

# **ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL**

## **FACULTAD DE CIENCIAS**

### **FLUJO LAMINAR DE FLUIDOS DE HERSCHEL-BULKLEY: MODELIZACIÓN MATEMÁTICA Y SIMULACIÓN NUMÉRICA**

#### **PROYECTO DE TITULACIÓN PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE MATEMÁTICO**

**SINTYA ESMERALDA SERRANO DE LA TORRE**

sintyaesme@yahoo.es

**DIRECTOR: DR. SERGIO ALENJANDRO GONZÁLEZ ANDRADE**

sergio.gonzalez@epn.edu.ec

**QUITO, JULIO 2014**

## DECLARACIÓN

Yo, SINTYA ESMERALDA SERRANO DE LA TORRE, declaro bajo juramento que el trabajo aquí descrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y, que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento. La Escuela Politécnica Nacional puede hacer uso de los derechos correspondientes a este trabajo, según lo establecido por la Ley de Propiedad Intelectual, por su Reglamento y por la normatividad institucional vigente.

---

Sintya Esmeralda Serrano de la Torre

Dr. Sergio Alejandro González Andrade  
DIRECTOR DE PROYECTO

## **AGRADECIMIENTOS**

Quiero agradecer a mi familia por todo el cariño y apoyo que me brindaron todos años. A Samy y Emily por cambiar mi vida con su amor incondicional. A mis amigos por siempre ser mi soporte y alegría. A Migue por convertir mi vida en un sueño. Y en especial quiero agradecer a Sergio por toda la paciencia y dedicación que le diste a este proyecto y sobre todo por confiar en mí. Sergio para mí ha sido un privilegio trabajar contigo.

## DEDICATORIA

*Samy, siempre eres lo más importante para mi.*

*Migue, Have I told you lately that I  $(x^2 + y^2 - 1)^3 - x^2y^3 = 0$  you.*

***Sintya***

# TABLA DE CONTENIDO

RESUMEN	<b>vii</b>
ABSTRACT	<b>viii</b>
1 INTRODUCCIÓN	<b>1</b>
2 CONCEPTOS PRELIMINARES	<b>3</b>
2.1 Espacios de funciones . . . . .	3
2.2 Diferenciabilidad . . . . .	9
2.3 Métodos de aproximación numérica . . . . .	9
2.4 Métodos de Optimización sin restricciones . . . . .	10
3 PROBLEMAS QUASILINEALES	<b>15</b>
3.1 Ecuaciones Quasilineales de Segundo orden . . . . .	15
3.2 Problema del p-Laplaciano . . . . .	16
3.3 Método del descenso más profundo para el problema del p-Laplaciano . . . . .	21
3.4 Experimentos Numéricos . . . . .	24
4 ESTUDIO DEL FLUIDO DE HERSCHEL-BULKLEY	<b>29</b>
4.1 Características físicas de los fluidos . . . . .	29
4.2 Modelo de Herschel Bulkley . . . . .	35
4.3 Fluido de Herschel-Bulkley en una tubería . . . . .	36
4.4 Formulación variacional . . . . .	38
4.5 Formulación como un problema de optimización . . . . .	41
5 SOLUCIÓN NUMÉRICA DEL PROBLEMA DE HERSCHEL-BULKLEY	<b>45</b>
5.1 Regularización del problema . . . . .	45
5.2 Discretización . . . . .	55
5.3 Método del descenso más profundo . . . . .	59

6	RESULTADOS NUMÉRICOS	<b>66</b>
6.1	Método del descenso preconditionado . . . . .	67
6.2	Experimentos con el Método del descenso más profundo ponderado . . . . .	80
7	CONCLUSIONES	<b>98</b>
	REFERENCIAS	<b>100</b>

## RESUMEN

El objetivo principal de este trabajo es desarrollar una técnica eficiente de simulación numérica de los fluidos de Herschel-Bulkley. Para esto analizamos el caso particular del flujo laminar por cambio de presión en una tubería de sección transversal, para obtener una inecuación variacional que caracteriza la ecuación de movimiento de estos fluidos. Luego, presentamos la ecuación de movimiento como un problema de minimización de un funcional elíptico de segundo orden no diferenciable, y lo transformamos en un funcional regularizado mediante la aproximación de Huber para conseguir la diferencialidad del problema original. Luego, discretizamos el problema regularizado mediante elementos finitos y encontramos su solución aplicando el método del descenso más profundo. Finalmente presentamos algunos ejemplos numéricos obtenidos con los algoritmos desarrollados.

**Palabras claves:** Fluidos de Herschel-Bulkley, Método del descenso más profundo, p-Laplaciano, regularización de Huber.



## ABSTRACT

The main objective of this work is to develop an efficient numerical simulation technique for Herschel-Bulkley fluids. For this, we analyzed the particular case of a pressure change on a laminar flow over a cross-section pipe, to obtain a variational inequality equation that characterizes the movement of such fluids. Then, we show the equation of motion as a minimization problem of a second order elliptical not differentiable functional, and we transform it into a regularized functional by the Huber approximation to get the differentiability of the original problem. Then, we discretize the regularized problem by the finite elements method and find a solution using the deepest descent method. Finally we present some numerical examples obtained with the developed algorithms.

**Keywords:** Herschel-Bulkley fluids, Deepest descent method, p-Laplacian, Huber regularization.

*“Nothing happens unless first a dream.”*

**Carl Sandburg**

*“Science is a cooperative enterprise, spanning the generations. It’s the passing of a torch from teacher, to student, to teacher. A community of minds reaching back to antiquity and forward to the stars.”*

Neil deGrasse Tyson

# 1

## Introducción

El estudio de los fluidos de Herschel-Bulkley es importante debido a la gran cantidad de fluidos que presentan este comportamiento. Ejemplos destacados son los crudos pesados, ciertos alimentos, plásticos, farmacéuticos [Alexandrou et al., 2003, Messelmi et al., 2010, Nikitin et al., 2011]. Una modelización precisa y una eficaz aproximación numérica son fundamentales en la reducción de gastos computacionales así como para obtener una mejora en el tiempo de cálculo.

El modelo de Herschel-Bulkley fue presentado por Winslow Herschel y Ronald Bulkley en 1926 [Herschel and Bulkley, 1926]. Este modelo caracteriza a los fluidos no-Newtonianos que poseen un comportamiento dual (sólido y líquido) debido a la existencia de un límite elástico. El límite elástico es el estrés mínimo que un material necesita para pasar de un movimiento de un sólido rígido a un movimiento típico de fluido, este límite permite caracterizar las áreas rígidas del fluido, entre mayor sea este límite habrá más zonas rígidas. El comportamiento líquido de este tipo de materiales se tiene cuando la fuerza aplicada sobrepasa el límite elástico. El modelo de Herschel Bulkley es abordado en varios textos como [Boger and Halmos, 1981, Huilgol and You, 2005, Majda, 1984, Messelmi et al., 2010, Mitsoulis, 2007, Nikitin et al., 2011, Quoc Hung and Ngoc-Diep, 2012, Sankad and Radhakrishnamacharya, 2006, Saramito, 2009, Sayed-Ahmed et al., 2009]. En este documento trataremos el problema particular de los fluidos de Herschel-Bulkley en una tubería de sección circular, con movimiento laminar por cambio de presión y sin la influencia de fuerzas de fricción.

Previo al análisis del modelo de Herschel-Bulkley presentaremos al operador quasilineal del p-Laplaciano dado en [Alberty et al., 1999, Barrett and Liu, 1993, Bermejo and Infante, 2000, Casas

and Fernández, 1993, Glowinski and Marrocco, 1975, Huang et al., 2007, Zhou et al., 2005]. Este operador es clave en la ecuación que describe el movimiento de estos fluidos. Mostraremos que el problema del p-Laplaciano posee solución única [Peral, 1998]. Luego caracterizaremos el operador como un problema de minimización, y lo discretizaremos utilizando el método de elementos finitos en dos tipos de mallas. Aplicaremos el método del descenso más profundo con diferentes direcciones de descenso [Huang et al., 2007, Zhou et al., 2005], para calcular su solución del problema discretizado. Y después presentaremos dos ejemplos y mostraremos los resultados obtenidos por el algoritmo, en la malla rectangular y circular con direcciones distintas en cada caso.

Revisaremos algunos conceptos y teoremas de mecánica de fluidos para la mejor comprensión del problema a tratar. Y presentaremos el modelo matemático que describe el movimiento de los fluidos de Herschel-Bulkley. Para el caso particular del flujo en una tubería de sección transversal, mostraremos el problema con una inecuación variacional de segundo orden. Luego, caracterizaremos el problema variacional mediante un problema de minimización, y probaremos la existencia y unicidad de su solución. Para evitar problemas de estabilidad, aplicaremos una regularización de Huber para transformar el funcional a minimizar en uno diferenciable.

Para el problema de minimización del funcional regularizado, mostraremos la existencia y unicidad de su solución, y discretizaremos el problema con el método de elementos finitos en una malla circular con radio 1 y centro en 0, con una partición uniforme en el sentido de Ciarlet. Luego, aplicaremos el método del descenso más profundo predeterminado y ponderado para encontrar su solución.

Finalmente, mostraremos ejemplos numéricos de la aplicación de los algoritmos desarrollados en los que detallaremos el tiempo de ejecución del programa y el número de iteraciones realizadas antes de obtener un resultado. Los dos primeros ejemplos muestran los resultados obtenidos con el algoritmo del método del descenso más profundo precondicionado para los casos particulares  $n = 0.75$  y  $n = 3$  en el problema de minimización. También mostraremos las gráficas correspondientes a la velocidad, las zonas activas e inactivas y el error en cada iteración del algoritmo. En los siguientes dos ejemplos mostraremos los resultados obtenidos al aplicar el algoritmo del descenso más profundo ponderado para  $n = 0.5$  y  $n = 9$  en el problema de minimización y exhibiremos los gráficos correspondientes.

*“Yes: I am a dreamer. For a dreamer is one who can only find his way by moonlight, and his punishment is that he sees the dawn before the rest of the world.”*

Oscar Wilde

# 2

## Conceptos Preliminares

### 2.1 ESPACIOS DE FUNCIONES

En esta sección vamos a introducir nociones de algunos espacios que se utilizarán en este documento.

#### 2.1.1 ESPACIOS DE BANACH

**Definición 1 (Espacios de Banach).** Sea  $(X, \|\cdot\|)$  un espacio normado completo se dice espacio de Banach.

**Definición 2 (Funcional acotado).** Sean  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  un funcional y  $X$  es un espacio de Banach,  $f$  es acotado, si existe  $c$  un número real tal que  $x \in X$

$$|f(x)| \leq c\|x\|. \quad (2.1)$$

$f$  es un funcional continuo si es acotado.

**Definición 3 (Funcional Coercivo).** Un funcional  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  y  $x \in X$  se dice coercivo si

$$\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad (2.2)$$

**Definición 4 (Funcional Convexo).** Sea  $(X, \|\cdot\|)$  un espacio de Banach y sea  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  un funcional. Si para todo  $\lambda \in (0, 1)$  se cumple que

$$f(\lambda u + (1 - \lambda)v) \leq \lambda f(u) + (1 - \lambda)f(v), \quad (2.3)$$

el funcional  $f$  se denomina convexo.

**Definición 5 (Funcional Quasiconvexo).** Sea  $(X, \|\cdot\|)$  un espacio de Banach,  $S$  un conjunto convexo no vacío y  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  un funcional. Si para todo  $\alpha$ ,  $S_\alpha = \{x \in S / f(x) \leq \alpha\}$  es convexo,  $f$  se dice quasiconvexo.

**Teorema 1.** Sea  $(X, \|\cdot\|)$  un espacio de Banach,  $S$  un conjunto convexo no vacío, y  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  un funcional. Si  $f$  es convexo entonces para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$  el conjunto  $S_\alpha = \{x \in S / f(x) \leq \alpha\}$  es convexo.

**Demostración:** La demostración está detallada en [Lions, 1971, pág. 12]. ■

**Teorema 2.** Sea  $(X, \|\cdot\|)$  un espacio de Banach,  $S$  un conjunto convexo no vacío y acotado de un espacio reflexivo de Banach, y  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  un funcional continuo quasiconvexo. Entonces  $f$  tiene un punto minimal en  $S$ .

**Demostración:** La demostración está detallada en [Lions, 1971, pág. 15]. ■

**Teorema 3.** Consideremos el funcional

$$J(y) = J_1(y) + J_2(y) \quad (2.4)$$

Donde las funciones  $J_i$ ,  $i = 1, 2$  son continuas, convexas y semi-continua inferiormente en la topología débil, y tal que

$$J(y) \rightarrow +\infty, \text{ cuando } \|y\| \rightarrow +\infty, \text{ para todo } y \in W_0^{1,n+1} \quad (2.5)$$

Si  $y \rightarrow J_1(y)$  es diferenciable, pero  $J_2$  no es necesariamente diferenciable y  $J$  es estrictamente convexo.

Entonces  $u \in W_0^{1,n+1}$  es el único elemento tal que  $J(u) = \inf_{y \in W_0^{1,n+1}} J(y)$  y está caracterizada por

$$J'_1(u) \cdot (y - u) + J_2(y) - J_2(u) \geq 0 \quad (2.6)$$

**Demostración:** ver [Lions, 1971, pág. 13] ■

**Definición 6 (Espacio Dual).** Dado  $X$  un espacio normado, el conjunto de todas las funciones lineales acotadas en  $X$  se denomina espacio dual  $X'$  y está dotado de la norma

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \quad (2.7)$$

**Definición 7 (Espacio reflexivo).** Sea  $X$  un espacio de Banach y  $J$  una inyección canónica de  $X$  en  $X''$ . Se dice que  $X$  es reflexivo si  $J(X) = X''$ .

**Definición 8 (Espacios de Hilbert).** Sea  $V$  un espacio vectorial y  $(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  que satisface:

1.  $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$
2.  $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$
3.  $(x, y) = \overline{(y, x)}$
4.  $(x, x) \geq 0$
5.  $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$(\cdot, \cdot)$  es un producto interno y  $(V, (\cdot, \cdot))$  es un espacio con producto interno, y se denomina espacio de Hilbert si es completo con la métrica que define el producto escalar.

### 2.1.2 ESPACIOS MEDIBLES

**Definición 9 (Espacio Medible).** Un conjunto  $X$  dotado de una  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{A}$  es llamado conjunto medible y es notado por  $(X, \mathcal{A})$ . Los elementos de la  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{A}$  son denominados conjuntos  $\mathcal{A}$ -medibles.

**Definición 10 (Espacio medido).** Sea  $(X, \mathcal{A})$  un espacio medible. Una medida sobre  $(X, \mathcal{A})$  es una función  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$  que verifica las propiedades siguientes:

1.  $\mu(\emptyset) = 0$ ; y
2. para toda sucesión de elementos disjuntos  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\mathcal{A}$

$$\mu \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n).$$

La tripleta  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  se denomina espacio medido. A todo elemento  $A$  de  $\mathcal{A}$ , denominaremos la cantidad  $\mu(A)$ ,  $\mu$ -medida de  $A$ .

**Definición 11 (Función medible).** Sean  $(X, \mathcal{A})$  y  $(Y, \mathcal{B})$  dos espacios medibles. Decimos que una función  $f$  de  $X$  en  $Y$  es  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -medible si para todo  $B \in \mathcal{B}$ , tenemos  $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ .

**Definición 12 (Función integrable).** Sean  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espacio medido y  $f : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$  una función medible. Diremos que  $f$  es  $\mu$ -integrable si las cantidades

$$\int_X f^+(x) d\mu(x) \quad \text{y} \quad \int_X f^-(x) d\mu(x) \quad (2.8)$$

son finitas. La integral de esta función está definida por

$$\int_X f(x) d\mu(x) = \int_X f^+(x) d\mu(x) + \int_X f^-(x) d\mu(x) \quad (2.9)$$

**Definición 13 (Propiedades válidas  $\mu$ -c.t.p.).** Sea  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espacio medido. Decimos que una propiedad  $P(x)$  que depende de un punto  $x \in X$  es válida en casi todas partes o  $\mu$ -c.t.p. si el conjunto de los  $x \in X$  en donde está propiedad no se verifica es un conjunto de  $\mu$ -medida nula o si es un conjunto  $\mu$ -despreciable.

**Teorema 4 (Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue).** Sean  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espacio medido, y  $f$  una función y  $(f_n)_{n \in \mathbb{R}}$  una sucesión de funciones, ambas  $\mathcal{A}$ -medibles definidas sobre  $X$  que toma valores en  $\mathbb{R}$ . Hacemos las siguientes hipótesis:

1. para  $\mu$ -casi todo  $x \in X$ , se tiene  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$ ; y
2. existe una función integrable  $g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  tal que, para todo  $n$ , se verifica la desigualdad  $|f_n(x)| \leq g(x)$   $\mu$ -casi todas partes en  $X$ .

Entonces  $f$  es una función integrable y

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n(x) d\mu(x) = \int_X f(x) d\mu(x).$$

**Demostración:** El detalle de la demostración del teorema está descrito en [[Chamorro, 2010](#), pág. 159] ■

### 2.1.3 ESPACIOS $L^p$

**Definición 14 (Espacios  $L^p$ ).** Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  y  $p \in \mathbb{R}$ , donde  $0 \leq p < \infty$ , se define  $L^p$  al espacio de las funciones medibles  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , que satisfacen

$$\int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty.$$



El espacio  $L^p$  está dotado de la norma

$$\|f\|_{L^p} = \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

ver [Brézis, 1984, pág. 55].

**Definición 15 (Espacio  $L^\infty$ ).** El espacio  $L^\infty$  es el espacio de las funciones medibles  $f$  tal que

$$|f(x)| \leq C \quad \text{c.t.p. en } \Omega, \text{ con } C \text{ constante.}$$

El espacio  $L^\infty$  posee la norma

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf\{C; |f(x)| \leq C \quad \text{c.t.p. en } \Omega\}$$

ver [Brézis, 1984, pág. 56].

**Teorema 5 (Representación de Riesz).** Sea  $1 < p < \infty$  y  $\varphi \in (L^p)'$ . Entonces existe un único  $u \in L^{p'}$  tal que

$$\langle \varphi, f \rangle = \int u f \quad \text{para todo } f \in L^p.$$

**Demostración:** Ver [Brézis, 1984, Teo IV.11]. ■

#### 2.1.4 ESPACIOS DE SOBOLEV

**Definición 16 (Espacios  $W^{1,p}$ ).** Sea un conjunto abierto  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  y  $1 \leq p \leq \infty$ , el espacio de Sobolev  $W^{1,p}$  se define como

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p \left| \begin{array}{l} \exists g_1, g_2, g_3, \dots, g_N \in L^p(\Omega) \text{ tal que} \\ \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \int_{\Omega} g_i \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \forall i = 1, 2, \dots, N \end{array} \right. \right\} \quad (2.10)$$

El espacio  $W^{1,p}(\Omega)$ , con  $1 \leq p < \infty$  está dotado de la siguiente norma

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \left( \|u\|_{L^p} + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p} \right)^{1/p}. \quad (2.11)$$

Si  $p = \infty$ , la norma es:

$$\|u\|_{W^{1,\infty}} = \sum_{i=1}^N \inf \left\{ \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| \leq C \text{ c.t.p. en } \Omega \right\} \quad (2.12)$$

Los espacios  $W^{m,p}(\Omega)$ , para  $m \geq 2$  se definen por

$$W^{m,p} = \left\{ u \in W^{m-1,p}(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in W^{m-1,p}, \forall i = 1, 2, \dots, n \right\} \quad (2.13)$$

Estos espacios están dotados de la norma

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \left( \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \|\nabla^{\alpha} u\|^p dx \right)^{1/p} \quad (2.14)$$

El espacio  $W^{1,2}(\Omega)$ , es conocido como  $H^1(\Omega)$  que es un espacio de Hilbert con el producto escalar

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) \quad (2.15)$$

y está asociado a la norma de  $W^{1,2}(\Omega)$  dada por (2.11).

**Proposición 1.** Si  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $W^{1,p}$  es un espacio de Banach. Más aún si  $1 < p < \infty$ ,  $W^{1,p}$  es un espacio reflexivo. El espacio  $H^1$  es un espacio de Hilbert separable.

**Demostración:** Ver [Brézis, 1984, pág. 150, Teo. IX.1]. ■

**Definición 17 (Espacios  $W_0^{1,p}$ ).** El espacio  $W_0^{1,p}$  es la adherencia de  $C_0^1(\Omega)$  en  $W^{1,p}$ .

El espacio  $W_0^{1,p}$  posee la norma inducida por el espacio de Banach  $W^{1,p}$ .

$H_0^1 = W_0^{1,2}$  es un espacio de Hilbert con el producto escalar definido en (2.15).

**Teorema 6 (Desigualdad de Poincaré).** Dado  $\Omega$  abierto y acotado. Entonces para  $1 \leq p \leq \infty$  existe una constante  $c$  tal que

$$\|u\|_{L^p} \leq c \|\nabla u\|_{L^p} \text{ para todo } u \in W_0^{1,p}. \quad (2.16)$$

**Demostración:** Ver [Brézis, 1984, pág. 174, Teo IX.19]. ■

## 2.2 DIFERENCIABILIDAD

**Definición 18 (Lipschitz continuidad).** Dados  $X$  e  $Y$  dos espacios normados y  $F : X \rightarrow Y$  se dice Lipschitz continua si existe una constante positiva  $L$  tal que

$$\|F(x_1) - F(x_2)\|_Y \leq L\|x_1 - x_2\|_X \quad \text{para todo } x_1, x_2 \in X. \quad (2.17)$$

**Definición 19 (Derivada de Gâteaux).** Sean  $X$  un espacio normado,  $\mathcal{U}$  un abierto no vacío de  $X$  y  $F : \mathcal{U} \subseteq X \rightarrow \mathbb{R}$  una función. Fijado un vector no nulo  $h \in X$  y  $u_0 \in \mathcal{U}$ ; si

$$DF(u_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(u_0 + th) - F(u_0)}{t} \quad (2.18)$$

existe y lineal, se denomina derivada de Gâteaux de  $F$  en la dirección  $h \in X$  en el punto  $u_0 \in \mathcal{U}$ .

**Definición 20 (Derivada de Fréchet).** Se dice que  $F$  es diferenciable en  $u_0$ , en el sentido de Fréchet, si existe una aplicación lineal y continua  $L : X \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$F'(u_0) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(u_0 + h) + F(u_0) - L(h)}{\|h\|} = 0. \quad (2.19)$$

**Proposición 2.** Sea  $F : \mathcal{U} \subseteq X \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable en el sentido de Fréchet en  $u_0$  entonces,  $F$  es diferenciable en el sentido de Gâteaux en ese punto, y además  $DF(u_0) = F'(u_0)$ .

## 2.3 MÉTODOS DE APROXIMACIÓN NUMÉRICA

En esta sección revisaremos métodos de aproximación que nos ayudarán a calcular numéricamente la solución de nuestro problema.

### 2.3.1 REGLAS DE INTEGRACIÓN NUMÉRICA

A continuación presentaremos dos métodos que utilizaremos para calcular integrales en este documento.

#### MÉTODO DEL PUNTO MEDIO

El método del punto medio consiste en reemplazar la función  $f$  sobre el intervalo  $[a, b]$  por la función constante igual al valor alcanzado por  $f$  en el punto medio del intervalo  $[a, b]$  [Quarteroni et al., 2007]

$$I_0(f) = (b - a)f\left(\frac{a + b}{2}\right). \quad (2.20)$$

Para aproximar de manera más precisa la integral  $I(f)$ , podemos dividir el intervalo  $[a, b]$  en  $m$  subintervalos de ancho  $H = (b - a)/m$  para  $m \geq 1$ . Y en cada subintervalo tomamos los nodos de aproximación  $x_k = a + (2k + 1)H/2$ , para  $k = 0, \dots, m - 1$ , se obtiene la siguiente fórmula compuesta [Quarteroni et al., 2007]

$$I_{0,m}(f) = H \sum_{k=0}^{m-1} f(x_k).$$

#### MÉTODO DEL TRAPECIO

La fórmula se obtiene reemplazando  $f$  por el polinomio de Lagrange de grado uno con los nodos  $x_0 = a$  y  $x_1 = b$  [Quarteroni et al., 2007]

$$I_1(f) = \frac{b - a}{2} [f(a) + f(b)].$$

También podemos aproximar la integral  $I(f)$  dividiendo el intervalo en  $m$  subintervalos y reemplazado  $f$  con los respectivos polinomios de Lagrange, en los nodos  $x_k = a + kH$ , para  $k = 0, \dots, m$  y  $H = (b - a)/m$  [Quarteroni et al., 2007], se obtiene la fórmula del trapecio compuesta

$$I_{1,m}(f) = \frac{H}{2} \sum_{k=0}^{m-1} (f(x_k) + f(x_{k+1})), \quad m \geq 1.$$

## 2.4 MÉTODOS DE OPTIMIZACIÓN SIN RESTRICCIONES

Dada una función objetivo  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , tomamos el problema de minimización:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \tag{2.21}$$

denominado problema de optimización sin restricciones. Si tomamos  $x^*$  solución de (2.21) o mínimo global, y mínimo local si existe  $R > 0$  tal que

$$f(x^*) \leq f(x) \quad \forall x \in B(x^*, R), \tag{2.22}$$

Asumiremos que  $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ , el gradiente de  $f$  en el punto  $x$ , se define como:

$$\nabla f(x) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)^\top \tag{2.23}$$

donde  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  es la derivada parcial.

Y la derivada direccional en la dirección  $w$  se define:

$$\frac{\partial f}{\partial w}(x) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{f(x + \alpha w) - f(x)}{\alpha}. \quad (2.24)$$

Sabemos que  $\frac{\partial f}{\partial w}(x) = \nabla f(x)^\top w$  [Quarteroni et al., 2007].

**Proposición 3.** Dados  $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ ,  $w \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  y  $\xi \in (x, x + \alpha w)$  la expansión de Taylor de  $f$  es:

$$f(x + \alpha w) - f(x) = \alpha \nabla f(\xi)^\top w \quad (2.25)$$

**Definición 21 (Puntos críticos).** Dada una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x^*$  se dice punto crítico si:

$$\nabla f(x^*) = 0. \quad (2.26)$$

**Proposición 4.**  $x^* \in \mathbb{R}^n$  es un mínimo local de  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  donde  $f \in C^1(B(x^*, R))$  para  $R > 0$  conveniente, si  $x^*$  es un punto crítico.

Ver [Quarteroni et al., 2007, pág. 299].

#### 2.4.1 MÉTODOS DE BÚSQUEDA LINEAL

La idea de estos métodos es encontrar una solución aproximada del problema (2.21), a partir de un punto inicial  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  se genera una sucesión de elementos  $x_1, x_2, \dots, x_n$  [Nocedal and Wright, 1999, pág. 19] tal que:

$$f(x_k) < f(x_{k+m}). \quad (2.27)$$

para  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$  y  $m \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$ .

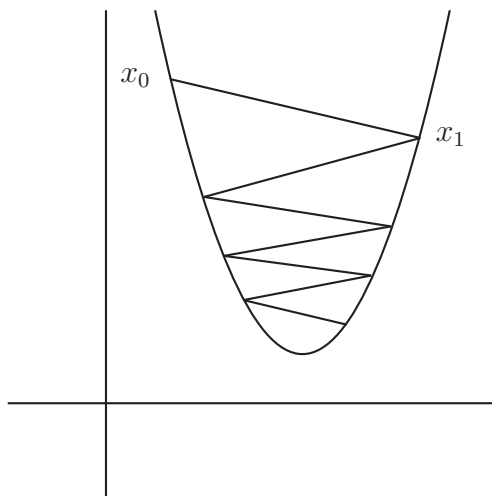
Los elementos  $x_k$  con  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$  se calculan así:

$$x_k = x_{k-1} + \alpha_k w_k \quad (2.28)$$

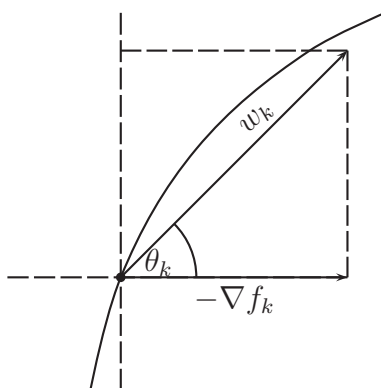
donde  $w_k$  es la dirección que nos garantiza el descenso de  $f$  (2.27), y  $\alpha_k$  es la distancia que podemos movernos en la dirección  $w_k$ , esta distancia se aproxima a partir del problema:

$$\min_{\alpha > 0} f(x_k + \alpha w_k) \quad (2.29)$$

donde  $\alpha$  se denomina largo del paso. La solución exacta de (2.29) da una mejor aproximación con la dirección  $w_k$ , pero encontrarla es costosa e innecesaria, por lo que se utilizan métodos para aproximar el largo del paso.



**Figura 2.1:** Descenso del algoritmo en cada iteración



**Figura 2.2:** Dirección de descenso

#### DIRECCIÓN DE DESCENSO

La dirección de descenso  $w_k$  para los métodos iterativos se toma usualmente como

$$w_k = -B_k^{-1} \nabla f_k. \quad (2.30)$$

Donde  $B$  es una matriz definida positiva y simétrica [Nocedal and Wright, 1999]. En general, para que la función  $f$  descienda, el ángulo entre la dirección  $w_k$  y  $-\nabla f_k$  debe ser menor que  $\frac{\pi}{2}$ .

La condición para ser una dirección de descenso es

$$d_k \nabla f_k = \|d_k\| \cdot \|\nabla f_k\| \cos \theta_k < 0. \quad (2.31)$$

Hay una variedad de métodos según la elección de la dirección de descenso. Nosotros nos enfocaremos en los métodos de tipo descenso más profundo.

#### 2.4.2 MÉTODO DEL DESCENSO MÁS PROFUNDO

El método del descenso más profundo es un método de descenso, que busca la solución del problema (2.29), con una dirección de descenso  $w_k = -\nabla f(u_k)$ . Este método será utilizado para encontrar la solución de la ecuación de movimiento para los fluidos de Herschel-Bulkley que es el tema principal de este documento.

Tomaremos la función objetivo  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , tomamos el problema de minimización dado en (2.21):

$$\min_{u \in \mathbb{R}^n} f(u) \quad (2.32)$$

denominado problema de optimización sin restricciones. Si tomamos  $u^*$  solución de (2.32). Por ser un método de búsqueda lineal definimos al paso  $u_{k+1}$  como:

$$u_{k+1} = u_k + \alpha_k \cdot w_k \quad (2.33)$$

donde  $\alpha_k$  tamaño del paso en la k-esíma iteración y  $w_k$  dirección de descenso en la k-esíma iteración.

El objetivo principal del método del descenso más profundo es que la función  $f$  decrece lo más rápido posible en cada iteración (2.27). Para que la función  $f$  decaiga rápidamente en la dirección  $-\nabla f(u_n)$ , por lo que se toma la dirección de descenso como

$$w_n = -\nabla f(u_n) \quad (2.34)$$

La definición de la dirección en (2.34) cumple con (2.31) y el método de búsqueda lineal se denomina **descenso más profundo** [Nocedal and Wright, 1999, Quarteroni et al., 2007].

Después de que la dirección de descenso está determinada, tenemos que definir cuanto podemos movernos en dicha dirección para poder encontrar la solución del problema.

De [De Los Reyes, 2012] sabemos que la longitud del paso está definida por

$$\alpha_k = \arg \min_{\alpha > 0} \{f(y_k + \alpha w_k)\}. \quad (2.35)$$

Para resolver este problema de minimización utilizaremos la condición de Armijo.

