos

$$deg(f, \Omega) = \lim_{n \to \infty} deg(f_n, \Omega)$$

Para que esta definición tenga sentido, se debe probar que la sucesión $deg(f_n, \Omega)$ se transforma eventualmente en una constante y también que el límite es independiente del v_n escogido.

Únicamente probaremos lo antes dicho para $d = 2$ y Ω un dominio de Jordan.

Demostración. Puesto que $f_n, f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^2$ son continuas,

$$f_n \neq 0, f(x) \neq 0 \qquad \forall x \in \partial\Omega$$

y $f_n \to f$ uniformemente en $\partial\Omega$, entonces

$$deg(f_n, \Omega) \to deg(f, \Omega)$$

Como $deg(f_n, \Omega)$ es un entero, este debe hacerse finalmente constante e igual a $deg(f, \Omega)$. Ahora para demostrar que la definición no depende de (v_n), tomemos otra sucesión (u_n) que también converja a cero, así se tiene que $f_n(x) = f(x) - v_n$ y $\overline{f}_n(x) = f(x) - u_n$, por tanto $\overline{f}_n(x) - f_n(x) = v_n - u_n$, de donde $\overline{f}_n(x) \to f_n(x)$, entonces $deg(\overline{f}_n, \Omega) \to deg(f_n, \Omega)$. $\square$

Ejemplo 4. *Sea $d = 2$, $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, $f(z) = z^2$, Ω la bola unidad. Hallar el grado de f.*

Solución: *Tomemos $f_\epsilon(z) = z^2 - \epsilon$, así por el ejemplo anterior,*

$$deg(f, \Omega) = \lim_{\epsilon \to 0} deg(f_\epsilon, \Omega) = \lim_{\epsilon \to 0} 2 = 2$$

Paso 3: Suponemos que f es continua, por tanto la podemos aproximar por una sucesión de funciones f_n de clase C^1. Esto significa que $f_n \to f$ uniformemente en $\overline{\Omega}$, donde las funciones f_n satisfacen que $f_n(x) \neq 0 \quad \forall x \in \partial\Omega$ para un n lo suficientemente grande, por tanto $deg(f_n, \Omega)$ está definido acorde al *paso 2*.

Definición 11. *Sea $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^d$ continua con $f(x) \neq 0 \quad \forall x \in \partial\Omega$, definimos el grado topológico de f por*

$$deg(f, \Omega) = \lim_{n \to \infty} deg(f_n, \Omega)$$

donde $f_n \in C^1(\Omega)$ $\forall n$ y $f_n \to f$.

Ejemplo 5. *Sea $f(x_1, ..., x_d) = (| x_1 |, x_2, ..., x_d)$ y Ω la bola unidad en $\mathbb{R}^d$.*

Solución: *Definamos la función*

$$f_\varepsilon(x_1, ..., x_d) = (\sqrt{x_1^2 + \varepsilon}, x_2, ..., x_d)$$

se puede ver que $f_\varepsilon(x) \to f(x)$ cuando $\varepsilon \to 0$. Así, de acuerdo con el paso 1, *$deg(f_\varepsilon, \Omega) = 0$ pues esta función no tiene ceros, y por tanto $deg(f, \Omega) = 0$.*

Ejemplo 6. *Supongamos que $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ es una función continua y además existe $M > 0$ tal que $\|f(x) - x\| \leq M \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$. Entonces f tiene al menos un cero.*

Demostración. Sea $f(x) = x + \Phi(x)$,

$$\Rightarrow \qquad \Phi(x) = f(x) - x$$

y por tanto $\|\Phi(x)\| \leq M$.

Ahora, definimos la homotopía

$$H(x, \lambda) = \lambda f(x) + (1 - \lambda)x, \quad \lambda \in [0, 1]$$

así

$$H(x, \lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x + \lambda\Phi(x) = 0$$

por tanto se tiene que

$$0 = \|x + \lambda\Phi(x)\| \geq \|x\| - \lambda \|\Phi(x)\|$$

$$\Rightarrow \quad \|x\| \leq \lambda \|\Phi(x)\| \leq \|\Phi(x)\| \leq M$$

Sea Ω la bola de radio mayor que M centrada en el origen. La propiedad de homotopía implica que

$$deg(f, \Omega) = deg(H(\cdot, 1), \Omega) = deg(H(\cdot, 0), \Omega) = deg(I, \Omega) = 1$$

entonces f tiene al menos un cero en Ω. $\square$

Capítulo 3

Grado topológico de Leray-Schauder.

3.1. Definición del grado de Leray-Schauder

Sea D un subconjunto abierto y acotado de un espacio de Banach X. Se define por perturbación compacta de la identidad a un operador $\Phi \in C(\overline{D}, X)$ tal que $\Phi = I - T$, donde $T : \overline{D} \to X$ es un operador compacto en X.

Probemos que $\Phi(\partial D)$ es un cerrado en X.

Demostración. Sea $x_n \in \partial D$, tal que $\Phi(x_n) = x_n - T(x_n) \to y$. Puesto que T es compacto, podemos encontrar una subsucesión convergente que la llamaremos nuevamente (x_n) tal que $T(x_n) \to z$, así $x_n \to z + y = x \in \partial D$ y por la continuidad de T se tiene que $x - T(x) = y$, lo que prueba que $\Phi(\partial D)$ es cerrado. □

Ahora, si $b \notin \Phi(\partial D)$, por lo anterior

$$r = dist(b, \Phi(\partial D)) > 0$$

Teorema 15. *$T : \overline{D} \to X$ es un operador compacto si y solo si T es el límite uniforme de operadores continuos de rango finito.*

Demostración. Ver referencia [8], página 19. □

Así, por el teorema 15, existe una sucesión $T_k \in C(\overline{D}, X)$ tal que $T_k \to T$ uniformemente en $\overline{D}$ y

$$T_k(\overline{D}) \subset E_k \subset X, \qquad con\ dim(E_k) < \infty \tag{3.1}$$

A continuación, lo que se hará es definir el grado de $I-T$ como el límite del grado de $I-T_k$, para lo cual vamos a notar algunos preliminares que nos permitirán dar una definición más formal del grado.

Consideremos la función $S \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$, donde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y $m \leq n$. Puesto que podemos identificar $\mathbb{R}^m$ como un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ cuyas $n-m$ últimas componentes son cero, es decir,

$$\mathbb{R}^m = \{x \in \mathbb{R}^n : x_{m+1} = \cdots = x_n = 0\}$$

la función S puede ser considerada como una función con valores en $\mathbb{R}^n$ entendiendo que las $n-m$ últimas componentes son cero: $S_{m+1} = \cdots = S_n = 0$. Sea $g(x) = x - S(x)$ y sea $g_m \in C(\overline{\Omega} \cap \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ que denota la restricción de g a $\overline{\Omega} \cap \mathbb{R}^m$.

Teorema 16. *Si $b \in \mathbb{R}^m \backslash g(\partial\Omega)$ entonces*

$$deg(g, \Omega, b) = deg(g_m, \Omega \cap \mathbb{R}^m, b) \tag{3.2}$$

Demostración. Sea $x \in \Omega$ tal que $g(x) = b$, esto significa que $x = S(x) + b$, así $x \in \Omega \cap \mathbb{R}^m$ y $g_m(x) = g(x) = b$. Esto muestra que $g^{-1}(b) \subset g_m^{-1}(b)$, puesto que la contenencia inversa es trivialmente verdadera, se sigue que

$$g^{-1}(b) = g_m^{-1}(b) \tag{3.3}$$

Podemos suponer que $\Omega \cap \mathbb{R}^m \neq \emptyset$ y $g_m^{-1}(b) = \emptyset$ y por (3.3), $g^{-1}(b) = \emptyset$. Como es usual, suponemos que S es de clase C^1 y más aún, que b es un *valor regular* de g_m, es decir que el Jacobiano $J_{g_m}(x)$es diferente de cero para todo $x \in g_m^{-1}(b)$. Entonces, de acuerdo con (2.4), se tiene que

$$deg(g, \Omega, b) = \sum_{x \in g^{-1}(b)} sign[J_g(x)]$$

Ahora la derivada de g tiene forma triangular

$$g'(x,y) = \begin{bmatrix} g'_m(x) & \cdot \\ 0 & I_{\mathbb{R}^{n-m}} \end{bmatrix}$$

y así $sign[J_g(x)] = sign[J_{g_m}(x)]$, de esto y de (3.3) se tiene que

$$deg(g, \Omega, b) = \sum_{x \in g^{-1}(b)} sign[J_g(x)] = \sum_{x \in g_m^{-1}(b)} sign[J_{g_m}(x)] = deg(g_m, \Omega \cap \mathbb{R}^m, b)$$

lo que prueba (3.2). $\square$

La precedente discusión nos permitirá definir el grado de una función g tal que $g(x) = x - S(x)$, donde $S(\overline{D})$ está contenido en un espacio de dimensión finita E de X.

Definición 12. *Sea $b \in X$ tal que $b \notin g(\overline{D})$ y sea E_1 un subespacio de X que contiene E y b. Definamos*

$$deg(g, D, b) = deg(g_1, D \cap E_1, b) \tag{3.4}$$

donde $g_1 = g_{|\overline{D} \cap E_1}$.

Mostremos ahora que la presente definición es independiente de E_1. Sea E_2 otro subespacio de X tal que $E \subset E_2$ y $b \in E_2$, entonces $E \subset E_1 \cap E_2$ y $b \in E_1 \cap E_2$, aplicando (3.2) se tiene que:

$$deg(g_i, D \cap E_i, b) = deg(g_{|\overline{D} \cap E_1 \cap E_2}, D \cap E_1 \cap E_2, b), \quad i = 1, 2$$

esto justifica la definición dada en (3.4).

Ahora regresemos a la función $\Phi = I - T$, con T compacto. Sea (T_k) una sucesión que converge a T y que satisface (3.1). Sea $\Phi_k = I - T_k$, tomando k tal que

$$\sup_{x \in \overline{D}} \|T(x) - T_k(x)\| \leq r/2 \tag{3.5}$$

Tomando $b \notin \Phi_k(\overline{D})$, tiene sentido considerar el grado $deg(\Phi_k, D, b)$ definido como en (3.4).

Definición 13. *Sea $b \notin \Phi(\partial D)$, donde $\Phi = I - T$ con T compacto. Definimos*

$$deg(\Phi, D, b) = deg(I - T_k, D, b)$$

para todo T_k que satisface (3.1)y (3.5).

Para que la definición anterior tenga sentido, debemos justificar que el grado no depende de la aproximación T_k. En efecto, sea T_i, $i = 1, 2$, tal que (3.1)-(3.5) se satisface. Sea E_i espacios de dimensión finita tal que $T_i(\overline{D}) \subset E_i$. Si E es el espacio generado por E_1 y E_2, usando la definición (3.4) tenemos que

$$deg(\Phi_i, D, b) = deg((\Phi_i)_{|\overline{D} \cap E}, D \cap E, b), \qquad i = 1, 2 \tag{3.6}$$

Consideremos la homotopía

$$h(\lambda, \cdot) = \lambda(\Phi_1)_{|\overline{D} \cap E} + (1 - \lambda)(\Phi_2)_{|\overline{D} \cap E}$$

es fácil ver que h es admisible en $D \cap E$ y así

$$deg((\Phi_1)_{|\overline{D} \cap E}, D \cap E, b) = deg((\Phi_2)_{|\overline{D} \cap E}, D \cap E, b)$$

lo que justifica la Definición 13.

A continuación se enunciarán las principales propiedades del grado de Leray-Schauder, para tener una idea de los métodos usados en sus demostraciones, es recomendable ver: [1] p. 35-36, [3] p. 2-3, [5] cap. 11.

- **Propiedad de normalización:**

$$deg(I, D, b) = 1 \quad si \;\; b \in D$$

- **Propiedad de aditividad:**
Asumimos que D_1 y D_2 son subconjuntos abiertos, acotados y disjuntos de D. Si $b \notin \Phi(\overline{D} \setminus (D_1 \cup D_2))$, entonces

$$deg(\Phi, D, b) = deg(\Phi, D_1, b) + deg(\Phi, D_2, b)$$

- **Propiedad de homotopía:**
Sea $S \in C([0,1] \times \overline{D}, X)$ una función compacta y definimos $H(t, u) = u - S(t, u)$. Si $b : [0,1] \to X$ es continua y $b(t) \notin H([0,1] \times \partial D)$ entonces

$$deg(H(t, \cdot), D, b(t)) = cte \quad \forall t \in [0,1]$$

De las propiedades anteriores es fácil probar las siguientes:

- $deg(\Phi, \emptyset, b) = 0$.
- **Propiedad de existencia:**
Si $deg(\Phi, D, b) \neq 0$, entonces existe $u \in D$ tal que $\Phi(u) = b$.
- **Propiedad de excisión:**
Si $K \subset D$ es cerrado y $b \notin \Phi(K)$, entonces

$$deg(\Phi, D, b) = deg(\Phi, D - K, b)$$

-
$$S|_{\partial D} = T|_{\partial D} \quad \Rightarrow \quad deg((I - S), D, b) = deg((I - T), D, b)$$

- **Propiedad general de homotopía:**
Sea Q un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R} \times X$ y sea $H : \overline{Q} \to X$ una aplicación compacta. Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ se considera el conjunto

$$Q_\lambda = \{u \in X : (\lambda, u) \in Q\}$$

y la función $H_\lambda : \overline{Q}_\lambda \to X$ dado por

$$H_\lambda = H(\lambda, u)$$

Si

$$u - H_\lambda(u) \neq b \quad \forall u \in \partial Q_\lambda, \quad \forall \lambda \in [a, b]$$

entonces el grado topológico $deg(I - H_\lambda, Q_\lambda, b)$ está bien definido y es independiente de λ.

