

MSc.

Fausto Ramiro Valencia Arcos

Agosto, 2013

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA Y
ELECTRÓNICA

FUERZAS ELECTROMECAÑICAS EN DEVANADOS
DE TRANSFORMADORES DE POTENCIA
DEBIDAS A FALLAS EN EL SISTEMA ELÉCTRICO

TESIS PREVIA A LA OBTENCIÓN DEL GRADO EN MASTER
(Msc) EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA ELÉCTRICA

FAUSTO RAMIRO VALENCIA ARCOS
rw.ingenieria@yahoo.com

DIRECTOR:
ING. MENTOR ESTUARDO POVEDA ALMEIDA MSEE
mpoveda@ecnet.ec

Quito, agosto 2013

DECLARACIÓN

Yo Fausto Ramiro Valencia Arcos, declaro que el trabajo aquí descrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y, que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

La Escuela Politécnica Nacional, puede hacer uso de los derechos correspondientes a este trabajo, según lo establecido por la Ley de Propiedad Intelectual, por su Reglamento y por la normatividad institucional vigente.

Fausto Ramiro Valencia Arcos

CERTIFICACIÓN

Certifico que el presente trabajo fue desarrollado por Fausto Ramiro Valencia Arcos, bajo mi supervisión.

Ing. Mentor Poveda MSEE
DIRECTOR DEL PROYECTO

AGRADECIMIENTO

Agradezco al Ing. Mentor Poveda por su apoyo y guía durante la elaboración de este trabajo y por su ejemplo de profesionalismo en el transcurso de mis estudios de Posgrado en la Escuela Politécnica Nacional.

DEDICATORIA

A Wendy y Yurani por su tiempo compartido.

CONTENIDO

RESUMEN.....	3
INTRODUCCIÓN.....	4
CAPÍTULO 1.....	13
MODELO DE ELEMENTOS FINITOS PARA EL TRANSFORMADOR DE POTENCIA ..	13
1.1 PRINCIPIOS DE CÁLCULO VARIACIONAL.....	14
1.2 MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS	17
1.2.1 CONDICIONES DE BORDE.....	18
1.2.2. DISCONTINUIDADES	18
1.2.3. MÉTODO DE RITZ	19
1.2.4. PROCEDIMIENTO DE APLICACIÓN DEL FEM.....	22
1.2.5. VARIACIONAL PARA EL PROBLEMA DE VALOR FRONTERA DE DOS DIMENSIONES	23
1.2.6. INTERPOLACIÓN.....	25
1.3. APLICACIÓN DEL FEM AL MODELO DEL TRANSFORMADOR.....	29
1.4. IMPLEMENTACIÓN DEL MODELO EN UN PROGRAMA COMPUTACIONAL.....	33
1.4.1. DISCRETIZACIÓN	34
1.4.2. CONDICIONES DE BORDE.....	35
1.4.3. CURVA DE SATURACIÓN	36
1.5. COMPROBACIÓN DEL MODELO.....	39
1.5.1. PRUEBA DE LA CURVA DE SATURACIÓN	39
1.5.2. COMPARACIÓN DE LOS RESULTADOS DE LAS SIMULACIONES PARA INDUCCIÓN MAGNÉTICA Y FUERZAS ELECTROMECAÑICAS.....	40
1.5.2.1. Inducción Magnética.....	41
1.5.2.2. Fuerza electromecánica.....	44
CAPÍTULO 2.....	47
RESULTADOS Y EVALUACIONES PARA DIFERENTES CASOS DE DISEÑO	47
2.1. CONFIGURACIÓN DEL NÚCLEO	47
2.1.1. DEVANADOS EN DOS COLUMNAS.....	47
2.1.2. NÚCLEO CON TRES COLUMNAS	58
2.1.3. CONFIGURACIÓN DE DEVANADOS DE BAJO ESPESOR.....	68
2.2. ASIMETRÍAS AXIALES EN LA DISPOSICIÓN DE LOS DEVANADOS.....	71
2.3. INFLUENCIA DEL MATERIAL DEL NÚCLEO.....	74

2.4 DISPOSICIÓN DE DEVANADOS DE DIFERENTE LONGITUD.....	75
2.4.1 DEVANADOS DE DIFERENTE LONGITUD CON SIMETRÍA AXIAL	76
2.4.2 DEVANADOS DE DIFERENTE LONGITUD Y CON LA MISMA BASE	81
CAPÍTULO 3.....	86
APLICACIÓN A UN TRANSFORMADOR DEL SISTEMA NACIONAL DE	
TRANSMISIÓN	86
3.1. DATOS GENERALES.....	86
3.2. VOLTAJE POR ESPIRA	87
3.3. INDUCCIÓN MAGNÉTICA Y SECCIÓN TRANSVERSAL DEL NÚCLEO.....	89
3.4. CONDUCTORES Y DEVANADOS	91
3.4.1. CORRIENTE POR LOS DEVANADOS.....	91
3.4.2. SECCIÓN DE LOS CONDUCTORES	92
3.4.3. DIMENSIONES DE LOS ARROLLAMIENTOS	96
3.5. PÉRDIDAS EN EL NÚCLEO.....	98
3.6. PÉRDIDAS EN EL COBRE.....	100
3.7. REACTANCIA DE DISPERSIÓN	102
3.8. SIMULACIÓN EN MAG_TRAFO.....	104
3.9. COMPORTAMIENTO TÉRMICO ANTE CORRIENTES DE FALLA.....	110
CAPÍTULO 4.....	111
CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	111
ANEXO 1	118
ANEXO 2	121
ANEXO 3	122
1. INGRESO DE LOS DATOS INICIALES DEL PROBLEMA.....	122
2. INGRESO DE LA CURVA DE SATURACIÓN	125
3. EJECUCIÓN DEL PROGRAMA.....	126
4. AFINAMIENTO DE LOS RESULTADOS	136
BIBLIOGRAFÍA.....	139

RESUMEN

Se presenta una descripción de los efectos que tienen las fuerzas electromecánicas en los devanados de los transformadores, y las causas principales para que existan estos problemas. Se desarrolla un modelo para el cálculo de estas fuerzas y su distribución a lo largo de los devanados. El modelo utiliza como herramienta el Análisis de Elementos Finitos, cuya aplicación ha sido detallada a lo largo de este trabajo. Como parte del proceso de cálculo de las fuerzas, se obtienen la distribución de la inducción magnética y del vector potencial magnético, lo que permite determinar el comportamiento del campo magnético en diferentes configuraciones de la geometría interna del transformador. La aplicación computacional desarrollada en base al modelo anterior, permite determinar la dirección y la magnitud de las fuerzas que se presentan en los devanados del transformador, tanto en funcionamiento en vacío así como en corrientes de carga y de corto circuito. Se comparan diferentes configuraciones en cuanto al valor de fuerza electromecánica que se presenta en el transformador. Finalmente, se presenta un desarrollo simplificado para el diseño de un autotransformador en el cual se aplica el programa computacional y se determina el tipo de conductor necesario para que soporte las fuerzas electromecánicas a las que se verá sometido en caso de falla.

INTRODUCCIÓN

El transformador de potencia es uno de los elementos más importantes de un sistema eléctrico debido a su función de elevar el voltaje para lo cual permite la transmisión de grandes cantidades de energía a un costo relativamente bajo y con pérdidas mínimas.

Al ser parte del sistema de transmisión, la indisponibilidad de los transformadores de potencia puede causar que exista una falta de servicio eléctrico a los clientes de una manera prolongada, lo cual está en contra de las metas requeridas de la calidad de energía.

Una de las causas para la indisponibilidad de un transformador son las fallas internas o deformaciones causadas por los esfuerzos electromecánicos que tiene que soportar el equipo debidas a las corrientes de cortocircuito que circulan por sus devanados, razón por la cual el estudio de los efectos de estas fuerzas y su cuantificación es un problema importante dentro de los sistemas eléctricos de potencia.

La densidad de fuerza electromecánica se determina mediante la ecuación (1). J es la densidad de corriente que circula por el conductor y B es la inducción magnética en la que está inmerso el devanado. Como se puede observar, éste es un fenómeno electromagnético.

$$\vec{F} = \vec{J} \times \vec{B} \quad (1)$$

F es la fuerza electromagnética.

J es la densidad de corriente que circula por el conductor.

B es la densidad de flujo magnético o inducción magnética.

La determinación de las fuerzas electromecánicas es un problema complejo debido a la dificultad de cuantificar la inducción magnética. Para estructuras sencillas

el cálculo de la inducción magnética se lo realiza mediante un equivalente de circuitos magnéticos; sin embargo, los circuitos magnéticos son válidos sólo en aquellos casos en los que se puedan realizar simplificaciones importantes, como por ejemplo en geometrías uniformes, geometrías sencillas, en casos en los que las relaciones entre intensidad de campo e inducción magnética sean lineales, etc. Sin embargo, cuando se tienen equipos como el caso del transformador, estas condiciones de simplificación pueden no ser posibles y la utilización de la técnica de los circuitos magnéticos resulta ser inadecuada. Adicionalmente, el cálculo mediante circuitos magnéticos sólo entrega valores promedios de la inducción magnética, sin ser posible determinar su comportamiento en toda la geometría del transformador [13].

La inducción magnética viene dada por las ecuaciones (2), las cuales se derivan de las ecuaciones de Maxwell [3]. La resolución analítica de esta ecuación requiere de procedimientos demasiado extensos y sólo puede llevarse a cabo cuando existen simetrías con respecto a algún sistema conveniente de coordenadas. Por ejemplo se puede resolver una geometría cilíndrica mediante coordenadas cilíndricas, una esférica mediante coordenadas esféricas o una cúbica mediante coordenadas cartesianas. Para casos generales, la resolución de la ecuación implica la utilización de métodos numéricos tales como el análisis de elementos finitos.

$$\nabla \times \vec{A} = \mu \vec{J} \quad (2)$$

$$\nabla \times \vec{J} = \vec{B}$$

Donde A es el vector potencial magnético.

La dirección del flujo magnético que envuelve al devanado es en su mayor parte de naturaleza axial a lo largo de toda la columna del núcleo, cambia su orientación y llega a ser radial en los extremos de cada devanado. De acuerdo a la ecuación (1) las fuerzas electromecánicas son perpendiculares al flujo magnético; por lo tanto, a lo largo del devanado, éstas serán radiales y se tornarán en fuerzas

axiales en los extremos del mismo.

Por la predominante naturaleza axial del flujo magnético a lo largo del devanado, los primeros modelos para el cálculo de las fuerzas electromagnéticas se simplificaban asumiendo una columna del núcleo de longitud infinita y determinando sólo las fuerzas radiales. En el Capítulo 1 se desarrolla un modelo que no requiere de esta simplificación.

De acuerdo a su orientación, las fuerzas radiales pueden clasificarse en fuerzas dirigidas hacia el exterior del núcleo y fuerzas dirigidas hacia la columna del núcleo.

Cuando las fuerzas se dirigen hacia el exterior, son de naturaleza tensional. El efecto que tienen en el devanado es el desgaste del aislamiento y pueden provocar la existencia de cortocircuitos entre espiras. Otra consecuencia de este tipo de fuerzas es el estiramiento del conductor del devanado, lo cual puede traer como consecuencia una inestabilidad mecánica.

Cuando las fuerzas se dirigen hacia el interior, el efecto depende de la estructura del transformador [1]. Si el transformador tiene columnas de soporte, al excederse la capacidad mecánica del conductor del devanado se presentará el fenómeno conocido como pandeo forzado en el cual la circunferencia del arrollamiento se convierte en algo similar a una estrella tal como se muestra en la Figura 1.

Si el transformador no tiene columnas de soporte, es decir, es autoportado, en caso de que existan grandes fuerzas electromecánicas dirigidas hacia el interior, puede producirse un pandeo libre tal como se muestra en la Figura 2.

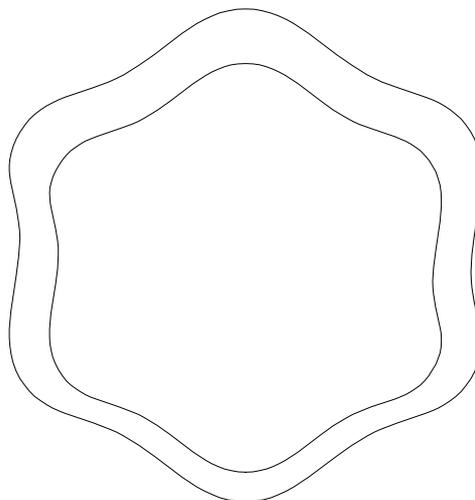


Fig 1.- Vista superior de un devanado con pandeo forzado

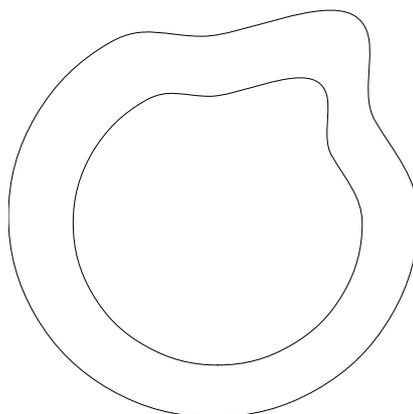


Fig. 2.- Vista superior de un devanado con pandeo libre

En devanados tipo helicoidal¹ se puede presentar el fenómeno de inclinación de todo el devanado, tal como se puede observar en la Figura 3.

1

Un devanado tipo helicoidal es aquél en el que el arrollamiento del conductor se realiza de arriba hacia abajo y viceversa. El devanado tipo disco, en cambio, tiene sus arrollamientos desde adentro hacia afuera y viceversa en cada capa.

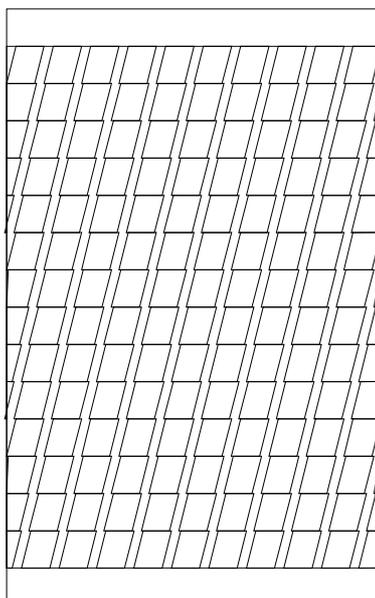


Fig. 3.- Inclinación del devanado por efecto de las fuerzas radiales

En el caso de las fuerzas axiales, si bien prácticamente no existen este tipo de fuerzas a lo largo de todo el devanado, en el punto medio se siente el efecto acumulativo de las mismas tanto desde el extremo superior como inferior del núcleo. Las consecuencias de que estas fuerzas sean tan grandes que sobrepasen el soporte del transformador son las siguientes:

Inclinación de los conductores.- Este fenómeno se presenta en devanados tipo disco. Es similar al efecto de inclinación debido a las fuerzas radiales, salvo que en este caso la inclinación varía de un disco a otro, tal como se observa en la Figura 4.

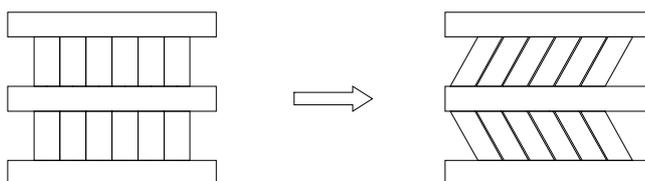


Fig. 4 Inclinación de las espiras por efecto de las fuerzas axiales

Sobreposición de conductores.- En este caso, debido a las fuerzas axiales, los arrollamientos se superponen a sus vecinos. Véase por ejemplo la Figura 5.

Pandeo vertical de los devanados.- Se presenta este fenómeno entre los soportes de los devanados, tal como se observa en la Figura 6.

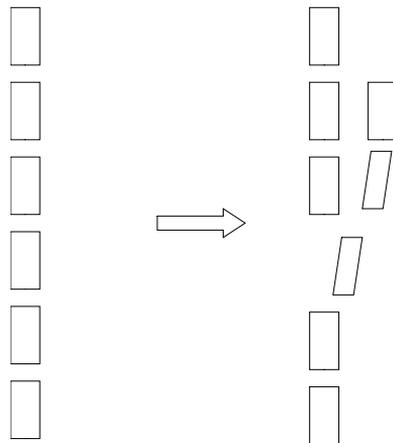


Fig. 5.- Superposición de los arrollamientos por efecto de las fuerzas axiales

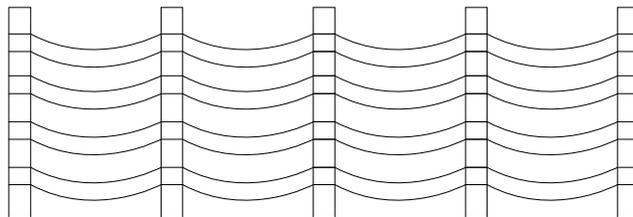


Figura 6.- Pandeo vertical del devanado por efecto de las fuerzas axiales

Si en los estudios y simulaciones del diseño del transformador de potencia se observa que la fuerza va a ser de una magnitud demasiado alta, se deben tomar medidas de refuerzo tales como: implementación de mejores soportes en las estructuras, utilización de conductores más robustos, disminución de la magnitud de la corriente de falla mediante el aumento de las impedancias de dispersión, etc.

En cuanto al material utilizado en la construcción de los devanados, el aluminio tiene menor capacidad de soportar corrientes de cortocircuito que el cobre por la

misma naturaleza física de estos materiales.²

La característica temporal de una corriente de falla puede estudiarse mediante el análisis del modelo que se muestra en la Figura 7. El tiempo cero corresponderá al instante de la falla. El transformador se representa por los parámetros R y L, es decir no se toma en cuenta la rama de excitación ya que para el caso de corrientes de falla, la corriente de excitación puede despreciarse.

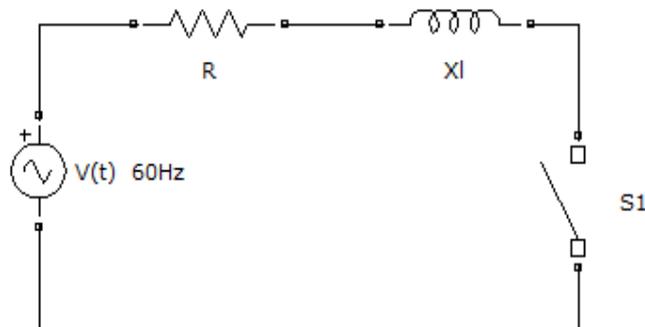


Fig. 7.- Modelo del transformador para el análisis en el dominio del tiempo de la corriente de falla

De acuerdo a este circuito, la característica de la corriente de falla es la solución analítica de la ecuación diferencial (3).

$$V_m \sin(\omega t + \alpha) = R i(t) + L \frac{di(t)}{dt} \quad (3)$$

La solución a (3) viene dada por la ecuación (4).

2

El uso de devanados de aluminio presenta las siguientes desventajas: (i) menor densidad de corriente de diseño, lo que se traduce en un tamaño mayor de devanado para la misma capacidad; (ii) menor capacidad para soportar corrientes de cortocircuito, (iii) menor capacidad para soportar sobrecargas. Por otro lado, la ventaja principal de los devanados de aluminio es el costo menor del transformador.

$$i(t) = I_{max} [\sin(\omega t + \alpha - \phi) - e^{-t/\tau} \sin(\alpha - \phi)] \quad (4)$$

α es el ángulo de cierre en el circuito que representa un transformador con falla.

ϕ es el ángulo de la impedancia que representa al transformador.

Como se puede observar, la corriente de falla tiene dos componentes: una parte oscilante a la frecuencia del sistema y una parte que decae en función del tiempo.

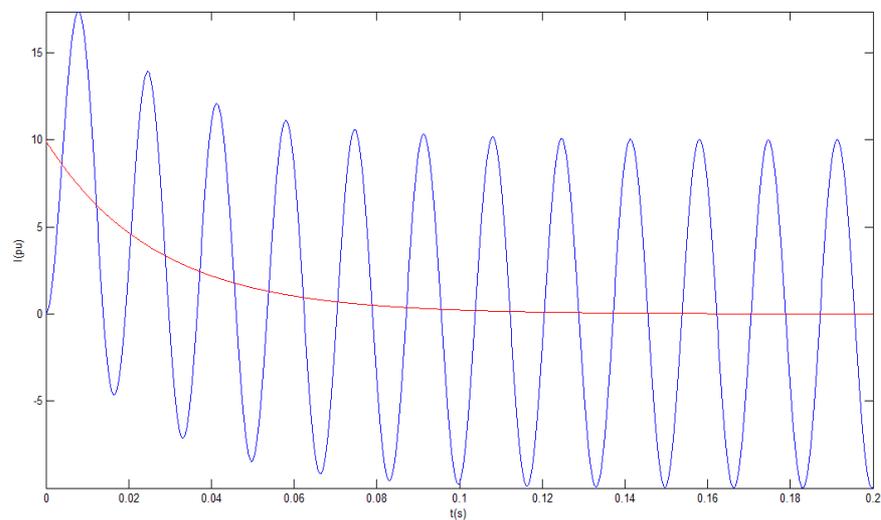


Fig. 8.- Corriente de cortocircuito de un transformador en función del tiempo

De acuerdo a lo que muestran las ecuaciones (1) y (2), la fuerza electromecánica será directamente proporcional al cuadrado de la corriente y, por lo tanto, tendrá la forma dada por la ecuación (5). Según esta ecuación la fuerza electromecánica tiene cuatro componentes: una componente continua que es constante en el tiempo, una componente continua que decae en el tiempo, una componente sinusoidal a la frecuencia del sistema que decrece con el tiempo y una componente sinusoidal, de amplitud constante, que oscila al doble de la frecuencia del sistema. La gráfica de esta ecuación se muestra en la Figura 9.

$$F(t) = F_{mx} \left(\frac{1}{2} + e^{-2t/\tau} - 2e^{-t/\tau} \cos \omega t + \frac{1}{2} \cos 2\omega t \right) \quad (5)$$

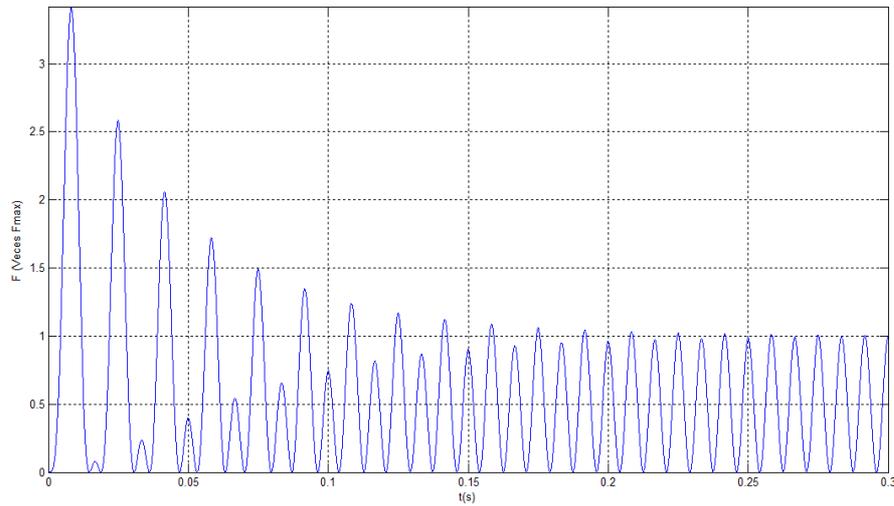


Fig. 9.- Fuerza por corriente de falla en función del tiempo

Como se puede observar en los párrafos anteriores, la determinación de los esfuerzos electromecánicos que se presentan en un transformador de potencia ante corrientes de falla es muy importante, tanto en la etapa de diseño del mismo, como en la etapa de especificación y de gestión de activos de los equipos.

CAPÍTULO 1

MODELO DE ELEMENTOS FINITOS PARA EL TRANSFORMADOR DE POTENCIA

Un modelo es la representación de un sistema de tal manera que el mismo pueda ser expresado con ecuaciones matemáticas, las cuales al ser aplicadas permitan determinar su comportamiento ante diferentes fenómenos. Un modelo no es único ni es válido para todos los casos. Por ejemplo, un transformador podría ser modelado como una reactancia, una impedancia serie de resistencia y reactancia, una susceptancia en paralelo, etc., dependiendo del fenómeno que se quiera estudiar. En el presente capítulo se desarrolla un modelo para la determinación del campo magnético y de las fuerzas electromecánicas que se presentan en un transformador, cuando circula corriente por sus devanados. En base al modelo desarrollado se diseña una aplicación computacional denominada Mag_Trafo.

Para el caso de las fuerzas electromecánicas que se presentan en un transformador, el modelo a ser desarrollado debe resolver la ecuación de Poisson para el vector potencial indicada en (1.1).

$$\nabla^2 \vec{A} = \mu \vec{J} \quad (1.1)$$

Para la resolución de esta ecuación se tienen diferentes métodos numéricos [9], por ejemplo:

- Diferencias finitas
- Método de las imágenes
- Método de Rabin
- Método de los elementos finitos

El método de diferencias finitas transforma los problemas que están expresados de una manera infinitesimal, a un problema de incrementos o de diferencias finitas tal como su nombre lo indica. La ventaja del método de elementos finitos sobre el de diferencias finitas es la capacidad del método de elementos finitos para resolver problemas de geometrías complejas, en los cuales este último puede adaptarse de mejor manera.

El método de Rabin fue uno de los métodos más aplicados antes del desarrollo del método de elementos finitos. Este método se basa en la aplicación de series de Fourier para la simplificación de la ecuación de Poisson. Tiene la desventaja de que su aplicación se limita a problemas con simetría axial.

El método de las imágenes se basa en asumir que la geometría del núcleo es infinita en la dirección axial y es reemplazada por un plano alrededor del cual se colocan las imágenes de los devanados. Este método fue utilizado cuando se tenían limitaciones computacionales.

1.1 PRINCIPIOS DE CÁLCULO VARIACIONAL [29]

Uno de los problemas fundamentales del cálculo diferencial es encontrar los valores extremos de cierta función f . Se pueden presentar los siguientes casos:

- Encontrar los valores extremos de la función $f(x)$. Es decir, los valores extremos de la función de una variable, o encontrar el valor de x para el cual f es máxima o mínima.
- Encontrar los valores extremos de la función $f(x, y, z, \dots)$ es decir, una función multivariable.
- Encontrar los valores extremos de la función $f(x, y, z, \dots)$ en los que las

variables x, y, z, \dots están sujetas a restricciones.

La particularidad de los casos anteriores es que la función f es conocida, y que lo que se quiere determinar es el valor de las variables x, y, z, \dots .

En el cálculo variacional el problema consiste en encontrar la función f para la cual una expresión, de la cual es parte dicha función, se maximiza o minimiza. La expresión generalmente es una integral y se denomina funcional. Esta es una función de funciones, tal como se observa en la expresión siguiente:

$$I = \int_a^b F(y, y', x) dx$$

Se puede ver que dentro de la integral se encuentra una función que depende de y, y', x , siendo y, y' también función de x .

A continuación se expone el desarrollo de la expresión de Euler Lagrange, el cual conlleva un proceso muy similar al que se aplica en el método de elementos finitos.

Primeramente se requiere que el valor del funcional I sea estacionario para pequeñas variaciones de la función y . Para esto se realiza el reemplazo:

$$y(x) \rightarrow y(x) + \alpha \eta(x)$$

Donde $\eta(x)$ es una función arbitraria. Para que el funcional I sea estacionario, se debe cumplir:

$$\frac{dI}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} = 0 \text{ para todo } \eta(x).$$

Se substituye $y(x)$ en el funcional:

$$I(y, \alpha) = \int_a^b F(y + \alpha \eta, y' + \alpha \eta', x) dx$$

Se desarrolla F en series de Taylor en α :

$$I(y, \alpha) = \int_a^b F(y, y', x) dx + \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} \alpha \eta + \frac{\partial F}{\partial y'} \alpha \eta' \right) dx + O(\alpha^2)$$

Aplicando el diferencial e igualando a cero se tiene:

$$\delta I = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} \eta + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta' \right) dx = 0$$

Al integrar el segundo término por partes:

$$\int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \eta' \right) dx = \eta \frac{\partial F}{\partial y'} \Big|_a^b - \int_a^b \left[\eta \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] dx$$

Si se reemplaza en la ecuación anterior, se llega a:

$$\eta \frac{\partial F}{\partial y'} \Big|_a^b + \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \eta dx = 0$$

Considerando que la función y está definida en los extremos, $\eta(x)$ se anula en a y en b , con lo cual se anula la primera expresión. En la segunda expresión, la integral debe ser cero para cualquier valor arbitrario de $\eta(x)$, se tiene por lo tanto:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right)$$

La cual se conoce como la ecuación de Euler – Lagrange. Se verá más adelante que el desarrollo del método de elementos finitos se basa en un procedimiento

análogo al expuesto anteriormente.

1.2 MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS [8]

El método de elementos finitos o FEM por sus siglas en inglés es un método numérico basado en el cálculo variacional, que se utiliza en la resolución de problemas de derivadas parciales con condiciones de borde. La determinación de la distribución de fuerzas es un problema de este tipo; al ser un problema basado en las ecuaciones de Maxwell, implica la utilización de derivadas parciales, y las condiciones de borde vienen dadas por diferentes características del vector potencial magnético en una frontera predefinida.

Un problema de derivadas parciales con condiciones de borde puede representarse mediante la ecuación (1.2).

$$L\phi = f \quad (1.2)$$

L es un operador diferencial.

ϕ es la función a ser determinada.

f es la función de excitación o fuente.

Esta ecuación está definida en un dominio Ω . Adicionalmente, se tiene como dato de entrada la condición de borde en la frontera Γ que limita al dominio.

Para dos dimensiones, el problema de valor frontera viene dado por la ecuación:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\alpha_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \beta \phi = f \quad (1.3)$$

Como se puede observar, ésta es una ecuación de derivadas parciales de segundo orden. Los valores de α_x , α_y y β son definidos por la naturaleza del problema.

1.2.1 CONDICIONES DE BORDE

En (1.2) y (1.3), el problema se considera resuelto cuando se determina la función ϕ . Para que el problema quede completamente definido, se deben dar ciertas condiciones que debe cumplir la función ϕ en determinados puntos dentro del dominio Ω . Estas condiciones se conocen como condiciones de borde o valores frontera.

Las condiciones de borde pueden ser de tres tipos:

- Condición de primer tipo o de Dirichlet

$$\phi = p \text{ en el borde } \Gamma_1 \quad (1.4)$$

- Condición de segundo tipo o de Neumann

$$\left(\alpha_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \hat{i} + \alpha_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \hat{j} \right) \cdot \hat{n} = q \text{ en el borde } \Gamma_2 \quad (1.5)$$

- Condición de tercer tipo

$$\left(\alpha_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \hat{i} + \alpha_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \hat{j} \right) \cdot \hat{n} + \gamma \phi = q \quad (1.6)$$

Los vectores \hat{i} y \hat{j} son los vectores unitarios de las coordenadas rectangulares en los ejes x y y y \hat{n} es el vector unitario en la dirección normal a Γ_2 . Nótese que la condición de Neumann es la condición del tercer tipo con $\gamma = 0$.

Para el presente estudio se ha escogido la condición de borde del primer tipo.

1.2.2. DISCONTINUIDADES

Las regiones en las que ciertos parámetros presentan cambios se conocen como discontinuidades. Este es el caso, por ejemplo, del cambio de una región en que se tiene una permeabilidad relativa de uno a una región cuya permeabilidad relativa sea mil.

En las ecuaciones anteriores, las discontinuidades se expresan por medio de cambios de valores en los coeficientes α_x y α_y . Si estos coeficientes tienen discontinuidades en una región limitada por la frontera Γ_d , se satisfacen las condiciones:

$$\phi^+ = \phi^- \text{ en } \Gamma_d \quad (1.7)$$

y

$$\left(\alpha_x^+ \frac{\partial \phi^+}{\partial x} \bar{i} + \alpha_y^+ \frac{\partial \phi^+}{\partial y} \bar{j} \right) \cdot \bar{n} = \left(\alpha_x^- \frac{\partial \phi^-}{\partial x} \bar{i} + \alpha_y^- \frac{\partial \phi^-}{\partial y} \bar{j} \right) \cdot \bar{n} \quad (1.8)$$

En la ecuación anterior, los signos “+” y “-” indican uno u otro lado de la región Ω que está dividida por el borde Γ_d .

A diferencia de las condiciones frontera, en las que el tipo de condición de borde escogida es opcional, las condiciones de (1.7) y (1.8) son necesarias y son parte de la resolución de un problema en el que se presenten discontinuidades.

1.2.3. MÉTODO DE RITZ

Se describe a continuación el método de Ritz como base para la aplicación del FEM.

El método de Ritz también es conocido como el método de Rayleigh-Ritz donde

un problema basado en ecuaciones diferenciales parciales es modificado a un equivalente en forma de una expresión variacional y cuya estructura es un funcional.

El problema de valor frontera quedó definido mediante la ecuación (1.2) conjuntamente con sus condiciones de borde – ecuaciones (1.4.) - (1.6). Adicionalmente, se define el producto interno entre dos funciones mediante la ecuación (1.9).

$$(\varphi, \psi) = \int_{\Omega} \varphi \psi \, d\Omega \quad (1.9)$$

Si además se asume que el operador L es autoadjunto definido positivo, es decir:

$$(L\varphi, \psi) = (\varphi, L\psi) \quad (1.10)$$

$$(L\varphi, \psi) \begin{cases} > 0 & \varphi \neq 0 \\ = 0 & \varphi = 0 \end{cases} \quad (1.11)$$

entonces la solución al problema original se puede determinar mediante la minimización del funcional:³

$$F(\varphi) = \frac{1}{2} (L\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}) + \frac{1}{2} (\tilde{\varphi}, f) - \frac{1}{2} (\varphi, f), \quad (1.12)$$

en la cual $\tilde{\varphi}$ denota una función aproximada a la función real.

Se supone ahora que la función $\tilde{\varphi}$ puede ser expresada mediante la expansión:

$$\tilde{\varphi} = \sum_{j=1}^N c_j v_j = \{c\}^T \{v\} = \{c\} \{v\}^T \quad (1.13)$$

v_j son las funciones de expansión utilizadas para aproximar la función de prueba

3 La determinación del funcional se muestra en el Anexo I.

a la función real y los c_j son coeficientes a ser determinados dentro del proceso de aproximación.

Si las funciones completaran la base de todo el espacio vectorial que define a la función \square , se llegaría a la forma exacta de dicha función. Ya que esto no sucede, se llegan a tener aproximaciones muy cercanas a \square . La implementación más sencilla de esta expansión corresponde a una ecuación lineal que es la que se utilizará en el modelo del transformador.

Sustituyendo (1.13) en (1.12), y aplicando la ecuación (1.9) se tiene:

$$F = \frac{1}{2} \{c\}^T \int_{\Omega} \{v\} L \{v\}^T d\Omega \{c\} - \{c\}^T \int_{\Omega} \{v\} f d\Omega \quad (1.14)$$

en la cual se ha eliminado el elemento conjugado porque, estando en un plano real, se consideran sólo variables reales.