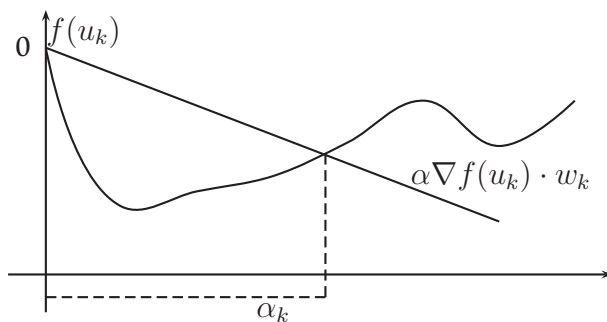
## CONDICIÓN DE ARMIJO

Dado que resolver numéricamente (2.35), es complicado, vamos a aproximar su solución

$$f(u_n + \alpha_n w_n) - f(u_n) \longrightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty \quad (2.36)$$

Una forma de encontrar  $\alpha_n$  se denomina condición o regla de Armijo que consiste en tomar escalares  $s, \rho > 0$  con  $\rho \in (0, 1)$  y  $\sigma \in (0, 1/2)$ . Escogemos  $\alpha_n \in \{s, s\rho, s\rho^2, \dots\}$

$$f(u_n) - f(u_n - \alpha w_n) \geq +\sigma \alpha \nabla f(u_n)^\top \cdot w_n \quad (2.37)$$



**Figura 2.3:** Condición de Armijo



“It is important to remember that we all have magic inside us.”

J.K Rowling

# 3

## Problemas Quasilineales

En este capítulo abordaremos el problema del p-Laplaciano que es parte importante en la ecuación de movimiento de los fluidos de Herschel-Bulkley. Comenzaremos revisando las ecuaciones de Poisson asociadas al operador p-Laplaciano. Luego mostraremos que este tiene solución única en el espacio  $W_0^{1,p}$  con  $1 < p < \infty$  y mostraremos una aproximación numérica basada en el método del descenso más profundo.

### 3.1 ECUACIONES QUASILINEALES DE SEGUNDO ORDEN

Una ecuación diferencial quasilineal de segundo orden está definida por [Miersemanm, 2012]

$$\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x, u, \nabla u) u_{x_i x_j} + b(x, u, \nabla u) = 0. \quad (3.1)$$

en  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , donde  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , y asumiendo que  $a^{ij} = a^{ji}$ . Podemos caracterizar como

$$\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x, u, \nabla u) \chi_{x_i} \chi_{x_j} = 0 \quad (3.2)$$

Las ecuaciones quasilineales asociadas a la caracterización de la ecuación (3.1) no tienen solución  $\chi$  cuando  $\nabla \chi \neq 0$  [Miersemanm, 2012, pág. 73].

**Definición 22** (Ecuación quasilineal elíptica). *La ecuación quasilineal (3.1) se dicen elípticas si la matriz  $a^{ij}(x, z, p)$  es definida positiva para cada  $(x, z, p) \in U\{(x, z, p) : x \in \Omega, z \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{R}^n\}$ .*

### 3.2 PROBLEMA DEL P-LAPLACIANO

En esta sección, tomaremos el operador p-Laplaciano dado por

$$\Delta_p y \equiv \nabla \cdot (|\nabla y|^{p-2} \nabla y) \quad \text{con } 1 < p < \infty \quad (3.3)$$

que es un ejemplo muy interesante de operador quasilineal y además es parte de la ecuación de movimiento de los fluidos de Herschel-Bulkley que es el tema principal en este documento.

En [Barrett and Liu, 1993, Glowinski and Marrocco, 1975, Huang et al., 2007] y [Peral, 1998] se analiza el siguiente problema:

Dado un abierto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , Lipschitz continua con  $1 < p < \infty$ , hallar  $y$  tal que

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (|\nabla y|^{p-2} \nabla y) = f & \text{en } \Omega \\ y = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.4)$$

con  $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$  y  $p' = \frac{p}{p-1}$  donde  $W^{-1,p'}(\Omega)$  es el espacio dual de  $W^{1,p}(\Omega)$ .

Para probar que (3.4) tiene solución, presentaremos el siguiente teorema.

**Teorema 7.** *Dado  $\Omega$  acotado y  $f \in W^{-1,p'}$ , el problema (3.4) tiene una solución  $y \in W_0^{1,p}$ , en el sentido siguiente*

$$\int_{\Omega} |\nabla y|^{p-2} (\nabla y, \nabla w) dx = \int_{\Omega} f w dx \quad \text{para todo } w \in W_0^{1,p} \quad (3.5)$$

**Demostración:** Ver [Peral, 1998, pág. 20]. ■

Así el problema (3.4) equivale a encontrar  $y \in W_0^{1,p}$  que cumpla

$$\int_{\Omega} |\nabla y|^{p-2} (\nabla y, \nabla v) dx = \int_{\Omega} f v dx \quad \text{para todo } v \in W_0^{1,p} \quad (3.6)$$

### PROBLEMA DE MINIMIZACIÓN

El problema (3.6), puede ser caracterizado como un problema de minimización, definimos

$$J(y) = \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla y|^p dx - \int_{\Omega} f y dx \quad (3.7)$$

con derivada de Gateaux en la dirección  $w$  dada por 3.6. Entonces el problema se puede resolver variacionalmente minimizando el funcional (3.7), correspondiente al problema de minimización [Casas and Fernández, 1993, Glowinski and Marrocco, 1975]

$$\min_{y \in W_0^{1,p}} J(y) \quad (3.8)$$

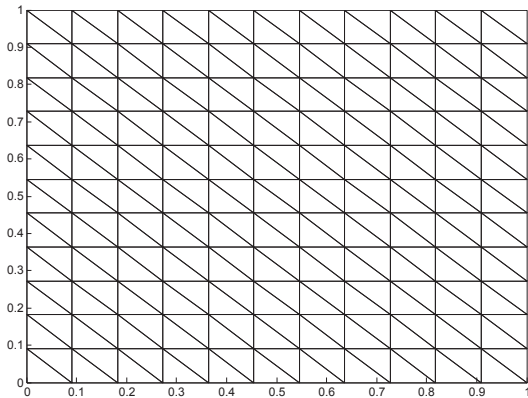
donde

$$J(y) = \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla y|^p dx - \int_{\Omega} f y dx \quad (3.9)$$

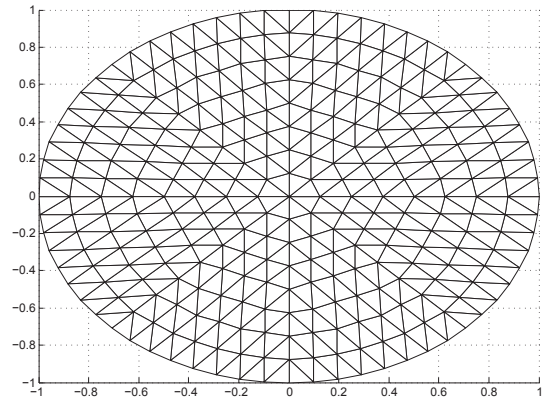
#### 3.2.1 DISCRETIZACIÓN

En esta sección discretizaremos (3.8), aplicando el método de elementos finitos [Barrett and Liu, 1993, Huang et al., 2007], definiendo  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . Tomando  $\Omega^h$  como la aproximación poligonal de  $\Omega$  y  $\bar{\Omega}^h = \bigcup_{\tau \in T^h} \bar{\tau}$ , donde  $T^h$  es una partición de  $\Omega^h$  en el sentido de Ciarlet, en un número finito de triángulos  $\tau$  disjuntos con lado  $h$ . Además, si tomamos dos triángulos cualesquiera de la partición, sus clausuras son disjuntas o a lo más comparten un lado o vértice.

En los siguientes gráficos tenemos la partición  $T^h$  para el dominio  $[0, 1] \times [0, 1]$  y  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  respectivamente [Alberty et al., 1999, Barrett and Liu, 1993].

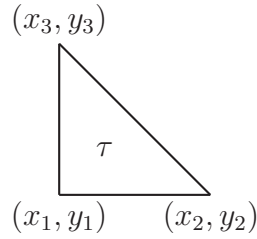


**Figura 3.1:** Malla rectangular en  $[0, 1] \times [0, 1]$ , con  $h = 1/11$ .



**Figura 3.2:** Malla circular en  $[-1, 1] \times [-1, 1]$ , con  $h = 1/11$ .

Sea  $\tau \in T^h$  un triángulo de la partición, sus vértices tiene coordenadas  $(x_j, y_j)$ .



Ala partición  $T^h$ , asociamos el espacio finito dimensional [Barrett and Liu, 1993, pág. 524] siguiente:

$$S^h = \left\{ \chi \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}^h) : \chi|_{\tau} \text{ lineal para todo } \tau \in T^h \right\} \subset W_0^{1,p}(\Omega^h). \quad (3.10)$$

Así el problema (3.8) discretizado es

$$\min_{y^h \in S^h} J(y) \quad (3.11)$$

donde

$$J(y) = \frac{1}{p} \int_{\Omega^h} |\nabla y|^p dx - \int_{\Omega^h} f y^h dx \quad (3.12)$$

Definimos las funciones  $\varphi$  como :

$$\varphi_j(x, y) = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_{j+1} & y_{j+1} \\ 1 & x_{j+2} & y_{j+2} \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_{j+1} & y_{j+1} \\ 1 & x_{j+2} & y_{j+2} \end{pmatrix}} \quad (3.13)$$

y

$$\nabla \varphi_j(x, y) = \frac{1}{2|\tau|} \begin{pmatrix} y_{j+1} - y_{j+2} \\ x_{j+2} - x_{j+1} \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

donde los índices se toman en módulo 3 y  $|\tau|$  representa el área del triángulo [Alberty et al., 1999].

Tomamos  $B_S^h = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$  base  $S^h$ , para cada triángulo  $\tau$  con vértices  $(x_i, y_i)$  con  $i = 1, 2, 3$ . y  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  las correspondientes funciones de la base

$$\varphi_j(x_k, y_k) = \delta_{jk}, \quad j, k = 1, 2, 3 \quad (3.15)$$

Un elemento cualesquiera  $y \in S^h$  se escribe como la combinación de las funciones de la base

$$y^h = \sum_{i=0}^n y_i \varphi_i \quad \text{y} \quad \nabla^h y = \sum_{i=0}^n y_i \nabla \varphi_i. \quad (3.16)$$

Así el funcional dado en (3.12) está dado por

$$J(y) = \frac{1}{p} C^h - f^{h\top} \vec{y} \quad (3.17)$$

con  $C^h = (C_i)$  donde

$$C_i = \sum_{\tau \in T^h} \int_{\tau} \left| \sum_{k=1}^3 y_k \varphi_k \right|^p dx \quad \text{para } i = 1, \dots, n \quad (3.18)$$

Donde  $|\nabla y^h| = \left| \sum_{k=1}^3 y_k \nabla \varphi_k \right|$  en cada triángulo  $\tau$ , tomando la forma discreta

$$\nabla^h = \begin{pmatrix} \partial_1^h \\ \partial_2^h \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

Para cada triángulo  $\tau$ , con vértices  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  y  $(x_3, y_3)$ , se tiene

$$\partial_1^h = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_3} \end{pmatrix} \quad \partial_2^h = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_1} \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_2} \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_3} \end{pmatrix} \quad \text{para } i = 1, 2, 3. \quad (3.20)$$

Así el gradiente discreto está dado por

y

$$\nabla \vec{y}^h = \begin{pmatrix} \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial \mathbf{x}_1} y_i \right) \\ \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial \mathbf{x}_2} y_i \right) \end{pmatrix} \quad \text{para } i = 1, 2, 3 \quad (3.21)$$

[González Andrade, 2008], donde  $\mathbf{x}_1 = (x_1, x_2, x_3)$  y  $\mathbf{x}_2 = (y_1, y_2, y_3)$ .

Para expresar la  $|\nabla y^h|$ , definimos la siguiente función

$$\begin{aligned} \xi : \mathbb{R}^6 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \xi(u)_k &:= |(p_k, p_{k+3})^\top| \quad \text{para } k = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Así, la integral  $\int_{\Omega} |\nabla y|^p$ , se aproxima así:

$$\sum_{\tau \in T^h} \int_{\tau} |\nabla y|^p dx = \sum_{\tau \in T^h} \int_{\tau} \xi(\nabla y)^p dx. \quad (3.23)$$

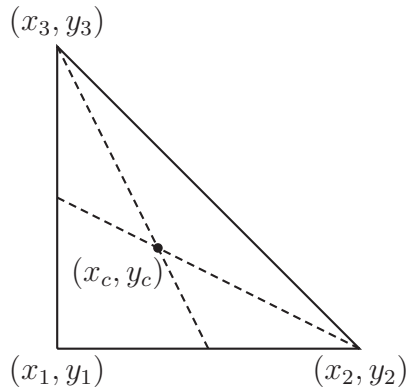
Aplicando el método del punto medio aproximaremos el valor de la integral (3.23), así:

$$C_i = \sum_{\tau \in T^h} \int_{\tau} \xi(\nabla y)^p dx \approx \sum_{\tau \in T^h} |\tau| \frac{\xi(\nabla y)^p}{2} \quad \text{para } i = 1, \dots, n. \quad (3.24)$$

Por otro lado,  $f^h = (f_i)$  con

$$f_i = \sum_{\tau \in T^h} \int_{\tau} f \varphi_i(x) dx \quad \text{para } i = 1, \dots, n \quad (3.25)$$

cuya aproximación en cada  $\tau$  se calcula en  $(x_c, y_c)$  que es el centro de gravedad del triángulo [Alberty et al., 1999, pág. 123].



así

$$\int_{\tau} f \varphi_i dx \approx \frac{1}{6} \det \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix} f(x_c, y_c) \quad (3.26)$$

y

$$f_i = \sum_{\tau \in T^h} \frac{1}{6} \det \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix} f(x_c, y_c) \quad (3.27)$$

### 3.3 MÉTODO DEL DESCENSO MÁS PROFUNDO PARA EL PROBLEMA DEL P-LAPLACIANO

En esta sección tomaremos el problema de minimización discretizado que caracteriza al problema del p-Laplaciano y utilizaremos el método de búsqueda lineal del descenso más profundo visto en el capítulo 2, para encontrar su solución aproximada. Para aplicar el método del descenso más profundo definiremos dos tipos de direcciones de descenso empleados en [Huang et al., 2007, Zhou et al., 2005]. Luego determinaremos la longitud del paso de descenso usando la condición de Armijo; y luego encontraremos la solución de (3.11). Para comenzar con el método del descenso más profundo tomaremos el problema discretizado.

$$\min_{y^h \in S^h} J(y^h) \quad (3.28)$$

con

$$J(y^h) = \int_{\Omega^h} |\nabla y^h|^p - \int_{\Omega^h} f y^h. \quad (3.29)$$

Definiremos la aproximación de la solución de 3.28 en el n-ésimo paso como:

$$y_{n+1} = y_n + \alpha_n w_n \quad n \in \mathbb{R}^+ \quad (3.30)$$

donde  $\alpha_n$  es la longitud del n-ésimo paso y  $w_n$  es la dirección del n-ésimo paso.

Para escoger la dirección de descenso para el problema (3.28), nos basaremos en [Huang et al., 2007, Zhou et al., 2005], en estos artículos se define la dirección de descenso aplicada al problema del p-Laplaciano de las formas que describiremos a continuación.

#### 3.3.1 MÉTODO DEL DESCENSO MÁS PROFUNDO PRECONDICIONADO

De acuerdo con el texto de [Huang et al., 2007], tomaremos la dirección de descenso  $w_n$  como:

$$\int_{\Omega^h} \nabla w_n \nabla v = -J'(y_n)v = - \int_{\Omega^h} |\nabla y_n|^{p-2} (\nabla y_n, \nabla v) + \int_{\Omega^h} f v \quad (3.31)$$

para todo  $v \in S^h$ , y por la forma que se selecciona  $w_n$  es el representante de Riesz para el funcional  $-J'(y_n)$  en el espacio  $S^h$  [Huang et al., 2007, pág. 5].

Con la dirección (3.31) el método del descenso más profundo se conoce como **precondicionado** [Huang et al., 2007, Zhou et al., 2005]. En [Huang et al., 2007, pág. 5] se prueba que (3.31) es una dirección de descenso.

Otra forma de presentar (3.31), es

$$B^h w_n = A^h y_n - f^h \quad (3.32)$$

con  $B^h = (b_{ij})$  donde

$$b_{ij} = \sum_{\tau \in T^h} \int_{\tau} (\nabla \varphi_i, \nabla \varphi_j), \quad \text{para } i, j = 1, \dots, n \quad (3.33)$$

$A^h = (a_{ij})$  y expresando  $a_{ij}$  con la definición de  $|\nabla^h y|$  dada en (3.21) y la función  $\xi$  definida en (3.22), tenemos

$$a_{ij} = \sum_{\tau \in T^h} \int_{\tau} \xi \left( |\nabla^h y| \right)^{p-2} (\nabla \varphi_i, \nabla \varphi_j) dx \quad \text{para } i, j = 1, \dots, n \quad (3.34)$$

y  $f^h = (f_j)$  donde

$$f_j = \sum_{\tau \in T^h} \int_{\tau} f \varphi_j \quad \text{para } j = 1, \dots, n. \quad (3.35)$$

y evaluando  $f$  en el centro de masa  $\tau$  tenemos que

$$\int_{\tau} f \varphi_j dx \approx \frac{1}{6} \det \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix} f(x_c, y_c) \quad (3.36)$$

### 3.3.2 MÉTODO DEL DESCENSO MÁS PROFUNDO PONDERADO

Considerando el espacio  $S^h \hookrightarrow H_0^1(\Omega^h)$ , definido en (3.10) con la norma ponderada

$$|\cdot|_{y_n}^2 = \int_{\Omega} (\xi + |\nabla y_n|^{p-2}) |\nabla \cdot|^2 \quad (3.37)$$

tomaremos la dirección de descenso  $w_n$  dada en [Huang et al., 2007, Zhou et al., 2005] como:

$$\int_{\Omega^h} (\epsilon + |\nabla y_n|^{p-2}) \nabla w_n \nabla v = -J'(y_n)v = - \int_{\Omega^h} |\nabla y_n|^{p-2} (\nabla y_n, \nabla v) + \int_{\Omega^h} f v \quad (3.38)$$

donde el parámetro  $\epsilon$  es una constante positiva pequeña, la que permite al algoritmo generar un resultado aún si  $\nabla y = 0$  [Huang et al., 2007, pág. 6], y por la forma de selección  $w_n$  es el representante de Riesz del funcional  $J'(y_n)$  en el espacio  $S^h$  con la norma 3.37.

El método del descenso más profundo con la dirección  $w_n$  definida en (3.38) se denomina **pon-**



derado [Huang et al., 2007, Zhou et al., 2005].

La expresión (3.38) se puede representar como

$$B^h w_n = A^h y_n - f^h \quad (3.39)$$

con  $B^h = (b_{ij})$  donde

$$b_{ij} = \sum_{\tau \in T^h} \int_{\tau} \left( \epsilon + \xi (\nabla^h y)^{p-2} \right) (\nabla \varphi_i, \nabla \varphi_j), \quad \text{para } i, j = 1, \dots, n \quad (3.40)$$

con  $A^h$  y  $f^h$  dadas en (3.34) y (3.35) respectivamente.

### 3.3.3 LONGITUD DEL PASO

El método del descenso más profundo consisten en encontrar a partir del paso  $x_n$  una dirección  $w_n$  que nos permita calcular el siguiente paso  $x_{n+1}$ , y como vimos en el capítulo 2, la longitud que podemos movernos en la dirección  $w_n$  se aproxima resolviendo el problema de minimización

$$\min_{\alpha > 0} J(y_n + \alpha w_n) \quad (3.41)$$

donde  $\alpha$  se denomina largo del paso y su solución no se calcula de manera exacta por el costo computacional que requiere. Para resolver nuestro problema vamos a utilizar la condición de Armijo [Nocedal and Wright, 1999] presentada en la definición (2.37), que aplicada al problema del p-Laplaciano discretizado está dado por la siguiente definición.

**Definición 23 (Condición de Armijo para el p-Laplaciano).** *Dados los escalares  $s, \rho > 0$  con  $\rho \in (0, 1)$  y  $\sigma \in (0, 1/2)$ . Tomamos  $\alpha \in \{s, s\rho, s\rho^2, \dots\}$*

$$J(y_n) - J(y_n - \alpha w_n) \geq -\sigma \alpha J'(y_n) v \cdot w_n \quad (3.42)$$

Para aplicar la condición de Armijo cada en (3.42) debemos seguir los pasos siguientes

---

**Algoritmo Armijo**


---

1: Fijar  $s, \rho, \sigma, y_0, J_1 = J(y_0)$  y  $n = 0$

**repetir**

2: Tomar  $y = y_0$

3: Definir  $arm$  el criterio de parada dado en (3.42)

4: Actualizar  $\alpha = s\rho^{1/n}, y = y + \alpha w_n$

5: Calcular  $arm = J_1 - J(y)$

**hasta** que la condición de parada se cumpla

---

Después de definir la longitud del paso (3.42), la dirección de descenso (3.31) y (3.38) y dada la convergencia presentada en [Huang et al., 2007, sección 3.2], podemos aplicar el método del descenso más profundo al problema de minimización (3.28) que caracteriza al problema del p-Laplaciano mediante los siguientes pasos [De Los Reyes, 2012]:

---

**Algoritmo 1**


---

1: Fijar  $y_0$  y  $n = 0$

**repetir**

2: Escoger criterio de parada.

3: Encontrar  $w_n$  con ((3.31),(3.38)).

4: Determinar  $\alpha_n$  utilizando con el algoritmo de Armijo. (3.42)

5: Actualizar  $y = y + \alpha_n w_n$

**hasta** que la condición de parada se cumpla

---

### 3.4 EXPERIMENTOS NUMÉRICOS

En esta sección presentaremos dos experimentos numéricos los cuales mostraran el rendimiento se los métodos del descenso más profundo preconditionado y ponderado, respectivamente.

#### 3.4.1 EXPERIMENTO 1

Para este problema vamos a considerar el método del descenso más profundo ponderado en el cuadrado unidad (3.1), y tomaremos el tamaño a la malla de  $20^2$  ( $h = 1/20$ ) y  $p = 1, 5$  para resolver:

$$\min_{y^h \in S^h} J(y^h) \tag{3.43}$$

con

$$J(y^h) = \int_{\Omega^h} |\nabla y^h|^p - \int_{\Omega^h} f y^h. \quad (3.44)$$

Para este experimento tomaremos  $f$  como la función

$$f(x_1, x_2) = \sin(\pi x_1) \cdot \sin(\pi x_2) \quad (3.45)$$

Y fijaremos  $y_0$  como la solución del problema

$$\begin{cases} -\Delta y_0 = \sin(\pi x_1) \cdot \sin(\pi x_2) & \text{en } [0, 1] \times [0, 1] \\ y_0 = 0 & \text{en } \partial([0, 1] \times [0, 1]) \end{cases} \quad (3.46)$$

Para aplicar el método del descenso ponderado inicializaremos el problema dando  $y = y_0$ ,  $error = 1$ ,  $\xi = 1 \times 10^{-4}$ , y  $w_0$  como

$$\int_{\Omega^h} (\epsilon + |\nabla y_0|^{-0.5}) \nabla w_0 \nabla v = - \int_{\Omega^h} |\nabla y_0|^{-0.5} (\nabla y_0, \nabla v) + \int_{\Omega^h} f v \quad (3.47)$$

y  $w_n$  como (3.38)

$$\int_{\Omega^h} (\epsilon + |\nabla y_n|^{-0.5}) \nabla w_n \nabla v = - \int_{\Omega^h} |\nabla y_n|^{-0.5} (\nabla y_n, \nabla v) + \int_{\Omega^h} f v \quad (3.48)$$

Definimos el error de aproximación como

$$error = |J'(y)w| = \left| - \int_{\Omega^h} |\nabla y|^{-0.5} (\nabla y, \nabla w) + \int_{\Omega^h} f w \right| \quad (3.49)$$

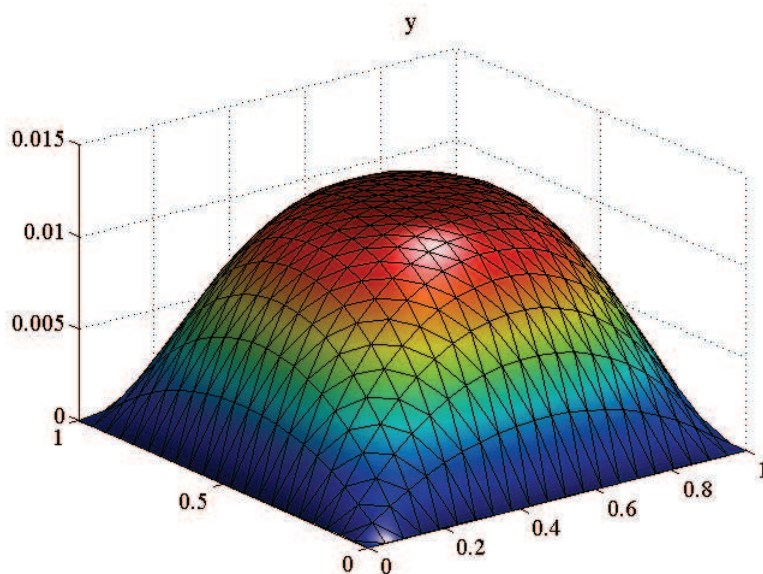
y el criterio de parada como  $error \leq 1 \times 10^{-4}$ .

Por otro lado, definiremos  $\alpha$  como la longitud del paso, mediante la condición de Armijo, tomando  $J1 = J(y)$ , y las constantes  $\rho = 0.8$ ,  $\sigma = 1 \times 10^{-4}$ ,  $arm = 1 \times 10^6$ ,  $s = 0.7$  y el criterio de parada dada en (5.6).

Al aplicar el algoritmo del descenso más profundo ponderado al problema (3.43) obtuvimos los siguientes resultados

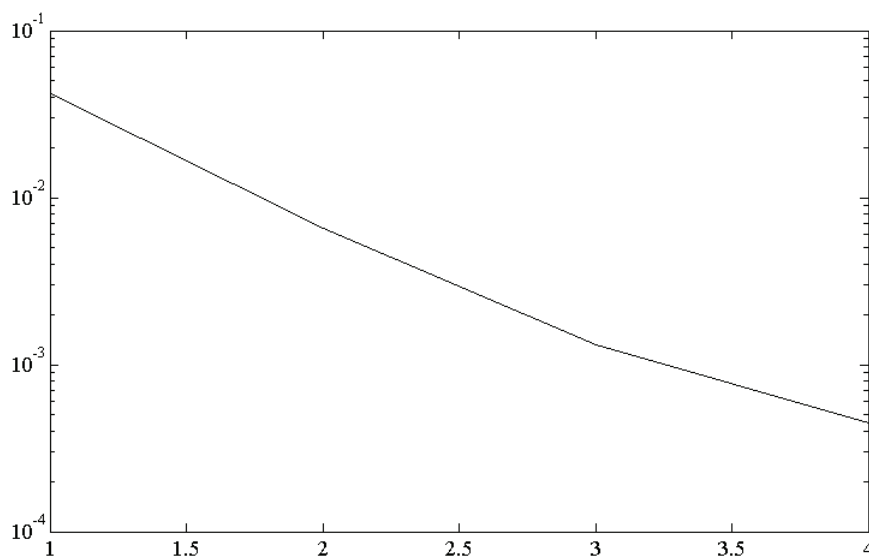
$ J'(y)v $	Número de iteraciones	Tiempo
$1.9305 \times 10^{-4}$	4	1.73 s

Además  $y_h$  obtenida por el algoritmo tiene la siguiente representación gráfica



**Figura 3.3:** Solución del problema (3.43)

En el gráfico podemos ver una superficie regular que representa a la solución  $y^h$  de (3.43).



**Figura 3.4:** Error de aproximación

El gráfico muestra como el error de aproximación desciende en cada iteración del método. En este experimento podemos ver que el error desciende de forma casi lineal con cada iteración.

### 3.4.2 EXPERIMENTO 2

Para este problema vamos a considerar el método del descenso más profundo ponderado en el círculo (3.1), y tomaremos el tamaño a la malla de  $30^2$  ( $h = 1/30$ ) y  $p = 9$  para resolver:

$$\min_{y^h \in S^h} J(y^h) \quad (3.50)$$

con

$$J(y^h) = \int_{\Omega^h} |\nabla y^h|^9 - \int_{\Omega^h} f y^h \quad (3.51)$$

Para este experimento tomaremos  $f$  como la función

$$f(x_1, x_2) = 10 \quad (3.52)$$

Y fijaremos  $y_0$  como la solución del problema

$$\begin{cases} -\Delta y_0 = 10 & \text{en } \Omega^h \\ y_0 = 0 & \text{en } \partial(\Omega^h) \end{cases} \quad (3.53)$$

Para aplicar el método del descenso ponderado inicializaremos el problema dando  $y = y_0$ ,  $error = 1$ ,  $\epsilon = 1 \times 10^{-4}$ , y  $w_0$  como

$$\int_{\Omega^h} \nabla w_0 \nabla v = - \int_{\Omega^h} |\nabla y_0|^7 (\nabla y_0, \nabla v) + \int_{\Omega^h} f v \quad (3.54)$$

y  $w_n$

$$\int_{\Omega^h} \nabla w_n \nabla v = - \int_{\Omega^h} |\nabla y_n|^7 (\nabla y_n, \nabla v) + \int_{\Omega^h} f v \quad (3.55)$$

Definimos el error de aproximación como

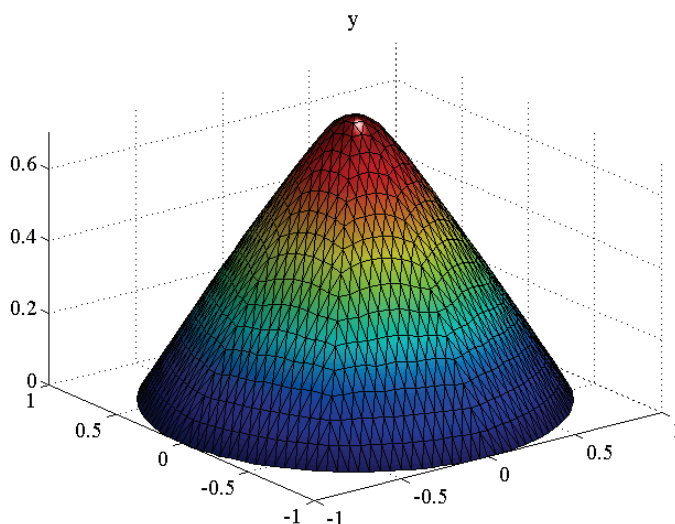
$$error = |J'(y)w| = \left| - \int_{\Omega^h} |\nabla y|^7 (\nabla y, \nabla w) + \int_{\Omega^h} f w \right| \quad (3.56)$$

y el criterio de parada como  $error \leq 1 \times 10^{-4}$ .

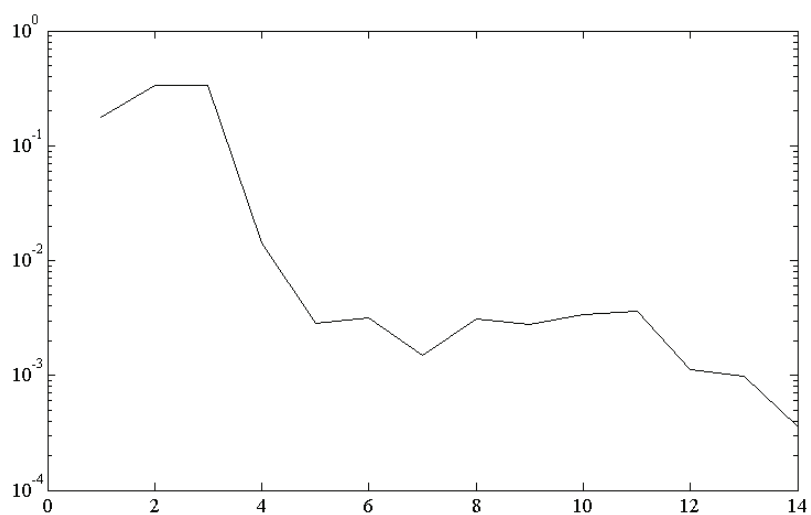
Por otro lado, definiremos a la longitud de paso  $\alpha$  mediante la condición de Armijo. Tomando  $J_1 = J(y)$ , y las constantes  $\rho = 0.5$  y  $\sigma = 1 \times 10^{-4}$ ,  $arm = 1 \times 10^5$ ,  $s = 0.5$ . Después de aplicar el algoritmo del descenso más profundo ponderado al problema (3.50) obtuvimos los resultados de la siguiente tabla.