- **Continuidad**

  a)**Continuidad respecto a** b
  El grado es constante en cada componente conexa de $X - \Phi(\partial D)$.

  b)**Continuidad con respecto a** T
  Existe una vecindad V de T en el espacio $K(\overline{D}, X)$ de los operadores compactos de $\overline{D}$ en X tal que
  $$deg((I - S), D, b) = cte(= deg(\Phi, D, b)) \quad \forall S \in V$$

3.2. Teorema de Leray-Schauder

Sea X un espacio de Banach real, sea D un subconjunto abierto y acotado de X, sea $a < b$ y sea $T : [a, b] \times \overline{D} \to X$ una operador compacto. Para $\lambda \in [a, b]$ consideremos la ecuación

$$\Phi(\lambda, u) = u - T(\lambda, u) = 0, \quad u \in X \tag{3.7}$$

Algunas veces, pondremos en evidencia la dependencia de (3.7) de λ y nos referiremos a este por $(3.7)_\lambda$. Observemos que podemos encontrar una familia de operadores compactos

$$T_\lambda(u) = T(\lambda, u), \quad u \in X$$

similarmente denotamos $\Phi_\lambda = I - T_\lambda$. Definamos también el conjunto

$$\Sigma = \{(\lambda, u) \in [a, b] \times \overline{D} : \Phi(\lambda, u) = 0\}$$

usaremos además la notación Σ_λ para definir:

$$\Sigma_\lambda = \{u \in \overline{D} : (\lambda, u) \in \Sigma\}$$

Teorema 17. *Asumimos que X es un espacio de Banach real, D un subconjunto abierto y acotado de X y $\Phi : [a, b] \times \overline{D} \to X$ está dado por $\Phi(\lambda, u) = u - T(\lambda, u)$ con T un operador compacto. Supongamos también que*

$$\Phi(\lambda, u) = u - T(\lambda, u) \neq 0, \quad \forall(\lambda, u) \in [a, b] \times \partial D$$

Si

$$deg(\Phi_a, D, 0) \neq 0 \tag{3.8}$$

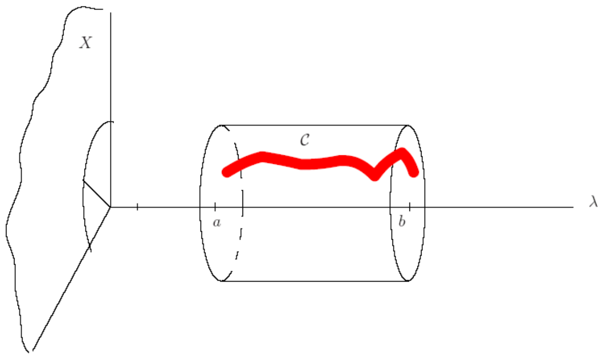
entonces

1. *$(3.7)_\lambda$ tiene una solución en D para todo $a \leq \lambda \leq b$.*

2. *Más aún, existe un conjunto compacto conexo $C \subset \Sigma$ tal que*

$$C \cap \Sigma_a \neq \emptyset \quad y \quad C \cap \Sigma_b \neq \emptyset$$

Demostración. Ver referencia [3], páginas 4-6. □



3.3. Aplicaciones del Grado de Leray-Schauder

3.3.1. Teorema del punto fijo de Schauder

En esta sección se mostrará como el grado nos permite obtener un resultado clásico sobre la existencia de puntos fijos en operadores compactos.

Teorema 18. *Sea D un conjunto abierto, convexo y acotado de un espacio de Banach X, tal que $0 \in D$ y sea $T \in C(\overline{D}, X)$ un operador compacto tal que $T(\overline{D}) \subset \overline{D}$. Entonces T tiene un punto fijo en $\overline{D}$, es decir existe $x \in \overline{D}$ tal que $T(x) = x$.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que

$$T(x) \neq x, \qquad \forall x \in \partial D \tag{3.9}$$

Así, podemos definir el grado $deg(I - T, D, 0)$ y por tanto el teorema quedará probado si logramos mostrar que $deg(I - T, D, 0) \neq 0$. Definimos

$$h(\lambda, x) = x - \lambda T(x), \qquad \lambda \in [0, 1], \; x \in \overline{D}$$

Para cada $\lambda \in [0, 1]$ la función $x \mapsto h(\lambda, x)$ es un perturbación compacta de la identidad en X. Nosotros afirmamos que

$$h(\lambda, x) \neq 0, \qquad \forall (\lambda, x) \in [0, 1] \times \partial D \tag{3.10}$$

En efecto, supongamos que existe $x \in \partial D$ y $\lambda \in [0,1]$ tal que $h(\lambda, x) = 0$, así $x = \lambda T(x)$, de (3.9) se sigue que $\lambda < 1$. Puesto que $T(\overline{D}) \subset \overline{D}$, se tiene que $T(x) \in \overline{D}$, entonces $\lambda < 1$ y la convexidad de D implican que $\lambda T(x) \in D$, lo que contradice el hecho que $\lambda T(x) = x \in \partial D$. Puesto que (3.10) se satisface, podemos usar la propiedad de homotopía del grado para encontrar que

$$deg(I - T, D, 0) = deg(I, D, 0) = 1$$

ya que $0 \in D$. Usando la propiedad de existencia, podemos asegurar que existe $x \in D$ tal que $x - T(x) = 0$. $\square$

Capítulo 4

Teoría de Bifurcaciones

Como referencia de la teoría que será expuesta a continuación, se puede mirar: [1] p. 65-74, [2] p. 411-421, [3] p. 13-29.

4.1. Bifurcación de la solución cero

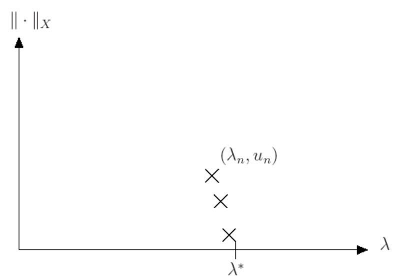
Sea X un espacio real de Banach y sea $\Phi : \mathbb{R} \times X \to X$ una aplicación compacta que satisface

$$\Phi(\lambda, u) = u - T(\lambda, u) = 0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \tag{4.1}$$

Denotemos por Σ^* la clausura en $\mathbb{R} \times X$ del conjunto de pares $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times X$ con u una solución no trivial de la ecuación (4.1), es decir

$$\Sigma^* = \overline{\{(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times X : u \neq 0, \Phi(\lambda, u) = 0\}}$$

En la siguiente definición se dará la noción de bifurcación en cero para el problema antes mencionado.



Definición 14. *Se dirá que* $\lambda^* \in \mathbb{R}$ *es un punto de bifurcación de la solución trivial para (4.1) si* $(\lambda^*, 0) \in \Sigma^*$. *Equivalentemente, si existe una sucesión* (λ_n, u_n) *en* Σ^* *tal que* $\lambda_n \to \lambda^*$, $\|u_n\| \to 0$, $\|u_n\| > 0$ $\forall n \geq 1$ *y* $\Phi(\lambda_n, u_n) = 0$.

Observación 5. 1. *Observe que puede ocurrir que* $\lambda_n = \lambda^*$ $\forall$ $n \geq 1$ *(bifurcación vertical).*

2. *Si* $\Phi(\lambda, u) = u - \lambda L u$, *con* L *un operador lineal compacto, entonces* $\lambda^* \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *es un punto de bifurcación si y solo si* $\frac{1}{\lambda^*}$ *es un valor propio de* L.

3. *Supongamos que* $\Phi(\lambda, u) = u - \lambda L u + N(\lambda, u)$, *donde* L *es un operador lineal compacto y* N *es un operador compacto que satisface*

$$\lim_{\|u\| \to 0} \frac{N(\lambda, u)}{\|u\|} = 0$$

uniformemente en conjuntos acotados de valores λ. *Si* $\lambda^* \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *es un punto de bifurcación, entonces* $\frac{1}{\lambda^*}$ *es un valor propio de* L.

4.1.1. Una condición necesaria

Proposición 4. *Asumamos que* Φ *es Fréchet diferenciable y que* λ^* *es un punto de bifurcación de cero. Entonces la derivada de* Φ *con respecto a* u *en* $(\lambda^*, 0)$ *es no invertible:*

$$\Phi_u(\lambda^*, 0) \notin Inv(X)$$

Demostración. Es una aplicación directa del teorema de la función inversa. $\square$

Ejemplo 7. *Para un subconjunto abierto y acotado* $\Omega \in \mathbb{R}^n$ *y* $f \in C^1(\mathbb{R})$ *tal que* $f(0) = 0$ *y* $f'(0) \neq 0$, *se considera el problema no lineal a valores en la fontera*

$$\begin{aligned} -\Delta u = \lambda f(u), &\quad x \in \Omega \\ u = 0, &\quad x \in \partial\Omega \end{aligned} \tag{4.2}$$

Observe que encontrar soluciones para este problema es lo mismo que hallar los ceros de un operador Φ, *definido por*

$$\Phi(\lambda, u) = u - \lambda(-\Delta)^{-1}[f(u)] = 0, \quad u \in C(\overline{\Omega})$$

Así, la Proposición 4 implica que si λ^* *es un punto de bifurcación para (4.2), entonces la derivada*

$$\Phi_u(\lambda^*, 0)(v) = v - \lambda^*(-\Delta)^{-1}[f'(0)v], \quad v \in C(\overline{\Omega})$$

es no invertible. Esto significa necesariamente que $\lambda^* f'(0)$ *es un valor propio del operador Laplaciano con condiciones de Dirichlet cero.*

Observación 6. *La condición necesaria dada en la Proposición 4 no es suficiente, como se puede ver en el siguiente contraejemplo.*

Ejemplo 8. *Tomamos* $X = \mathbb{R}^2$ *y* $\Phi : \mathbb{R} \times X \to X$ *dada por* $\Phi(\lambda, x, y) = (\lambda x - y^3, \lambda y + x^3)$. *Es fácil probar que la ecuación* $\Phi(\lambda, x, y) = 0$ *no tiene puntos de bifurcación. Más aún,* $\Phi_u(0, 0, 0) = 0$, *por tanto* $\Phi_u(0, 0, 0)$ *es no invertible y así, si la condición fuera suficiente se tendría que* $\lambda = 0$ *es un punto de bifurcación, lo que es un absurdo.*

Observe que si $\lambda \in \mathbb{R}$ no es un punto de bifurcación, entonces $(\lambda, 0)$ es una solución aislada de (4.1). Para este tipo de soluciones es útil la siguiente definición.

4.1.2. Indice de un cero aislado

Sea $\Phi = I - T$ con $T : \overline{D} \to X$ un operador compacto. Si $u_0 \in D$ es una solución aislada de la ecuación $\Phi(u) = 0$, es decir es la única solución de esta ecuación en una vecindad de u_0, entonces, para $r_0 > 0$ suficientemente pequeño, se puede deducir de la propiedad de excisión que

$$deg(\Phi, B_r(u_0), 0) = deg(\Phi, B_{r_0}(u_0), 0) \quad \forall r \in (0, r_0)$$

donde $B_r(u_0) = \{u \in D : \|u - u_0\| < r\}$.

Definición 15. *El índice de* Φ *respecto a* u_0 *está definido por*

$$i(\Phi, u_0) = \lim_{r \to 0} deg(\Phi, B_r(u_0), 0)$$

4.1.3. Bifurcación global de Krasnoselskii y Rabinowitz

En esta sección se enunciarán los conocidos resultados de bifurcación hechos por M. A. Krasnoselskii y P. Rabinowitz para el problema (4.1). Si se desea profundizar los conocimientos sobre este tema, es recomendable ver: [2] p. 52-65, [3] p. 9-11.

Teorema 19. *(Krasnoselskii-Rabinowitz)*
Sean $\lambda^* \in \mathbb{R}$ *y* $\varepsilon_0 > 0$ *tales que el conjunto* $(\lambda^* - \varepsilon_0, \lambda^* + \varepsilon_0) \setminus \{\lambda^*\}$ *no contiene puntos de bifurcación de (4.1). Asumimos también que para todo* $\underline{\lambda} \in (\lambda^* - \varepsilon_0, \lambda^*)$ *y* $\overline{\lambda} \in (\lambda^*, \lambda^* + \varepsilon_0)$ *se satisface que*

$$i(\Phi_{\underline{\lambda}}, 0) \neq i(\Phi_{\overline{\lambda}}, 0) \tag{4.3}$$

Entonces

1. *El valor* λ^* *es un punto de bifurcación de (4.1).*

2. *La componente conexa* C_{λ^*} *de* $\overline{\Sigma^*}$ *que contiene a* $(\lambda^*, 0)$*, satisface al menos una de las siguientes condiciones:*

> *i)* C_{λ^*} *no es acotada en* $\mathbb{R} \times X$*.*
>
> *ii) existe un punto de bifurcación* $\lambda^\sharp \in \mathbb{R} \setminus \{\lambda^*\}$ *tal que* $(\lambda^\sharp, 0) \in C_{\lambda^*}$*.*

Demostración. Ver referencia [3], páginas 9-11. □

Observación 7. *Puesto que* $(\lambda^* - \varepsilon_0, \lambda^* + \varepsilon_0) \setminus \{\lambda^*\}$ *no contiene puntos de bifurcación, la propiedad de homotopía implica que*

$$i(\Phi_{\underline{\lambda}}, u_0) = cte \quad \forall \underline{\lambda} \in (\lambda^* - \varepsilon_0, \lambda^*)$$

y

$$i(\Phi_{\overline{\lambda}}, u_0) = cte \quad \forall \overline{\lambda} \in (\lambda^*, \lambda^* + \varepsilon_0)$$

4.2. Problemas lineales asintóticos

En esta sección estudiaremos la existencia de soluciones positivas para el problema a valores en la frontera,

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda f(u), \quad x \in \Omega \\ u &= 0, \quad x \in \partial\Omega \end{aligned} \tag{4.4}$$

donde Ω es un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$, $u := u(x)$ donde $x \in \Omega$, $\lambda > 0$ y $f \in C^1([0, +\infty[)$, además $f(0) = 0$ y $f'_+(0) > 0$.