Para encontrar el mínimo del funcional F , se deriva con respecto a cada coeficiente c_j y se iguala a cero:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial c_i} &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} v_i L \{v\}^T d\Omega \{c\} + \frac{1}{2} \{c\}^T \int_{\Omega} \{v\} L v_i d\Omega - \int_{\Omega} v_i f d\Omega \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N c_j \int_{\Omega} (v_i L v_j + v_j L v_i) d\Omega - \int_{\Omega} v_i f d\Omega \\ &= 0 \end{aligned} \quad (1.15)$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, N$$

La ecuación anterior puede ser escrita en forma matricial como:

$$[S]\{c\} = \{b\} \quad (1.16)$$

Siendo:

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (v_i L v_j + v_j L v_i) d\Omega \quad (1.17)$$

$$b_i = \int_{\Omega} v_i f d\Omega \quad (1.18)$$

Si se toma en cuenta que el operador L es autoadjunto, se tiene:

$$S_{ij} = \int_{\Omega} v_i L v_j d\Omega \quad (1.19)$$

Se ha llegado a la forma de una serie en la que se deben encontrar los coeficientes, tal como lo expresa la ecuación (1.13).

1.2.4. PROCEDIMIENTO DE APLICACIÓN DEL FEM

El FEM es prácticamente el mismo método de Ritz con la diferencia principal de que el último busca una aproximación global en todo el dominio Ω , en tanto que el FEM divide a la región en subdominios Ω_i dentro de los cuales se buscarán las funciones que se aproximen a la solución real.

De acuerdo a lo anterior, mientras mayor es la división del dominio, mayor es la cercanía de las funciones encontradas con la función real; además, las funciones de aproximación para el FEM pueden ser más simples que las funciones establecidas para el método de Ritz.

El Método de Elementos Finitos, en su forma básica, consta de los siguientes pasos:

1. Discretización del dominio
2. Selección de las funciones de interpolación
3. Formulación del sistema de ecuaciones

4. Solución del sistema de ecuaciones

La discretización consiste en dividir al dominio en subdominios ($e = 1, 2, 3, \dots, M$), siendo M el número de subdominios. Del número de subdominios depende la exactitud y el esfuerzo computacional del proceso de solución. Para problemas de dos dimensiones los subdominios pueden ser triángulos o rectángulos, en tanto que para problemas de tres dimensiones los subdominios pueden ser tetraedros o bloques.

Para las funciones de interpolación se podría escoger cualquier función arbitraria. En la práctica se escogen polinomios como las funciones base, lo cual simplifica significativamente el proceso posterior. Conforme el polinomio es de mayor grado, se tiene una mejor aproximación; sin embargo, la utilización de tales polinomios conlleva un mayor esfuerzo computacional. En el modelo desarrollado se utilizan polinomios de primer grado como funciones de aproximación.

Como resultado de los dos procesos anteriores se tiene un sistema de ecuaciones a resolver por medio de métodos convencionales.

1.2.5. VARIACIONAL PARA EL PROBLEMA DE VALOR FRONTERA DE DOS DIMENSIONES

En las ecuaciones (1.2) a (1.8) se describe en forma diferencial el problema de valor frontera para dos dimensiones. A continuación se procede a demostrar que el funcional representado en la ecuación (1.20) es la forma integral del problema de valor frontera.

$$F(\varphi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\alpha_x \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \alpha_y \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \beta \varphi^2 \right] d\Omega + \int_{\Gamma_2} \left(\frac{\gamma}{2} \varphi^2 - q \varphi \right) d\Gamma - \int_{\Omega} f \varphi d\Omega \quad (1.20)$$

Como primer paso se debe encontrar el valor extremo del funcional, para lo cual se requiere que su derivada sea cero. El diferencial de (1.20) está dado por (1.21).

$$\delta F(\varphi) = \int_{\Omega} \left[\alpha_x \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \delta \varphi}{\partial x} \right) + \alpha_y \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \delta \varphi}{\partial y} \right) + \beta \varphi \delta \varphi \right] d\Omega + \int_{\Gamma_2} (\gamma \varphi - q) \delta \varphi d\Gamma - \int_{\Omega} f \delta \varphi d\Omega \quad (1.21)$$

Por cálculo diferencial se sabe que:

$$\begin{aligned} \alpha_x \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \delta \varphi}{\partial x} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} \delta \varphi \right) - \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \right] \delta \varphi \\ \alpha_y \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \delta \varphi}{\partial y} \right) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\alpha_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} \delta \varphi \right) - \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\alpha_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \right] \delta \varphi \end{aligned} \quad (1.22)$$

El teorema de la divergencia para dos dimensiones viene dado por:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) d\Omega = \int_{\Gamma} (U \hat{i} + V \hat{j}) \cdot \hat{n} d\Gamma \quad (1.23)$$

Reemplazando (1.22) y (1.23) en (1.21) se tiene:

$$\begin{aligned} \delta F(\varphi) &= \int_{\Omega} \left[- \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\alpha_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \beta \varphi - f \right] \delta \varphi d\Omega \\ &+ \int_{\Gamma} \left[\left(\alpha_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} \hat{i} + \alpha_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} \hat{j} \right) \cdot \hat{n} \right] \delta \varphi d\Gamma + \int_{\Gamma_2} (\gamma \varphi - q) \delta \varphi d\Gamma \end{aligned} \quad (1.24)$$

Si se asume que no existen discontinuidades en la región Γ_1 , la diferencial $\delta \varphi$ se anulará en dicha región. En la ecuación anterior esto influye en la forma de la segunda integral, la cual se reduce a los valores de la región Γ_2 . Por lo tanto

(1.24) toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \delta F(\phi) = & \int_{\Omega} \left[-\frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\alpha_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \beta \phi - f \right] \delta \phi \, d\Omega \\ & + \int_{\Gamma} \left[\left(\alpha_x \frac{\partial \phi}{\partial x} i + \alpha_y \frac{\partial \phi}{\partial y} j \right) \cdot \bar{n} + \gamma \phi - q \right] \delta \phi \, d\Gamma \end{aligned} \quad (1.25)$$

Aplicando la restricción, establecida por el cálculo variacional, de que la diferencial de F debe ser cero en su punto extremo, se tiene:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[-\frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\alpha_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \beta \phi - f \right] \delta \phi \, d\Omega \\ + \int_{\Gamma} \left[\left(\alpha_x \frac{\partial \phi}{\partial x} i + \alpha_y \frac{\partial \phi}{\partial y} j \right) \cdot \bar{n} + \gamma \phi - q \right] \delta \phi \, d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (1.26)$$

Para que la ecuación anterior se anule, tomando en cuenta que ϕ es una función arbitraria, los integrandos de cada una de las integrales deben ser cero.

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\alpha_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \beta \phi - f = 0 \quad (1.27)$$

$$\left(\alpha_x \frac{\partial \phi}{\partial x} i + \alpha_y \frac{\partial \phi}{\partial y} j \right) \cdot \bar{n} + \gamma \phi - q = 0 \quad (1.28)$$

Se puede observar que las expresiones anteriores son las que se plantearon como descripción del problema de valor frontera para dos dimensiones. Nótese que (1.28) corresponde a la condición de borde del tercer tipo, es decir, ésta es una condición natural, ya que es parte de la formulación del problema.

1.2.6. INTERPOLACIÓN

Debido a que se utilizan triángulos para la discretización, se generan tres ecuaciones con tres incógnitas correspondientes a los tres vértices de cada elemento. De esta manera, la función de aproximación es de naturaleza lineal, tal como se muestra en (1.29), en la cual el superíndice e denota cada elemento para el que se formula la aproximación lineal.

$$\square^e(x, y) = a^e + b^e x + c^e y \quad (1.29)$$

Como el objetivo es determinar el valor de \square para los vértices de cada elemento, se tendrán tres ecuaciones correspondientes a los vértices 1, 2 y 3.

$$\begin{aligned} \square_1^e &= a^e + b^e x_1^e + c^e y_1^e \\ \square_2^e &= a^e + b^e x_2^e + c^e y_2^e \\ \square_3^e &= a^e + b^e x_3^e + c^e y_3^e \end{aligned} \quad (1.30)$$

Los x_i y y_i corresponden a las coordenadas de cada vértice en cuestión.

Si se resuelven los coeficientes a , b y c en función de cada \square_j y se reemplaza en (1.29), se tiene:

$$\square^e(x, y) = \sum_{j=1}^3 N_j^e(x, y) \square_j^e \quad (1.31)$$

Siendo:

$$N_j^e(x, y) = \frac{1}{2\Delta^e} (a_j^e + b_j^e x + c_j^e y) ; \quad (1.32)$$

$$\begin{aligned} a_1^e &= x_2^e y_3^e - y_2^e x_3^e & b_1^e &= y_2^e - y_3^e & c_1^e &= x_3^e - x_2^e \\ a_2^e &= x_3^e y_1^e - y_3^e x_1^e & b_2^e &= y_3^e - y_1^e & c_2^e &= x_1^e - x_3^e \\ a_3^e &= x_1^e y_2^e - y_1^e x_2^e & b_3^e &= y_1^e - y_2^e & c_3^e &= x_2^e - x_1^e \end{aligned} \quad (1.33)$$

y

$$\Delta^e = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & x_1^e & y_1^e \\ 1 & x_2^e & y_2^e \\ 1 & x_3^e & y_3^e \end{bmatrix} = \frac{1}{2} (b_1^e c_2^e - b_2^e c_1^e) \quad (1.34)$$

La última expresión representa el área del elemento triangular e . Cabe notar que φ^e es el valor del campo vectorial en el área limitada por el elemento triangular e dentro de la cual se considera que dicho campo es constante.

A continuación se aplicará el FEM para la resolución de este problema, considerando una aproximación lineal en cada elemento e . El funcional para este problema es:

$$F(\varphi) = \sum_{e=1}^M F^e(\varphi^e) \quad (1.35)$$

En esta ecuación se puede notar la diferencia entre el FEM y el método de Ritz. Primeramente, se tienen M elementos (triángulos) en los que ha sido dividida la superficie en la cual se va a determinar el campo vectorial φ . En segundo lugar, el funcional F es la expresión resultado de una sumatoria de subfuncionales F^e . Estos subfuncionales vienen dados por la expresión:

$$F^e(\varphi^e) = \frac{1}{2} \int_{\Omega^e} \left[\alpha_x \left(\frac{\partial \varphi^e}{\partial x} \right)^2 + \alpha_y \left(\frac{\partial \varphi^e}{\partial y} \right)^2 + \beta (\varphi^e)^2 \right] d\Omega - \int_{\Omega^e} f \varphi^e d\Omega \quad (1.36)$$

En donde Ω^e es el dominio del elemento e – ésimo. Si se reemplaza en esta expresión la ecuación (1.31) y se deriva con respecto a φ_i^e , se tiene:

$$\frac{\partial F^e}{\partial \varphi_i^e} = \sum_{j=1}^3 \int_{\Omega^e} \left(\alpha_x \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial N_j^e}{\partial x} + \alpha_y \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial N_j^e}{\partial y} + \beta N_i^e N_j^e \right) d\Omega - \int_{\Omega^e} f N_i^e d\Omega \quad (1.37)$$

Lo cual en forma matricial puede ser escrito como:

$$\left\{ \frac{\partial F^e}{\partial \square^e} \right\} = [K^e] \{ \square^e \} - \{ b^e \} \quad (1.38)$$

Los elementos de la matriz $[K_{ij}^e]$ vienen dados por:

$$K_{ij}^e = \int_{\Omega^e} \left(\alpha_x \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial N_j^e}{\partial x} + \alpha_y \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial N_j^e}{\partial y} + \beta N_i^e N_j^e \right) dx dy \quad (1.39)$$

Y los elementos del vector $\{b^e\}$ son:

$$b_i^e = \int_{\Omega^e} f N_i^e dx dy \quad (1.40)$$

Si se asume que los parámetros α_x, α_y y β , además de la función de excitación f son constantes dentro de cada elemento, se llega a las siguientes ecuaciones:

$$K_{ij}^e = \frac{1}{4\Delta^e} (\alpha_x^e b_i^e b_j^e + \alpha_y^e c_i^e c_j^e) + \frac{\Delta^e}{12} \beta^e (1 + \delta_{ij}) \quad (1.41)$$

$$b_i^e = \frac{\Delta^e}{3} f^e \quad (1.42)$$

Se han desarrollado las ecuaciones anteriores para cada elemento. Se toma ahora el conjunto en su forma global y se llegan a obtener las matrices ensambladas y a la ecuación (1.43), que cumple con la condición de maximización del variacional, es decir que la derivada del funcional sea cero.

$$[K] \{ \square \} = \{ b \} \quad (1.43)$$

donde cada matriz y vector ensamblados vienen dados por la relación:

$$[K] = \sum_{c=1}^M [\bar{K}^c] \quad (1.44)$$

$$\{b\} = \sum_{c=1}^M \{\bar{b}^c\} \quad (1.45)$$

En este problema no se utilizará la condición límite del tercer tipo, sino únicamente la condición de borde de Dirichlet, debido a que es la de más fácil aplicación al modelo del transformador.

Para imponer la condición de Dirichlet en la región Γ_1 en un nodo n que se supone pertenece a dicha región, se siguen las siguientes ecuaciones:

$$K_{mm} = 1 \quad (1.46)$$

$$K_{nj} = 0 \quad (1.47)$$

$$b_n = p_n \quad (1.48)$$

De esta manera, se encontrará la función incógnita \square al despejarla de la ecuación (1.43) luego de haber impuesto las condiciones dadas por las ecuaciones (1.46) a (1.48).

1.3. APLICACIÓN DEL FEM AL MODELO DEL TRANSFORMADOR

El desarrollo del modelo del transformador consiste en encontrar una ecuación que describa los campos electromagnéticos que permiten su funcionamiento, a la vez que se ajuste a la ecuación (1.3) de tal manera que se pueda aplicar el FEM.

El comportamiento de los campos electromagnéticos, tal como lo ha demostrado la experimentación y la práctica, se describe mediante las ecuaciones de Maxwell

(1.49) y (1.50).

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0} \quad (1.49)$$

$$\nabla \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{J} \quad (1.50)$$

\vec{E} es el vector intensidad de campo eléctrico.

\vec{D} es la densidad de flujo eléctrico.

\vec{H} es la intensidad de campo magnético.

\vec{B} es la inducción magnética o densidad de flujo magnético.

\vec{J} es la densidad de corriente.

Para la resolución de los campos electromagnéticos se necesitan las dos ecuaciones adicionales (1.51), las cuales consideran el efecto del material cuando éste es isotrópico y homogéneo, tal como se considera en el modelo del transformador desarrollado en este estudio.

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \epsilon \vec{E} \\ \vec{B} &= \mu \vec{H} \end{aligned} \quad (1.51)$$

ϵ es la permitividad.

μ es la permeabilidad.

Para determinar la densidad de flujo \vec{B} y, por lo tanto, las fuerzas electromecánicas, se considera el caso cuasiestático en el cual, si bien las variables son función del tiempo, se establece un punto temporal en el cual se pueden tomar los campos electromagnéticos como constantes.

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \quad (1.52)$$

En (1.52) se reemplaza (1.51) y se tiene:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu \vec{J} \quad (1.53)$$

Se aplica la divergencia a (1.49) y se llega a la relación:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.54)$$

Según el cálculo vectorial, la divergencia de un rotacional es cero. Esto sugiere que la inducción magnética \vec{B} en (1.54) es el rotacional de otro vector al cual se lo conoce como vector potencial magnético \vec{A} .

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (1.55)$$

Sin embargo, no se puede establecer una solución única para el vector potencial, debido a que (1.54) y (1.55) también se cumplen si:

$$\vec{A} = \vec{A}_o + \nabla f \quad (1.56)$$

En la que tanto f como \vec{A}_o son cualquier función arbitraria escalar y vectorial respectivamente. Para determinar una solución particular de este problema, se establece una condición que debe cumplir el vector potencial magnético, la cual se conoce como "condición de Gauge" (1.57) [3].

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0 \quad (1.57)$$

Por lo tanto, si se reemplaza (1.55) en (1.53), se tiene:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \mu \vec{J} \quad (1.58)$$

En cálculo vectorial se cumple la propiedad:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (1.59)$$

Debido a la condición de Gauge, se tiene:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = -\nabla^2 \mathbf{A} \quad (1.60)$$

La expresión de la derecha, en coordenadas rectangulares, se conoce como el *Laplaciano* del vector potencial ∇^2 . La ecuación (1.58) queda:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J} \quad (1.61)$$

Para el modelo empleado en este trabajo, se utilizan coordenadas rectangulares. La geometría del transformador se ubica en el plano xy y la corriente se encontrará en la dirección del eje z. De esta manera, la ecuación de Poisson, en coordenadas rectangulares será:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu_r} \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu_r} \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) = \mu_o J_z \quad (1.62)$$

μ_r es la permeabilidad relativa y μ_o es la permeabilidad del vacío ($4\pi \cdot 10^{-7} \text{ F/m}$).

Al asumir que la dirección del vector densidad de corriente está dirigido sólo en el eje z, se puede deducir de la ecuación (1.61) que el vector potencial magnético tendrá solamente una componente en el eje z. Adicionalmente, se puede observar que se ha modificado un poco la ecuación de Poisson al haber dividido la permeabilidad en su parte relativa y la correspondiente al vacío.

En cuanto a las condiciones de borde, se sabe que los campos magnéticos cumplen con las relaciones:

$$A_z^+ = A_z^- \quad (1.63)$$

para el eje z, en tanto que para los ejes x y y se tiene:

$$\frac{1}{\mu_r^+} \frac{\partial A_z^+}{\partial n} = \frac{1}{\mu_r^-} \frac{\partial A_z^-}{\partial n} \quad (1.64)$$

De esta manera, este problema del transformador, o cualquier problema magnetostático puede ser resuelto mediante el FEM, ecuación (1.28), si se asume que:

$$\alpha_x = \alpha_y = \frac{1}{\mu_r} \quad \square = A_z \quad f = \mu_o J_z \quad (1.65)$$

Una vez determinado el vector potencial, se puede encontrar la inducción magnética mediante la ecuación (1.66), la cual en elementos triangulares se resuelve tal como se indica en (1.67).

$$\vec{B} = \nabla \times (A_z \vec{k}) \quad (1.66)$$

$$\vec{B}^e = \frac{1}{2\Delta^e} \sum_{j=1}^3 (c_j^e \vec{i} - b_j^e \vec{j}) \square_j^e \quad (1.67)$$

Finalmente, se puede determinar la densidad de fuerza mediante (1.68).

$$\vec{f} = \vec{J} \times \vec{B} \quad (1.68)$$

1.4. IMPLEMENTACIÓN DEL MODELO EN UN PROGRAMA COMPUTACIONAL

El proceso del FEM y del modelo del transformador han sido implementados en MATLAB mediante la función Mag_Trafo. A continuación se describen las partes esenciales del programa, cuya utilización se describe en el Anexo 2.

Los datos de ingreso requeridos son:

- Geometría de la parte interna del transformador,
- Curva de saturación del núcleo,
- Permeabilidad de cada región dentro de la parte interna del transformador, y
- Densidad de corriente.

El algoritmo implementado en el programa es el siguiente:

1. Ingreso de datos de geometría, permeabilidad y densidad de corriente.
2. Ingreso de datos de la curva de saturación.
3. Discretización.
4. Especificación de puntos que pertenecen a la frontera Γ_1 .
5. Determinación de coeficientes b y c de (1.29), mediante las ecuaciones (1.33).
6. Cálculo del área de cada elemento triangular con (1.34).
7. Determinación de las matrices K^e de (1.38) para cada elemento mediante la ecuación (1.41). Para el modelo del transformador, $\beta = 0$.
8. Determinación de b^e de (1.38) para cada elemento con la ecuación (1.42).
9. Ensamblaje de las matrices K^e y de los vectores b^e mediante las ecuaciones (1.44) y (1.45).
10. Incorporación de condiciones de contorno, ecuaciones (1.46) a (1.48).
11. Determinación del vector potencial, despejando de ecuación (1.43).
12. Cálculo de la inducción magnética, ecuación (1.67).
13. Verificación de punto de trabajo en curva de saturación.
14. Cálculo de la fuerza electromecánica, ecuación (1.68).
15. Gráfico de los resultados

Se exponen a continuación aquellos pasos que merecen una explicación más detallada.

1.4.1. DISCRETIZACIÓN

Para el caso de dos dimensiones, la forma más sencilla de discretización es mediante la división del área en triángulos. Ningún vértice puede estar en el interior de la subárea formada por el triángulo vecino. Mientras mayor es el número de divisiones, mayor es la exactitud del problema, pero existe un aumento en el esfuerzo computacional.

Para proceder con la discretización, es necesario tener la siguiente información:

1. Las coordenadas de los nodos de los elementos.
2. Los valores de α_x , α_y , β y f para cada elemento
3. Los valores de p para los nodos que se encuentran en la frontera Γ_1

En el programa desarrollado las coordenadas de los nodos se crean automáticamente a partir de los rectángulos que conforman la geometría interna del transformador.

El proceso de discretización se realiza mediante el método de triangulación Delaunay. Este método consiste en la formación de triángulos de tal manera que ninguno de los vértices no comunes a dos triángulos adyacentes se encuentre en el interior de las circunferencias circunscritas correspondientes a cada triángulo. Con este método se asegura que los ángulos de cada triángulo sean lo menos agudos posible. Esto se explica de mejor manera en la Figura 1.1, en la que se lleva a cabo la triangulación de cuatro puntos. En la primera triangulación no se aplica el método de Delaunay, los puntos 2 y 3 están dentro de las circunferencias circunscritas y se tienen ángulos muy agudos como el $\angle 214$. En la segunda triangulación se aplica el método de Delaunay, no se tienen puntos inmersos en ninguna circunferencia circunscrita y los ángulos son menos agudos. Por principio, mientras menos agudos son los ángulos, más exacto es el resultado del FEM [8].

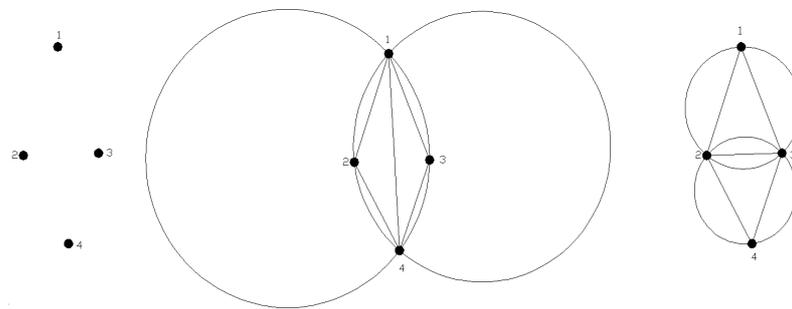
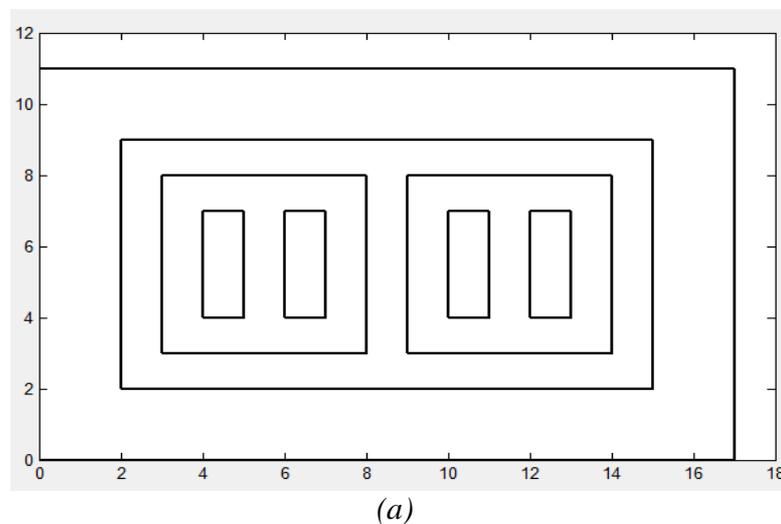


Fig. 1.1.- Triangulación para cuatro puntos.

Un ejemplo de la discretización para un transformador en particular se presenta en la Figura 1.2.

1.4.2. CONDICIONES DE BORDE

Para el modelo del transformador se aplica la condición de borde de Dirichlet. Para esto, se escoge un perímetro alrededor del transformador para el cual el valor del vector potencial es cero. Este constituirá la referencia para el cálculo del vector potencial en toda la región del problema formulado.



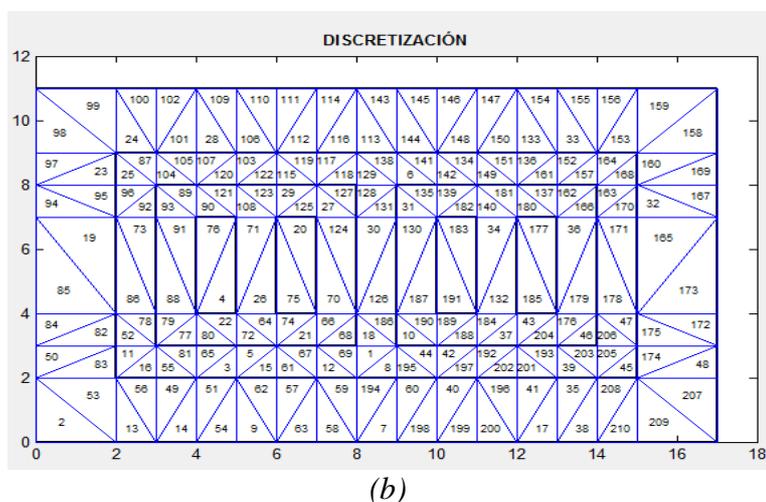


Fig. 1.2.- Ejemplo de discretización.

(a) Geometría del Transformador. (b) Discretización.

1.4.3. CURVA DE SATURACIÓN

Si no se tiene una curva de saturación con la que se deba ajustar la solución, el valor de la permeabilidad con la que se resuelve el problema es arbitrario. Por esta razón, se requiere de un proceso iterativo en el cual, en cada paso, se compruebe si el valor de la inducción magnética encontrada corresponde a la permeabilidad con la que se inició el cálculo.

El núcleo del transformador está conformado de hierro, el cual tiene un comportamiento no lineal de la relación entre la inducción magnética B y la intensidad de campo magnético H . Recuérdese que en caso de que el medio sea isotrópico, la ecuación que presenta la relación entre ambas magnitudes es la (1.51). Debido a la no linealidad, la permeabilidad magnética no es constante, sino que es función del valor de H en el cual el núcleo esté trabajando y, para el caso de un transformador, esto depende de las condiciones de trabajo a las cuales esté sometido.

El modelo desarrollado utiliza el proceso iterativo que se indica en el flujograma

de la Figura 1.3. Para mostrar dicho proceso, en la Tabla 1.1 se muestran los valores de cada iteración para un ejemplo simulado dentro del programa. El ejemplo corresponde a un transformador de 100 MVA con dos devanados de 230 kV y 138 kV. El devanado de baja tensión está sin carga y en alta tensión se tiene una corriente aproximadamente del 10% de la nominal, lo cual implica una densidad de corriente de 0,3 A/mm².

El valor inicial que se ha escogido para la saturación es el de una permeabilidad relativa de 1000. Con este valor, la inducción magnética es mayor a la densidad máxima de la curva de saturación que se ha ingresado en el programa, tal como se puede constatar en la Figura 1.4. En este caso, el programa reduce la permeabilidad a la mitad, es decir a 500. Se continua con el mismo proceso hasta que B sea menor que su valor máximo; para el ejemplo, el valor máximo de la inducción magnética es de 2.35 T.

Una vez que se ha alcanzado un valor aceptable de inducción magnética, se observa cuál es la tendencia del valor de la permeabilidad. Por ejemplo, para una permeabilidad relativa inicial de 484,8806, el valor de B corresponde a una permeabilidad de 658,5386, es decir, mayor que la inicial. En este caso el programa obtiene la media entre el valor máximo almacenado (ej. 500) y el valor actual (ej. 484,8806). El valor actual queda almacenado como mínimo.

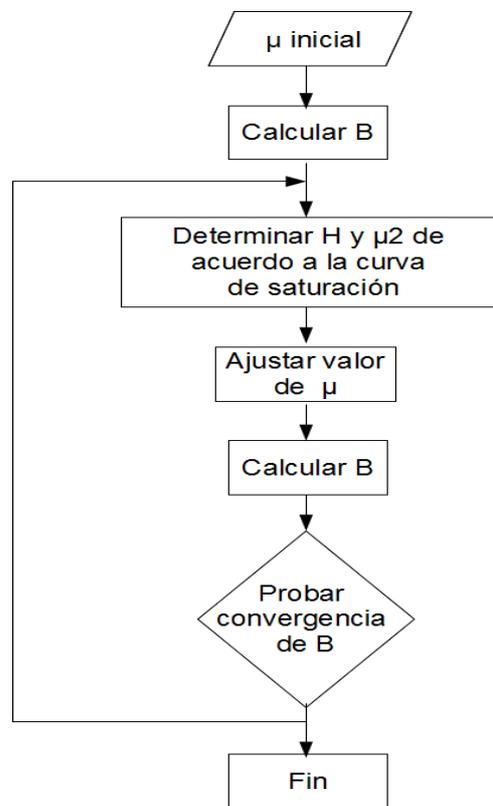


Fig. 1.3.- Flujograma para la dterminación de la inducción magnética de acuerdo a la curva de saturación

Tabla 1.1

Datos del proceso iterativo para la simulación de un transformador de 100 MVA, 230/138 kV

mu	B	mu2	error
1000	3.1073	---	---
500	1.5534	469.7612	1.5539
484.8806	1.5064	658.5386	0.0470
492.4403	1.5299	551.3325	0.0235
496.2202	1.5416	507.6207	0.0117
498.1101	1.5475	488.1075	0.0059

El proceso continúa hasta que se alcanza una tolerancia en el valor de la inducción magnética. Para el ejemplo la tolerancia es de 0,01, con lo que se llega a una inducción magnética de 498,11 T.

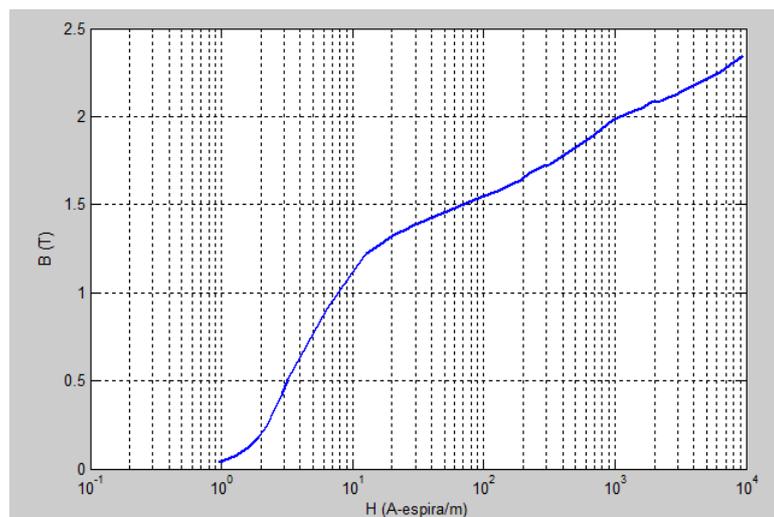


Fig. 1.4.- Curva de saturación ingresada para las aplicaciones del modelo del transformador [13]

1.5. COMPROBACIÓN DEL MODELO

La comprobación del modelo se realizará mediante dos casos:

- Determinación de la curva de saturación
- Comparación con resultados obtenidos mediante diferentes métodos
-

1.5.1. PRUEBA DE LA CURVA DE SATURACIÓN

La primera comprobación cualitativa se la realiza mediante el dibujo de la curva

de saturación. Para esto se energiza el devanado primario con el secundario en circuito abierto, es decir sin carga. Se toman valores de densidad de corriente y densidad de flujo para cada caso y con estos datos se dibuja la curva de saturación, es decir se realiza una simulación de recopilación de datos del transformador trabajando en circuito abierto. El resultado se muestra en la Tabla 1.2 y Figura 1.5.

Se observa que la forma de la curva de saturación es semejante a la que se tiene ingresada. Si bien en esta simulación no se ha comprobado el comportamiento del modelo en cuanto a fuerzas electromecánicas, se observa que el algoritmo para tomar en cuenta la no linealidad del núcleo es correcto.

1.5.2. COMPARACIÓN DE LOS RESULTADOS DE LAS SIMULACIONES PARA INDUCCIÓN MAGNÉTICA Y FUERZAS ELECTROMECAÑICAS

Existen diferentes métodos y ecuaciones que sirven para determinar tanto la inducción magnética y las fuerzas electromecánicas en función de las características físicas y operativas del transformador. Los resultados de las simulaciones en las que se utiliza el programa Mag_Trafo deben ser similares a las que se tienen con dichos métodos. No van a ser exactos debido a que las ecuaciones se basan en simplificaciones que permiten tener una formulación sencilla del problema.

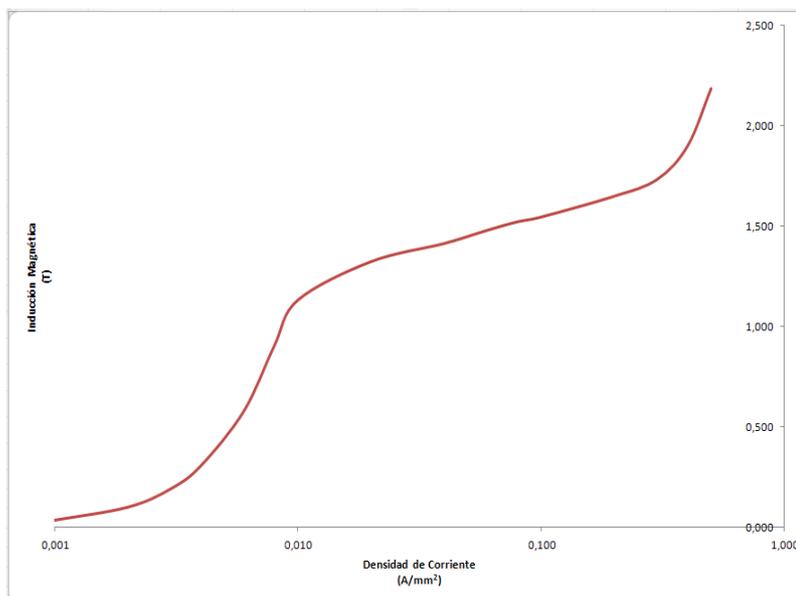


Fig. 1.5.- Inducción Magnética en función de la Densidad de Corriente obtenida mediante simulación

Tabla 1.2

Resultados de simulación con el transformador de 100 MVA energizado sólo en devanado primario para determinar la curva de saturación

Densidad de Corriente (A/mm ²)	Inducción Magnética (T)
0,001	0,035
0,002	0,100
0,003	0,191
0,004	0,307
0,006	0,578
0,008	0,903
0,010	1,131
0,020	1,324
0,040	1,414
0,060	1,480
0,080	1,522
0,100	1,546

0,200	1,650
0,300	1,733
0,400	1,899
0,500	2,186

1.5.2.1. Inducción Magnética

Para comprobar el cálculo de la inducción magnética a través del modelo, se compara el resultado con la aproximación de circuitos magnéticos. Para esto, se realiza el análisis del campo magnético del circuito de la Figura 1.6.