$ J'(y)v $	Número de iteraciones	Tiempo
$5.7328 \times 10^{-4}$	14	6.32 s

Además  $y_h$  obtenida por el algoritmo tiene la siguiente representación gráfica



**Figura 3.5:** Solución de la ecuación(3.50)



**Figura 3.6:** *error* de aproximación

El gráfico representa el error de aproximación en cada iteración del método. En la curva se puede ver como oscila el error en algunas iteraciones, este comportamiento del error es el esperado en la aplicación del método del descenso más profundo.

*“I’ve learned that people will forget what you said, people will forget what you did, but people will never forget how you made them feel.”*

Maya Angelou

# 4

## Estudio del fluido de Herschel-Bulkley

En este capítulo analizaremos el concepto de fluido viscoplástico. Para lo que revisaremos leyes y conceptos que describen el comportamiento de estos materiales. Luego presentaremos los modelos clásicos de fluidos viscoplásticos, y nos concentraremos en el estudio del fluido de Herschel-Bulkley.

### 4.1 CARACTERÍSTICAS FÍSICAS DE LOS FLUIDOS

En esta sección presentaremos conceptos físicos que nos ayudarán a comprender el movimiento de un fluido en un medio continuo. Sea  $Z \in \mathbb{R}^n$  una región de un fluido,  $x \in Z$  partícula o punto del fluido que se mueve en un tiempo  $t$ ,  $y(x, t)$  la velocidad de la partícula  $x$  en  $Z$ , y densidad de masa  $\rho(x, t)$ .

**Definición 24** (Principio de conservación de masa). *El principio de conservación de masa en forma diferencial establece que:*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho y) = 0 \quad (4.1)$$

esta ecuación es conocida como **ecuación de continuidad** [*Chorin and Marsden, 1993*].

**Definición 25** (Balance de momento). *En un fluido en movimiento, se produce un gradiente de velocidad y una transferencia de momento por velocidad de área y su forma diferencial es:*

$$\rho \frac{\partial y}{\partial t} = -\nabla p + \rho f \quad (4.2)$$

**Definición 26** (Fluidos incompresibles). *En los fluidos incompresibles la densidad durante el flujo permanece constante  $\rho = c$ , donde  $c$  es una constante [Landau and Lifshitz, 1991]. Para los fluidos incompresibles el principio de conservación de masa dado en 4.1 se reduce a:*

$$\nabla \cdot y = 0 \quad (4.3)$$

## FLUIDOS VISCOSOS

Para obtener las ecuaciones que describen un fluido viscoso incluiremos conceptos adicionales en las ecuaciones anteriormente vistas para un fluido ideal.

**Definición 27** (Viscosidad). *La viscosidad o rozamiento interno, aparece por una transferencia de impulso entre puntos del fluido con una velocidad, a otros puntos del fluido que tienen velocidad menor [Chorin and Marsden, 1993].*

Y para los fluidos viscosos se tiene

$$\text{la fuerza en } S \text{ por unidad de área} = -\nabla p + \nabla \cdot \sigma$$

donde la matriz  $\sigma$  se denomina **tensor de estrés** [Chorin and Marsden, 1993].

**Definición 28** (Tensor de estrés  $\sigma$ ). *El tensor de estrés describe las fuerzas internas en un material elástico debido a su deformación.*

**Definición 29** (Ecuación de Cauchy). *La ecuación de Cauchy relaciona la definición de balance de momento (4.2) en un volumen regular con el concepto de tensor de estrés.*

$$\rho \frac{\partial y}{\partial t} = \rho f + \nabla \cdot \sigma \quad (4.4)$$

**Definición 30** (Estrés cortante  $\tau$ ). *Es la fuerza que se requiere para que una unidad de área de un fluido o material se mueva sobre otro y se mide en  $N/m^2$ .*

En los fluidos como el agua, alcohol,  $\tau$  es directamente proporcional al cambio de velocidades entre posiciones diferentes del fluido.

**Definición 31** (Tasa Cortante  $\mathcal{E}$ ). *La tasa cortante o gradiente de la velocidad es la medida del cambio de la velocidad dada por  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ . La tasa cortante o tasa de deformación es*

$$\mathcal{E} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (4.5)$$

donde  $\Delta$  representa la variación.



$$\sigma = \mu \left( \frac{\Delta y}{\Delta x} \right) \quad (4.6)$$

donde  $\mu$  es la viscosidad del fluido.

#### FLUIDOS NEWTONIANOS Y NO NEWTONIANOS

Los fluidos que tienen viscosidad  $\mu \neq 0$ , se pueden dividir en dos clases, según su relación entre el estrés de corte y la tasa cortante.

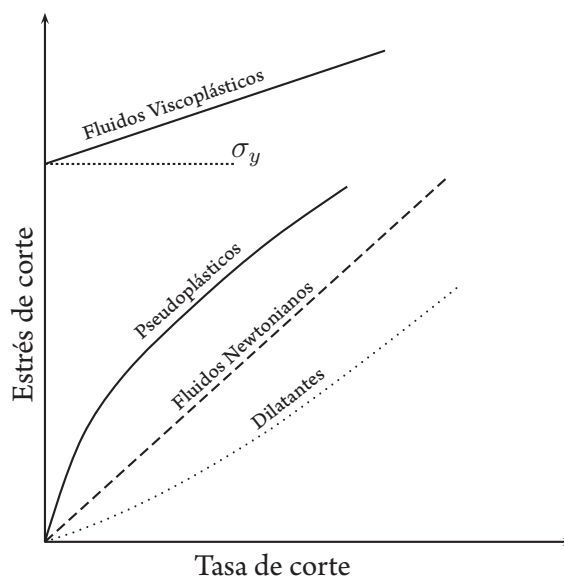
**Definición 32 (Fluidos Newtonianos).** *En los fluidos Newtonianos la relación entre el estrés de corte y la tasa cortante es lineal, este tipo de materiales cumplen con (4.6).*

Un comportamiento Newtoniano se observa en todos los gases, en líquidos y soluciones con poco peso molecular, como por ejemplo aceite, alcohol, agua, benceno, glicerina, el aire, entre otros.

**Definición 33 (Fluidos No Newtonianos).** *Los fluidos no Newtonianos tienen una relación no lineal entre la tasa cortante y el estrés de corte [Quoc Hung and Ngoc-Diep, 2012].*

Este grupo de materiales se divide según su relación entre la tasa corte y el estrés de corte en:

1. **Fluidos Pseudoplásticos** Estos fluidos se caracterizan por la disminución de su viscosidad, y su estrés cortante con el aumento de la tasa de corte. Algunos ejemplos de este tipo de fluidos son la mostaza, algunas clases de pinturas, suspensiones acuosas de arcilla, entre otros.
2. **Fluidos Dilatantes** Los fluidos dilatantes se caracterizan por el un aumento del estrés cortante con el aumento de de la tasa de cortante, es decir que hay un aumento de la viscosidad con el aumento de la tasa cortante. Este tipo de fluidos son más comunes que los fluidos pseudoplásticos; varios ejemplos de fluidos que poseen este comportamiento son la manteca, las suspensiones de almidón, la harina de maíz, la arena mojada, dióxido de titanio, etc.
3. **Fluidos Viscoplasticos** Los fluidos viscoplasticos se caracteriza por ser comportarse como un sólido hasta sobrepasar un estrés cortante mínimo y a partir de dicho valor comienza a fluir como un líquido.



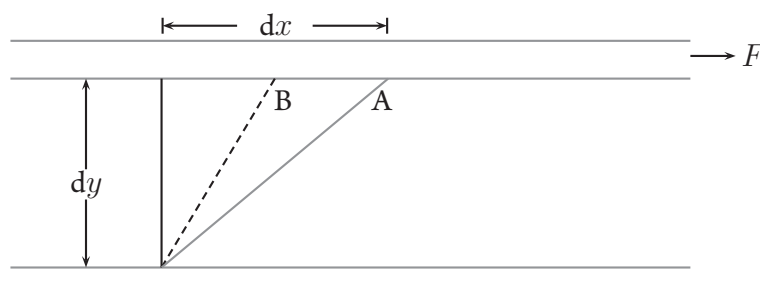
**Figura 4.1:** Gráfico de diferentes fluidos según su relación entre la tasa de corte y el estrés de corte.

#### 4.1.1 FLUIDOS VISCOPLÁSTICOS

En esta sección estudiaremos a los fluidos viscoplasticos, uno de cuyos modelos más conocidos es el modelo de que son importantes para estudiar los fluidos de Herschel-Bulkley.

**Definición 34** (Límite elástico  $\sigma_y$ ). *El límite elástico es el esfuerzo cortante mínimo o esfuerzo umbral que necesita un fluido viscoplastico para pasar de un comportamiento sólido a uno líquido. El límite elástico varia dependiendo del fluido.*

Los fluidos viscoplasticos por ser no Newtonianos tienen una relación no lineal entre el estrés de corte y la tasa cortante (no cumple con (4.6)). Estos fluidos se comportan como un sólido rígido cuando el estrés cortante es menor al límite elástico, y como un fluido en caso contrario. Un comportamiento viscoplastico se evidencia en algunos fluidos como el chocolate, la arcilla, la pasta de dientes, emulsiones, mayonesa, mantequilla, derivados del petróleo, etc.

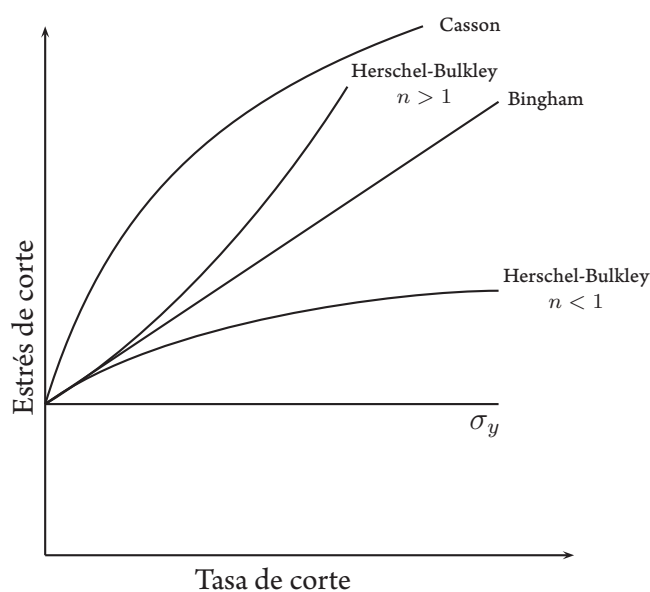


**Figura 4.2:** Fluido viscoplastico entre dos placas

En la figura (4.2), representamos un fluido viscoplástico entre dos placas [Boger and Halmos, 1981, Quoc Hung and Ngoc-Diep, 2012], la fuerza para desplazar una partícula una distancia  $dx$  es  $Fdx$ , para un fluido Newtoniano la partícula recorre desde el punto inicial hasta  $A$ , mientras que en los fluidos viscoplásticos se moverá hasta el punto  $B$  debido a que la fuerza aplicada al fluido debe superar el límite elástico para comenzar el movimiento.

#### CLASIFICACIÓN DE LOS FLUIDOS VISCOPLÁSTICOS

A continuación presentaremos los modelos clásicos de fluidos viscoplásticos, que son Bingham, Casson y Herschel-Bulkley.



**Figura 4.3:** Modelos viscoplásticos clásicos, y su relación con la tasa cortante y el estrés de corte

Antes de revisar los modelos de Bingham, Casson y Herschel-Bulkley, revisaremos el siguiente concepto.

**Definición 35 (Número de Oldroyd).** El número de Oldroyd es un número adimensional que relaciona propiedades físicas del fluido, su velocidad y las características del medio y está dado por

$$Od = \frac{\sigma_y}{cL} \quad (4.7)$$

donde  $L$  es la longitud del ducto,  $\sigma_y$  es el límite elástico y  $c$  es el gradiente de la presión y esta dado por  $c = -\frac{dp}{dy}$ .

A continuación presentaremos los modelos de estos fluidos en una tubería circular de longitud  $L$  y  $c = -\frac{dp}{dy}$  constante positivo es gradiente de la presión.

### 1. Modelo de Bingham

Asumimos que  $\sigma_y$  el límite elástico del fluido,  $\sigma$  es el estrés de corte y su relación está dada por

$$\sigma = \sigma_y + \mu\mathcal{E} \quad (4.8)$$

donde  $\mu$  es el parámetro de viscosidad y  $\mathcal{E}$  es la tasa de corte. Y su velocidad característica  $V = \frac{cL^2}{\mu}$  y su número de Oldroyd dado por

$$Od = \frac{\sigma_y}{cL} \quad (4.9)$$

donde  $0 \leq Od \leq 0.5$  [Huilgol and You, 2005].

El modelo clásico de Bingham en [González Andrade, 2008, Huilgol and You, 2005, Mitsoulis, 2010]

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = \frac{Od}{\mathcal{E}}\mathcal{E}_{ij} + \mathcal{E}_{ij} & si \quad |\sigma_{ij}| > Od \\ \mathcal{E}_{ij} = 0 & si \quad |\sigma_{ij}| \leq Od \end{cases}$$

donde  $\mathcal{E}$  es el tensor de deformación y  $\sigma_{ij}$  es el tensor de estrés.

### 2. Modelo de Casson

Para este tipo de fluidos la relación entre el límite elástico y el estrés de corte está dada por

$$\sqrt{\sigma} = \sqrt{\sigma_y} + \sqrt{K_c\mathcal{E}} \quad (4.10)$$

donde  $K_c$  es un parámetro de viscosidad, y por comodidad (4.10) se escribe

$$\sigma = \sigma_y + \left[ K_c + \sqrt{\sigma_y K_c} |\mathcal{E}|^{-\frac{1}{2}} \right] \mathcal{E} \quad (4.11)$$

Su velocidad característica es  $V = \frac{cL^2}{K_c}$  y su número de Oldroyd definido en (4.9).

El modelo de Casson [Huilgol and You, 2005, Mitsoulis, 2010] es

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = \frac{Od}{\mathcal{E}}\mathcal{E}_{ij} + \left[ 1 + 2 \left( \frac{Od}{\mathcal{E}} \right)^{1/2} \right] \mathcal{E}_{ij} & si \quad |\sigma_{ij}| > Od \\ \mathcal{E}_{ij} = 0 & si \quad |\sigma_{ij}| \leq Od \end{cases} \quad (4.12)$$

con  $\sigma_{ij}$  es el tensor de estrés y  $\mathcal{E}_{ij}$  es es tensor de deformación.

Por último explicaremos con mayor detalle en la siguiente sección el modelo de Herschel-Bulkley.

## 4.2 MODELO DE HERSCHEL BULKLEY

Los fluidos de Herschel Bulkley son fluidos no Newtonianos (no cumplen con (4.6)), y viscoplásticos comúnmente llamados materiales semi-sólidos y son generalmente irregulares e impredecibles en su movimiento por su ordenamiento molecular. Algunos ejemplos de fluidos de Herschel-Bulkley son pinturas, productos alimenticios, polímeros, plásticos, crudos pesados, productos farmacéuticos, entre otros [Mitsoulis, 2007].

El modelo matemático de los fluidos de Herschel-Bulkley en una tubería circular de longitud  $L$  con sección  $L/2$ , el número de Oldroyd  $Od = \frac{\sigma}{c \cdot L}$  y su estrés de corte es

$$\sigma = \sigma_y + K_H |\mathcal{E}|^{n-1} \mathcal{E} \quad (4.13)$$

donde  $\sigma_y$  es el límite elástico,  $\mathcal{E}$  es la tasa de corte y  $K_H$  es el parámetro de viscosidad

Tomando una presión constante positiva  $c = -\frac{dp}{dy}$ , y la velocidad del fluido como

$$V = L \left( \frac{cL}{K_H} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (4.14)$$

**El modelo de Herschel-Bulkley** en  $\mathbb{R}^3$  [Boger and Halmos, 1981, Huilgol and You, 2005, Meselmi et al., 2010, Saramito, 2009, Sayed-Ahmed et al., 2009], esta dado por:

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = \frac{Od}{\mathcal{E}} \mathcal{E}_{ij} + \mathcal{E} t^{n-1} \mathcal{E}_{ij} & si \quad |\sigma_{ij}| > Od \\ \mathcal{E}_{ij} = 0 & si \quad |\sigma_{ij}| \leq Od \end{cases} \quad (4.15)$$

donde  $\sigma_{ij}$  es el tensor de estrés,  $\mathcal{E}_{ij}$  es un tensor de deformación,  $Od$  es el número de Oldroyd,  $\mathcal{E}$  es la tasa de corte y  $n$  número mayor que cero denominado coeficiente de poder.

Cuando  $n = 1$  el modelo de Herschel-Bulkley se reduce al modelo de Bingham (4.10).

Y dado que los fluidos de Herschel-Bulkley son incompresibles, las ecuaciones que describen su mo-

movimiento están dadas en (4.4) y (4.3)

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \nabla \cdot \sigma + f \quad (4.16)$$

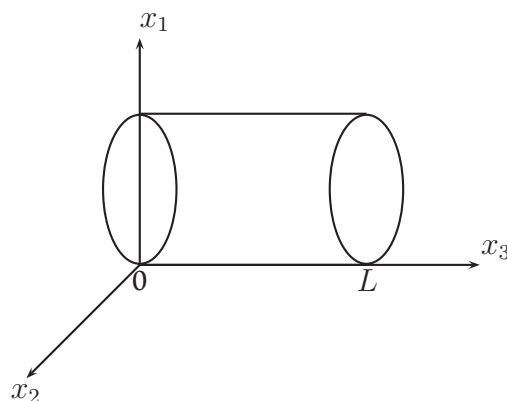
$$\nabla \cdot y = 0 \quad (4.17)$$

donde  $\sigma$  está descrita en (4.13), si reescribimos (4.17) y (4.16) tenemos que

$$\nabla \cdot \sigma + f = 0 \quad (4.18)$$

### 4.3 FLUIDO DE HERSCHEL-BULKLEY EN UNA TUBERÍA

En esta sección estudiaremos el fluido de Herschel-Bulkley estacionario y laminar en una sección circular, para lo cual tomamos un sistema ortogonal  $x_1 x_2 x_3$ , y analizaremos el movimiento del fluido entre dos secciones,  $x_3 = 0$  y  $x_3 = L$ , donde  $L$  es la longitud de la tubería.



Consideramos un movimiento laminar en una tubería por cambio de presión y despreciando las fuerzas de contacto entre el fluido y la tubería.

Tomaremos una presión por unidad de longitud constante e igual a  $c$ , por lo que

$$\begin{aligned} p(x_3) &= 0 & \text{si } x_3 &= 0 \\ p(x_3) &= -cL & \text{si } x_3 &= L \end{aligned}$$

Como estamos considerando un flujo laminar [González Andrade, 2008], la velocidad del fluido se reduce a

$$y = (0, 0, y) \quad \text{y} \quad \frac{\partial y}{\partial x_3} = 0 \quad (4.19)$$

por lo que  $y = y(x_1, x_2)$ .

La tasa de deformación descrita en (4.5), con la velocidad  $y = y(x_1, x_2)$ , esta dada por la matriz

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial y}{\partial x_1} \\ 0 & 0 & \frac{\partial y}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y}{\partial x_1} & \frac{\partial y}{\partial x_2} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

Por otro lado, sustituyendo en la ecuación de movimiento para los fluidos de Herschel-Bulkley dada en (4.18) la fuerza  $f$ , dada por la presión descrita tenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial x_3} = \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} \end{cases} \quad (4.21)$$

y

$$p = -cx_3 \quad (4.22)$$

Además si reemplazamos los resultados de (4.21) en el modelo de Herschel-Bulkley (4.15), tenemos que

$$c = \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2}, \quad (4.23)$$

$$\sigma_{3,i} = Od \frac{\mathcal{E}_{3,i}}{|\mathcal{E}_{3,1} + \mathcal{E}_{3,2}|} + |\mathcal{E}_{3,1} + \mathcal{E}_{3,2}|^{n-1} \mathcal{E}_{3,i} \text{ para } i = 1, 2 \text{ en } \Omega, \quad (4.24)$$

$$y = 0 \text{ en } \Gamma. \quad (4.25)$$

El sistema (4.23)-(4.25), son las ecuaciones que describen el movimiento laminar de un fluido de Herschel-Bulkley en una tubería.

#### 4.4 FORMULACIÓN VARIACIONAL

En la sección anterior obtuvimos las ecuaciones que describen el movimiento de los fluidos de Herschel-Bulkley en forma diferencial, en esta sección utilizaremos las ecuaciones (4.23)-(4.25), para representar el problema en forma variacional. La desigualdad variacional que describe el movimiento de Herchel-Bulkley se presenta en la siguiente proposición.

**Proposición 5.** *Dado  $y$  solución de (4.23)-(4.25). Entonces  $y \in W_0^{1,n+1}$  y satisface la desigualdad variacional de segundo tipo*

$$a(y, v - y) + Od j(v) - Od j(y) \geq (c, v - y) \text{ para todo } v \in W_0^{1,n+1} \quad (4.26)$$

Donde

$$\begin{aligned} a(y, v) &= \int_{\Omega} |\nabla y|^{n-1} (\nabla y \cdot \nabla v) dx \\ j(y) &= \int_{\Omega} |\nabla y(x)| dx \\ (c, v - y) &= c \int_{\Omega} (v - y) dx \end{aligned}$$

**Demostración:**

En (4.23) multiplicamos por  $(v - y) \in W_0^{1,n+1}$  e integramos

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (\sigma_{3,1}, \sigma_{3,2})^T (v - y)(x) dx = -c \int_{\Omega} (v - y)(x) dx \quad \text{para todo } v \in W_0^{1,n+1}$$

Integrando por partes la ecuación anterior

$$\int_{\Omega} (\sigma_{3,1}, \sigma_{3,2})^T \nabla (v - y)(x) dx = -c \int_{\Omega} (v - y)(x) dx \quad \text{para todo } v \in W_0^{1,n+1} \quad (4.27)$$

Por otro lado, de (4.24) obtenemos

$$\sigma_{3,1} = (|\mathcal{E}_{3,1} + \mathcal{E}_{3,2}|^{n-1} \mathcal{E}_{3,1}(y)) + \frac{Od \mathcal{E}_{3,1}(y)}{|\mathcal{E}_{3,1}(y) + \mathcal{E}_{3,2}(y)|} \quad (4.28)$$

$$\sigma_{3,2} = (|\mathcal{E}_{3,1} + \mathcal{E}_{3,2}|^{n-1} \mathcal{E}_{3,2}(y)) + \frac{Od \mathcal{E}_{3,2}(y)}{|\mathcal{E}_{3,1}(y) + \mathcal{E}_{3,2}(y)|} \quad (4.29)$$



reemplazamos (4.28) y (4.29) en el lado izquierdo de la ecuación (4.27) tenemos

$$\int_{\Omega} \left( \mathcal{E}_{3,1}(y) \left( |\mathcal{E}_{3,1}(y) + \mathcal{E}_{3,2}(y)|^{n-1} + \frac{Od}{|\mathcal{E}_{3,1}(y) + \mathcal{E}_{3,2}(y)|} \right), |\mathcal{E}_{3,1}(y) + \mathcal{E}_{3,2}(y)|^T \right. \\ \left. \cdot \left( |\mathcal{E}_{3,2}(y)|^{n-1} \cdot + \mathcal{E}_{3,2}(y) + \frac{Od \mathcal{E}_{3,2}(y)}{|\mathcal{E}_{3,1}(y) + \mathcal{E}_{3,2}(y)|} \right) \right) \cdot (\nabla(v - y)(x)) dx \quad (4.30)$$

Agrupando términos en (4.30)

$$\int_{\Omega} (\mathcal{E}_{3,1}(y), \mathcal{E}_{3,2}(y)) \cdot \left( |\mathcal{E}_{3,1}(y) + \mathcal{E}_{3,2}(y)|^{n-1} + \frac{Od}{|\mathcal{E}_{3,1}(y) + \mathcal{E}_{3,2}(y)|} \right)^T \cdot (\nabla(v - y))(x) dx \quad (4.31)$$

para todo  $v \in W_0^{1,n+1}$ .

Por la definición del tensor de estrés dada en (4.20) tenemos que:

$$\nabla y = \mathcal{E}_{3,1}(y) + \mathcal{E}_{3,2}(y) \quad (4.32)$$

así la expresión (4.31) es

$$\int_{\Omega} \left( |\nabla y|^{n-1} (\nabla y) + Od \frac{\nabla y}{|\nabla y|} \right) \cdot (\nabla(v - y)) dx \quad (4.33)$$

y reemplazando en la ecuación (4.27) obtenemos

$$\int_{\Omega} (|\nabla y|^{n-1} (\nabla y)) \cdot (\nabla(v - y)(x)) dx + \int_{\Omega} \left( Od \frac{\nabla y}{|\nabla y|} \right) \cdot (\nabla(v - y)(x)) dx = c \int_{\Omega} (v - y)(x) dx \quad (4.34)$$

para todo  $v \in W_0^{1,n+1}$ .

Por otro lado, tomando de (4.34) el término

$$\int_{\Omega} \left( Od \frac{\nabla y}{|\nabla y|} \right) \cdot \nabla(v - y)(x) dx$$

tememos:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left( Od \frac{\nabla y}{|\nabla y|} \right) \cdot \nabla(v - y) &= Od \int_{\Omega} \left( \frac{\nabla y}{|\nabla y|}, \nabla v \right) dx - Od \int_{\Omega} \left( \frac{\nabla y}{|\nabla y|}, \nabla y \right) dx \\ &\leq Od \int_{\Omega} \frac{|\nabla y| |\nabla v|}{|\nabla y|} dx - Od \int_{\Omega} |\nabla y| dx \end{aligned}$$

y aplicamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\int_{\Omega} \left( Od \frac{\nabla y}{|\nabla y|} \right) \cdot (\nabla(v - y)) \leq Od \int_{\Omega} |\nabla v| dx - Od \int_{\Omega} |\nabla y| dx \quad (4.35)$$

de (4.34) y (4.35) la desigualdad variacional es

$$\int_{\Omega} (|\nabla y|^{n-1}(\nabla y)) \cdot (\nabla(v - y))(x) dx + Od \int_{\Omega} |\nabla v| dx - Od \int_{\Omega} |\nabla y| dx \leq c \int_{\Omega} (v - y)(x) dx \quad (4.36)$$

si tomamos

$$a(v, y) = \int_{\Omega} |\nabla y|^{n-1}(\nabla y \cdot \nabla v) dx$$

$$j(y) = \int_{\Omega} |\nabla y(x)| dx$$

$$(c, v - y) = c \int_{\Omega} (v - y) dx$$

en (4.36) la desigualdad variacional es

$$a(y, v - y) + Od j(v) - Od j(y) \geq (c, v - y) \quad \text{para todo } v \in W_0^{1,n+1}. \quad (4.37)$$

■

## 4.5 FORMULACIÓN COMO UN PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN

En esta sección presentaremos el modelo de Herschel-Bulkley en una tubería como un problema de minimización. Esta formulación nos permitirá aplicar el método del descenso más profundo para hallar una solución al problema.

Tomaremos el problema de minimización

$$\min_{y \in W_0^{1,n+1}} J(y) \quad (4.38)$$

donde

$$J(y) = \left( \frac{1}{n+1} \right) \int_{\Omega} |\nabla y|^{n+1} dx + Od \int_{\Omega} |\nabla y| dx - c \int_{\Omega} y dx \quad (4.39)$$

Donde la solución del problema (4.38), es solución de la desigualdad variacional (4.37).

### 4.5.1 EXISTENCIA Y UNICIDAD DE LA SOLUCIÓN PARA EL MODELOS DE HERCHEL-BULKLEY

Para aplicar cualquier algoritmo de resolución numérica a (4.38) primero probaremos que posee una solución única.

**Teorema 8.** Sea  $J : W_0^{1,n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  definido por:

$$J(y) = \frac{1}{n+1} \int_{\Omega} |\nabla y|^{n+1} dx + Od \int_{\Omega} |\nabla y| dx - c \int_{\Omega} y dx \quad (4.40)$$

posee un punto minimal.

**Demostración:** Dado que  $W_0^{1,n+1}$  es un espacio de Banach, reflexivo, acotado y no vacío, podemos utilizar el Teorema (2) para mostrar que  $J$  tiene un punto minimal. Para aplicar el Teorema (2) necesitamos probar que  $J$  es un funcional quasiconvexo.

Para probar que  $J : W_0^{1,n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  es un funcional quasiconvexo, probaremos que es convexo. Tomemos  $u, y \in W_0^{1,n+1}$  con  $n \geq 1$  y  $\lambda \in [0, 1]$ .

$$\begin{aligned} J(\lambda y + (1-\lambda)y) &= \frac{1}{n+1} \int_{\Omega} |\nabla(\lambda u + (1-\lambda)y)|^{n+1} dx + Od \int_{\Omega} |\nabla(\lambda u + (1-\lambda)y)| dx \\ &\quad - c \int_{\Omega} (\lambda u + (1-\lambda)y) dx \end{aligned}$$

Dado que  $|\nabla(\lambda u + (1 - \lambda)y)| \geq 0$ , sabemos que  $|\nabla(\lambda u + (1 - \lambda)y)|^{n+1}$  es una función creciente en  $\mathbb{R}^+$  para  $n > 0$  por lo que

$$\begin{aligned} J(\lambda u + (1 - \lambda)y) &\leq \left(\frac{1}{n+1}\right) \left[ \int_{\Omega} |\nabla(\lambda u)|^{n+1} dx + \int_{\Omega} |\nabla((1 - \lambda)y)|^{n+1} dx \right] + \\ &\quad + Od \left[ \int_{\Omega} |\nabla \lambda u| + \int_{\Omega} |(1 + \lambda)\nabla y| du \right] - c \left[ \int_{\Omega} (\lambda u) dx + \int_{\Omega} (1 - \lambda)y dx \right] \end{aligned}$$

Ahora,  $\lambda \leq 1$ ,  $(1 - \lambda) \leq 1$  tenemos que  $\lambda \geq \lambda^{n+1}$  y  $(1 - \lambda) \geq (1 - \lambda)^{n+1}$  lo que implica

$$\begin{aligned} J(\lambda u + (1 - \lambda)y) &\leq \left(\frac{1}{n+1}\right) \left[ \lambda \int_{\Omega} |\nabla u|^{n+1} dx + (1 - \lambda) \int_{\Omega} |\nabla y|^{n+1} dx \right] + \\ &\quad + Od \left[ \lambda \int_{\Omega} |\nabla u| + (1 + \lambda) \int_{\Omega} |\nabla y| dx \right] - c \left[ \lambda \int_{\Omega} (u) dx + (1 - \lambda) \int_{\Omega} (y) dx \right] \\ &\leq \lambda \left[ \left(\frac{1}{n+1}\right) \int_{\Omega} |\nabla u|^{n+1} dx + Od \int_{\Omega} |\nabla u| dx - c \int_{\Omega} u dx \right] + \\ &\quad + (1 - \lambda) \left[ \left(\frac{1}{n+1}\right) \int_{\Omega} |\nabla y|^{n+1} dx + Od \int_{\Omega} |\nabla y| dx - c \int_{\Omega} y dx \right] \\ &\leq \lambda J(u) + (1 - \lambda) J(y) \end{aligned}$$

$J$  es un operador convexo, y aplicando el Teorema (1),  $J$  es quasiconvexo. Por el Teorema (2)  $J$  posee un punto minimal en  $W_0^{1,n+1}$ . ■

Por el Teorema anterior sabemos que el problema (4.38) posee una solución.

Ahora vamos a analizar la unicidad de la solución en  $W_0^{1,n+1}$  para el problema (4.38), para lo cual presentaremos el siguiente teorema [Lions, 1971, pág. 12]

Para aplicar el teorema (3) a nuestro funcional tenemos que probar que  $J$  es estrictamente convexo.