Ahora, tomaremos $X = C(\overline{\Omega})$, y consideramos el operador $\Phi : [0, \infty) \times X \to X$ dado por $\Phi(\lambda, u) = u - \lambda(-\Delta)^{-1}[f(u)]$, para todo $\lambda > 0$ y $u \in X$. Observe que podemos reescribir el problema (4.4) como hallar los ceros de Φ, es decir, resolver la ecuación

$$\Phi(\lambda, u) = 0$$

En los siguientes teoremas, denotaremos por $\lambda_1 > 0$ al primer valor propio del operador de Laplace con condiciones de Dirichlet homogéneas y por $\varphi_1 > 0$ una función propia asociada a λ_1 con $\|\varphi_1\|_{L^2} = 1$.

Teorema 20. *Si* $f(0) = 0$ *y* $f'_+(0)$[1] > 0*, entonces* $\lambda_0 = \frac{\lambda_1}{f'_+(0)}$ *es el único punto de bifurcación de cero de soluciones positivas de (4.4). En adición, el continuo que nace de* $(\lambda_0, 0)$ *es no acotado.*

[1] $f'_+(x) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Demostración. Ver referencia [3], páginas 13-15. □

4.3. Bifurcación de infinito

Definición 16. *λ_∞ es un punto de bifurcación de infinito del problema (4.1), si existe una sucesión $(\lambda_n, u_n) \in \mathbb{R} \times X$ que satisface*

$$\lambda_n \to \lambda_\infty, \quad \|u_n\| \to +\infty, \quad \Phi(\lambda_n, u_n) = 0$$

Teorema 21. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto y acotado, además $f \in C^1([0,\infty[)$ tal que*

$$f(s) = m_\infty s + g(s)$$

donde g satisface

$$\lim_{s\to\infty} \frac{g(s)}{s} = 0$$

Entonces $\lambda_\infty = \lambda_1/m_\infty$ es el único punto de bifurcación de infinito de soluciones positivas de (4.4). En adición, el continuo que nace de (λ_∞, ∞) es conexo y no acotado.

Demostración. Ver referencia [3], página 16. □

Observación 8. *Asumamos que las hipótesis de los Teoremas 20 y 21 se satisfacen.*

- *Sea α un número positivo. Si $f(s) > \alpha s$ para todo $s > 0$, entonces el problema (4.4) no tiene soluciones para $\lambda > \frac{\lambda_1}{\alpha}$. En este caso, la rama de bifurcación de $(\lambda_0, 0)$ es la misma que la que nace de (λ_∞, ∞).*

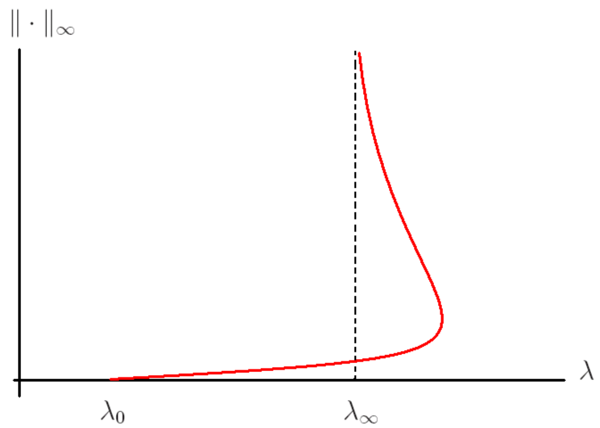


Figura 1:Diagrama de bifurcación.

- *En el caso que exista* $0 < \theta 1 < \theta_2$ *tal que* $f(s) \leq 0$*, para todo* $s \in (\theta_1, \theta_2)$*, entonces se puede verificar que el problema (4.4) no tiene soluciones* (λ, u) *en la franja de* $\mathbb{R}_+ \times C(\overline{\Omega})$ *dada por* $\theta_1 \leq \|u\| \leq \theta_2$*.*

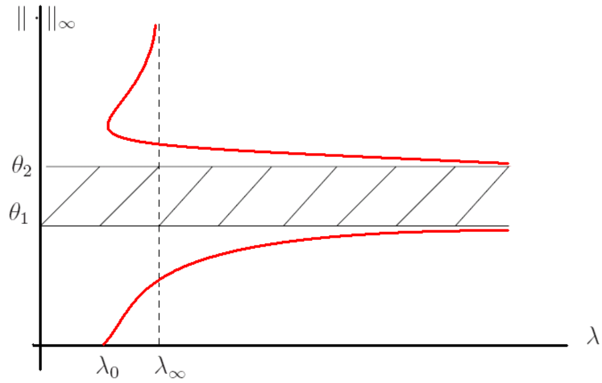


Figura 2:Diagrama de bifurcación.

4.4. Bifurcación de infinito a izquierda y derecha

Finalmente es posible dar condiciones que permitan conocer la forma de las ramas de bifurcación, obteniendo ramas que nacen hacia la izquierda o derecha de sus respectivos puntos de bifurcación.

En el siguiente teorema damos un resultado ya conocido que nos permite determinar la forma de una rama de bifurcación de infinito.

Teorema 22. *Supongamos que las hipótesis del Teorema 25 se satisfacen. Si*

$$\gamma' = \liminf_{u\to\infty} g(u) > 0 \tag{4.5}$$

o

$$\gamma'' = \limsup_{u\to\infty} g(u) < 0 \tag{4.6}$$

Entonces la rama de bifurcación de infinito nace hacia la izquierda, respectivamente a la derecha, de (λ_∞, ∞)*.*

Demostración. Ver referencia [1], páginas 70-72. $\square$

A continuación se va a presentar un resultado inédito que nos permitirá conocer la forma que tiene la rama de bifurcación de cero cuando nace del punto $(\lambda_0, 0)$.

Lema 3. *Sea $f \in C^1([0, +\infty[)$ tal que $f(0) = 0$ y $f'_+(0) > 0$, entonces existe una constante $c > 0$ tal que*

$$| s^{-1} f(s) | \leq c \qquad \textit{cuando } s \to 0$$

Demostración. Si tomamos $s \in \mathbb{R}$ tal que $s \to 0$, por definición de derivada se tiene que

$$f(s) = f(0) + f'_+(0)s + o(| s |)$$

puesto que $f(0) = 0$, tenemos que

$$f(s) = f'_+(0)s + o(| s |)$$

del hecho que $o(| s |) \to 0$ cuando $s \to 0^+$ tenemos que

$$\left| \frac{f(s)}{s} \right| = \left| \frac{f'_+(0)s}{s} + \frac{o(| s |)}{s} \right| \leq \left| \frac{f'_+(0)s}{s} \right| + \left| \frac{o(| s |)}{s} \right| \longrightarrow f'_+(0)$$

Así concluimos que

$$\frac{| f(s) |}{s} \leq c$$

$\square$

Teorema 23. *Supongamos que se satisfacen las hipótesis del Teorema 21 con $f'_+(0) = m_\infty$. Si existe $\epsilon > 0$ tal que*

$$g(s) \geq 0 \qquad \forall s \in (0, \epsilon)$$

entonces la bifurcación de cero del Teorema 20 es a la izquierda. Si se tiene la desigualdad en sentido contrario, entonces la rama de bifurcación será hacia la derecha.

Demostración. Sea $(\lambda_n, u_n) \in \mathbb{R}^+ \times X$ soluciones del problema

$$\begin{aligned} -\Delta u = \lambda f(u) \quad & x \in \Omega \\ u = 0 \quad & x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

con $\lambda_n \to \lambda_0 = \frac{\lambda_1}{f'_+(0)}$ y $\|u_n\| \to 0$

Dividiendo la ecuación $u_n = \lambda_n(-\Delta)^{-1}[f(u_n)]$ por $\|u_n\|$, por el Lema 3 y del hecho que $(-\Delta)^{-1}$ es un operador compacto podemos hallar una subsucesión $(\frac{u_n}{\|u_n\|})$ tal que

$$\frac{u_n}{\|u_n\|} \longrightarrow v$$

más aún, se puede probar que $v = \varphi_1$.

Usando φ_1 como función test, se tiene que:

$$\begin{aligned}
-\Delta u_n \varphi_1 &= \lambda_n m_\infty u_n \varphi_1 + \lambda_n g(u_n)\varphi_1 \\
-\int_\Omega \Delta u_n \varphi_1 dx &= \lambda_n m_\infty \int_\Omega u_n \varphi_1 dx + \lambda_n \int_\Omega g(u_n)\varphi_1 dx \\
\int_\Omega \nabla u_n \nabla \varphi_1 dx - \int_{\partial\Omega} \partial_\nu u_n \varphi_1 ds &= \lambda_n m_\infty \int_\Omega u_n \varphi_1 dx \lambda_n + \lambda_n \int_\Omega g(u_n)\varphi_1 dx \\
\Rightarrow \quad \int_\Omega \nabla u_n \nabla \varphi_1 dx &= \lambda_n m_\infty \int_\Omega u_n \varphi_1 dx + \lambda_n \int_\Omega g(u_n)\varphi_1 dx
\end{aligned}$$

además usando u_n como función test en el problema $-\Delta\varphi_1 = \lambda_1\varphi_1$

$$\begin{aligned}
-\Delta \varphi_1 u_n &= \lambda_1 \varphi_1 u_n \\
-\int_\Omega \Delta \varphi_1 u_n dx &= \lambda_1 \int_\Omega u_n \varphi_1 dx \\
\int_\Omega \nabla u_n \nabla \varphi_1 dx - \int_{\partial\Omega} \partial_\nu \varphi_1 u_n ds &= \lambda_1 \int_\Omega u_n \varphi_1 dx \\
\Rightarrow \quad \int_\Omega \nabla u_n \nabla \varphi_1 dx &= \lambda_1 \int_\Omega u_n \varphi_1 dx
\end{aligned}$$

así

$$\begin{aligned}
\lambda_1 \int_\Omega u_n \varphi_1 dx &= \lambda_n m_\infty \int_\Omega u_n \varphi_1 dx + \lambda_n \int_\Omega g(u_n)\varphi_1 dx \\
(\lambda_1 - \lambda_n m_\infty) \int_\Omega u_n \varphi_1 dx &= \lambda_n \int_\Omega g(u_n)\varphi_1 dx
\end{aligned}$$

ahora, puesto que (u_n) converge uniformemente a 0, se tiene que $g(u_n) \geq 0$ y así

$$(\lambda_1 - \lambda_n m_\infty) \int_\Omega u_n \varphi_1 dx \geq 0$$

puesto que $u_n > 0$ $\forall n$ y $\varphi_1 > 0$ se deduce que

$$\frac{\lambda_1}{m_\infty} \geq \lambda_n$$

lo que indica que los λ_n están a la izquierda de λ_0.

Cuando se tiene la desigualdad en el otro sentido se realiza una demostración similar. $\square$

Capítulo 5

Problemas elípticos no lineales perturbados con condiciones de Dirichlet homogéneas.

El objetivo principal de este capítulo será hallar resultados de existencia y multiplicidad de soluciones, para el problema:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda f(u+a) \quad x \in \Omega \\ u &= 0 \quad x \in \partial\Omega \end{aligned} \tag{5.1}$$

donde Ω es un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$, $u := u(x)$ con $x \in \Omega$, $\lambda > 0$, $f \in C^1([0,+\infty[)$ y $a \in \mathbb{R}^+$.

Para ello, se hará una generalización de los resultados obtenidos en [1] por Ambrosetti-Hess, pero en nuestro caso aplicado al problema (5.1) donde $a > 0$.

Consideremos además que f es una función asintóticamente lineal, es decir

$$f(s) = m_\infty s + g(s)$$

donde

$$m_\infty > 0, \quad g \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}), \quad | g(s) | \leq k, \quad g(0) \geq 0$$

además $f(s) \geq 0$ para todo $s \in [0,a]$.