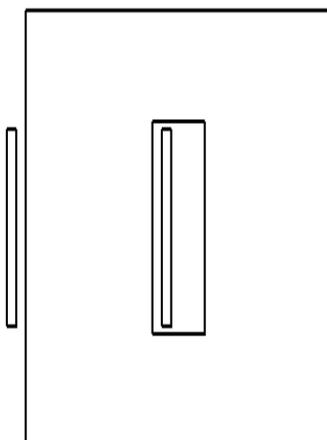


Fig. 1.6.- Bobinado para el cálculo de la inducción magnética

Las dimensiones del bobinado son:

ancho del devanado:	40,2 mm
altura del devanado:	1 000 mm
radio de la columna del núcleo:	564 mm

base del núcleo	1 358,2 mm
Altura del núcleo	2 208 mm
Ancho de la ventana del núcleo	230,2 mm
Alto de la ventana del núcleo	1080 mm
Separación interior devanado – núcleo	40 mm
Separación superior devanado – núcleo	40 mm
Separación exterior devanado – núcleo	150 mm

La bobina consta de 480 espiras y la corriente de excitación es de 25,1 A, lo cual resulta en una fuerza magnetomotriz de:

$$480 \text{ espiras} \cdot 25,1 \text{ A} = 1,20 \cdot 10^4 \text{ A espira}$$

La densidad de corriente es de 0,3 A/mm². La curva de saturación para esta aplicación es la misma que se muestra en la Figura 1.4.

Se realiza un proceso iterativo similar al de la sección 1.4.3, en el cual se establece que en la solución final, la inducción magnética corresponde a la permeabilidad relativa indicada por la curva de saturación. El valor final de permeabilidad relativa para este ejemplo es de 708. La reluctancia correspondiente a esta permeabilidad es:

$$\square = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{l}{A}$$

$$\square = \frac{1}{708 \cdot \mu_o} \cdot \frac{7,13 \text{ m}}{1 \text{ m}^2} = 8,02 \cdot 10^3 \frac{\text{A espira}}{\text{Wb}}$$

El valor de flujo es:

$$\square = \frac{fmm}{\square}$$

$$\Phi = \frac{1,20 \times 10^4 \text{ A espira}}{8,02 \frac{\text{A espira}}{\text{Wb}}} = 1,5 \text{ Wb}$$

La sección del núcleo es de 1 m^2 , con lo cual la inducción magnética es de $1,5 \text{ T}$.

En la Figura 1.7 se muestra que la inducción magnética obtenida con la simulación es 1.543 T , lo cual corresponde al valor encontrado en la Sección 1.4.3 y está cerca del valor determinado por la aproximación de circuito magnético.

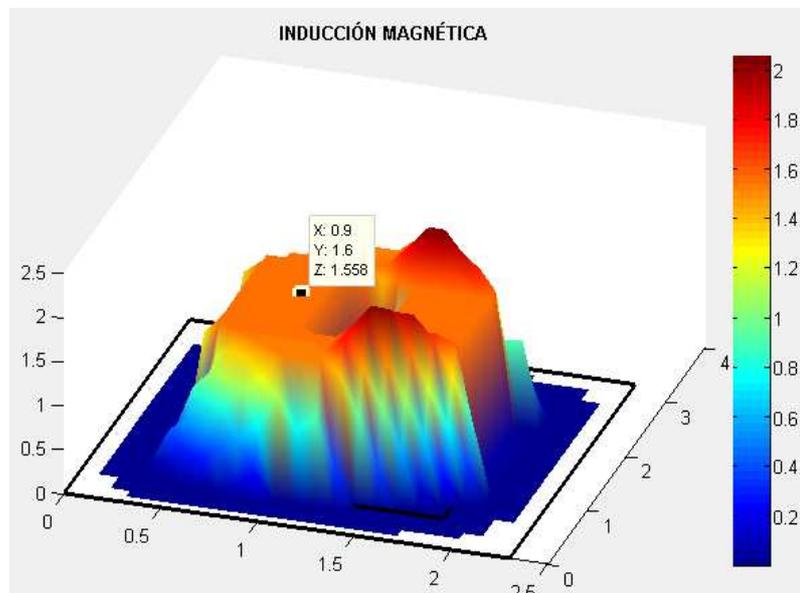


Fig. 1.7.- Inducción magnética para la simulación del transformador de la Figura 1.6

1.5.2.2. Fuerza electromecánica

Para la comprobación del programa mediante el cálculo de la fuerza, se empleará la ecuación (1.70), la misma que da la fuerza total axial [1].

$$F_{ax} = \frac{510 \times S_l \times R^2}{f \times H_w} \quad (1.69)$$

S_i es la potencia nominal por columna del núcleo en kVA, r es la relación entre la corriente de cortocircuito y la corriente nominal, f es la frecuencia en Hz y H_w es la altura del devanado en mm. Se muestra en la Tabla 1.3 la comparación entre los resultados de (1.69) con los que se obtienen del programa Mag_Trafo.

Se puede observar que los resultados son similares y que conforme se acercan a corrientes de falla, se tiene una mejor aproximación. Esto se debe a que la Ecuación (1.69), al no ser exacta por no tomar en cuenta las variaciones del campo magnético en los extremos de los devanados, ha sido deducida de tal forma que su utilización sea mejor para el caso de corrientes de falla.

Tabla 1.3
Valores de la fuerza axial mediante la
ecuación (1.70) y Mag_Trafo (kN)

r	Ecuación (1.70)	Mag_Trafo
1	195,4	224,7
2	781,6	828,2
5	4.885	4.943
8	12.510	12.570
10	19.540	19.640

Un procedimiento similar se aplica a la fuerza radial. En este caso se aplica la ecuación (1.70).

$$F_{rad} = \frac{510 S_i r^2}{f \left(d + \frac{a_1 + a_2}{3} \right)} \quad (1.70)$$

d es la separación entre devanados y a_1 , a_2 corresponden al ancho de cada devanado. En la Tabla 1.4 se puede observar la comparación entre los resultados de (1.70) y los de Mag_Trafo.

De igual manera que en los casos anteriores, se ha comprobado la validez del programa con la comparación con ecuaciones establecidas en la literatura técnica existente.

Cabe recalcar que las ecuaciones utilizadas como comprobación son ecuaciones en las que se han realizado algunas aproximaciones. La más importante es el hecho de que el largo del devanado debe ser mayor a diez veces el ancho del mismo. En Mag_Trafo no existen tales restricciones y sólo se han tomado en cuenta en este ejercicio para comprobar la validez del programa.

Tabla 1.4
Valores de fuerza radial mediante la
ecuación (1.71) y Mag_Trafo (kN)

r	Ecuación (1.71)	Mag_Trafo
1	943,1	1.001
2	3.772	3.910
5	23.580	24.060
8	60.360	61.310
10	94.310	95.584

CAPÍTULO 2

RESULTADOS Y EVALUACIONES PARA DIFERENTES CASOS DE DISEÑO

En el presente capítulo se va a aplicar el modelo desarrollado a diferentes casos de configuraciones de transformador y se van a obtener conclusiones acerca de su comportamiento, tanto en lo que se refiere a campo magnético como a las fuerzas electromecánicas.

2.1. CONFIGURACIÓN DEL NÚCLEO

Se analiza la dependencia el valor del campo magnético y de las fuerzas electromecánicas del diseño interno del núcleo del transformador.

2.1.1. DEVANADOS EN DOS COLUMNAS

Los devanados distribuidos en dos columnas se utilizan generalmente en transformadores de distribución [29]. En la Figura 2.1 se puede observar el esquema de la geometría interna en este tipo de transformadores.

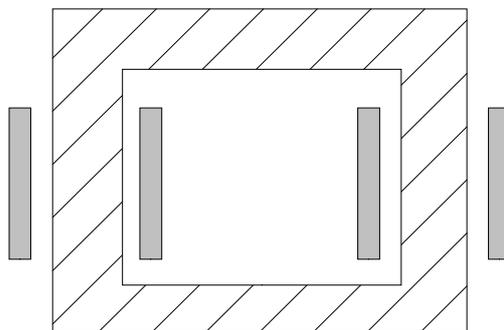


Fig. 2.1.- Transformador monofásico de dos columnas

Para el análisis, se considera un transformador con las siguientes características:

Potencia:	100 MVA
Voltaje:	138/69 kV
Frecuencia:	60 Hz
Diámetro del núcleo:	601 mm
Ancho de la ventana del núcleo:	444 mm
Alto de la ventana del núcleo:	575 mm
Ancho del devanado:	167 mm
Longitud del devanado:	500 mm
Separación del núcleo al devanado:	11 mm

En primer lugar se desarrolla un análisis del comportamiento del campo magnético. El transformador ha sido diseñado de tal manera que su punto de funcionamiento esté alrededor de los 1,6 T de inducción magnética, lo cual es muy cercano al comportamiento de los materiales que existen en la práctica. La curva de saturación implementada en la simulación se indica en la Figura 2.2.

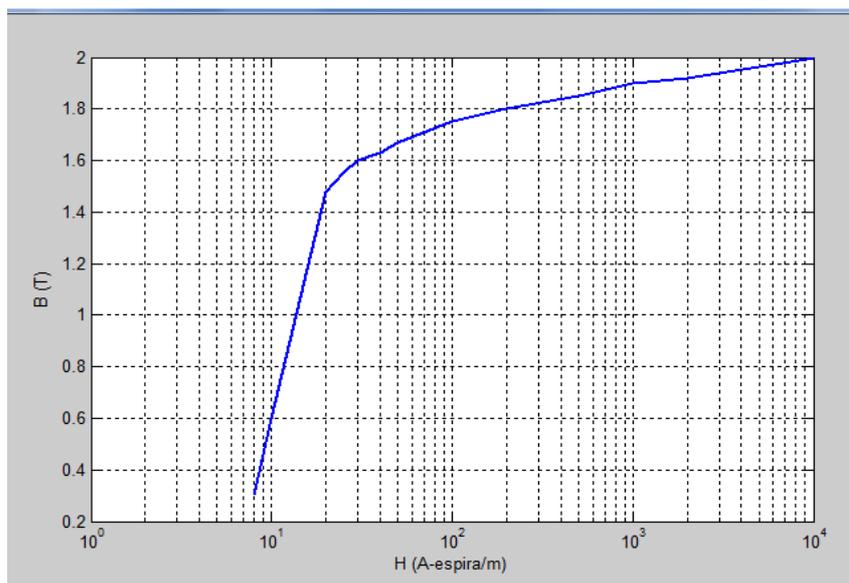
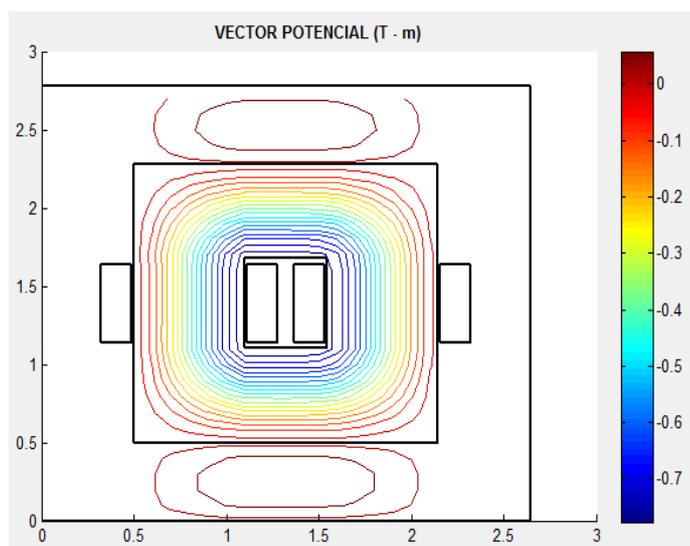
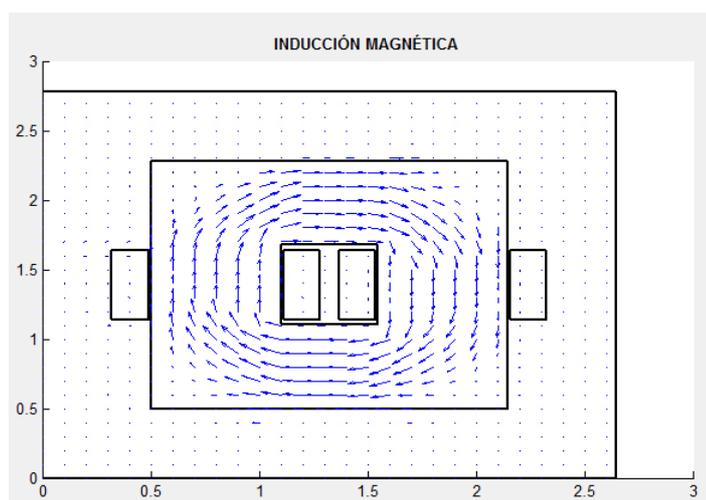


Fig. 2.2.- Curva de saturación implementada
en los casos demostrativos [30]

Se realiza una simulación del campo magnético cuando el transformador está trabajando sin carga. Para esto, se hace circular una densidad de corriente de 0,3 A/mm² por el primario del transformador. El comportamiento de la inducción magnética se puede deducir de los gráficos del equipotencial del vector potencial y de la dirección de la inducción en la Figura 2.3.



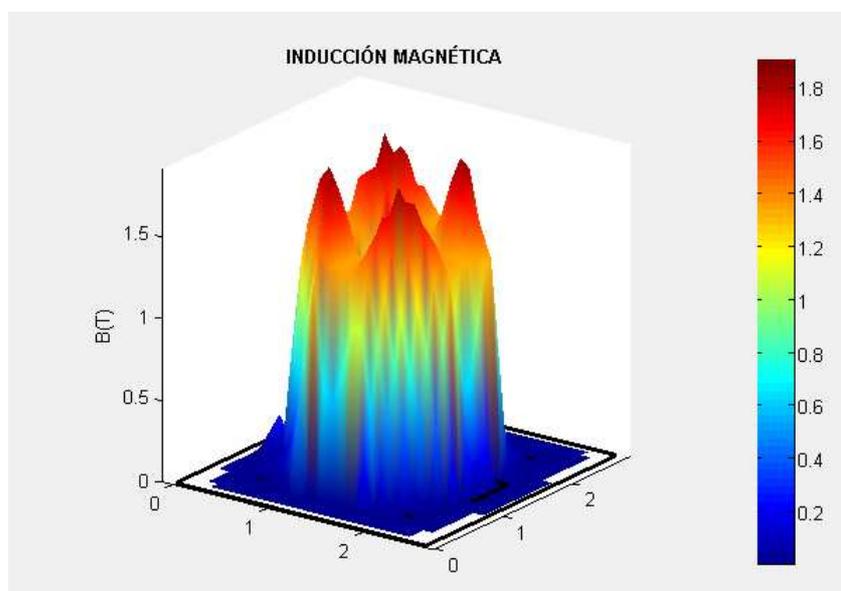
(a)



(b)

Fig. 2.3 Flujo magnético con transformador sin carga
 (a) Vector potencial (b) Dirección de la inducción magnética

Se puede observar que el flujo de dispersión es despreciable frente al flujo que circula por el circuito magnético. La inducción magnética se muestra en la Figura 2.4. Su valor promedio a lo largo del circuito es de 1,8 T con lo cual se puede concluir que la corriente inyectada corresponde a la corriente de excitación.



*Fig. 2.4. Distribución de la inducción magnética
para el transformador sin carga*

A continuación se realiza la simulación del transformador sometido a carga nominal. Las curvas equipotenciales se muestran en la Figura 2.5. Se puede observar la existencia de un flujo de dispersión alrededor de los devanados, el mismo que no existía cuando el transformador trabajaba sin carga. Esto sucede porque al existir carga en el secundario del transformador, se presenta una fuerza magnetomotriz que se opone al flujo creado por la corriente en el devanado primario y hace que el flujo busque un camino diferente, es decir, se crea un flujo de dispersión.

Finalmente, se aplica una corriente equivalente a diez veces la corriente nominal. Se puede observar en la Figura 2.6 que el flujo de dispersión ha aumentado considerablemente. Esto concuerda con la experiencia, según la cual, conforme aumenta la corriente que circula por el transformador se desprecia el efecto de la impedancia de magnetización y toma más importancia el efecto de las impedancias de dispersión.

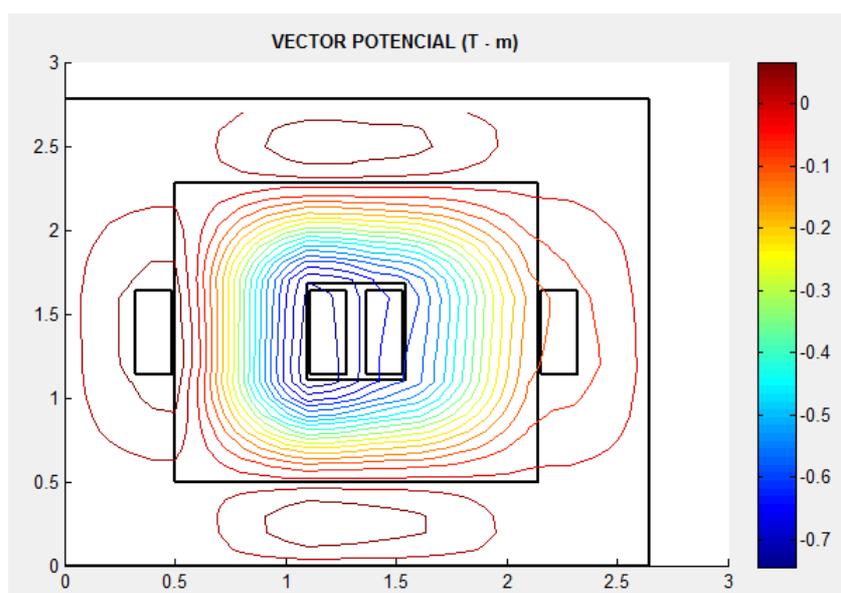


Fig. 2.5.- Curvas equipotenciales para el

transformador con carga nominal

La dirección y magnitud de la inducción magnética se muestran en la Figura 2.7. En (a) se confirma la existencia de un flujo de dispersión, el cual circula tanto entre los devanados como en el exterior de los mismos. En (b) se puede observar la concentración de flujo magnético en el espacio entre devanados; el flujo en el núcleo prácticamente se ha anulado, a excepción de los puntos en los que se concentra la fuerza magnetomotriz tanto del devanado primario como del devanado secundario.

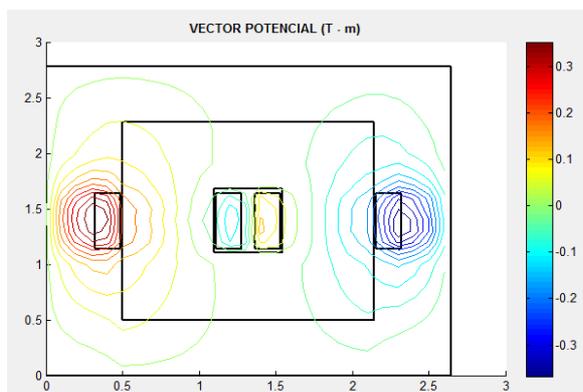
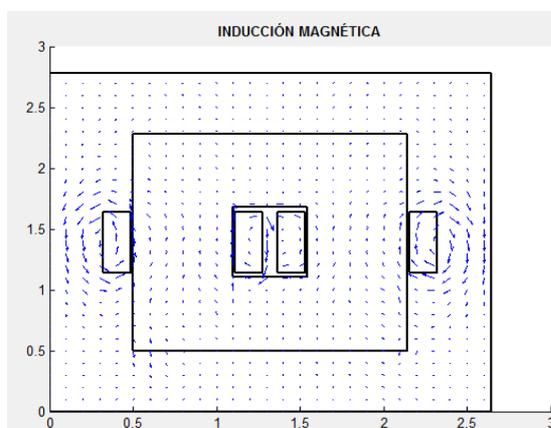


Fig. 2.6. Equipotenciales para un transformador con corriente de diez veces la nominal

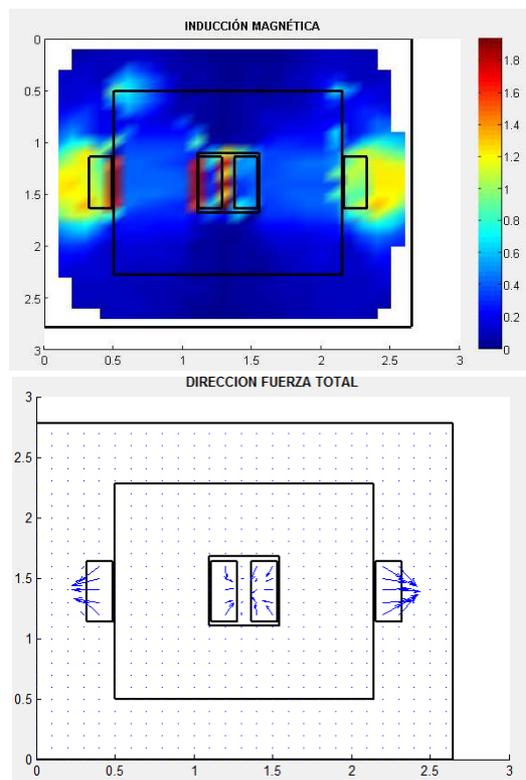


(a)

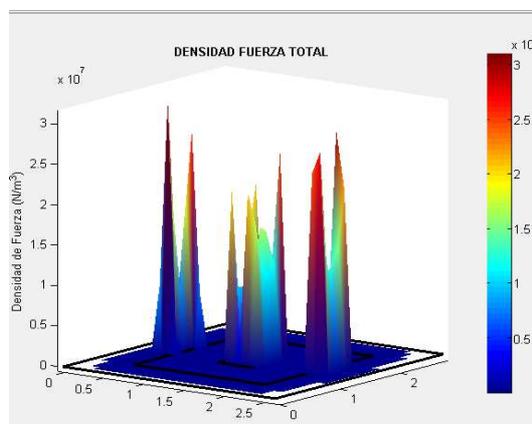
(b)

Fig. 2.7.- Dirección y magnitud de la inducción magnética para una corriente diez veces la nominal

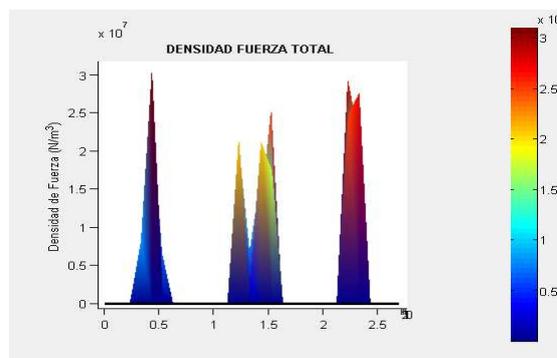
En la Figura 2.8 se muestran las fuerzas electromecánicas presentes cuando el transformador está trabajando a una carga de diez veces la nominal.



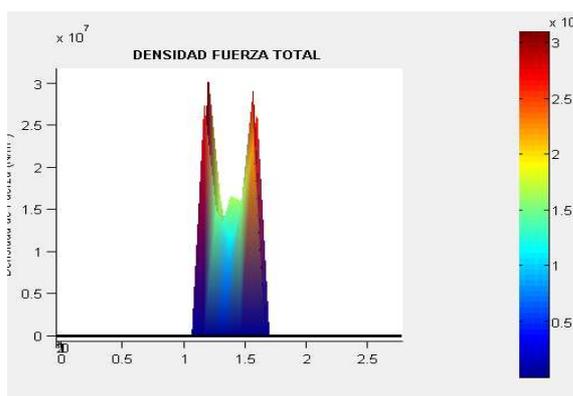
(a)



(b)



(c)

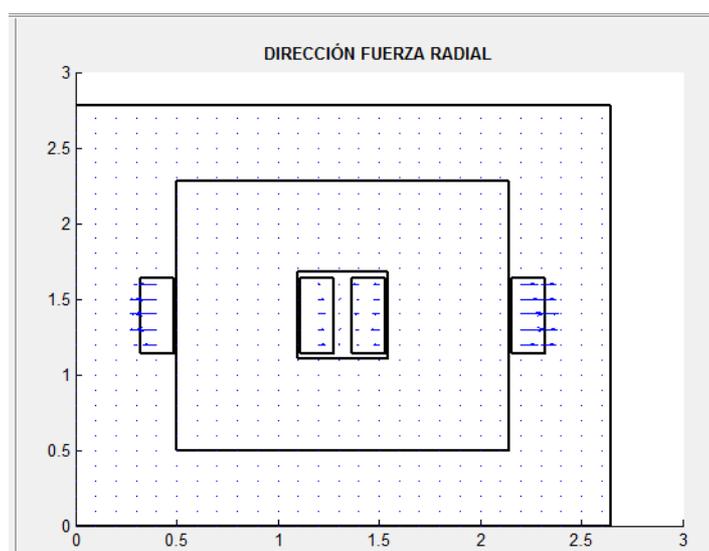


(d)

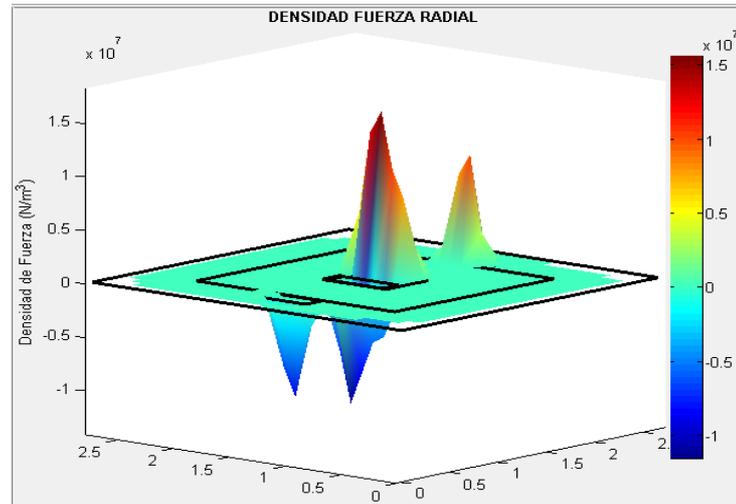
Fig. 2.8.- Dirección y magnitud de la fuerza total para una circulación de corriente de diez veces el valor nominal

En la Figura 2.8 (a) se puede observar que la dirección de las fuerzas se da hacia el núcleo, tanto en el devanado primario como en el secundario. Por la forma indicada en la Figura 2.8 (b) y (c), las fuerzas son algo mayores en el devanado primario que en el secundario debido a la influencia de la corriente de excitación. En la Figura 2.8 (b) y (d) se observa que la magnitud de la fuerza es más uniforme en la parte de los devanados que se encuentra en el interior de la ventana del núcleo que en la parte que está en el exterior del núcleo, debido a que en la parte exterior es más pronunciado el cambio de dirección del campo magnético; obsérvese principalmente la formación de picos en los devanados exteriores, lo cual concuerda con la falta de uniformidad presente en estos mismos devanados y que se nota de mejor manera en la Figura 2.8 (a).

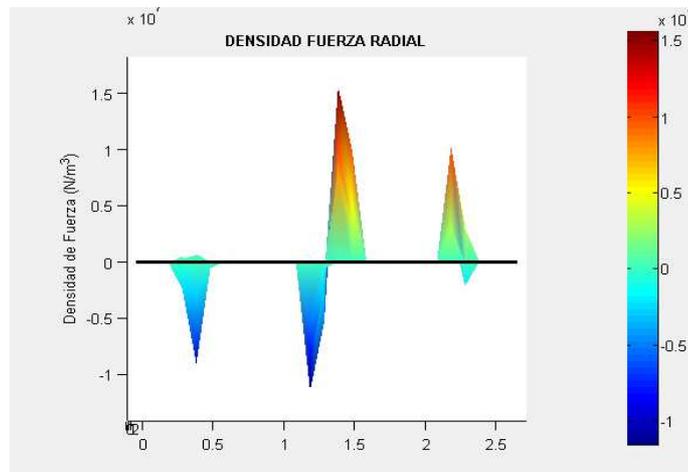
En la Figura 2.9 se presentan las características de la fuerza radial.



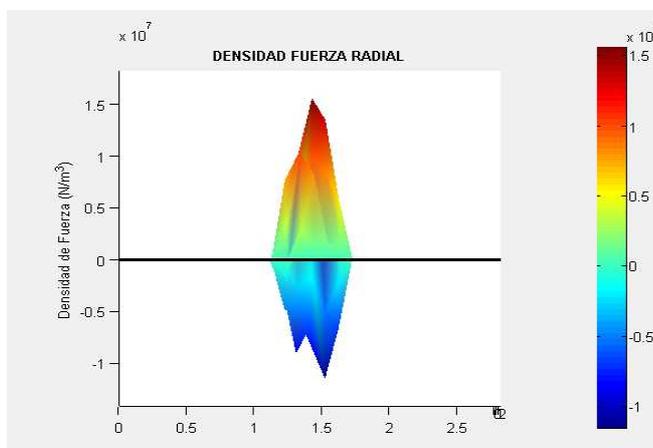
(a)



(b)



(c)

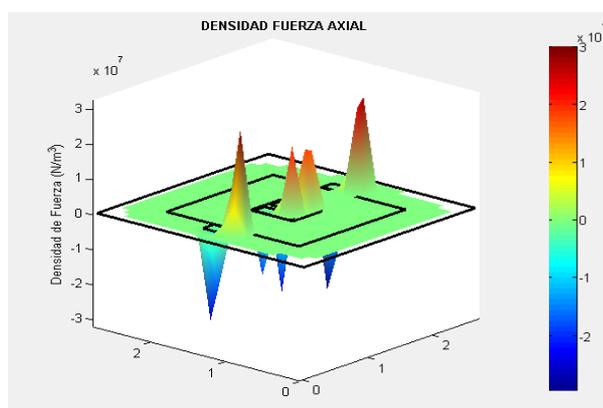


(d)

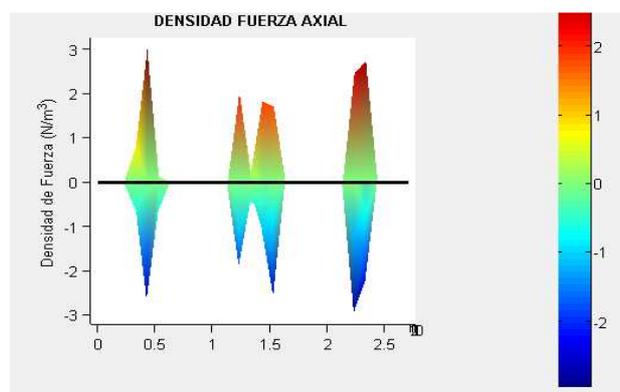
Fig. 2.9 Dirección y magnitud de la componente radial de la Fuerza Electromecánica para una circulación de corriente de diez veces el valor nominal

La fuerza radial es prácticamente uniforme a lo largo del devanado, con una pequeña tendencia a ser mayor en la parte central del mismo. Esto se debe a que el campo magnético cambia de dirección en los extremos, siguiendo el camino indicado por el núcleo magnético del transformador.

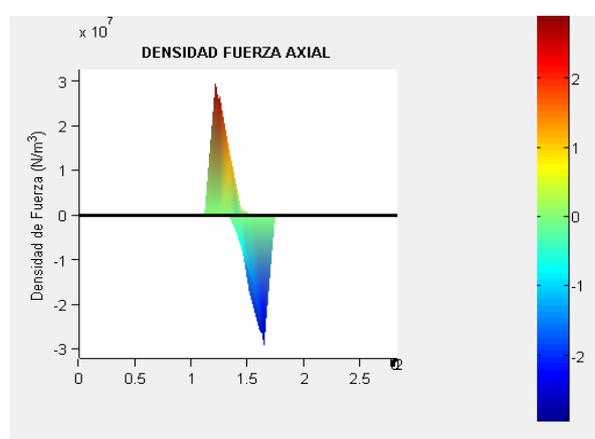
En la Figura 2.10 se muestra el comportamiento de las fuerzas axiales.



(a)



(b)



(c)

Fig. 2.10. Magnitud de la componente axial de la Fuerza Electromecánica para una circulación de corriente de diez veces el valor nominal

Como se esperaba, la fuerza axial es mayor en los extremos de los devanados y se reduce en la parte media del devanado, conforme al comportamiento del flujo magnético.

En la Tabla 2.1 se muestran los valores de la densidad de fuerza axial, radial y total para este diseño de transformador. Se observa que la magnitud de la fuerza axial es mayor que la fuerza radial. Esto se puede comprender al analizar el gráfico del vector potencial, el cual nos indica que el cambio de dirección de la inducción magnética es muy pronunciado, lo que provoca que exista una gran compo-

nente axial.

Tabla 2.1
Valores de Fuerza para el diseño
de transformador a dos columnas

Tipo de fuerza	Densidad de Fuerza (N/m ³)		
	Sin carga	Carga nominal	Corriente de falla
Axial	11.884,00	$1.8332 \cdot 10^6$	$7.8162 \cdot 10^7$
Radial	4.060,00	$1.0324 \cdot 10^6$	$5.2959 \cdot 10^7$
Total	12.027,00	$2.0566 \cdot 10^6$	$8.5690 \cdot 10^7$

2.1.2. NÚCLEO CON TRES COLUMNAS

En la Figura 2.11 se muestra la geometría analizada en este ejemplo. Esta es la configuración generalmente empleada en transformadores de potencia, debido a que el flujo envuelve de mejor manera a los dos devanados. La curva de saturación del hierro es la misma que la utilizada en el ejemplo anterior y que se muestra en la Figura 2.2. Las características y dimensiones del transformador son las mismas de la sección 2.1.1 a excepción del ancho de la ventana, el cual es de 277 mm.

En la Figura 2.12 se muestra la simulación cuando circula por el devanado primario la corriente de excitación. Se puede observar que se tiene una inducción magnética de 1.8 T en la columna central del núcleo, lo cual corresponde con el principio original del diseño.