**Proposición 6.** *El funcional  $J : W_0^{1,n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  es estrictamente convexo.*

**Demostración:** Tomemos  $u, y \in W_0^{1,n+1}$  con  $n \geq 1$  y  $\lambda \in (0, 1)$ .

$$J(\lambda y + (1 - \lambda)y) = \frac{1}{n+1} \int_{\Omega} |\nabla(\lambda u + (1 - \lambda)y)|^{n+1} dx + Od \int_{\Omega} |\nabla(\lambda u + (1 - \lambda)y)| dx - c \int_{\Omega} (\lambda u + (1 - \lambda)y) dx$$

Dado que  $|\nabla(\lambda u + (1 - \lambda)y)| \geq 0$ , sabemos que  $|\nabla(\lambda u + (1 - \lambda)y)|^{n+1}$  es una función creciente en  $\mathbb{R}^+$  para  $n > 0$  por lo que

$$J(\lambda u + (1 - \lambda)y) \leq \left( \frac{1}{n+1} \right) \left[ \int_{\Omega} |\nabla(\lambda u)|^{n+1} dx + \int_{\Omega} |\nabla((1 - \lambda)y)|^{n+1} dx \right] + Od \left[ \int_{\Omega} |\nabla \lambda u| + \int_{\Omega} |(1 - \lambda) \nabla y| du \right] - c \left[ \int_{\Omega} (\lambda u) dx + \int_{\Omega} (1 - \lambda)y dx \right]$$

Ahora,  $\lambda < 1$ ,  $(1 - \lambda) < 1$  tenemos que  $\lambda > \lambda^{n+1}$  y  $(1 - \lambda) > (1 - \lambda)^{n+1}$  lo que implica

$$J(\lambda u + (1 - \lambda)y) < \left( \frac{1}{n+1} \right) \left[ \lambda \int_{\Omega} |\nabla u|^{n+1} dx + (1 - \lambda) \int_{\Omega} |\nabla y|^{n+1} dx \right] + Od \left[ \lambda \int_{\Omega} |\nabla u| + (1 - \lambda) \int_{\Omega} |\nabla y| dx \right] - c \left[ \lambda \int_{\Omega} (u) dx + (1 - \lambda) \int_{\Omega} (y) dx \right] < \lambda \left[ \left( \frac{1}{n+1} \right) \int_{\Omega} |\nabla u|^{n+1} dx + Od \int_{\Omega} |\nabla u| dx - c \int_{\Omega} u dx \right] + (1 - \lambda) \left[ \left( \frac{1}{n+1} \right) \int_{\Omega} |\nabla y|^{n+1} dx + Od \int_{\Omega} |\nabla y| dx - c \int_{\Omega} y dx \right] < \lambda J(u) + (1 - \lambda) J(y)$$

$J$  es un estrictamente convexo y podemos aplicar el Teorema (3). ■

Si tomamos el funcional (4.39), tenemos

$$J(y) = \left( \frac{1}{n+1} \right) \int_{\Omega} |\nabla y|^{n+1} dx + Od \int_{\Omega} |\nabla y| dx - c \int_{\Omega} y dx$$

y

$$J_1(y) = \left( \frac{1}{n+1} \right) \int_{\Omega} |\nabla y|^{n+1} dx$$

$$J_2(y) = Od \int_{\Omega} |\nabla y| dx - c \int_{\Omega} y dx$$

Donde  $J$  es un operador estrictamente convexo,  $J_1$  es un operador diferenciable y  $J_2$  es convexo por la convexidad de  $J$ , podemos aplicar el teorema (3) a (4.39). Y podemos asegurar que existe un único  $u \in W_0^{1,n+1}$  tal que

$$J_1'(u) \cdot (y - u) + J_2(y) - J_2(u) \geq 0 \quad (4.41)$$

Para obtener la expresión (4.41) en forma explicita primero derivaremos  $J_1$

$$\frac{1}{n+1} \left( \int_{\Omega} |\nabla y(x)|^{n+1} \right)' (u) dx = \int_{\Omega} |\nabla y|^{n-1} (\nabla y, \nabla u) dx \quad (4.42)$$

Y reemplazando  $J_2$  y (4.42) en (4.41) se tiene que  $u \in W_0^{1,n+1}$  se caracteriza así:

$$\int_{\Omega} |\nabla y|^{n-1} (\nabla y, \nabla v) dx + Od \int_{\Omega} |\nabla y| dx - Od \int_{\Omega} |\nabla u| dx \geq c \int_{\Omega} y dx - c \int_{\Omega} u dx \quad (4.43)$$

*“Unless someone like you cares a whole awful lot, Nothing is going to get better. It’s not.”*

Dr. Seuss, The Lorax

# 5

## Solución Numérica del Problema de Herschel-Bulkley

En este capítulo resolveremos numéricamente la ecuación de movimiento de los fluidos de Herschel-Bulkley. Para lo cual transformaremos el operador  $J$  definido en (4.39) en un operador diferenciable mediante una regularización de Huber.

Después discretizaremos el problema regularizado aplicando el método de elementos finitos. Luego utilizaremos el método iterativo del descenso más profundo para hallar su solución.

### 5.1 REGULARIZACIÓN DEL PROBLEMA

Retomando el problema de minimización

$$\min_{y \in W_0^{1,n+1}} J(y) \quad (5.1)$$

con

$$J(y) = \frac{1}{n+1} \int_{\Omega} |\nabla y|^{n+1} dx + Od \int_{\Omega} |\nabla y| dx - c \int_{\Omega} y dx \quad (5.2)$$

Sabemos que (5.1) tiene solución única y  $J$  es funcional no diferenciable, debido a su segundo término, este hecho impide aplicar directamente el método del descenso más profundo a nuestro problema. Además, se puede tener problemas de inestabilidad por el término no diferenciable.

### 5.1.1 REGULARIZACIÓN DE HUBER

Proponemos usar una regularización de tipo Huber del término no diferenciable no diferenciable, porque este procedimiento ha sido utilizado en modelizaciones similares como Bingham [De los Reyes, 2012, González Andrade, 2008]. La regularización aplicada al término no diferenciable del funcional (5.2) está dada por :

$$\psi_\gamma : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\psi_\gamma : \nabla y \longrightarrow \psi_\gamma(\nabla y) = \begin{cases} Od|\nabla y| - \frac{Od^2}{2\gamma} & \text{si } |\nabla y| > \frac{Od}{\gamma} \\ \frac{\gamma}{2}|\nabla y|^2 & \text{si } |\nabla y| \leq \frac{Od}{\gamma} \end{cases} \quad (5.3)$$

donde  $Od$  es el número de Oldroyd y  $\gamma$  es un número positivo mayor que cero.

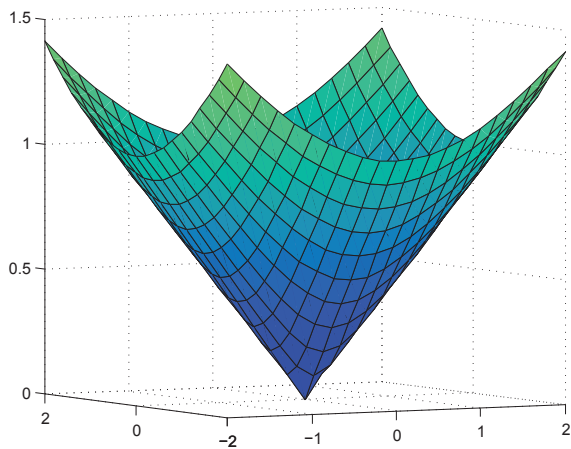


Figura 5.1: Valor absoluto.

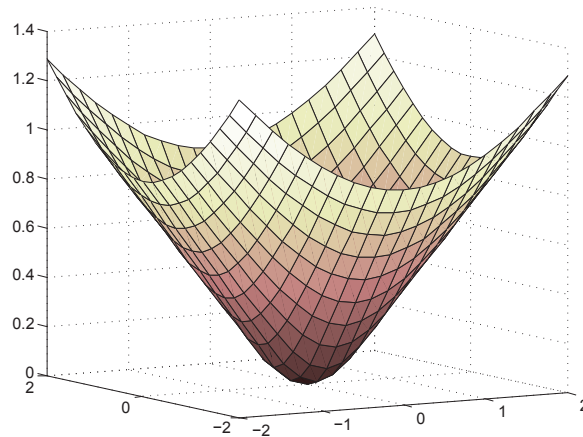


Figura 5.2: Regularización de Huber (5.3).

Gráficamente podemos ver que la función  $\psi$  en la figura (5.2) suaviza la curva de  $|\cdot|$  de la figura (5.1), y si tomamos  $\gamma$  lo suficientemente grande  $\psi$  se aproxima a  $|\cdot|$ .

**Lema 1.**  $\psi_\gamma$  es una función diferenciable para todo  $w \in \mathbb{R}^n$ .

**Demostración:** Dado que  $\psi_\gamma$  es una función por tramos probemos primero que  $\lim_{|w| \rightarrow \frac{Od}{\gamma}} \psi$  existe, por lo que vamos a encontrar los límites laterales y probar que estos son iguales.



Para el caso  $|w| > \frac{Od}{\gamma}$

$$\begin{aligned}\lim_{|w| \rightarrow \frac{Od}{\gamma}^+} \psi_\gamma(w) &= \lim_{|w| \rightarrow \frac{Od}{\gamma}} Od|w| - \frac{Od^2}{2\gamma} \\ &= \frac{Od^2}{\gamma} - \frac{Od^2}{2\gamma} \\ &= \frac{Od^2}{2\gamma}\end{aligned}$$

y cuando  $|w| \leq \frac{Od}{\gamma}$

$$\begin{aligned}\lim_{|w| \rightarrow \frac{Od}{\gamma}^-} \psi_\gamma(w) &= \lim_{|w| \rightarrow \frac{Od}{\gamma}} \frac{\gamma}{2}|w| \\ &= \frac{\gamma}{2} \cdot \left(\frac{Od}{\gamma}\right)^2 \\ &= \frac{Od^2}{2\gamma}\end{aligned}$$

como los límites laterales son iguales,  $\lim_{|w| \rightarrow \frac{Od}{\gamma}} \psi_\gamma$  existe, por lo que  $\psi_\gamma$  es continua en  $\frac{Od}{\gamma}$ . Para probar que es diferenciable de  $\psi_\gamma$  resta probar que para todo  $\varepsilon > 0$  se cumple:

$$|\psi_\gamma(w+h) - \psi_\gamma(w) - L(w)h| \leq |h|\varepsilon, \quad (5.4)$$

o su forma equivalente

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|\psi_\gamma(w+h) - \psi_\gamma(w) - L(w)h|}{|h|} = 0 \quad (5.5)$$

para probar (5.5), tomaremos:

$$L(w)h = \begin{cases} Od \frac{(w,h)}{|h|} & \text{si } |w| > \frac{Od}{\gamma}, \\ \gamma(w,h) & \text{si } |w| \leq \frac{Od}{\gamma}. \end{cases} \quad (5.6)$$

Tomamos el caso  $|w| \leq \frac{Od}{\gamma}$ .

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|\psi_\gamma(w+h) - \psi_\gamma(w) - L(w)h|}{|h|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|\frac{\gamma}{2}|w+h|^2 - \frac{\gamma}{2}|w|^2 - \gamma(w,h)|}{|h|} \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned}
(w+h, w+h) &= (w, w+h) + (h, w+h) \\
&= (w, w) + (w, h) + (h, w) + (h, h) \\
&= (w, w) + 2(w, h) + (h, h).
\end{aligned}$$

$$(w, h) = \frac{|w+h|^2 - |w|^2 - |h|^2}{2} \quad (5.8)$$

y reemplazando (5.8) en (5.7) tenemos

$$\begin{aligned}
\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|\psi_\gamma(w+h) - \psi_\gamma(w) - L(w)h|}{|h|} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left| \frac{\gamma}{2}|w+h|^2 - \frac{\gamma}{2}|w|^2 - \gamma \frac{|w+h|^2 - |w|^2 - |h|^2}{2} \right|}{|h|} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\gamma}{2}|h|^2}{|h|} \\
&= 0
\end{aligned}$$

En el caso  $|w| \leq \frac{Od}{\gamma}$ , sabemos que  $\psi_\gamma$  es diferenciable en todo punto distinto de cero [Ulbrich, 2002, pág. 23]. Por otro lado, probaremos que  $L(w)h$  es una función continua. Para probar la continuidad de  $L(w)h$  basta mostrar que existe  $\lim_{|w| \rightarrow \frac{Od}{\gamma}} L(w)h$ , para lo que mostraremos que sus límites laterales son iguales.

$$\begin{aligned}
\lim_{|w| \rightarrow \frac{Od}{\gamma}^+} L(w)(w) &= Od \frac{(w, w)}{|w|} \\
&= \lim_{|w| \rightarrow \frac{Od}{\gamma}^+} Od \frac{|w|^2}{|w|} \\
&= \frac{Od^2}{\gamma}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\lim_{|w| \rightarrow \frac{Od}{\gamma}^-} L(w)(w) &= \gamma(w, w) \\
&= \lim_{|w| \rightarrow \frac{Od}{\gamma}^-} \gamma|w|^2 \\
&= \frac{Od^2}{\gamma}
\end{aligned}$$

Como los límites laterales son iguales, el límite  $\lim_{|w| \rightarrow \frac{Od}{\gamma}} L(w)h$  existe, por lo que  $L(w)h$  es continua. Por lo tanto  $\psi_\gamma$  es diferenciable. ■

Vamos a mostrar que  $\psi_\gamma$  es una función convexa, para lo cual citaremos el siguiente teorema

**Teorema 9.** Sea  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable que satisfice:

$$f(u) \geq f(v) + f'(v)(u - v), \quad \forall u, v \in X \quad (5.9)$$

entonces  $f$  es convexa.

Ver [Boyd and Vandenberghe, 2009, pág. 69]

**Lema 2.**  $\psi_\gamma$  es una función convexa.

**Demostración:** Tomemos  $u, v \in \mathbb{R}^n$ , primero consideremos el caso  $|v| > \frac{Od}{\gamma}$ , donde  $|\cdot|$  es la norma euclidiana.

$$\begin{aligned} \psi'_\gamma(v)(u - v) &= Od \frac{(v, u - v)}{|v|} \\ &= Od \frac{(v, u)}{|v|} - Od \frac{(v, v)}{|v|} \\ &\leq Od \frac{|v| \cdot |u|}{|v|} - Od \frac{|v|^2}{|v|} \\ &\leq Od|u| + \frac{Od^2}{2\gamma} - Od|v| - \frac{Od^2}{2\gamma} \\ \psi'_\gamma(v)(u - v) &\leq \psi_\gamma(u) - \psi_\gamma(v) \end{aligned}$$

por lo que

$$\psi_\gamma(u) \leq \psi_\gamma(v) + \psi'_\gamma(v)(u - v),$$

que cumple con el teorema anterior, por lo tanto  $\psi_\gamma$  es convexa cuando  $|v| > \frac{Od}{\gamma}$ . Para el caso  $|v| \leq \frac{Od}{\gamma}$ , tenemos:

$$\psi'_\gamma(v)(u - v) = \gamma(v, u - v) \quad (5.10)$$

$$= \gamma(v, u) - \gamma(v, v) \quad (5.11)$$

$$(5.12)$$

Por otra parte, tomemos:

$$(u - v, u - v) = (u, u) - 2(u, v) + (v, v) \quad (5.13)$$

reemplazando el valor de  $(u, v)$  de la ecuación (5.13) en (5.11) obtenemos

$$\begin{aligned}\psi'_\gamma(v)(u-v) &= \frac{\gamma(u, u)}{2} + \frac{\gamma(v, v)}{2} - \frac{\gamma(u-v, u-v)}{2} - \gamma(v, v) \\ \psi'_\gamma(v)(u-v) &\leq \frac{\gamma(u, u)}{2} - \frac{\gamma(v, v)}{2} \\ &\leq \frac{\gamma|u|^2}{2} - \frac{\gamma|v|^2}{2}\end{aligned}$$

de lo que

$$\psi_\gamma(u) \leq \psi_\gamma(v) + \psi'_\gamma(v)(u-v),$$

así  $\psi_\gamma$  es convexa cuando  $|v| \leq \frac{Od}{\gamma}$ . Podemos concluir que  $\psi_\gamma$  es una función convexa. ■

### 5.1.2 REGULARIZACIÓN DEL PROBLEMA

Para regularizar el operador  $J$  definido en (5.2) vamos a sustituir el término  $Od \int_\Omega |\nabla y| dx$  por  $\int_\Omega \psi_\gamma(\nabla y) dx$ . Así de (5.2) se obtiene:

$$J_\gamma(y) = \frac{1}{n+1} \int_\Omega |\nabla y|^{n+1} dx + \int_\Omega \psi_\gamma(\nabla y) dx - c \int_\Omega y dx \quad (5.14)$$

**Lema 3.**

$$\lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \int_\Omega \psi_\gamma(\nabla y(x)) dx = Od \int_\Omega |\nabla y| dx \quad (5.15)$$

**Demostración:** Para probar este lema utilizaremos el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue, para lo que probaremos:

- Para casi todo  $x \in \Omega$ , se tiene

$$\lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \psi_\gamma(\nabla y(x)) = Od|\nabla y(x)|; \quad (5.16)$$

- Y que existe  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tal que, para todo  $\gamma$ , se verifique

$$|\psi_\gamma(\nabla y(x))| \leq g(\nabla y(x)) \quad (5.17)$$

casi todo punto.

Primero expresaremos  $\int_\Omega \psi_\gamma(\nabla y(x)) dx$  como:

$$\int_\Omega \psi_\gamma(\nabla y(x)) dx = \int_{A_\gamma} \psi_\gamma(\nabla y(x)) dx + \int_{I_\gamma} \psi_\gamma(\nabla y(x)) dx \quad (5.18)$$

donde  $A_\gamma = \{x \in \Omega : \gamma|\nabla y(x)| \geq Od\}$  y  $I_\gamma = \Omega \setminus A_\gamma$  donde  $A_\gamma \cap I_\gamma = \emptyset$ . Verifiquemos (5.16) y (5.17) para  $\psi_\gamma(\nabla y(x))$  en  $A_\gamma$ , así:

$$\begin{aligned} \lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \psi_\gamma(\nabla y(x)) &= \lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \left[ Od|\nabla y(x)| - \frac{Od^2}{2\gamma} \right] \\ &= \lim_{\gamma \rightarrow +\infty} Od|\nabla y(x)| - \lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \frac{Od^2}{2\gamma} \\ &= Od|\nabla y(x)|. \end{aligned}$$

por lo que  $\psi_\gamma$  cumple con (5.16) en  $A_\gamma$ . Ahora probemos (5.17), para lo cual tomaremos la función

$$g : w(x) \longrightarrow g(w(x)) = Od|w(x)| \quad (5.19)$$

Probemos (5.17) tomando  $x \in \Omega$ , y  $|\nabla y(x)| > \frac{Od}{\gamma}$  tenemos

$$\begin{aligned} \psi_\gamma(\nabla y(x)) &= Od|\nabla y(x)| - \frac{Od^2}{2\gamma} \\ &\leq Od|\nabla y(x)| \\ &\leq g(\nabla y(x)). \end{aligned}$$

Ahora probaremos que  $\psi_\gamma(\nabla y(x))$  cumple con (5.16) y (5.17) en  $I_\gamma$ . Para probar (5.16) basta probar que el  $\lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \psi_\gamma(\nabla y(x)) = 0$  dado que cuando  $\gamma \rightarrow +\infty$ , tenemos que  $|\nabla y(x)| \rightarrow 0$ , así:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \psi_\gamma(\nabla y(x)) = \lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \frac{\gamma}{2} |\nabla y(x)|^2 \\ &\leq \lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \frac{\gamma Od^2}{2\gamma^2} \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Por el teorema del sánduche  $\lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \psi_\gamma(\nabla y(x)) = 0$  lo que prueba (5.16). Por último tomaremos  $g$  y probaremos que cumpla con (5.17). Dada  $g$  como:

$$g : w(x) \longrightarrow g(w(x)) = \frac{Od^2}{2\gamma} \quad (5.20)$$

Así tenemos:

$$\begin{aligned}
 \psi_\gamma(\nabla y(x)) &= \frac{\gamma}{2} |\nabla y(x)|^2 \\
 &\leq \frac{\gamma}{2} \frac{Od^2}{\gamma^2} \\
 &\leq \frac{Od^2}{2\gamma} \\
 &\leq g(\nabla y(x))
 \end{aligned}$$

Por lo que se cumple (5.17). Dado que  $\psi_\gamma$  cumple con (5.16) y (5.17) en  $\Omega$ , podemos aplicar el teorema de convergencia dominada de Lebesgue. Y obtenemos que:

$$\lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \psi_\gamma(\nabla y(x)) dx = Od \int_{\Omega} |\nabla y| dx \quad (5.21)$$

■

Como  $\psi_\gamma$  es diferenciable y  $\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \psi_\gamma(\nabla y) = Od|\nabla y|$  entonces  $J_\gamma(y) \rightarrow J$ , cuando  $\gamma \rightarrow \infty$  nuestro problema es hallar:

$$\min_{y \in W_0^{1,n+1}} J_\gamma(y) \quad (5.22)$$

con

$$J_\gamma(y) = \frac{1}{n+1} \int_{\Omega} |\nabla y|^{n+1} dx + \int_{\Omega} \psi_\gamma(\nabla y) dx - c \int_{\Omega} y dx \quad (5.23)$$

Tomemos la derivada de Gâteaux del operador  $J_\gamma$  en la dirección  $v \in W_0^{1,n+1}$ ,

$$\begin{aligned}
 J'_\gamma(y)v &= \int_{\Omega} |\nabla y|^{n-1} (\nabla y, \nabla v) dx + Od \int_{A_\gamma} \frac{(\nabla y, \nabla v)}{|\nabla y|} dx + \int_{\Omega \setminus A_\gamma} \gamma (\nabla y, \nabla v) dx \\
 &\quad - c \int_{\Omega} v dx \quad (5.24)
 \end{aligned}$$

donde  $A_\gamma = \{x \in \Omega \text{ tal que } \gamma|\nabla y(x)| \geq Od\}$  por la definición de  $\psi$ , así podemos reescribir (5.24) como:

$$J'_\gamma(y)v = \int_{\Omega} |\nabla y|^{n-1} (\nabla y, \nabla v) dx + Od \int_{\Omega} \frac{\gamma (\nabla y, \nabla v)}{\max(Od, \gamma|\nabla y|)} dx - c \int_{\Omega} v dx \quad (5.25)$$

### 5.1.3 EXISTENCIA Y UNICIDAD DE LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA REGULARIZADO

En esta sección mostraremos que (5.22) tiene solución única de forma similar a lo visto en el capítulo anterior para (4.38).

**Teorema 10.** Sea  $J_\gamma : W_0^{1,n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$J'_\gamma(y)v = \int_\Omega |\nabla y|^{n-1} (\nabla y, \nabla v) dx + Od \int_\Omega \frac{\gamma(\nabla y, \nabla v)}{\max(Od, \gamma|\nabla y|)} dx - c \int_\Omega v dx, \quad (5.26)$$

posee mínimo.

**Demostración:** Dado que  $W_0^{1,n+1}$  es un espacio de Banach, reflexivo, acotado y no vacío, podemos utilizar el Teorema (2) para mostrar que  $J$  tiene un punto minimal. Para aplicar el Teorema (2) necesitamos probar que  $J$  es un funcional quasiconvexo.

Para probar que  $J_\gamma : W_0^{1,n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$  es un funcional quasiconvexo, probaremos que es convexo. Dados  $u, y \in W_0^{1,n+1}$  con  $n \geq 1$  y  $\lambda \in [0, 1]$ .

$$\begin{aligned} J_\gamma(\lambda v + (1 - \lambda)y) &= \frac{1}{n+1} \int_\Omega |\nabla(\lambda v + (1 - \lambda)y)|^{n+1} dx \\ &\quad + \int_\Omega \psi_\gamma(\nabla(\lambda u + (1 - \lambda)y)) dx - c \int_\Omega (\lambda v + (1 - \lambda)y) dx \\ &= \frac{1}{n+1} \int_\Omega |\nabla(\lambda u) + \nabla((1 - \lambda)y)|^{n+1} dx \\ &\quad + \int_\Omega (\lambda \psi_\gamma(\nabla u) + (1 - \lambda) \psi_\gamma(\nabla y)) dx - c \int_\Omega \lambda v - c \int_\Omega (1 - \lambda)y dx \\ &\leq \frac{1}{n+1} \int_\Omega |\lambda \nabla v|^{n+1} + |(1 - \lambda) \nabla y|^{n+1} dx \\ &\quad + \int_\Omega \lambda \psi_\gamma(\nabla u) + \int_\Omega (1 - \lambda) \psi_\gamma(\nabla y) dx - c \int_\Omega \lambda v - c \int_\Omega (1 - \lambda)y dx \\ &\leq \left( \frac{1}{n+1} \right) \int_\Omega \lambda |\nabla v|^{n+1} + (1 - \lambda) |\nabla y|^{n+1} dx \\ &\quad + \lambda \int_\Omega \psi_\gamma(\nabla u) + (1 - \lambda) \int_\Omega \psi_\gamma(\nabla y) - c \int_\Omega \lambda v - c \int_\Omega (1 - \lambda)y dx \\ &\leq \lambda J_\gamma(v) + (1 - \lambda) J_\gamma(y) \end{aligned}$$

Concluimos que  $J_\gamma(y)$  es convexo, que gracias al teorema (1) es  $J_\gamma(y)$  quasiconvexo, en consecuencia (5.22) posee un punto minimal. ■

Por otro lado para probar la unicidad de la solución utilizaremos el Teorema (3), por lo que mostraremos que el funcional  $J_\gamma$  es estrictamente convexo.

**Lema 4.**  $J_\gamma : W_0^{1,n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$  es un funcional estrictamente convexo.

**Demostración:** Dados  $u, y \in W_0^{1,n+1}$  con  $n \geq 1$  y  $\lambda \in (0, 1)$ .

$$\begin{aligned} J_\gamma(\lambda v + (1 - \lambda)y) &= \frac{1}{n+1} \int_{\Omega} |\nabla(\lambda v + (1 - \lambda)y)|^{n+1} dx \\ &\quad + \int_{\Omega} \psi_\gamma(\nabla(\lambda u + (1 - \lambda)y)) dx - c \int_{\Omega} (\lambda v + (1 - \lambda)y) dx \\ &= \frac{1}{n+1} \int_{\Omega} |\nabla(\lambda u) + \nabla((1 - \lambda)y)|^{n+1} dx \\ &\quad + \int_{\Omega} (\lambda \psi_\gamma(\nabla u) + (1 - \lambda) \psi_\gamma(\nabla y)) dx - c \int_{\Omega} \lambda v - c \int_{\Omega} (1 - \lambda)y dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_\gamma(\lambda v + (1 - \lambda)y) &< \frac{1}{n+1} \int_{\Omega} |\lambda \nabla v|^{n+1} + |(1 - \lambda) \nabla y|^{n+1} dx \\ &\quad + \int_{\Omega} \lambda \psi_\gamma(\nabla u) + \int_{\Omega} (1 - \lambda) \psi_\gamma(\nabla y) dx - c \int_{\Omega} \lambda v - c \int_{\Omega} (1 - \lambda)y dx \\ &< \left( \frac{1}{n+1} \right) \int_{\Omega} \lambda |\nabla v|^{n+1} + (1 - \lambda) |\nabla y|^{n+1} dx \\ &\quad + \lambda \int_{\Omega} \psi_\gamma(\nabla u) + (1 - \lambda) \int_{\Omega} \psi_\gamma(\nabla y) - c \int_{\Omega} \lambda v - c \int_{\Omega} (1 - \lambda)y dx \\ &< \lambda J_\gamma(v) + (1 - \lambda) J_\gamma(y) \end{aligned}$$

Por lo que el funcional  $J_\gamma : W_0^{1,n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$  es estrictamente convexo. ■

Como el funcional  $J_\gamma$  es estrictamente convexo, utilizaremos el Teorema (3) para probar la unicidad de la solución de:

$$J_\gamma(y) = \frac{1}{n+1} \int_{\Omega} |\nabla y|^{n+1} dx + \int_{\Omega} \psi_\gamma(\nabla y) dx - c \int_{\Omega} y dx \quad (5.27)$$



Tomamos

$$J_1(y) = \frac{1}{n+1} \int_{\Omega} |\nabla y|^{n+1} dx$$

$$J_2(y) = \int_{\Omega} \psi_{\gamma}(\nabla y) dx - c \int_{\Omega} y dx$$

de (5.31), donde  $J_1$  es diferenciable y  $J_2$  es convexo, existe un  $u \in W_0^{1,n+1}$  tal que  $J_{\gamma}(u) = \inf_{y \in W_0^{1,n+1}} J_{\gamma}(y)$  y tiene la forma

$$J_1'(u) \cdot (y - u) + J_2(y) - J_2(u) \geq 0 \quad (5.28)$$

tomando (4.42) y sustituyendo en (5.28) tenemos que  $u \in W_0^{1,n+1}$  se caracteriza de la siguiente manera:

$$\int_{\Omega} |\nabla y|^{n-1} (\nabla y, \nabla v) dx + \int_{\Omega} \psi_{\gamma}(\nabla y) dx - \int_{\Omega} \psi_{\gamma}(\nabla u) dx \geq c \int_{\Omega} y dx - c \int_{\Omega} u dx \quad (5.29)$$

para todo  $y \in W_0^{1,n+1}$ . donde (5.29)

## 5.2 DISCRETIZACIÓN

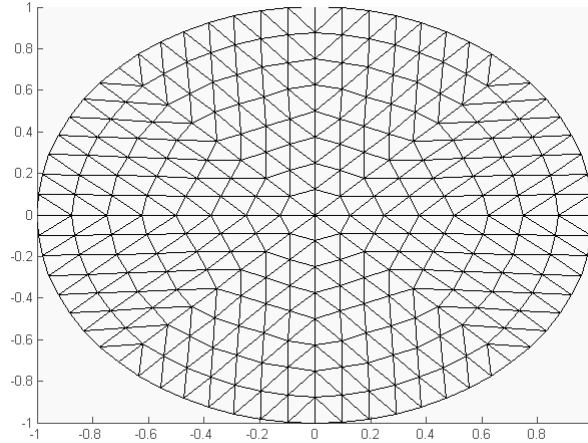
Dado el problema:

$$\min_{y \in W_0^{1,n+1}} J_{\gamma}(y) \quad (5.30)$$

donde

$$J_{\gamma}(y) = \frac{1}{n+1} \int_{\Omega} |\nabla y|^{n+1} dx + \int_{\Omega} \psi_{\gamma}(\nabla y) dx - c \int_{\Omega} y dx \quad (5.31)$$

Vamos a discretizar el problema (5.31), mediante el método de elementos finitos en el círculo de radio uno. Tomamos una aproximación poligonal  $\Omega^h$  de  $\Omega$  definido por  $\overline{\Omega}^h \equiv \bigcup_{\tau \in T^h} \overline{\tau}$ , que al igual que en el caso de la discretización del p-Laplaciano son triángulos disjuntos con clausura vacía o comparten a lo más un lado o vértice.



**Figura 5.3:**  $\Omega^h$

Y asociamos con  $T^h$  el espacio finito dimensional [Barrett and Liu, 1993, pág.524]

$$S^h = \left\{ \chi \in C(\overline{\Omega^h}) \mid \chi|_{\tau} \text{ es lineal para todo } \tau \in T^h \right\} \subset W_0^{1,n+1}(\Omega^h) \quad (5.32)$$

Para (5.30), equivale a

$$\min_{y^h \in S^h} J_{\gamma}(y^h) \quad (5.33)$$

donde

$$J_{\gamma}(y^h) = \frac{1}{n+1} \int_{\Omega^h} |\nabla y^h|^{n+1} dx + \int_{\Omega^h} \psi_{\gamma}(\nabla y^h) dx - c \int_{\Omega^h} y^h dx. \quad (5.34)$$

o de forma explicita

$$J_{\gamma}(y^h) = \frac{1}{n+1} \int_{\Omega^h} |\nabla y^h|^{n+1} dx + \int_{A_{\gamma}^h} \left( Od |\nabla y^h| - \frac{Od^2}{\gamma} \right) dx + \int_{\Omega^h \setminus A_{\gamma}^h} \frac{\gamma}{2} |\nabla y^h|^2 dx - c \int_{\Omega^h} y^h dx \quad (5.35)$$

Donde  $A_{\gamma}^h = \{x^h \in \Omega, \text{ tal que } \gamma |\nabla y^h| \geq Od\}$  y  $T_1^h \subset T^h$  partici3n de  $A_{\gamma}^h$ .