Ahora probaremos la positividad de las soluciones para el problema (5.1) bajo las condiciones antes impuestas, para ello es conveniente considerar la función $\widetilde{f}$ definida por $\widetilde{f}(u) = f(u)$ para $u \geq 0$, tal que $\widetilde{f}(u) = f(0)$ para todo $u < 0$. Por tanto, escribiremos $\widetilde{f}(u) = m_\infty u + \widetilde{g}(u)$, por supuesto $\widetilde{g}(u) = g(u)$ para todo $u \geq 0$. Consideremos el problema

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda \widetilde{f}(u+a) \quad x \in \Omega \\ u &= 0 \quad x \in \partial\Omega \end{aligned} \tag{5.2}$$

Tomemos $X = C(\overline{\Omega})$, entonces para algún $\lambda > 0$, supongamos que existe una solución no trivial u del problema (5.2) y sea $x^* \in \Omega$ tal que $u(x^*) = \min_{\Omega} u(x)$. Por reducción al absurdo asumamos que $u(x^*) < 0$, entonces $u(x^*) + a < a$,

i) Si $u(x^*) + a < 0$, puesto que $\widetilde{f}(u) = f(0) \geq 0$ para $u < 0$, se tiene que

$$-\Delta u(x^*) = \lambda \widetilde{f}(u(x^*) + a) \geq 0$$

así por el principio del máximo deducimos que $u(x^*) \geq 0$, lo que es una contradicción.

ii) Si $0 \leq u(x^*) + a < a$, puesto que $\widetilde{f}(u) = f(u) \geq 0$ para todo $u \in [0, a]$, se tiene que

$$-\Delta u(x^*) = \lambda \widetilde{f}(u(x^*) + a) \geq 0$$

por el principio de máximo se tiene nuevamente una contradicción.

Así, concluimos que el problema (5.2) tiene soluciones no negativas, es decir $u \geq 0$. Más aún, por las condiciones impuestas sobre f, se sigue que existe $\delta > 0$ tal que $f(u + a) + \delta u > 0$ para todo $u > 0$. Puesto de $-\Delta u + \lambda \delta u = \lambda(f(u + a) + \delta u)$, el principio del máximo implica que $u > 0$ en Ω.

El trabajo desarrollado a continuación nos permitirá hallar resultados de existencia para el problema (5.1), además haciendo uso de los Teoremas de Krasnoselskii y Rabinowitz podremos encontrar ramas de bifurcación continuas, ya sea de cero o de infinito.

5.1. Bifurcación de cero

Los lemas citados a continuación, nos permitirán encontrar una rama de bifurcación de la solución cero para el problema (5.1).

Lema 4. *Si* $f \in C^1([0, +\infty[)$ *tal que* $f(a) = 0$ *y* $f'_+(a)$[1] > 0*, entonces existe una constante* $c > 0$ *tal que*

$$|\ s^{-1} f(s + a)\ | \leq c \qquad \textit{cuando} \ \ s \to 0$$

Demostración. Si tomamos $s \in \mathbb{R}$ tal que $s \to 0$, por definición de derivada se tiene que

$$f(a + s) = f(a) + f'_+(a)s + o(|\ s\ |)$$

[1] $f'_+(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

puesto que $f(a)=0$, tenemos que

$$f(a+s) = f'_+(a)s + o(\mid s \mid)$$

del hecho que $o(\mid s \mid) \to 0$ cuando $s \to 0^+$ deducimos que

$$\mid \frac{f(s+a)}{s} \mid = \mid \frac{f'_+(a)s}{s} + \frac{o(\mid s \mid)}{s} \mid \leq \mid \frac{f'_+(a)s}{s} \mid + \mid \frac{o(\mid s \mid)}{s} \mid \longrightarrow f'_+(a)$$

Y por tanto

$$\frac{\mid f(s+a) \mid}{s} \leq c$$

□

Lema 5. *Sea* $\lambda_0 = \frac{\lambda_1}{f'_+(a)}$, *entonces para cada intervalo* $\Lambda \subset [0,+\infty) \setminus \{\lambda_0\}$, *existe un* $\varepsilon > 0$ *que satisface*

$$\Phi(\lambda,u) \neq 0, \quad \forall \lambda \in \Lambda, \quad \forall \; 0 < \|u\| < \varepsilon$$

donde $\Phi(\lambda,u) = u - \lambda(-\Delta)^{-1}[f(u+a)]$ *con* $f(a)=0$ *y* $f'_+(a) > 0$.

Demostración. Por el método del absurdo, aseguramos que existe una sucesión $(\lambda_n, u_n) \in \Lambda \times X$ que satisface

$$\lambda_n \to \lambda \neq \lambda_0, \quad \|u_n\| \to 0$$

$$\Phi(\lambda_n,u_n) = 0, \quad u_n \geq 0$$

Dividiendo la ecuación $u_n = \lambda_n(-\Delta)^{-1}[f(u_n+a)]$ por $\|u_n\|$, por el Lema 4 y del hecho que $(-\Delta)^{-1}$ es un operador compacto podemos hallar una subsucesión $(\frac{u_n}{\|u_n\|})$ tal que

$$\frac{u_n}{\|u_n\|} \longrightarrow v$$

ahora, ya que $\|u_n\| \to 0$ cuando $n \to \infty$, se tiene que

$$v = \lambda(-\Delta)^{-1}[f'_+(a)v], \quad \|v\| = 1$$

Usando φ_1 como función test en el problema de valores propios, se tiene que:

$$-\Delta v\varphi_1 = \lambda f'_+(a) v\varphi_1$$

$$-\int_\Omega \Delta v\varphi_1 dx = \lambda f'_+(a) \int_\Omega v\varphi_1 dx$$

$$\int_\Omega \nabla v \nabla\varphi_1 dx - \int_{\partial\Omega} \partial_\nu v\varphi_1 ds = \lambda f'_+(a) \int_\Omega v\varphi_1 dx$$

$$\Rightarrow \qquad \int_\Omega \nabla v \nabla \varphi_1 dx = \lambda f'_+(a) \int_\Omega v\varphi_1 dx$$

además usando v como función test en el problema: $-\Delta\varphi_1 = \lambda_1\varphi_1$
tenemos que

$$-\Delta\varphi_1 v = \lambda_1\varphi_1 v$$

$$-\int_\Omega \Delta\varphi_1 v dx = \lambda_1 \int_\Omega v\varphi_1 dx$$

$$\int_\Omega \nabla v\nabla\varphi_1 dx - \int_{\partial\Omega} \partial_\nu\varphi_1 v ds = \lambda_1 \int_\Omega v\varphi_1 dx$$

$$\Rightarrow \qquad \int_\Omega \nabla v\nabla\varphi_1 dx = \lambda_1 \int_\Omega v\varphi_1 dx$$

así

$$\lambda_1 \int_\Omega v\varphi_1 = \lambda f'_+(a) \int_\Omega v\varphi_1$$

de aquí concluimos que $\lambda = \lambda_1/f'_+(a)$, lo cual es una contradicción, ya que supusimos que $\lambda \neq \lambda_0$. □

Lema 6. *Para cada $\lambda > \lambda_0$ existe $\delta > 0$ tal que*

$$\Phi(\lambda, u) \neq \tau\varphi_1, \quad \forall\ 0 < \|u\| < \delta, \quad \forall\tau \geq 0$$

Demostración. Para esto fijaremos $\lambda > \lambda_0$ y asumimos por contradicción, que existen sucesiones $u_n \in X$ y $\tau_n \geq 0$ que satisfacen $u_n > 0$ en Ω, $\|u_n\| \to 0$ y

$$\Phi(\lambda, u_n) = \tau_n\varphi_1$$

o equivalentemente

$$u_n = \lambda(-\Delta)^{-1}[f(u_n + a)] + \tau_n\varphi_1$$

Dividiendo la ecuación anterior por $\|u_n\|$, por el lema 4 y usando la compacidad de $(-\Delta)^{-1}$, se deduce que existe una subsucesión de $((-\Delta)^{-1}[\frac{f(u_n+a)}{\|u_n\|}])$ que es convergente a un valor $\overline{v}$, puesto que

$$\frac{u_n}{\|u_n\|} = \lambda(-\Delta)^{-1}[\frac{f(u_n + a)}{\|u_n\|}] + \frac{\tau_n}{\|u_n\|}\varphi_1$$

se tiene

$$\left\|(-\Delta)^{-1}[\frac{f(u_n + a)}{\|u_n\|}]\right\| \leq \left\|(-\Delta)^{-1}[\frac{f(u_n + a)}{\|u_n\|}] - \overline{v}\right\| + \|\overline{v}\| \leq \epsilon + \|\overline{v}\|$$

entonces

$$\frac{\tau_n}{\|u_n\|} = \left\|\frac{u_n}{\|u_n\|} - \lambda(-\Delta)^{-1}[\frac{f(u_n + a)}{\|u_n\|}]\right\| \leq \left\|\frac{u_n}{\|u_n\|}\right\| + \lambda\left\|(-\Delta)^{-1}[\frac{f(u_n + a)}{\|u_n\|}]\right\| \leq 1 + \lambda(\epsilon + \|\overline{v}\|)$$

y así $(\frac{\tau_n}{\|u_n\|})$ es acotada.

Puesto que podemos encontrar una subsucesión monótona, es posible suponer que $\frac{\tau_n}{\|u_n\|} \rightarrow \tau \geq 0$, así se tiene que $\frac{u_n}{\|u_n\|} \rightarrow v$ con $v \in X$ satisfaciendo

$$-\Delta v = \lambda f'_+(a)v + \tau\lambda_1\varphi_1, \quad x \in \Omega$$

$$v = 0, \quad x \in \partial\Omega$$

$$\|v\| = 1$$

Ahora, usando φ_1 como función test en el problema de valores propios, se tiene que:

$$-\Delta v\varphi_1 = \lambda f'_+(a)v\varphi_1 + \tau\lambda_1(\varphi_1)^2 \geq \lambda f'_+(a)v\varphi_1$$

$$-\int_\Omega \Delta v\varphi_1 dx \geq \lambda f'_+(a)\int_\Omega v\varphi_1 dx$$

$$\int_\Omega \nabla v\nabla\varphi_1 dx - \int_{\partial\Omega} \partial_\nu v\varphi_1 ds \geq \lambda f'_+(a)\int_\Omega v\varphi_1 dx$$

$$\Rightarrow \quad \int_\Omega \nabla v\nabla\varphi_1 dx \geq \lambda f'_+(a)\int_\Omega v\varphi_1 dx$$

además usando v como función test en el problema $-\Delta\varphi_1 = \lambda_1\varphi_1$, se tiene el mismo resultado que en el Lema 5, así

$$\lambda_1\int_\Omega v\varphi_1 \geq \lambda f'_+(a)\int_\Omega v\varphi_1 dx$$

puesto que $v > 0$ y $\varphi_1 > 0$, deducimos entonces que $\lambda_0 \geq \lambda$ y así se tiene una contradicción. $\square$

Teorema 24. *Si $f(a) = 0$ y $f'_+(a) > 0$, entonces $\lambda_0 = \lambda_1/f'_+(a)$ es el único punto de bifurcación de cero de las soluciones positivas de (5.1). En adición, el continuo que nace de $(\lambda_0, 0)$ es no acotado.*

Demostración. Para poder aplicar el Teorema 19, tenemos que probar que el índice cambia de valor al cruzar $\lambda = \lambda_0$.

Así, como consecuencia del Lema 5, se tiene que:

a) El único punto de bifurcación posible de soluciones positivas es $\lambda = \lambda_0$

b) Si $\lambda < \lambda_0$ y tomando $\Lambda = [0, \lambda]$, por la propiedad de homotopía se tiene que

$$i(\Phi_\lambda, 0) = i(\Phi_0, 0) = i(I, 0) = 1$$

Ahora del Lema 6 se sigue que, para todo $\lambda > \lambda_0$,

$$i(\Phi_\lambda, 0) = i(\Phi_\lambda - \tau\varphi_1, 0), \quad \forall \tau > 0$$

así, usando nuevamente el lema anterior, se tiene que $i(\Phi_\lambda - \tau\varphi_1, 0) = 0$ y por tanto

$$i(\Phi_\lambda, 0) = 0$$

□

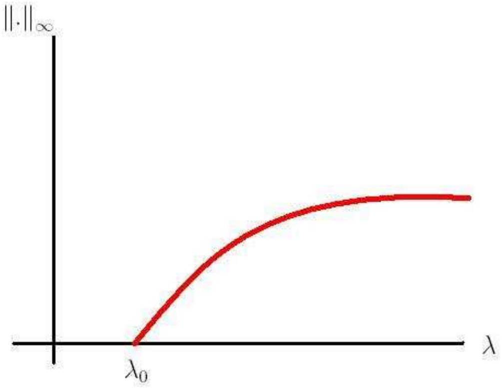


Figura 3: Bifurcación de cero

Observación 9. *Es importante notar que hasta ahora no hemos usado la condición de que f es una función asintóticamente lineal, lo que implica que los resultados anteriores son válidos aún cuando la función f es solamente $C^1([0, +\infty[)$.*

Definición 17. *Sean los conjuntos*

$$L_{0,a} = \{(\lambda, u)\text{: tal que } (\lambda, u) \text{ pertenece a la rama de bifurcación de } \lambda_0 \text{ del problema (5.1)}\}$$

$$\Gamma_{0,a} = \{\lambda\text{: } (\lambda, u) \in L_{0,a} \text{ para alguna solución } u\}$$

5.2. Bifurcación de infinito

Ahora vamos a ver un resultado de bifurcación de infinito, el cual es una adaptación del Teorema 21 y nos permitirá hallar un punto de bifurcación de infinito para el problema (5.1).