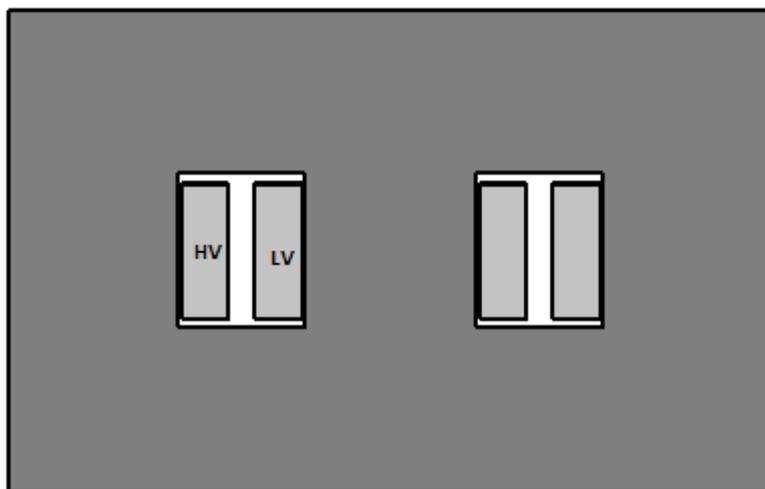


Fig. 2.11.- Transformador de tres columnas

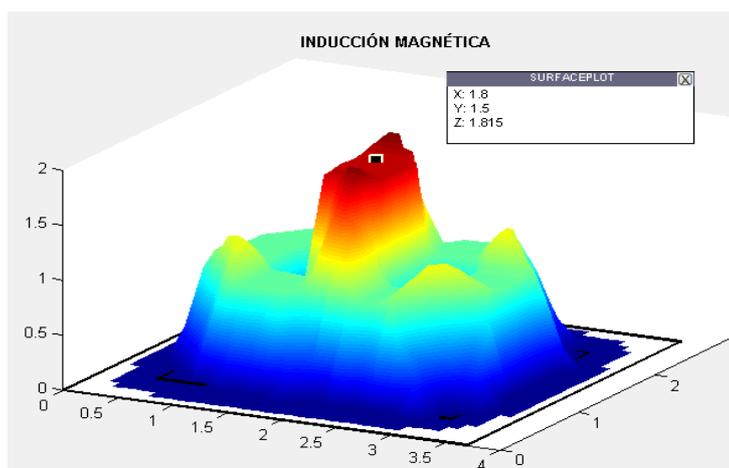
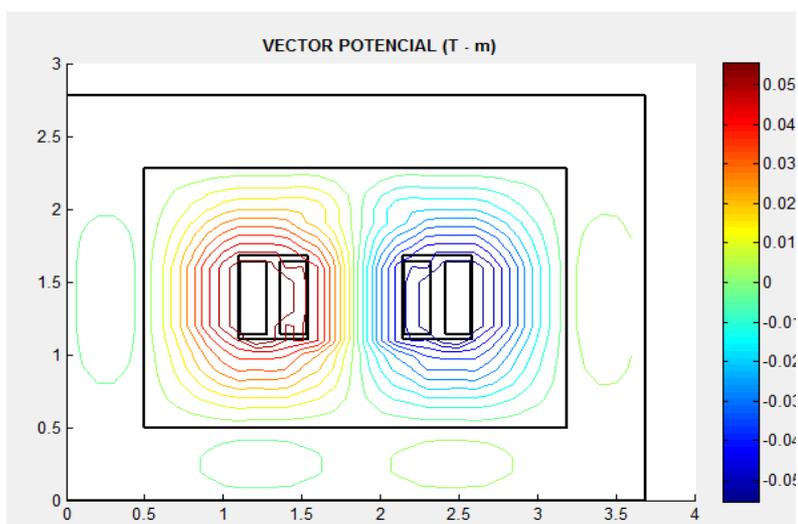
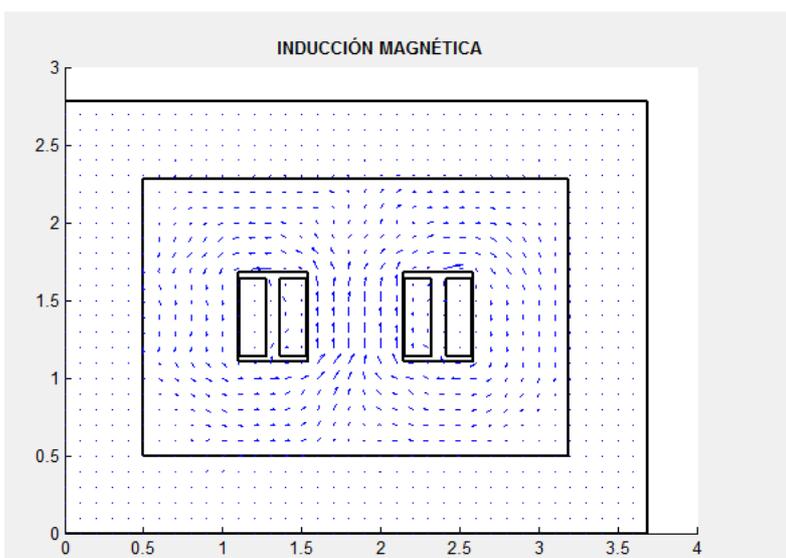


Fig. 2.12.- Inducción magnética para una circulación de corriente de excitación por el devanado de alto voltaje

En la Figura 2.13 se muestran las curvas equipotenciales del vector potencial magnético y la dirección de la inducción magnética. Tal como se esperaba, en condiciones de funcionamiento en vacío prácticamente todo el flujo magnético circula por el núcleo.



(a)

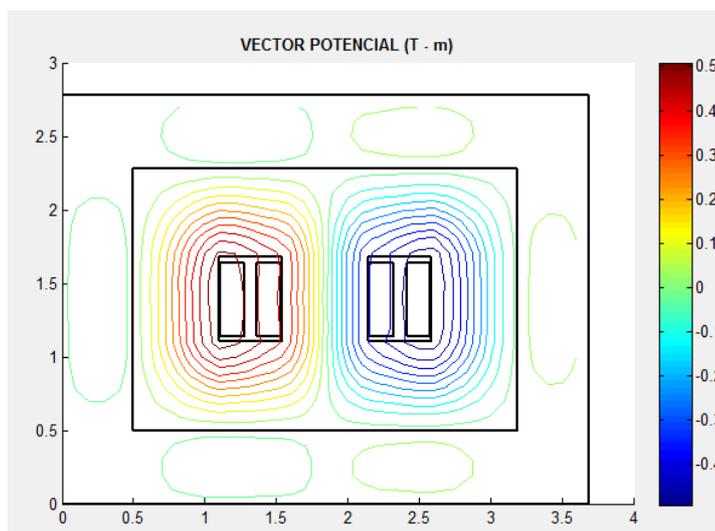


(b)

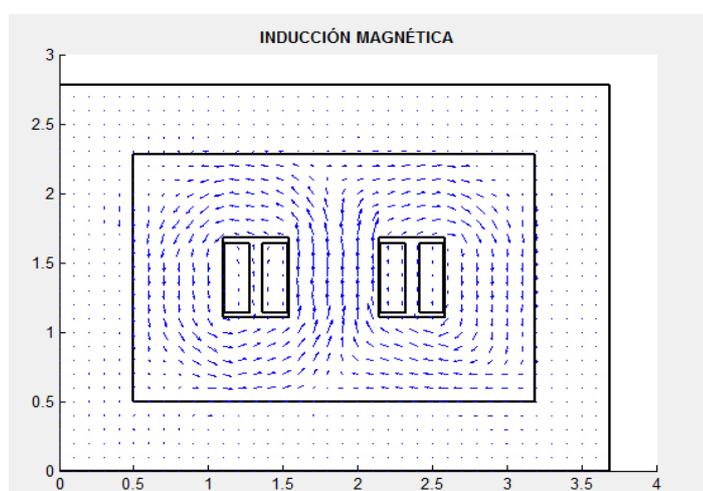
Fig. 2.13 Flujo magnético para el transformador de tres columnas sin carga

(a) Vector potencial (b) Dirección de la inducción magnética

En la Figura 2.14 se observa el comportamiento del transformador con carga nominal. Se observan pequeños indicios del flujo de dispersión en las líneas equipotenciales y líneas de inducción magnética que aparecen entre los devanados.



(a)

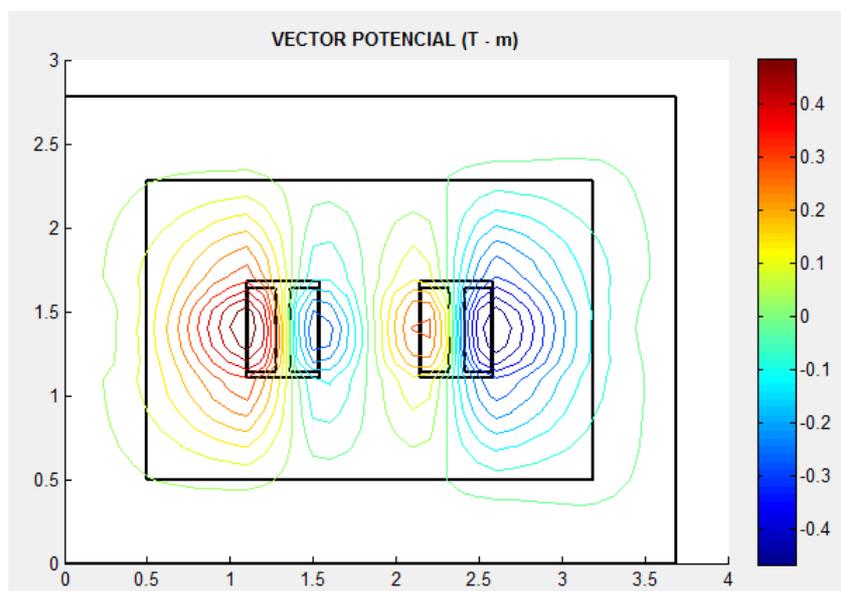


(b)

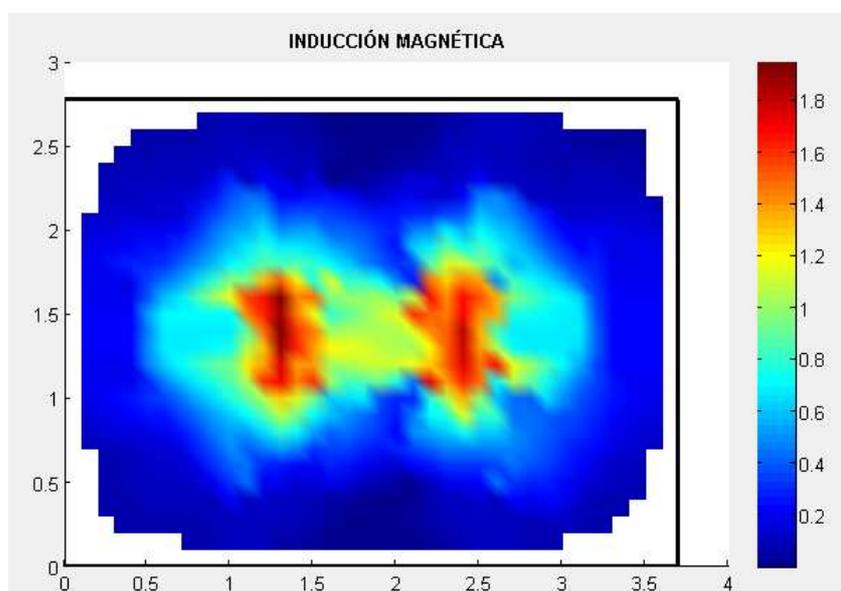
Fig. 2.14 Flujo magnético con transformador de tres columnas con carga nominal

(a) Vector potencial (b) Dirección de la inducción magnética

Finalmente, cuando circula una corriente diez veces la nominal, se tiene el comportamiento indicado en la Figura 2.15. Se confirma la disminución de la influencia del camino magnético y el aumento en el flujo de dispersión.



(a)

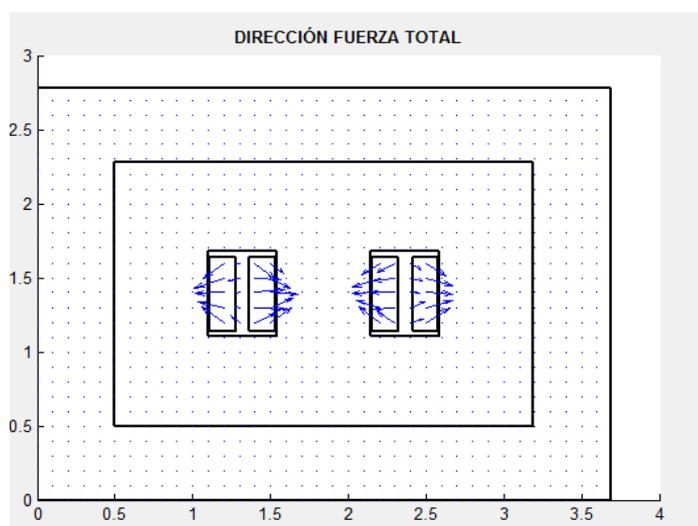


(b)

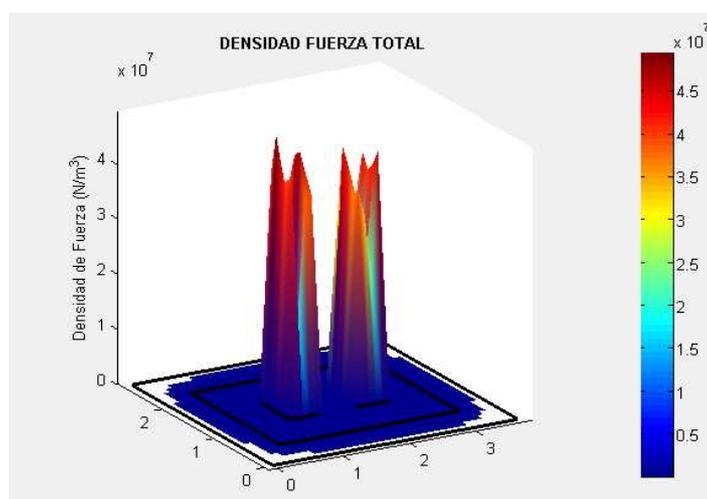
Fig. 2.15.- Flujo magnético para una circulación de corriente diez veces la nominal (a) Curvas equipotenciales del vector potencial (b) Inducción magnética

En las Figuras 2.16 a 2.18 se muestran las fuerzas electromecánicas total, axial y

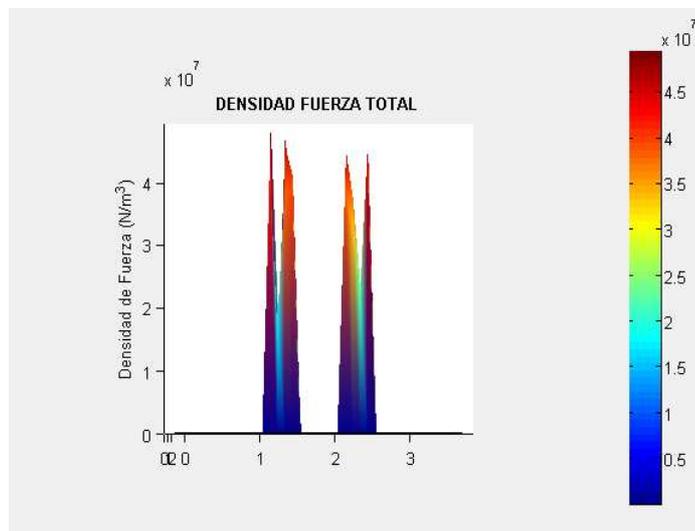
radial respectivamente. Las fuerzas del devanado exterior se dirigen hacia afuera, mientras que las fuerzas del devanado interior se dirigen hacia el núcleo. Esto provoca que el devanado exterior sufra por tensión mecánica, en tanto que el devanado interno sufra por la presión ejercida.



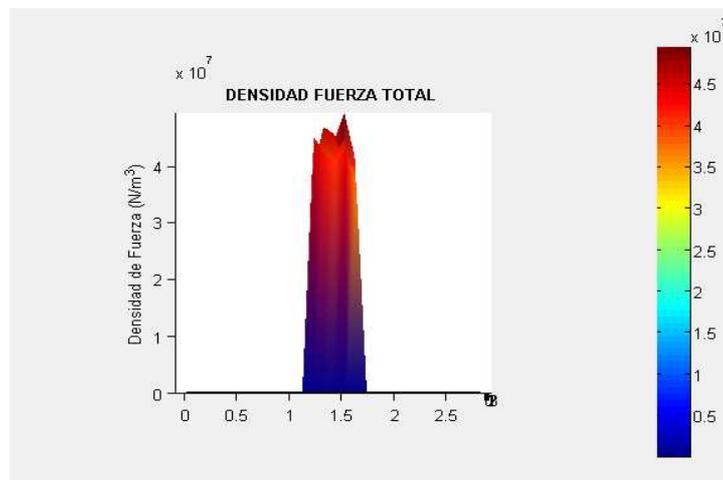
(a)



(b)

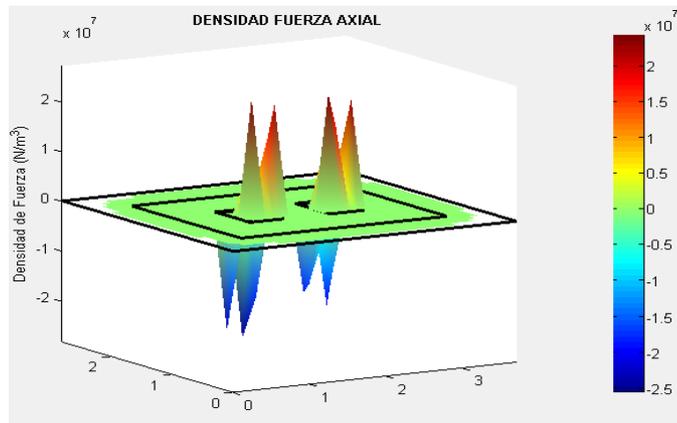


(c)

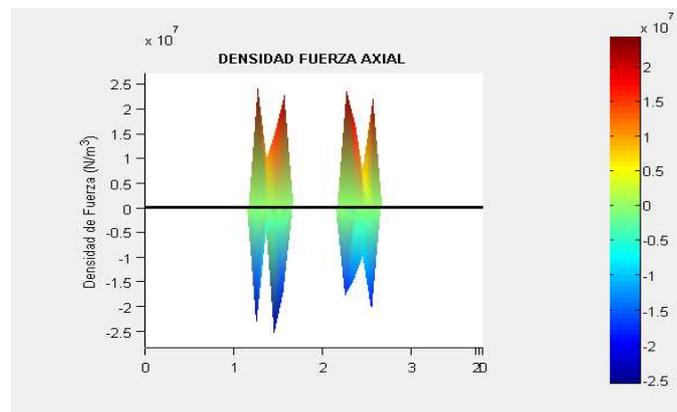


(d)

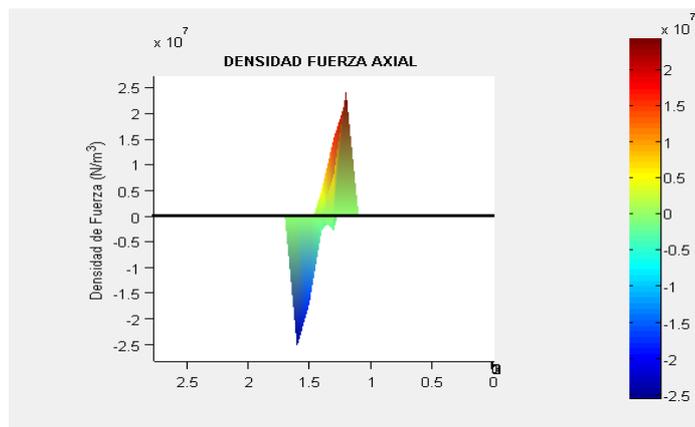
Fig. 2.16 Fuerzas electromecánicas para una circulación de corriente diez veces la nominal



(a)

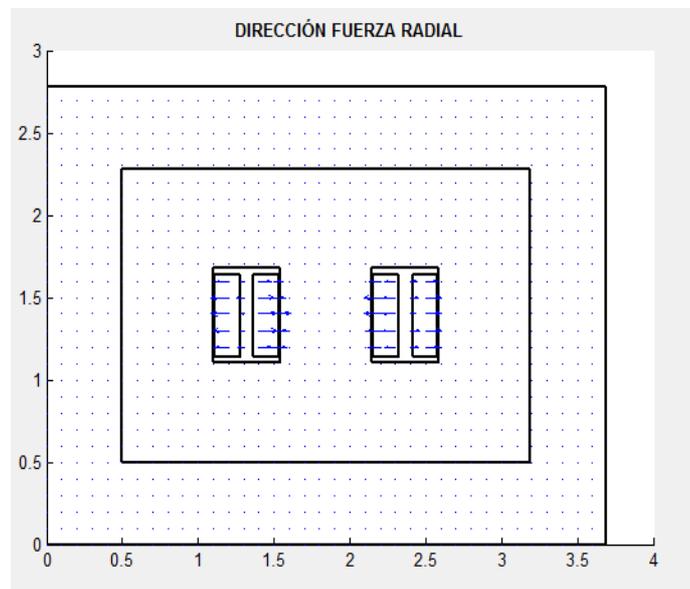


(b)

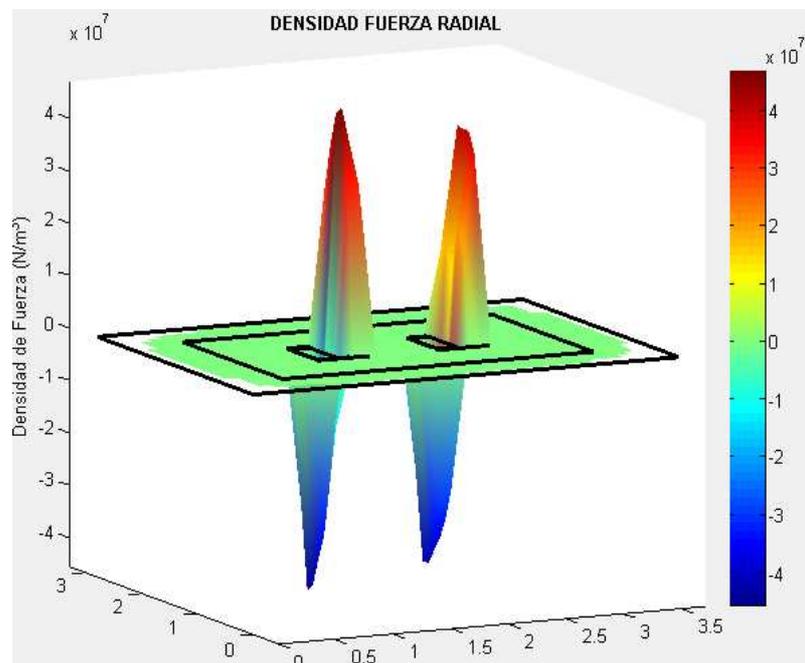


(c)

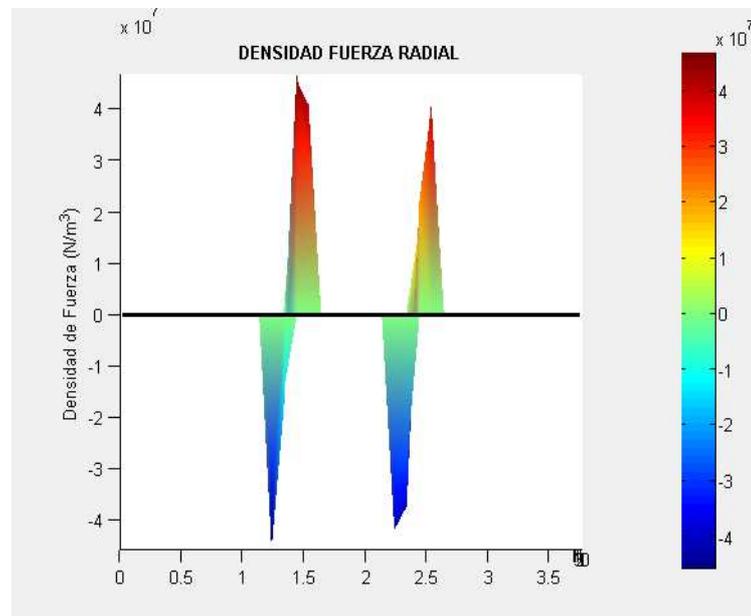
Fig. 2.17 Fuerzas axiales para una circulación de corriente diez veces la nominal



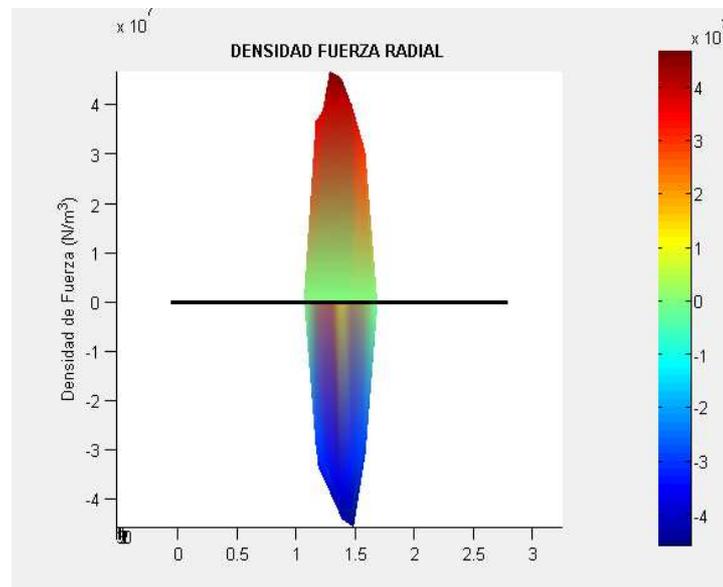
(a)



(b)



(c)



(d)

Fig. 2.18.- Fuerzas radiales para una circulación de corriente diez veces la nominal

Tal como se esperaba, las fuerzas axiales son mayores en los extremos y las fuerzas radiales son mayores en la parte media del devanado. Las fuerzas son prácti-

camente iguales en el devanado interno como en el externo.

El resumen de los resultados de la fuerza para cada caso de este diseño se presentan en la Tabla 2.2.

Tabla 2.2
Valores de densidad de fuerza para cada caso
del diseño de la sección 2.1.2

Tipo de fuerza	Densidad de Fuerza (N/m ³)		
	Sin carga	Carga nominal	Corriente de falla
Axial	10.255,00	0.5118×10^6	4.5447×10^7
Radial	4.470,00	1.0620×10^6	6.5727×10^7
Total	10.256,00	1.0717×10^6	6.6040×10^7

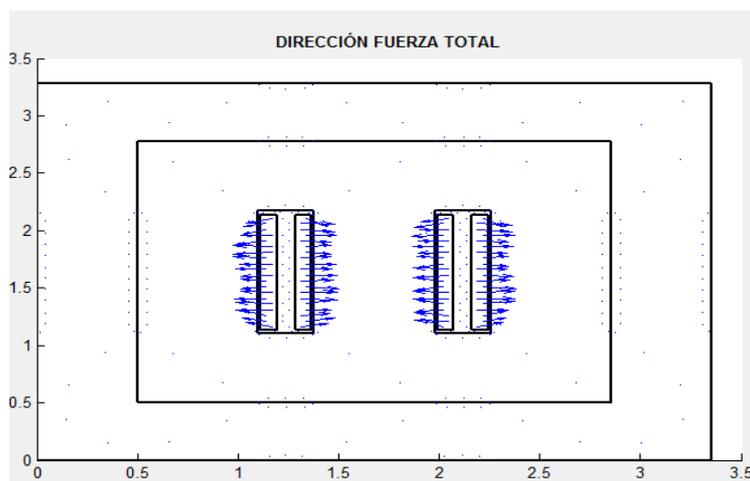
El comportamiento del flujo magnético hace que cuando el transformador se encuentra sin carga, las fuerzas axiales sean mayores que las radiales, su influencia está enmarcada en los extremos de cada devanado. Por otro lado, cuando el transformador ha tomado carga nominal y cuando circula una corriente de diez veces la nominal, las fuerzas radiales son las mayores, debido a que la dirección del flujo va aumentando en los puntos medios de los devanados.

2.1.3. CONFIGURACIÓN DE DEVANADOS DE BAJO ESPESOR

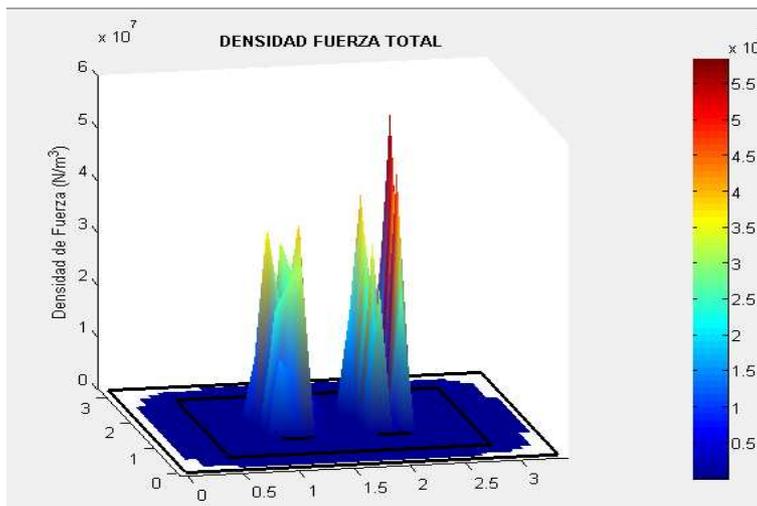
Se determina la influencia que tiene el espesor de los devanados en las fuerzas electromecánicas. Con esta finalidad, se reducirá el espesor del diseño implemen-

tado en la sección 2.1.2 a la mitad y se observará el comportamiento de las fuerzas con este nuevo diseño. Para conservar el mismo número de devanados y de densidad de corriente, la longitud es el doble del anterior diseño. La sección del núcleo es la misma para conservar el valor de inducción magnética de 1,6 T.

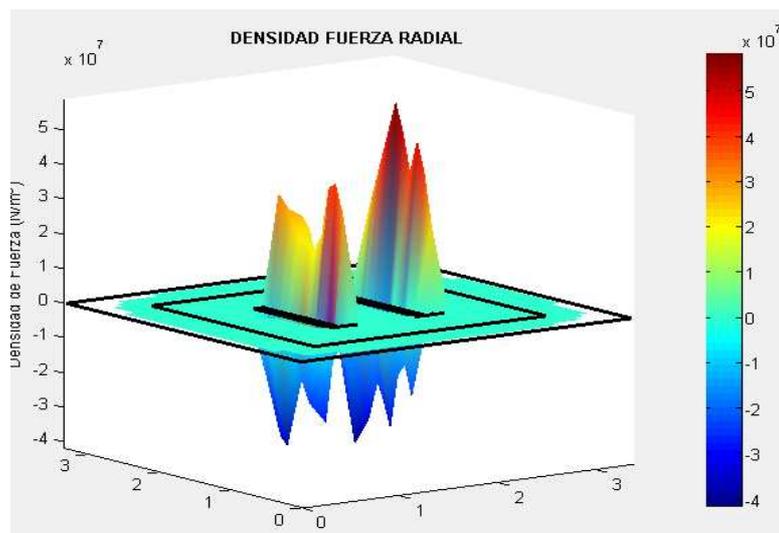
Las características del campo magnético para condiciones de funcionamiento sin carga, carga nominal o bajo falla son similares a las que se expusieron en la sección 2.1.2. Para una condición de circulación de corriente de falla, las fuerzas axiales, radial y total se las muestra en la Figuras 2.19.



(a)



(b)



(c)

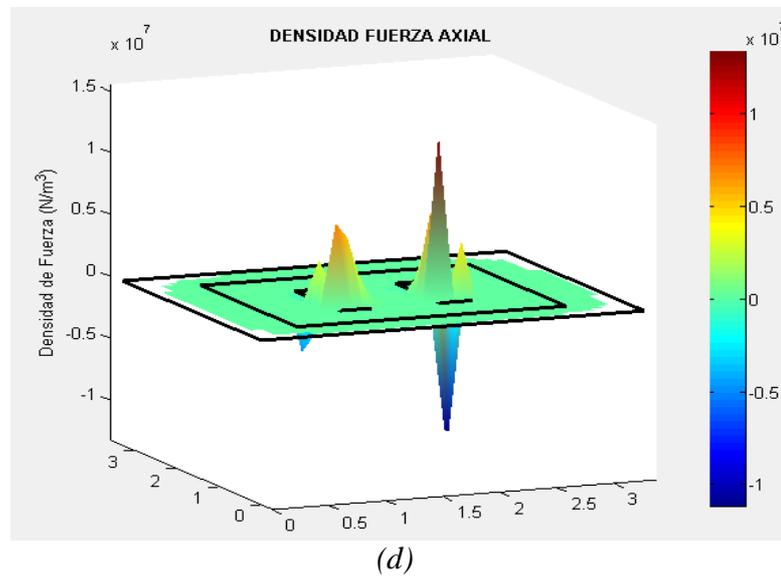


Fig. 2.19.- Densidad de fuerza para circulación de corriente diez veces la nominal en un transformador de tres columnas con devanados de bajo espesor

Tabla 2.3

Valores de densidad de fuerza para el diseño de la sección 2.1.3

Tipo de fuerza	Densidad de Fuerza (N/m ³)		
	Sin carga	Carga nominal	Corriente de falla
Axial	10.788,00	3.5483×10^5	2.2803×10^7

Radial	3.290,00	$6.6229 \cdot 10^5$	$5.7789 \cdot 10^7$
Total	11.000,00	$6.6574 \cdot 10^5$	$5.7893 \cdot 10^7$

Cuando el transformador está sin carga, las fuerzas en este diseño son menores que las que se tenían con devanados anchos. Cuando el transformador tiene carga nominal, las fuerzas electromecánicas se reducen prácticamente a la mitad. La diferencia se reduce al tener una corriente de falla, sin embargo, las fuerzas de este diseño continúan siendo menores que en el diseño anterior.

2.2. ASIMETRÍAS AXIALES EN LA DISPOSICIÓN DE LOS DEVANADOS

En la sección anterior se analizaron casos de diferentes configuraciones de devanados, pero todos guardaban en común el hecho de que los devanados se encontraban a la misma altura con respecto al otro. En esta sección se estudia la influencia que tiene la presencia de una asimetría axial en el valor de las fuerzas electromecánicas, tal como se muestra en la Figura 2.20. Estas asimetrías pueden darse por las características del conductor que conforma los devanados o por defectos en la construcción.

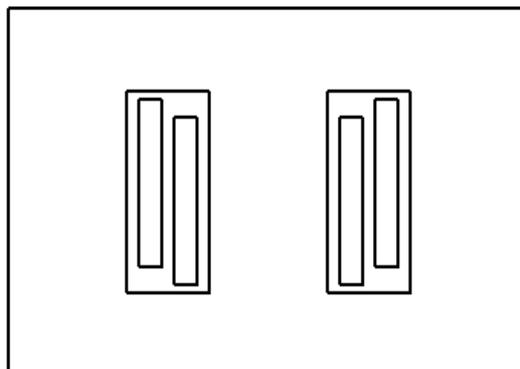


Fig. 2.20.- Transformador con asimetría en la disposición de devanados

En el anexo II se ha incluido una tabla con los resultados detallados de la simulación realizada para diferentes casos de asimetría. En la Figura 2.21 se muestra la gráfica de dichos casos.