Definimos las funciones  $\varphi$  mediante los v3rtices  $(x_k, y_k)$  de cada tri3ngulo, as3:

$$\varphi_j(x_k, y_k) = \delta_{jk}, \quad j, k = 1, 2, 3 \quad (5.36)$$

donde

$$\varphi_j(x, y) = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_{j+1} & y_{j+1} \\ 1 & x_{j+2} & y_{j+2} \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_{j+1} & y_{j+1} \\ 1 & x_{j+2} & y_{j+2} \end{pmatrix}} \quad (5.37)$$

y

$$\nabla \varphi_j(x, y) = \frac{1}{2|\tau|} \begin{pmatrix} y_{j+1} - y_{j+2} \\ x_{j+2} - x_{j+1} \end{pmatrix} \quad (5.38)$$

donde los índices de  $j, k$  se toman en módulo 3 y  $|\tau|$  representa el área del triángulo [Alberty et al., 1999].

Tomamos una base de  $S^h$

$$B_S^h := \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\} \quad (5.39)$$

donde  $n = \dim(S^h)$ . Para cada triángulo  $\tau$  con vértices  $(x_i, y_i)$  con  $i = 1, 2, 3$ . y sus funciones base  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ . Un elemento  $y^h \in S^h$  se escribe como la combinación de las funciones de la base

$$y^h = \sum_{i=0}^n y_i \varphi_i \quad \text{y} \quad \nabla y^h = \sum_{i=0}^n y_i \nabla \varphi_i. \quad (5.40)$$

$\nabla^h$  en forma explícita es:

$$\nabla^h = \begin{pmatrix} \partial_1^h \\ \partial_2^h \end{pmatrix} \quad (5.41)$$

donde para cada triángulo  $\tau$  con vértices  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  y  $(x_3, y_3)$  se tiene que

$$\partial_1^h = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_3} \end{pmatrix} \quad \partial_2^h = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_1} \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_2} \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_3} \end{pmatrix} \quad \text{para } i = 1, 2, 3 \quad (5.42)$$

donde  $\partial_1^h, \partial_2^h \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . y  $\nabla y^h$  para cada triángulo se expresa como

$$\nabla y^h = \begin{pmatrix} \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial \mathbf{x}_1} y_i \right) \\ \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial \mathbf{x}_2} y_i \right) \end{pmatrix} \quad \text{para } i = 1, 2, 3 \quad (5.43)$$

[González Andrade, 2008].

Tomaremos la función  $\xi : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^3$  [González Andrade, 2008] para cada triángulo  $\tau$  como

$$\xi(u)_k := |(p_k, p_{k+3})^\top| \quad \text{para } k = 1, 2, 3. \quad (5.44)$$

Así podemos expresar (5.35) como

$$J_\gamma(y^h) = \frac{1}{n+1} K^h + D^h - c^h \vec{y} \quad (5.45)$$

con  $K^h = (k_i)$  donde

$$k_i = \sum_{\tau \in T^h} \int_{\tau} |\nabla^h y|_i^{n+1} \quad \text{para } i = 1, \dots, n \quad (5.46)$$

y con la definición (5.44)

$$k_i = \sum_{\tau \in T^h} \int_{\tau} \xi(\nabla^h y)_i^{n+1} \quad \text{para } i = 1, \dots, n \quad (5.47)$$

esta integral se evalúa con el el método del punto medio

$$k_i \approx \sum_{\tau \in T^h} |\tau| \frac{\xi(\nabla y^h)_i^{n+1}}{2} \quad (5.48)$$

donde  $|\tau|$  es el área de cada triángulo.  $D^h = (d_i)$  con

$$d_i = Od \sum_{\tau \in T_1^h} \int_{\tau} \left( |\nabla y^h|_i - \frac{Od^2}{\gamma} \right) + \frac{\gamma}{2} \sum_{\tau \in T^h \setminus T_1^h} \int_{\tau} |\nabla y^h|_i^2 \quad \text{para } i = 1, \dots, n. \quad (5.49)$$

dada la definición (5.44) tenemos:

$$d_i = Od \sum_{\tau \in T_1^h} \int_{\tau} \left( \xi((\nabla y^h)_i) - \frac{Od^2}{\gamma} \right) + \frac{\gamma}{2} \sum_{\tau \in T^h \setminus T_1^h} \int_{\tau} \xi(\nabla y^h)_i^2 \quad \text{para } i = 1, \dots, n. \quad (5.50)$$

donde la primera integral se calcula así:

$$\sum_{\tau \in T_1^h} \int_{\tau} \left( \xi(\nabla^h y) - \frac{Od^2}{\gamma} \right) \approx \sum_{\tau \in T_1^h} \frac{|\tau|}{2} \left( \xi(\nabla^h y) - \frac{Od^2}{\gamma} \right) \quad (5.51)$$

y

$$\sum_{\tau \in T^h \setminus T_1^h} \int_{\tau} \xi((\nabla y^h)_i)^2 \approx \sum_{\tau \in T^h \setminus T_1^h} \frac{|\tau|}{2} \xi((\nabla y^h)_i)^2 \quad (5.52)$$

así (5.50) está calculada así:

$$d_i \approx Od \sum_{\tau \in T_1^h} \frac{|\tau|}{2} \left( \xi((\nabla y^h)_i) - \frac{Od^2}{\gamma} \right) + \frac{\gamma}{2} \sum_{\tau \in T^h \setminus T_1^h} \frac{|\tau|}{2} \xi((\nabla y^h)_i)^2 \text{ para } i = 1, \dots, n. \quad (5.53)$$

Por otro lado,  $c^h = (c_i)$

$$c_i = \sum_{\tau \in T^h} \int_{\tau} c \varphi_i(x) dx \quad \text{para } i = 1, \dots, n \quad (5.54)$$

y se calcula con el método del trapecio

$$\int_{\tau} c \varphi_i(x) dx \approx \frac{1}{6} \det \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix} c \quad (5.55)$$

así

$$c_i \approx \sum_{\tau \in T^h} \frac{1}{6} \det \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix} c \quad (5.56)$$

y  $c^h y$  en (5.45) se obtiene

$$c^h y = (c_i)' * y \quad (5.57)$$

con (5.48), (5.53) y (5.57) podemos calcular el valor del funcional  $J(y)$  en la ecuación (5.45).

### 5.3 MÉTODO DEL DESCENSO MÁS PROFUNDO

En esta sección aplicaremos el método del descenso más profundo al problema discretizado

$$\min_{y^h \in S^h} J_h(y^h) \quad (5.58)$$

donde

$$J_{\gamma}(y^h) = \frac{1}{n+1} \int_{\Omega^h} |\nabla y^h|^{n+1} dx + \int_{\Omega^h} \psi_{\gamma}(\nabla y^h) dx - c \int_{\Omega^h} y^h dx \quad (5.59)$$

Dada la solución  $y \in S^h$  solución exacta de (5.58), aplicaremos el método del descenso más profundo visto en el segundo capítulo para encontrar su solución aproximada dada por la expresión

$$y_{n+1} = y_n + \alpha_n w_n \quad (5.60)$$

donde  $y_n$  es la aproximación en el n-ésimo paso del método,  $\alpha_n$  es la longitud del n-ésimo paso y  $w_n$  es la dirección del n-ésimo paso.

### 5.3.1 MÉTODO DEL DESCENSO PRECONDICIONADO

De forma similar al método aplicado en el problema del p-Laplaciano vamos a tomar la dirección de descenso  $w_n \in S^h$  como:

$$\int_{\Omega^h} \nabla w_n \nabla v = -J'_\gamma(y)v = - \int_{\Omega^h} |\nabla y|^{n-1} (\nabla y, \nabla v) dx - Od \int_{\Omega^h} \frac{\gamma(\nabla y, \nabla v)}{\max(Od, \gamma|\nabla y|)} dx + \int_{\Omega^h} cv dx \quad (5.61)$$

para todo  $v \in S^h$ , donde  $w_n$  es el representante de Riesz para  $J'_\gamma(y)$ .

Con la dirección  $w_n$  definida en (5.61) el método del descenso más profundo se conoce como **precondicionado** [Huang et al., 2007, Zhou et al., 2005].

Probemos, que  $w_n$  definido en (5.61) es una dirección de descenso es decir que cumple

$$J'(v)w = -\|J'(v)\|_*, \|w\| = 1 \quad (5.62)$$

donde  $\|\cdot\|_*$  esta definida como

$$\|J'(v)\|_* = \sup_{y \in S^h} \frac{|J(v)y|}{\|y\|}. \quad (5.63)$$

**Demostración:** Dada  $y$  solución exacta de (5.58) y su aproximación recurrente  $y_n \in S^h$ , definimos  $y_{n+1}$  como:

$$y_{n+1} = y_n + \alpha_n w_n \quad (5.64)$$

Para probar que  $w_n$  es una dirección de descenso tenemos que conseguir que  $y = y_n$ , y tomando  $w_n$  el representante de Riesz del funcional  $-J'(y_n)$  en  $S^h$  tenemos que

$$\|w_n\|_{S^h} = \|J'(y_n)\|_* \quad (5.65)$$

de (5.61) tomando  $v = w_n$  tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^h} \nabla w_n \nabla w_n &= -J'(y_n)w_n \\ \|w_n\|^2 &= -J'(y_n)w_n \end{aligned}$$

debido a que  $\int_{\Omega^h} \nabla w_n \nabla w_n = \|w_n\|^2$ , además por (5.65) se tiene que

$$J'(y_n)w_n = -\|J'(u_n)\|_* \|w_n\|_{S^h} \quad (5.66)$$

así por (5.62), podemos concluir que  $w_n$  es una dirección de descenso. ■

Por otro lado, la expresión (5.61) se puede expresar como

$$B^h w_n = A^h \vec{y} + D^h \vec{y} - c^h \quad (5.67)$$

con  $B^h = (b_{ij})$  donde

$$b_{ij} = \sum_{\tau \in T^h} \int_{\tau} (\nabla \varphi_i, \nabla \varphi_j), \quad \text{para } i, j = 1, \dots, n \quad (5.68)$$

$A^h = (a_{ij})$  donde

$$a_{ij} = \sum_{\tau \in T^h} \int_{\tau} |\nabla^h y|^{n-1} (\nabla \varphi_i, \nabla \varphi_j) dx \quad \text{para } i, j = 1, \dots, n, \quad (5.69)$$

utilizando la función  $\xi$  definida en (5.44) tenemos que

$$a_{ij} = \sum_{\tau \in T^h} \int_{\tau} \xi (\nabla^h y)^{n-1} (\nabla \varphi_i, \nabla \varphi_j) dx \quad \text{para } i, j = 1, \dots, n, \quad (5.70)$$

$D^h = (d_{ij})$

$$d_{ij} = \sum_{\tau \in T^h} Od \int_{\tau} \frac{\gamma (\nabla \varphi_i, \nabla \varphi_j)}{\max(Od, \gamma |\nabla y^h|)} \quad \text{para } i, j = 1, \dots, n \quad (5.71)$$

aplicando (5.44)

$$d_{ij} = \sum_{\tau \in T^h} Od \int_{\tau} \frac{\gamma (\nabla \varphi_i, \nabla \varphi_j)}{\max(Od, \gamma \xi (\nabla y^h))} \quad \text{para } i, j = 1, \dots, n \quad (5.72)$$

y  $c^h = (c_j)$  donde

$$c_j = \sum_{\tau \in T^h} \int_{\tau} c \varphi_j(x) dx \quad \text{para } j = 1, \dots, n \quad (5.73)$$

donde

$$\int_{\tau} c \varphi_j(x) dx \approx \frac{1}{6} \det \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix} c \quad (5.74)$$

### 5.3.2 MÉTODO DEL DESCENSO PONDERADO

Dado el espacio  $S^h \hookrightarrow H_0^1(\Omega^h)$ , con la norma ponderada

$$\|\cdot\|_{y_n}^2 = \int_{\Omega} (\xi + |\nabla y_n|^{p-2}) |\nabla \cdot|^2. \quad (5.75)$$

tomaremos la dirección de descenso  $w_n$  dada en [Huang et al., 2007, Zhou et al., 2005]:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^h} (\epsilon + |\nabla y_n|^{n-1}) \nabla w_n \nabla v &= - \int_{\Omega^h} |\nabla y|^{n-1} (\nabla y, \nabla v) dx \\ &\quad - Od \int_{\Omega^h} \frac{(\nabla y, \nabla v)}{\max(Od, |\nabla y|)} dx + \int_{\Omega^h} cv dx \end{aligned} \quad (5.76)$$

donde  $\epsilon$  es una constante positiva que permite generar un resultado al algoritmo cuando  $\nabla y_n = 0$ , y  $w_n$  es el representante de Riesz para  $J'_\gamma(y)$  en el espacio  $S^h$  con la norma ponderada (5.75). Con la dirección de descenso definida en (5.76) el método del descenso más profundo se denomina **ponderado**.

**Teorema 11.**  $w_n$  definido en (5.76) es una dirección de descenso, es decir cumple:

$$J'(v)w = -\|J'(v)\|_*, \|w\|_\epsilon = 1 \quad (5.77)$$

para todo  $v \in S^h$ , y donde  $\|\cdot\|_*$  esta definida como

$$\|J'(v)\|_* = \sup_{y \in S^h} \frac{|J(v)y|}{\|y\|}. \quad (5.78)$$

**Demostración:** Dada  $y$  solución exacta de (5.58) y su aproximación recurrente  $y_n \in S^h$ , definimos  $y_{n+1}$  como:

$$y_{n+1} = y_n + \alpha_n w_n \quad (5.79)$$



donde  $w_n$  esta definida en (5.76) y  $\alpha$ , y tomando  $w_n$  el representante de Riesz del funcional  $-J'(y_n)$  en  $S^h$  tenemos que

$$\|w_n\|_\epsilon = \|J'(y_n)\|_* \quad (5.80)$$

donde  $\|\cdot\|_\epsilon$  está definida en (5.75) y tomando  $v = w_n$  en (5.76) tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^h} (\epsilon + |\nabla y|^{n-1}) \nabla w_n \nabla w_n &= -J'(y_n) w_n, \\ \|w_n\|_\epsilon^2 &= -J'(y_n) w_n \end{aligned}$$

por (5.65) se tiene que

$$J'(y_n) w_n = -\|J'(u_n)\|_* \|w_n\|_\epsilon \quad (5.81)$$

así por (5.62), podemos concluir que  $w_n$  es una dirección de descenso. ■

La dirección (5.76) se puede expresar como

$$B^h w_n = A^h \vec{y} + D^h \vec{y} - c^h \quad (5.82)$$

con  $B^h = (b_{ij})$  donde

$$b_{ij} = \sum_{\tau \in T^h} \int_{\tau} \left( \epsilon + |\nabla^h y|^{n-1} \right) (\nabla \varphi_i, \nabla \varphi_j), \quad \text{para } i, j = 1, \dots, \quad (5.83)$$

con la función  $\xi$

$$b_{ij} = \sum_{\tau \in T^h} \int_{\tau} \left( \epsilon + \xi (\nabla y^h)^{n-1} \right) (\nabla \varphi_i, \nabla \varphi_j), \quad \text{para } i, j = 1, \dots, n \quad (5.84)$$

y las matrices  $A^h = (a_{ij})$ ,  $D^h = (d_{ij})$  y  $c^h = (c_j)$  definidos en (5.3.2), (5.72) y (5.73) respectivamente:

$$a_{ij} = \sum_{\tau \in T^h} \int_{\tau} \xi (\nabla y^h)^{n-1} (\nabla \varphi_i, \nabla \varphi_j) \, dx \quad \text{para } i, j = 1, \dots, n,$$

$$d_{ij} = \sum_{\tau \in T^h} Od \int_{\tau} \frac{\gamma (\nabla \varphi_i, \nabla \varphi_j)}{\max(Od, \gamma \xi (\nabla^h y))} \quad \text{para } i, j = 1, \dots, n$$

y

$$c_j = \sum_{\tau \in T^h} \int_{\tau} c \varphi_j(x) \, dx \quad \text{para } j = 1, \dots, n$$

donde

$$\int_{\tau} c \varphi_j(x) \, dx \approx \frac{1}{6} \det \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix} c$$

para cada  $\tau$ .

### 5.3.3 LONGITUD DEL PASO DE DESCENSO

Para el método del descenso más profundo tenemos que encontrar la longitud del paso de descenso  $\alpha_n$  resolviendo el problema de minimización siguiente:

$$J(y_n + \alpha_n w_n) = \min_{\alpha \geq 0} J(y_n + \alpha w_n) \quad (5.85)$$

para  $J$  definida en (5.58).

Como vimos en el capítulo 2, es innecesario resolver de forma exacta el problema de minimización (5.85), por su costo computacional, por lo que vamos a aproximar su solución con la condición de Armijo dada en (2.37), que aplicada al problema de minimización (5.58) produce la siguiente definición.

**Definición 36 (Condición de Armijo para el problema de Herschel-Bulkley).** *Dados los escalares  $s, \rho > 0$  con  $\rho \in (0, 1)$  y  $\sigma \in (0, 1/2)$ . Tomamos  $\alpha \in \{s, s\rho, s\rho^2, \dots\}$*

$$J_\gamma(y_n) - J_\gamma(y_n - \alpha w_n) \geq -\sigma \alpha J'_\gamma(y_n) v \cdot w_n \quad (5.86)$$

Para aplicar la condición de Armijo al problema de minimización (5.58) vamos a seguir los siguientes pasos :

---

#### Algoritmo Armijo para Herschel-Bulkley

---

1: Fijar  $s, \rho, \sigma, J_1 = J(y)$  y  $n = 0$

**repetir**

2: Definir  $arm$  el criterio de parada dado en (5.86)

3: Actualizar  $\alpha = s\rho^{1/n}$ ,  $y = y + \alpha w_n$

4: Calcular  $arm = J_1 - J_\gamma(y)$

**hasta** que la condición de parada se cumpla

---

Después de encontrar la dirección de descenso dada en (5.61) para el método del descenso más profundo precondicionado y (5.76) para el método del descenso más profundo ponderado; la longitud del paso de descenso dado en (5.86), nos resta probar que el método del descenso más profundo converge, por lo que enunciaremos el siguiente teorema:

**Teorema 12.** *Si  $J_\gamma \in C^1$  y acotada inferiormente. Sea  $x_k, w_k$  y  $\alpha_k$  obtenidos en el método del descenso*

más profundo y la condición de Armijo, entonces

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J'_\gamma(x_k) = 0 \quad (5.87)$$

Como el funcional  $J_\gamma \in C^1$  es diferenciable y además posee mínimo por lo que está acotado inferiormente. Y los valores  $x_k, w_k$  y  $\alpha_k$  fueron obtenidos por el método del descenso más profundo y la condición de Armijo, podemos concluir que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J'_\gamma(x_k) = 0 \quad (5.88)$$

Ver [De Los Reyes, 2012, pág. 31].

Para aplicar estos métodos al problema (5.58) que representa el flujo de Herschel-Bulkley en una tubería, tomaremos las direcciones de descenso dadas en (5.61) y (5.76), y el paso de descenso dado en (5.86), y describiremos el procedimiento para aplicar el algoritmo así.:

---

#### Algoritmo Descenso Herschel-Bulkley

---

1: Fijar  $y_0$  y  $n = 0$

**repetir**

2: Escoger criterio de parada.

3: Encontrar  $w_n$  con ((5.61),(5.76)).

4: Determinar  $\alpha_n$  utilizando con el algoritmo de Armijo. (3.42)

5: Actualizar  $y = y + \alpha_n w_n$

**hasta** que la condición de parada se cumpla

---

*“Imagination will often carry us to worlds that never were,  
but without it we go nowhere.”*

Carl Sagan

# 6

## Resultados Numéricos

En este capítulo mostramos algunos ejemplos del método del descenso más profundo preconditionado y ponderado, para encontrar la solución numérica de la ecuación de movimiento de los fluidos de Herschel-Bulkley en una tubería. En estos ejemplos tomamos  $c = 1$  que representa la presión aplicada al fluido y el valor inicial  $y_0$  como la solución de la ecuación

$$\begin{cases} -\Delta y = c & \text{en } \Omega^h \\ y = 0 & \text{en } \partial\Omega^h \end{cases}$$

También fijamos el parámetro de la regularización de Hubber en la ecuación (5.3) como  $\gamma = 100$  y el criterio de parada para el algoritmo del descenso más profundo como  $error \leq 0.0007$ . Definimos una malla circular regular con 1089 nodos en el intervalo  $[-1, 1] \times [-1, 1]$ , la partición  $\Omega^h$  y el espacio  $S^h$  descritos en (5.32).

## 6.1 MÉTODO DEL DESCENSO PRECONDICIONADO

### 6.1.1 EXPERIMENTO 1

Para el primer experimento numérico tomamos  $n = 0.75$ , así el problema (5.58) se transforma en

$$\min_{y \in S^h} J(y)$$

con

$$J_\gamma(y) = \frac{1}{n+1} \int_{\Omega} |\nabla y|^{0.75+1} dx + \int_{\Omega} \psi_\gamma(\nabla y) dx - c \int_{\Omega} y dx \quad (6.1)$$

por lo que la dirección de descenso definida en (5.61) para este caso es

$$\int_{\Omega} \nabla w_n \nabla v = - \int_{\Omega} |\nabla y|^{0.75-1} (\nabla y, \nabla v) dx - Od \int_{\Omega} \frac{(\nabla y, \nabla v)}{\max(Od, |\nabla y|)} dx + c \int_{\Omega} v dx$$

y definimos *error* para el algoritmo iterativo como

$$error = \left| \int_{\Omega} |\nabla y|^{0.75-1} (\nabla y, \nabla v) dx + Od \int_{\Omega} \frac{(\nabla y, \nabla v)}{\max(Od, |\nabla y|)} dx - c \int_{\Omega} v dx \right| \quad (6.2)$$

Además obtendremos la longitud del paso  $\alpha$  con la condición de Armijo descrita en (5.86) con las constantes fijadas anteriormente en este capítulo, y asignaremos los valores de  $Od = 0$ ,  $Od = 0.2$  y  $Od = 0.4$ .

Después de aplicar el algoritmo obtuvimos los siguientes resultados

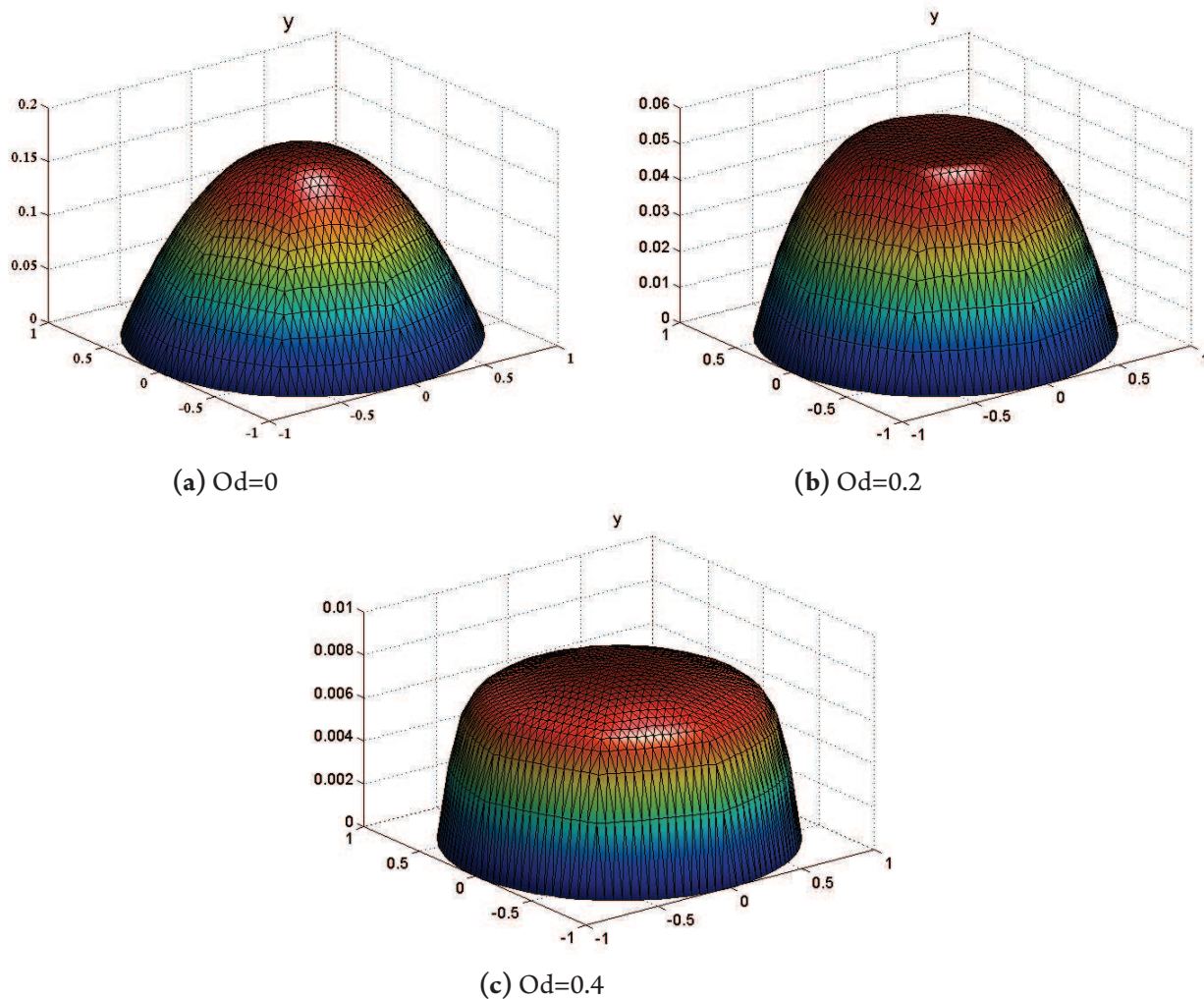
Od	$ J'(y)v $	$A_\gamma$	$I_\gamma$	Número de iteraciones	Tiempo
0	$6.953 \times 10^{-5}$	2048	0	2	5.529 s
0.2	$6.4893 \times 10^{-4}$	1808	240	12	24.05 s
0.4	$1.7697 \times 10^{-4}$	896	1152	16	32.59 s

**Cuadro 6.1:** Resultados del algoritmo para  $n = 0.75$

Donde  $|J'(y)v|$  es el error dado en (6.12) y  $A_\gamma$  es el número de activos.

En esta tabla podemos ver que al incrementar  $Od$  aumenta el número de iteraciones del algoritmo. Comparando los datos obtenidos en el algoritmo con los datos de [Huilgol and You, 2005] que utiliza el método de los Lagrangianos extendidos en una malla más gruesa, se puede concluir que nuestro algoritmo resolviendo en cada iteración una sola ecuación tiene menor número de iteraciones para cada  $Od$ .

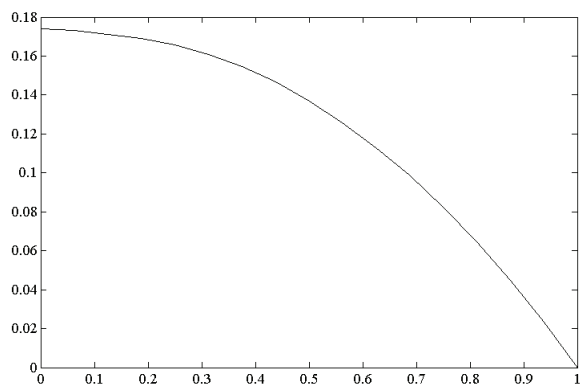
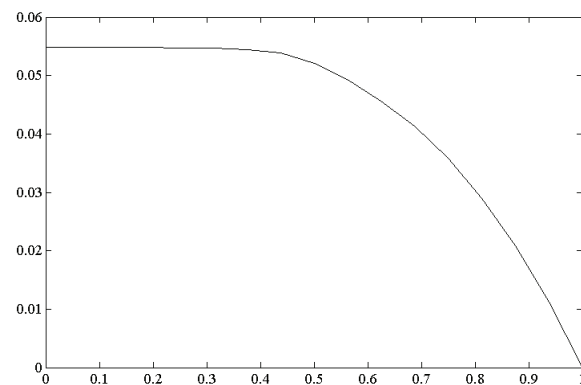
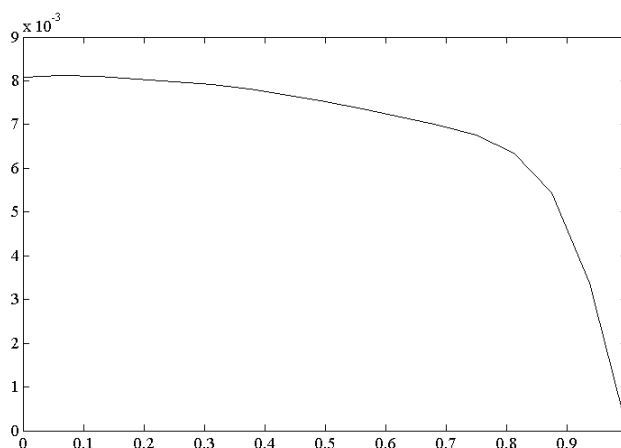
Los siguientes gráficos muestran la velocidad resultante después de aplicar el método del descenso más profundo.



**Figura 6.1:** Velocidad del fluido de Herschel-Bulkley para  $n = 0.75$

La gráfica (6.1a) representa la velocidad obtenida cuando  $Od = 0$  que se reduce al problema  $-\Delta_p u = f$ , mientras que (6.1b) y (6.1c) representan la velocidad del fluido de Herschel-Bulkley en una tubería para  $Od = 0.2$  y  $Od = 0.4$  respectivamente.

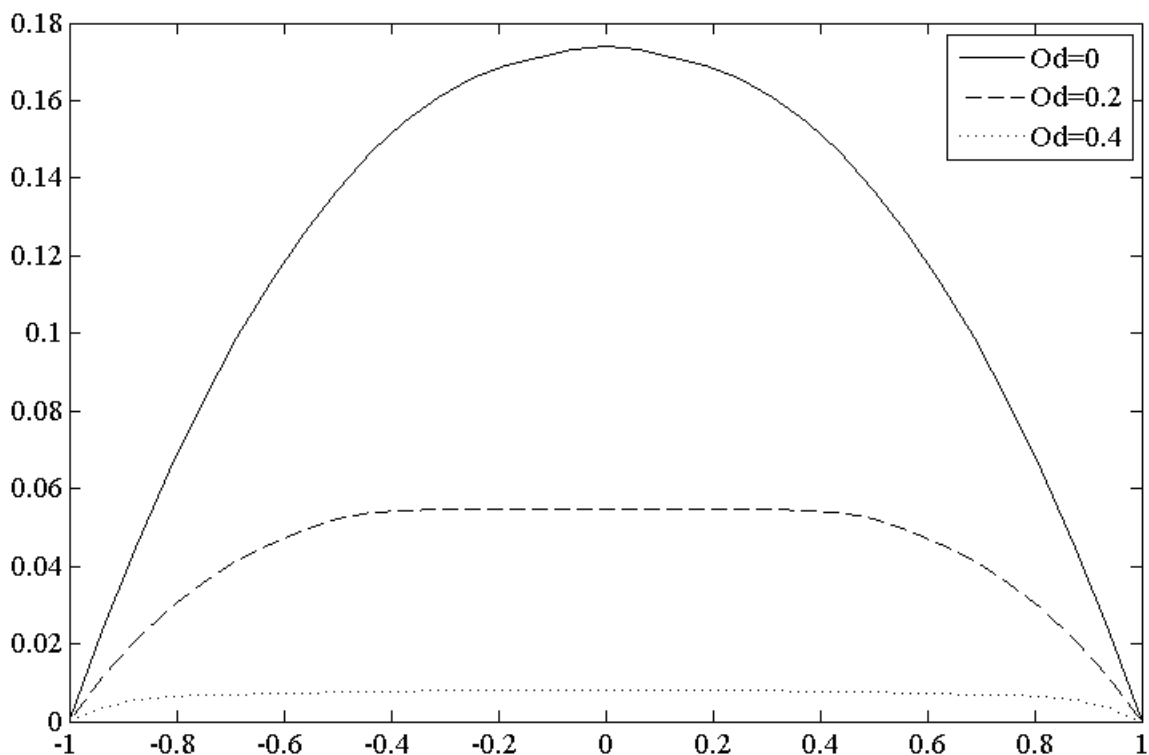
Los siguientes gráficos representan la velocidad  $y$  obtenida para distintos  $Od$  a lo largo del radio de la malla circular.