Para esto, asumimos que

$$\Phi(\lambda, u) = u - T(\lambda, u)$$

con T un operador compacto. Tomando la transformada de Kelvin

$$z = \frac{u}{\|u\|^2}, \quad u \neq 0$$

se deduce que

$$\begin{cases} \Phi(\lambda, u) = 0 \\ u \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z - \|z\|^2 T(\lambda, \frac{z}{\|z\|^2}) = 0 \\ z \neq 0 \end{cases}$$

Más aún, definimos

$$\tilde{\Phi}(\lambda, z) = \begin{cases} z - \|z\|^2 T(\lambda, \frac{z}{\|z\|^2}) & \text{si } z \neq 0, \\ 0 & \text{si } z = 0, \end{cases}$$

Observación 10. *Se deduce que λ_∞ es un punto de bifurcación de infinito para $\Phi(\lambda, z) = 0$ si y solo si λ_∞ es un punto de bifurcación de cero para $\tilde{\Phi}(\lambda, z) = 0$.*

A continuación vamos a citar algunos lemas que nos permitarán encontrar una rama de bifurcación de infinito.

Lema 7. *Existe una constante $c > 0$ tal que $| s^{-1} f(s + a) | \leq c \ \forall s \geq 1$.*

Demostración. Puesto que $g \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ y por el hecho que $s \geq 1$ y $\alpha \in [0, 1]$ se tiene que

$$| g(s + a) | - | g(a) | \leq | g(s + a) - g(a) | \leq \tau | s |^\alpha \leq \tau s$$

por tanto

$$| g(s + a) | \leq \tau s + | g(a) | \leq \tau s + k \leq (\tau + k)s$$

Puesto que $f(s) = m_\infty s + g(s)$ tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{| f(s + a) |}{s} &\leq \frac{m_\infty s}{s} + \frac{m_\infty a}{s} + \frac{| g(s + a) |}{s} \\ &\leq m_\infty + \frac{m_\infty a}{s} + \tau + k \\ &\leq m_\infty + m_\infty a + \tau + k = c \end{aligned}$$

□

Lema 8. *Sea* $\lambda_\infty = \frac{\lambda_1}{m_\infty}$*, entonces para cada intervalo* $\Lambda \subset [0, +\infty) \setminus \{\lambda_\infty\}$*, existe un* $\varepsilon > 0$ *que satisface*

$$\widetilde{\Phi}(\lambda, z) \neq 0, \qquad \forall \lambda \in \Lambda, \qquad \forall\ 0 < \|z\| < \varepsilon$$

Demostración. El problema a tratar será:

$$\tilde{\Phi}(\lambda, z) = \begin{cases} z - \lambda \|z\|^2 (-\Delta)^{-1}[m_\infty \frac{z}{\|z\|^2} + m_\infty a + g(\frac{z}{\|z\|^2} + a)] & \text{si } z \neq 0, \\ 0 & \text{si } z = 0, \end{cases}$$

Aseguramos, por contradicción, que existe una sucesión $(\lambda_n, z_n) \in \Lambda \times X$ que satisface

$$\lambda_n \to \lambda \neq \lambda_\infty, \quad \|z_n\| \to 0$$

$$\tilde{\Phi}(\lambda_n, z_n) = 0, \quad z_n \geq 0$$

Puesto que $(-\Delta)^{-1}$ es un operador compacto, por el Lema 7, podemos hallar una subsucesión $(\frac{z_n}{\|z_n\|})$ tal que

$$\frac{z_n}{\|z_n\|} \longrightarrow v$$

además se tiene que

$$\frac{z_n}{\|z_n\|} = \lambda_n m_\infty (-\Delta)^{-1}[\frac{z_n}{\|z_n\|}] + \lambda_n m_\infty \|z_n\| (-\Delta)^{-1} a + \lambda_n (-\Delta)^{-1}[\frac{g(\frac{z_n}{\|z_n\|^2} + a)}{\frac{1}{\|z_n\|}}] \qquad (5.3)$$

puesto que $\|z_n\| \to 0$, se tiene que $\frac{1}{\|z_n\|} \to \infty$, además

$$-k \leq g(\frac{z_n}{\|z_n\|^2} + a) \leq k$$

$$\Rightarrow \qquad -k \|z_n\| \leq \frac{g(\frac{z_n}{\|z_n\|^2} + a)}{\frac{1}{\|z_n\|}} \leq k \|z_n\|$$

concluimos que

$$\lim_{\|z_n\| \to 0} \frac{g(\frac{z_n}{\|z_n\|^2} + a)}{\frac{1}{\|z_n\|}} = 0$$

y por tanto, si $n \to \infty$, de la ecuación (5.3) se tiene que

$$v = \lambda m_\infty (-\Delta)^{-1} v \qquad x \in \Omega$$
$$v = 0 \qquad x \in \partial\Omega$$

Usando φ_1 como función test en el problema de valores propios, se tiene que:

$$-\Delta v \varphi_1 = \lambda m_\infty v \varphi_1$$

$$-\int_\Omega \Delta v \varphi_1 dx = \lambda m_\infty \int_\Omega v \varphi_1 dx$$

$$\int_\Omega \nabla v \nabla \varphi_1 dx - \int_{\partial\Omega} \partial_\nu v \varphi_1 ds = \lambda m_\infty \int_\Omega v\varphi_1 dx$$
$$\Rightarrow \quad \int_\Omega \nabla v \nabla \varphi_1 dx = \lambda m_\infty \int_\Omega v\varphi_1 dx$$

además usando v como función test

$$-\Delta\varphi_1 = \lambda_1\varphi_1$$
$$-\Delta\varphi_1 v = \lambda_1\varphi_1 v$$
$$-\int_\Omega \Delta\varphi_1 v dx = \lambda_1 \int_\Omega v\varphi_1 dx$$
$$\int_\Omega \nabla v \nabla \varphi_1 dx - \int_{\partial\Omega} \partial_\nu \varphi_1 v ds = \lambda_1 \int_\Omega v\varphi_1 dx$$
$$\Rightarrow \quad \int_\Omega \nabla v \nabla \varphi_1 dx = \lambda_1 \int_\Omega v\varphi_1 dx$$

así

$$\lambda_1 \int_\Omega v\varphi_1 = \lambda m_\infty \int_\Omega v\varphi_1$$

de aquí concluimos que $\lambda = \lambda_1/m_\infty$, lo cual es una contradicción, ya que supusimos que $\lambda \neq \lambda_\infty$. □

Lema 9. *Para cada $\lambda > \lambda_\infty$ existe $\delta > 0$ tal que*

$$\tilde{\Phi}(\lambda, z) \neq \tau\varphi_1, \quad \forall\ 0 < \|z\| < \delta, \quad \forall \tau \geq 0$$

Demostración. Para esto fijaremos $\lambda > \lambda_\infty$ y asumimos por contradicción, que existen sucesiones $z_n \in X$ y $\tau_n \geq 0$ que satisfacen $z_n > 0$ en Ω, $\|z_n\| \to 0$ y

$$\tilde{\Phi}(\lambda, z_n) = \tau_n\varphi_1$$

o equivalentemente

$$z_n = \lambda \|z_n\|^2 (-\Delta)^{-1}[m_\infty \frac{z_n}{\|z_n\|^2} + m_\infty a + g(\frac{z_n}{\|z_n\|^2} + a)] + \tau_n\varphi_1$$

Por un procedimiento similar al realizado en las demostraciones anteriores, suponiendo que $\frac{\tau_n}{\|u_n\|} \to \tau \geq 0$, se tiene que podemos hallar una subsucesión $(\frac{z_n}{\|z_n\|})$ tal que $\frac{z_n}{\|z_n\|} \to v$. Tomando $n \to \infty$, se tiene que

$$-\Delta v = \lambda m_\infty v + \tau\lambda_1\varphi_1, \quad x \in \Omega$$
$$v = 0, \quad x \in \partial\Omega$$

$$\|v\| = 1$$

Ahora, usando φ_1 como función test en el problema de valores propios anterior, se tiene que:

$$-\Delta v\varphi_1 = \lambda m_\infty v\varphi_1 + \tau\lambda_1(\varphi_1)^2 \geq \lambda m_\infty v\varphi_1$$

$$-\int_\Omega \Delta v\varphi_1 dx \geq \lambda m_\infty \int_\Omega v\varphi_1 dx$$

$$\int_\Omega \nabla v\nabla\varphi_1 dx - \int_{\partial\Omega} \partial_\nu v\varphi_1 ds \geq \lambda m_\infty \int_\Omega v\varphi_1 dx$$

$$\Rightarrow \quad \int_\Omega \nabla v\nabla\varphi_1 dx \geq \lambda m_\infty \int_\Omega v\varphi_1 dx$$

además usando v como función test en el problema

$$-\Delta\varphi_1 = \lambda_1\varphi_1$$

se tiene que

$$\int_\Omega \nabla v\nabla\varphi_1 dx = \lambda_1 \int_\Omega v\varphi_1 dx$$

así

$$\lambda_1 \int_\Omega v\varphi_1 \geq \lambda m_\infty \int_\Omega v\varphi_1$$

puesto que $v > 0$ y $\varphi_1 > 0$, deducimos entonces que $\lambda_\infty \geq \lambda$ y así se tiene una contradicción. $\square$

Teorema 25. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto y acotado, sea $f \in C^1([0,\infty[)$ tal que*

$$f(s) = m_\infty s + g(s)$$

donde g satisface

$$| g(s) | \leq k$$

Entonces $\lambda_\infty = \lambda_1/m_\infty$ es el único punto de bifurcación de infinito de soluciones positivas de (5.1). En adición, el continuo que nace de (λ_∞, ∞) es conexo y no acotado.

Demostración. Por la observación 10, tenemos que probar que λ_∞ es un punto de bifurcación de cero para $\tilde{\Phi}$.

Al igual que en la demostración del Teorema 24, tenemos que probar que el índice cambia de valor al cruzar $\lambda = \lambda_\infty$.

Como consecuencia del Lema 8, se tiene que:

a) El único punto de bifurcación posible de soluciones positivas es $\lambda = \lambda_\infty$

b) Si $\lambda < \lambda_\infty$ y tomando $\Lambda = [0, \lambda]$, entonces

$$i(\tilde{\Phi}_\lambda, 0) = i(\tilde{\Phi}_0, 0) = i(I, 0) = 1$$

Como consecuencia del Lema 9 se sigue que

$$i(\tilde{\Phi}_\lambda, 0) = i(\tilde{\Phi}_\lambda - \tau\varphi_1, 0), \quad \forall \tau > 0$$

así, usando nuevamente el lema anterior, se tiene que $i(\tilde{\Phi}_\lambda - \tau\varphi_1, 0) = 0$ y por tanto

$$i(\tilde{\Phi}_\lambda, 0) = 0$$

$\square$

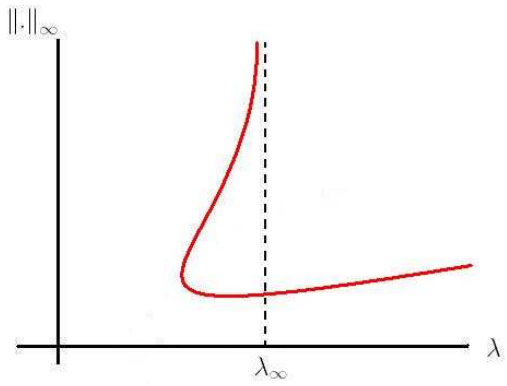


Figura 4: Bifurcación de infinito

Definición 18. *Sean los conjuntos*

$$Ł_{\infty,a}=\{(\lambda, u)\text{: tal que } (\lambda, u) \text{ pertenece a la rama de bifurcación de } \lambda_\infty \text{ del problema (5.1)}\}$$

$$\Gamma_{\infty,a}=\{\lambda\text{: } (\lambda, u) \in L_{\infty,a} \text{ para alguna solución } u\}$$

5.3. Ramas de bifurcación

Lema 10. *Si existe $s_0 > a$ tal que $f(s_0) \leq 0$, entonces el problema (5.1) no tiene solución para $u \in X$ con $\|u\|_\infty = s_0 - a$. Además $L_{0,a} \cap L_{\infty,a} = \emptyset$.*

Demostración. Sea (λ, u) una solución del problema

$$\begin{aligned} -\Delta u = \lambda f(u+a) \quad & x \in \Omega \\ u = 0 \quad & x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

con $\lambda > 0$ y $\|u\|_\infty = s_0 - a$, entonces se tiene que $0 \leq u \leq s_0 - a$ en Ω. Sea $m > 0$ tal que $f(v) + mv$ sea creciente para todo $v \in [0, s_0]$. Además

$$-\Delta u + \lambda m(u+a) = \lambda(f(u+a) + m(u+a))$$

y del hecho que $f(s_0) \leq 0$ se tiene que

$$\lambda m s_0 \geq \lambda(f(s_0) + m s_0)$$

por tanto

$$\begin{aligned} (-\Delta + \lambda m)(s_0 - a - u) &= -\Delta(-u) + \lambda m(s_0 - a) - \lambda m u \\ &= \lambda m s_0 - (-\Delta u + \lambda m(u+a)) \\ &\geq \lambda(f(s_0) + m s_0 - f(u+a) - m(u+a)) \geq 0 \end{aligned}$$

así tan pronto como $s_0 - a > u$ en $\partial\Omega$, por el Principio del Máximo se tiene que $s_0 - a > u$ en Ω y por tanto $\|u\|_\infty < s_0 - a$, lo que es una contracción.

Ahora, si $(\lambda, u) \in L_{0,a}$ entonces existe una sucesión (λ_i, u_i) tal que $\|u_i\|_\infty \to 0$, de igual manera si $(\lambda, u) \in L_{\infty,a}$, existe una sucesión (λ_i, u_i) tal que $\|u_i\|_\infty \to \infty$.