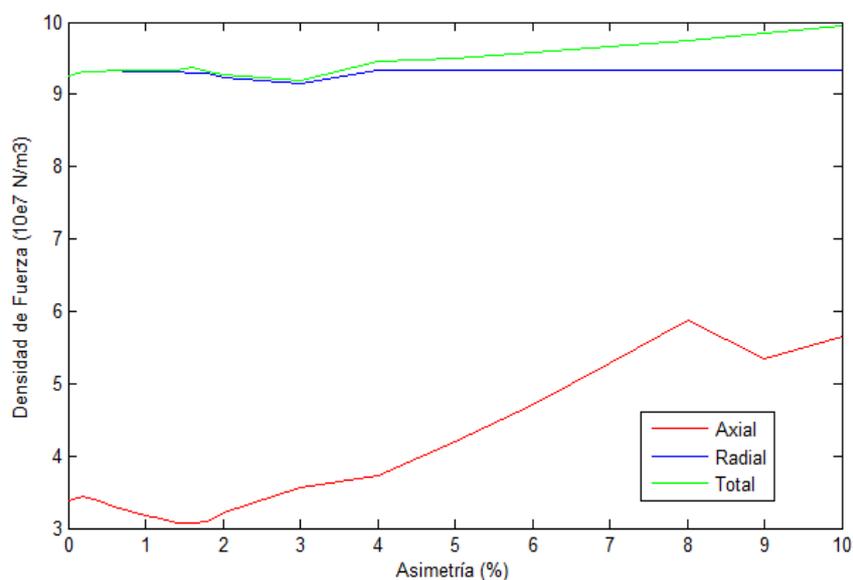
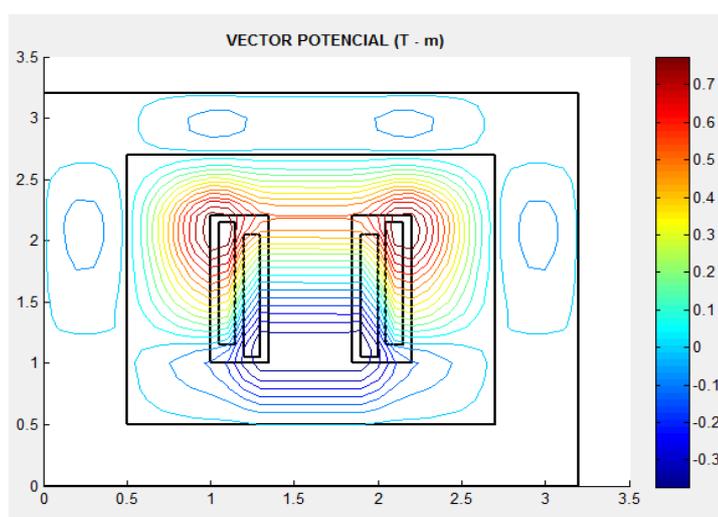


Fig. 2.21.- Variación de las densidades de fuerza axiales, radiales y totales con respecto a la asimetría de los devanados

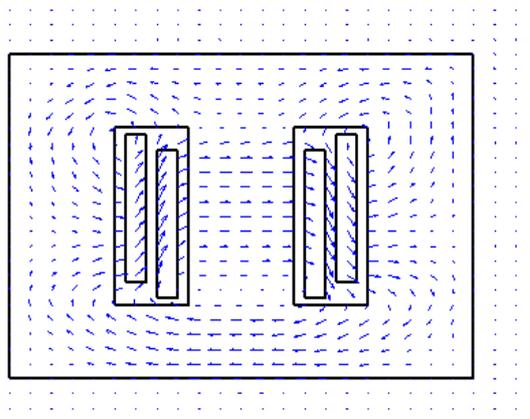
Las fuerzas radiales no sufren una variación significativa. Prácticamente permanecen constantes. Las fuerzas axiales varían en gran manera, llegando a duplicarse

alrededor del 8% de asimetría. Esto hace que las fuerzas totales aumenten conforme aumenta la asimetría de los devanados. Sin embargo, se observa que hasta un 2% de asimetría se podría tener un diseño aceptable sin que se altere el soporte que necesitará el transformador.

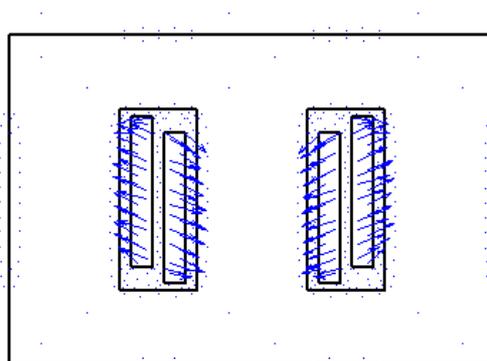
La variación de las fuerzas electromecánicas se debe a que cambia el comportamiento del campo magnético. En la Figura 2.22 se muestran el vector potencial magnético, la inducción magnética y la distribución de fuerzas para un caso de 10% de asimetría. Como se puede observar el comportamiento es muy diferente del que se tiene en una configuración simétrica y que se ha desarrollado en las secciones anteriores. En este caso el flujo no sigue la dirección axial, sino que atraviesa transversalmente la columna central del núcleo para poder cerrar el camino magnético. El comportamiento de las fuerzas electromecánicas muestra que para este caso la concentración de la tensión mecánica y el esfuerzo que sufren los devanados se traslada a un punto diferente del medio debido a que las direcciones de las fuerzas intentan irse a una sólo dirección (hacia abajo en el caso del devanado interno y hacia arriba en el devanado externo). Se puede notar que este caso sería muy complejo de analizar mediante métodos analíticos o mediante la reducción a circuitos magnéticos.



(a)



(b)



(c)

Fig. 2.21.- Comportamiento del campo magnético ante asimetrías en los devanados y con una circulación de corriente de diez veces la nominal. (a) Vector potencial magnético. (b) Inducción Magnética

2.3. INFLUENCIA DEL MATERIAL DEL NÚCLEO

En principio, los diseños de transformadores de potencia se basan en una inducción magnética cercana a los 1,8 T. El variar este valor no permitiría una comparación equitativa con los diseños anteriores, ya que esto implicaría el cambio tanto en el número de devanados como en la geometría del núcleo. En esta sección se

realizan cambios en la curva de saturación que no cambian el valor de la inducción magnética sino el valor de la intensidad de campo magnético.

En la Tabla 2.4 se presentan los valores de las fuerzas en función de las inducciones magnéticas de diseño.

Tabla 2.4
Densidad de fuerza en función de
la intensidad de campo magnético

Intensidad de campo magnético H	Fuerza Axial N/m³	Fuerza Radial N/m³	Fuerza Total N/m³
100	$3.6753 \cdot 10^7$	$9.1586 \cdot 10^7$	$9.1640 \cdot 10^7$
120	$3.6753 \cdot 10^7$	$9.1586 \cdot 10^7$	$9.1640 \cdot 10^7$
140	$4.2494 \cdot 10^7$	$8.7878 \cdot 10^7$	$8.7936 \cdot 10^7$
160	$4.0558 \cdot 10^7$	$8.9552 \cdot 10^7$	$8.9608 \cdot 10^7$

Existe un valor de intensidad de campo magnético para el cual cada una de las fuerzas tiene su valor mínimo. Sin embargo, dado el comportamiento de la dirección de la inducción magnética, el valor óptimo no coincide para las tres fuerzas: axial, radial y total. En el proceso de diseño, y de acuerdo a la disponibilidad de material, se deberá escoger la característica más adecuada para la aplicación que se dará al transformador.

2.4 DISPOSICIÓN DE DEVANADOS DE DIFERENTE LONGITUD

Por motivos de disponibilidad de los conductores requeridos para la construcción

de los devanados, en ciertos casos no es posible tener todos los devanados de la misma longitud. En tales circunstancias se tienen dos opciones, primero que los devanados se dispongan simétricamente el uno del otro, es decir ambos devanados tienen su punto medio a la misma altura, o se podrían tener ambos devanados en la misma base, con lo cual la asimetría se limitaría a la parte superior. En las dos situaciones, el devanado externo será el de menor longitud.

Se ha exagerado un poco la magnitud de las diferencias longitudinales para que sea más visible el comportamiento de las fuerzas electromecánicas.

2.4.1 DEVANADOS DE DIFERENTE LONGITUD CON SIMETRÍA AXIAL

A continuación se presenta la geometría en la cual, si bien los devanados difieren en longitud, ambos tienen su punto medio a la misma altura. Las dimensiones de los devanados son tales que tanto el primario como el secundario tienen igual densidad de corriente. La geometría de esta disposición se la muestra en la Figura 2.22.

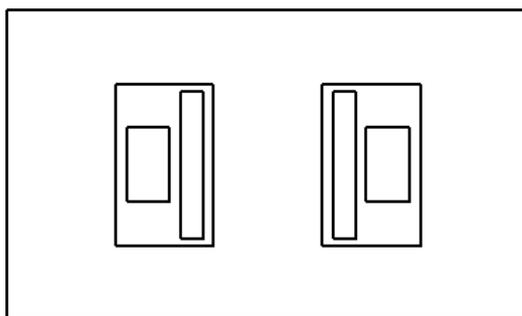
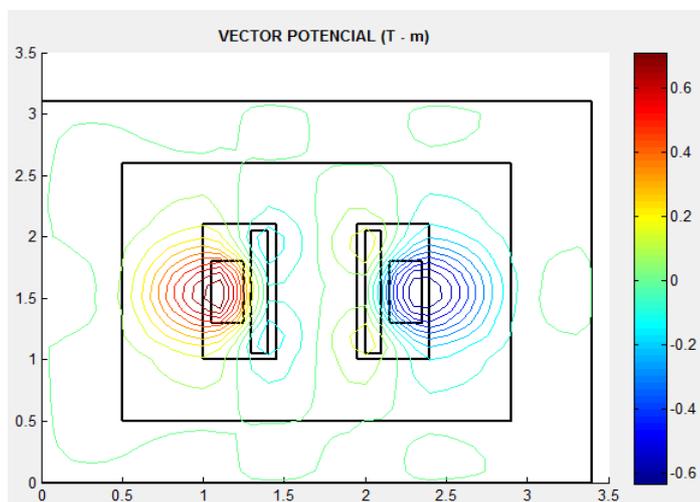


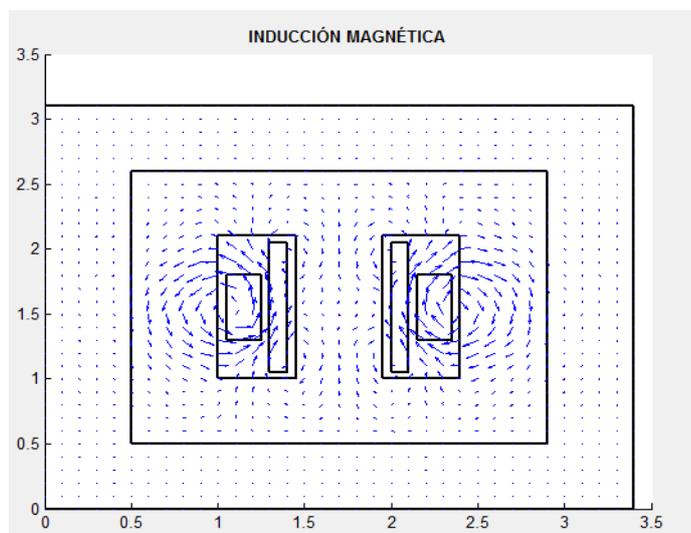
Fig. 2.22.- Geometría para un transformador con devanados de diferente longitud con simetría axial

Ante una corriente de falla, el comportamiento del campo magnético y del vector

potencial se muestra en la Figura 2.23.



(a)



(b)

Fig. 2.23.- Campo magnético para un transformador con devanados de diferente longitud y con simetría axial para una corriente de diez veces la nominal.

(a) Vector potencial magnético (b) Dirección de la inducción magnética

Las fuerzas electromecánicas axial, radial y total se muestran en la Figura 2.24.

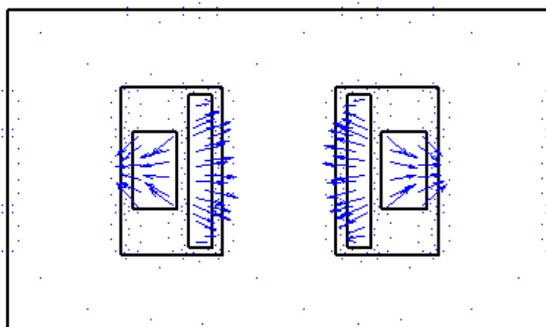


Fig. 2.24.- Dirección de las fuerzas electromecánicas para un transformador con devanados de diferente longitud y con simetría axial con circulación de corriente de diez veces la nominal.

Obsérvese que, a diferencia de lo que sucede generalmente, en el devanado interno las fuerzas electromecánicas tratan de expandir longitudinalmente al devanado en lugar de comprimirlo. Esto hace que de cierta manera se reduzca el esfuerzo que el devanado debe soportar en el punto medio debido al efecto acumulado de las fuerzas axiales.

La magnitud de las fuerzas radiales se puede observar en la figura siguiente. Las fuerzas radiales son superiores en el devanado externo y tienen mayor influencia en la región de campo magnético que comparten ambos devanados.

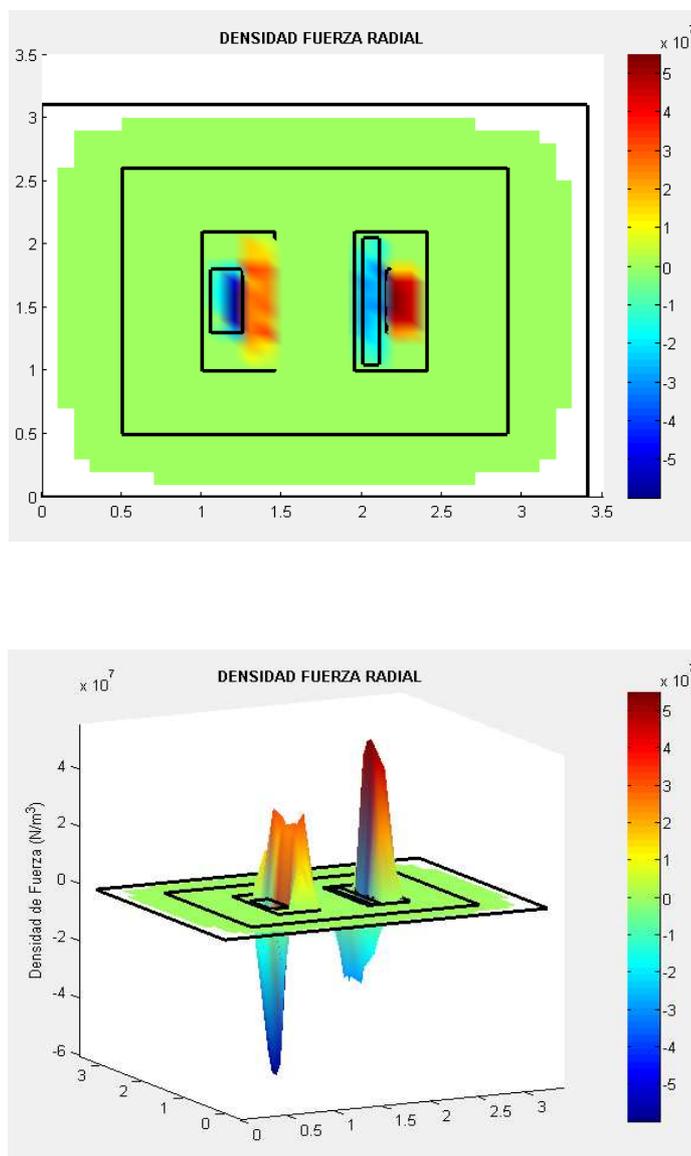


Fig. 2.25.- Magnitud de las fuerzas radiales para un transformador con devanados de diferente longitud con simetría axial con circulación de corriente de diez veces la nominal

Las fuerzas axiales se pueden observar en la Figura 2.26.

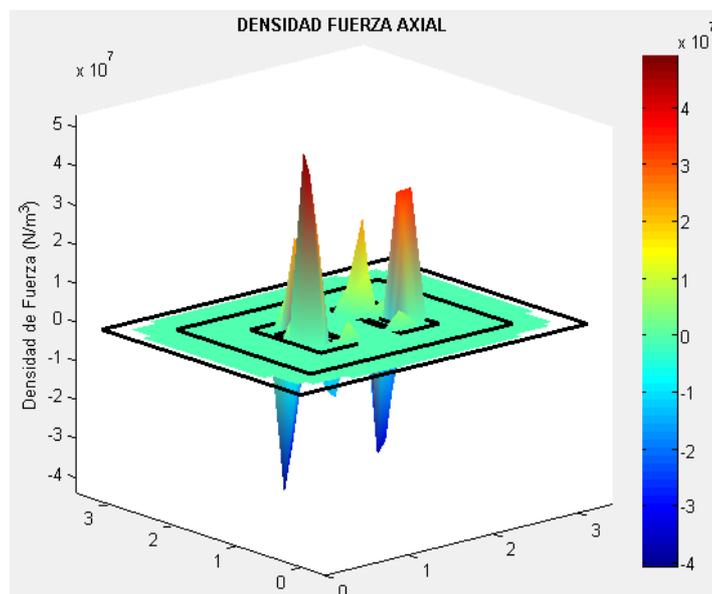
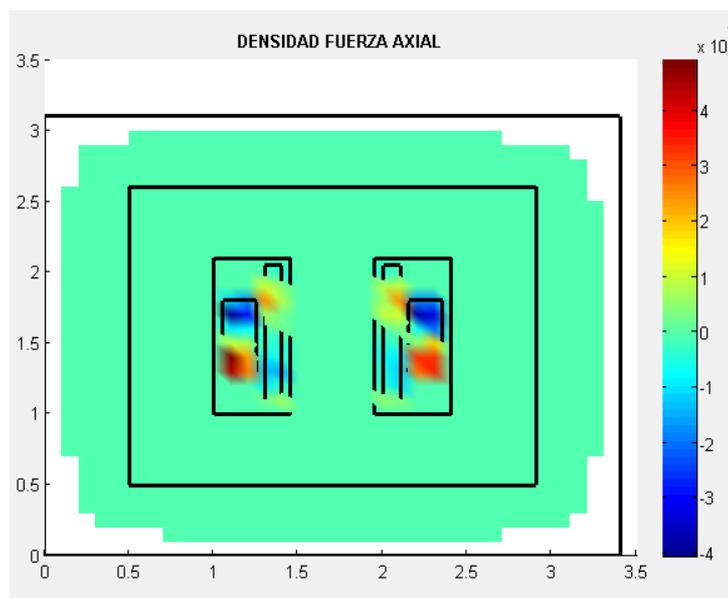


Fig. 2.26.- Magnitud de las fuerzas axiales para un transformador con devanados de diferente longitud con simetría axial con circulación de corriente de diez veces la nominal

Las fuerzas axiales siguen siendo mayores en los extremos, pero su influencia es mayor en el devanado más corto.

Para este caso se obtuvieron los siguientes valores máximos en las densidades de fuerza electromecánica:

Fuerza Total:	$9,20 \times 10^7$ N/m ³
Fuerza Radial:	$7,37 \times 10^7$ N/m ³
Fuerza Axial:	$7,81 \times 10^7$ N/m ³

Obsérvese que debido a la marcada diferencia entre los dos devanados se tiene una elevada fuerza axial que actúa en el devanado externo principalmente.

2.4.2 DEVANADOS DE DIFERENTE LONGITUD Y CON LA MISMA BASE

En este caso los devanados tienen su base a la misma coordenada axial, tal como lo indica la Figura 2.27. Las proporciones se han conservado de tal manera que tanto el voltaje de funcionamiento como las densidades de corriente sean las mismas que las de la sección 2.4.1.

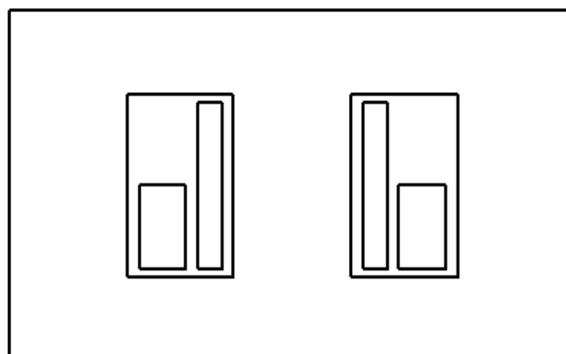
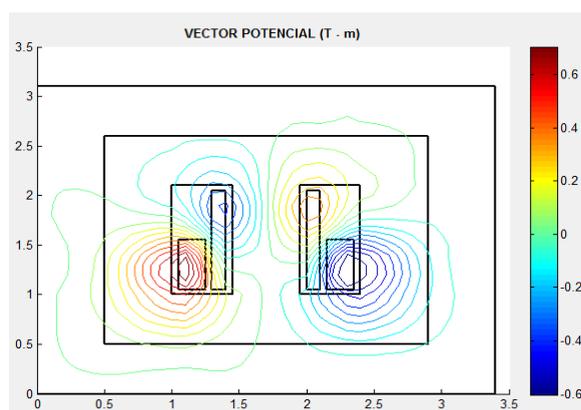


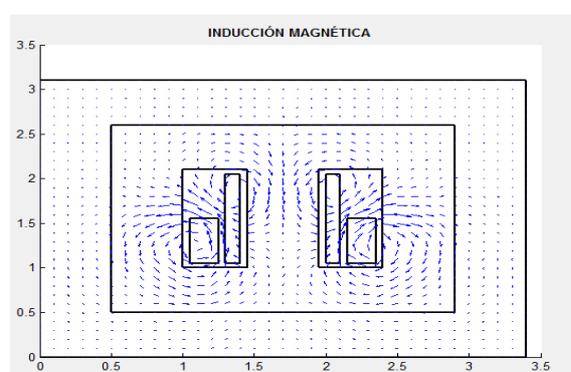
Fig. 2.27.- Geometría para un transformador con devanados de diferente longitud con la misma base en el eje axial

El comportamiento del campo magnético para una circulación de corriente de falla se observa en la Figura 2.28. Las líneas de flujo magnético se dividen en dos caminos: uno que se encierra en la parte superior del núcleo y otro en la parte inferior. Esto provoca que el flujo de dispersión se concentre en la parte superior de la ventana del núcleo. De igual manera, se puede observar la dirección de las fuerzas electromecánicas en la Figura 2.28.

Como se puede observar, las fuerzas se concentran en la parte inferior de ambos devanados debido a la interacción magnética que existe en esta región. En el devanado externo la dirección de las fuerzas conserva su comportamiento típico, en tanto que en el devanado interno se observa que la parte superior sufrirá el acumulamiento de todas las fuerzas en la parte superior.



(a)



(b)

Fig. 2.28.- Campo magnético para un transformador con devanados

de diferente longitud y con la misma base. (a) Vector potencial magnético.
(b) Dirección de la inducción magnética

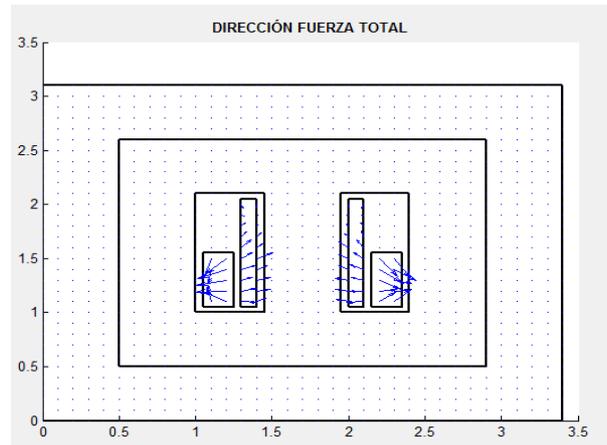


Fig. 2.28.- Campo Magnético y Fuerzas Electromecánicas para un transformador con devanados de diferente longitud y con la misma base para una circulación de corriente de diez veces la nominal.
(a) Vector potencial magnético. (b) Dirección de la inducción magnética

La magnitud de la densidad de fuerza radial se muestra en la Figura 2.29.

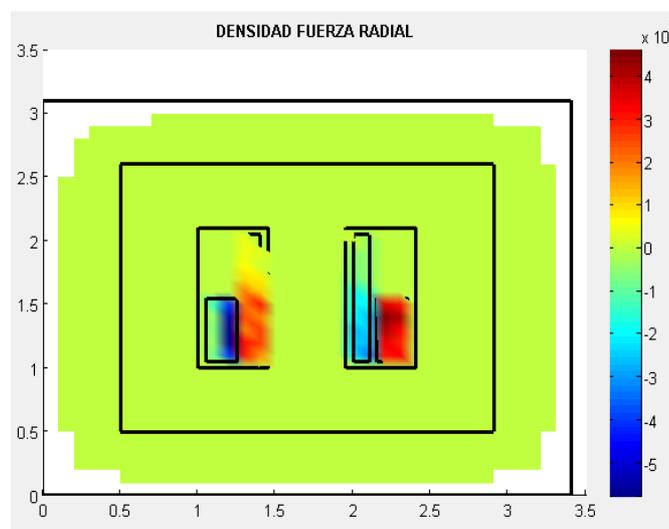
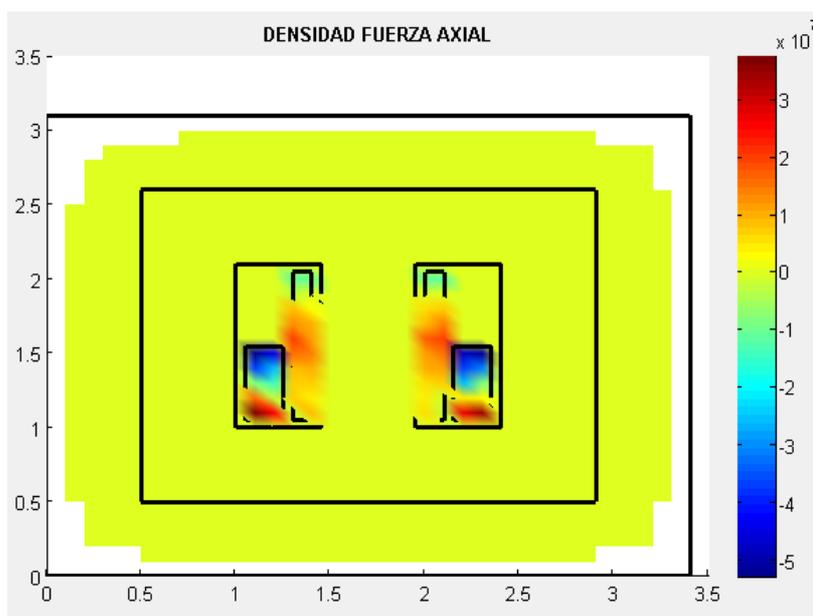


Fig. 2.29.- Magnitud de las fuerzas radiales para un transformador

con devanados de diferente longitud con la misma base para una circulación de corriente de diez veces la nominal.

Las fuerzas radiales están concentradas en la región que comparten los dos devanados y es superior en el devanado externo. Estas fuerzas son prácticamente constantes a lo largo de los devanados en su región de influencia.

El comportamiento de las fuerzas axiales se puede observar en la figura siguiente. Las fuerzas axiales se concentran de manera pronunciada en la esquina superior del devanado externo. Su valor es mucho mayor para el devanado externo que para el interno.



(a)

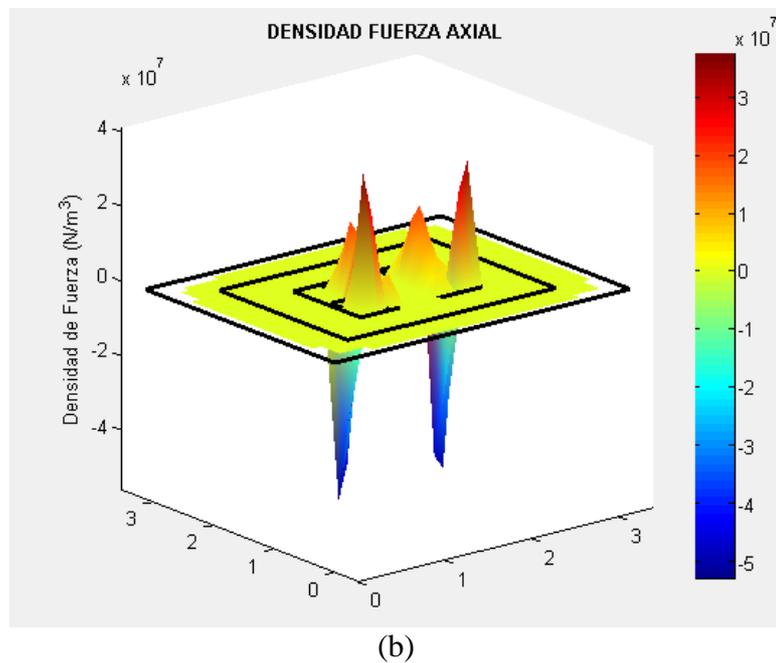


Fig. 2.30.- Magnitud de las fuerzas axiales para un transformador con devanados de diferente longitud con la misma base para una circulación de corriente de diez veces la nominal.

Para este caso se obtuvieron los siguientes valores máximos en las densidades de fuerza electromecánica:

Fuerza Total: $1,38 \times 10^8$ N/m³

Fuerza Radial: $1,03 \times 10^8$ N/m³

Fuerza Axial: $1,04 \times 10^8$ N/m³

Prácticamente las fuerzas radiales y axiales son iguales. Se puede concluir que las diferencias en altura en los devanados tienen mayor influencia en las fuerzas axiales que en las radiales. Esto se observó también en la sección 2.3. La magnitud de las fuerzas electromecánicas es menor en la configuración con simetría axial que en aquella en la cual ambos devanados tienen la base a la misma altura.

CAPÍTULO 3

APLICACIÓN A UN TRANSFORMADOR DEL SISTEMA NACIONAL DE TRANSMISIÓN

Se presenta en este capítulo el diseño básico de un autotransformador de potencia del Sistema Nacional de Transmisión. El proceso se basa principalmente en el análisis de circuitos magnéticos con una aplicación final del método de elementos finitos para determinar las densidades de fuerza y tensiones mecánicas a las que se estima que el transformador estará sometido durante su operación.

3.1. DATOS GENERALES

El autotransformador a ser diseñado tiene las siguientes características:

Número de fases:	Monofásico
Voltaje fase – fase:	230/138/13.8 kV
Frecuencia:	60 Hz
Potencia:	125 MVA

El autotransformador formará parte de un banco trifásico de transformadores con iguales características.

La geometría del núcleo corresponde a tres columnas, tal como lo indica la Figura 3.1.

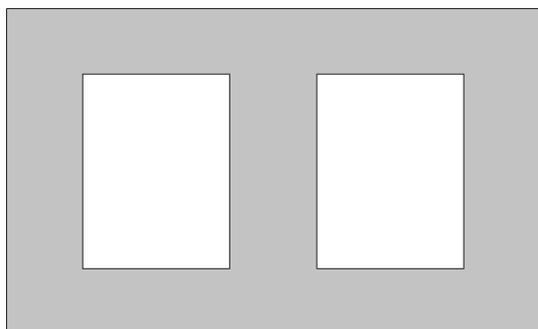


Figura 3.1.- Geometría del núcleo para el diseño del autotransformador

3.2. VOLTAJE POR ESPIRA

Como dato de partida se escoge el número de espiras. En este caso se ha tomado como dato inicial el número de espiras del devanado terciario.

Para comprender los siguientes pasos del diseño, se definen los siguientes términos:

Devanado terciario: Es el devanado de 13,8 kV que formará parte de la configuración delta del banco de autotransformadores.

Devanado común: En un autotransformador, es el devanado en el cual se encuentra el voltaje del secundario del transformador. Se denomina devanado común debido a que, en la estructura final del autotransformador, también forma parte del devanado primario.

Devanado serie: Es la parte del devanado del autotransformador que sólo corresponde al primario del transformador.

Se puede observar cada devanado en la Figura 3.2.

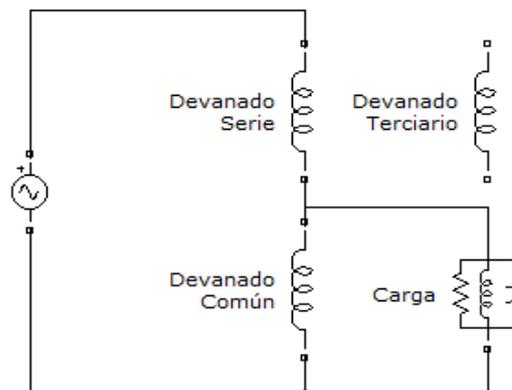


Figura 3.2. Definición de los devanados de un autotransformador

De acuerdo a lo anterior, el voltaje que soportará el devanado terciario será de 13,8 kV, por su configuración en delta. El voltaje del devanado común será el voltaje fase neutro del secundario, es decir:

$$V_c = \frac{138 \text{ kV}}{\sqrt{3}} = 79,68 \text{ kV}$$

El voltaje en el devanado serie será la diferencia entre el voltaje fase neutro del primario y el voltaje del devanado común:

$$V_s = \frac{230 \text{ kV}}{\sqrt{3}} - V_c = 53,12 \text{ kV}$$

Se ha escogido un número de espiras para el terciario de⁴:

$$N_t = 60 \text{ espiras}$$

El número de espiras para el devanado común y para el devanado serie vienen dados por la relación de voltajes:

$$N_c = \frac{V_c}{V_t} N_t = \frac{79,68 \text{ kV}}{13,8 \text{ kV}} \cdot 60 \text{ espiras} = 346 \text{ espiras}$$

4 El número de espiras se determina en base al análisis de algunos casos de prueba y error basados en valores de pérdidas e impedancia. Aquí se ha utilizado el valor final con el que se obtiene un valor aceptable de reactancia de dispersión.

$$N_s = \frac{V_s}{V_t} \cdot N_t = \frac{53,12 \text{ kV}}{13,8 \text{ kV}} \cdot 60 \text{ espiras} = 231 \text{ espiras}$$

El voltaje por espira es la relación entre el voltaje soportado por cada devanado y el número de espiras y se lo muestra en la Tabla 3.1.

Tabla 3.1
Voltaje por espira para cada devanado

Devanado	Voltaje kV	Número de espiras	Voltaje por espira V
Terciario	13,8	60	230,00
Común	79,68	346	230,28
Serie	53,12	231	229,95

3.3. INDUCCIÓN MAGNÉTICA Y SECCIÓN TRANSVERSAL DEL NÚCLEO

La inducción magnética a la cual va a trabajar el transformador se la diseña con un margen (α) respecto al codo de la curva de saturación (B_{codo}) del núcleo y se la determina mediante (3.1).

$$B = \frac{B_{codo}}{1 + \alpha/100} \quad (3.1)$$

Para la curva que se está utilizando en el presente diseño, correspondiente a un acero eléctrico al silicio, el codo de saturación es de 1,9 T. El margen que se ha utilizado es de 5%, con lo cual la inducción magnética será:

$$B = \frac{1,9 \text{ T}}{1 + \frac{5}{100}} = 1,81 \text{ T}$$

En (3.2) se muestra la ecuación fundamental del transformador, que relaciona el voltaje con el flujo magnético del núcleo.

$$E_{rms} = 4.44 N \Phi_{max} f \quad (3.2)$$

Tomando en cuenta los 230 V por espira encontrados anteriormente, el flujo máximo que se tendrá en el núcleo magnético del transformador será de:

$$\Phi_{max} = \frac{230V / \text{espira}}{4.44 \cdot 60 \text{ Hz}} = 0,86 \text{ Wb}$$

El flujo magnético y la inducción magnética se relacionan mediante (3.3).

$$\Phi = B \cdot A \quad (3.3)$$

En la que A es la sección transversal del núcleo, la cual atraviesa el flujo magnético. Para la columna del núcleo, dicha sección es:

$$S_{c_{columna}} = \frac{\Phi_{max}}{B} = \frac{0,86 \text{ Wb}}{1,81 \text{ T}} = 0,4771 \text{ m}^2$$

No toda la sección del núcleo corresponde al acero. Existe cierto porcentaje de la sección que está formada por material aislante para evitar la circulación de las corrientes de Foucault. Se debe incluir un factor de apilamiento para tomar en cuenta este aumento en la sección. Para el ejemplo, se ha tomado un factor de apilamiento de 0,97 con lo cual la sección bruta de la columna será:

$$S_{c_{bruta}} = \frac{S_{c_{columna}}}{fu} = \frac{0,4771 \text{ m}^2}{0,97} = 0,4918 \text{ m}^2$$

Para transformadores de potencia, la sección recta de la columna puede ser considerada como de forma circular. El diámetro de la columna será:

$$D_{columna} = 2 \sqrt{\frac{S_{c_{bruta}}}{\pi}} = 2 \sqrt{\frac{0,4918 m^2}{\pi}} = 0,7913 m$$

El yugo debe soportar los esfuerzos laterales de la estructura del núcleo. Se lo considera, con una sección 20% superior a la de las columnas.

$$S_{c_{yugo}} = 1,20 \times S_{c_{bruta}} = 1,20 \times 0,4918 m^2 = 0,5902 m^2$$

Con lo cual, el diámetro del yugo será $0,8669 m$.