(a)  $Od=0$ (b)  $Od=0.2$ (c)  $Od=0.4$ 

**Figura 6.2:** Perfil de la velocidad a lo largo del radio de la malla

En (6.2a)-(6.2c) donde observar de forma más clara los valores que alcanza (6.1a), y las velocidades del fluido de Herschel-Bulkley en (6.1b) y (6.1c). Para el caso de  $n = 0.75$  y  $Od = 0.2$  podemos comparar los resultados obtenidos con los resultados dados en el documento de [Huilgol and You, 2005], que al aplicar el método de Lagrangianos extendidos, los cuales son similares.

Para ver la diferencia entre las curvas (6.1a)-(6.1c) presentamos el siguiente gráfico, que contiene los casos  $Od = 0$ ,  $Od = 0.2$  y  $Od = 0.4$  a lo largo del diámetro de la tubería



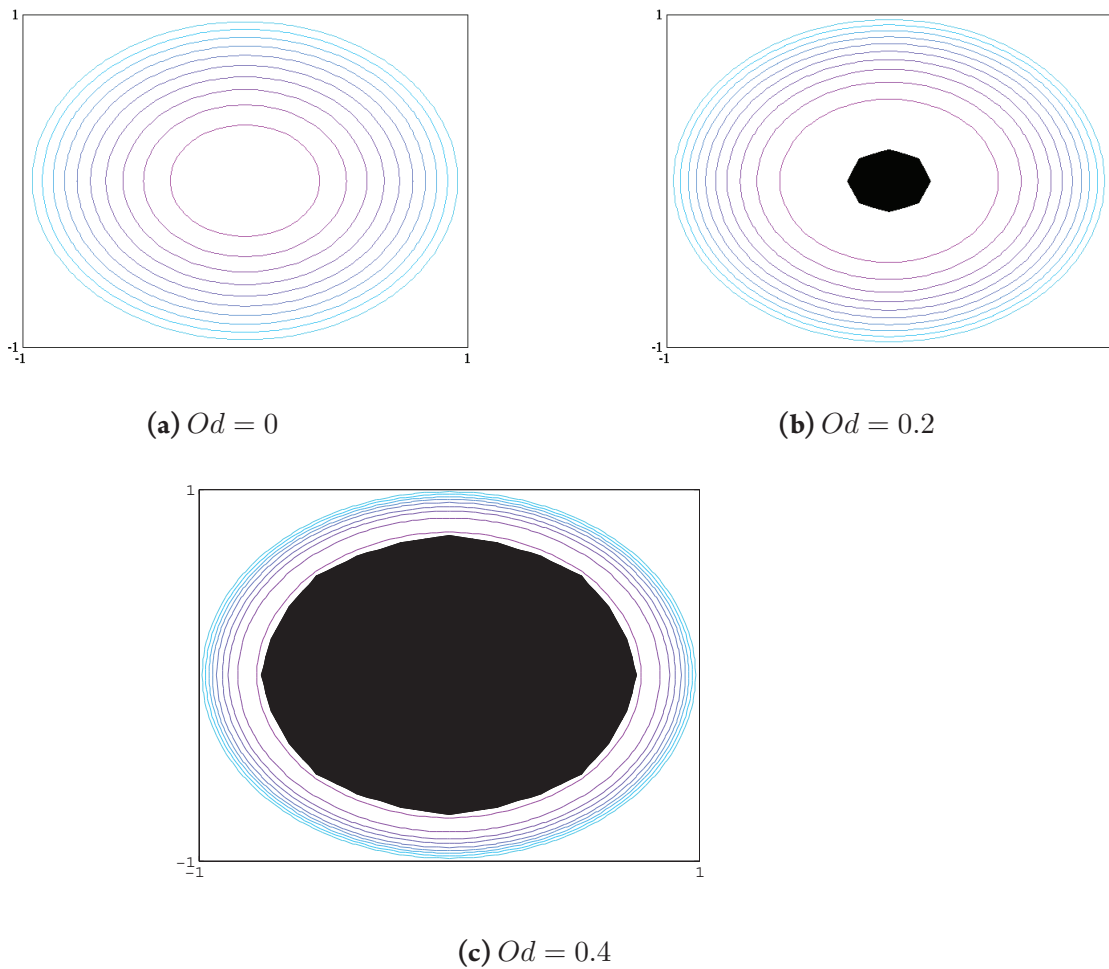
**Figura 6.3:** Comparación de las velocidades para  $n = 0.75$  y distintos  $Od$

En esta gráfica vemos la diferencia entre los resultados cuando  $Od$  es distinto, cuando  $Od = 0$  se tiene que la ecuación (5.58), se reduce a la ecuación del p-Laplaciano vista en el capítulo 3 (3.7), para este caso la velocidad es mayor porque  $Od$  tiene una relación proporcional al límite elástico. Para el caso de  $Od = 0.2$  y  $Od = 0.4$  cuando el término

$$J_\gamma(y) = \int_{\Omega} \psi_\gamma(\nabla y) dx$$

no se elimina puede notar el cambio de forma de la curva en la parte superior, este cambio se debe al aumento de  $Od$  implica un aumento del límite elástico o resistencia del material al movimiento con la misma fuerza aplicada.

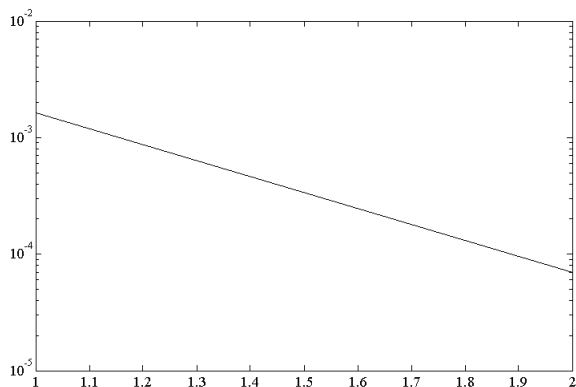




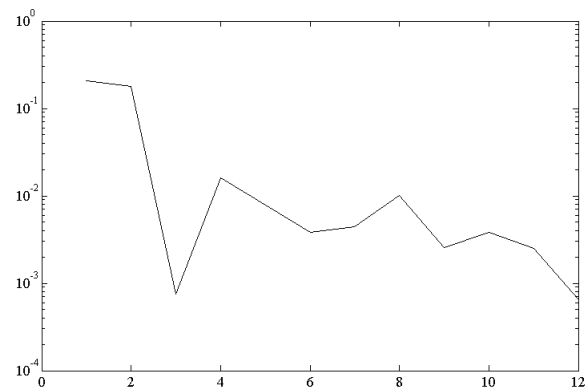
**Figura 6.4:** Curvas de nivel de la Velocidad del fluido su conjunto inactivo

En estas figuras podemos ver las curvas de nivel (6.1a)-(6.1c) velocidad para cada  $Od$  cuando  $n = 0.75$ . Además las zonas inactivas están representadas en las áreas negras. Cuando  $Od = 0$  podemos ver que la gráfica resultante no posee zona inactiva, esto se relaciona con la anulación de el número de Oldroyd en la ecuación (6.1), así la gráfica (6.1a) no representa un fluido de Herschel-Bulkley pero es la solución del problema del p-Laplaciano para  $n = 0.75$ . En los gráficos (6.4b) y (6.4c) por otro lado se ven diferenciadas las áreas activas e inactivas, comparando los dos gráficos podemos ver el aumento del área inactiva cuando el número de Oldroyd incrementa, es mayor el límite elástico es mayor y tensor de corte disminuye en el centro de la tubería.

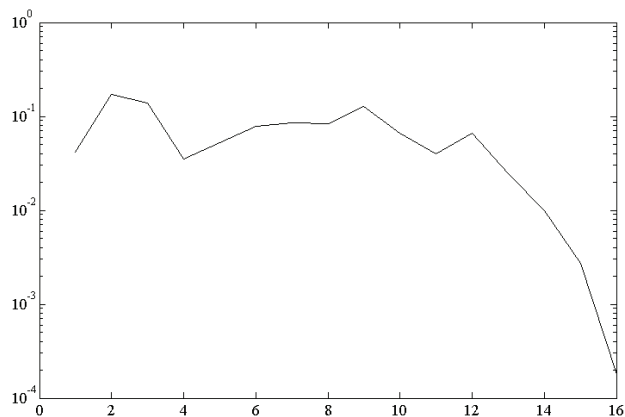
En los gráficos siguiente veremos la evolución del *error* en cada iteración del algoritmo.



(a) *error* para  $Od = 0$



(b) *error* para  $Od = 0.2$



(c) *error* para  $Od = 0.4$

**Figura 6.5:** *error* para  $n = 0.75$  y diferentes  $Od$

En el gráfico (6.12) podemos ver como el *error* cuando  $Od = 0$ , va disminuyendo en cada iteración de forma aproximadamente lineal. Para (6.5b) y (6.5c) se nota oscilaciones en los gráficos, pero estos son resultados esperados de la aplicación del método del descenso más profundo en el problema (6.1).

### 6.1.2 EXPERIMENTO 2

Para este experimento tomamos  $n = 3$ , para notar la diferencia del experimento anterior. Con  $n = 3$  el problema (5.58) es

$$\min_{y \in S^h} J(y)$$

con

$$J_\gamma(y) = \frac{1}{n+1} \int_{\Omega} |\nabla y|^4 dx + \int_{\Omega} \psi_\gamma(\nabla y) dx - c \int_{\Omega} y dx \quad (6.3)$$

por lo que la dirección de descenso definida en (5.61) para este caso es

$$\int_{\Omega} \nabla w_n \nabla v = - \int_{\Omega} |\nabla y|^2 (\nabla y, \nabla v) dx - Od \int_{\Omega} \frac{(\nabla y, \nabla v)}{\max(Od, |\nabla y|)} dx + c \int_{\Omega} v dx$$

y definimos *error* para el algoritmo iterativo como

$$error = \left| \int_{\Omega} |\nabla y|^2 (\nabla y, \nabla v) dx + Od \int_{\Omega} \frac{(\nabla y, \nabla v)}{\max(Od, |\nabla y|)} dx - c \int_{\Omega} v dx \right| \quad (6.4)$$

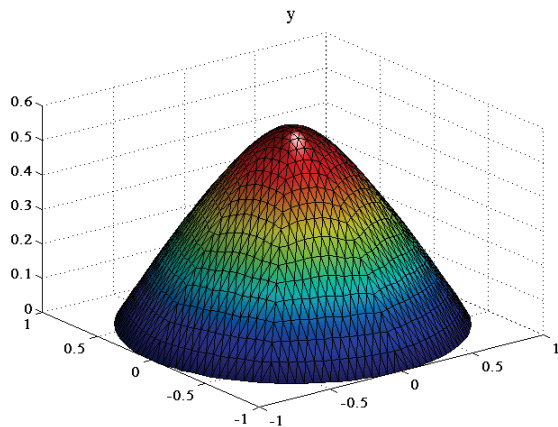
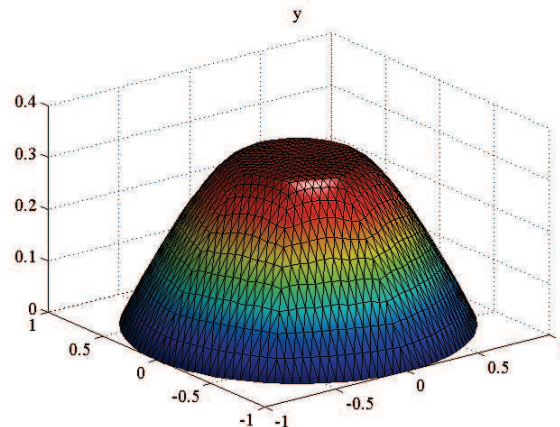
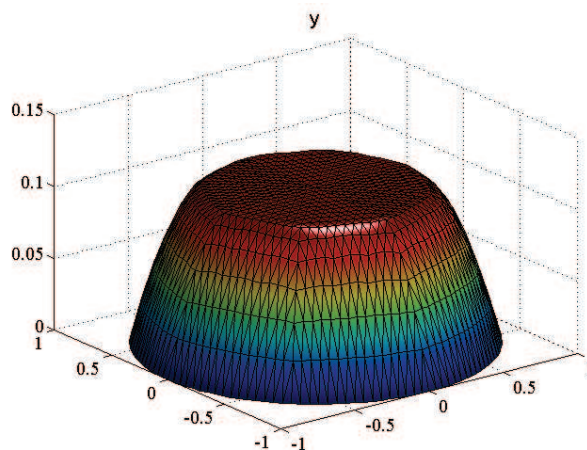
Por otro lado, para determinar la longitud del paso  $\alpha$  con la condición de Armijo descrita en (5.86), y asignaremos los valores de  $Od = 0$ ,  $Od = 0.2$  y  $Od = 0.4$ .

Después de aplicar el algoritmo obtuvimos los siguientes resultados

Od	$ J'(y)v $	$A_\gamma$	$I_\gamma$	Número de iteraciones	Tiempo
0	$5.7328 \times 10^{-4}$	2048	0	4	6.32 s
0.2	$6.4893 \times 10^{-4}$	2040	8	12	22.05 s
0.4	$4.4816 \times 10^{-4}$	1312	736	15	30.22 s

Donde  $|J'(y)v|$  es el error dado en (6.4) y  $A_\gamma$  es el número de activos. En esta tabla podemos ver al igual que en el anterior experimento que incrementar  $Od$  aumenta el número de iteraciones del algoritmo. Y aunque no tenemos un ejemplo comparativo en [Huilgol and You, 2005] u otro texto para  $n = 3$ , podemos decir que el método del descenso más profundo preconditionado para resolver el problema de Herschel-Bulkley requiere de pocas iteraciones como se ve en la tabla y el tiempo que el algoritmo se demora en obtener un resultado es rápido.

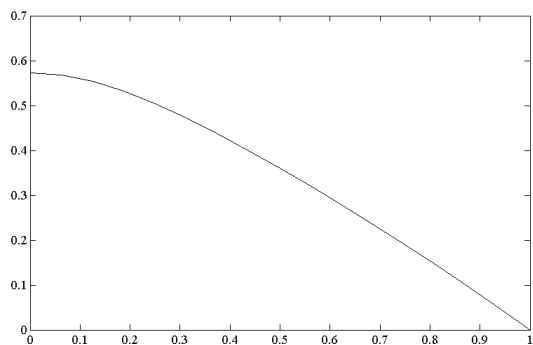
En los siguientes gráficos mostraremos las curvas resultantes al aplicar el algoritmo del descenso más profundo al problema (6.1.2) para  $Od = 0$ ,  $Od = 0.2$  y  $Od = 0.4$  respectivamente.

(a)  $Od = 0$ (b)  $Od = 0.2$ (c)  $Od = 0.4$ 

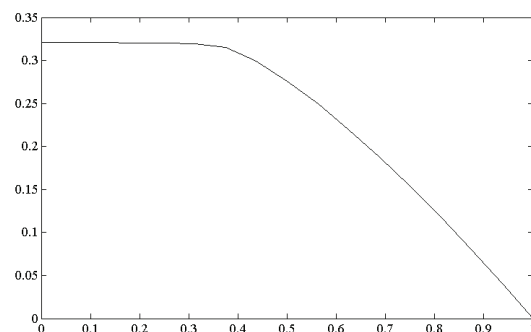
**Figura 6.6:** Velocidad de la superficie del fluido de Herschel-Bulkley en una tubería para  $n = 3$

El gráfico (6.6a) representa la solución de la ecuación (6.1.2) que es la solución para el problema del p-Laplaciano, mientras que (6.6b) y (6.6c) representan la velocidad de el fluido de Herschel-Bulkley en una tubería aplicando el método del descenso más profundo.

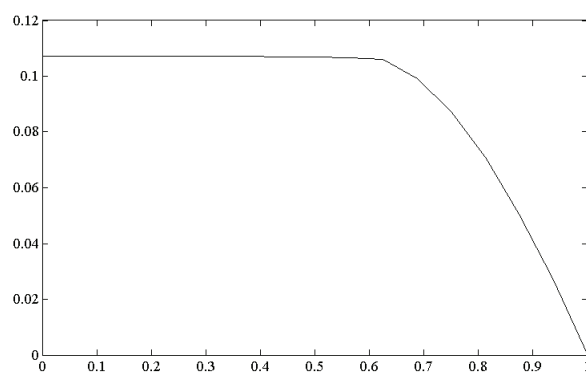
En los siguientes gráficos representan (6.6a)-(6.6c) a lo largo del radio de la malla circular.



(a)  $Od = 0$



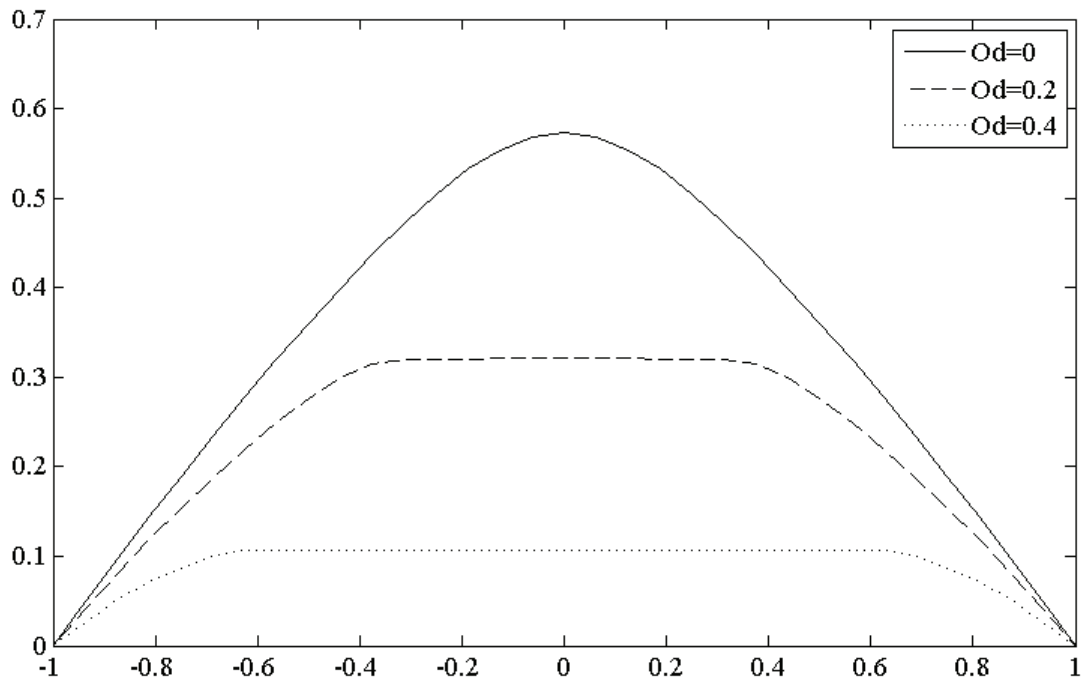
(b)  $Od = 0.2$



(c)  $Od = 0.4$

**Figura 6.7:** Velocidad del fluido de Herschel-Bulkley en el radio de la malla para  $n = 3$

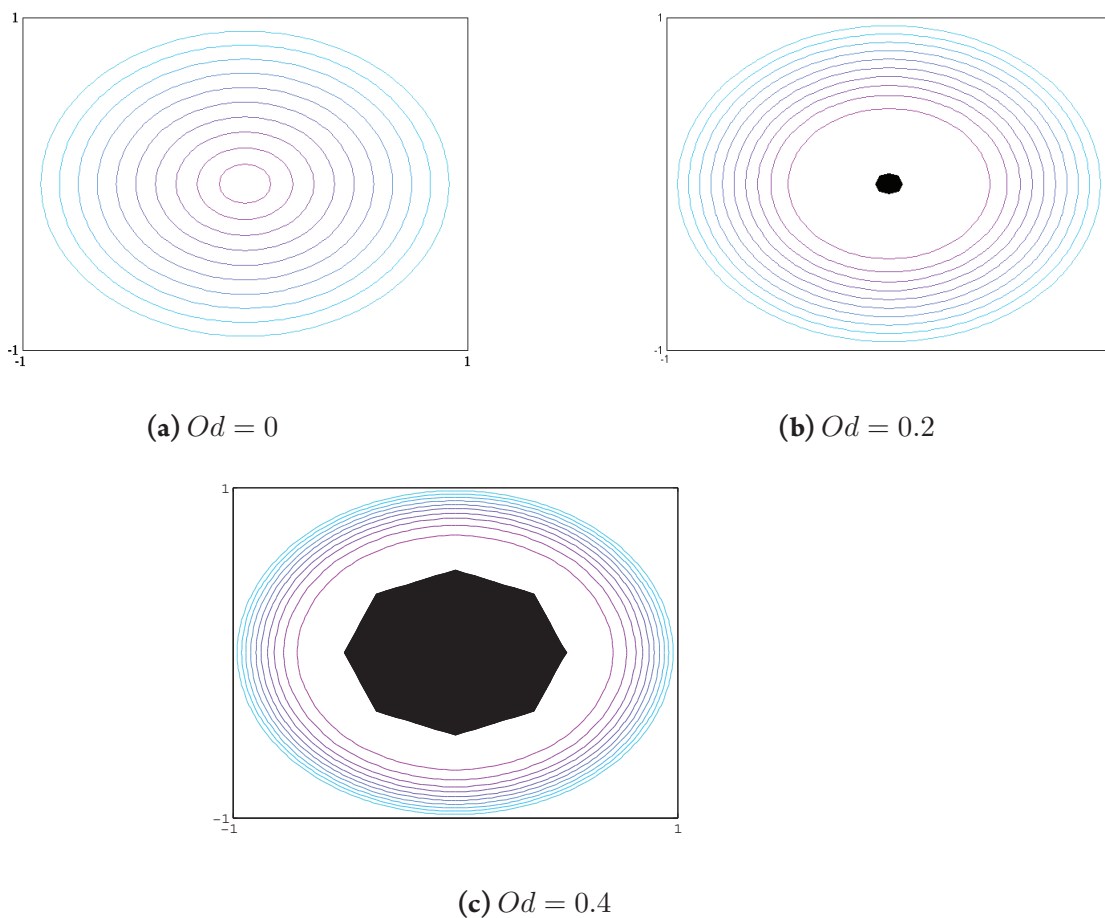
En (6.7b)-(6.7c) podemos ver los valores que alcanza la velocidad del fluido de Herschel-Bulkley para  $Od = 0.2$  y  $Od = 0.4$  respectivamente, y en (6.7a) el valor que alcanza la solución de (6.1.2) cuando  $Od$  representada en (6.6a).



**Figura 6.8:** Comparación de los resultados de la velocidad para  $n = 3$ .

En la gráfica se ve la diferencia entre las curvas de la velocidad cuando  $Od$  aumenta. En el caso de  $Od = 0$  la ecuación (6.1.2) se reduce al caso del p-Laplaciano y la curva del resultado es una curva con punto máximo mayor casos de  $Od = 0.2$  y  $Od = 0.4$ .

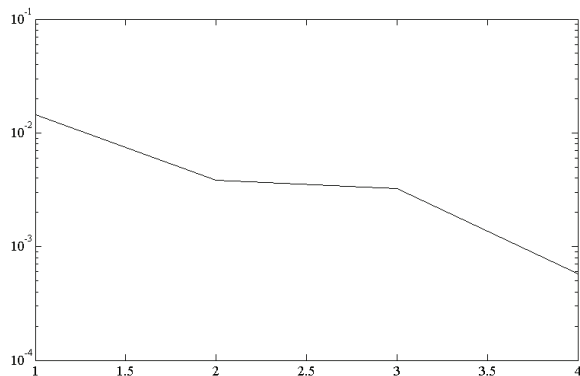
Podemos ver en las curvas para  $Od = 0.2$  y  $Od = 0.4$  que la velocidad del fluido de Herschel-Bulkley disminuye cuando incrementa  $Od$ , coincidiendo con la teoría que describe el movimiento de este fluido. La reducción de la velocidad cuando  $Od$  aumenta se debe a que el límite elástico aumenta y es más difícil el movimiento del fluido con la presión  $c$ .



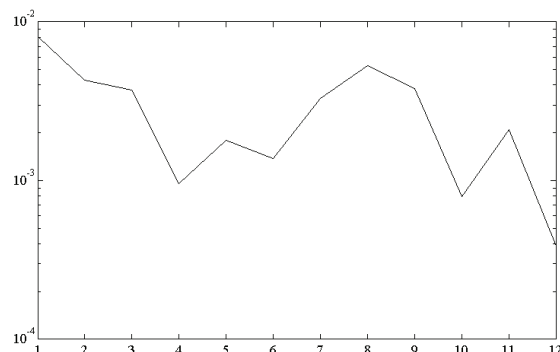
**Figura 6.9:** Curvas de nivel de la velocidad áreas activas e inactivas

En estas figuras podemos ver las curvas de nivel (6.6a)-(6.6c) velocidad para cada  $Od$  cuando  $n = 3$  y las zonas inactivas están representadas en las áreas negras. Cuando  $Od = 0$  la gráfica resultante no posee zona inactiva, esto se relaciona con la anulación de el número de Oldroyd en la ecuación (6.1), así la gráfica (6.1a) no representa un fluido de Herschel-Bulkley pero es la solución del problema del p-Laplaciano para  $n = 3$ . En los gráficos (6.4b) y (6.4c) tienen áreas activas e inactivas, comparando los dos gráficos podemos ver al igual que en el experimento anterior, el aumento del área inactiva cuando el número de Oldroyd incrementa, es mayor el límite elástico es mayor en el centro de la tubería donde el tensor de corte disminuye.

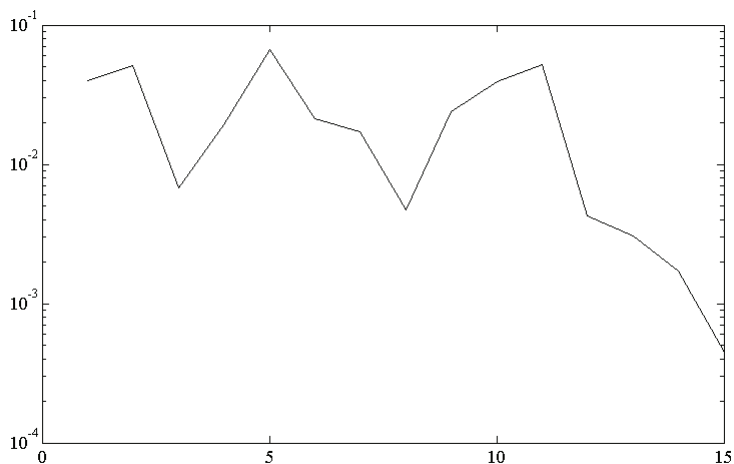
En los siguientes gráficos esta la curva del error de aproximación en cada iteración para  $Od$  distintos y  $n = 3$ .



(a) *error* para  $Od = 0$



(b) *error* para  $Od = 0.2$



(c) *error* para  $Od = 0.4$

**Figura 6.10:** Evolución del *error*, para  $n = 3$

Los gráficos para el *error* cuando  $n = 3$ , muestran como desciende el *error* con el método del descenso más profundo preconditionado. Para  $Od = 0$  se puede ver un descenso en cada paso del algoritmo mientras que en el caso de  $Od = 0.2$  y  $Od = 0.4$  se ve una oscilación del error que es común en el método del descenso más profundo.



## 6.1.3 EXPERIMENTO 3

A diferencia de los dos experimentos anteriores, en este experimento mostraremos los resultados en cada iteración del algoritmo cuando  $n = 0.75$  en la ecuación (5.58) y el número de Oldroyd es constante e igual a  $Od = 0.2$  y un  $error < 2 \times 10^{-5}$ .

iteración	$ J'(y)v $	$A_\gamma$		$\nu^k$
1	0.2063	2032	16	0.2063
2	0.1780	2048	0	0.8628
3	$7.5125 \times 10^{-4}$	2048	0	0.0042
4	0.0161	2048	0	35.67
5	0.0079	2048	0	0.4906
6	0.0038	2048	0	0.4810
7	0.0044	2048	0	1.1578
8	0.01	2032	16	2.2727
9	0.0026	2048	0	0.2600
10	0.0038	1976	72	1.4615
11	0.0025	1920	128	0.6578
12	$6.489 \times 10^{-4}$	1808	240	0.2595
13	$1.3162 \times 10^{-4}$	1776	272	0.2028
14	$3.2418 \times 10^{-5}$	1760	288	0.2462
15	$5.7872 \times 10^{-5}$	1760	288	1.7851
16	$7.4547 \times 10^{-5}$	1760	288	1.2873
17	$2.722 \times 10^{-5}$	1760	288	0.3600

**Cuadro 6.2:** Resultados para  $Od = 0.2$

donde  $\nu^k$  está definida como

$$\nu^k = \frac{|J'(y_k)v|}{|J'(y_{k-1})v|}, \quad (6.5)$$

$\nu^k$  muestra como evoluciona el error entre dos iteraciones. Cuando  $\nu^k$  es menor que 1 hay una disminución del error  $|J'(y_k)v|$  comparado con el error  $|J'(y_{k-1})v|$ , y es mayor que 1 si el error  $|J'(y_{k-1})v|$  es menor que  $|J'(y_k)v|$ .

Además en la tabla (6.2) podemos ver la evolución del error  $|J'(y)v|$  en cada iteración, que en forma gráfica esta representada en la figura (6.5b), y el número de activos  $A_\gamma$  en cada iteración.

## 6.2 EXPERIMENTOS CON EL MÉTODO DEL DESCENSO MÁS PROFUNDO PONDERADO

Al igual que en la sección anterior veremos dos experimentos de la aplicación del algoritmo para el método del descenso más profundo ponderado (3.38). Para los experimentos fijaremos la constante positiva  $\epsilon = 1 \times 10^{-4}$ .

### 6.2.1 EXPERIMENTO 4

En este ejemplo tomaremos  $n = 0.5$ , en la ecuación

$$\min_{y \in S^h} J(y)$$

con

$$J_\gamma(y) = \frac{1}{n+1} \int_{\Omega} |\nabla y|^{1.5} dx + \int_{\Omega} \psi_\gamma(\nabla y) dx - c \int_{\Omega} y dx \quad (6.6)$$

y su dirección de descenso definida en (5.76) para este caso es

$$\int_{\Omega} (\epsilon + (\nabla y)^{0.5-1}) \nabla w_n \nabla v = - \int_{\Omega} |\nabla y|^{0.5-1} (\nabla y, \nabla v) dx - Od \int_{\Omega} \frac{(\nabla y, \nabla v)}{\max(Od, |\nabla y|)} dx + c \int_{\Omega} v dx$$

y definimos *error* para el algoritmo iterativo como

$$error = \left| \int_{\Omega} |\nabla y|^{-0.5} (\nabla y, \nabla v) dx + Od \int_{\Omega} \frac{(\nabla y, \nabla v)}{\max(Od, |\nabla y|)} dx - c \int_{\Omega} v dx \right| \quad (6.7)$$

Para determinar la longitud del paso  $\alpha$  con la condición de Armijo descrita en (5.86), con las constantes fijadas al principio de este capítulo y los valores iniciales dados por (6.2.1), además asignaremos los valores de  $Od = 0$ ,  $Od = 0.2$  y  $Od = 0.4$  en (6.2.1).