Por tanto, si $L_{0,a} \cap L_{\infty,a} \neq \emptyset$, podríamos encontrar un punto (λ, u) con $\|u\|_\infty = s_0 - a$, lo que contradice lo hecho anteriormente. $\square$

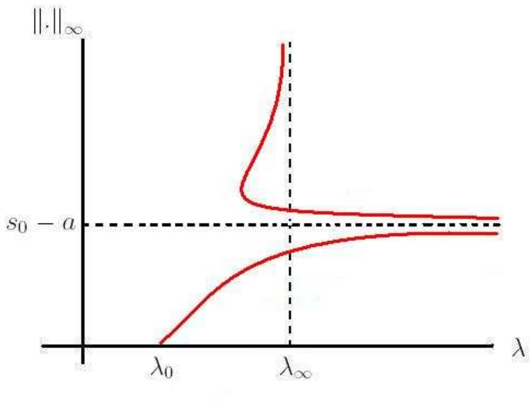


Figura 5: Diagrama del Lema 10

Teorema 26. *Supongamos que se satisfacen las hipótesis de los Teoremas 24 y 25 y además existe $s_0 > 0$ tal que $f(s_0) < 0$. Entonces el problema*

$$-\Delta u = \lambda f(u+a) \quad x \in \Omega$$
$$u = 0 \quad x \in \partial\Omega$$

tiene al menos dos soluciones para todo $\lambda \in]\max(\lambda_0, \lambda_\infty), \infty[$.

Demostración. Puesto que $f(a) = 0$ y $f'_+(a) > 0$, por el Teorema 24 se tiene que $\lambda_0 = \frac{\lambda_1}{f'_+(a)}$ es un punto de bifurcación de cero. Ahora puesto que $| g(s) | \leq k$, por el Teorema 25 se tiene que $\lambda_\infty = \frac{\lambda_1}{m_\infty}$ es un punto de bifurcación de infinito.

Además ya que existe $s_0 > 0$ tal que $f(s_0) < 0$, por el Lema 10 se tiene que $L_{0,a} \cap L_{\infty,a} = \emptyset$, así se concluye que el problema

$$-\Delta u = \lambda f(u+a) \quad x \in \Omega$$
$$u = 0 \quad x \in \partial\Omega$$

tiene al menos dos soluciones para cada $\lambda \in]\max(\lambda_0, \lambda_\infty), \infty[$. □

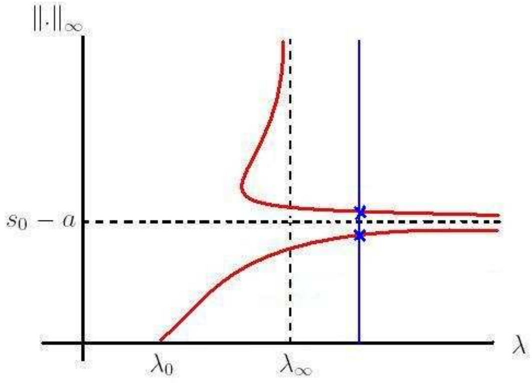


Figura 6: Diagrama del Teorema 26

Teorema 27. *Supongamos que las hipótesis del Teorema 25 se satisfacen. Si*

$$\gamma' = \liminf_{u \to \infty} g(u) > 0 \tag{5.4}$$

o

$$\gamma'' = \limsup_{u \to \infty} g(u) < 0 \tag{5.5}$$

Entonces $L_{\infty,a}$ bifurca a la izquierda, respectivamente a la derecha, de (λ_∞, ∞).

Demostración. Supongamos que (5.4) se satisface, además tomemos el compacto $J = [\lambda_\infty, \lambda]$ donde $\lambda > \lambda_\infty$. Del hecho que λ_∞ es un punto de bifurcación de infinito, podemos hallar $\lambda_j \to \lambda_\infty$ y $\|u_i\|_\infty \to \infty$ tal que

$$\begin{aligned} -\Delta u_j = \lambda_j f(u_j + a) \quad & x \in \Omega \\ u_j = 0 \quad & x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

por consiguiente

$$\frac{u_j}{\|u_j\|} = \lambda_j (-\Delta)^{-1} [\frac{f(u_j + a)}{\|u_j\|}] \quad x \in \Omega \tag{5.6}$$

por el lema 7 y por el hecho que $(-\Delta)^{-1}$ es un operador compacto, se tiene que existe una subsucesión $v_j = \frac{u_j}{\|u_j\|}$ tal que $v_j \to v$ en X, así tomando el límite cuando $j \to \infty$ en (5.6) se tiene que

$$\begin{aligned} v = \lambda_\infty (-\Delta)^{-1} [m_\infty v] \\ \Rightarrow \quad -\Delta v = \lambda_\infty m_\infty v, \ \textit{con} \ \|v\|_\infty = 1 \ \textit{y} \ v \geq 0 \end{aligned}$$

Ahora, usando φ_1 como función test en el problema de valores propios, se tiene que:

$$-\Delta v \varphi_1 = \lambda_\infty m_\infty v \varphi_1$$

$$-\int_\Omega \Delta v \varphi_1 dx = \lambda_\infty m_\infty \int_\Omega v \varphi_1 dx$$

$$\int_\Omega \nabla v \nabla \varphi_1 dx - \int_{\partial\Omega} \partial_\nu v \varphi_1 ds = \lambda_\infty m_\infty \int_\Omega v \varphi_1 dx$$

$$\Rightarrow \quad \int_\Omega \nabla v \nabla \varphi_1 dx = \lambda_\infty m_\infty \int_\Omega v \varphi_1 dx$$

además usando v como función test en el problema:

$$-\Delta \varphi_1 = \lambda_1 \varphi_1$$

$$\Rightarrow \quad -\Delta \varphi_1 v = \lambda_1 \varphi_1 v$$

$$-\int_\Omega \Delta \varphi_1 v dx = \lambda_1 \int_\Omega v \varphi_1 dx$$

$$\int_\Omega \nabla v \nabla \varphi_1 dx - \int_{\partial\Omega} \partial_\nu \varphi_1 v ds = \lambda_1 \int_\Omega v \varphi_1 dx$$

$$\Rightarrow \quad \int_\Omega \nabla v \nabla \varphi_1 dx = \lambda_1 \int_\Omega v \varphi_1 dx$$

así

$$\lambda_1 \int_\Omega v \varphi_1 = \lambda_\infty m_\infty \int_\Omega v \varphi_1$$

de aquí concluimos que $\lambda_1 = \lambda_\infty m_\infty$ y por tanto $v = \varphi_1$

Así, $v > 0$ en Ω y $u_j = v_j \|u_j\| \to \infty$ $\forall x \in \Omega$. Ahora tomemos $u_j = s_j\varphi_1 + w_j$ con $s_j = \int_\Omega u_j\varphi_1 dx \geq 0$ y $\int_\Omega w_j\varphi_1 dx = 0$. Por tanto,

$$-\Delta u_j = \lambda_j f(u_j + a)$$

$$-\Delta s_j\varphi_1 - \Delta w_j = \lambda_j(m_\infty(u_j + a) + g(u_j + a))$$

$$s_j\lambda_1\varphi_1 - \Delta w_j = \lambda_j(m_\infty(u_j + a) + g(u_j + a))$$

tomando φ_1 como función test, se tiene que

$$s_j\lambda_1 - \int_\Omega \Delta w_j\varphi_1 dx = \lambda_j \int_\Omega (m_\infty(u_j + a)\varphi_1 dx + \lambda_j \int_\Omega g(u_j + a)\varphi_1 dx$$

$$s_j\lambda_1 - \int_\Omega \Delta w_j\varphi_1 dx = \lambda_j m_\infty s_j + \lambda_j m_\infty a \int_\Omega \varphi_1 dx + \lambda_j \int_\Omega g(u_j + a)\varphi_1 dx$$

pero

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \Delta w_j\varphi_1 dx &= \int_\Gamma \partial_\nu w_j\varphi_1 ds - \int_\Omega \nabla w_j\nabla\varphi_1 dx \\
&= -\int_\Omega \nabla w_j\nabla\varphi_1 dx \\
&= \int_\Omega \Delta\varphi_1 w_j dx - \int_\Gamma \partial_\nu\varphi_1 w_j ds \\
&= \int_\Omega \Delta\varphi_1 w_j dx \\
&= -\lambda_1 \int_\Omega \varphi_1 w_j dx = 0
\end{aligned}$$

por tanto

$$s_j\lambda_1 = \lambda_j m_\infty s_j + \lambda_j m_\infty a \int_\Omega \varphi_1 dx + \lambda_j \int_\Omega g(u_j + a)\varphi_1 dx$$

así, dividiendo la ecuación anterior por m_∞ se tiene que

$$s_j\lambda_\infty = \lambda_j s_j + \lambda_j a \int_\Omega \varphi_1 dx + \frac{\lambda_j}{m_\infty} \int_\Omega g(u_j + a)\varphi_1 dx$$

puesto que $\lambda_\infty < \lambda_j$

$$0 > s_j(\lambda_\infty - \lambda_j) = \lambda_j a \int_\Omega \varphi_1 dx + \frac{\lambda_j}{m_\infty} \int_\Omega g(u_j + a)\varphi_1 dx$$

$$\Rightarrow \qquad \int_\Omega g(u_j + a)\varphi_1 dx < 0$$

Por el Lema de Fatou se tiene que

$$\gamma' \int_\Omega \varphi_1 dx = \int_\Omega \liminf_{u_j\to\infty} g(u_j + a)\varphi_1 \leq \liminf_{u_j\to\infty} \int_\Omega g(u_i + a)\varphi_1 < 0$$

lo que es una contradicción con el hecho que $\gamma' > 0$.

Una demostración similar se puede hacer cuando se asume que $\gamma'' < 0$. $\square$

Teorema 28. *Supongamos que se satisfacen las hipótesis del Teorema 26 con* $\lambda_0 < \lambda_\infty$ *y además*

$$\gamma' = \liminf_{u_j \to \infty} g(u) > 0$$

Entonces existe λ^*, *tal que el problema*

$$\begin{aligned} -\Delta u = \lambda f(u+a) \quad & x \in \Omega \\ u = 0 \quad & x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

tiene al menos tres soluciones para todo $\lambda \in]\max(\lambda^*, \lambda_0), \lambda_\infty[$.

Demostración. Puesto que $\gamma' > 0$, por el Teorema anterior deducimos que la bifurcación de infinito es a la izquierda y como $L_{0,a} \cap L_{\infty,a} = \emptyset$, se tiene que, de la rama que bifurca de infinito podemos hallar dos soluciones para cada $\lambda \in]\lambda^*, \lambda_\infty[$ donde $\lambda^* = \min \lambda$ tal que $(\lambda, u) \in L_{\infty,a}$.

Además se puede hallar una solución al problema

$$\begin{aligned} -\Delta u = \lambda f(u+a) \quad & x \in \Omega \\ u = 0 \quad & x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

para cada $\lambda \in]\lambda_0, \infty[$ la cual pertenece a la rama de bifurcación $L_{0,a}$, por tanto, se tiene que existen al menos tres soluciones para todo $\lambda \in]\max(\lambda^*, \lambda_0), \lambda_\infty[$ puesto que $\lambda_0 < \lambda_\infty$. □

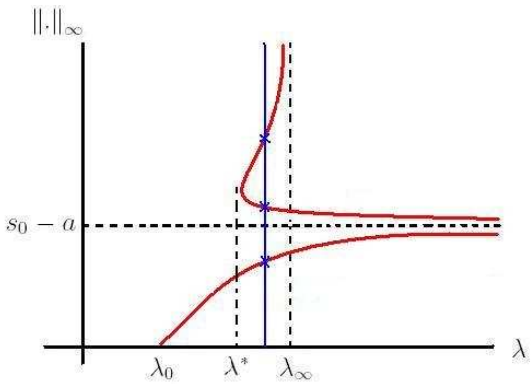


Figura 7: Diagrama del Teorema 28

Lema 11. *Supongamos que existe $\alpha > 0$ tal $f(s+a) \geq \alpha s$. Entonces $\Lambda = \frac{\lambda_1}{\alpha} > 0$ es tal que el problema*

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda f(u+a) \quad & x \in \Omega \\ u &= 0 \quad & x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

no tiene soluciones positivas para $\lambda > \Lambda$. Además $L_{0,a} = L_{\infty,a}$.

Demostración. Si (λ, u) es tal que

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda f(u+a) \quad & x \in \Omega \\ u &= 0 \quad & x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

entonces

$$-\Delta u = \lambda f(u+a) \geq \lambda \alpha u$$

multiplicando por φ_1 e integrando, encontramos que

$$\lambda_1 \int_\Omega u\varphi_1 dx \geq \lambda\alpha \int_\Omega u\varphi_1 dx$$

Puesto que $u > 0$ se sigue que $\lambda \leq \frac{\lambda_1}{\alpha} = \Lambda$.

Además, por el hecho que λ_∞ es el único punto de bifurcación de infinito y la rama de bifurcación de cero es no acotada, por lo demostrado anteriormente se tiene que $L_{0,a}$ tiene que cortar a $L_{\infty,a}$. $\square$

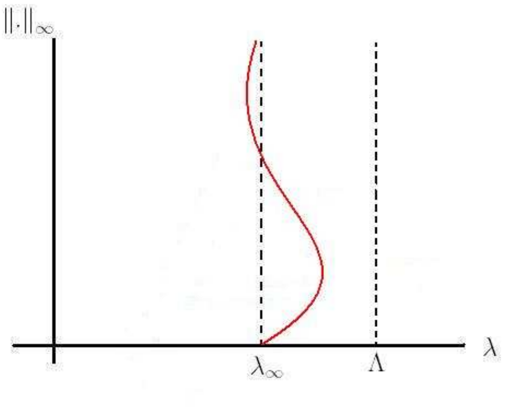


Figura 8: Diagrama del Lema 11

Teorema 29. *Supongamos que $f'_+(a) = m_\infty$. Si existe $\epsilon > 0$ tal que*

$$g(s) \leq -m_\infty a \qquad \forall s \in (a, a+\epsilon)$$

entonces la bifurcación de cero del Teorema 24 es a la derecha.