3.4. CONDUCTORES Y DEVANADOS

Los datos iniciales para el dimensionamiento de los devanados son:

Densidad de corriente:	3 A/mm ²
Espesor del recubrimiento de los conductores:	0,5 mm
Altura estimada del devanado:	2 m

3.4.1. CORRIENTE POR LOS DEVANADOS

La corriente que circula por el devanado serie es la corriente de línea del auto-transformador en el lado primario. Con los datos de potencia monofásica y voltaje fase neutro, se tiene:

$$I_s = \frac{S_1}{(V_1 / \sqrt{3})}$$

$$I_s = \frac{125 MVA}{230 kV / \sqrt{3}} = 941 A$$

El terciario tiene configuración en delta, por lo tanto la corriente calculada es:

$$I_t = \frac{S_t}{V_3}$$

$$I_t = \frac{40 \text{ MVA}}{13,8 \text{ kV}} = 2899 \text{ A}$$

La corriente de diseño para el devanado común es la diferencia entre la corriente de línea del secundario y la corriente del lado primario en condiciones de carga nominal.

$$I_c = \frac{S_{1\phi}}{(V_2/\sqrt{3})} - I_s$$

$$I_c = \frac{125 \text{ MVA}}{138 \text{ kV}/\sqrt{3}} - 941 \text{ A} = 628 \text{ A}$$

En la Tabla 3.2 se resume el voltaje, la corriente y la potencia nominal de cada devanado.

Tabla 3.2
Potencia nominal de cada devanado

Devanado	Voltaje (kV)	Corriente (A)	Potencia Nominal (MVA)
Terciario	13,80	2899	40
Común	79,68	628	50
Serie	53,12	941	50

3.4.2. SECCIÓN DE LOS CONDUCTORES

En la Tabla 3.3 se muestran las secciones de los conductores y los diámetros res-

pectivos que resultan de las corrientes calculadas y de la densidad de corriente de 3 A/mm^2 escogida inicialmente.

Tabla 3.3
Sección y diámetro de los
conductores que conforman los devanados

Devanado	Sección del conductor mm^2	Diámetro mm
Terciario	966,18	35,07
Común	209,18	16,31
Serie	313,77	19,98

Si el conductor de cobre tiene una sección demasiado grande, se producirán corrientes circulantes a través de la misma, las cuales aumentarán las pérdidas bajo carga. Para evitar esto, cuando el transformador es de potencia considerable, los conductores se conforman por medio de pletinas de forma rectangular. Como regla general, se aplican conductores de pletinas cuando el diámetro del conductor es mayor a 3,5 mm. En el presente diseño, todos los devanados cumplen con esta condición.

En la Tabla 3.4 se muestra el número de pletinas consideradas inicialmente para cada devanado con la correspondiente sección que deberá tener cada pletina para completar la sección total de cada conductor y que se acotó en la Tabla 3.2.

Tabla 3.4
Número de pletinas y sección de cada una
en los tres devanados

Devanado	Número de pletinas	Sección de cada pletina mm^2
-----------------	-------------------------------	---

Terciario	14	69,01
Común	3	69,72
Serie	5	62,75

Los fabricantes tienen pletinas con características definidas, las cuales se muestran en la Tabla 3.5. De éstas deben escoger las más acordes con el diseño a realizar. El ancho de la pletina debe ser por lo menos dos veces el alto para evitar la presencia de corrientes circulantes.

Se han escogido las pletinas con las características mostradas en la Tabla 3.6. Adicionalmente se muestra la sección de cada pletina y la densidad de corriente que circulará bajo estas dimensiones de conductores.

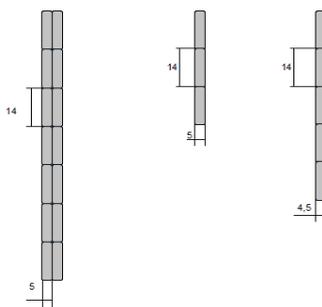
Tabla 3.5
Características de pletinas existentes en el mercado

Ancho (mm)	Espesor (mm)																	
	0.80	0.90	1.00	1.12	1.25	1.40	1.60	1.80	2.00	2.24	2.50	2.80	3.15	3.55	4.00	4.50	5.00	
2.00	1.46	1.63	1.79	2.03	2.29	2.59												
2.24	1.66	1.84	2.03	2.29	2.59	2.92	3.37											
2.50	1.86	2.08	2.29	2.59	2.91	3.29	3.79	4.14										
2.80	2.10	2.35	2.59	2.92	3.29	3.71	4.27	4.68	5.24									
3.15	2.38	2.66	2.94	3.31	3.72	4.20	4.83	5.31	5.94	6.69								
3.55	2.70	3.02	3.34	3.76	4.22	4.76	5.47	6.03	6.74	7.59	8.33							
4.00	3.06	3.43	3.79	4.27	4.79	5.39	6.19	6.84	7.64	8.60	9.45	10.65						
4.50	3.46	3.88	4.29	4.83	5.41	6.09	6.99	7.74	8.64	9.72	10.70	12.05	13.03					
5.00	3.86	4.33	4.79	5.39	6.04	6.79	7.79	8.64	9.64	10.64	11.95	13.45	15.20	17.20				
5.60	4.34	4.87	5.39	6.06	6.79	7.63	8.75	9.72	10.84	12.02	13.45	15.13	17.09	19.33	21.54			
6.30	4.90	5.50	6.09	6.84	7.63	8.61	9.87	10.96	12.24	13.75	15.20	17.09	19.30	21.62	24.34	27.49		
7.10		6.22	6.89	7.74	8.66	9.73	11.15	12.42	13.84	15.54	17.20	19.33	21.82	24.60	27.54	31.09	34.64	
8.00			7.79	8.75	9.79	10.99	12.59	14.04	15.64	17.56	19.45	21.85	24.55	27.85	31.14	35.14	38.14	
9.00				9.87	11.04	12.39	14.19	15.84	17.64	19.60	21.95	24.65	27.80	31.40	35.14	39.64	44.14	
10.00					12.29	13.79	15.79	17.64	19.64	22.04	24.45	27.45	30.95	34.95	39.14	44.14	49.14	
11.20						15.47	17.71	19.80	22.04	24.73	27.45	30.81	34.73	39.21	43.94	49.54	55.14	
12.50							19.79	22.14	24.64	27.64	30.70	34.45	38.83	43.83	49.14	55.39	61.64	
14.00								24.84	27.64	31.00	34.45	38.65	43.55	49.15	55.14	62.14	69.14	
16.00									31.64	35.48	39.45	44.25	49.85	56.25	63.14	71.14	79.14	

Tabla 3.6
Características del conductor conformado
por las pletinas de fábrica

Devanado	Pletinas			Densidad de corriente A/mm ²
	Ancho mm	Alto mm	Sección mm ²	
Terciario	14	5	69,14	2,99
Común	14	5	69,14	3,03
Serie	14	4,5	62,14	3,03

En la Figura 3.3 se muestra la estructura de cada conductor de acuerdo a las características de las pletinas definidas en los párrafos anteriores. Las dimensiones de cada conductor se muestran en la Tabla 3.7.



*Figura 3.3.- Estructura de los devanados terciario, común y serie respectivamente.
 Las dimensiones se dan en milímetros*

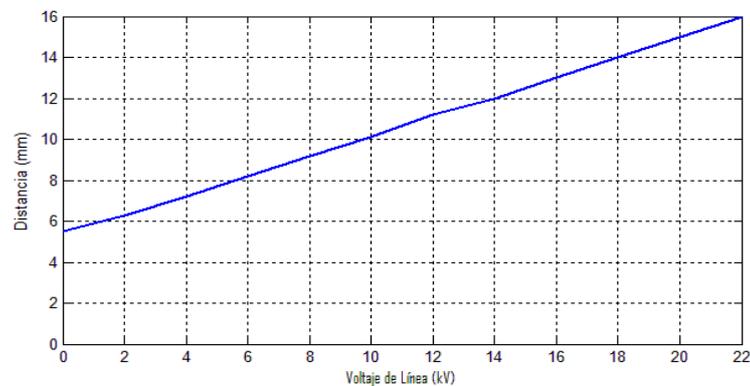
Tabla 3.7
Dimensiones del conductor que conforma cada devanado

Devanado	Número de Pletinas	Dimensiones del conductor (mm)
----------	--------------------	--------------------------------

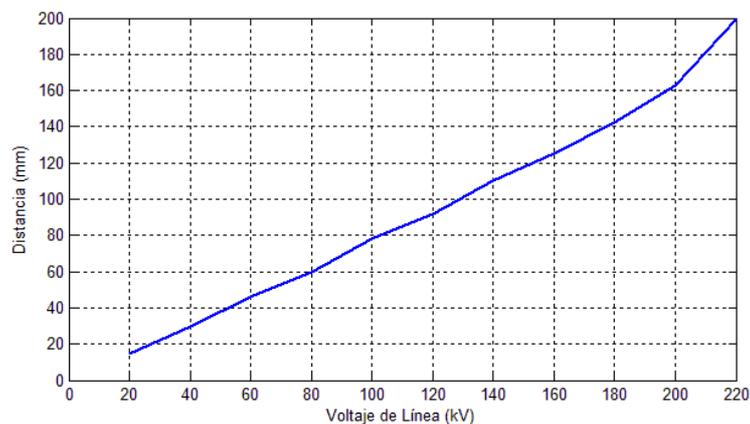
	Alto	Ancho	Alto	Ancho
Terciario	7	2	98	10
Común	5	1	42	5
Serie	3	1	70	4,5

3.4.3. DIMENSIONES DE LOS ARROLLAMIENTOS

Primeramente se debe tomar en cuenta la separación que debe existir entre cada devanado y el núcleo, tanto en sentido radial como axial, y la separación entre devanados. Esta separación depende del nivel de voltaje ya que es la que brinda el aislamiento suficiente para evitar fallas a tierra en el interior del transformador. En la Figura 3.4 se pueden observar las referidas distancias en función del voltaje de línea.



(a)



(b)

Fig. 3.4.- Distancia del devanado al núcleo o entre devanados en función del voltaje de línea

De acuerdo a los gráficos anteriores, las distancias en el interior del transformador son las siguientes:

Distancia Terciario – Núcleo:	12 mm
Distancia Común – Terciario:	110 mm
Distancia Serie – Común:	200 mm
Distancia Serie – Núcleo:	200 mm

La altura de los devanados se relaciona con la altura de cada conductor (ver Tabla 3.6), el número de espiras y el número de discos que se tienen a lo largo del devanado. Por ejemplo, el devanado terciario consta de 60 espiras y se ha establecido un número de 20 discos. Las espiras están conformadas con un conductor de 98 mm de alto y 10 mm de ancho; entre cada disco se tiene una separación de 5 mm constituida por soportes de papel aislante. De acuerdo a esto, la altura del devanado terciario es:

$$H_t = 20 \text{ discos} \times (98 \text{ mm} + 5 \text{ mm}) = 2060 \text{ mm}$$

Como se tienen 20 discos a lo largo del devanado terciario y 60 espiras, el número de conductores que se encuentran radialmente son 3. De acuerdo a esto, el espesor del devanado terciario es:

$$E_t = 3 \text{ conductores} \times 10 \text{ mm} = 30 \text{ mm}$$

Anteriormente se calculó que el diámetro de la columna del núcleo es de 0,7913 m. Los diámetros interior y exterior para el devanado terciario, considerando la separación entre devanado terciario y núcleo, serán:

$$D_{int} = 791,3 \text{ mm} + 2 \cdot 12 \text{ mm} = 815,3 \text{ mm}$$

$$D_{ext} = 815,3 \text{ mm} + 2 \cdot 30 \text{ mm} = 875,3 \text{ mm}$$

Con un procedimiento similar, se obtienen las dimensiones para todos los devanados, las mismas que se muestran en la Tabla 3.8.

Tabla 3.8
Dimensiones de los devanados

Devanado	Número de discos	Espesor (mm)	Diámetro Interno (mm)	Diámetro Externo (mm)	Altura (mm)
Terciario	20	30	815,3	875,3	2.060,3
Común	48	40	1.095,3	1.175,3	2.256,0
Serie	29	36	1.575,3	1.647,3	2.175,0

3.5. PÉRDIDAS EN EL NÚCLEO

Las pérdidas en el núcleo se deben principalmente al lazo de histéresis que se presenta en el material magnético al ser sometido a un campo alterno. En cada ciclo existirá energía que absorbe el núcleo y energía que se devuelve, sin embargo no toda la energía volverá al sistema, ya que parte de la misma se transformará en calor.

La energía por unidad de volumen viene dada por la ecuación (3.4).

$$w = \int_{B_1}^{B_2} H dB \quad (3.4)$$

En la que H es la intensidad de campo magnético y B es la inducción magnética.

De acuerdo a (3.4), la energía que se pierde dependerá principalmente de la inducción magnética máxima a la cual va a trabajar el equipo. Por su naturaleza cíclica, la pérdida también dependerá de la frecuencia. Se han realizado estudios experimentales para determinar la pérdida por unidad de masa. En (3.5) se presenta un método de cálculo de dichas pérdidas.

$$p_o = C f^n B_{max}^m \quad W / libra \quad (3.5)$$

C , n , m son constantes que dependen del material del que está conformado el núcleo. B_{max} es la inducción máxima a la que va a trabajar el equipo dada en Gauss⁵ y f es la frecuencia del sistema en Hertz. Para los materiales que actualmente se emplean en la construcción del núcleo del transformador se tienen los siguientes valores:

$$\begin{aligned} C &= 1,16 \times 10^{-10} \\ n &= 1,36 \\ m &= 1,71 \end{aligned}$$

Para el presente diseño, las pérdidas por libra son:

$$p_o = 1,16 \times 10^{-10} (60 \text{ Hz})^{1,36} (18.100 \text{ Gauss})^{1,71} = 0,58 \text{ W / libra} = 1,47 \text{ W / kg}$$

La ecuación anterior es una adaptación de la ecuación original publicada en la referencia [13] para que, con los nuevos materiales existentes, las pérdidas sean las reducidas de las que se tienen actualmente y que se muestran en la referencia [11].

El siguiente paso es el cálculo del volumen del núcleo. La altura de la ventana viene dada por un 15% de incremento a la mayor longitud de los devanados:

5 Las unidades del Sistema Internacional para la inducción magnética son los Teslas. Sin embargo, se han conservado en este caso las unidades originales de la referencia [13] y se realizarán las conversiones correspondientes en el resultado final.

$$H_{Fe} = \left(1 + \frac{15}{100}\right) 2.256 \text{ mm} = 2.594 \text{ mm}$$

El ancho de la ventana es la suma de cada uno de los espesores de los devanados y de la separación entre ellos y hacia el núcleo. Se tiene por lo tanto:

$$W_{Fe} = (30 + 40 + 36 + 12 + 110 + 200 + 200) \text{ mm} = 628 \text{ mm}$$

Con las dimensiones anteriores de la ventana y con las columnas y los yugos, se puede calcular el volumen del núcleo del autotransformador.

$$Vol_{Fe} = 3 \pi \left(\frac{791,3 \text{ mm}}{2}\right)^2 2.594 \text{ mm} + 4 \pi \left(\frac{866,9 \text{ mm}}{2}\right)^2 (628 \text{ mm} + 791,3 \text{ mm})$$

$$Vol_{Fe} = 5,2562 \text{ m}^3$$

La densidad del núcleo es de 7650 kg/m³, con lo cual se tiene una masa total de hierro de:

$$M_{Fe} = 5,2562 \text{ m}^3 \cdot 7.650 \text{ kg/m}^3 = 40.210 \text{ kg}$$

Esto da un total de pérdidas de hierro de:

$$P_o = 40.210 \text{ kg} \cdot 1,47 \text{ W/kg} = 59,11 \text{ kW}$$

3.6. PÉRDIDAS EN EL COBRE

A una temperatura de 75°, la densidad y la resistividad del cobre son:

densidad 8900 kg/m³
 resistividad 2,16 · 10⁻⁸ Ω·m

Con los datos de la Tabla 3.7 se obtiene el diámetro medio del devanado terciario:

$$D_{medior} = \frac{789,3 - 709,3}{2} \text{ mm} = 749,4 \text{ mm}$$

$$D_{medior} = 0,7494 \text{ m}$$

El área efectiva del conductor es función del número de pletinas y de la sección de cada pletina. De las tablas 3.4, 3.5 y 3.6 se obtiene:

$$S_{c_t} = 14 \cdot 69,14 \text{ mm}^2 = 9,68 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

La masa del cobre depende del volumen del devanado, el cual a su vez es función de la sección efectiva del conductor, del diámetro medio y del número de espiras:

$$Masa_{Cut} = \pi \cdot 0,7494 \text{ m} \cdot 9,68 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot 60 \text{ espiras} \cdot 8900 \text{ kg/m}^3$$

$$Masa_{Cut} = 1.622,46 \text{ kg}$$

La longitud de conductor es función del diámetro medio y del número de espiras:

$$long_t = \pi \cdot 0,7494 \text{ m} \cdot 60 \text{ espiras}$$

$$long_t = 159,35 \text{ m}$$

La resistencia de un material viene definida por (3.6).

$$R = \frac{\rho l}{A} \tag{3.6}$$

Por lo tanto, la resistencia para el devanado terciario es:

$$R_t = 2,16 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{159,35}{9,68 \cdot 10^{-4}} \Omega$$

$$R_t = 3,566 \cdot 10^{-3} \Omega$$

Con las corrientes calculadas en la sección 3.4.1, la potencia de pérdida en el de-

vanado terciario es:

$$P_{Li} = (2899 A)^2 \cdot 3,566 \cdot 10^{-3} \Omega = 29,88 kW$$

Con un procedimiento similar al descrito, se calculan las pérdidas para los devanados serie y común, cuyos resultados se presentan en la Tabla 3.9.

En la Tabla 3.10 se muestra la masa total del cobre y la pérdida por kilogramo para cada devanado.

Tabla 3.9
Pérdidas con carga para cada devanado

Devanado	Diámetro medio (m)	Área del conductor (m ²)	Longitud total del conductor (m)	Resistencia (m Ω)	Pérdida bajo carga (kW)
Terciario	0,7494	9,68 · 10 ⁻⁴	159,4	3,556	29,88
Serie	1,0594	2,07 · 10 ⁻⁴	1234	1,285	50,61
Común	1,5589	3,11 · 10 ⁻⁴	1169	8,130	72,03
				Total	152,52

Tabla 3.10
Masa total de cobre y pérdidas bajo carga por kilogramo para los tres devanados

Devanado	Masa total (kg)	Pérdida por kilogramo (W/kg)
Terciario	1.373	21,76
Común	2.278	22,21
Serie	3.233	22,27

3.7. REACTANCIA DE DISPERSIÓN

El cálculo de la reactancia de dispersión, en porcentaje, viene dado por las ecuaciones 3.7.

$$\begin{aligned}
 X_{ct} &= 2\pi f \mu_0 100 \frac{Nt}{Vt^2} \frac{St}{Hfe} \left(\pi \overline{Dct} a_1 + \frac{(\pi \overline{Dt} At + \pi \overline{Dc} Ac)}{3} \right) \\
 X_{sc} &= 2\pi f \mu_0 100 \frac{Nc}{Vc^2} \frac{Sc}{Hfe} \left(\pi \overline{Dsc} a_2 + \frac{(\pi \overline{Ds} As + \pi \overline{Dc} Ac)}{3} \right) \\
 X_{st} &= 2\pi f \mu_0 100 \frac{Ns}{Vs^2} \frac{Ss}{Hfe} \left(\pi \overline{Dct} a_3 + \frac{(\pi \overline{Ds} As + \pi \overline{Dt} At)}{3} \right)
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Los diferentes términos de las ecuaciones se muestran en la Figura 3.5.

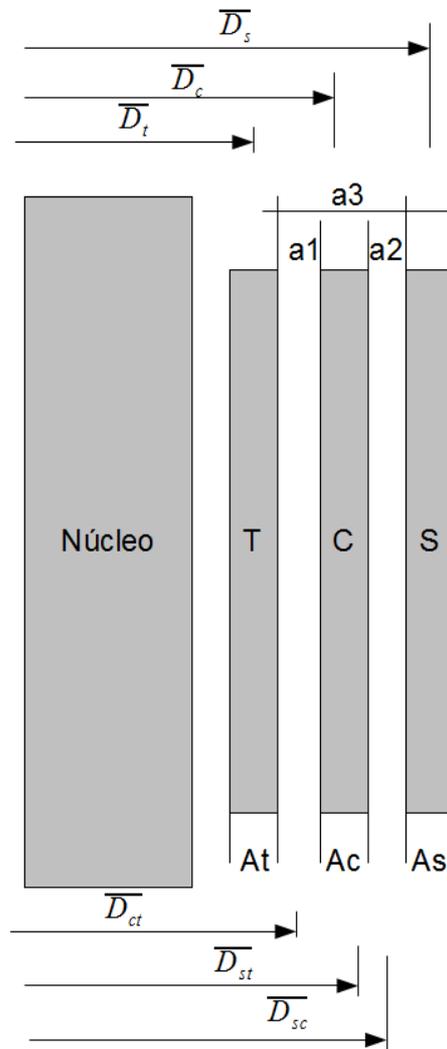


Fig. 3.5.- Variables en las dimensiones internas del transformador

Los diámetros medios entre devanados son los siguientes:

Diámetro medio común – terciario D_{ct} :	904,3 mm
Diámetro medio serie – común D_{sc} :	1.309,1 mm
Diámetro medio serie – terciario D_{st} :	1.154,1 mm

El espesor de los devanados está indicado en la Tabla 3.7. La capacidad de cada devanado viene dada por la corriente que circula por el mismo y el voltaje. Obsérvense los resultados en la Tabla 3.11.

Tabla 3.11
Capacidad de cada devanado

Devanado	Corriente (A)	Voltaje (kV)	Potencia (MVA)
Terciario	2.899	13,80	40
Común	628	79,68	50
Serie	941	53,12	50

Se reemplazan los valores correspondientes en cada una de las ecuaciones y se obtienen las siguientes reactancias de dispersión:

Reactancia común – terciario:	9,80%
Reactancia serie - común:	7,84%
Reactancia serie – terciario:	15,09%

Todas estas reactancias se expresan en porcentaje con la base propia del transformador.

3.8. SIMULACIÓN EN MAG_TRAFO

Se ingresan los datos de la geometría del transformador y se determina su comportamiento ante diferentes modos de operación.

Primeramente se tiene la energización del transformador, es decir, el funcionamiento del transformador sin carga. La excitación se da en el devanado primario.

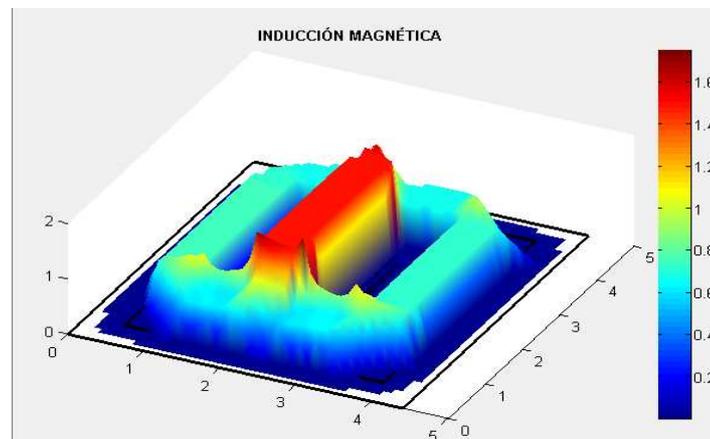
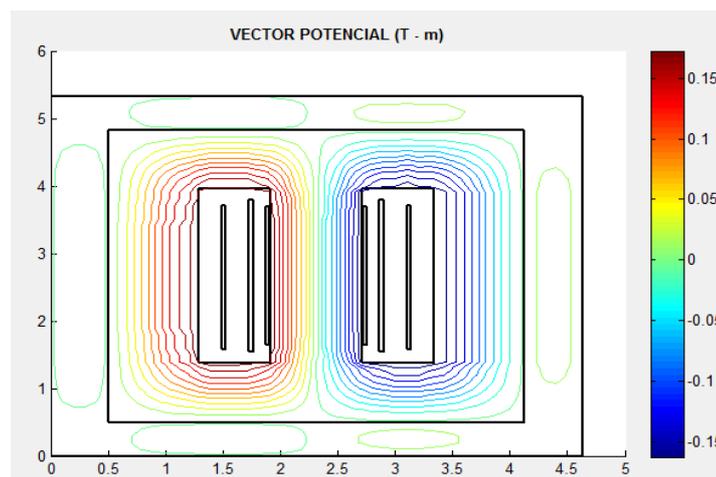
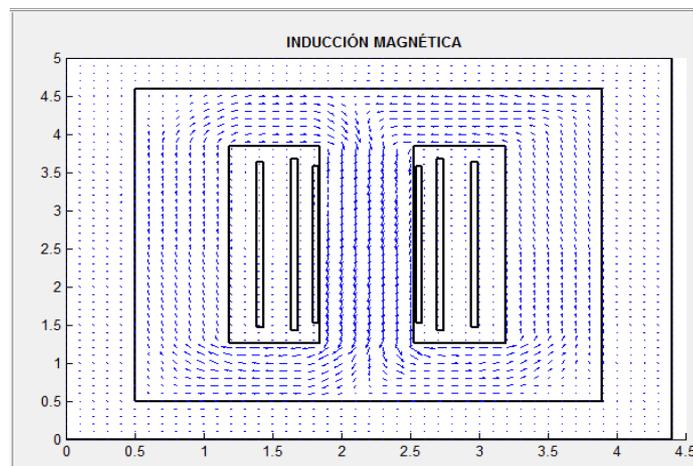


Fig.3.6.- Inducción Magnética – Autotransformador en vacío

En las Figuras 3.6 y 3.7 se puede observar el comportamiento de la inducción magnética cuando el transformador está funcionando en vacío. Este paso es necesario para determinar en las condiciones reales, las características de la corriente de excitación, cuyos resultados serán utilizados en las siguientes etapas, que corresponden al funcionamiento bajo carga nominal y bajo condiciones de cortocircuito.



(a)



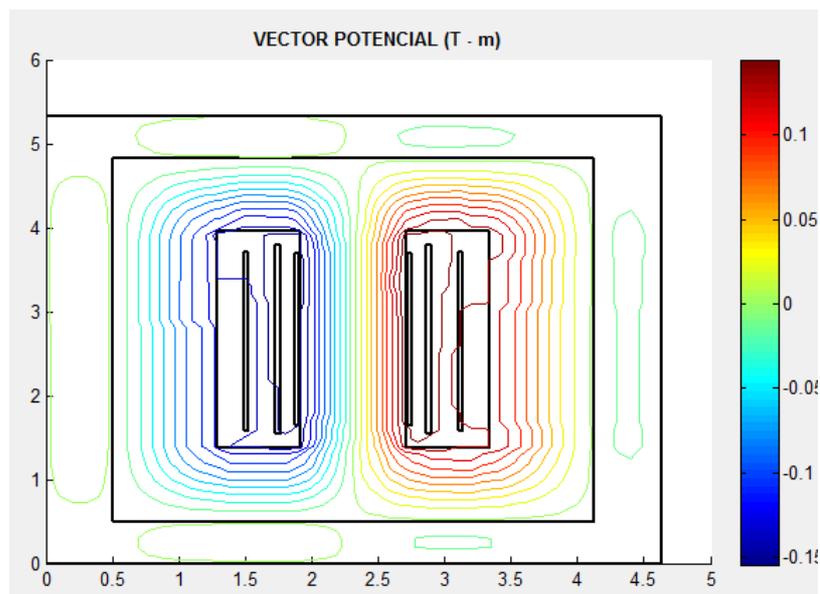
(b)

Fig. 3.7. Campo magnético para el autotransformador en vacío.

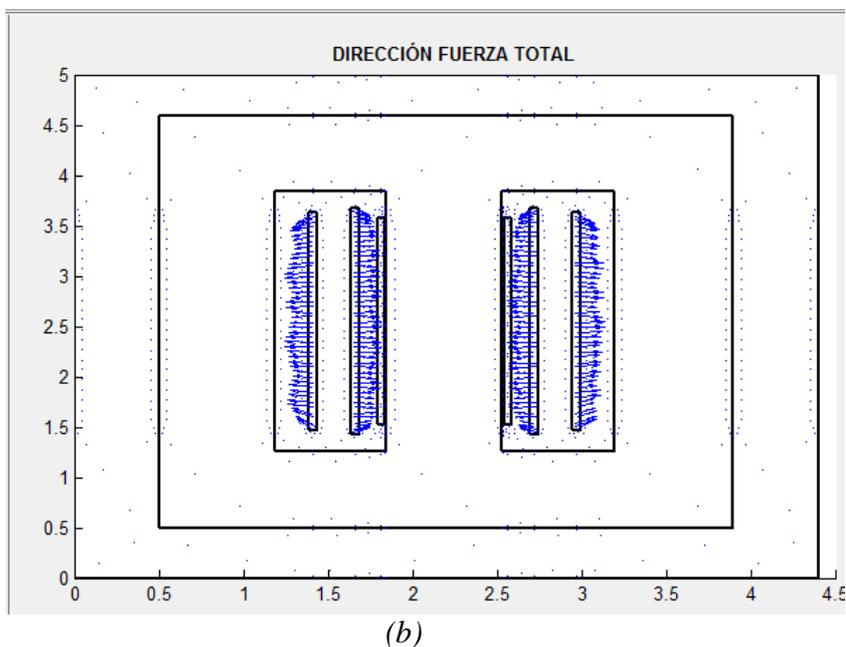
(a) Equipotenciales del vector potencial magnético

(b) Dirección de la inducción magnética

La siguiente simulación corresponde al funcionamiento del transformador ante carga nominal.



(a)



*Fig.3.8.- Inducción Magnética y Fuerzas Electromecánicas
para el autotransformador con carga nominal*

Se ha incluido en este gráfico la dirección de la fuerza total para que se observe que cumple con la condición de que las fuerzas electromecánicas del devanado interno se dirigen hacia el interior, en tanto que las fuerzas del devanado exterior se dirigen hacia afuera.

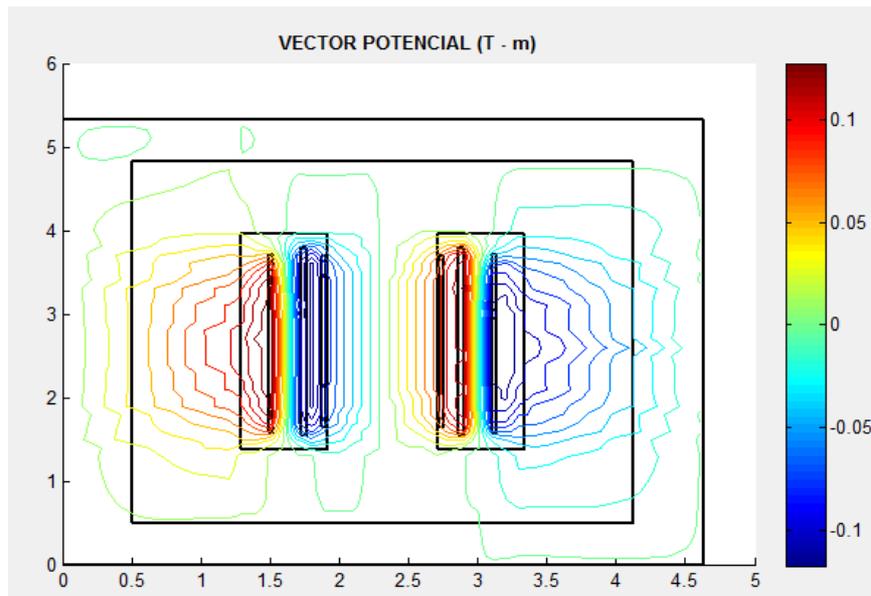
Para simular el transformador en condiciones de falla, se considera una corriente resultante de un cortocircuito en barras de 138 kV, considerando un voltaje nominal en el lado de 230 kV. Debido a la impedancia de diseño de 7,84% obtenida anteriormente, la corriente máxima de falla que circulará por los devanados será:

$$I_{cc} = \frac{1}{(7,84/100)} = 12,8 \text{ p.u.}$$

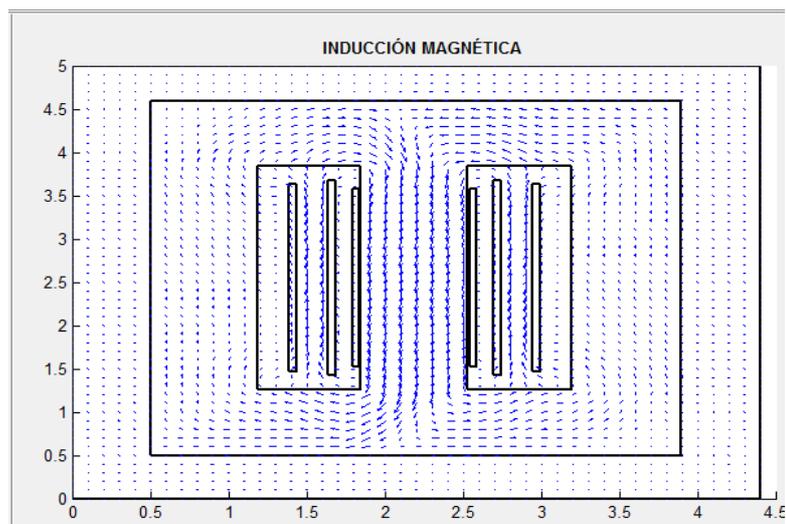
De acuerdo al diseño, cuando el transformador está con carga nominal, se tiene una densidad de corriente de 3 A/mm². En caso de falla la densidad de corriente será:

$$J = 12,8 \sqrt{3} \text{ A/mm}^2 = 38,4 \text{ A/mm}^2$$

El comportamiento del campo magnético se puede observar en la Figura 3.9.