Al aplicar el algoritmo obtuvimos los siguientes resultados

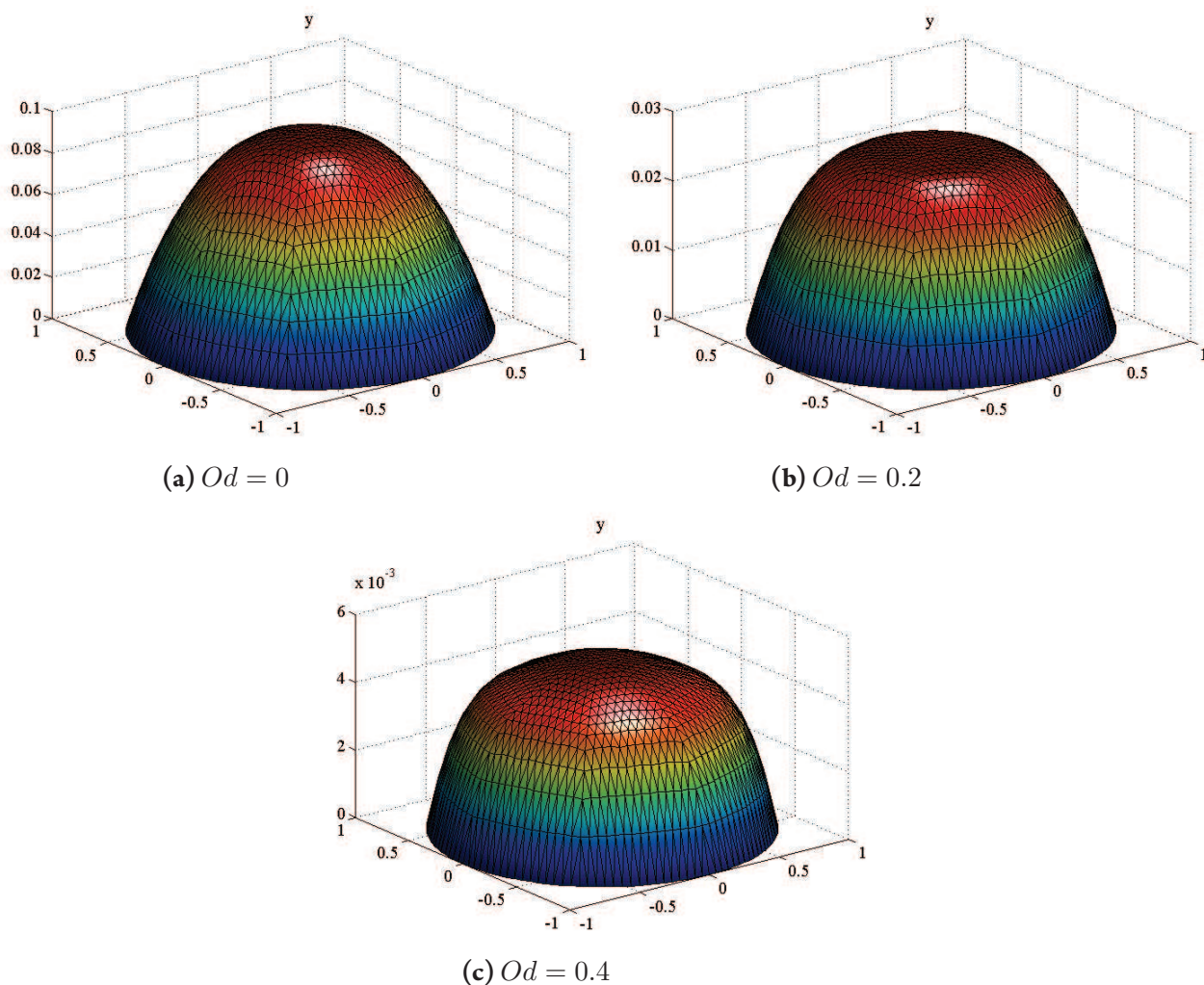
Od	$ J'(y)v $	$A_\gamma$	$I_\gamma$	Número de iteraciones	Tiempo
0	$4.4569 \times 10^{-4}$	2048	0	4	6.47 s
0.2	$5.5332 \times 10^{-4}$	1848	200	6	11.63 s
0.4	$4.3889 \times 10^{-4}$	1080	880	8	15.31 s

Donde  $|J'(y)v|$  es el error dado en (6.7) y  $A_\gamma$  es el número de activos.

En esta tabla podemos ver la relación entre el incremento de  $Od$  y el aumento de iteraciones en este experimento. Comparando con los resultados obtenidos con el método Lagrangianos extendidos con una malla más gruesa en [Huilgol and You, 2005], el método del descenso más profundo

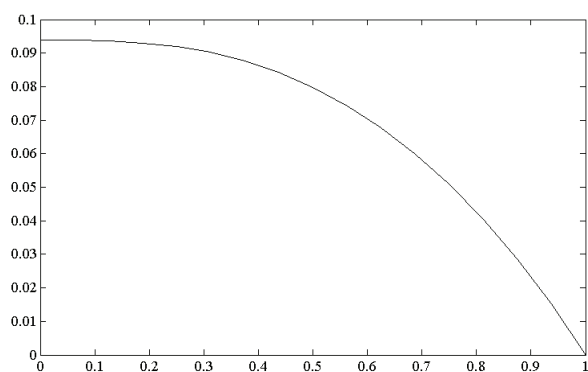
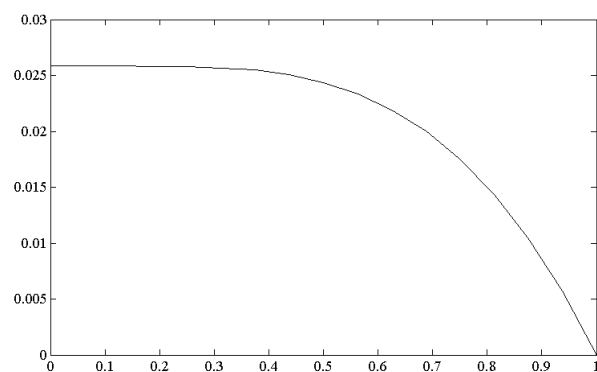
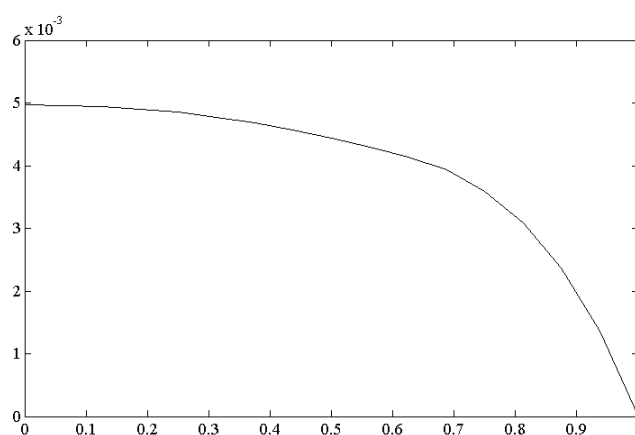
ponderado utilizado para resolver (6.2.1) obtiene resultados en un menor número de iteraciones resolviendo una ecuación en cada paso del algoritmo.

En los siguientes gráficos la solución de (6.2.1) aplicando el método del descenso más profundo ponderado para  $Od = 0, Od = 0.2$  y  $Od = 0.4$



**Figura 6.11:** Velocidad del fluido de Herschel-Bulkley para  $n = 0.5$

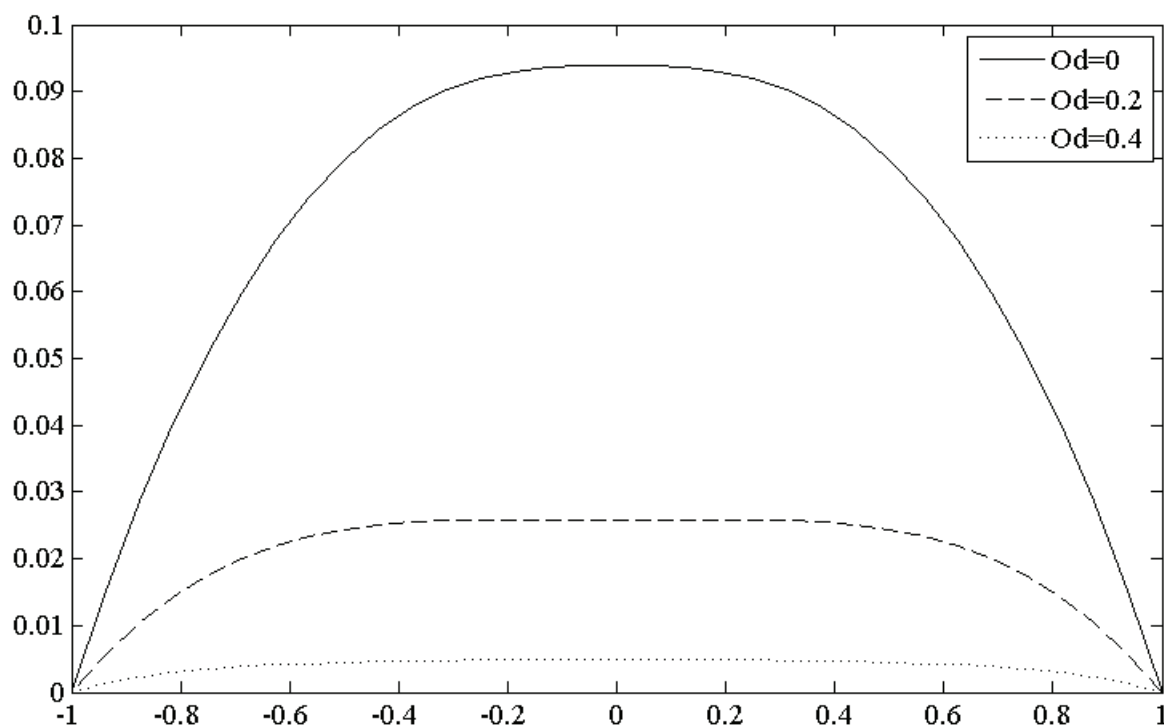
El gráfico (6.11a) es la representación de la solución del problema (6.2.1) cuando  $Od = 0$ , que es el problema del p-Laplaciano (3.7) visto en el capítulo 3. los gráficos (6.11b) y (6.11c) representan la velocidad de un fluido de Herschel-Bulkley en una tubería con número de Oldroyd  $Od = 0.2$  y  $Od = 0.4$  respectivamente.

(a)  $Od = 0$ (b)  $Od = 0.2$ (c)  $Od = 0.4$ 

**Figura 6.12:** Velocidad de los fluidos de Herschel-Bulkley a lo largo del radio de la malla para  $n = 0.5$

En la figura (6.12a) podemos ver la solución a lo largo del radio de la curva cunado  $Od = 0$ , mientras que (6.12b) y (6.12c) son las velocidades (6.11b) y (6.11c) de los fluidos de Herschel-Bulkley en el radio de una tubería.

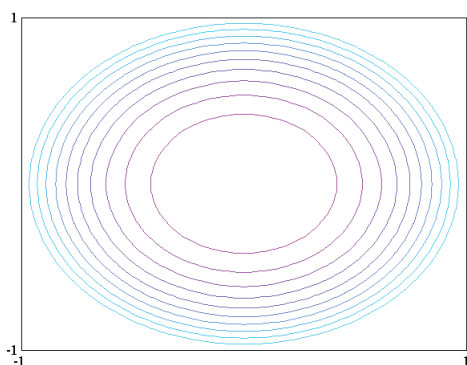
Para comparar los resultados anteriores, presentaremos el siguiente gráfico para  $n = 0.5$ .



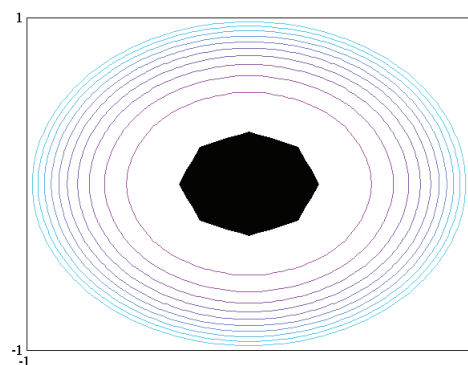
**Figura 6.13:** Gráfico valor absoluto.  
Elaboración propia.

Notemos la diferencia entre las curvas de la velocidad cuando  $Od$  aumenta. En el caso de  $Od = 0$  la ecuación (6.2.1) se reduce al caso del p-Laplaciano y la curva del resultado es una curva con punto máximo mayor casos de  $Od = 0.2$  y  $Od = 0.4$ .

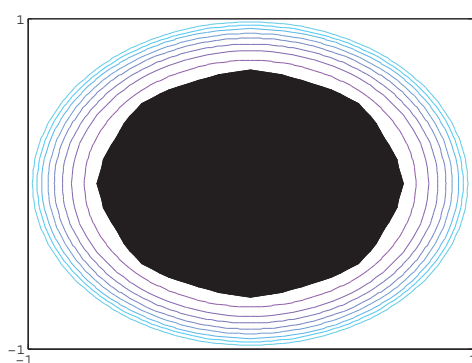
Por otro lado, las curvas para  $Od = 0.2$  y  $Od = 0$  que la velocidad del fluido de Herschel-Bulkley disminuye cuando incrementa  $Od$ , esta reducción en la velocidad cuando  $Od$  aumenta se debe a que el límite elástico aumenta impidiendo el movimiento del fluido.



(a) Gráfico 1



(b) Gráfico 2

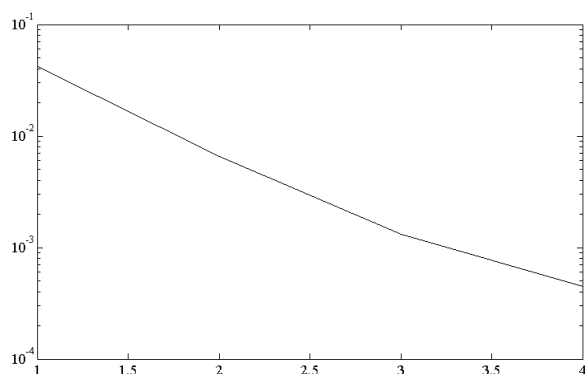


(c) Gráfico 3

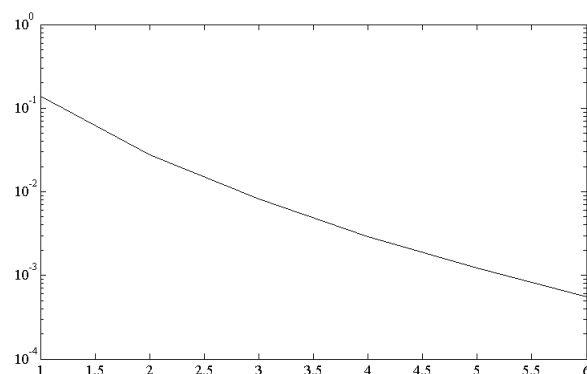
**Figura 6.14:** Primer ejemplo

En los gráficos (6.14a)-(6.14c), presentamos las zonas activas e inactivas del fluido para cada  $Od$ . En (6.14a) vemos que el gráfico no presenta zonas inactivas, porque  $Od$  igual a cero. Mientras que en los gráficos (6.14b) y (6.14c), podemos ver que existen zonas inactivas que aumentan cuando  $Od$  es mayor, físicamente esto se explica a que el aumento del número de Oldroyd es proporcional al incremento del límite elástico.

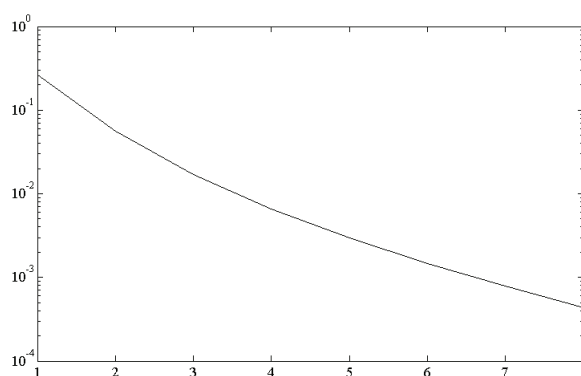
En estos gráficos se puede apreciar el *error* de aproximación del algoritmo en cada iteración.



(a) *error* cuando  $Od = 0$



(b) *error* cuando  $Od = 0.2$



(c) *error* cuando  $Od = 0.4$

**Figura 6.15:** *error* para el algoritmo del descenso más profundo preconditionado cuando  $n = 0.5$

En las curvas que representan el error de aproximación del algoritmos del descenso más profundo ponderado para  $n = 0.5$  y  $Od$  distintos, podemos notar que el error desciende en cada iteración de forma aproximadamente lineal. Podemos ver que el método ponderado  $\epsilon$  disminuye las oscilaciones del error en cada iteración.

### 6.2.2 EXPERIMENTO 5

En este ejemplo tomaremos  $n = 9$ , en la ecuación

$$\min_{y \in S^h} J(y)$$

con

$$J_\gamma(y) = \frac{1}{n+1} \int_{\Omega} |\nabla y|^{10} dx + \int_{\Omega} \psi_\gamma(\nabla y) dx - c \int_{\Omega} y dx \quad (6.8)$$

y su dirección de descenso definida en (5.76) para este caso es

$$\int_{\Omega} (\epsilon + (\nabla y)^8) \nabla w_n \nabla v = - \int_{\Omega} |\nabla y|^8 (\nabla y, \nabla v) dx - Od \int_{\Omega} \frac{(\nabla y, \nabla v)}{\max(Od, |\nabla y|)} dx + c \int_{\Omega} v dx$$

y definimos *error* para el algoritmo iterativo como

$$error = \left| \int_{\Omega} |\nabla y|^8 (\nabla y, \nabla v) dx + Od \int_{\Omega} \frac{(\nabla y, \nabla v)}{\max(Od, |\nabla y|)} dx - c \int_{\Omega} v dx \right| \quad (6.9)$$

Para determinar la longitud del paso  $\alpha$  con la condición de Armijo descrita en (5.86), con las constantes fijadas al principio de este capítulo y los valores iniciales dados por (6.2.1), además asignaremos los valores de  $Od = 0$ ,  $Od = 0.2$  y  $Od = 0.4$  en (6.2.1).

Al aplicar el algoritmo obtuvimos los siguientes resultados

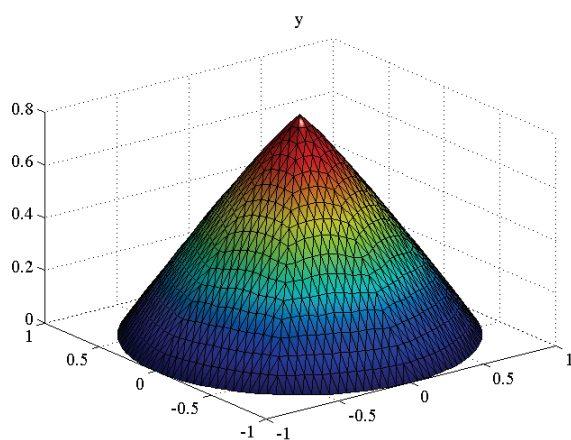
Od	$ J'(y)v $	$A_\gamma$	$I_\gamma$	Número de iteraciones	Tiempo
0	$8.0783 \times 10^{-5}$	2048	0	9	15.51 s
0.2	$1.8733 \times 10^{-4}$	2040	8	5	10.39 s
0.4	$6.3731 \times 10^{-4}$	1536	512	10	18.89 s

Donde  $|J'(y)v|$  es el error dado en (6.9) y  $A_\gamma$  es el número de activos.

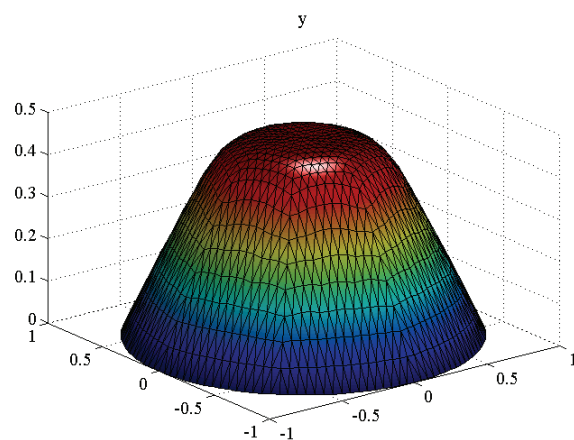
En la tabla se muestra que el algoritmo necesita pocas iteraciones para converger. También en este ejemplo se puede ver que para  $Od = 0$  el número de iteraciones es mayor que para  $Od = 0.2$ , lo que muestra que el aumento de  $Od$  no está relacionado al aumento de iteraciones del algoritmo.



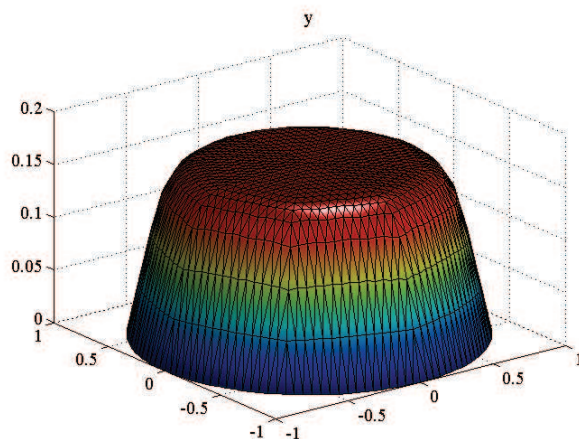
Estas curvas regulares representan la velocidad del fluido de Herschel-Bulkley en una tubería.



(a)  $Od = 0$



(b)  $Od = 0.2$

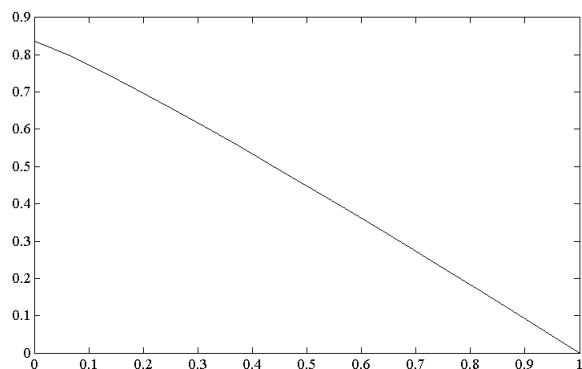
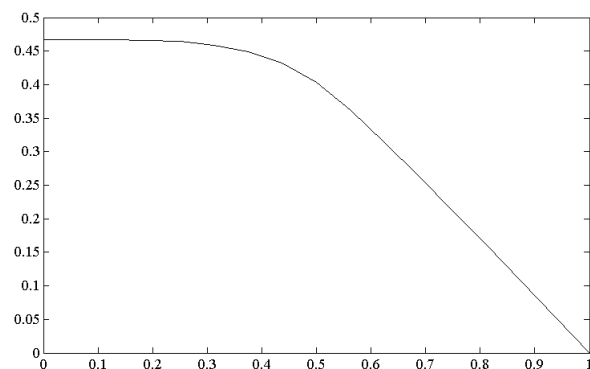
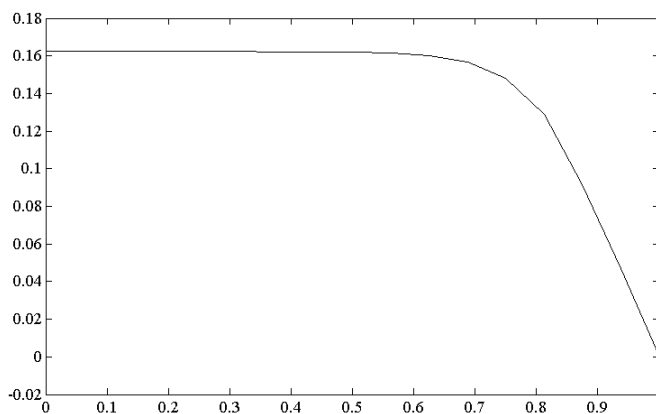


(c)  $Od = 0.4$

**Figura 6.16:** Velocidad de los fluidos de Herschel-Bulkley para  $n = 9$

La gráfica (6.16a) representa la solución de (6.2.2) cuando  $Od = 0$ , mientras que (6.16b) y (6.16c) representan la velocidad del fluido de Herschel-Bulkley en una tubería para  $Od = 0.2$  y  $Od = 0.4$  respectivamente.

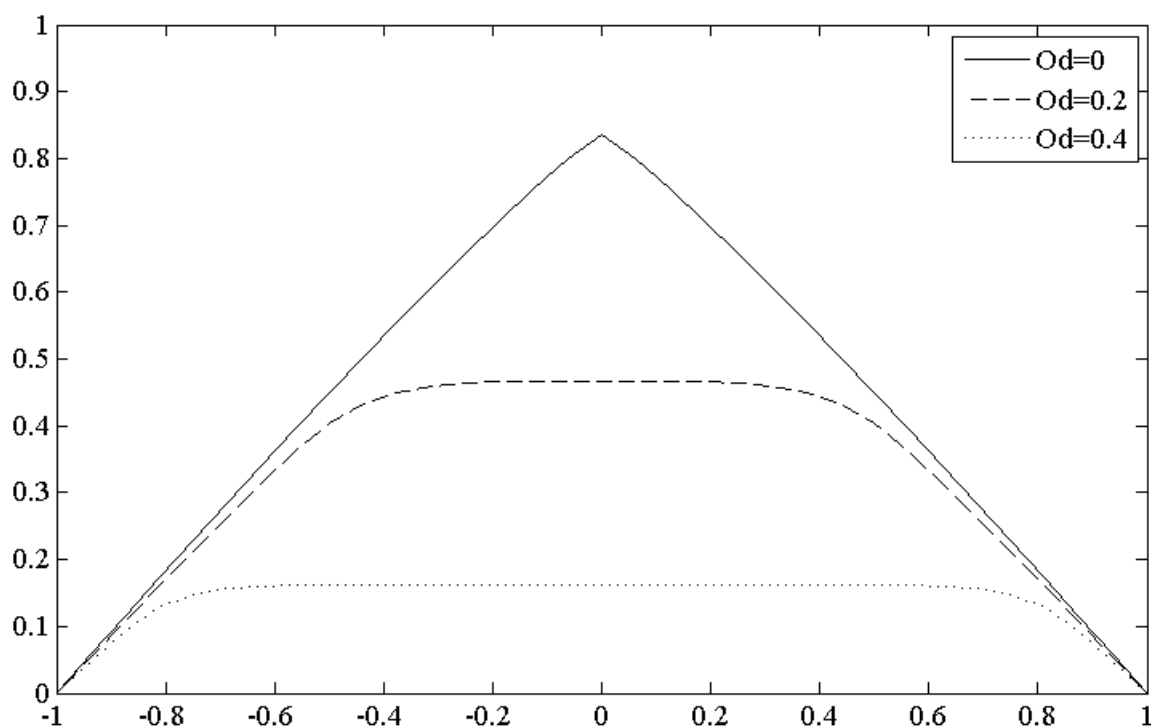
Los siguientes gráficos representan la velocidad  $y$  obtenida para distintos  $Od$  a lo largo del radio de la malla circular.

(a)  $Od = 0$ (b)  $Od = 0.2$ (c)  $Od = 0.4$ 

**Figura 6.17:** Velocidad a lo largo del radio de la malla para  $n = 9$

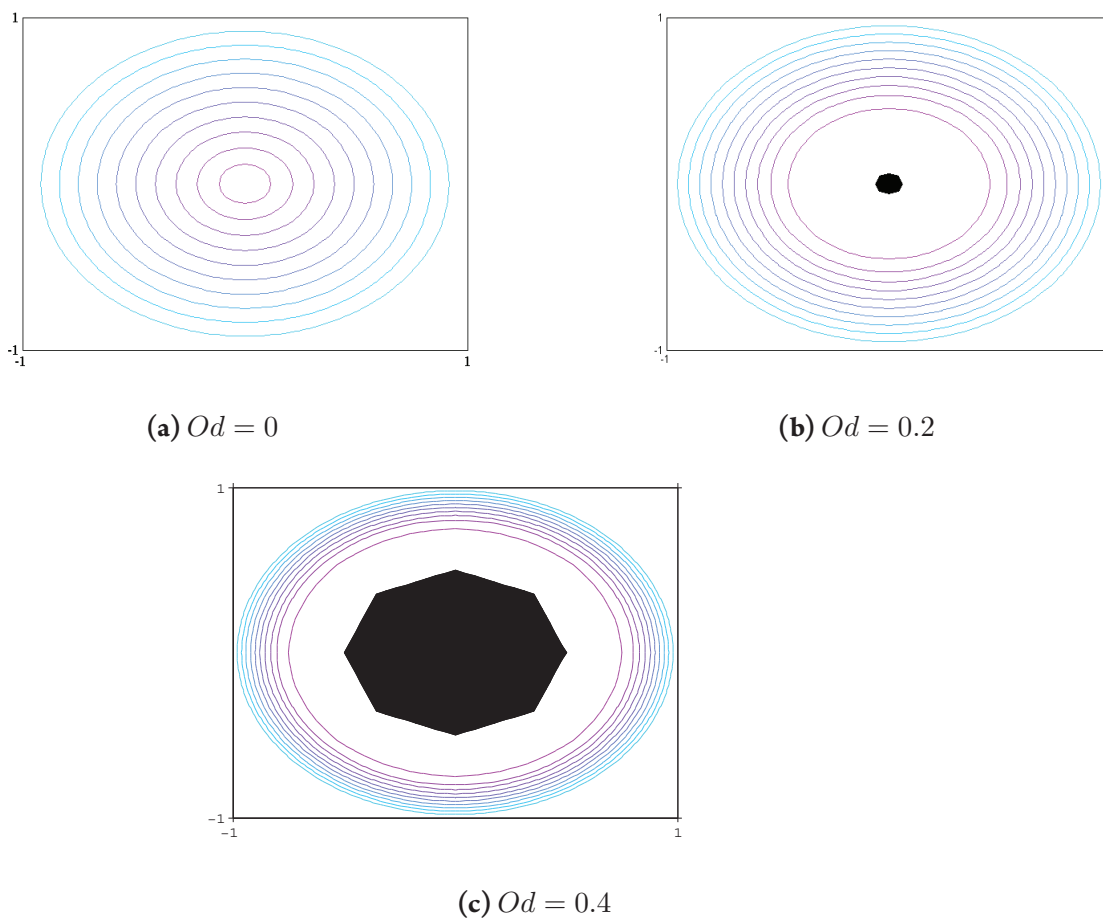
En (6.17a)-(6.17c) donde observar de forma más clara los valores que alcanza (6.16a), y las velocidades del fluido de Herschel-Bulkley en (6.16b) y (6.16c).

Para ver la diferencia entre las curvas (6.16a)-(6.16c) presentamos el siguiente gráfico, que contiene los casos  $Od = 0$ ,  $Od = 0.2$  y  $Od = 0.4$  a lo largo del diámetro de la tubería.