Demostración. Sea $(\lambda_n, u_n) \in \mathbb{R}^+ \times X$ una sucesión de soluciones del problema

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda f(u+a) \quad\ x \in \Omega \\ u &= 0 \quad\ x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

con $\lambda_n \to \lambda_0 = \frac{\lambda_1}{f'_+(a)}$ y $\|u_n\| \to 0$

Dividiendo la ecuación $u_n = \lambda_n(-\Delta)^{-1}[f(u_n+a)]$ por $\|u_n\|$, por el Lema 4 y del hecho que $(-\Delta)^{-1}$ es un operador compacto podemos hallar una subsucesión $(\frac{u_n}{\|u_n\|})$ tal que

$$\frac{u_n}{\|u_n\|} \longrightarrow v$$

más aún, se puede probar que $v = \varphi_1$.

Usando φ_1 como función test en el problema:

$$-\Delta u_n = \lambda_n m_\infty (u_n+a) + \lambda_n g(u_n+a)$$

se tiene que

$$\begin{gathered} -\Delta u_n \varphi_1 = \lambda_n m_\infty (u_n+a)\varphi_1 + \lambda_n g(u_n+a)\varphi_1 \\ -\int_\Omega \Delta u_n \varphi_1 dx = \lambda_n m_\infty \int_\Omega (u_n+a)\varphi_1 dx + \lambda_n \int_\Omega g(u_n+a)\varphi_1 dx \\ \int_\Omega \nabla u_n \nabla \varphi_1 dx - \int_{\partial\Omega} \partial_\nu u_n \varphi_1 ds = \lambda_n m_\infty \int_\Omega (u_n+a)\varphi_1 dx + \lambda_n \int_\Omega g(u_n+a)\varphi_1 dx \\ \Rightarrow \qquad \int_\Omega \nabla u_n \nabla \varphi_1 dx = \lambda_n m_\infty \int_\Omega (u_n+a)\varphi_1 dx + \lambda_n \int_\Omega g(u_n+a)\varphi_1 dx \end{gathered}$$

además, usando u_n como función test en el problema

$$-\Delta\varphi_1 = \lambda_1 \varphi_1$$

tenemos que

$$\begin{gathered} -\Delta\varphi_1 u_n = \lambda_1 \varphi_1 u_n \\ -\int_\Omega \Delta\varphi_1 u_n dx = \lambda_1 \int_\Omega u_n \varphi_1 dx \\ \int_\Omega \nabla u_n \nabla \varphi_1 dx - \int_{\partial\Omega} \partial_\nu \varphi_1 u_n ds = \lambda_1 \int_\Omega u_n \varphi_1 dx \end{gathered}$$

$$\Rightarrow \qquad \int_\Omega \nabla u_n \nabla \varphi_1 dx = \lambda_1 \int_\Omega u_n \varphi_1 dx$$

ahora, puesto que $(u_n + a)$ converge uniformemente a a, se tiene que $g(u_n + a) + m_\infty a \leq 0$, por tanto

$$m_\infty a \int_\Omega \varphi_1 dx + \int_\Omega g(u_n + a)\varphi_1 dx \leq 0$$

así

$$\lambda_1 \int_\Omega u_n \varphi_1 dx = \lambda_n m_\infty \int_\Omega (u_n + a)\varphi_1 dx + \lambda_n \int_\Omega g(u_n + a)\varphi_1 dx$$

$$(\lambda_1 - \lambda_n m_\infty) \int_\Omega u_n \varphi_1 dx = \lambda_n m_\infty a \int_\Omega \varphi_1 dx + \lambda_n \int_\Omega g(u_n + a)\varphi_1 dx \leq 0$$

$$(\lambda_1 - \lambda_n m_\infty) \int_\Omega u_n \varphi_1 dx \leq 0$$

se deduce que

$$\lambda_0 = \frac{\lambda_1}{m_\infty} \leq \lambda_n$$

□

Teorema 30. *Supongamos que* $f'_+(a) = m_\infty$. *Si se satisfacen las hipótesis del Teorema 28 y además existe* $\epsilon > 0$ *tal que*

$$g(s) \leq -m_\infty a \qquad \forall s \in (a, a + \epsilon)$$

Entonces existe λ^*, *tal que el problema*

$$\begin{aligned} -\Delta u = \lambda f(u + a) \qquad & x \in \Omega \\ u = 0 \qquad & x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

tiene al menos dos soluciones no triviales para todo $\lambda \in]\lambda^*, \infty[$.

Demostración. Puesto que $\gamma' > 0$, por el Teorema 27 deducimos que la bifurcación de infinito es a la izquierda y como $L_{0,a} \cap L_{\infty,a} = \emptyset$, se tiene que, de la rama que bifurca de infinito podemos hallar dos soluciones para cada $\lambda \in]\lambda^*, \lambda_\infty[$ donde $\lambda^* = \text{mín}\, \lambda$ tal que $(\lambda, u) \in L_{\infty,a}$.

Ahora puesto que existe $\epsilon > 0$ tal que

$$g(u) \leq -m_\infty a \qquad \forall u \in (a, a + \epsilon)$$

se tiene que la rama que bifurca de $\lambda_0 = \lambda_\infty$ es hacia la derecha, así podemos hallar dos soluciones para cada $\lambda \in]\lambda_0, \infty[$, una que pertenece a la rama de bifurcación de infinito y la otra que proviene de la rama que bifurca de cero.

Así de lo anterior se deduce que existen dos soluciones para cada $\lambda \in]\lambda^*, \infty[$. $\square$

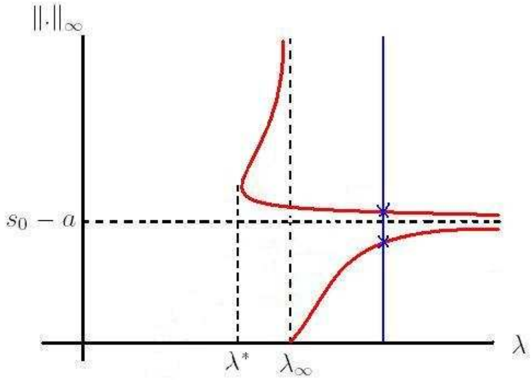


Figura 10: Diagrama del Teorema 30

Capítulo 6

Problemas elípticos no lineales con condiciones Dirichlet no homogéneas.

En el presente capítulo enunciaremos algunos resultados de existencia de soluciones, para el problema:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda f(u) \quad en \;\; \Omega \\ u &= h \quad en \;\; \partial\Omega \end{aligned} \tag{6.1}$$

donde Ω es un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$, $u := u(x)$ con $x \in \Omega$, $\lambda > 0$, $f \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, además supondremos que h es una función no negativa, acotada, $h \neq 0$..

Para ello se hará uso de algunos de los resultados obtenidos en el capítulo anterior, además se tratará de aplicar el teorema de sub y supersoluciones que fue descrito en el capítulo 1.

Para facilitar el trabajo, tomaremos el cambio de variable $v = u - \gamma$, así

$$-\Delta u = -\Delta v - \Delta\gamma = \lambda f(v + \gamma) \quad en \; \Omega$$

$$u = v + \gamma = h \quad en \; \partial\Omega$$

Por tanto al problema anterior lo podemos separar en:

$$\begin{aligned} -\Delta\gamma &= 0 \quad x \in \Omega \\ \gamma &= h \quad x \in \partial\Omega \end{aligned} \tag{6.2}$$

y

$$\begin{aligned} -\Delta v &= \lambda f(v + \gamma) \quad x \in \Omega \\ v &= 0 \quad x \in \partial\Omega \end{aligned} \tag{6.3}$$

Así, nuestro trabajo se centrará en resolver el problema (6.3).

Puesto que h es una función no negativa, acotada y $h \neq 0$, por el Principio de Máximo se tiene que la solución γ del problema (6.2) satisface:

$$\gamma > 0 \quad \forall x \in \Omega$$

y así

$$0 < a = \min_{x \in \partial\Omega} h(x) \leq \gamma(x) \leq \max_{x \in \partial\Omega} h(x) = b$$

En el presente capítulo, se considerará nuevamente que

$$f(s) = m_\infty s + g(s), \quad m_\infty > 0, \quad g \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}), \quad | g(s) | \leq k$$

además $f(s) \geq 0$ para todo $s \in [0, a]$.

Observación 11. *Un problema trivial de estudiar sería:*

$$\begin{aligned} -\Delta u = \lambda f(u) \quad & x \in \Omega \\ u = h \quad & x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

con $h(x) = a$, $f(a) = 0$, $f'_+(a) > 0$ donde "a" es una constante positiva. Así tendríamos los problemas asociados

$$\begin{cases} -\Delta\gamma = 0 & x \in \Omega \\ \gamma = a & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad y \quad \begin{cases} -\Delta v = \lambda f(v + \gamma) & x \in \Omega \\ v = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

de donde se obtendría que $\gamma = a$ y así

$$\begin{cases} -\Delta v = \lambda f(v + a) & x \in \Omega \\ v = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

y por el Teorema 24 se deduce que $\lambda_0 = \frac{\lambda_1}{f'_+(a)}$ es el único punto de bifurcación de cero de soluciones positivas.

Teorema 31. *Supongamos que $f \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ es una función creciente en $[a, \infty[$ y $f(a) = 0$. Si existe $\tau > 0$ tal que $\tau a \geq b$ y*

$$g(\tau v + \gamma) \leq \tau g(v + a)$$

para toda solución v de (5.1). Entonces para cada $\lambda \in \Gamma_{0,a}$, existe al menos una solución no trivial del problema (6.3). Más aún, para cada solución (λ, u) del problema (6.3) existe una solución $(\lambda, v) \in L_{0,a}$ tal que

$$v < u \leq \tau v \qquad \forall x \in \Omega$$

Demostración. Ya que f(a)=0 y como

$$a + h > a \quad \Rightarrow \quad f(a+h) > 0$$

donde $h \in \mathbb{R}^+$, se tiene que

$$f'_+(a) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)}{h} > 0$$

así por el Teorema 24, $\lambda_0 = \frac{\lambda_1}{f'_+(a)}$ es un punto de bifurcación del problema (5.1) y por tanto tiene sentido hablar de $\lambda \in \Gamma_{0,a}$.

Para todo lo que sigue en la demostración tomemos $(\lambda, v) \in L_{0,a}$, por lo tanto

$$\begin{aligned} -\Delta v = \lambda f(v+a) &\quad x \in \Omega \\ v = 0 &\quad x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

pero como

$$v + a \leq v + \gamma \quad \Rightarrow \quad f(v+a) \leq f(v+\gamma)$$

se tiene que

$$\begin{aligned} -\Delta v \leq \lambda f(v+\gamma) &\quad x \in \Omega \\ v \leq 0 &\quad x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

lo que indica que v es una subsolución de (6.3).

Puesto que existe $\tau > 0$ tal que $\tau a \geq b \geq \gamma$ y

$$g(\tau v + \gamma) \leq \tau g(v+a)$$

se tiene que

$$\begin{aligned} \tau m a + \tau g(v+a) &\geq m\gamma + g(\tau v + \gamma) \\ \tau m v + \tau m a + \tau g(v+a) &\geq \tau m v + m\gamma + g(\tau v + \gamma) \\ \tau[m(v+a) + g(v+a)] &\geq m(\tau v + \gamma) + g(\tau v + \gamma) \\ \Rightarrow \qquad \tau f(v+a) &\geq f(\tau v + \gamma) \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} -\Delta \tau v = \tau(-\Delta v) = \tau\lambda f(v+a) \geq \lambda f(\tau v + \gamma) &\quad x \in \Omega \\ \tau v \geq 0 &\quad x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

lo que indica que τv es una supersolución del problema (6.3).

Ya que $\tau a \geq b > a$ se tiene que $\tau > 1$, por lo tanto $v \leq \tau v$ $\forall x \in \Omega$, así existe una solución u del problema (6.3) tal que $v \leq u \leq \tau v$. $\square$

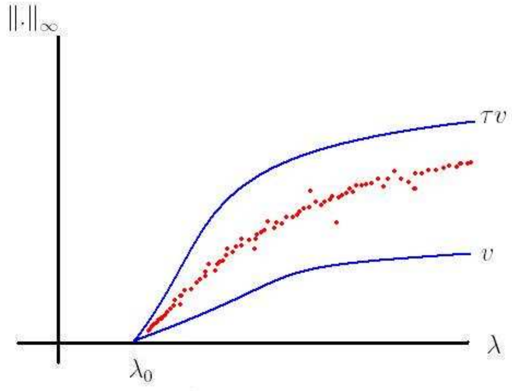


Figura 11: Diagrama del Teorema 31

Observación 12. *Puesto que* $(\lambda, v) \in L_{0,a}$*, se tiene que* $v > 0$ $\forall x \in \Omega$*, así por el Teorema anterior va a existir una solución* u *del problema (6.3) que satisface*

$$v \leq u \leq \tau v \qquad \forall x \in \Omega$$

para cierto $\tau > 1$*, de aquí podemos concluir la positividad de las soluciones del problema (6.3).*

En el teorema anterior puede darse el caso en el existan varios τ que satisfagan la condición requerida, a continuación enunciaremos un resultado que nos muestra que la solución encontrada en el Teorema 31 es independiente de la elección de τ.