(a)



(b)

Fig.3.9.- Inducción Magnética para el autotransformador con corriente de falla

Obsérvese que el mayor flujo de dispersión se da entre el devanado común y el serie, debido a que el devanado terciario no tiene mayor influencia en condiciones de cortocircuito.

El valor de la densidad de fuerza máxima es de $4,558 \times 10^7 \text{ N/m}^3$, la misma que se presenta en el devanado exterior. Para obtener la tensión que se presenta en los conductores, se debe multiplicar este valor por la longitud media en la que dicha fuerza se presenta, es decir, el perímetro de la circunferencia media del devanado exterior.

$$\sigma_{avg} = \pi D_{mHV} f = \pi 1,6 \text{ m} \times 4,558 \times 10^7 \text{ N/m}^3 = 2,29 \times 10^8 \text{ N/m}^2$$

De acuerdo a la norma IEC 60076-5 el caso más crítico de fuerzas electromecánicas se evita con un conductor que cumpla:

$$\sigma \leq 0,9 R_{p0,2}$$

En la que $R_{p0,2}$ es el límite elástico del conductor, el cual se define como aquella tensión que cuando es aplicada deforma al conductor en un 0,2% de su longitud.

De acuerdo a lo anterior, el mínimo límite elástico para el conductor utilizado en este transformador deberá ser de:

$$R_{p0,2} > 0,9 \times 2,29 \times 10^8 \text{ N/m}^2$$

$$R_{p0,2} > 206 \text{ N/mm}^2$$

Los límites elásticos de los conductores con los que se construyen los devanados de un transformador de potencia varían de 90 a 280 N/mm^2 , con lo que se puede concluir que el transformador de este diseño cumple con las condiciones ante fuerzas electromecánicas sin ningún problema.

3.9. COMPORTAMIENTO TÉRMICO ANTE CORRIENTES DE FALLA

Como regla general se podría decir que cuando el transformador ha superado la prueba de los esfuerzos electromecánicos, se cumplen de manera simultánea las condiciones para los esfuerzos térmicos. Esto se debe a que el efecto de los primeros es mucho más rápido que el del segundo tipo de esfuerzo. Sin embargo, se presenta a continuación el cálculo del efecto térmico como parte de un protocolo de presentación del diseño del transformador.

Para el caso del cobre, la ecuación que indica el cambio de temperatura en función de la densidad de corriente viene dada por (3.8).

$$\theta_1 = \theta_0 + \frac{2(235 + \theta_0)}{\frac{106000}{J^2 t} - 1} \quad (3.8)$$

θ_1 y θ_0 son las temperaturas después y antes de la falla respectivamente. J es la densidad de corriente de falla en A/mm².

Para el caso de estudio, se considera una temperatura previa de 95°C, una densidad de corriente de falla de 38,4 A/mm² y una duración de falla de 2 s, que es el tiempo comúnmente aplicado en diseño de transformadores de potencia. Al aplicar los datos anteriores en (3.7) se tiene:

$$\theta_1 = 95^\circ C + \frac{2(235 + 95^\circ C)}{\frac{106000}{(38,4 \text{ A/mm}^2)^2 \cdot 2\text{s}} - 1} = 113^\circ C$$

La temperatura para el cobre no debe sobrepasar de 250°C. Como se puede observar, el presente diseño cumple lo anterior con un amplio margen de seguridad.

CAPÍTULO 4

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

4.1. CONCLUSIONES

La circulación de corrientes de alta intensidad por los devanados de un transformador, en conjunto con la existencia intrínseca de un campo magnético, crea fuerzas electromecánicas que podrían causar un daño permanente en el equipo.

El cálculo del campo magnético y de las fuerzas electromecánicas es en extremo complejo debido a la geometría asimétrica que tiene la estructura interna de un transformador de potencia. Los métodos analíticos requieren mucho esfuerzo y sólo servirán para ciertos casos particulares. Para la resolución de estos problemas se requiere de la utilización de métodos numéricos.

En el presente trabajo se ha desarrollado un modelo que resuelve las ecuaciones de Maxwell para determinar el campo magnético en un caso cuasiestático. Para ello se ha utilizado un método numérico basado en el análisis de elementos finitos.

Los problemas en los que se involucran derivadas parciales tienen infinitas soluciones. Por esta razón, se hace imprescindible la especificación de condiciones de borde, las cuales limitan todo el problema a una sola solución.

Conforme es mayor el número de subdominios, más cercana a la función real es la solución obtenida. Sin embargo, esto implica un mayor esfuerzo computacional que se puede complicar en su resolución. Es mejor una mayor división en aquellos puntos en los que se necesite mayor precisión debido a las

características del problema, como por ejemplo en aquellos lugares en los que se tienen variaciones en la dirección del campo magnético.

Mediante la condición de Gauge, que establece que la divergencia del vector potencial magnético se anula, el problema magnetostático para la determinación del vector potencial magnético cumple con las condiciones para ser resuelto como un problema de valor frontera por medio del método de elementos finitos.

Debido a la relación no lineal entre la intensidad de campo magnético y la inducción magnética, un proceso iterativo ha sido incluido dentro del modelo, el cual calcula en cada paso los valores de permeabilidad relativa e inducción magnética. El proceso continua hasta tener una solución confiable. Estos pasos son importantes ya que sin ellos la solución es arbitraria y es muy probable que no correspondan a lo que sucede en la realidad.

Para comprobar el modelo, se ha utilizado un transformador de geometría simple en el cual se puedan aplicar los principios de simplificación de cálculo a un circuito magnético. Los resultados finales son muy similares incluyendo el efecto de la saturación del núcleo.

Una segunda comprobación ha sido realizada mediante la comparación de los resultados del modelo con ecuaciones existentes en la literatura. Los resultados han sido muy similares a excepción de aquellos casos en los que las deformaciones en las direcciones de la inducción magnética son muy pronunciadas. La versatilidad de la formación de los elementos finitos para diversas geometrías permite reducir los errores aún en estos casos de variaciones extremas del campo magnético.

Tanto en el funcionamiento del transformador en vacío como bajo corriente nominal, el flujo magnético de manera predominante circula por el núcleo magnético de hierro; en el primer caso porque no existe una fuerza magnetomotriz aparte de la que se tiene en el devanado energizado, y en el segundo caso debido al

desbalance en fuerza magnetomotriz por la existencia de la corriente de excitación. Cuando el transformador está en condiciones de falla la corriente de excitación es despreciable y las fuerzas magnetomotrices del primario y secundario tienden a ser iguales, con lo cual se contraponen los flujos magnéticos creados por cada una de ellas y aumenta el flujo de dispersión, lo que implica el aumento de la magnitud de las fuerzas electromecánicas. Esto concuerda con la práctica en la cual la rama representativa de la corriente de excitación sólo es tomada en cuenta en corrientes de carga bajas, pero se desprecia cuando la corriente es mucho mayor, como en el caso de corrientes de falla.

El comportamiento de las fuerzas electromecánicas es diferente para el caso de un transformador de dos devanados y dos columnas con el de un transformador de dos devanados y tres columnas. En el primero las fuerzas del devanado primario y secundario provocarán una presión en los devanados hacia el núcleo del transformador. En el segundo caso, el devanado interno sufrirá la presión hacia el núcleo, en tanto que el devanado externo sufrirá tensiones que tenderán a estirar los conductores que forman parte del devanado.

Si el flujo magnético fuera uniforme y mantuviera la misma dirección en toda la longitud del camino magnético, no existirían fuerzas axiales, sólo existirían fuerzas radiales. El cambio de dirección del campo magnético hace que aparezcan fuerzas axiales justamente en aquellos puntos en los que se da dicho cambio. Por esta razón, se encuentran fuerzas axiales en los extremos de los devanados. En la parte media de los devanados, al ser axial el campo magnético, las fuerzas electromecánicas serán predominantemente radiales.

Con datos de potencia y voltajes iguales, el diseño de un transformador de dos devanados a dos columnas tendrá una magnitud de fuerzas totales mayor a la que tiene un transformador de dos devanados a tres columnas. Es por lo tanto importante realizar un análisis del comportamiento del transformador ante corrientes de falla, para determinar las implicaciones de utilizar uno de los dos diseños.

Las dimensiones del devanado, tanto en lo que se refiere a su longitud como al espesor, son las bases principales para el valor de la reactancia. Sin embargo, el querer reducir la reactancia por medio del aumento del espesor del devanado trae como consecuencia el aumento de la magnitud de las fuerzas electromecánicas. De acuerdo a las simulaciones realizadas, las fuerzas electromecánicas son mayores en los devanados de mayor espesor y menor longitud que en los devanados con menor espesor y mayor longitud, esto sin tomar en cuenta el aumento adicional en la magnitud de la corriente de falla debido a la reducción de la impedancia de dispersión.

Las fuerzas electromecánicas son mínimas cuando los devandos están distribuidos simétricamente a lo largo de la columna del núcleo. Al existir asimetrías estas fuerzas empiezan a aumentar debido al diferente comportamiento del campo magnético, el cual encuentra diferentes caminos para cerrarse de los que comúnmente se tienen en el núcleo del transformador. El efecto es tan pronunciado que cuando la asimetría se acerca al 10% en relación a la longitud total del devanado, las fuerzas pueden llegar a ser prácticamente el doble de las que se tienen cuando la configuración es simétrica.

No existe mucha variación de las fuerzas electromecánicas con el valor de la intensidad de campo magnético determinada por la curva de saturación del núcleo. Esto siempre y cuando se conserve el valor de inducción magnética de diseño, para conservar las características geométricas del núcleo. Un cambio en la inducción magnética de diseño requeriría un cambio en las dimensiones del núcleo para que se puedan cumplir los requerimientos de voltaje y número de espiras previstas, lo cual no permitiría que se puedan comparar diseños similares.

Si los devanados primario y secundario tienen diferente longitud, se tienen dos opciones: colocarlos simétricamente con respecto al eje axial, o que los dos tengan su base a la misma altura. La primera opción resulta en un menor valor de fuerzas electromecánicas que la segunda. Además, el comportamiento de las fuerzas es tal, que en el primer caso no existe la presión en la mitad del devanado

debido a la acumulación de las fuerzas axiales, en tanto que en el segundo caso esta presión está concentrada en la parte superior del devanado de mayor longitud.

Se ha desarrollado en este trabajo un diseño básico del transformador. El diseño se basa en la aplicación de circuitos magnéticos; la comprobación del mismo y el cálculo final de las fuerzas electromecánicas se lo realiza mediante el análisis de elementos finitos.

Una vez que se tiene el diseño del transformador, el cálculo de las densidades de fuerza electromecánica y de las tensiones mecánicas a las que podría ser sometido el transformador son útiles para determinar el tipo de conductor que conformará a los devanados. Los conductores son fabricados para soportar cierta tensión con una deformación de 0,2% con respecto a su longitud.

Debido a la dinámica del fenómeno de cortocircuito en un sistema de potencia, los efectos electromecánicos serán más relevantes que los efectos térmicos. En este tipo de fenómeno, el efecto térmico será despreciable por los altos valores de constantes de tiempo que se tienen para la conducción del calor del devanado al aceite y al papel.

4.2. RECOMENDACIONES

Dentro de los procesos de adquisición de transformadores de potencia se requiere dar especial atención a los cálculos y pruebas de soporte de los equipos a esfuerzos electromecánicos debidos a corrientes de falla. Si bien es cierto que las pruebas de cortocircuito son pruebas tipo que pueden ser inclusive destructivas, los diferentes certificados otorgados por laboratorios reconocidos a nivel internacional constituyen un respaldo al proceso constructivo que la fábrica tiene en cuanto a este tema. Por otro lado, se debe exigir una memoria de cálculo de soporte a corrientes de falla en la que consten los datos fundamentales de diseño, la cual garantice la confiabilidad del equipo. Estos datos serán útiles en etapas

futuras de gestión de activos de transformadores para realizar un estudio integral del proceso de envejecimiento que han sufrido los mismos, y su vida útil remanente.

El avance investigativo en la resolución de campos electromagnéticos de un transformador de potencia es muy importante debido a la comprensión del funcionamiento del equipo y a las consecuencias en cuanto a análisis de los diferentes problemas que podrían aparecer durante su vida útil. Se debería incentivar este tipo de investigación hasta un punto en el cual se tenga una clara concepción del diseño del transformador en todas sus facetas: de campo magnético, de campo eléctrico y termodinámicas.

En el presente trabajo se ha utilizado la condición de borde de Dirichlet para la determinación del campo magnético. En un estudio complementario se podría modificar el modelo para determinar el campo magnético con condición de borde de Neumann y realizar comparaciones en cuanto a facilidad de programación, velocidad de resolución y mejor aproximación a la solución cualitativa.

El modelo desarrollado se basa en una aproximación por medio de polinomios de primer grado. Si se utiliza una aproximación cuadrática, la solución al problema será más exacta inclusive con menor cantidad de subdominios. Un desarrollo futuro podría ser la adaptación del presente modelo a uno con aproximaciones cuadráticas e inclusive cúbicas.

Dependiendo del objetivo del estudio, se podría proseguir con la investigación del comportamiento del campo magnético en un transformador mediante modelos tridimensionales, para los cuales también es válido el método de elementos finitos.

El desarrollo realizado en este trabajo es sólo una parte para poder realizar un análisis del estado de los transformadores de un sistema. Se requiere continuar con la investigación en cuanto a diseño y vida útil del equipo. Los temas futuros en los cuales se podría aplicar el análisis de elementos finitos son la de distribu-

ción del campo eléctrico ante impulsos de alto voltaje en los devanados del transformador y la determinación de la distribución de calor interno para la determinación del punto más caliente para un diseño determinado. Los dos temas tienen su formulación basada en ecuaciones de derivadas parciales de cálculo vectorial similar a la ecuación resuelta en el modelo desarrollado para la determinación del campo magnético.

Para el diseño del transformador, el cálculo de la densidad de corriente para un cortocircuito ha sido realizado asumiendo un caso de barra infinita con la intervención única de la impedancia del transformador para la limitación de la corriente de falla. Esto provoca un sobredimensionamiento de los devanados, ya que la corriente será mayor, la densidad de fuerza será más grande y se requerirá un devanado más robusto. Para optimizar el diseño se requiere del circuito equivalente del transformador en los terminales en los que será conectado.

ANEXO 1

DEMOSTRACIÓN DE QUE EL FUNCIONAL CORRESPONDE A LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE VALOR FRONTERA

Tal como se expresa en el Capítulo 2, un problema de valores frontera viene dado por la función de un operador L :

$$L\Phi = f$$

Siendo f la función de generación del campo Φ .

Si el operador L es autoadjunto, su producto interno⁶ cumple:

$$\langle L\phi, \psi \rangle = \langle \phi, L\psi \rangle$$

Además, si es un operador definido positivo, se cumple:

$$\langle L\phi, \phi \rangle \begin{cases} > 0 & \phi \neq 0 \\ = 0 & \phi = 0 \end{cases}$$

A continuación se procede con la demostración de que la solución del problema de valor frontera definido anteriormente viene dada por la minimización del funcional dado por (AI.1).

$$F(\phi) = \frac{1}{2} \langle L\phi, \phi \rangle + \frac{1}{2} \langle \phi, f \rangle - \frac{1}{2} \langle f, \phi \rangle \quad (\text{AI.1})$$

⁶ El producto interno cumple:

- i. $\langle a, b \rangle = \langle b, a \rangle$
- ii. $\langle a, \lambda b + \mu c \rangle = \lambda \langle a, b \rangle + \mu \langle a, c \rangle$

Los corchetes angulares denotan el producto interno definido por (A1.2).

$$[\phi, \psi] \equiv \int_{\Omega} \phi \bar{\psi} d\Omega \quad (\text{A1.2})$$

Ω es el dominio del problema y el asterisco significa el complejo conjugado de la función en cuestión.

Primeramente se procede con demostrar que la ecuación diferencial $L\Phi = f$ es consecuencia de la formulación variacional de $F(\Phi)$. Para ello $L\Phi = f$ debe resultar de la solución de (A1.3).

$$\delta F = 0 \quad (\text{A1.3})$$

Las reglas de la diferenciación en el producto interno son las mismas que se aplican en cualquier producto. Por lo tanto, al derivar la ecuación anterior en (A1.1), se tiene:

$$\delta F = \frac{1}{2} [\delta \phi, \phi] + \frac{1}{2} [L\phi, \delta \phi] + \frac{1}{2} [\delta \phi, f] - \frac{1}{2} [f, \delta \phi] \quad (\text{A1.4})$$

Ya que el operador L es autoadjunto, se puede decir que:

$$\frac{1}{2} [L\delta \phi, \phi] \equiv \frac{1}{2} [\delta \phi, L\phi] \quad (\text{A1.5})$$

Reemplazando (A1.5) en (A1.4), y mediante la aplicación de las propiedades de producto interno, se llega a (A1.6).

$$\begin{aligned} \delta F &= \frac{1}{2} [\delta \phi, L\phi - f] + \frac{1}{2} [L\phi - f, \delta \phi] \\ &= \frac{1}{2} [\delta \phi, L\phi - f] + \frac{1}{2} [\delta \phi, L\phi - f] \end{aligned} \quad (\text{A1.6})$$

Al restarse el primer término del lado derecho de (A1.6) del segundo término que

es su conjugado, sólo permanece la parte real.

$$\delta F = \int \delta \mathbf{A} \cdot \mathbf{L} - f \quad (\text{A1.7})$$

\int denota la parte real de su atributo.

Ahora, si se aplica el requerimiento de que $\delta F = 0$, se tiene:

$$\int \delta \mathbf{A} \cdot \mathbf{L} - f = 0 \quad (\text{A1.8})$$

Ya que \int es una función arbitraria, (A1.8) necesariamente tiene que cumplir:

$$\mathbf{L} - f = 0 \quad (\text{A1.9})$$

Es decir, se ha llegado a la primera parte de la demostración que era el obtener el problema de valor frontera desde su formulación variacional.

La segunda parte del problema consiste en demostrar que el punto en cuestión es un mínimo del funcional F . Para ello se toma la segunda diferencial del funcional:

$$\delta(\delta F) = \delta F(\mathbf{A} + \delta \mathbf{A}) - \delta F(\mathbf{A}) = \int \delta \mathbf{A} \cdot \mathbf{L} \delta \mathbf{A}$$

Ya que L es definida positiva, se comprueba que $\delta(\delta F) > 0$ lo cual es condición necesaria y suficiente para decir que el punto encontrado corresponde a un mínimo.

De esta manera, se ha demostrado que F es una minimización del variacional que se ha utilizado en el capítulo 2 para llegar a la solución de la ecuación que determina el campo magnético.

ANEXO 2

MAGNITUD DE LAS FUERZAS ANTE ASIMETRÍAS EN LOS DEVANADOS DEL TRANSFORMADOR DE LA SECCIÓN 2.1.3.

Asimetría %	Fuerza Axial	Fuerza Radial	Fuerza Total
0	$3,3788 \cdot 10^7$	$9,2564 \cdot 10^7$	$9,2615 \cdot 10^7$
0,2	$3.4363 \cdot 10^7$	$9.3137 \cdot 10^7$	$9.3171 \cdot 10^7$
0,4	$3.3812 \cdot 10^7$	$9.3128 \cdot 10^7$	$9.3180 \cdot 10^7$
0,6	$3.2962 \cdot 10^7$	$9.3248 \cdot 10^7$	$9.3324 \cdot 10^7$
0,8	$3.2362 \cdot 10^7$	$9.3241 \cdot 10^7$	$9.3344 \cdot 10^7$
1,0	$3.1747 \cdot 10^7$	$9.3235 \cdot 10^7$	$9.3369 \cdot 10^7$
1,2	$3.1404 \cdot 10^7$	$9.3115 \cdot 10^7$	$9.3279 \cdot 10^7$
1,4	$3.0783 \cdot 10^7$	$9.3108 \cdot 10^7$	$9.3310 \cdot 10^7$
1,6	$3.0760 \cdot 10^7$	$9.2857 \cdot 10^7$	$9.3082 \cdot 10^7$
1,8	$3.0848 \cdot 10^7$	$9.2849 \cdot 10^7$	$9.3115 \cdot 10^7$
2,0	$3.2191 \cdot 10^7$	$9.2395 \cdot 10^7$	$9.2666 \cdot 10^7$
3,0	$3.5573 \cdot 10^7$	$9.1447 \cdot 10^7$	$9.1831 \cdot 10^7$
4,0	$3.7218 \cdot 10^7$	$9.3308 \cdot 10^7$	$9.4501 \cdot 10^7$
5,0	$4.1894 \cdot 10^7$	$9.3301 \cdot 10^7$	$9.5072 \cdot 10^7$
6,0	$4.7174 \cdot 10^7$	$9.3293 \cdot 10^7$	$9.5751 \cdot 10^7$
7,0	$5.2772 \cdot 10^7$	$9.3283 \cdot 10^7$	$9.6535 \cdot 10^7$
8,0	$5.8753 \cdot 10^7$	$9.3270 \cdot 10^7$	$9.7421 \cdot 10^7$
9,0	$5.3493 \cdot 10^7$	$9.3262 \cdot 10^7$	$9.8412 \cdot 10^7$
10,0	$5.6592 \cdot 10^7$	$9.3263 \cdot 10^7$	$9.9432 \cdot 10^7$

ANEXO 3

PROGRAMA MAG_TRAFO

El programa Mag_Trafo es una función desarrollada en Matlab, que incluye diferentes subrutinas para la resolución de problemas bidimensionales en los que se pueda aplicar el método de elementos finitos. Su aplicación está limitada a geometrías rectangulares o cuadrangulares, lo cual es suficiente para resolver problemas magnetostáticos en la estructura interna del transformador.

Para que la aplicación funcione, se requiere de tres archivos principales de Matlab del tipo "m":

1. Un primer archivo con los datos iniciales del problema.
2. Un segundo archivo para el ingreso de la curva de saturación.
3. La función mag_trafo, la cual contiene el programa principal.
- 4.

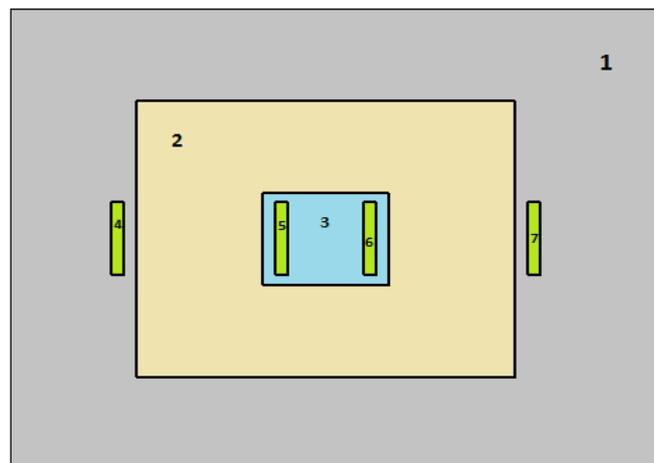
1. INGRESO DE LOS DATOS INICIALES DEL PROBLEMA

El ingreso de la geometría se compone de tres etapas:

1. Ingreso de la estructura básica
2. Datos de dimensiones
3. Datos de permeabilidad y densidad de corriente

El programa está diseñado de tal manera que los datos de la geometría interna del transformador se ingresen como rectángulos. Para que se cumplan las características de permeabilidad y densidad de corriente, se deben ingresar los rectángulos desde el más grande al más pequeño. En la figura siguiente se muestra un

ejemplo del orden en el que se ingresarían los datos de un transformador de dos devanados.



Siempre debe existir un rectángulo exterior que se utiliza como el conjunto de puntos en los cuales el vector potencial magnético es cero, es decir, es la referencia para el potencial magnético.

Una vez que se han establecido los rectángulos representativos de la geometría interna del transformador, se debe ingresar el archivo de la estructura básica. Para el transformador anterior, la línea de comando será:

```
geom=zeros(5,2,7);
```

Se crea una hipermatriz cero, de cinco filas, dos columnas y siete capas. Las filas representan el número de puntos que definen el rectángulo; deberían ser cuatro puntos, pero el primer punto a ser ingresado se repite para que se complete el dibujo que luego será presentado en pantalla. Las dos columnas son el conjunto de variables que definen a cada punto; al ser un modelo bidimensional, se requerirán dos puntos. Las capas representan el número de rectángulos que definirán al problema; de la Figura A3.1 se infiere que se requieren siete rectángulos y por lo tanto son siete capas. Esta línea define la hipermatriz que representa al problema; si no existiera esta línea, Matlab requeriría crear una hipermatriz flotante que consu-

miría más memoria innecesariamente.

En las siguientes líneas se ingresan las dimensiones de cada rectángulo. Tal como se indicó anteriormente. Para que funcione correctamente el programa, es necesario empezar con los rectángulos más grandes y luego ir definiendo los más pequeños. Se ingresan las coordenadas de cada vértice del rectángulo. Al final se vuelve a ingresar el primer punto debido a que esto será utilizado por el programa para el dibujo de la geometría interna del transformador. Para el ejemplo, las siguientes líneas serían:

```
geom(:, :, 2)=[0,0;1500,0;1500,1500;0,1500;0,0]+500*ones(5,2);
geom(:, :, 3)=[500,500;1000,500;1000,1000;500,1000;500,500]+500*ones(5,2);
geom(:, :, 4)=[-100,550;-50,550;-50,950;-100,950;-100,550]+500*ones(5,2);
geom(:, :, 5)=[550,550;600,550;600,950;550,950;550,550]+500*ones(5,2);
geom(:, :, 6)=[900,550;950,550;950,950;900,950;900,550]+500*ones(5,2);
geom(:, :, 7)=[1550,550;1600,550;1600,950;1550,950;1550,550]+500*ones(5,2);
geom(:, :, 1)=[-500,-500;2100,-500;2100,2000;-500,2000;-500,-
500]+500*ones(5,2);
```

En estas líneas, las coordenadas han sido establecidas en milímetros. Para comodidad del manejo de datos se ha aumentado un valor de 500 mm a cada coordenada. Los datos utilizados en el interior del programa requieren estar en unidades del sistema internacional. Sin embargo, las coordenadas de los rectángulos se encuentran en milímetros para evitar el uso de demasiados decimales en los datos de ingreso. Para solventar este problema al final se añade la línea siguiente que convierte los datos anteriores a metros:

```
geom=geom/1000;
```

Finalmente se ingresan los datos de permeabilidad relativa y densidad de corriente en los vectores μ y J . La permeabilidad es sólo un dato inicial, ya que el programa la calculará posteriormente en base a las características de saturación del núcleo de hierro. En cuanto a la densidad de corriente, se considerará constante dentro de la región ocupada por cada rectángulo ingresado. Tanto para la permea-

bilidad, como para la densidad de corriente, el dato se considerará para cada rectángulo en el orden en el que ha sido ingresado en cada vector. Para el ejemplo, tal como se observa en las líneas siguientes (variable μ), la permeabilidad relativa corresponde al segundo rectángulo, en tanto que la densidad de corriente (variable J), pertenece a los rectángulos cuatro, cinco, seis y siete. Cualquier dato de un rectángulo posterior prevalece sobre el anterior; por ejemplo, aun si se ha ingresado una permeabilidad de 1000 para el rectángulo 2, al momento de definir una permeabilidad relativa de uno para el resto de rectángulos, las regiones ocupadas por estos tendrán un valor de permeabilidad relativa de uno. La permeabilidad relativa de 1000 sólo se mantendrá en aquella área del rectángulo 2 que no ocupan los rectángulos posteriores. La misma filosofía se mantiene para el caso de la densidad de corriente.

```
mus=1000;
mu=[1,mus,1,1,1,1,1]';
J=4*pi*10^-7*[0,0,0,30.3*10^6,-30.3*10^6,-30*10^6,30*10^6]';
```

En los datos de densidad de corriente se debe cuidar que los signos correspondan a lo que realmente se quiere simular. Para una buena modelación, se debe cumplir con la igualdad de fuerzas magnetomotrices en todo el circuito magnético, excepto por las consideraciones de corriente de excitación.

Nótese que en el caso de la densidad de corriente existe una constante previa, la misma que es la permeabilidad del vacío. Esto se debe a que en el modelo implementado en el programa se utiliza el valor $\mu_0 J$. Para evitar que el manejo de los valores de densidad de corriente sea engorroso, al momento de ingresar los datos, se aparta el valor de la permeabilidad del vacío de tal forma que el usuario sólo ingrese el valor de densidad de corriente, tal como se lo utiliza en el diseño del transformador.

2. INGRESO DE LA CURVA DE SATURACIÓN

El ingreso de la curva de saturación se realiza por medio de pares coordinados de los puntos que representan dicha curva. El primer punto corresponde a la intensidad de campo magnético, en tanto que el segundo punto es la inducción magnética. Si la intensidad magnética es ingresada directamente en unidades del Sistema Internacional, no es necesaria la constante 79.58 incluida en la siguiente línea, esta constante sólo es necesaria para el caso en el que los datos estén en oesterd. Para el ejemplo, las líneas serían:

```
muo=4*pi*1e-7;
curva=[0.3, .04;0.4, .07;0.5, .12;.6, .18;.7, .25;.8, .34;.9, .42;1, .51;2, .9;3,1
.1;
      4,1.22;5,1.27;6,1.31;7,1.34;8,1.36;9,1.38;10,1.39;20,1.49;30,1.54;
      40,1.58;50,1.61;60,1.64;70,1.68;80,1.7;90,1.72;100,1.73;200,1.88;
      300,1.98;400,2.02;500,2.05;600,2.08;700,2.09;800,2.11;900,2.12;
      1000,2.14;2000,2.25;3000,2.35];%H en oesterd
Hs=79.58*curva(:,1);%Conversión de oesterd a amperios espira / metro
Bs=curva(:,2);
```

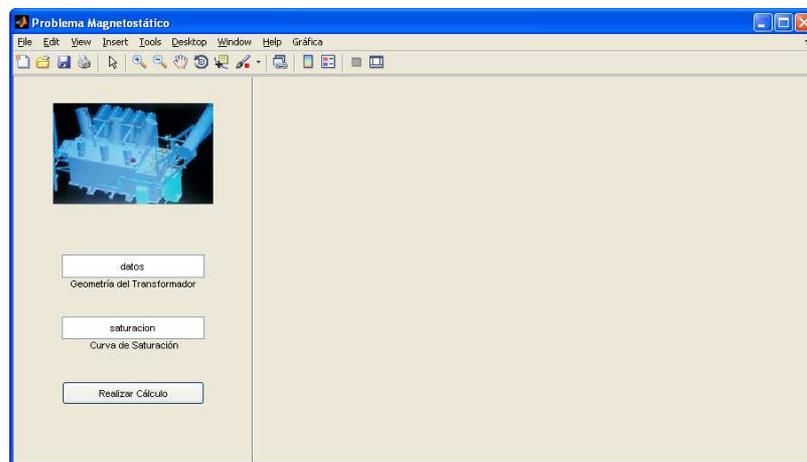
Se deben conservar los nombres de los vectores indicados anteriormente, ya que en base a ellos se establecen las acciones posteriores del programa.

3. EJECUCIÓN DEL PROGRAMA

Para ejecutar el programa se digita la función en Matlab:

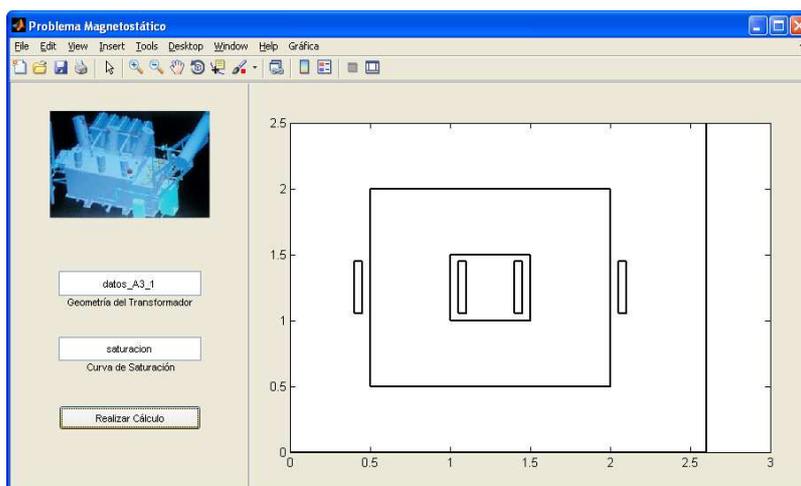
```
>> mag_trafo
```

y se abre la siguiente ventana:



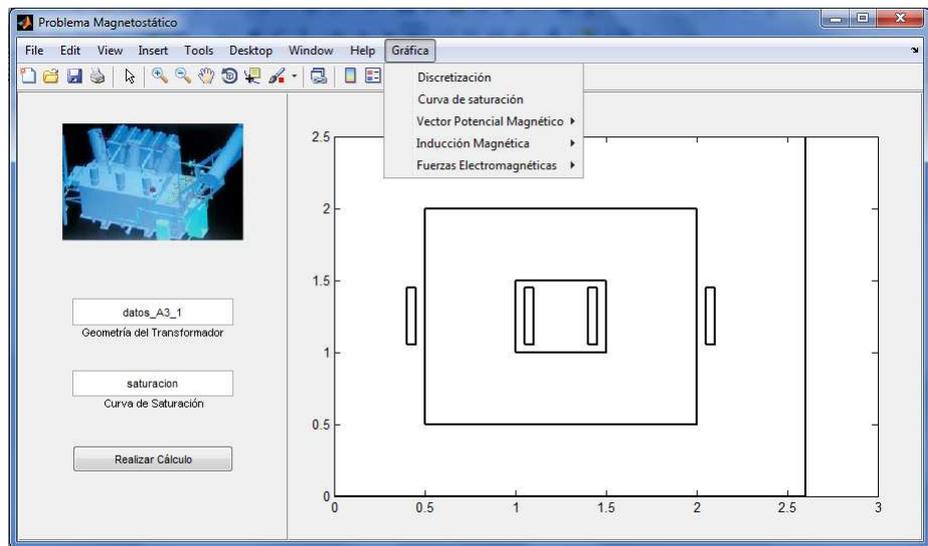
En la casilla denominada “Geometría del Transformador” se escribe el nombre del archivo “m” en el cual se determinaron las dimensiones del transformador y los datos de permeabilidad y densidad de corriente. De la misma manera, en casilla “Curva de Saturación” se ingresa el archivo “m” en el cual se definieron los puntos correspondientes a la curva de saturación del núcleo.

Una vez que se han definido los archivos de datos iniciales se presiona el botón “Realizar Cálculo”; se dibujará la geometría interna del transformador, tal como se muestra a continuación.