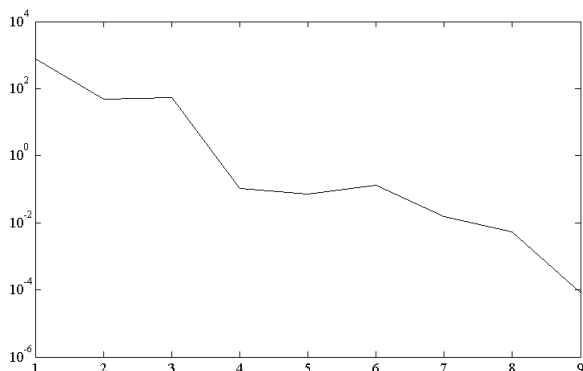
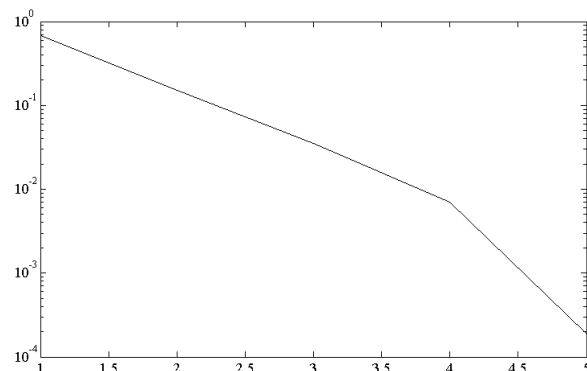
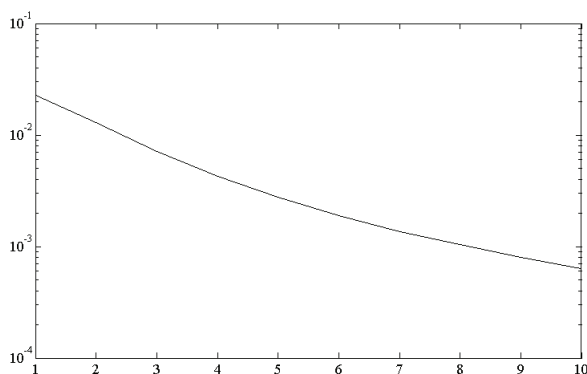
**Figura 6.18:** Velocidades para distintos  $Od$ , a lo largo del diámetro de la malla

En esta gráfica vemos la diferencia entre los resultados cuando  $Od$  es distinto, cuando  $Od = 0$  se tiene que la ecuación (5.58), se reduce a la ecuación del p-Laplaciano vista en el capítulo 3 (3.7), para este caso la velocidad es mayor por que  $Od$  tiene una relación proporcional al límite elástico. Para el caso de  $Od = 0.2$  y  $Od = 0.4$  se puede notar el cambio de forma de la curva en la parte superior, este cambio se debe al aumento de  $Od$  implica un aumento del límite elástico o resistencia del material al movimiento con la misma fuerza aplicada.



**Figura 6.19:** Curvas de nivel y zonas activas e inactivas del fluido

En estas figuras podemos ver las curvas de (6.16a)-(6.16c) velocidad para cada  $Od$  cuando  $n = 0.75$ . Además las zonas inactivas están representadas en las áreas negras. Cuando  $Od = 0$  podemos ver que la gráfica resultante no posee zona inactiva, esto se relaciona con la anulación de el número de Oldroyd en la ecuación (6.1), así la gráfica (6.19a) representa la solución del problema del p-Laplaciano para  $n = 9$ . En los gráficos (6.19b) y (6.19c) por otro lado se ven diferenciadas las áreas activas e inactivas, comparando los dos gráficos podemos ver el aumento del área inactiva cuando el número de Oldroyd incrementa, es mayor el límite elástico es mayor y tensor de corte disminuye en el centro de la tubería.

(a)  $Od = 0$ (b)  $Od = 0.2$ (c)  $Od = 0.4$ **Figura 6.20:** Error de aproximación

En las curvas que representan el error de aproximación del algoritmo del descenso más profundo ponderado para  $n = 0.9$  distintos, podemos notar que el error desciende en cada iteración de forma aproximadamente lineal para los caso cuando  $Od = 0.2$  y  $Od = 0.4$ , mientras que en el gráfico (6.20a) podemos ver que el error de aproximación oscila en varias iteraciones, un comportamiento esperado en la aplicación del método del descenso más profundo.

## 6.2.3 EXPERIMENTO 6

En este experimento mostraremos los resultados en cada iteración cuando  $n = 0.75$  en la ecuación (5.58) y el número de Oldroyd es constante igual a  $Od = 0.2$  y  $\epsilon = 1 \times 10^{-4}$  y el criterio de parada es  $error < 2 \times 10^{-5}$

iteración	$ J'(y)v $	$A_\gamma$	$A_\gamma$	$\nu^k$
1	0.0961	2048	0	0.0961
2	0.0367	2048	0	0.3818
3	0.0157	2040	8	0.4277
4	0.0073	2040	8	0.4649
5	0.0037	2016	32	0.5068
6	0.0020	2016	32	0.5405
7	0.0011	1976	72	0.5500
8	$6.3768 \times 10^{-4}$	1976	72	0.5790
9	$3.8511 \times 10^{-4}$	1964	84	0.6000
10	$2.3813 \times 10^{-4}$	1920	128	0.6183
11	$1.5132 \times 10^{-4}$	1920	128	0.6354
12	$9.9825 \times 10^{-5}$	1864	184	0.6596
13	$6.7944 \times 10^{-5}$	1864	184	0.6866
14	$4.6335 \times 10^{-5}$	1848	200	0.6818
15	$3.5914 \times 10^{-5}$	1848	200	0.7758
16	$3.1052 \times 10^{-5}$	1848	200	0.7750
17	$1.6566 \times 10^{-5}$	1848	200	0.5334

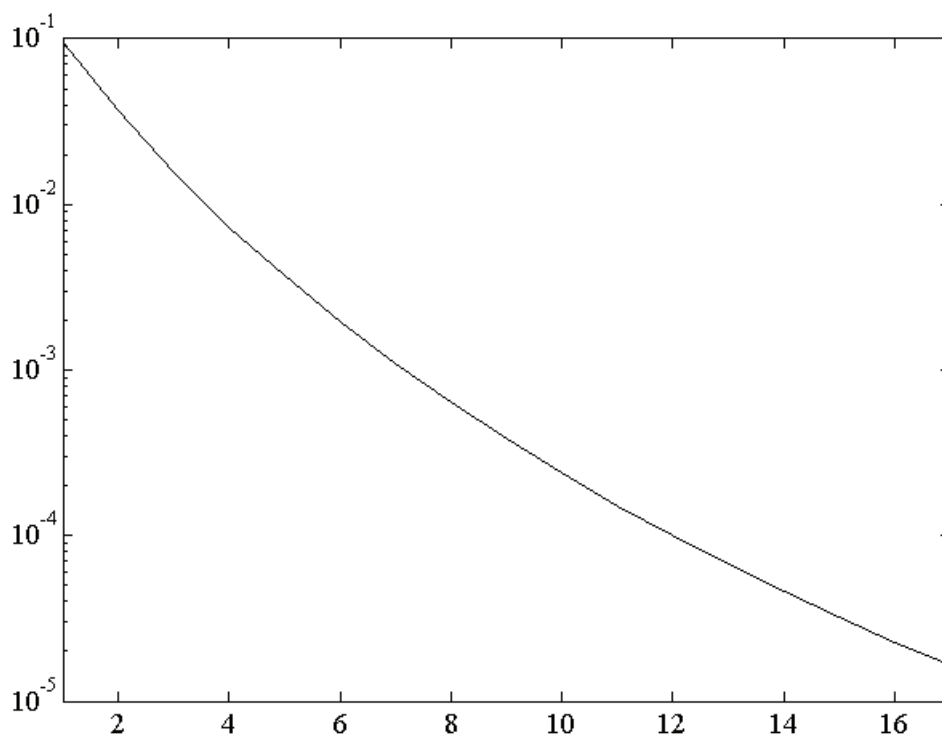
**Cuadro 6.3:** Resultados para  $Od = 0.2$

donde  $\nu^k$  está definida como

$$\nu^k = \frac{|J'(y_k)v|}{|J'(y_{k-1})v|} \quad (6.10)$$

$\nu^k$  muestra como evoluciona el error entre dos iteraciones. Cuando  $\nu^k$  es menor que 1 hay una disminución del error en la  $k$ -ésima iteración comparado con el error de la iteración  $k - 1$ , y viceversa cuando  $\nu^k$  es mayor que 1.

En la tabla (6.3) también podemos encontrar  $A_\gamma$  es el número de activos en cada iteración y como el número de activos se estabiliza en las últimas iteraciones del algoritmo, además podemos ver la evolución el error en cada iteración que se de manera gráfica esta representada en el siguiente figura.



**Figura 6.21:** error para  $n = 0.75$  y  $Od = 0.2$  para el método ponderado

Para el caso cuando  $n = 0.75$  y  $Od = 0.2$  en (5.58), mostraremos en la siguiente tabla los resultados cuando variamos  $\epsilon$  en la dirección de descenso (5.76).

$\epsilon$	$ J'(y)v $	$A_\gamma$	$I_\gamma$	Número de iteraciones	$\nu^k$
0.1	$4.4606 \times 10^{-4}$	1976	72	8	0.6049
0.01	$6.4710 \times 10^{-4}$	1976	72	8	0.5882
0.001	$6.3853 \times 10^{-4}$	1976	72	8	0.5804
0.0001	$6.3768 \times 10^{-4}$	1976	72	8	0.5797
0.00001	$6.3759 \times 10^{-4}$	1976	72	8	0.5796
0.000001	$6.3759 \times 10^{-4}$	1976	72	8	0.5796
0.0000001	$6.3759 \times 10^{-4}$	1976	72	8	0.5796

**Cuadro 6.4:** Resultados para  $Od = 0.2$

Los resultados de esta tabla muestran como el número de iteraciones y el número de activos  $A_\gamma$  permanecen constantes cuando  $\epsilon$  varia. Además podemos notar como el error dado por  $|J'(y)v|$  no tiene grandes variaciones cuando variamos  $\epsilon$ , y como el error se estabiliza cuando  $\epsilon = 1 \times 10^{-4}$ .

#### 6.2.4 COMPARACIÓN DEL MÉTODO DEL DESCENSO MÁS PROFUNDO PRECONDICIONADO Y PONDERADO

Para comparar los métodos del descenso más profundo preconditionado y ponderado tomaremos el caso particular  $n = 0.75$  en el (5.58) se transforma en

$$\min_{y \in S^h} J(y)$$

con

$$J_\gamma(y) = \frac{1}{n+1} \int_{\Omega} |\nabla y|^{0.75+1} dx + \int_{\Omega} \psi_\gamma(\nabla y) dx - c \int_{\Omega} y dx \quad (6.11)$$

para los dos algoritmos definimos el error como:

$$error = \left| \int_{\Omega} |\nabla y|^{0.75-1} (\nabla y, \nabla v) dx + Od \int_{\Omega} \frac{(\nabla y, \nabla v)}{\max(Od, |\nabla y|)} dx - c \int_{\Omega} v dx \right| \quad (6.12)$$

La dirección de descenso para el caso del método del descenso preconditionado está dada en la ecuación (6.1.1) y es

$$\int_{\Omega} \nabla w_n \nabla v = - \int_{\Omega} |\nabla y|^{0.75-1} (\nabla y, \nabla v) dx - Od \int_{\Omega} \frac{(\nabla y, \nabla v)}{\max(Od, |\nabla y|)} dx + c \int_{\Omega} v dx$$

y la dirección para el método del descenso más profundo ponderado se obtiene de :

$$\int_{\Omega} (\epsilon + (\nabla y)^{0.75-1}) \nabla w_n \nabla v = - \int_{\Omega} |\nabla y|^{0.75-1} (\nabla y, \nabla v) dx - Od \int_{\Omega} \frac{(\nabla y, \nabla v)}{\max(Od, |\nabla y|)} dx + c \int_{\Omega} v dx$$

con  $\epsilon = 1 \times 10^{-4}$ .

La longitud del paso  $\alpha$  con la condición de Armijo descrita en (5.86) con las constantes fijadas anteriormente en este capítulo. Y el criterio de parada tomado para los experimentos 1,2,4 y 5 e igual a  $error < 7 \times 10^{-4}$ . Al aplicar los algoritmos del descenso más profundo preconditionado y ponderado obtuvimos los resultados presentados en la siguiente tabla.



Método	Número de iteraciones	$ J'(y)v $	$A_\gamma$	$\nu^k$
Precondicionado	2	$6.953 \times 10^{-5}$	2048	0.0434
Ponderado	3	$4.382 \times 10^{-5}$	2048	0.6184

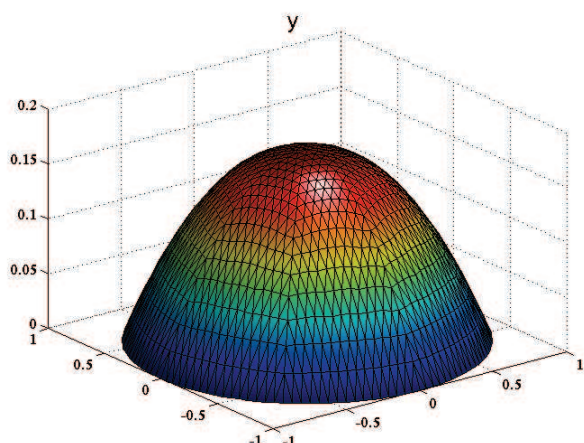
**Cuadro 6.5:** Resultados para  $n = 0.75$  y  $Od = 0$

En esta tabla podemos ver los resultados obtenidos cuando  $n = 0.75$  y  $Od = 0$ . Comparando el número de iteraciones y el número de activos  $A_\gamma$  no hay una diferencia significativa entre el método precondicionado y ponderado. El error tiene una diferencia de  $2.571 \times 10^{-5}$  que es despreciable. En las gráficas (6.22)-(6.27) se pueden ver los resultados de la velocidad del fluido en la tubería, la velocidad en el radio de la malla circular y las zonas activas e inactivas obtenidas con los métodos del descenso más profundo precondicionado y ponderado.

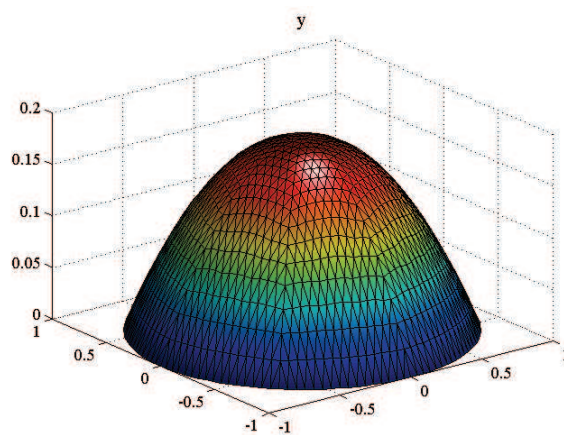
Método	Número de iteraciones	$ J'(y)v $	$A_\gamma$	$\nu^k$
Precondicionado	12	$6.489 \times 10^{-4}$	1808	0.2595
Ponderado	8	$6.3768 \times 10^{-4}$	1976	0.3954

**Cuadro 6.6:** Resultados para  $n = 0.75$  y  $Od = 0.2$

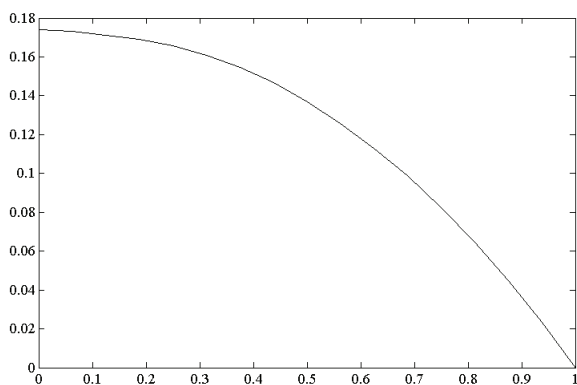
En la tabla (6.6) tenemos los resultados obtenidos cuando  $n = 0.75$  y  $Od = 0.2$ . Comparando el número de iteraciones podemos ver que el método ponderado tiene la mitad de iteraciones que el método del descenso precondicionado. Por otro lado el número de activos  $A_\gamma$  no hay una diferencia significativa entre el método precondicionado y ponderado. Y el error tiene una diferencia de  $2.535 \times 10^{-4}$  que no es significativo. En las gráficas (6.28)-(6.33) se pueden ver los resultados de la velocidad del fluido en la tubería, la velocidad en el radio de la malla circular y las zonas activas e inactivas obtenidas con los métodos del descenso más profundo precondicionado y ponderado.



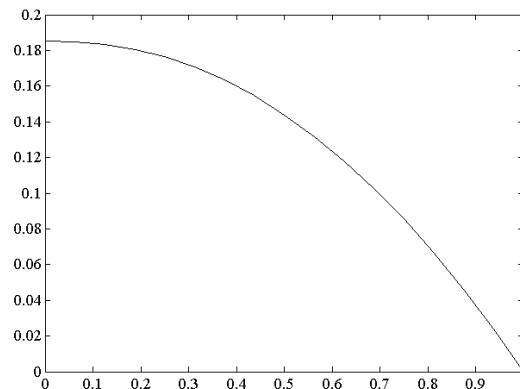
**Figura 6.22:** Velocidad para  $n = 0.75$  y  $Od = 0$  obtenido con el método preconditionado



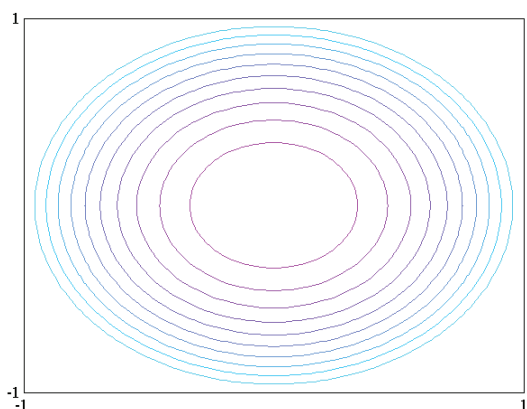
**Figura 6.23:** Velocidad para  $n = 0.75$  y  $Od = 0$  obtenido con el método ponderado



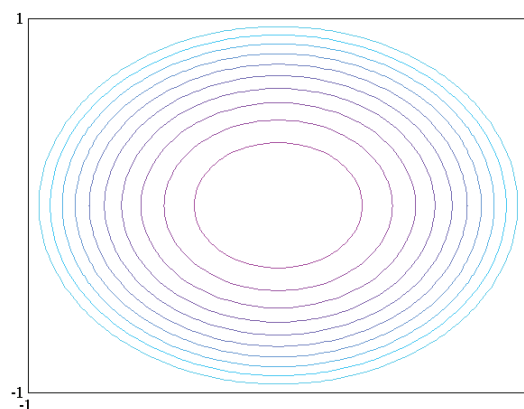
**Figura 6.24:** Velocidad a lo largo del radio de la malla obtenido con método preconditionado para  $n = 0.75$  y  $Od = 0$



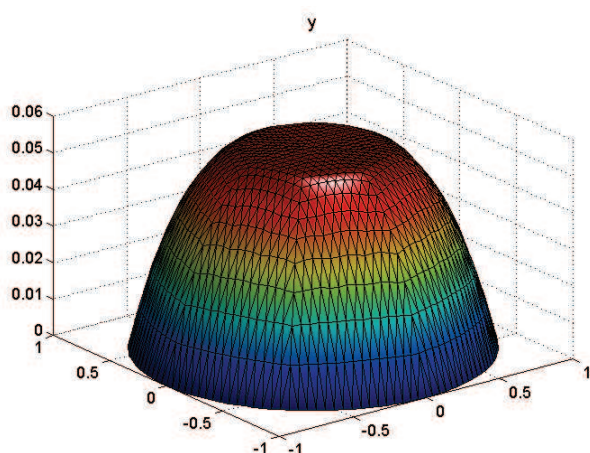
**Figura 6.25:** Velocidad a lo largo del radio de la malla obtenido con método ponderado para  $n = 0.75$  y  $Od = 0$



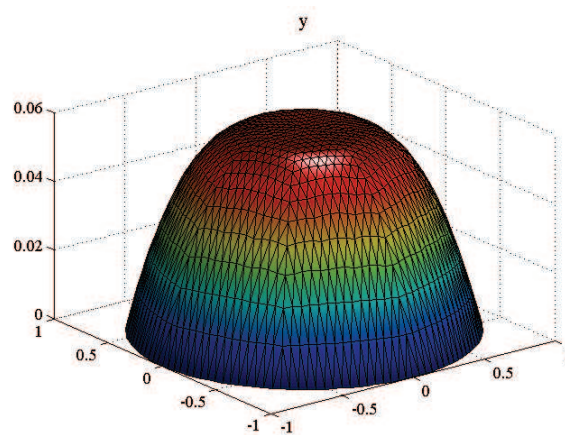
**Figura 6.26:** Zonas activas  $A_\gamma$  (parte blanca) obtenidos con el método preconditionado para  $n = 0.75$  y  $Od = 0$



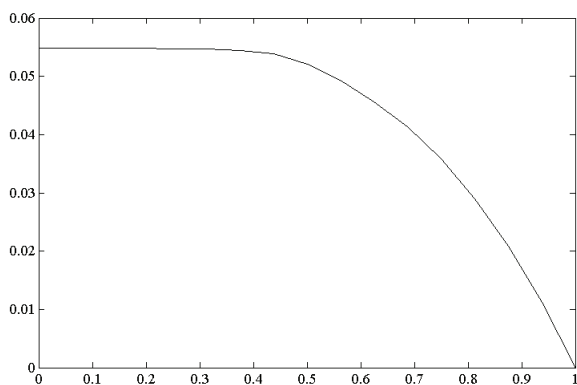
**Figura 6.27:** Zonas activas  $A_\gamma$  (parte blanca) obtenidos con el método ponderado para  $n = 0.75$  y  $Od = 0$



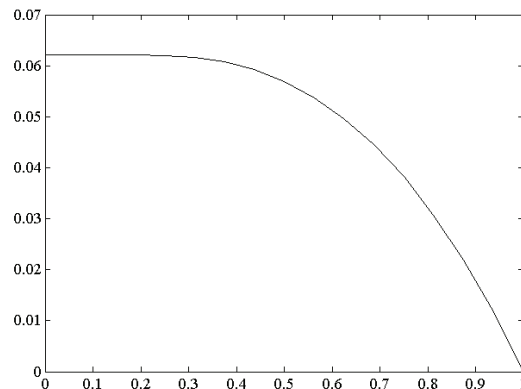
**Figura 6.28:** Velocidad para  $n = 0.75$  y  $Od = 0.2$  obtenido con el método preconditionado



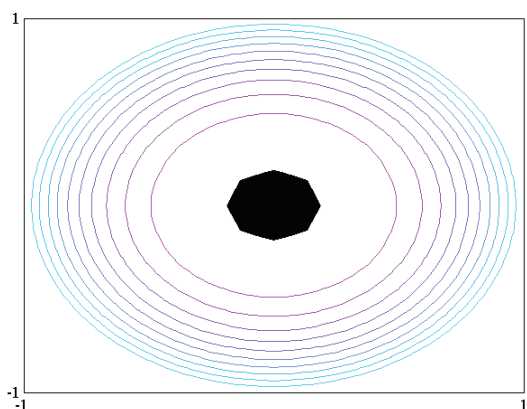
**Figura 6.29:** Velocidad para  $n = 0.75$  y  $Od = 0.2$  obtenido con el método ponderado



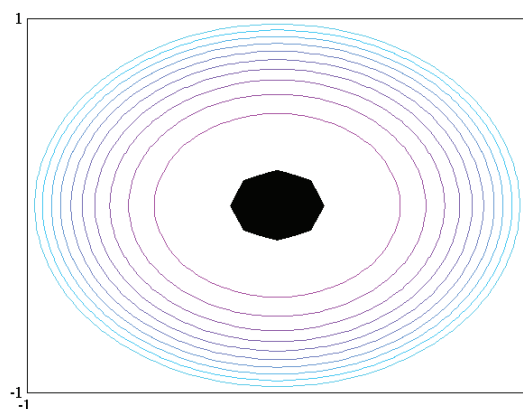
**Figura 6.30:** Velocidad a lo largo del radio de la malla obtenido con método preconditionado para  $n = 0.75$  y  $Od = 0.2$



**Figura 6.31:** Velocidad a lo largo del radio de la malla obtenido con método ponderado para  $n = 0.75$  y  $Od = 0.2$



**Figura 6.32:** Zonas activas  $A_\gamma$  (blanco) e inactivas  $I_\gamma$  (negro) obtenidos con el método preconditionado para  $n = 0.75$  y  $Od = 0.2$



**Figura 6.33:** Zonas activas  $A_\gamma$  (blanco) e inactivas  $I_\gamma$  (negro) obtenidos con el método ponderado para  $n = 0.75$  y  $Od = 0.2$

*‘Mathematics is one of the surest ways for a man to feel the power of thought and the magic of the spirit. Mathematics is one of the eternal truths and, as such, raises the spirit to the same level on which we feel the presence of God.’*

Malba Tahan, The Man Who Counted

# 7

## Conclusiones

El objetivo principal de esta tesis era encontrar un método eficiente de simulación numérica del flujo por cambio de presión y sin rozamiento de los fluidos de Herschel-Bulkley en una tubería de sección circular. Al aplicar el método del descenso más profundo al problema de minimización que describe el movimiento de este tipo de materiales podemos comparar los resultados obtenidos al aplicar el algoritmo de resolución en los obtenidos en [Huilgol and You, 2005].

En el texto de [Huilgol and You, 2005] los autores presentan el modelo de Herschel-Bulkley dado en (4.15), y su solución numérica. El problema de Herschel-Bulkley es discretizado con el método de elementos finitos en una malla circular y la aproximación de la velocidad del fluido se calcula empleando el método de Lagrangianos extendidos. Y se presentan los ejemplos numéricos con  $n = 0.5$  y  $n = 0.75$  en (4.15), que corresponden a los experimentos 1 y 4 de este documento. Tomando el experimento 4 de este texto cuando  $n = 0.5$  podemos ver que el número de iteraciones con el método del descenso más profundo ponderado es menor al obtenido en el texto de [Huilgol and You, 2005], y al incrementar el valor del número de Oldroyd  $Od$  no hay un incremento significativo en el número de iteraciones, mientras que en [Huilgol and You, 2005] se evidencia lo contrario. Para el caso de  $n = 0.75$  dado en el experimento 1 de este documento, en los resultados obtenidos comparados con el texto de [Huilgol and You, 2005] se evidencia una reducción del número de iteraciones al aplicar el método del descenso más profundo preconditionado que es más notoria cuando  $Od$  es mayor.

Además tenemos que destacar que el algoritmo del descenso más profundo ponderado y precondicionado realiza el cálculo de una ecuación en cada iteración, lo que reduce el costo computacional. Considerando que el número de iteraciones se reduce y se calcula una ecuación aplicando el método del descenso más profundo el tiempo de cálculo disminuye.

Comparando el método del descenso más profundo ponderado y precondicionado obtuvimos resultados similares en el cálculo de la velocidad del fluido cuando  $n = 0.75$ . En las tablas (6.5) y (6.6) podemos ver que el número de iteraciones semejante en ambos casos al igual que en el número de activos.

Se recomienda experimentar con fenómenos similares con el método del descenso más profundo utilizando distintos métodos para hallar la longitud del paso de descenso. Los métodos de búsqueda lineal no-monótonos son una alternativa interesante que se puede aplicar al problema de Herschel-Bulkley y problemas similares.

## REFERENCIAS

- Alberty, J., Carstensen, C., and Funken, S. A. (1999). Remarks around 50 lines of Matlab: short finite element implementation. *Numer. Algorithms*, 20(2-3):117–137.
- Alexandrou, A., Le Menn, P., Georgiou, G., and Entov, V. (2003). Flow instabilities of herschel-bulkley fluids. *Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 116:19–32.
- Barrett, J. W. and Liu, W. B. (1993). Finite element approximation of the  $p$ -Laplacian. *Math. Comp.*, 61(204):523–537.
- Bermejo, R. and Infante, J.-A. (2000). A multigrid algorithm for the  $p$ -Laplacian. *SIAM J. Sci. Comput.*, 21(5):1774–1789 (electronic). Iterative methods for solving systems of algebraic equations (Copper Mountain, CO, 1998).
- Boger, D. and Halmos, A. (1981). Non-newtonian flow-characterization of fluid behavior.
- Boyd, S. and Vandenberghe, L. (2009). *Convex Optimization*. Cambridge University Press.
- Brézis, H. (1984). *Análisis funcional Teoría y aplicaciones*. Alianza Editorial, Madrid.
- Casas, E. and Fernández, L. A. (1993). Distributed control of systems governed by a general class of quasilinear elliptic equations. *Journal of differential equations*, 104(1):20–47.
- Chamorro, D. (2010). *Espacios de Lebesgue y de Lorentz*. Escuela Politécnica Nacional.
- Chorin, A. J. and Marsden, J. E. (1993). *A mathematical introduction to fluid mechanics*, volume 4 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer-Verlag, New York, third edition.
- De Los Reyes, J. C. (2012). Numerical pde-constrained optimization. pages 1–36.
- De los Reyes, J. C. (2012). Optimization of mixed variational inequalities arising in flow of viscoplastic materials. *Comput. Optim. Appl.*, 52(3):757–784.
- Glowinski, R. and Marrocco, A. (1975). Sur l’approximation, par éléments finis d’ordre un, et la résolution, par pénalisation-dualité, d’une classe de problèmes de Dirichlet non linéaires. *Rev. Française Automat. Informat. Recherche Opérationnelle RAIRO Analyse Numérique*, 9(R-2):41–76.
- González Andrade, S. (2008). Semismooth newton and path following methods for the numerical simulation of bingham fluids. pages 33–50.
- Herschel, W. and Bulkley, R. (1926). Konsistenzmessungen von gummi-benzollösungen. *Kolloid-Zeitschrift*, 39(4):291–300.

- Huang, Y., Li, R., and Liu, W. (2007). Preconditioned descent algorithms for  $p$ -Laplacian. *Journal of Scientific Computing*, 32(2):343–371.
- Huilgol, R. R. and You, Z. (2005). Application of the augmented lagrangian method to steady pipe flows of bingham, casson and herschel-bulkley fluids. *Journal of non-newtonian fluid mechanics*, 128(2):126–143.
- Landau, L. and Lifshitz, E. (1991). *Mecánica de Fluidos*, volume 6. Editorial Reverté S.A., España.
- Lions, J.-L. (1971). *Optimal control of systems governed by partial differential equations*. Translated from the French by S. K. Mitter. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 170. Springer-Verlag, New York.
- Majda, A. (1984). *Compressible fluid flow and systems of conservation laws in several space variables*, volume 53 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York.
- Messelmi, F., Merouani, B., and Bouzeghaya, F. (2010). Steady-state thermal Herschel-Bulkley flow with Tresca's friction law. *Electron. J. Differential Equations*, pages No. 46, 14.
- Miersemanm, E. (2012). Partial diferencial equations, lecture notes. pages 19–32.
- Mitsoulis, E. (2007). Flows of viscoplastic materials: models and computations. *Rheology reviews*, pages 135–178.
- Mitsoulis, E. (2010). Fountain flow of pseudoplastic and viscoplastic fluids. *J. Non-Newtonian Fluid Mech*, 165:45–55.
- Nikitin, K. D., Olshanskii, M. A., Terekhov, K. M., and Vassilevski, Y. V. (2011). A numerical method for the simulation of free surface flows of viscoplastic fluid in 3D. *J. Comput. Math.*, 29(6):605–622.
- Nocedal, J. and Wright, S. J. (1999). *Numerical optimization*. Springer Series in Operations Research. Springer-Verlag, New York.
- Peral, I. (1998). Curso de : Métodos variacionales y ecuaciones en derivadas parciales. pages 7–23.
- Quarteroni, A., Sacco, R., and Saleri, F. (2007). *Numerical mathematics*, volume 37 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, second edition.
- Quoc Hung, N. and Ngoc-Diep, N. (2012). Incompressible non-newtonian fluid flows. pages 47–56.
- Sankad, G. and Radhakrishnamacharya, G. (2006). Influence of wall properties on the peristaltic motion of a herschel-bulkley fluid in a channel. *ARPJ Journal of Engineering and Applied Sciences*, 4.
- Saramito, P. (2009). A new elastoviscoplastic model based on the herschel–bulkley viscoplastic model. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 158(1):154–161.
- Sayed-Ahmed, M., Saif-Elyazal, A., and Iskander, L. (2009). Laminar flow and heat transfer of herschel-bulkley fluids in rectangular duct, finite-element analysis. *Tamkang Journal of Science and Engineering*, 12(1):99–107.

Ulbrich, M. (2002). Nonsmooth newton-like methods of variational inequalities and constrained optimization problems in functions spaces.

Zhou, G., Huang, Y., and Feng, C. (2005). Preconditioned hybrid conjugate gradient algorithm for  $p$ -Laplacian. *Int. J. Numer. Anal. Model.*, 2(suppl.):123–130.