Lema 12. *Supongamos que* $\lambda > \frac{\lambda_1}{m_\infty}$.

Si u *satisface el problema*

$$-\Delta u > \lambda m_\infty u$$

con $u = 0$ *en* $\partial\Omega$*, entonces* $u = 0$ *en* Ω*.*

Demostración. Usando φ_1 como función test, se tiene que:

$$-\Delta u \varphi_1 > \lambda m_\infty u \varphi_1$$

$$-\int_\Omega \Delta u \varphi_1 dx > \lambda m_\infty \int_\Omega u \varphi_1 dx$$

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi_1 dx - \int_{\partial\Omega} \partial_\nu u \varphi_1 ds > \lambda m_\infty \int_\Omega u \varphi_1 dx$$

$$\Rightarrow \qquad \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi_1 dx > \lambda m_\infty \int_\Omega u\varphi_1 dx$$

además usando u como función test en el problema

$$-\Delta\varphi_1 = \lambda_1\varphi_1$$

se tiene que

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi_1 dx = \lambda_1 \int_\Omega u\varphi_1 dx$$

así

$$\lambda_1 \int_\Omega u\varphi_1 > \lambda m_\infty \int_\Omega u\varphi_1$$

Si suponemos que $u > 0$ se tendría que $\lambda < \frac{\lambda_1}{m_\infty}$, lo que es una contradicción. Por tanto $u = 0$ en Ω. □

Lema 13. *Supongamos que se satisfacen las condiciones de Teorema 31. Si $f'_+(a) = m_\infty$ y g es una función estrictamente decreciente en $[a, \infty[$, entonces para todo $\lambda > \frac{\lambda_1}{m_\infty}$ la solución del problema (6.3) hallada en el Teorema 31 es independiente de la elección de τ.*

Demostración. Sea $(\lambda, v) \in L_{0,a}$, por reducción al absurdo, tomemos τ_1 y τ_2 tal que $\tau_1 a \geq b$ y $\tau_2 a \geq b$.

Así, por el Teorema 31 podemos hallar soluciones diferentes u_1 y u_2 que satisfacen:

$$v \leq u_1 \leq \tau_1 v$$

$$v \leq u_2 \leq \tau_2 v$$

Puesto que las dos soluciones están definidas en Ω y tienen las mismas condiciones de frontera, siempre se va a poder encontrar subconjuntos de Ω en los cuales $u_1 < u_2$ o $u_2 < u_1$.

Así, basta probar el teorema cuando $u_1 < u_2$ o $u_2 < u_1$ en Ω.

(i) Supongamos que $u_1 < u_2$, puesto que g es decreciente, se tiene que

$$-\Delta(u_1 - u_2) = \lambda(m_\infty(u_1 - u_2) + g(u_1 + \gamma) - g(u_2 + \gamma))$$

$$(-\Delta - \lambda m_\infty)(u_1 - u_2) = \lambda(g(u_1 + \gamma) - g(u_2 + \gamma)) > 0$$

por tanto

$$(-\Delta - \lambda m_\infty)(u_1 - u_2) > 0$$

ya que $u_1 - u_2 = 0$ en $\partial\Omega$, por el Lema anterior se concluye que $u_1 = u_2$ en Ω, lo que es una contracción.

(ii) Supongamos que $u_2 < u_1$, puesto que g es decreciente, se tiene que

$$-\Delta(u_2 - u_1) = \lambda(m_\infty(u_2 - u_1) + g(u_2 + \gamma) - g(u_1 + \gamma))$$

$$(-\Delta - \lambda m_\infty)(u_2 - u_1) = \lambda(g(u_2 + \gamma) - g(u_1 + \gamma)) > 0$$

por tanto

$$(-\Delta - \lambda m_\infty)(u_2 - u_1) > 0$$

puesto que $u_2 - u_1 = 0$ en $\partial\Omega$, por el Lema anterior se concluye que $u_2 = u_1$ en Ω, lo que contradice el hecho que $u_2 < u_1$.

Por tanto, se concluye que $u_1 = u_2$ en Ω. □

El siguiente resultado nos permitirá conocer el comportamiento de las soluciones del problema (6.3).

Lema 14. *Las soluciones halladas en el Teorema 31 convergen hacia* $(\lambda_0, 0)$.

Demostración. Puesto que $\lambda_0 = \frac{\lambda_1}{f'_+(a)}$ es un punto de bifurcación de cero para el problema (5.1), por definición existe una sucesión $(\lambda_n, v_n) \in \mathbb{R}^+ \times C(\overline{\Omega})$ tal que $\lambda_n \to \lambda_0$ y $\|v_n\|_\infty \to 0$ donde (λ_n, v_n) satisface

$$\begin{aligned} -\Delta v_n &= \lambda_n f(v_n + a) \quad x \in \Omega \\ v_n &= 0 \quad x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

además por el Teorema anterior, para cada v_n puedo hallar una solución u_n del problema (6.3) tal que $u_n \leq \tau v_n$ ctp Ω y así

$$\|u_n\|_\infty \leq \tau \|v_n\|_\infty \longrightarrow 0$$

por tanto hemos hallado una sucesión (λ_n, u_n) tal que $\lambda_n \to \lambda_0$, $\|u_n\|_\infty \to 0$ donde (λ_n, u_n) satisface el problema (6.3). □

Teorema 32. *Existe* $\epsilon > 0$ *tal que la bola*

$$B((\lambda_0, 0), \epsilon) = \{(\lambda, u) : \lambda \in B(\lambda_0, \epsilon),\ \|u\| \in B(0, \epsilon)\}$$

contiene una rama continua de soluciones del problema (6.3) que converge hacia $(\lambda_0, 0)$.

Demostración. Por el Lema anterior se tiene que $(\lambda_0, 0)$ es un punto acumulación de soluciones del problema (6.3), así se puede hallar $\epsilon > 0$ tal que todo (λ, u) con $\mid \lambda_0 - \lambda \mid < \epsilon$ y $\|u\|_\infty < \epsilon$ esté lo suficientemente cercano a $(\lambda_0, 0)$.

Sea (λ_1, v_1) y (λ_2, v_2) en $B((\lambda_0, 0), \epsilon)$ soluciones del problema (5.1), entonces se tiene que $\|v_1\| < \epsilon$ y $\|v_2\| < \epsilon$, además por el Teorema 31 se tiene que existen soluciones u_1 y u_2 del problema (6.3) tal que $u_1 \leq \tau v_1$ y $u_2 \leq \tau v_2$ y así

$$\|u_1\|_\infty \leq \tau \|v_1\|_\infty < \tau\epsilon \quad y \quad \|u_2\|_\infty \leq \tau \|v_2\|_\infty < \tau\epsilon$$

además

$$\begin{aligned} \mid \|u_1\| - \|u_2\| \mid - \|u_2\| \leq \|u_1\| \leq \tau \|v_1\| \leq \tau \mid \|v_1\| - \|v_2\| \mid + \tau \|v_2\| \\ \Rightarrow \quad \mid \|u_1\| - \|u_2\| \mid \leq \tau \mid \|v_1\| - \|v_2\| \mid + \tau \|v_2\| + \|u_2\| \end{aligned}$$

puesto que v_1 y v_2 pertenecen al continuo de soluciones del problema (5.1), se tiene que si

$$\mid \lambda_1 - \lambda_2 \mid < \epsilon_1 \quad \Rightarrow \quad \mid \|v_1\|_\infty - \|v_2\|_\infty \mid < \delta$$

por tanto se tiene que

$$\mid \|u_1\|_\infty - \|u_2\|_\infty \mid < \tau(\delta + 2\epsilon) = \varepsilon$$

□

Ahora, al igual que lo hecho para la bifurcación de cero, lo que se tratará de hacer es buscar soluciones del problema (6.3) que converjan a (λ_∞, ∞), donde λ_∞ es el único punto de bifurcación del problema (5.1).

Teorema 33. *Supongamos que se satisfacen las hipótesis del Teorema 25 y f es una función creciente en $[a, \infty[$. Si existe $\tau > 0$ tal que $\tau a \geq b$ y*

$$g(\tau v + \gamma) \leq \tau g(v + a)$$

para toda solución v de (5.1). Entonces para cada $\lambda \in \Gamma_{\infty,a}$, existe al menos una solución no trivial del problema (6.3). Más aún, para cada solución (λ, u) del problema (6.3) existe una solución $(\lambda, v) \in L_{\infty,a}$ tal que

$$v < u \leq \tau v \qquad \forall x \in \Omega$$

Demostración. La demostración es similar a la realizada en el Teorema 31. □

Lema 15. *La soluciones halladas en el Teorema 33 convergen hacia (λ_∞, ∞).*

Demostración. Puesto que $\lambda_\infty = \frac{\lambda_1}{m_\infty}$ es un punto de bifurcación de infinito para el problema (5.1), por definición existe una sucesión $(\lambda_n, v_n) \in \mathbb{R}^+ \times C(\overline{\Omega})$ tal que $\lambda_n \to \lambda_\infty$ y $\|v_n\|_\infty \to \infty$ donde (λ_n, v_n) satisface

$$\begin{aligned} -\Delta v_n = \lambda_n f(v_n + a) \quad & x \in \Omega \\ v_n = 0 \quad & x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

además por el Teorema anterior, para cada v_n puedo hallar u_n solución del problema (6.3), tal que $v_n \leq u_n$ ctp Ω, puesto que $\|v_n\|_\infty \to \infty$, deducimos que $\|u_n\|_\infty \to \infty$. Por tanto, hemos hallado una sucesión (λ_n, u_n) de soluciones del problema (6.3) tal que $\lambda_n \to \lambda_\infty$, $\|u_n\|_\infty \to \infty$. □

Lema 16. *Si se satisfacen las condiciones del Teorema 33 y además $g \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ es una función estrictamente decreciente en $[a, \infty[$, entonces para todo $\lambda > \frac{\lambda_1}{m_\infty}$, la solución del problema (6.3) hallada en el Teorema 33 es independiente de τ.*

Demostración. Se realiza una demostración similar a la realizada en el Lema 13. □

Capítulo 7

Conclusiones y recomendaciones

7.1. Conclusiones

1. Se comprobó que el grado topológico es una herramienta matemática muy potente, por medio de la cual pudimos resolver ciertos problemas encontrados en ecuaciones diferenciales parciales.

2. Fue posible generalizar la mayor parte de los resultados obtenidos por Ambrosetti-Hess en su artículo: Positive Solutions for Asymtotically Linear Elliptic Eigenvalue Problems, pero esta vez aplicados a los problemas elípticos no lineales perturbados con condiciones de Dirichlet homogéneas.

3. Mediante el uso de teoremas, que son basados en los trabajos de Rabinowitz y Krasnoselskii, se pudo probar la existencia de soluciones para el problema elíptico no lineal perturbado con condiciones homogéneas en la frontera tipo Dirichlet.

4. Se pudo deducir las condiciones que nos permitieron manejar la forma que tienen las ramas de bifurcación y de esta manera pudimos aumentar o disminuir el número de soluciones del problema, hallando así, en algunos casos, multiplicidad de soluciones.

5. Se llegó a la conclusión de que bajo ciertas hipótesis sobre la función asintóticamente lineal, se pueden usar los resultados obtenidos en los problemas perturbados para hallar soluciones al problema elíptico no lineal con condiciones de Dirichlet no homogéneas.

6. Se hallaron resultados que nos permitieron conocer el comportamiento de las soluciones encontradas para el problema elíptico no lineal con condiciones de Dirichlet no homogéneas.

7. Se llegó a la conclusión de que los puntos de bifurcación del problema perturbado (5.1) asociado al problema no homogéneo, no son necesariamente puntos de bifurcación para el problema (6.3).

7.2. Recomendaciones

1. Para una mejor comprención de la Teoría de Grado Topológico tanto en dimensión finita como infinita, es recomendable leer [3] y [8].

2. Como continuación de esta tesis se pueden seguir buscando condiciones que nos permitan generar una rama de bifurcación de cero que nazca hacia la izquierda para el problema perturbado (5.1).

Bibliografía

[1] Ambrosetti, A., Malchiodi, A.: Nonlinear Analysis and Semilinear Elliptic Problems, Cambridge (2007), p. 15-65.

[2] Ambrosetti, A., Hess, P.: Positive solutions of Asymptotically Linear Elliptic Eigenvalue Problems, Journ. of Math. Anal. and Appl (1980).

[3] Arcoya, D.: Topological methods and differential equations II, ICTP, Trieste (2006).

[4] Brézis, H.: Functional Analysis, Theory and applications, Alianza Editorial (1984).

[5] Brown, R.: A Topological Introduction to Nonlinear Analysis, 2nd Edition, Birkhauser (2004), p. 51-119.

[6] Evans L.: Partial Differential Equations, Volumen 9, AMS.

[7] Ivorra Castillo, C.: Análisis Matemático, Notas de Curso de la Escuela Politécnica de Madrid (2002).

[8] Nirenberg, L.: Topics in Nonlinear Functional Analysis, AMS (2000), p. 1-62.

[9] Ortega, R.: Degree theory and boundary value problems, ICTP, Trieste (2006).