La ventana tiene una lista de opciones propias de cualquier ventana de Matlab y que tienen funciones con las que generalmente el usuario está familiarizado. La única opción nueva es la correspondiente a *Gráfica*, la cual se subdivide en las si-

güentes opciones:



En la opción discretización se obtienen los triángulos en los que ha sido dividida la gráfica. Por defecto los triángulos se forman en función de la geometría interna del transformador. Si el usuario requiere una mayor división, en el programa se activan las líneas desde 309 a 332, y se indican las nuevas divisiones a ser incluidas en la discretización. En el ejemplo, se han aumentado líneas en los ejes X y Y.

```

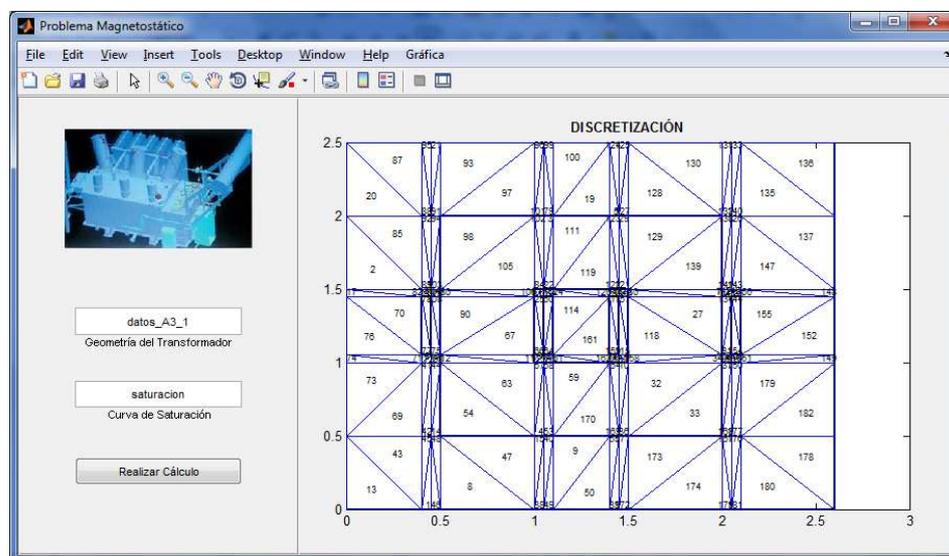
Y1=[1.5:.5:3.7]';
Y1aux=[Y;Y1];
Y=sort(Y1aux);
ii=1;xx=length(Y);
while ii<xx
    if Y(ii)==Y(ii+1)
        Y(ii+1)=[];
        xx=length(Y);
    else
        ii=ii+1;
    end
end
X1=[.5:.05:1.8]';
X1aux=[X;X1];

```

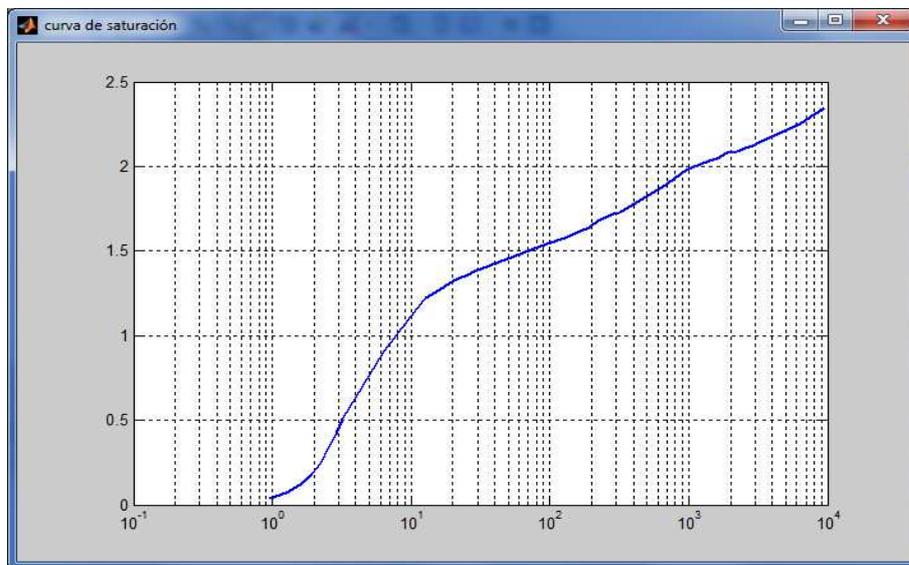
```

X=sort(Xlaux);
ii=1;xx=length(X);
while ii<xx
    if X(ii)==X(ii+1)
        X(ii+1)=[];
        xx=length(X);
    else
        ii=ii+1;
    end
end
end

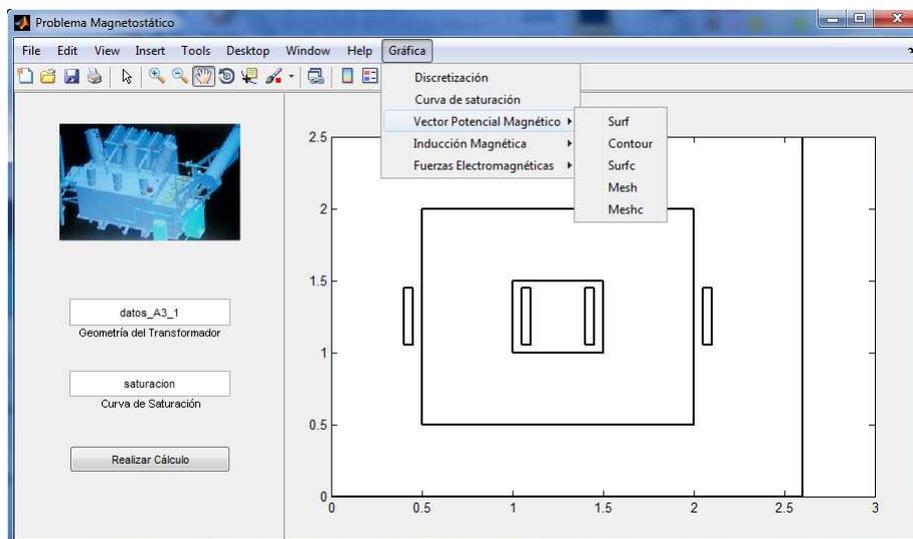
```



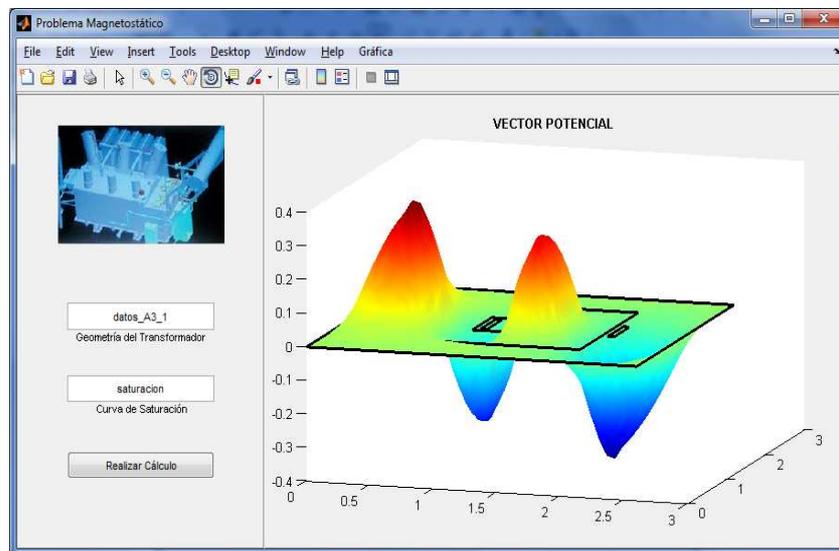
En la opción curva de saturación, como su nombre lo indica, se muestra la característica de saturación del núcleo con el que ha sido simulado el modelo. El eje x está en escala logarítmica.



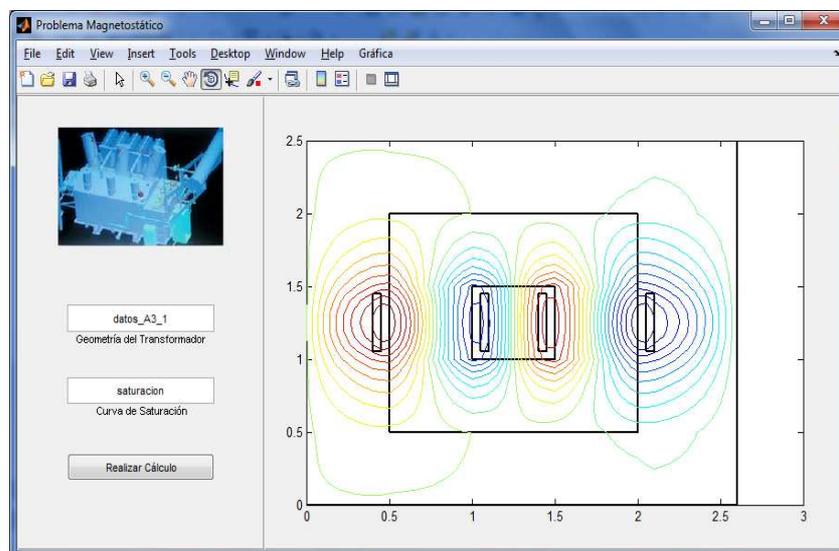
En la opción “vector potencial” se tienen las siguientes sub opciones:



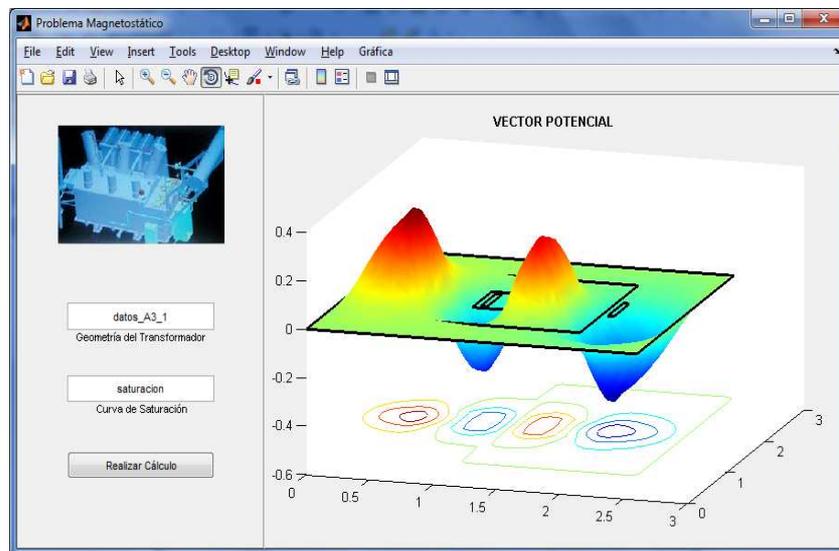
La opción surf es un gráfico tridimensional del valor de la magnitud del vector potencial. El ángulo desde el cual se observa la figura se puede manejar desde los iconos que vienen incluidos en Matlab.



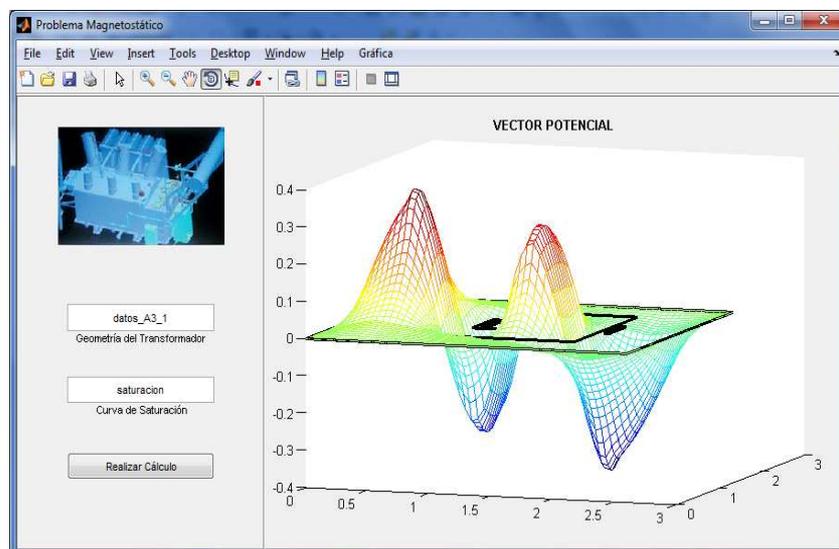
En contour se observan las líneas equipotenciales del vector potencial.

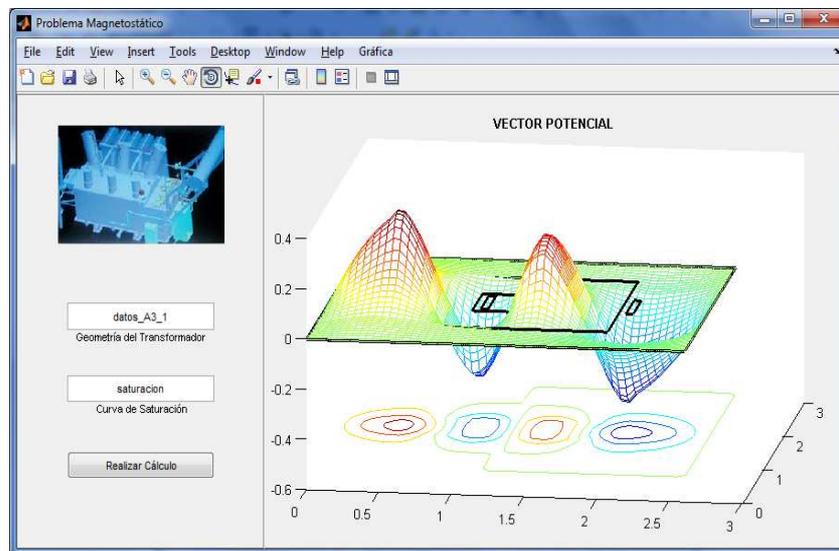


La opción surfc muestra una combinación entre el gráfico tridimensional de la magnitud del vector potencial y las líneas equipotenciales.



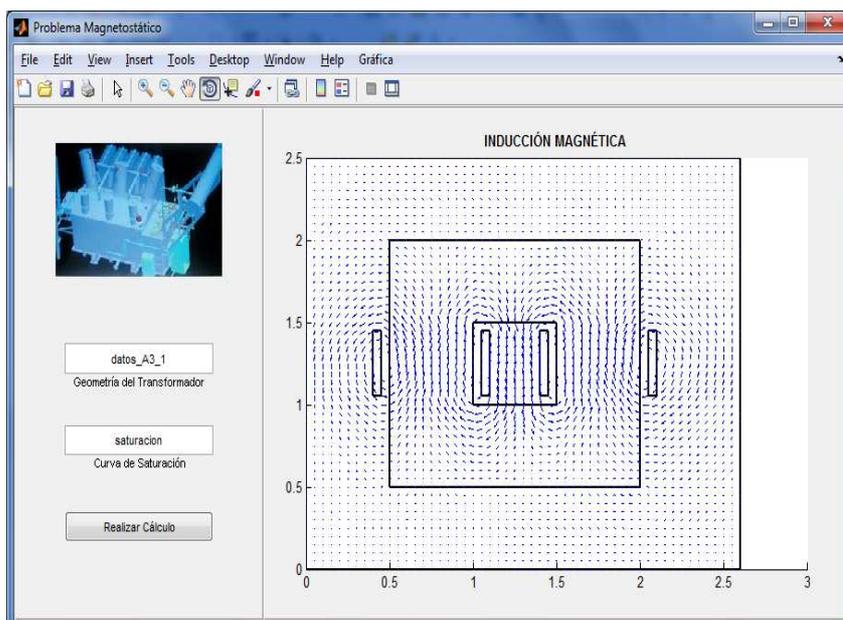
Las opciones mesh y meshc son similares a surf pero con una presentación en grilla.



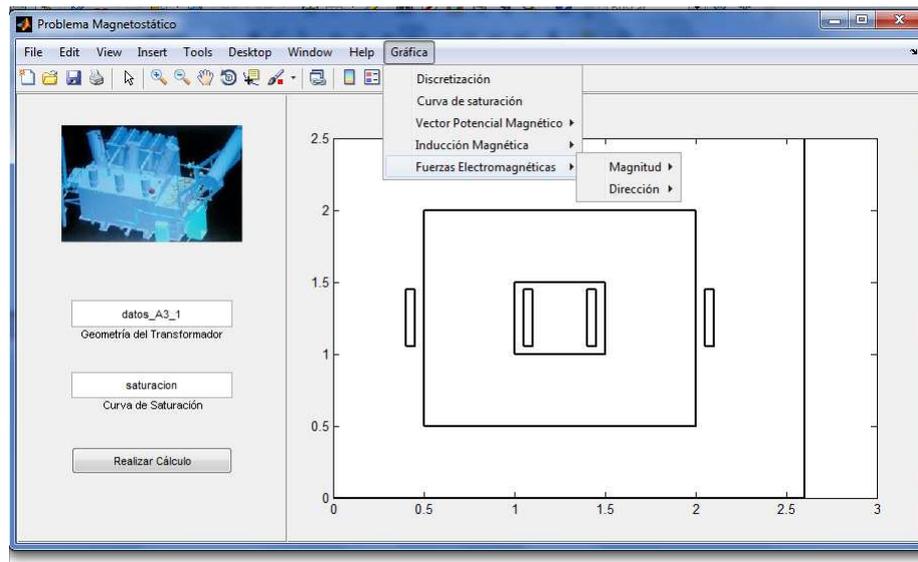


De esta manera, se tienen diferentes gráficos útiles para el análisis del campo magnético.

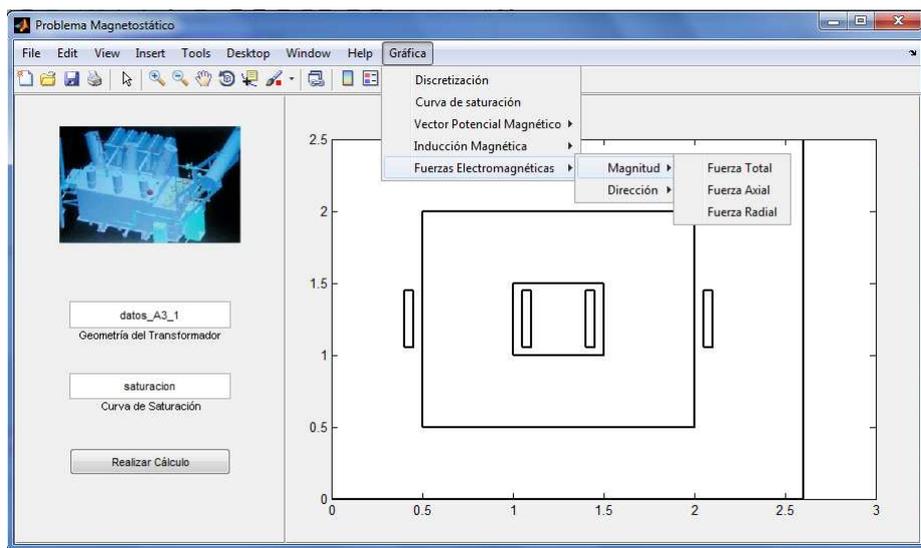
Para el caso de la inducción magnética se tienen las mismas opciones que las del vector potencial magnético, a excepción de *quiver* que es un gráfico con la dirección del campo magnético.



En el menú *Fuerzas Electromagnéticas* se tienen dos opciones: *Magnitud* y *Dirección*. En la primera opción se tiene el valor absoluto de la fuerza en cada punto de la geometría interna del transformador. En la segunda opción se dibujan los vectores indicativos del campo de fuerza electromecánica.

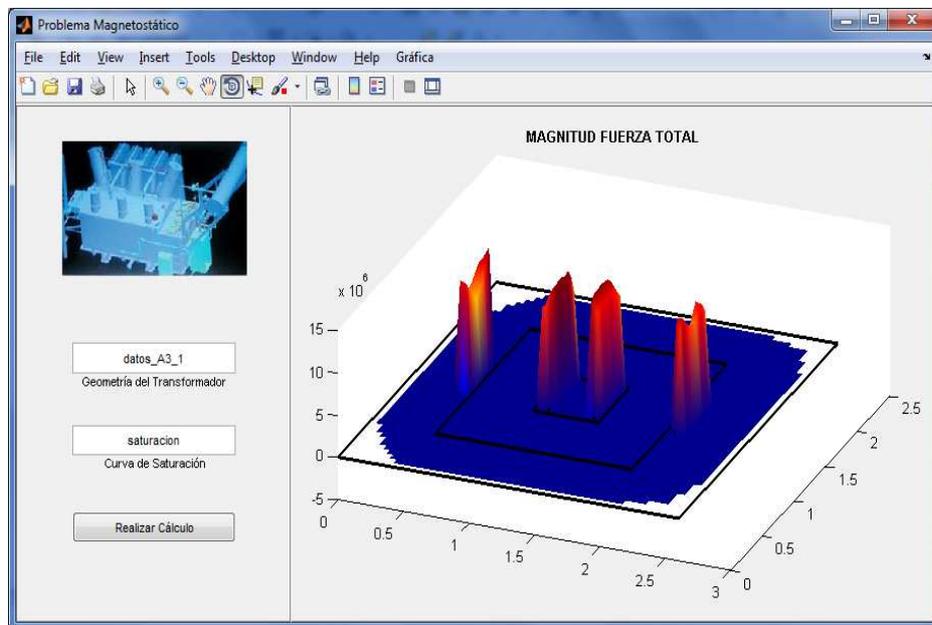


Cuando se escoge la opción *Magnitud* se tienen las opciones mostradas en la figura.

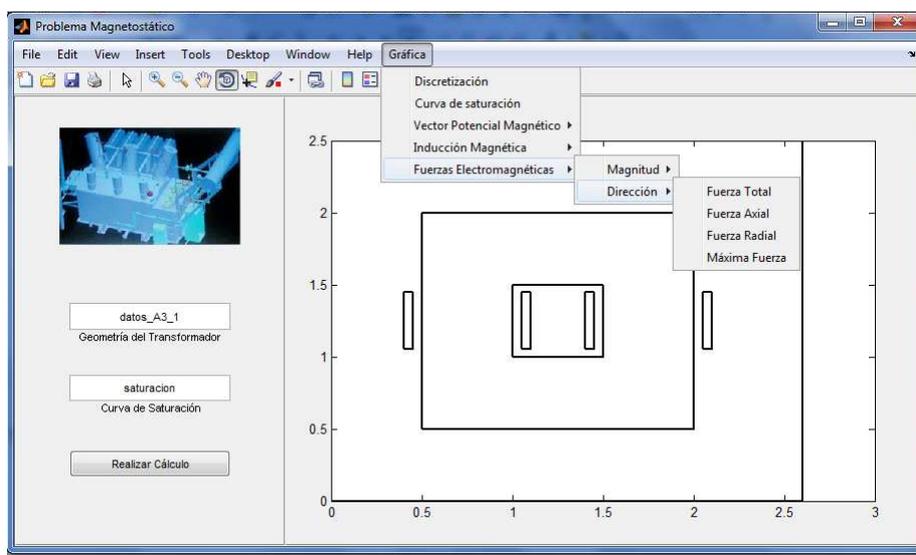


Conforme se escoja la opción presentada, se tendrá una muestra tridimensional de la magnitud de la *Fuerza Total*, *Axial* o *Radial*. Por ejemplo, a continuación se

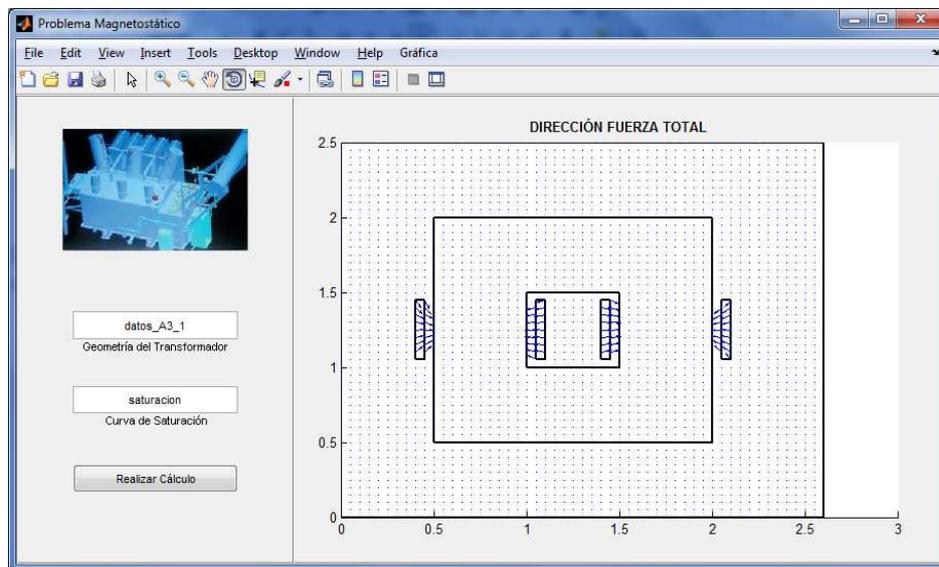
muestra el gráfico para el caso de la fuerza total.



Si se escoge la opción *Dirección* se tienen las siguientes opciones:



En este caso se dibujan vectores indicando la dirección de las fuerzas electromecánicas. Por ejemplo, la dirección para la fuerza total será:

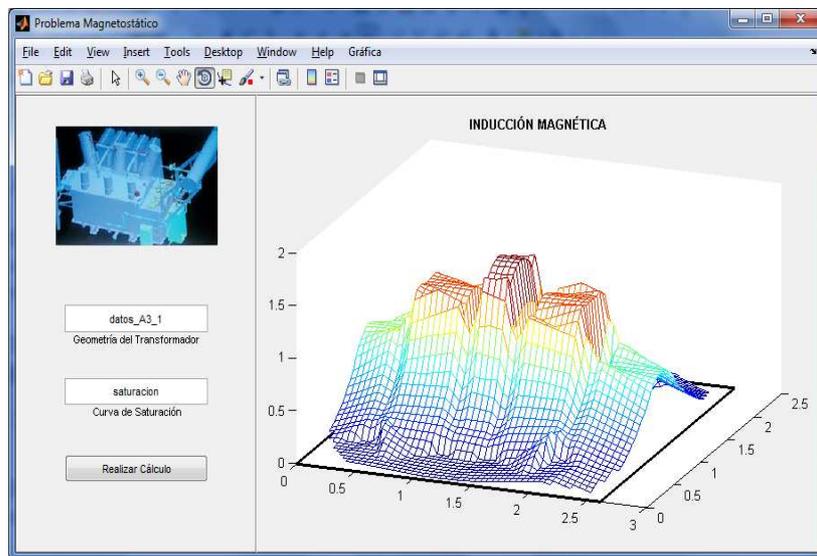


4. AFINAMIENTO DE LOS RESULTADOS

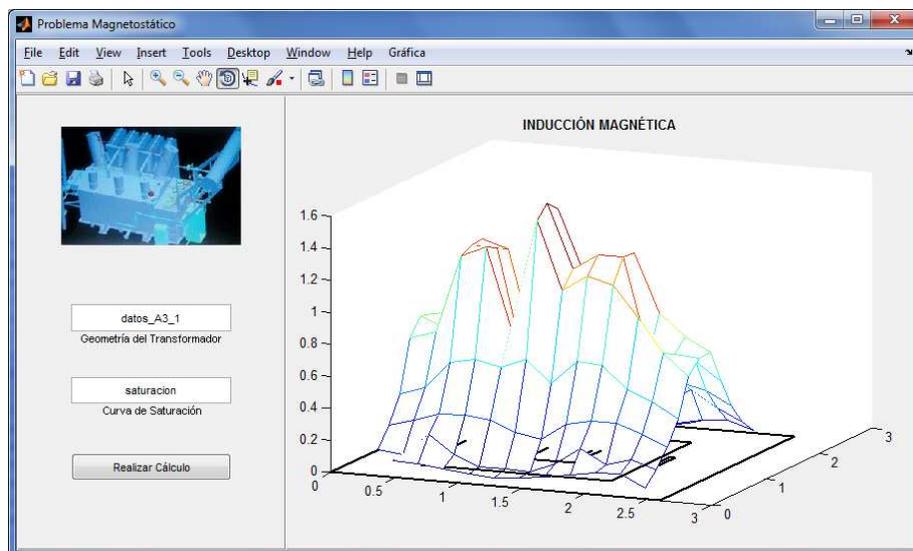
En algunas ocasiones, los gráficos no serán satisfactorios. Puede ocurrir que la grilla sea muy densa o muy dispersa. Para variar estos parámetros, en el archivo m de la función se deben cambiar los índices que producen la matriz base de las grillas o de las flechas. Dentro del archivo se encontrará la línea 432:

```
[xi,yi]=meshgrid(X(1):.05:X(end),Y(1):.05:Y(end));%mejora
      % interpolación
```

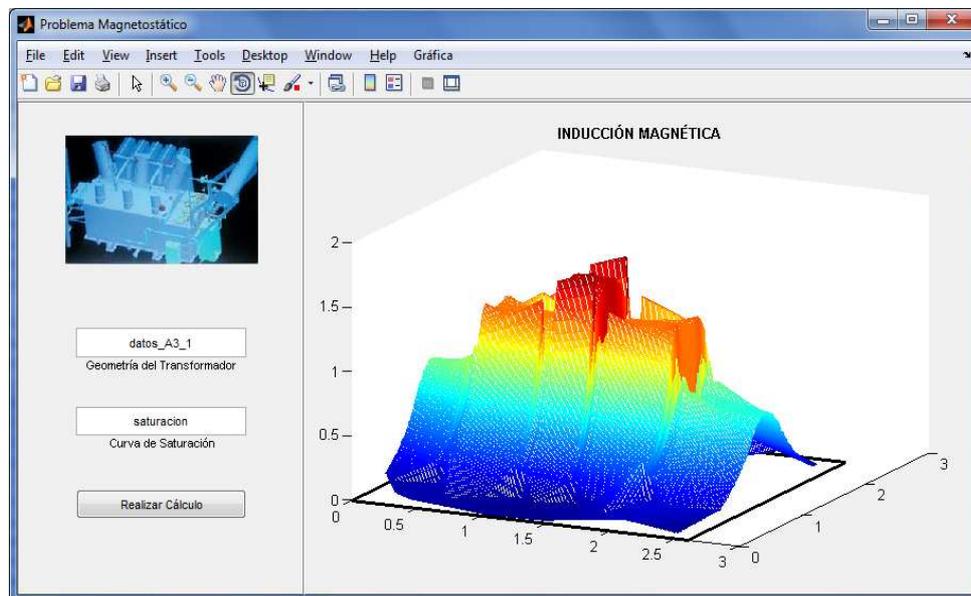
Para el ejemplo, de acuerdo a la línea anterior, la grilla se crearía en espacios de 0,05 metros, con el cual, para la inducción magnética se tendría el siguiente gráfico:



Si ahora, en lugar de 0,05 metros se introduce un valor de 0,2 metros, el resultado será:



Ahora, si se utiliza el valor de 0,01 metros, se obtendrá lo siguiente:



La cantidad de divisiones que tendrá la grilla no afecta la exactitud del resultado, sino su presentación. Lo que hacen estas divisiones es mejorar la interpolación gráfica en base a los resultados originales. Para mejorar la exactitud real del proceso, se aumenta la discretización con la inclusión de nuevas líneas en los ejes X o Y, tal como se indicó anteriormente. Obviamente, el aumento de las divisiones de la grilla requerirá de mayor memoria y el cálculo y manejo del gráfico se volverá mucho más lento.

BIBLIOGRAFÍA

1. Giorgio Bertanolti, *Short Circuit Duty of Power Transformers*, ABB 2006
2. Central Station Engineers of the Westinghouse Electric Corporation, *Electrical Transmission and Distribution Reference Book*, Westinghouse Electric Corporation, 1964
3. Julius A. Stratton, *Electromagnetic Theory*, IEEE Press
4. IEC 60076-8, *Power Transformers - Application Guide*, 1997
5. Donald G. Fink, *Manual de Ingeniería Eléctrica*, 1999
6. Paul Anderson, *Analysis of Faulted Power Systems*, IEEE Press, 1995
7. IEC 60076-5 Annex A, *Theoretical Evaluation of the Ability to Withstand the Dynamic Effects of Short Circuit*, 2006
8. Jianning Jin, *The Finite Element Method in Electromagnetics*, IEEE Press, 2002
9. Del Vecchio R., *Transformer Design Principles with Application to Core Form Power Transformers*. CRC Press
10. Khulkharni S.V., *Transformer Engineering, Design and Practice*, Marcel Dekker Inc. New York 2004
11. Georgilakis Pavlos s., *Spotlight on Modern Transformer Design*, Springer 2009
12. Blume L.F., *Transformer Engineering*, John Wiley and Sons, Inc. 1951

13. Staff del MIT, *Circuitos Magnéticos y Transformadores*, Reverté, 1965
14. Betancourt Enrique, *El Valor Agregado de la Revisión de Diseño de Transformadores de Potencia*, CIGRE, Comité Mexicano, Bienal 2001
15. Tang Yun Qiu, Qiao Jin Qiu, *Numerical Calculation of Short Circuit Electromagnetic Forces on the Transformer Winding*, IEEE Trans. Magnetics Vol. 26 – 2 1993
16. Kladas A., Papadopoulus M., Tegopoulos J., *Leakage Flux and Force Calculation on Power Transformer Windings under Short Circuit: 2D and 3D Models based on the theory of Images and the Finite Element Method Compared to Measurements*, IEEE Trans. Magnetics, Vol. 30 – 5, 1994
17. Silverster P., *Finite Element Solution of Saturable Magnetic Problems*, IEEE Trans. PAS Vol. 89-7 1970
18. Randy W., Ramsis S., *Experimental Verification of Three Dimensional Analysis of Leakage Magnetic Fields in Large Power Transformers*, IEEE Trans. PAS Vol. 102-9, 1983
19. Andersen O. W., *Transformer Leakage Flux Program Based on the Finite Element Method*, IEEE PES Summer Meeting, 1983
20. Kiroto H., Yasuro H., *Mechanical Strength of Transformer Windings under Short Circuit Conditions*, IEEE PES Winter Power Meeting, 1970
21. Mc. Nutt W. J., Jhonson W., *Power Short Circuit Strength Requierments, Design and Demonstration*, IEEE Trans. PAS 89 – 8 1970
22. Mark Overmars, *Computational Geometry: Algorithms and Applications*, Springer 2008

23. Martínez Velasco Juan, *Power System Transients*, CRC Press 2009
24. Mulukutla S. Sarma, *Magnetostatic Field Computation by Finite Element Formulation*, IEEE Trans. Magnetics Vol. 12 – 16
25. Jawad Faiz, Bashir Mahdi, Tahere Noori, *Three and Two Dimensional Computation of Inrush Current and Short Circuit Electromagnetic Forces on Windings of a Three Phase Core Type Power Transformer*, IEEE Trans. Vol. 44-5 2008
26. Stanley Humphries, *Finite Element Methods for Electromagnetics*, Electronic Version, <http://www.fieldp.com>, 2010
27. Azevedo Ana, *Investigation of Transformer Electromagnetic Forces Caused by External Faults Using FEM*, IEEE PES Transmission and Distribution Conference and Exposition Latin America Venezuela
28. Riley and Hobson, *Mathematical Methods for Physics and Engineering*, Cambridge University Press, 3 ed.
29. ABB, *Transformer Handbook*, ABB Group.
30. Fitzgerald A., *Máquinas Eléctricas*, Mc Graw Hill, Séptima Edición